



Universidad del Valle

Desarrollo y evaluación de técnicas de control no lineal para el sistema de control de actitud de un CubeSat en órbita

(Tesis de Investigación)

Ernesto David Cortés García

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica
Cali, Colombia
2022

Desarrollo y evaluación de técnicas de control no lineal para el sistema de control de actitud de un CubeSat en órbita

(Tesis de Investigación)

Ernesto David Cortés García

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería Aeroespacial

Director:
PhD. Germán Wedge Rodríguez Pirateque
Co-director:
Dr-Ing. Esteban Rosero

Línea de Investigación:
Control y Navegación Satelital

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica
Cali, Colombia
2022

生きたい

Quiero dedicar esta investigación a mi comunidad afrocolombiana, ya que son base de mi identidad, mi motivación para transformar nuestros entornos.

Agradecimientos

Quiero agradecer inmensamente a mis padres quienes me apoyaron en todo momento detrás de este sueño. Agradezco a mi red de apoyo Las Titánicas por estar presentes cuando más les necesitaba. Agradezco a mis amistades más cercanas por animarme en todo momento, en especial a Julián Medina por toda su paciencia durante estos dos años. A la Universidad del Valle por contribuir a la construcción del aeroespacio del país. A mi director Germán Rodríguez y co-director Esteban Rosero por toda la guía y sabiduría transmitida y por creer en mis capacidades.

Resumen

Los nanosatélites, en especial los CubeSats, representan una herramienta de bajo costo para el estudio, interpretación y diseño de los módulos satelitales y sus factores asociados. Con la llegada de los CubeSats a la industria aeroespacial, existe un aumento en el desarrollo y ejecución de misiones satelitales trayendo consigo las problemáticas características de cada subsistema satelital. Particularmente para el subsistema de determinación y control de actitud (ADCS), las problemáticas del sistema radican en el alto grado de no linealidad del modelo dinámico satelital y las perturbaciones del entorno orbital. La cinética contiene no linealidades algebraicas de segundo orden por parte de la velocidad angular; por otro lado, dependiendo de las coordenadas de actitud en las que se describa la orientación del satélite, la cinemática puede contener no linealidades algebraicas y/o trigonométricas y conllevar a singularidades geométricas o indeterminaciones. Las perturbaciones a su vez afectan el movimiento rotacional del satélite. Estas problemáticas presentes en el modelo dinámico (cinético y cinemático) afectan el desarrollo de los controladores, dado que complican la implementación de las leyes de control, limitan el rango de operación del satélite y requieren de técnicas para el rechazo de perturbaciones. Esta investigación aborda el desarrollo de técnicas control de actitud para un CubeSat que comprenda las no linealidades del modelo dinámico satelital y rechace perturbaciones del entorno orbital con el fin de realizar maniobras de apuntamiento. En este escenario, el sistema de control de actitud es capaz de realizar: apuntamiento solar, seguimiento a nadir y seguimiento activo terrestre. Mediante el uso de la metodología en V, se abordan los procesos de diseño de misión, los requerimientos para el subsistema, el diseño e implementación de la dinámica orbital, satelital y los controladores y por último, la evaluación de los controladores y verificación del cumplimiento de los requerimientos. La trayectoria satelital se obtiene mediante modelos de propagación orbital; la cinemática y controladores del satélite se implementan con la coordenada de actitud más reciente, los parámetros modificados de Rodrigues (MRP) y su cinética abarca los aspectos no lineales del modelo matemático del CubeSat. Se hace uso de la teoría de Lyapunov como un instrumento matemático para validar la estabilidad en la implementación de dos controladores no lineales: uno por retroalimentación no lineal y otro por modos deslizantes (SMC). Cada controlador efectúa los tres apuntamientos individualmente, las dinámicas orbitales, satelitales y del controlador son integradas en un mismo entorno de simulación. Como resultado del proceso, los controladores no lineales implementados logran realizar maniobras de apuntamiento rechazando las perturbaciones y cumplen los requerimientos establecidos. Finalmente, mediante el análisis del error de apuntamiento se concluye que las técnicas de control no lineal son una opción viable y alterna a los controladores típicamente usados.

Palabras clave: Misión Cubesat, ADCS, Lyapunov, Controlador no lineal, Controlador PD, Controlador por modos deslizantes, MRP, Propagador orbital.

Abstract

Nanosatellites, especially CubeSats, represent a low-cost tool for the study, interpretation and design of satellite modules and their associated factors. With the arrival of CubeSats in the aerospace industry, there has been an increase in the development and execution of satellite missions bringing with it the problematic characteristics of each satellite subsystem. Particularly for the attitude determination and control subsystem (ADCS), the problems of the system lie in the high degree of non-linearity of the satellite dynamic model and the disturbances of the orbital environment. The kinetics contains second-order algebraic non-linearities on the angular velocity side; on the other hand, depending on the attitude coordinates in which the orientation of the satellite is described, the kinematics may contain algebraic and/or trigonometric non-linearities that lead to geometric singularities or indeterminacies. The disturbances affect the rotational motion of the satellite. These problems present in the dynamic model (kinetics and kinematics) influence the development of the controllers, since they complicate the implementation of the control laws, limit the operating range of the satellite and require techniques for the rejection of disturbances. This research deals with the development attitude control techniques for a CubeSat that approaches the non-linearities of the satellite dynamic model and rejects disturbances of the orbital environment in order to perform pointing maneuvers. In this scenario, the attitude control system is able to perform: solar pointing, nadir tracking and active ground tracking. Through the use of the V methodology, the mission design processes, the requirements for the subsystem, the design and implementation of the orbital, satellite dynamics and the controllers are addressed, and finally, the evaluation of the controllers and verification of the accomplishment of the requirements. The satellite trajectory is obtained through orbital propagation models; the satellite's kinematics and controllers are implemented with the most recent attitude coordinate the modified Rodrigues parameters (MRP) and its kinetics cover the non-linear aspects of the CubeSat mathematical model. Lyapunov theory is used as a mathematical tool to validate the stability in the implementation of two non-linear controllers: one by non-linear feedback and the other is the sliding mode controller (SMC). Each controller carry out the three pointing individually, the orbital, satellite and controller dynamics is integrated in the same simulation environment. As a result, the non-linear controllers implemented are able to perform pointing maneuvers rejecting the disturbances and meet the established requirements. Finally, due to the pointing error analysis it is concluded that whether non-linear control techniques are a viable option and an alternative to the controllers typically used.

Keywords: CubeSat mission, ADCS, Lyapunov, Non-linear controller, Linear controller, Sliding Mode Controller, MRP, Orbit propagator.

Contenido

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Tabla de contenido	VII
Lista de figuras	X
Lista de tablas	XIII
1. Introducción y planteamiento del problema	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes del control de orientación en nanosatélites	3
1.3. Misión de ValleSat	5
1.3.1. Planteamiento del problema	6
1.3.2. Justificación del problema	8
1.4. Objetivos	9
1.4.1. Objetivo general	9
1.4.2. Objetivos específicos	9
1.5. Estructura de la tesis	10
1.6. Aportes	11
2. Metodología	12
2.1. Productos esperados	13
2.2. Cronograma	14
2.3. Presupuesto	15
3. Sistema de control de actitud	16
3.1. Dinámica orbital	16
3.1.1. Elementos orbitales	17
3.1.2. Determinación de la posición en el espacio	20
3.1.3. Modelo simplificado de perturbaciones generales (SGP) y segmento de dos líneas (TLE)	21
3.1.4. Marcos de referencia	23

3.2.	Dinámica satelital	28
3.2.1.	Cinemática	28
3.2.2.	Cinética	44
3.3.	Controladores no Lineales	48
3.3.1.	Estabilidad de sistemas no lineales	48
3.3.2.	Lyapunov	49
3.3.3.	Funciones de Lyapunov	50
4.	Diseño de la misión	53
4.1.	Descripción de misión	53
4.2.	Aspectos de simulación de misión	56
4.2.1.	Estados de actitud de la nave	56
4.3.	Escenarios de apuntamiento	56
4.4.	Visión general de la órbita	57
4.5.	Visión general de controladores	58
4.6.	Visión general del sistema ADCS	58
4.7.	Modos del ACS	59
4.7.1.	Inserción Orbital	59
4.7.2.	Detumbling	59
4.7.3.	Nadir	60
4.7.4.	Seguimiento de Objetivo	60
4.7.5.	Solar	60
4.7.6.	Seguro	60
4.8.	Operación de los modos de ACS	60
5.	Requerimientos del ACS	63
5.1.	Requerimientos funcionales del ACS	63
5.2.	Requerimientos operacionales	63
5.2.1.	Inserción Orbital	63
5.2.2.	Detumbling	63
5.2.3.	Nadir	64
5.2.4.	Seguimiento de Objetivo	65
5.2.5.	Solar	66
5.2.6.	Seguro	66
6.	Entorno de simulación	67
6.1.	Modelado orbital	67
6.2.	Modelado satelital	70
6.2.1.	Cinemática	70
6.2.2.	Cinética	72

6.3.	Modelado: generador de referencias	72
6.3.1.	Apuntamiento Solar	73
6.3.2.	Apuntamiento Nadir	73
6.3.3.	Seguimiento activo	74
6.3.4.	Condiciones de apuntamiento	75
6.4.	Modelado en simulink	77
6.4.1.	Orbital	77
6.4.2.	Generador de referencias	78
6.4.3.	Cálculo del Error	79
6.4.4.	Control	79
6.4.5.	Satélite	79
6.4.6.	Estimador	80
7.	Diseño de controladores y simulación de misión	81
7.1.	Retroalimentación no lineal	81
7.2.	Análisis de estabilidad asintótica	83
7.3.	Controlador por modos deslizantes (SMC)	84
7.4.	Ajuste preliminar de controladores	86
7.4.1.	Simulación controlador retroalimentación no lineal	86
7.4.2.	Simulación controlador lineal	88
7.4.3.	Simulación controlador SMC	89
7.4.4.	Comparación	91
7.5.	Resultados Misión	92
7.5.1.	Controlador no lineal	92
7.5.2.	Controlador lineal	96
7.5.3.	Modos Deslizantes	99
8.	Evaluación de desempeño	103
8.1.	Controlador no lineal	106
8.1.1.	MPE	106
8.1.2.	RPE	107
8.1.3.	PRE	108
8.1.4.	PDE	108
8.1.5.	ISE	109
8.1.6.	Alcance de requerimientos	110
8.2.	Controlador Lineal	111
8.2.1.	MPE	111
8.2.2.	RPE	112
8.2.3.	PRE	113
8.2.4.	PDE	113

8.2.5.	ISE	114
8.2.6.	Alcance de requerimientos	115
8.3.	Controlador SMC	116
8.3.1.	MPE	116
8.3.2.	RPE	117
8.3.3.	PRE	118
8.3.4.	PDE	118
8.3.5.	ISE	119
8.3.6.	Alcance de requerimientos	120
8.4.	Comparación	121
9.	Conclusiones	124
9.1.	Conclusiones	124
9.2.	Trabajo futuro	124
	Bibliografía	126
A.	Anexo: Estándar CubeSat	130
B.	Anexo: Definiciones algebraicas	133
B.1.	Matriz antisimétrica	133
B.1.1.	Adición de rotaciones	134
B.2.	Cambio de marcos de referencia	134
B.3.	Adición de vectores	135
C.	Anexo: Requerimientos comerciales de apuntamiento	136
D.	Anexo: Aspectos diseño de misión	137
D.1.	Configuración de simulación	137
D.1.1.	Parámetros	137
D.2.	Condiciones iniciales	137
D.3.	Controladores	138

Lista de Figuras

1-1. Diagrama de limitación de la problemática.	7
2-1. Diagrama de flujo de actividades y su relación con los objetivos específicos.	12
3-1. Diagrama de control del ADCS.	16
3-2. Descripción geométrica del movimiento de m_2 respecto a m_1	17
3-3. Ubicación del vector de posición $\mathbf{r}_{ap}$ (magnitud de r) con relación al plano orbital y con respecto a la línea de las ápsides.	18
3-4. Orientación de la órbita en el espacio.	19
3-5. Sistema de referencia inercial.	23
3-6. Sistema de referencia Centrado en la Tierra.	24
3-7. Sistema de referencia topocéntrico. T (Target) representa el lugar de interés.	25
3-8. Sistema de referencia topocéntrico relativo al cuerpo B (body) del satélite.	26
3-9. Sistema de referencia orbital.	27
3-10. Sistema de referencia del cuerpo.	27
3-11. Rotaciones entre dos sistemas coordenados.	29
3-12. Rotación alrededor del eje Z de los ejes de un sistema coordinado.	30
3-13. Rotaciones en ejes fijos y móviles.	31
3-14. Secuencia cinemática de los ángulos Yaw-Pitch-Roll.	34
3-15. Vector principal de rotación.	36
3-16. Proyección estereográfica de quaternions: Parámetros clásicos de Rodrigues.	40
3-17. Proyección estereográfica de quaternions: Parámetros modificados de Rodrigues.	42
4-1. Ilustración del escenario de la misión satelital.	54
4-2. Ilustración del marco Inercial $\mathcal{N} : \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$ y del Marco Orbital de Hill $\mathcal{H} : \{\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_h\}$	54
4-3. Ilustración del satélite y el marco del cuerpo.	55
4-4. Estado inicial orbital de la misión.	58
4-5. Diagrama de bloques resumido del ADCS.	58
4-6. Modos del ACS.	61
5-1. Orientación del satélite cuando se encuentra en modo Nadir. Usa la dirección $-\hat{b}_3$ para apuntar la carga útil al centro de la Tierra.	64
5-2. Muestra el cambio de orientación satelital para efectuar seguimiento de objetivo.	65

6-1. Trayectoria orbital en ECI.	68
6-2. Trayectoria orbital en ECEF.	68
6-3. Trayectoria satelital sobre la Tierra.	69
6-4. Variación de posición solar.	70
6-5. Orientación angular y velocidad angular para modelado de cinemática.	71
6-6. Orientación angular y velocidad angular para modelado de cinética.	72
6-7. Señal de referencia de actitud para medio día.	76
6-8. Señal de referencia de actitud para tres (3) órbitas.	76
6-9. Diagrama de bloques de control en Simulink.	77
6-10. Bloques aspecto orbital en Simulink.	77
6-11. Posición satelital geocéntrica en Simulink.	78
6-12. Bloques de referencia de actitud en Simulink.	78
6-13. Bloque de error en Simulink.	79
6-14. Bloque de control en Simulink.	79
6-15. Bloques de cinética en Simulink.	79
6-16. Bloque de cinemática en Simulink.	80
6-17. Bloque de determinación en Simulink.	80
7-1. Superficie de control de deslizamiento.	84
7-2. Controlador no lineal por Lyapunov.	87
7-3. Velocidad angular - Controlador no lineal por Lyapunov.	87
7-4. Controlador lineal por Lyapunov.	88
7-5. Velocidad angular - Controlador lineal por Lyapunov.	88
7-6. Esfuerzos de control - Controlador no lineal y lineal.	89
7-7. Controlador SMC.	90
7-8. Velocidad angular - Controlador SMC.	90
7-9. Esfuerzos de control - SMC.	91
7-10. Orientación angular controladores	91
7-11. Señal de controladores	92
7-12. Controlador no lineal por Lyapunov.	93
7-13. Orientación angular y error de actitud con controlador no lineal por Lyapunov.	93
7-14. Velocidad angular con controlador no lineal.	94
7-15. Esfuerzo de control del controlador no lineal.	95
7-16. Esfuerzo de control del controlador no lineal (Zoom).	95
7-17. Controlador lineal por Lyapunov.	96
7-18. Orientación angular y error de actitud con controlador lineal por Lyapunov.	97
7-19. Velocidad angular con controlador lineal.	98
7-20. Esfuerzo de controlador lineal.	98
7-21. Esfuerzo de controlador lineal (Zoom).	99
7-22. Controlador SMC.	100

7-23.	Orientación angular y error de actitud con controlador SMC.	100
7-24.	Velocidad angular con controlador SMC.	101
7-25.	Esfuerzo de controlador SMC.	102
7-26.	Superficies de convergencia descritas por el sistema ante el SMC.	102
8-1.	Relación gráfica de índices de desempeño del error de apuntamiento.	104
8-2.	Propagación de error con controlador no lineal.	106
8-3.	Índice MPE en seguimiento de objetivos controlador no lineal.	107
8-4.	Índice RPE en seguimiento de objetivos controlador no lineal.	107
8-5.	Índice PRE en seguimiento de objetivos controlador no lineal.	108
8-6.	Índice PDE en seguimiento de objetivos controlador no lineal.	108
8-7.	Índice ISE del controlador no lineal.	109
8-8.	Propagación de error con controlador lineal.	111
8-9.	Índice MPE en seguimiento de objetivos controlador lineal.	112
8-10.	Índice RPE en seguimiento de objetivos controlador lineal.	112
8-11.	Índice PRE en seguimiento de objetivos controlador lineal.	113
8-12.	Índice PDE en seguimiento de objetivos controlador lineal.	113
8-13.	Índice ISE del controlador lineal.	114
8-14.	Propagación del error con controlador SMC.	116
8-15.	Índice MPE en seguimiento de objetivos controlador SMC.	117
8-16.	Índice RPE en seguimiento de objetivos controlador SMC.	117
8-17.	Índice PRE en seguimiento de objetivos controlador SMC.	118
8-18.	Índice PDE en seguimiento de objetivos controlador SMC.	118
8-19.	Índice ISE del controlador SMC.	119
8-20.	Comparación desempeño de tres controladores (Orientación angular).	121
8-21.	Comparación desempeño de tres controladores (Error de actitud).	121
A-1.	Interacción típica de las secciones del ADCS.	130
A-2.	Ruedas de reacción de un nanosatélite.	131
A-3.	Magnetorquer de un nanosatélite.	132

Lista de Tablas

2-1. Productos esperados.	14
2-2. Cronograma de actividades.	14
2-3. Presupuesto estimado de investigación.	15
3-1. Primera línea del TLE de ValleSat.	22
3-2. Segunda línea del TLE de ValleSat.	22
4-1. Requerimientos de apuntamiento de la misión satelital.	57
4-2. Parámetros orbitales iniciales.	57
4-3. Modos del ADCS	59
5-1. Requerimientos funcionales del ACS.	63
5-2. Requerimientos operacionales del modo de Nadir.	64
5-3. Requerimientos operacionales del modo Seguimiento de Objetivo.	66
5-4. Requerimientos operacionales del modo Solar.	66
8-1. Expresión matemática de los índices de error de apuntamiento.	104
8-2. Ventanas de acceso por apuntamiento.	105
8-3. Resultados de requerimientos para controlador no lineal.	110
8-4. Resultados de requerimientos para controlador lineal PD.	115
8-5. Resultados de requerimientos para controlador SMC.	120
8-6. Resultados de índices de error.	122
8-7. Índice de consumo energético de los controladores.	123
C-1. Especificaciones comerciales del control de apuntamiento de nanosatélites.	136
D-1. Requerimientos funcionales del ACS.	138
D-2. Requerimientos operacionales del modo Seguimiento de Objetivo.	138
D-3. Requerimientos de apuntamiento de la misión satelital.	138

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
a	Semi-eje mayor	m	Ec. (3.4)
$[B]$	Matriz geométrica de cinemática	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$\mathcal{B}$	Marco de referencia del cuerpo	—	Sec. <i>Dinámica orbital</i>
$\hat{b}$	Vector unitario del marco del cuerpo	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$[C]$	Matriz de cosenos directores	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
e	excentricidad	—	Ec. (3.5)
$\hat{e}$	Vector unitario de excentricidad	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$\hat{e}$	Vector principal de rotación	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
F	Vector de Fuerza aplicada	N	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
H	Momentum angular	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$\mathcal{H}$	Marco de referencia orbital	—	Sec. <i>Dinámica orbital</i>
$\hat{h}$	Vector unitario de momentum angular	—	Sec. <i>Dinámica orbital</i>
$[I]$	Matriz de momentos de inercia	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$\mathbb{I}_3$	Matriz de identidad de orden 3	1	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
i	Inclinación orbital	°	Ec. (3.7)
K	Ganancia de control	—	Cap. <i>Controladores</i>
L_j	Vector de torque externo/perturbación dada la j-ésima fuente	$\text{N} \cdot \text{m}$	Sec. <i>Dinámica orbital</i>
$[M]$	Matriz de rotación	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
m	Masa	kg	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$\mathcal{N}$	Marco de referencia inercial	—	Sec. <i>Dinámica orbital</i>
$\hat{n}$	Vector unitario del marco inercial	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
r	Vector de posición	m	Sec. <i>Dinámica orbital</i>

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
q	Vector de parámetros clásicos de Rodrigues	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
$S()$	Función de matriz antisimétrica	—	Anexo: <i>A</i>
S	Superficie de deslizamiento	—	Cap. <i>Controladores</i>
t	Tiempo	s	A lo largo del documento

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
β	Vector de quaternion	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
γ	Vector principal de rotación	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
ϵ	Vector parte imaginaria de quaternion	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
η	Velocidad angular media orbital	$\frac{1}{s}$	Ec. (3.13)
θ	Anomalía verdadera	°	Ec. (3.6)
θ	Ángulo Pitch	°	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
μ	Parámetro gravitacional planetario	$\frac{m^3}{s^2}$	Sec. <i>Dinámica orbital</i>
σ	Parámetros modificados de Rodrigues	—	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
Φ	Ángulo principal de rotación	°	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
ϕ	Ángulo Roll	°	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
ψ	Ángulo Yaw	°	Sec. <i>Dinámica satelital</i>
Ω	Longitud del nodo ascendente	°	Ec. (3.8)
ω	Argumento del periastro	°	Ec. (3.9)
ω	Vector de velocidad angular	$\frac{1}{s}$	Sec. <i>Dinámica satelital</i>

Subíndices

Subíndice	Término
ap	Apoapsis.
B	En el marco del cuerpo
H	En el marco orbital
N	En el marco inercial
B/N	Del marco del cuerpo al inercial
R/N	Del marco de referencia al inercial
B/R	Del marco del cuerpo a la referencia
cm	Centro de masa del cuerpo
i	Contador $i = 1, 2, 3 \dots n$
i	Notación indicial sistema de coordenadas $i = 0, 1, 2, 3$
$\oplus$	Símbolo astronómico de la Tierra
Perturbaciones	
S	Radiación solar
A	Arrastre aerodinámico
G	Gradiente gravitacional
M	Campo Magnético
Marco de referencia orbital LVLH	
r	Dirección radial
h	Dirección del momentum angular
θ	Dirección tangencial

Superíndices

Superíndice	Término
Lado Izquierdo	
$\mathcal{B}$	En el marco del cuerpo
$\mathcal{N}$	En el marco inercial
$ECEF$	En el marco centrado en la Tierra
$THCS$	En el marco de coordenadas horizontales

Superíndice	Término
T	En el marco topocéntrico
Lado Derecho	
S	Sombra del parámetro
T	Transpuesto
,	Conjugado

Abreviaturas

Abreviatura	Término
ACS	Sistema de control de orientación (Attitude Control System)
ADCS	Sistema de determinación y control de orientación (Attitude Determination and Control System)
ADS	Sistema de determinación de orientación (Attitude Determination System)
APE	Error de desempeño de actitud (Attitude Performance Error)
CAD	Diseño asistido por computadora (Computer-Aided Design)
CM	Centro de masa
CRP	Parámetros clásicos de Rodrigues (Classic Rodrigues Parameters)
DCM	Matriz de Cosenos directores (Direct Cosine Matrix)
EA	Ángulos de Euler (Euler Angles)
ECEF	Coordenadas geocéntricas fijas (Earth Centered Earth Fixed)
ECI	Coordenadas geocéntricas inerciales (Earth Centered Inertial)
EKF	Filtro de Kalman extendido (Extended Kalman Filter)
EP	Parámetros de Euler (Euler Parameters)
ISE	Error cuadrático Integral (Integral-Squared Error)
JD	Fecha Juliana (Julian Date)
KF	Filtro de Kalman (Kalman Filter)
LEO	Órbita baja terrestre (Low-Earth Orbit)
LVLH	Vertical local - Horizontal local (Local-Vertical-Local-Horizontal)
MRP	Parámetros modificados de Rodrigues (Modified Rodrigues Parameters)
PID	Proporcional, integral y derivativo (Proportional-Integral-Derivative)

Abreviatura	Término
POD	Desplegador orbital Picosatelital (Picosatellite Orbital Deployer)
PRV	Vector principal de rotacion (Principal Rotation Vector)
SDP	Modelo simplificado de perturbaciones de espacio profundo (Simplified Deep Space Perturbations)
SGP	Modelo simplificado de perturbaciones generales (Simplified General Perturbation)
SMC	Controlador de modos deslizantes (Sliding Mode Controller)
TLE	Segmento de dos líneas (Two Line Element)
THCS	Coordenadas horizontales topocéntricas (Topocentric Horizon Coordinate System)
UKF	Filtro de Kalman unscented (Unscented Kalman Filter)
YPR	Guiñada-Cabeceo-Alabeo (Yaw-Pitch-Roll)

Nomenclatura

Término	Representación
Matrices	$[C], [M_{231}(\theta)], [\tilde{a}], [BR]$
Vectores	$\hat{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\omega}, \vec{r}$
Matriz Identidad	$\mathbb{I}_3$
Matriz de Inercia	$[I]$

1. Introducción y planteamiento del problema

1.1. Introducción

Los CubeSat son un tipo de satélites pequeños que pueden asociarse a distintos tipos de misiones satelitales debido a su peso, tamaño, geometría y carga útil. Fue diseñado y desarrollado como estándar por el Politécnico de California en 2001 como una alternativa para un nuevo tipo de pico-satélite [Puig-Suari et al., 2001]. Su versatilidad y bajo costo permiten que sean sistemas accesibles para investigaciones científicas, donde sus diferentes módulos y subsistemas podrían abordarse y estudiarse. Los satélites cúbicos han aportado al avance y desarrollo tecnológico en el espacio para la observación terrestre, así como a la reducción de costos de nuevas misiones espaciales (revisar anexo A para más detalle). A través de la innovación tecnológica los satélites pequeños permiten el desarrollo de nuevas arquitecturas, tales como mecanismos, estructuras, sensores y componentes, para un gran rango de actividades en el espacio, con potencial transformador para la ciencia espacial [Chin et al., 2017]. Con base a lo anteriormente planteado, se propone diseñar y evaluar diferentes controladores no lineales para el subsistema de determinación y control de orientación (ADCS) de un nanosatélite tipo CubeSat inmerso en una misión orbital terrestre hipotética.

Las acciones de apuntamiento y seguimiento de las misiones satelitales tienen utilidad en aplicaciones climáticas, militares, de comunicación, navegación, investigación terrestre, de toma de imágenes (imaging) e investigación científica. Desarrollar controladores para el ADCS implica tener estrategias de operación para las maniobras de orientación que se requieran. Evaluar el desempeño de los controladores mediante un análisis de su respuesta es una acción de verificación ante los requerimientos y sirve para demostrar su confiabilidad [Rodríguez, 2021]; los algoritmos logran integrar las acciones de determinación, los controladores y las dinámicas satelital y orbital en un mismo entorno de simulación. Luego, desarrollar controladores y establecer algoritmos que abarquen sus modelos matemáticos evaluando su desempeño, son actividades importantes para el desarrollo de sistemas de determinación y control de orientación.

Los satélites están conformados por subsistemas en donde se ejecutan diversas funciones para satisfacer toda necesidad o requerimiento provenientes de la misión y el sistema satelital. Brevemente, los subsistemas más comunes son:

- *Computadora a bordo* (On Board Computer - OBC): provee al satélite la capacidad de procesar y almacenar información.
- *Subsistema de potencia* (Electrical Power Subsystem - EPS): se encarga de transformar y distribuir energía eléctrica a los componentes y mecanismos electromecánicos.
- *Subsistema de comunicaciones* (Communication subsystem): es el encargado de establecer un lazo de comunicaciones entre el satélite y la estación terrena.
- *Subsistema mecánico* (Structures and Mechanisms): se encarga de soportar, mantener y desplegar correctamente a los componentes e instrumentos satelitales, así como de garantizar la resistencia ante factores externos y extremos.
- *Carga útil* (Payload): contiene el dispositivo científico que define la misión satelital.
- *Subsistema de determinación y control de orientación*¹ (Attitude and Determination Control Subsystem - ADCS): cumple las funciones de estabilizar el satélite y hacer seguimiento de referencias mediante maniobras de orientación angular.

Si bien estos y otros subsistemas conforman el sistema satelital y garantizan su funcionamiento apropiado, desarrollar cada uno de ellos para una misión requiere tiempo y recursos humanos que permitan abarcar a profundidad los conceptos y esfuerzos que cada subsistema demanda. Es en este sentido que esta investigación se concentra en el diseño de uno de los subsistemas que componen el satélite de una misión satelital hipotética, el ADCS, que permite determinar y controlar la orientación del satélite en órbita.

El subsistema de ADCS tiene una gran relevancia para las investigaciones aeroespaciales, pues permite efectuar orientaciones para apuntamientos a algún sector del planeta Tierra, con lo que se posibilitaría la comunicación del satélite con la estación terrena, así como apuntamientos hacia algún otro punto en el espacio, como al sol para la recarga de baterías con los paneles solares. El subsistema ADCS también posibilita la acción de las maniobras usadas por el satélite para disipar el tumbo (tumbling²), disminuir el arrastre atmosférico (Low drag maneuver - [Finley et al., 2013]), aprovechar perturbaciones para generar impulso (control pasivo), entre otros. Existen diversas técnicas, conceptos y mecanismos empleados para la orientación de nanosatélites, en donde condiciones

¹En esta investigación se conoce al término *Actitud* como traducción de Attitude dado que comprende los estados del satélite de velocidad y orientación angular. Además, este término es frecuentemente usado en investigaciones de control satelital en la lengua española. Sin embargo, tal vez el término *orientación* sea una interpretación conceptual más acertada, por lo que se usará en el documento de igual manera.

²El término *tumbling* y su acción opuesta *detumbling* no cuentan con una interpretación conceptual en español en el ámbito satelital, tal como Attitude y Orientación. Entre las traducciones más cercanas se encuentran a tumbo y volcamiento. Sin embargo, estas palabras inducen a cambios repentinos y radicales respectivamente. Razón por la cual se considera seguir haciendo uso del término original que abarca el movimiento inercial giratorio y continuo del cuerpo, que es usado amplia y comúnmente en literatura de control de orientación satelital [Ricardo and Suárez, 2011],[Simonini et al., 2019][Wen-Chi et al., 2018],[Jonsson, 2019]

como la precisión, la exactitud, el consumo de potencia y energía, la velocidad y la capacidad de mantener estable el satélite ante las perturbaciones del medio, influyen considerablemente en el alcance y el tipo de misión que el satélite pueda realizar. Normalmente, para el ADCS el desarrollo de una misión satelital requiere el compromiso de tres secciones principales: sección de sensores, sección de actuadores y la sección de cómputo [Crowell, 2011].

La sección de sensores efectúa la *determinación* de orientación mediante el uso de dispositivos que funcionan como un sistema redundante que permite la exactitud en la medición de la orientación actual y la orientación deseada. La sección de actuadores recibe señales de *control* para efectuar las maniobras de orientación sobre los mecanismos previamente descritos de manera que se logre la orientación deseada. Por último, la sección de cómputo ejecuta las técnicas de estimación y control de orientación, y se comunica con la sección de sensores y de actuadores. De este modo, la sección de cómputo recibe señales de los sensores y efectúa la determinación, luego efectúa el control y envía la señal de control resultante a los actuadores [Bolandi et al., 2012].

1.2. Antecedentes del control de orientación en nanosatélites

En el ámbito de controladores no lineales para sistemas no lineales se encuentran las siguientes referencias:

En [Yale and Agrawal, 1998] se aborda un acercamiento al controlador basado en Lyapunov sobre la dinámica inversa de un manipulador robótico de dos eslabones en el espacio, garantizando la estabilidad del sistema y el seguimiento de trayectorias de referencia.

En [Li et al., 2018], para un modelo dinámico de orientación angular de un satélite se realizan mejoras a los tiempos de asentamiento o convergencia del controlador por modos deslizantes (SMC) haciendo uso de la lógica Bang-Bang (On/Off) a las leyes del controlador. Además, aumentan la robustez del sistema ante entrada de perturbaciones.

Particularmente, para las técnicas de control implementadas en modos de apuntamiento satelital se encuentran los siguientes desarrollos universitarios que pueden ser puntos de comparación para la investigación:

En 2004, en la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología implementan las ecuaciones de movimiento del sistema en no lineal y se linealiza en un punto de operación, con ello se recurren a controladores lineales como el PD y se implementan controladores no lineales como el

controlador por modos deslizantes para la orientación satelital del CubeSat ESEO en quaternions, alcanzando el objetivo de seguimiento de referencias tipo paso con una exactitud de $\pm 1^\circ$ [Gravdahl and Pedersen, 2004].

En 2015, en la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología se desarrolla controladores no lineales en la representación de Ángulos de Euler para la simulación de apuntamientos de un CubeSat 2U de pruebas (NUTS). Los controladores se diseñan para rechazar perturbaciones aleatorias y de tipo sinusoidal [Westgaard and Gravdahl, 2015].

En 2017, la Universidad de Indonesia implementa técnicas de control no lineales, en la representación de cuaterniones, basados en el método I-PD para tres modos de apuntamiento de un microsatélite de observación terrestre [Halim and Ubay, 2017].

En 2021, en la Universidad de Groninga diseñan controladores lineales y no lineales para el sistema de control de un nanosatélite haciendo uso de marco Port-Hamiltonian en combinación de la representación de cuaterniones. Comparan la estabilidad asintótica que provee ambos controladores para el seguimiento de referencias [Hillen et al., 2021].

En 2022, Tensor Tech, una empresa privada de Taiwán, diseña un controlador PID bajo la representación angular de Parámetros Modificados de Rodrigues (MRP) para un CubeSat cuyo modelo cuenta con magnetorquers y un control de momento giroscópico (VSCMG) con tecnología de motor esférico [Johnny et al., 2022].

Si bien Colombia cuenta con un satélite de observación terrestre actualmente activo, se considera necesario el enfoque y adquisición de nuevos conocimientos y tecnologías que conlleven al desarrollo aeroespacial del país. Por otro lado, Colombia cuenta con investigaciones académicas en el ámbito satelital que muestran un desarrollo incipiente para Colombia; por destacar algunos de ellos en el campo de control de orientación:

En [Martínez, 2010] se abarcan las dinámicas rotacionales de un satélite con ruedas de reacción y se desarrolla un modelo mediante la representación de ángulos de Euler. Este sistema es altamente no lineal y se linealiza alrededor de un punto de operación. Se comprueba la controlabilidad y observabilidad del sistema, para luego proceder a la realización de un control por retroalimentación de estados. El modelo diseñado responde a seguimiento de referencias tipo escalón.

En [Gómez, 2010] se abordan las dinámicas rotacionales del satélite mediante la representación de cuaterniones y un modelo orbital. Se implementan controladores para ambos modelos cinéticos, logrando para el caso satelital el desarrollo de un controlador para detumbling, llevando las velocidades angulares a cero y los cuaterniones a la coordenada establecida. Adicionalmente se desarrolla una herramienta de visualización para la caracterización orbital.

En [Martínez, 2015] se implementan acciones de determinación de orientación para un filtro de

partículas de un picosatélite evaluando si el filtro posee mejores prestaciones a nivel del comportamiento del error, varianza, coeficiente de correlación y el gasto computacional, en comparación con los filtros de Kalman en las versiones Filtro de Kalman (KF), Filtro de Kalman Extendido (EKF) y el Filtro de Kalman Unscented (UKF).

En [Cortés, 2019] se estudia la dinámica de rotación de un nanosatélite tipo CubeSat mediante la representación de ángulos de Euler y cuaterniones y se desarrolla una linealización alrededor de un punto de estabilidad. Se desarrollan controladores lineales como el PID y el H-Infinito (H^∞) para el modelo lineal con representación de ángulos de Euler y un controlador por modos deslizantes (SMC) para el modelo no lineal. Adicionalmente se cuenta con el desarrollo de un banco de pruebas giroscópico, un CubeSat no estándar y un set de tres ruedas de reacción, con los que se experimenta el controlador por modos deslizantes para el seguimiento de una referencia tipo paso.

En [Martínez, 2020] se modela, simula y controla un banco de pruebas de levitación magnética educacional para un picosatélite, de igual forma se simulan las dinámicas de orientación del picosatélite en representación de ángulos de Euler, se linealiza y se desarrollan controladores PID y SMC para el seguimiento de referencias tipo escalón.

En [Rodríguez, 2021] se exploran las dinámicas de control de CubeSats inmersos en una red satelital. Interconectar agentes en red y explorar arquitecturas de control con estrategias de cooperación, consenso y técnicas robustas de control en red, que permitan afrontar las no linealidades, incertidumbres y errores que limitan su coordinación y cooperación.

En esta tesis mediante las técnicas de Lyapunov se desarrollan estrategias de control no lineal, como la retroalimentación no lineal y el controlador por modos deslizantes para un nanosatélite tipo CubeSat inmerso en una misión espacial simulada. Adicionalmente, se implementa una estrategia de control Proporcional-Derivativa (PD), donde al final se compara el desempeño de cada uno de los controladores para la misión simulada.

1.3. Misión de ValleSat

En esta tesis se desarrollará un sistema de determinación y control de orientación (ADCS) para un escenario satelital hipotético con un CubeSat 3U en órbita (denominado *ValleSat* a partir de ahora). La misión hipotética de ValleSat podría observar la tierra mediante sensores como el CMOS³ (Complementary Metal-Oxide Semiconductor). El satélite realizará seguimiento activo a

³Los sensores CMOS son dispositivos de píxeles activos que utilizan la tecnología CMOS (MOSFET tipo N y tipo P) y el efecto fotoeléctrico para aplicaciones como control de luminosidad y corrector de contraste. El sensor viene conformado por un arreglo de fotodiodos, uno por píxel y un amplificador de señal eléctrica por píxel, con lo que se posibilita la lectura directa de cada píxel. Estos logran ofrecer mejor resolución de imagen en comparación con otros sensores como los VIIRS (Visible Infrared Imaging Radiometer Suite) [Pack et al., 2017] y son más livianos.

una estación terrena en Cali, Colombia, durante su órbita alrededor de la Tierra para establecer comunicaciones y descargar la información. Este satélite cúbico sería lanzado, en el marco de dicho escenario, desde la Estación Espacial Internacional (ISS), lo que significa que la órbita del nanosatélite será cercana a la de la ISS. Esta es una órbita baja (LEO) e inclinada ($\sim 50^\circ$), lo cual permite tener varias vueltas al día (alrededor de 15 órbitas al día, revisar Capítulo de *Entorno de simulación* para corroborar cálculos) y tener una gran cobertura de la superficie terrestre.

ValleSat contaría con diversos componentes y dispositivos que le permitirán desarrollar sus maniobras de orientación. Particularmente, podría equiparse con tres ruedas de reacción para las maniobras de orientación, con antenas microstrip⁴ de comunicación para la transmisión de información, paneles solares desplegables para la captación de energía solar y un sensor CMOS como instrumento de ciencia para el estudio terrestre.

1.3.1. Planteamiento del problema

Con la llegada de los nanosatélites tipo CubeSat a la industria aeroespacial, existe un aumento en el desarrollo y ejecución de misiones satelitales trayendo consigo las problemáticas características de cada subsistema satelital. Particularmente para el ADCS, una de las problemáticas radica en el alto grado de no linealidad presente en la dinámica satelital. Por un lado, la cinética contiene no linealidades algebraicas de segundo orden por parte de la velocidad angular; Por otro lado, dependiendo de las coordenadas de actitud en las que se describa la orientación del satélite, la cinemática puede contener no linealidades algebraicas y/o trigonométricas y conllevar a singularidades geométricas o indeterminaciones. Esta no linealidad del modelo dinámico (cinética y cinemática) es conflictiva para el desarrollo de los controladores, dado que complican la implementación de las leyes de control y limitan el rango de operación del satélite. Otra de las problemáticas presentes en el modelo cinético son las perturbaciones del entorno orbital que afectan progresivamente no solo la trayectoria del satélite sino su actitud (como se orienta) y con ello perjudicando la exactitud de apuntamiento, lo cual representa un reto adicional para los controladores. Así, el reto de los controladores de actitud para las maniobras de apuntamiento comprende la disminución del error de apuntamiento y el esfuerzo de control, abordar las no linealidades del modelo y rechazar perturbaciones. La figura 1-1 ilustra el proceso para la delimitación de la problemática.

⁴También conocidas como antenas tipo parche, son tiras delgadas o trozos metálicos impresos sobre un sustrato dieléctrico el cual es situado sobre un plano metálico (tierra). Estas surgen de un desarrollo para tecnologías de tamaño reducido, en donde son cada vez más pequeñas y livianas. Sus formas geométricas se varían para aprovechar características de las antenas como la direccionalidad, polarización, ganancia, impedancia, ancho de bandas, entre otras. Las antenas microstrip, son livianas, funcionarían bien en frecuencias altas como el UHF (Ultra High Frequency ≥ 300 MHz) y su direccionalidad es siempre hacia delante del parche [Rodríguez, 2019].

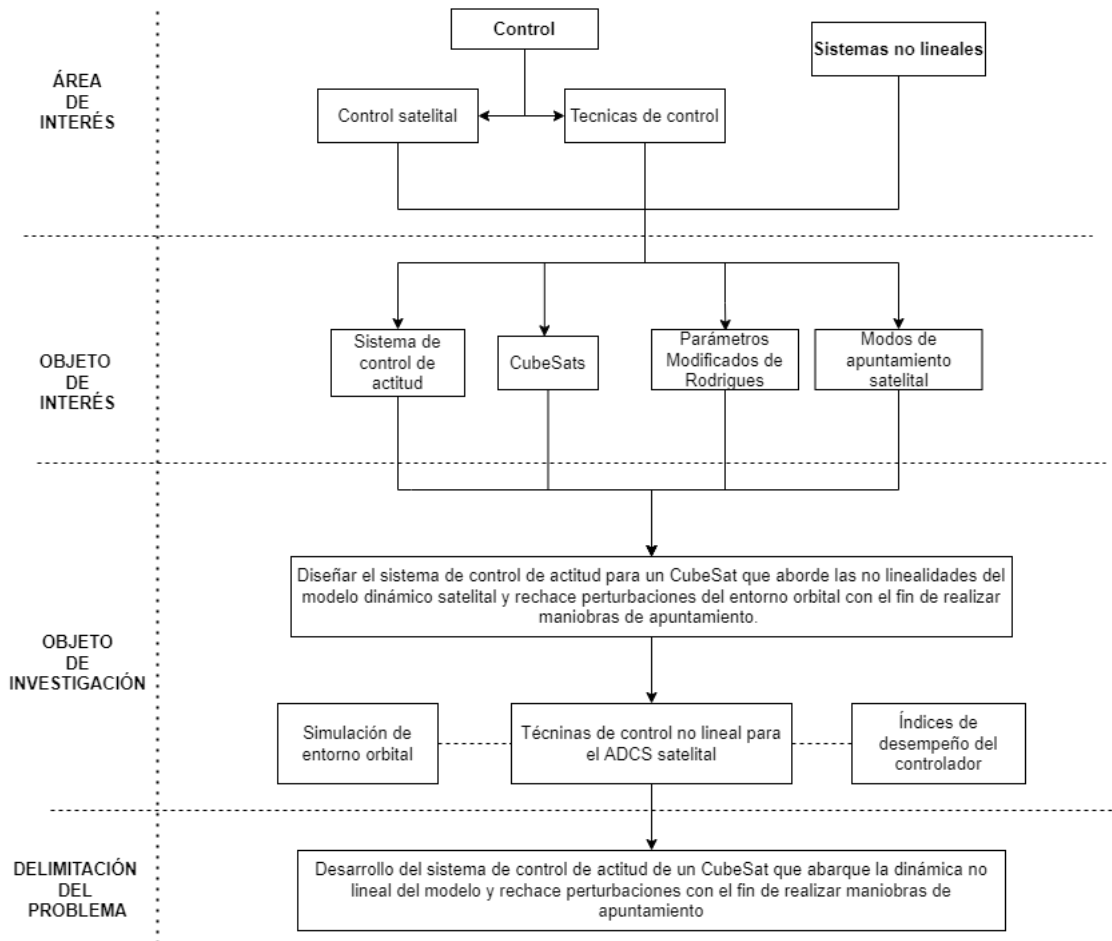


Figura 1-1.: Diagrama de limitación de la problemática.

Así pues, se hace necesario desarrollar un sistema de control de actitud para un CubeSat que comprenda las no linealidades del modelo dinámico satelital y rechace perturbaciones del entorno orbital con el fin de realizar maniobras de apuntamiento. El sistema de control debe abarcar la determinación de la propagación orbital y la orientación del satélite en la medida que transcurre el tiempo y el control de actitud que procesa el error entre la actitud actual y la deseada, en donde se realice tanto un seguimiento terrestre activo, como un seguimiento de nadir. Con esto presente, se plantean las siguientes actividades para completar el planteamiento.

Desarrollar una estrategia de control de actitud para un CubeSat, el cual debe ser capaz de realizar:

- *Seguimiento a nadir.*
- *Seguimiento activo.*
- *Apuntamiento solar.*

La misión se simula para la observación terrestre. Los controladores del nanosatélite operarían dando cumplimiento a tres casos de apuntamiento, el primero consiste en un apuntamiento a nadir (simulando el uso de la carga útil), el segundo consiste en el seguimiento activo terrestre (simulando la comunicación con la estación terrena) y el tercero consiste en el apuntamiento al sol (simulando la recarga de las baterías).

Hipótesis y pregunta de investigación

Hipótesis

Las estrategias de control no lineal son adecuadas para el seguimiento de referencias presentes en las operaciones de apuntamiento satelital.

Pregunta de investigación

Se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles estrategias de control no lineal son adecuadas para la realización de los apuntamientos satelitales?

1.3.2. Justificación del problema

El accionar del ADCS se basa en ejecutar maniobras de orientación de forma que se cumplan y validen los requerimientos satelitales planteados. Particularmente, el apuntamiento al sol, el seguimiento activo a una estación terrena y el seguimiento a nadir son operaciones importantes tanto para la misión de Vallesat como para el ADCS de cualquier satélite. Para poder realizar estas maniobras de apuntamiento y cumplir con los requerimientos de la misión, es necesario que los controladores abarquen las no linealidades del modelo dinámico y rechace las perturbaciones del entorno orbital.

Diversos controladores no lineales han sido implementados dentro de las misiones satelitales de acuerdo al tipo de maniobra a realizar, para el detumbling (control de regulación) comúnmente se emplea el control magnético (B-Dot) y para las maniobras de apuntamiento (seguimiento de referencia) comúnmente se emplea el control adaptativo y por modos deslizantes (SMC). Del mismo modo, las coordenadas de actitud comúnmente usadas son los ángulos de Euler 3-2-1 (Yaw-Pitch-Roll) y los cuaterniones. Esta tesis de investigación pretende modelar el controlador SMC y explorar técnicas alternas a las normalmente implementadas como la retroalimentación no lineal con los parámetros modificados de Rodrigues (MRP) como coordenadas de actitud, con el propósito de determinar cuáles técnicas no lineales se ajustan mejor a la dinámica satelital y sus operaciones.

El desarrollo de un ADCS encamina a la Universidad del Valle a contribuir al campo aeroespacial y satelital colombiano. El desarrollo de esta tesis, al evaluar diferentes controladores, aporta al

conocimiento de técnicas de control que cumplen con los requerimientos de una misión satelital de este tipo. Aporta, además, a la exploración de alternativas de técnicas de control a las comúnmente usadas en el ámbito del ADCS. Se plasman e integran conceptos de diversas ramas académicas que pueden servir de base para futuras investigaciones de pregrado y posgrado.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar una estrategia de control de actitud para la *misión de ValleSat* que aborde las no linealidades del modelo dinámico satelital y rechace perturbaciones del entorno orbital con el fin de realizar maniobras de apuntamiento.

1.4.2. Objetivos específicos

- (O1) Establecer los requerimientos operacionales y funcionales para el sistema de control de actitud de la misión satelital.
- (O2) Implementar modelos de dinámica orbital y satelital para la simulación de la misión satelital.
- (O3) Diseñar e implementar técnicas de control no lineal (retroalimentación no lineal y SMC) y un controlador PD en representación de parámetros modificados de Rodrigues, para el seguimiento de referencia de cada modo de apuntamiento.
- (O4) Evaluar y contrastar el desempeño de cada controlador con base en el error de apuntamiento.

En la siguiente sección se plantea la estructura de la tesis, con el fin de aportar una visión general del documento.

1.5. Estructura de la tesis

- **Capítulo 1 - Introducción:** Contexto y descripción de la problemática, objetivos generales y específicos de la investigación.
- **Capítulo 2 - Metodología:** Esquema de actividades principales de la investigación a realizar y cronograma.
- **Capítulo 3 - Marco teórico:** Este capítulo se divide en tres partes: Dinámica orbital, Dinámica satelital y Técnicas de control. En la sección de *Dinámica orbital*, se abordan conceptos básicos de astrodinámica describiendo los elementos orbitales keplerianos, luego se abordan aplicaciones de mecánica orbital con los propagadores orbitales y los marcos de referencia a usarse en el proyecto. En la sección de *Dinámica satelital*, se describen los modelos de representación angular de movimiento, cinemática y cinética del satélite y perturbaciones. La sección de *Técnicas de control* abarca los conceptos de estabilidad asintótica, global y de Lyapunov, dando paso a las funciones de Lyapunov para el diseño de los controladores.
- **Capítulo 4 - Diseño de la misión:** Contiene aspectos generales de simulación de la misión y del ACS del satélite. Incluye los estados iniciales del satélite, la órbita y la descripción de los modos de operación.
- **Capítulo 5 - Requerimientos:** Establecimiento de requerimientos funcionales por cada modo de operación y los requerimientos del controlador.
- **Capítulo 6 - Entorno de simulación:** Se describe el entorno de simulación construido en Matlab - Simulink.
- **Capítulo 7 - Sistema de control de actitud:** Desarrollo de controladores y algoritmos de implementación.
- **Capítulo 8 - Evaluación de desempeño:** Implementación de índices de error para verificar requerimientos planteados en el Capítulo 5.
- **Capítulo 9 - Conclusiones:** Conclusiones de la tesis y trabajo futuro.

1.6. Aportes

Con este trabajo de grado se contribuye a la creación de controladores no lineales y un PD para un ACS satelital en una representación angular reciente, los parámetros modificados de Rodrigues (MRP). Esta representación angular, posee propiedades interesantes para el diseño de controladores y es una alternativa frente a representaciones angulares redundantes como los cuaterniones. Esta representación, si bien es reciente, existen desarrollos matemáticos e investigaciones que son de gran interés para el diseño de controladores y serán implementados/adaptados al ADCS satelital.

Del mismo modo, se desarrolla una plataforma de simulación del ADCS satelital en Matlab/Simulink, mediante la creación de librerías, funciones, y algoritmos que recogen dinámicas orbitales, satelitales, de control así como la evaluación de los controladores mediante índices del error. Esta plataforma puede ser de utilidad para el desarrollo de misiones satelitales reales.

2. Metodología

La metodología de la investigación del proyecto es una metodología cuantitativa basada en el método de la ingeniería de sistemas con el modelo en V, el cual garantizaría el cumplimiento de todos los objetivos específicos. Este modelo parte del concepto operacional en donde se establece el *diseño de misión*, luego continúa con los requerimientos y especificaciones en donde se obtienen los *requerimientos operacionales y funcionales para el ADCS*, para el diseño de detalle se *modela la dinámica orbital y satelital*, se *diseñan la aplicación de marcos de referencia* y se *diseña los controladores no lineales para la dinámica satelital* y el *generador de referencias*, para la implementación se *reúnen los modelos previamente diseñados* y se *simulan en un mismo entorno*, por último se realiza la verificación y validación, en donde se *verifica el cumplimiento de los requerimientos planteados* y se *evalúa el desempeño de controlador mediante el análisis del error de apuntamiento*.

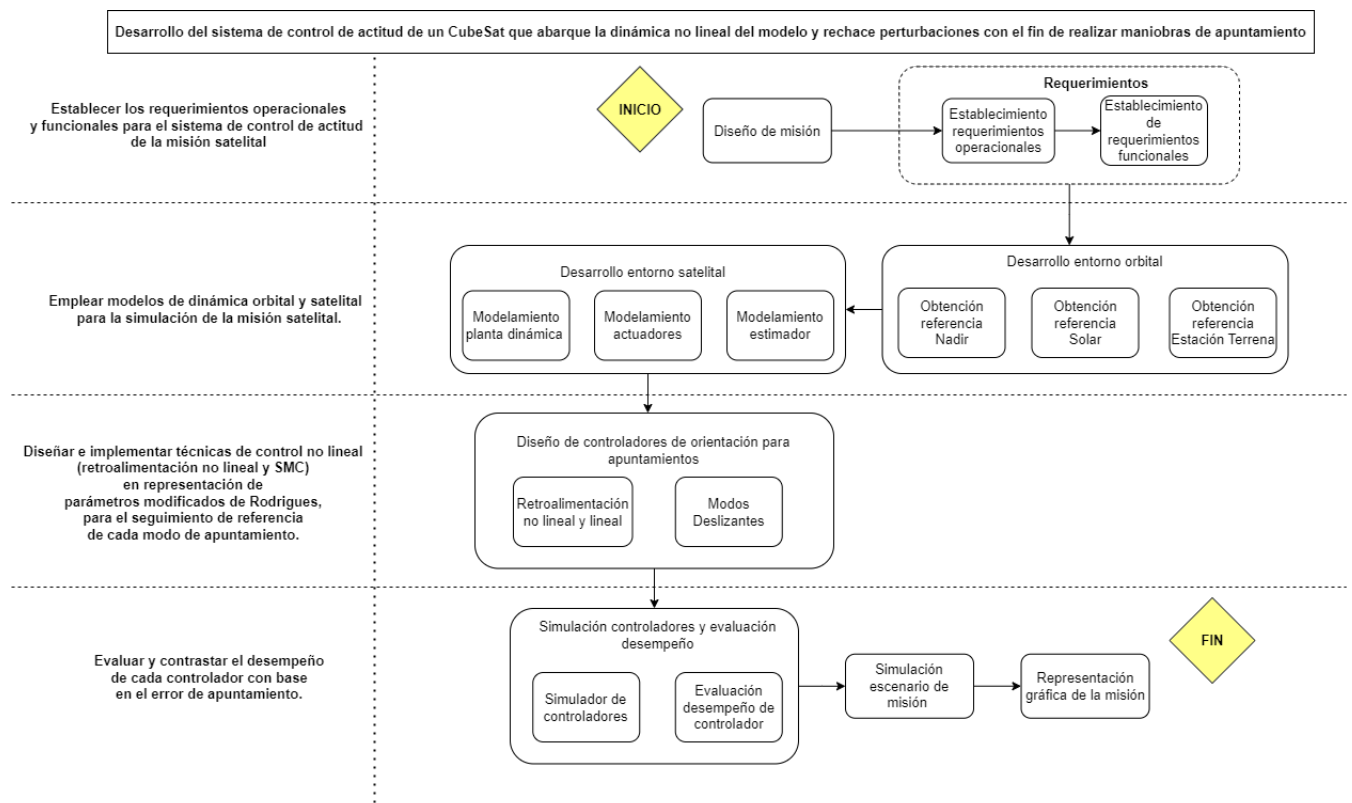


Figura 2-1.: Diagrama de flujo de actividades y su relación con los objetivos específicos.

De este modo el objetivo (O1) se garantiza en la fase de *requerimientos y especificaciones*, los objetivos (O2) y (O3) se garantizan en la fase del *diseño en detalle* y el objetivo (O4) se garantiza en la fase de *verificación y validación*. El diagrama de flujo de la figura 2-1 resume las actividades principales de la investigación y su relación con los objetivos específicos.

Con esto presente, las actividades principales de la investigación se describen a continuación:

1. ***Diseño de misión***: En donde se describen los aspectos generales de la misión, los modos de operación en el ADCS, los modos de apuntamiento y el planteamiento de los controladores.
2. ***Establecimiento de los requerimientos***: Planteamiento de los requerimientos funcionales entorno al ADCS y los requerimientos de ingeniería de control a los que los funcionales conllevan.
3. ***Desarrollo entorno orbital***: Implementación de modelos orbitales para la obtención de la efeméride satelital y las referencias de apuntamiento.
4. ***Desarrollo entorno satelital***: Modelamiento de la dinámica satelital de orientación.
5. ***Diseño de controladores de actitud***: Desarrollo de controladores de acuerdo a los requerimientos planteados.
6. ***Evaluación de controladores***: Evaluación del desempeño del controlador en base al comportamiento del error.
7. ***Simulación escenario de misión***: Implementación de todos los modelos previamente descritos en el software de simulación.
8. ***Representación gráfica de la misión***: Implementación de la señal de orientación en un software de visualización gráfica.
9. ***Análisis y conclusiones***: Análisis de los resultados de la misión dado el controlador implementado. Conclusiones de la investigación.

2.1. Productos esperados

Para esta investigación se espera conseguir los siguientes productos (Tabla 2-1):

GENERACIÓN DE NUEVO CONOCIMIENTO		
Producto		Indicador de cumplimiento
Artículo de investigación A2	1	Carta de postulación a revista científica
APROPIACIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO		
Documento de tesis	1	Publicado en la página web institucional o repositorio de tesis y copia del trabajo
Presentación en evento científico	1	Certificado de participación de la ponencia
FORMACIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO		
Tesis de posgrado	1	Acta de aprobación y copia de la tesis

Tabla 2-1.: Productos esperados.

2.2. Cronograma

En base a las actividades previamente descritas, se desarrolla el siguiente cronograma (Tabla 2-2):

Cronograma del proyecto (meses)										
1	Diseño de misión	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	Establecimiento de requerimientos	X								
3	Desarrollo entorno orbital	X	X							
4	Desarrollo entorno satelital		X							
5	Diseño de controladores de actitud			X						
6	Evaluación de error de controladores			X	X					
7	Validación error de controladores					X				
8	Simulación escenario de misión						X	X		
9	Representación gráfica de misión							X		
10	Análisis de resultados y conclusiones								X	
11	Avance de documento	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	Elaboración final documento Tesis									X

Tabla 2-2.: Cronograma de actividades.

2.3. Presupuesto

Los esfuerzos principales de investigación, que se centran en el diseño y modelamiento de controladores, están sujetos a simulaciones mediante software de uso académico, tales como MATLAB, Python y VTS. Particularmente son software de uso libre y en el caso de MATLAB, se cuenta con licencia institucional para su uso. A continuación, se muestra una tabla de estimación del presupuesto de investigación (Tabla 2-3):

Rubros	Fuentes de financiación			
	Recursos propios	Contrapartida (Univalle)	Otros Aportes	Total
Recurso Humano	\$ 24,000,000	\$ -	\$ -	\$ 24,000,000
Compra o Alquiler de Equipos	\$ 3,600,000	\$ -	\$ -	\$ 3,600,000
Utilización de Laboratorios	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
Materiales o Insumos	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
Software	\$ -	\$ 10,000,000	\$ -	\$ 10,000,000
Material Bibliográfico	\$ -	\$ 10,000,000	\$ -	\$ 10,000,000
Papelería	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
Transporte Local	\$ 100,000	\$ -	\$ -	\$ 100,000
Salidas de Campo	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
Viajes	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
SUBTOTAL	\$ 27,700,000	\$ 20,000,000	\$ -	\$ 47,700,000
Imprevistos	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
TOTAL	\$ 27,700,000	\$ 20,000,000	\$ -	\$ 47,700,000

Tabla 2-3.: Presupuesto estimado de investigación.

3. Sistema de control de actitud

El marco teórico está compuesto por tres ejes temáticos principales: la dinámica satelital, la dinámica orbital y el control de actitud. La *dinámica satelital* describe el comportamiento rotacional del satélite mediante la cinemática, cinética y los torques externos que lo perturban. La *dinámica orbital* describe el comportamiento traslacional del satélite y en base a este entorno se generan las condiciones de apuntamiento para el satélite. El *control de actitud* involucra las leyes y técnicas de control para realizar el apuntamiento mediante la orientación del satélite. El esquemático de la figura 3-1 ilustra el algoritmo de control correspondiente al ADCS reuniendo los ejes temáticos previamente descritos:

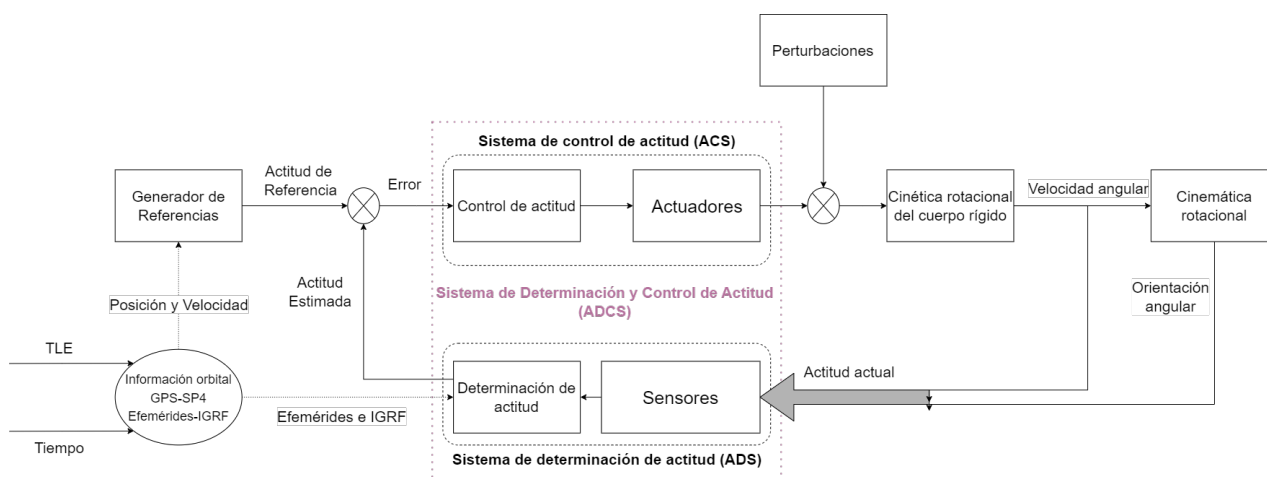


Figura 3-1.: Diagrama de control del ADCS.

Este gráfico muestra, además, como los ejes temáticos interactúan en el subsistema de determinación y control de actitud. En base a esto, se desarrolla el marco teórico de esta tesis de investigación y se describe conceptualmente a continuación.

3.1. Dinámica orbital

La dinámica orbital es el estudio del movimiento de cuerpos naturales y artificiales ante la influencia de fuerzas como la gravedad. Mediante esta es posible predecir el movimiento de los planetas alrededor del sol o de los satélites alrededor de un astro como la Tierra.

La figura 3-2 Partiendo de un sistema de ejes cartesiano centrado en un cuerpo principal (como el Sol) y respecto a su plano fundamental (como la Eclíptica):

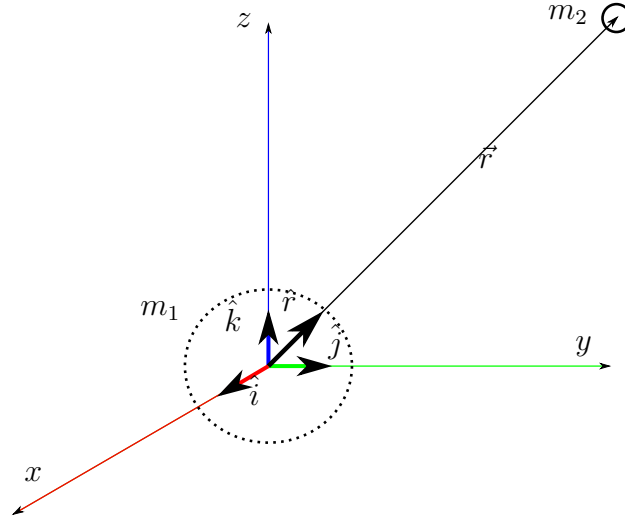


Figura 3-2.: Descripción geométrica del movimiento de m_2 respecto a m_1 .

La solución del problema de los dos cuerpos pretende determinar del vector relativo $\mathbf{r}$ de posición de m_2 respecto a m_1 , es decir, se suele expresar en términos del movimiento de un cuerpo respecto al otro, por lo que, en la práctica es como si se estuviera resolviendo el problema de un único cuerpo [Portilla, 2018]. La reducción al problema de un cuerpo en el espacio conlleva a expresar los vectores de posición, velocidad y aceleración de forma cartesiana. Se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}x \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}y \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}z \quad (3.3)$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$ es el parámetro gravitacional de los cuerpos en cuestión y r es el vector de posición de un cuerpo respecto al otro.

La solución de estas ecuaciones diferenciales de segundo orden implica la obtención de 6 constantes de movimiento. Estas seis constantes se conocen como los elementos orbitales y son capaces de describir el movimiento de los cuerpos en el espacio [Portilla, 2018].

3.1.1. Elementos orbitales

Para una órbita elíptica se establecen los elementos orbitales. Sobre el plano fundamental se describen (Figura 3-3):

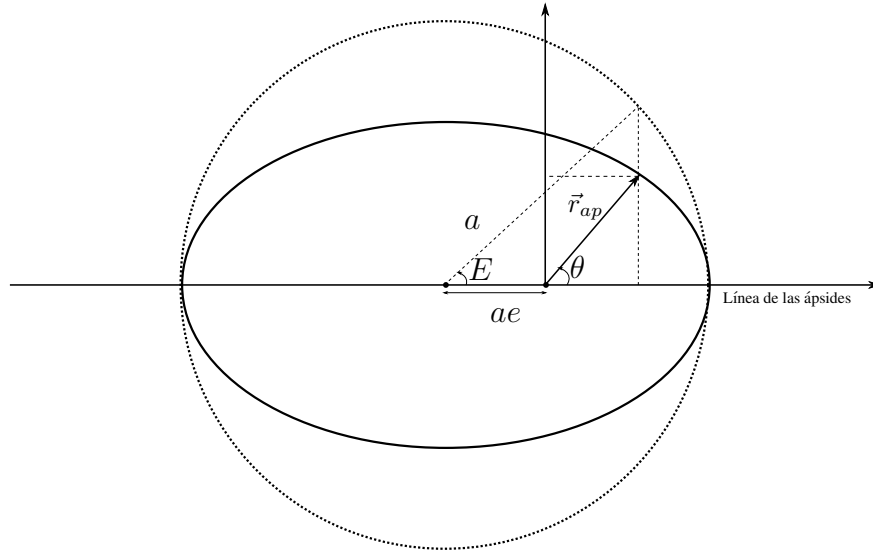


Figura 3-3.: Ubicación del vector de posición $\vec{r}_{ap}$ (magnitud de r) con relación al plano orbital y con respecto a la línea de las ápsides.

1. **a - Semi-eje mayor:** Distancia entre el centro geométrico de la órbita y el ápside. También se le conoce como la mitad del eje de simetría que pasa por los focos de la elipse:

$$a = \frac{r}{2 - \frac{rv^2}{\mu}} \quad (3.4)$$

2. **e - Excentricidad:** Elemento que establece el achatamiento de una sección cónica:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}} \quad (3.5)$$

3. **θ - Anomalía verdadera:** Elemento que define la posición angular del satélite a lo largo de la órbita:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{e} \left(\frac{a(1 - e^2) - r}{r} \right) \quad (3.6)$$

En el espacio, mediante el conocimiento del vector de momento angular ($\hat{h}$), el vector de excentricidad ($\hat{e}$) y sus componentes se describen (Figura 3-4):

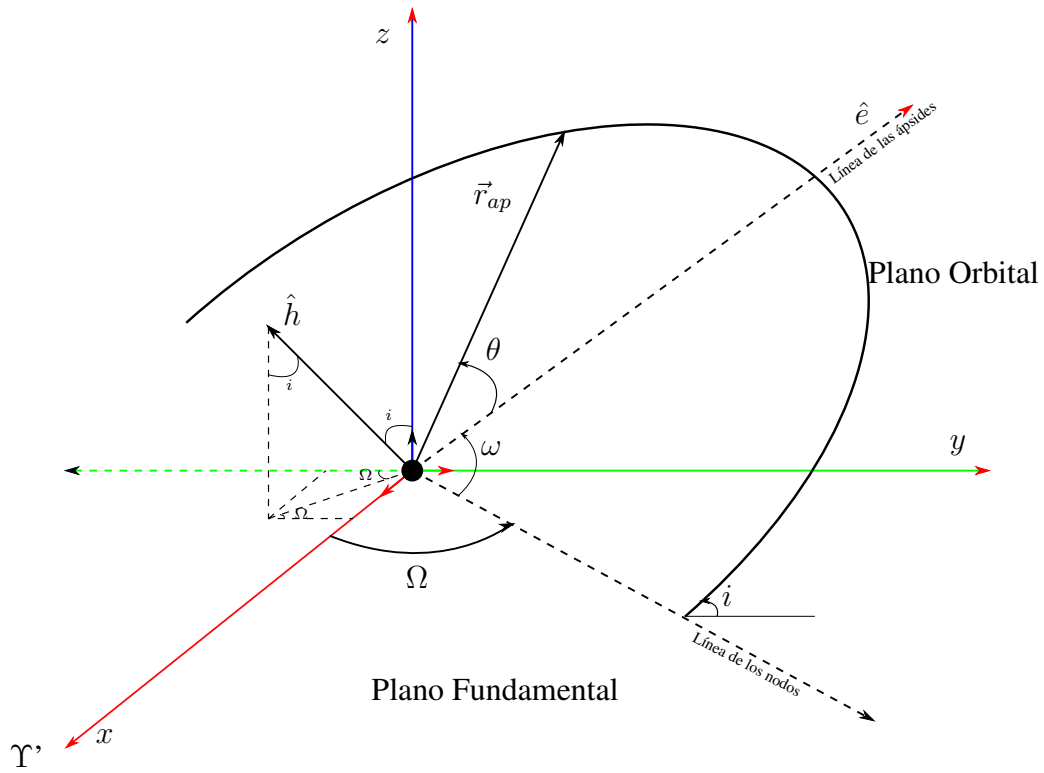


Figura 3-4.: Orientación de la órbita en el espacio.

4. **i - Inclinación:** Elemento que mide la inclinación del plano de la órbita satelital respecto a otro plano de referencia:

$$\cos(i) = \frac{h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \quad (3.7)$$

5. **Ω - Longitud del nodo ascendente:** Elemento que mide la posición angular del satélite desde el plano de referencia en dirección del nodo ascendente:

$$\tan(\Omega) = \frac{h_1}{-h_2} \quad (3.8)$$

6. **ω - Argumento del periastro:** Elemento que mide la posición angular del satélite desde el nodo ascendente hasta el satélite en sentido de su movimiento:

$$\cos(\omega) = \frac{1}{e\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}(-e_1h_2 + e_2h_1) \quad (3.9)$$

3.1.2. Determinación de la posición en el espacio

De la figura 3-3, la posición del cuerpo se escribe vectorialmente:

$$\mathbf{r}_{ap} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Cuyos elementos representan su componente radial y tangencial. Para obtener la descripción del espacio de este vector de posición basta con re-orientar el vector mediante rotaciones sucesivas. Esto responde a una matriz de cosenos directores generada por los ángulos de Euler en la sucesión 3-1-3 (Ver siguiente sección). La ecuación (3.11) describe la órbita mediante los elementos orbitales (Ω, i, ω) [Vallado, 2001]. Luego:

$$\mathbf{r} = [M_{313}](\Omega, i, \omega) \mathbf{r}_{ap} \quad (3.11)$$

En una *órbita elíptica*, la magnitud del vector de posición cambia en el tiempo mediante la siguiente relación :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \quad (3.12)$$

El movimiento medio o variación de la posición angular se define como:

$$\dot{\theta} = \eta = \sqrt{\mu/a^3} \quad (3.13)$$

En una órbita circular puede estimarse la posición angular (θ) conocido también como la anomalía verdadera mediante la siguiente relación:

$$\theta = \eta \Delta t \quad (3.14)$$

3.1.3. Modelo simplificado de perturbaciones generales (SGP) y segmento de dos líneas (TLE)

Un propagador es un modelo cuyo objetivo es el de determinar la posición y velocidad de un satélite en cualquier instante del tiempo, dados los parámetros iniciales como la velocidad y la aceleración. El modelo simplificado de perturbaciones generales (Simplified General Perturbation - SGP) es un conjunto de modelos matemáticos usados para obtener los vectores de posición y velocidad de algún elemento orbitando la Tierra usando como entrada la fecha juliana inicial y un segmento de dos líneas de texto conocido como Two-Line Element o TLE. Los hay de dos tipos, los SGP para órbitas cercanas a la Tierra y los SDP (Simplified Deep space Perturbation) para satélites con órbitas de espacio profundo. Para los SGP normalmente se encuentran: SGP, SGP4 y el SGP8 y para el SDP: SDP4 y SDP8.

La primera versión del propagador fue el SGP, la cual incluía un modelo de perturbaciones de arrastre atmosférico de la Tierra. La segunda versión, el SGP4, incluyó mejoras a este modelo e incorporó un modelo de gradiente gravitatorio de la Tierra, con lo que se mejoró la precisión del propagador. El tercer modelo, el SGP8, abarca los mismos modelos gravitatorios y atmosféricos del anterior, pero utiliza un método de integración distinto, con lo que se introduce una nueva mejora en la precisión del propagador. Sin embargo, dentro de la revisión bibliográfica se encuentra que hay una preferencia por la versión del SGP4, la que se cree es atribuible por el mayor costo computacional del SGP8.

El comando de Defensa Aeroespacial de Norte América (NORAD) realiza la labor de rastrear todos los satélites artificiales orbitando la Tierra y mantiene una base de datos para ello¹. Esta información se compacta en el formato TLE, el cual describe la órbita del satélite en cuestión. El modelo utilizado para el cálculo del TLE es el SGP4, y es el modelo que se usará para la simulación de la tesis.

Como ejemplo, se muestra el TLE que se usará para la simulación de la misión. El cual fue accedido de la base de datos el 09 de mayo de 2022.

```

1 VALLESAT
2 1 25544U 98067A 22130.00000000 -.00003336 00000-0 -59655-4 0 00000
3 2 25544 051.6444 182.4237 0001080 268.0653 100.3194 15.49364799225949

```

La primera línea de texto contiene el nombre del satélite. Las otras dos líneas se describen en las tablas [3-1](#) y [3-2](#)

¹ Puede visitarse la página de celestrak.com para encontrar parte de la base de datos

Campo	Columnas	Contenido	ValleSat
1	1	Número de línea	1
2	03–07	Número del satélite (Catálogo)	25544
3	8	Clasificación (U: unclassified, C: classified, S: secret)	U
4	10–11	Designador Internacional (últimos dos dígitos de año de lanzamiento)	98
5	12–14	Designador Internacional (número de lanzamiento en el año)	067
6	15–17	Designador Internacional (pieza de lanzamiento)	A
7	19–20	Año de Época (últimos dos dígitos del año)	22
8	21–32	Época(día del año y una porción fraccional del día)	130.00000000
9	34–43	Primera derivada del Movimiento Medio dividido por 2	-0.00003336
10	45–52	Segunda derivada del Movimiento Medio dividido por 6	00000-0
11	54–61	<i>Término de arrastre (Punto decimal supuesto)</i>	-59655-4
12	63–63	Número 0 (formato de efemérides)	0
13	65–68	Número de elemento Incrementa cuando un nuevo TLE se genera para este objeto	000
14	69	Checksum (modulo 10) - comprobación de errores	0

Tabla 3-1.: Primera línea del TLE de ValleSat.

Campo	Columnas	Contenido	ValleSat
1	1	Número de línea	2
2	03–07	Número del satélite (Catálogo)	25544
3	09–16	Inclinación (grados)	51.6444
4	18–25	Ascensión recta del nodo ascendente (grados)	182.4237
5	27–33	Excentricidad (punto decimal supuesto)	0001080
6	35–42	Argumento del perigeo (grados)	268.0653
7	44–51	Anomalía media (grados)	100.3194
8	53–63	Movimiento Medio(revoluciones por día)	15.49364799
9	64–68	Número de revoluciones en Época (revoluciones)	22594
10	69	Checksum (modulo 10) - comprobación de errores	9

Tabla 3-2.: Segunda línea del TLE de ValleSat.

A partir de esta información se generan los vectores de posición y velocidad del satélite (efemérides) que se propagarán a lo largo del tiempo. Con este cambio de posición, los torques de las pertur-

baciones orbitales cambiarán eventualmente sus valores; los modelos de perturbaciones orbitales están conformados por ecuaciones diferenciales cuyos parámetros principales son los vectores de posición del objeto, luego estos modelos se actualizan al mismo tiempo que los propagadores orbitales. Ocurre de la misma forma con los marcos de referencia, los cuales son de utilidad para la generación de la referencia deseada para el sistema de control.

3.1.4. Marcos de referencia

Sistema de Referencia Inercial - Inertial Frame ($\mathcal{N}$)

De acuerdo con [Archinal et al., 2011], los sistemas coordenados planetarios se definen en relación con su eje de rotación promedio y varias definiciones de longitud según el cuerpo. La Unión Astronómica Internacional ha desarrollado el Sistema Internacional de Referencia Celestial (ICRS), un estándar actual que describe las coordenadas de los cuerpos celestes. El ICRS, mediante el Marco de Referencia Internacional Celeste (ICRF) utiliza expresiones aproximadas de los elementos rotacionales para definir los marcos de referencia inerciales planetarios (Figura 3-5):

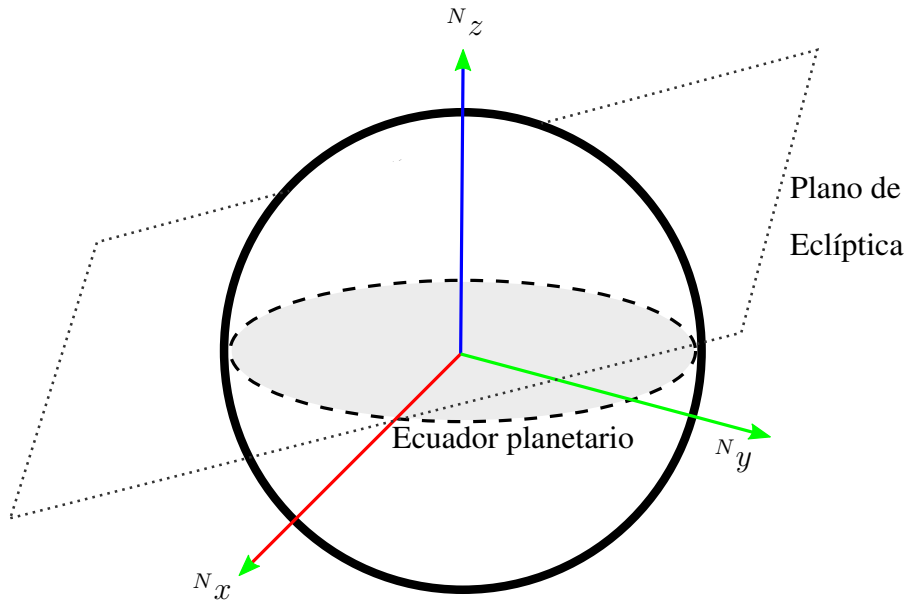


Figura 3-5.: Sistema de referencia inercial.

- N_x Se ubica en la intersección del ecuador del ICRF y el ecuador del planeta en J2000² (o en su nodo ascendente).
- N_z es el eje de rotación promedio del planeta.

²El J2000 es la fecha Juliana de coordenadas de uso más frecuente en la actualidad, corresponde al 1 de enero del 2000 a las 12.00 UTC.

Se le denomina eclíptica al paso aparente del sol visto desde la Tierra, luego el plano de la eclíptica contendría este movimiento.

- N_y completa la regla de la mano derecha y el plano xy se encuentra en el plano ecuador promedio del planeta en la fecha indicada.

Este sistema de referencia se le conoce como ECI (Earth Centred Inertial) cuando el planeta en cuestión es el planeta Tierra.

Sistema de Referencia Centrado y fijado en la Tierra - ECEF

Este sistema de referencia es similar al ECI, la diferencia radica en la dirección del eje x que en el ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed) se encuentra en dirección del meridiano cero, la figura 3-6 ilustra lo descrito:

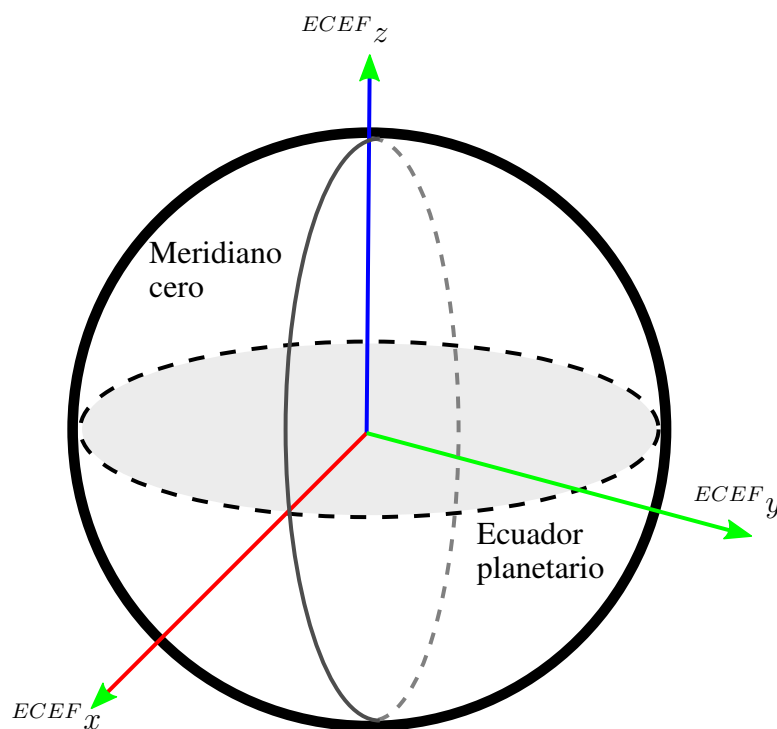


Figura 3-6.: Sistema de referencia Centrado en la Tierra.

- $ECEF_x$ Se ubica en dirección al meridiano cero, perpendicular al eje $ECEF_z$.
- $ECEF_z$ es el eje de rotación promedio del planeta.
- $ECEF_y$ completa la regla de la mano derecha y el plano xy se encuentra en el plano ecuador promedio del planeta en la fecha indicada.

Así, la diferencia entre ambos sistemas de referencia se visualiza mediante una Rotación tipo 3 (Ver sección de Ángulos de Euler (3.2.1)), cuyo ángulo está dado por:

$$\theta(t) = \frac{2\pi \cdot t}{t_d} \quad (3.15)$$

Donde t_d es el periodo de tiempo de un día sideral y t es el tiempo desde la última alineación entre ambos sistemas.

Sistema de Referencia Topocéntrico - THCS

Este sistema de referencia se incluye con el objetivo de describir la ubicación de la estación terrena sobre la superficie de la Tierra. Esta estación es únicamente visible por el satélite cuando se encuentra sobre el plano de horizonte local del lugar, dado por la tangente en un punto específico. Se le conoce también como Sistema de Coordenadas Horizontales (Topocentric Horizon Coordinate System - THCS) y utiliza la orientación Este-Norte-Cenit para describir las coordenadas. La figura 3-7 ilustra la descripción previa:

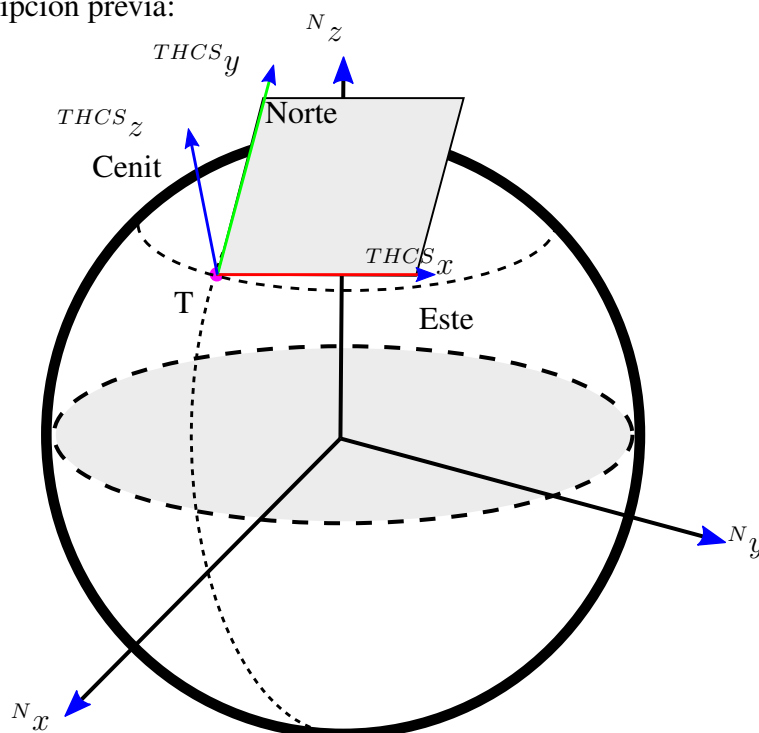


Figura 3-7.: Sistema de referencia topocéntrico. T (Target) representa el lugar de interés.

- $THCS_x$ Se ubica en dirección al Este.
- $THCS_y$ En dirección al Norte.
- $THCS_z$ En dirección al Cenit.

Visto desde la perspectiva Satélite-Estación, es posible trazar un vector de posición relativo entre ambos puntos (Figura 3-8).

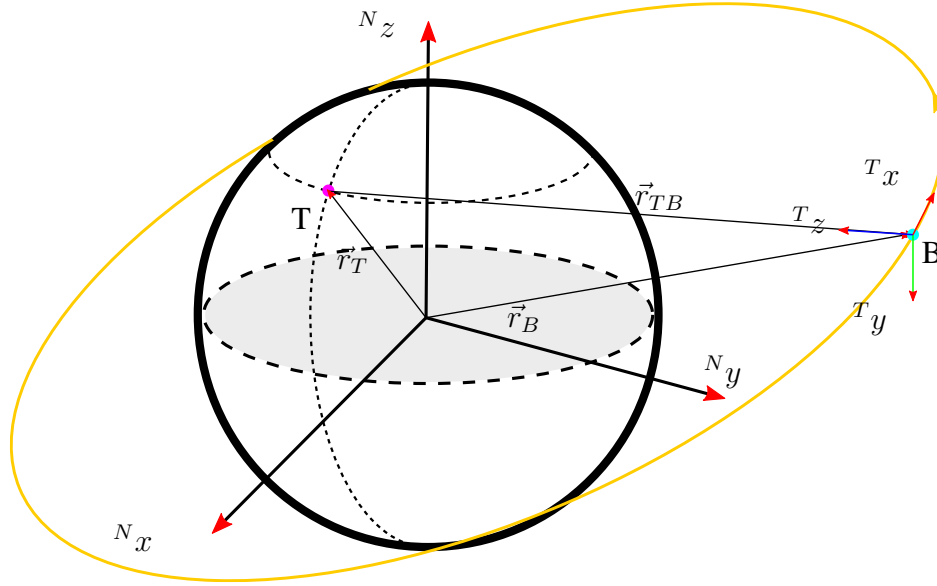


Figura 3-8.: Sistema de referencia topocéntrico relativo al cuerpo B (body) del satélite.

- T_z apunta en dirección opuesta al vector de posición relativo.
- T_y apunta en dirección perpendicular al plano descrito entre la velocidad orbital y T_z .
- T_x completa la regla de la mano derecha entre T_z y T_y .

Sistema de Referencia Orbital - Orbit Frame ($\mathcal{H}$)

Este sistema de referencia se mueve con el satélite y sus ejes se definen de acuerdo al marco de referencia de Hill según la figura 3-9:

- H_x apunta en la dirección de la velocidad de la órbita del satélite.
- H_z apunta en la dirección radial de la órbita (desde el centro del planeta hasta el satélite). El plano xz contendrá el plano de órbita instantánea
- H_y completa la regla de la mano derecha.

El *nadir* es la dirección desde el satélite opuesta a la dirección radial H_z .

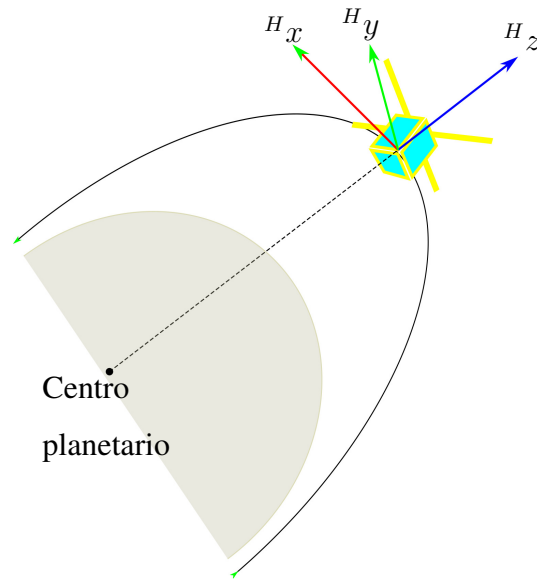


Figura 3-9.: Sistema de referencia orbital.

Sistema de Referencia del Cuerpo - Body Frame ($\mathcal{B}$)

Este sistema de referencia ubica su origen en el centro de masa del satélite y es normalmente definido por el equipo de ingenieros de la misión, este varía de una misión a otra [Rodríguez et al., 2020]. Este sistema de referencia suele basar su representación en ángulos de Euler. Una opción, y la que se usará en la tesis, es la de tomar los valores de los momentos principales de inercia y asociar los ejes x y z al máximo y al mínimo respectivamente como lo muestra la figura 3-10 :

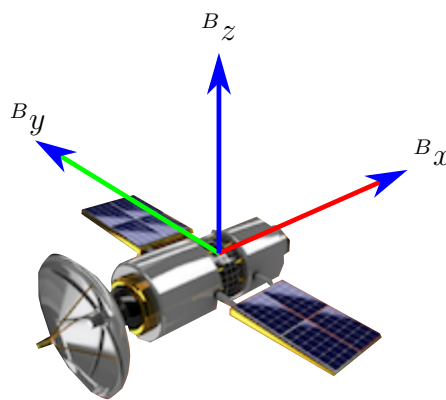


Figura 3-10.: Sistema de referencia del cuerpo.

- B_x apuntando en la dirección del eje de mayor inercia.
- B_z apunta en la dirección del eje de menor inercia.
- B_y completa la regla de la mano derecha.

3.2. Dinámica satelital

La dinámica satelital estudia el movimiento rotacional del satélite en el espacio ante la influencia de fuerzas (torques) como la gravedad, el arrastre atmosférico, la presión de radiación, entre otros. Esta dinámica abarca dos tópicos rotacionales: la *cinemática* para el movimiento angular del cuerpo y la *cinética* para la predicción del movimiento del satélite teniendo en cuenta la masa, inercia y torques. Estos dos tópicos describen matemáticamente los estados satelitales de orientación y velocidad angular (actitud).

3.2.1. Cinemática

Esta sección aborda la concepción sobre las diversas formas de representación angular y su relación con la matriz de cosenos directores. Del mismo modo se inducen las ecuaciones de movimiento de estas representaciones angulares que conllevan al hallazgo de la orientación angular en el tiempo (propagación angular).

La cinemática se encarga de la evolución temporal de las representaciones de orientación partiendo de la velocidad angular del cuerpo respecto a un marco de referencia inercial. Este método parte de observaciones geométricas para tener la descripción angular adecuada, evitando la integración directa de la velocidad angular (de la ecuación cinética) y con ella la acumulación de errores.

Por propósitos de facilidad del lenguaje de este documento, se establece la siguiente notación: un marco de referencia se denotan mediante una letra en mayúscula como $\mathcal{F}$ y sus vectores unitarios se denota mediante letras minúsculas como $\hat{f}_i$. Hay infinitas formas de representar un marco de referencia, pero por conveniencia las bases canónicas se escogen de tal forma que se alineen con los ejes principales del cuerpo.

Se define ω como el vector de velocidad angular (rotacional) instantánea del marco del cuerpo $\mathcal{B}$ respecto al marco inercial $\mathcal{N}$.

Partiendo de los marcos de referencia $\mathcal{N}$ y $\mathcal{B}$, se definen sus bases canónicas mediante los vectores ortonormales $\hat{b}$ y $\hat{n}$ haciendo uso de la regla de la mano derecha. Se definen mediante la notación vectorial:

$$\{\hat{n}\} = \begin{Bmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \\ \hat{n}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{b}\} = \begin{Bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Matriz de cosenos directores - DCM

La matriz de cosenos directores se usa para describir la orientación entre marcos de referencias. Por definición los marcos de referencia utilizan un conjunto de tres (3) vectores ortonormales que se ilustran en la figura 3-11:

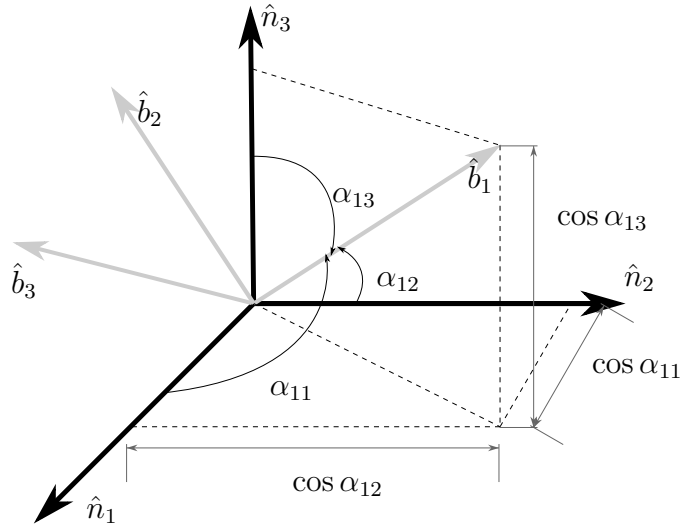


Figura 3-11.: Rotaciones entre dos sistemas coordenados. Tomado de [Junkins and Schaub, 2009].

Entre estos marcos de referencia es posible definir los ángulos α_{1i} que se forman entre el primer vector del cuerpo $\hat{b}_1$ y los tres ejes inerciales $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$ y $\hat{n}_3$. Los cosenos de estos tres (3) ángulos se los denominan *cosenos directores* de $\hat{b}_1$ y se miden respecto al marco de referencia $\mathcal{N}$. De igual manera se desarrolla para los otros vectores del cuerpo. Estos vectores $\hat{b}_i$ pueden ser proyectados en $\hat{n}$ como:

$$\hat{b}_1 = \cos \alpha_{11} \hat{n}_1 + \cos \alpha_{12} \hat{n}_2 + \cos \alpha_{13} \hat{n}_3 \quad (3.17)$$

$$\hat{b}_2 = \cos \alpha_{21} \hat{n}_1 + \cos \alpha_{22} \hat{n}_2 + \cos \alpha_{23} \hat{n}_3 \quad (3.18)$$

$$\hat{b}_3 = \cos \alpha_{31} \hat{n}_1 + \cos \alpha_{32} \hat{n}_2 + \cos \alpha_{33} \hat{n}_3 \quad (3.19)$$

Reescribiendo este conjunto de ecuaciones en forma matricial:

$$\{\hat{b}\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix} \{\hat{n}\} = [C] \{\hat{n}\} \quad (3.20)$$

Donde se denomina $[C]$ a la matriz de cosenos directores. Análogamente, el conjunto de vectores ortonormales $\{\hat{n}\}$ se puede expresar de forma matricial inversa:

$$\{\hat{\mathbf{n}}\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{31} \\ \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{32} \\ \cos \alpha_{13} & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix} \{\hat{\mathbf{b}}\} = [C]^T \{\hat{\mathbf{b}}\} \quad (3.21)$$

Matriz de Rotación

Las matrices de rotación, son transformaciones geométricas usadas para describir los cambios de orientación de los cuerpos respecto a determinados marcos de referencia [Castellanos et al., 2018]. La figura 3-12 ilustra el movimiento rotacional alrededor del eje Z:

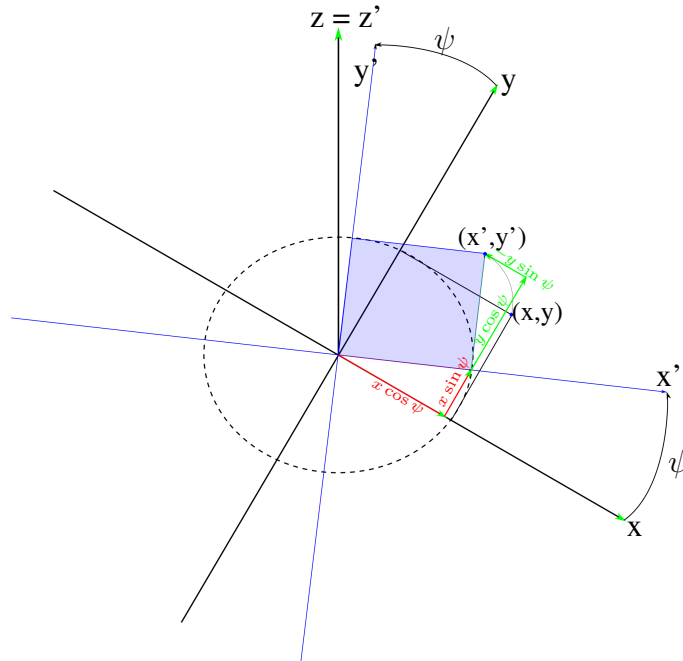


Figura 3-12.: Rotación alrededor del eje Z de los ejes de un sistema coordinado.

Se maneja la siguiente notación:

$$[M_x(\phi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$[M_y(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[M_z(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

La notación de estas matrices de rotación concierne a una descripción levógira, o de la mano izquierda. Se escoge esta convención dado que en la sección de dinámica orbital para la descripción de la posición satelital, la convención dextrógira (mano derecha) conlleva al uso de ángulos negativos. Con esta notación se evita hacer correcciones matriciales para la simulación posterior. Adicionalmente, esta convención es de amplio uso en el sector aeronáutico.

Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler se obtienen al realizar tres rotaciones sucesivas en el sistema coordenado, es decir, matemáticamente usan las matrices de rotación descritas previamente (Figura 3-13). A su vez, constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación del marco de referencia del cuerpo $\mathcal{B}$ (referencia móvil), respecto al marco de referencia inercial $\mathcal{N}$ (referencia fija).

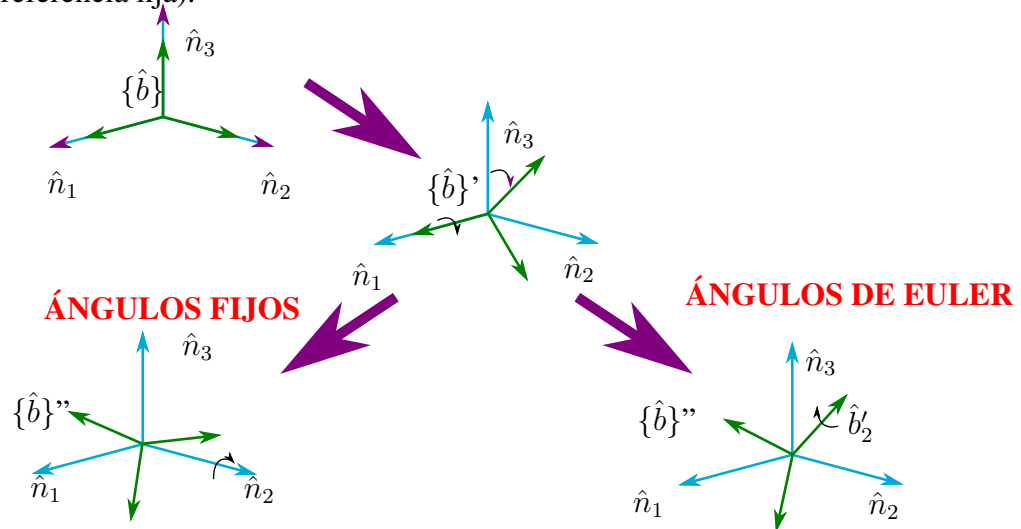


Figura 3-13.: Rotaciones en ejes fijos y móviles. Tomado de [Cortés, 2019].

Al efectuar rotaciones alrededor del marco del cuerpo (móvil) es necesario efectuar pre-multiplicaciones matemáticas; por otro lado, las rotaciones sobre el marco inercial (fijo) ocurren mediante post-multiplicaciones. Hablar de ángulos de Euler o de ángulos móviles es referirse a escrituras matemáticas de pre-multiplicación. Se usa la notación de subíndices numéricos 1, 2 y 3 para referirse a los ejes x , y y z respectivamente. Se definen una serie de secuencias básicas para las rotaciones:

- Secuencias tipo I: sin repeticiones de ejes (como 123).
- secuencias tipo II: con repeticiones de ejes (como 131).

Dadas las permutaciones, existen 12 rotaciones posibles para el conjunto de ángulos fijos y 12 rotaciones para el conjunto de ángulos móviles. Las 12 rotaciones para los ángulos de Euler son: 123, 132, 213, 231, 312, 321, 121, 131, 212, 313, y 323. Cabe recalcar que la secuencia 123 en el marco fijo es equivalente a la secuencia 321 en el marco móvil [Cortés, 2019].

La pre-multiplicación de las matrices de rotación se efectúa de esta forma:

$$[M_{213}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)] = [M_3(\theta_3)] [\overset{\leftarrow}{M_1}(\theta_2)] [M_2(\theta_1)] \quad (3.25)$$

Particularmente, son de interés dos combinaciones dentro de los ángulos de Euler:

- M_{321} (**Yaw, Pitch, Roll**) (ψ, θ, ϕ) : usado ampliamente dentro de la robótica móvil, aeronáutica y astronáutica para la descripción de rotaciones de vehículos.
- M_{313} (**Longitud del nodo ascendente, inclinación, argumento de periapsis**) (Ω, i, ω) : usado para descripciones orbitales. A esta secuencia se le conoce también como Precesión-Nutación-Rotación (Precession-Nutation-Spin)[Thomson, 2012].

La DCM de los ángulos de Euler se representa directamente por las matrices de rotación de pre-multiplicación. Para el caso de *Yaw-Pitch-Roll*, se representa de la siguiente forma [Junkins and Schaub, 2009]:

$$[C] = [M_{321}] = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & c\theta s\phi \\ s\theta c\phi c\psi + s\phi s\psi & s\theta c\phi s\psi - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Se usa una notación simplificada para expresar la matriz. Esto es c : $\cos()$, s : $\sin()$. A partir de esta matriz es posible obtener los ángulos respectivos de orientación:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \right) \quad (3.27)$$

$$\theta = -\sin^{-1} (C_{13}) \quad (3.28)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_{23}}{C_{33}} \right) \quad (3.29)$$

Del mismo modo para el DCM de ángulos de Euler 3-1-3.

$$[C] = [M_{313}] = \begin{bmatrix} c\omega c\Omega - s\omega c i s\Omega & c\omega s\Omega + s\omega c i c\Omega & s\omega s i \\ -s\omega s\Omega - c\omega c i s\Omega & -s\omega s\Omega + c\omega c i c\Omega & c\omega s i \\ s i s\Omega & -s i c\Omega & c i \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Cuyos ángulos de orientación se obtienen de la matriz como:

$$\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{C_{31}}{-C_{32}} \right) \quad (3.31)$$

$$i = \cos^{-1} (C_{33}) \quad (3.32)$$

$$\omega = \tan^{-1} \left(\frac{C_{13}}{C_{23}} \right) \quad (3.33)$$

Particularmente, las 12 combinaciones de ángulos de Euler poseen una singularidad geométrica que suele evidenciarse en la cinemática en el segundo ángulo de rotación. Para el caso de Yaw-Pitch-Roll (YPR) o en general de secuencias tipo I, la singularidad ocurrirá en $\pm 90^\circ$. Para el caso de la combinación 3-1-3 o en general de secuencias tipo II, la singularidad ocurre para 0° o 180° . Esto es evidenciable en las ecuaciones de movimiento cinemático que se definen a continuación:

Cinemática de los ángulos de Euler

Para el caso de la representación 3-2-1 el vector ω se describe de la siguiente forma con los componentes del marco del cuerpo [Curtis, 2010]:

$$\omega = \omega_1 \hat{b}_1 + \omega_2 \hat{b}_2 + \omega_3 \hat{b}_3 \quad (3.34)$$

La figura 3-14 muestra espacialmente la secuencia realizada:

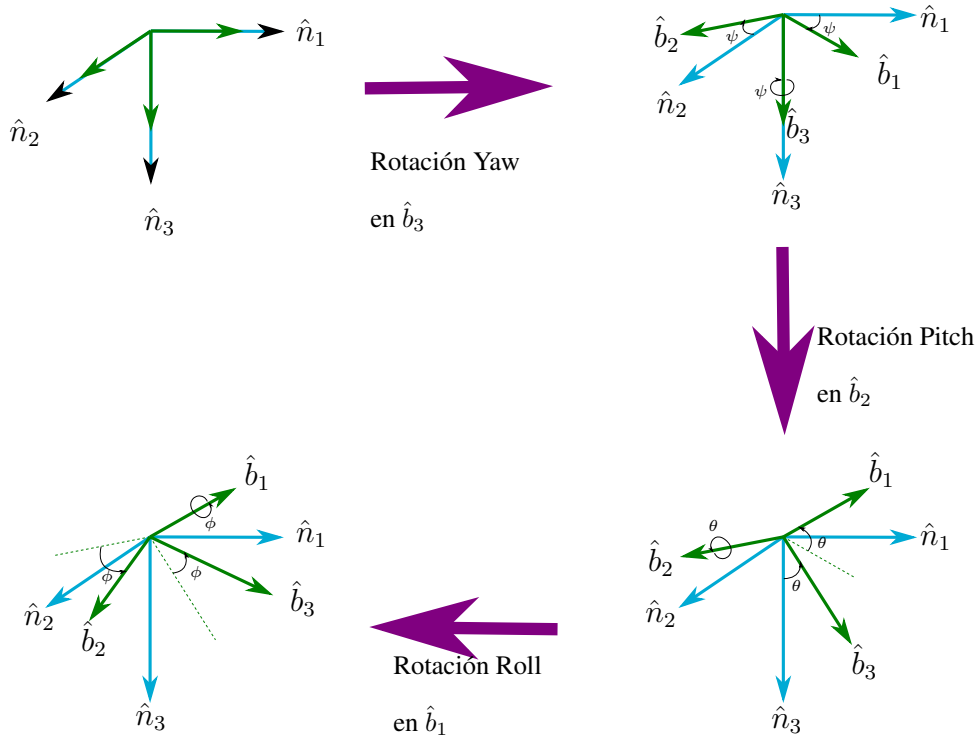


Figura 3-14.: Secuencia cinemática de los ángulos Yaw-Pitch-Roll.

De la figura es posible apreciar que el marco de referencia $\mathcal{B}$ puede ser escrito en términos de las variaciones temporales de los ángulos de Euler ($\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$) de la siguiente forma:

$$\omega = \dot{\psi} \hat{n}_3 + \dot{\theta} \hat{b}'_2 + \dot{\phi} \hat{b}_1 \quad (3.35)$$

El vector unitario $\hat{b}'_2$ es la dirección $\hat{b}_2$ del cuerpo fijo antes de rotar ϕ sobre el eje $\hat{b}_1$. De la misma figura, esto puede escribirse en términos del marco de referencia $\mathcal{B}$ como:

$$\hat{b}'_2 = \cos \phi \hat{b}_2 - \sin \phi \hat{b}_3 \quad (3.36)$$

El vector $\hat{n}_3$ puede expresarse en términos del marco de referencia $\mathcal{B}$ a partir de la DCM de la secuencia 3-2-1:

$$\hat{n}_3 = -\sin \theta \hat{b}_1 + \sin \phi \cos \theta \hat{b}_2 + \cos \phi \cos \theta \hat{b}_3 \quad (3.37)$$

Se sustituyen las ecuaciones (3.36) y (3.37) en (3.35) y luego comparando los términos con (3.34), se encuentra la siguiente ecuación cinemática:

$${}^B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ s\phi c\theta & c\phi & 0 \\ c\phi c\theta & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

La ecuación diferencial cinemática para los ángulos de Euler 3-2-1 es la inversa de la ecuación (3.38):

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} 0 & s\phi & c\phi \\ 0 & c\phi c\theta & -s\phi c\theta \\ c\theta & s\phi s\theta & c\phi s\theta \end{bmatrix} {}^B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = [B(\psi, \theta, \phi)]^B \boldsymbol{\omega} \quad (3.39)$$

Similarmente puede desarrollarse para los ángulos de Euler 3-1-3:

$${}^B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s\omega si & c\omega & 0 \\ c\omega si & -s\omega & 0 \\ ci & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

cuya relación inversa es:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin i} \begin{bmatrix} s\omega & c\omega & 0 \\ c\omega si & -s\omega si & 0 \\ -s\omega ci & -c\omega ci & si \end{bmatrix} {}^B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = [B(\Omega, i, \omega)]^B \boldsymbol{\omega} \quad (3.41)$$

A partir de estas relaciones inversas (3.39) y (3.41) es posible observar directamente las singularidades asociadas para los dos tipos de ángulos de Euler. Para la relaciones asimétricas como la (3-2-1) la indeterminación ocurre para ángulos de $\pm 90^\circ$ y para las relaciones simétricas como la (3-1-3) ocurre para los ángulos $0^\circ, 180^\circ$, lo que limita la descripción de rotaciones largas y específicas. Es posible apreciar que las relaciones de sus ecuaciones diferenciales son altamente no lineales, lo que requiere un alto costo computacional para las simulaciones y su linealización se restringe para pequeñas rotaciones del cuerpo. Por otro lado, la ventaja que ofrece sobre el resto de representaciones de actitud es que facilita la visualización de la orientación de los cuerpos.

Vector principal de rotación - PRV

Teorema de Euler: un cuerpo rígido o un marco de referencias coordinado puede ser reorientado desde su estado inicial a un estado final mediante una sola rotación mediante un ángulo principal Φ alrededor de un eje principal $\hat{e}$; Este eje principal es fijado respecto a las orientaciones final e inicial. La figura 3-15 ilustra este movimiento:

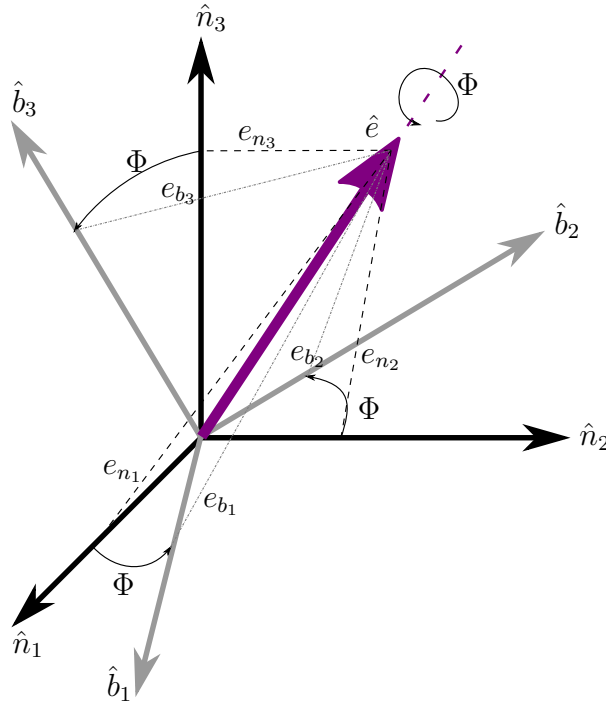


Figura 3-15.: Vector principal de rotación. Tomado de [Junkins and Schaub, 2009].

Al moverse del marco $\mathcal{N}$ a $\mathcal{B}$, se describe la siguiente ecuación que relaciona la orientación inicial y final por medio del vector principal de rotación (PRV) ³ [Junkins and Schaub, 2009]:

$$\{\hat{\mathbf{b}}\} = (\cos \Phi \mathbb{I}_3 + (1 - \cos \Phi) \hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}} - \sin \Phi [\hat{\mathbf{e}}]) \{\hat{\mathbf{n}}\} \quad (3.42)$$

Donde $\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}}$ es el producto externo del vector $\hat{\mathbf{e}}$. Usando la relación $\{\hat{\mathbf{b}}\} = [C] \{\hat{\mathbf{n}}\}$, la DCM que desarrolla esta ecuación está dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} e_1^2 \Sigma + c\Phi & e_1 e_2 \Sigma + e_3 s\Phi & e_1 e_3 \Sigma - e_2 s\Phi \\ e_2 e_1 \Sigma - e_3 s\Phi & e_2^2 \Sigma + c\Phi & e_2 e_3 \Sigma + e_1 s\Phi \\ e_3 e_1 \Sigma + e_2 s\Phi & e_3 e_2 \Sigma - e_1 s\Phi & e_3^2 \Sigma + c\Phi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

³Cabe recalcar que el procedimiento para la obtención de esta ecuación es independiente del procedimiento de los ángulos de Euler y la convención de sus matrices.

Donde $\Sigma = 1 - \cos(\Phi)$. La DCM $[C]$ depende únicamente de los parámetros atribuidos a los componentes del vector $\hat{e}$.

Por inspección del DCM, se pueden encontrar las relaciones inversas hacia los elementos principales de rotación:

$$\cos \Phi = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1) \quad (3.44)$$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \Phi} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Cinemática del vector principal de rotación

La ecuación de movimiento asociada al vector principal de rotación está dada por [Curtis, 2010]:

$$\dot{\gamma} = \left[\mathbb{I}_3 + \frac{1}{2}[\tilde{\gamma}] + \frac{1}{\Phi^2} \left(1 - \frac{\Phi}{2} \cot \left(\frac{\Phi}{2} \right) \right) [\tilde{\gamma}]^2 \right] {}^B \omega \quad (3.46)$$

Donde el vector principal de rotación es reescrito como $\gamma = \Phi \hat{e}$. Las notaciones de *Tilda* como $[\tilde{\gamma}]$ hacen referencia a una matriz antisimétrica descrita en el anexo B. Su relación inversa es:

$${}^B \omega = \left[\mathbb{I}_3 - \left(\frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \right) [\tilde{\gamma}] + \left(\frac{\Phi - \sin \Phi}{\Phi^3} \right) [\tilde{\gamma}]^2 \right] \dot{\gamma} \quad (3.47)$$

La ecuación (3.46) presenta una indeterminación de tipo 0/0 cuando $\Phi = 0$. Esto hace que el modelo no desarrolle correctamente rotaciones pequeñas, las cuales son esenciales en controladores con retroalimentación. Adicionalmente, contiene funciones trigonométricas y fracciones de grados que conllevan a hacerla poco atractiva para representar rotaciones arbitrarias de cualquier cuerpo.

Parámetros de Euler - Quaternions

Esta representación de actitud, proporciona mediante sus cuatro coordenadas relaciones redundantes y sin singularidades, lo que permite expresar rotaciones largas sin interrupciones. A partir del PRV es posible expresar los términos del cuaternión β [Junkins and Schaub, 2009]:

$$\beta_0 = \cos(\Phi/2) \quad (3.48)$$

$$\beta_1 = e_1 \sin(\Phi/2) \quad (3.49)$$

$$\beta_2 = e_2 \sin(\Phi/2) \quad (3.50)$$

$$\beta_3 = e_3 \sin(\Phi/2) \quad (3.51)$$

Dado que los elementos unitarios del PRV cumplen que $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$, consecuentemente se encuentra para los parámetros de Euler:

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \quad (3.52)$$

Esta relación describe geoméricamente una esfera unitaria de cuatro (4) dimensiones, lo que implica que cualquier rotación descrita mediante los ángulos de Euler representa una trayectoria sobre la superficie de la hipersfera.

Dada la DCM de la ecuación (3.43), se utiliza la relación entre el PRV y los cuaterniones para hallar la matriz de cosenos directores de los parámetros de Euler:

$$[C] = \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) & \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

De esta manera, los movimientos angulares generados por los marcos de referencia describen arcos sobre la hipersfera unitaria. Esta descripción hace de los parámetros de Euler una representación universalmente no singular y no única debido a los signos de $\pm\beta$.

Inversamente, a partir del DCM de la ecuación (3.53), es posible inspeccionar en los cuatro (4) parámetros:

$$\beta_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_{11} + C_{22} + C_{33} + 1} \quad (3.54)$$

$$\beta_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4\beta_0} \quad (3.55)$$

$$\beta_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4\beta_0} \quad (3.56)$$

$$\beta_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4\beta_0} \quad (3.57)$$

Escoger el signo positivo de β_0 corresponde al ángulo principal de rotación Φ , lo cual equivale a una rotación menor a 180° lo que equivale a una rotación corta. Por otro lado el signo negativo equivale a una rotación más larga.

Es posible encontrar otra nomenclatura para los quaternions en diferentes literaturas. Si el cuaternión real (no imaginario) no se enuncia al comienzo como β_0 o q_0 , se encuentra al final como β_4 o q_4 .

Cinemática de los quaternions

A partir de las ecuaciones (3.57) es posible derivar las relaciones de cada β_i , y con esto se desarrolla la ecuación diferencial cinemática de los parámetros de Euler [Curtis, 2010]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_0 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Esta matriz está libre de singularidades y de forma inversa la matriz estará definida en todo momento. Observando las relaciones entre los parámetros es posible observar que las ecuaciones son lineales si y solo si $\omega_i(t)$ son funciones temporales. Esta relación es muy interesante para la representación de la orientación, ya que simplifica los cálculos y la computación de una forma elegante. Es posible simplificar incluso más la relación eliminando la primera columna de la matriz principal:

$$\dot{\beta} = \frac{1}{2}[B(\beta)]^B \omega \quad (3.59)$$

Donde $[B(\beta)]$ es una matriz 4 x 3 definida como:

$$[B(\beta)] = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Parámetros Clásicos de Rodrigues - CRP

Los parámetros clásicos de Rodrigues $\mathbf{q}$ o vector de Gibbs, surge como un intento de minimizar los parámetros redundantes de Euler en un set de tres (3) parámetros con la intención de facilitar la visualización de la rotación. También suele conocerse como las coordenadas estereográficas de los parámetros de Euler [Junkins and Schaub, 2009]:

$$q_i = \frac{\beta_i}{\beta_0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.61)$$

De forma inversa los CRP están dados por:

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}}}, \quad \beta_i = \frac{q_i}{\sqrt{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.62)$$

Usando las definiciones del PRV, es posible expresar directamente una relación entre los parámetros clásicos de Rodrigues y el vector de rotación principal:

$$\mathbf{q} = \tan \left(\frac{\Phi}{2} \hat{\mathbf{e}} \right) \quad (3.63)$$

De esta relación se podrá apreciar en la sección de cinemática que los CRP encuentran una singularidad cuando $\Phi \rightarrow \pm 180^\circ$. A comparación de los ángulos de Euler, esto les permite describir rotaciones largas sin aproximarse a la singularidad geométrica.

Dado [Junkins and Schaub, 2009], es posible considerar una proyección estereográfica de los quaternions, en donde estos parámetros pueden ser vistos como una proyección de una esfera unitaria sobre un hiperplano, como lo ilustra la figura 3-16:

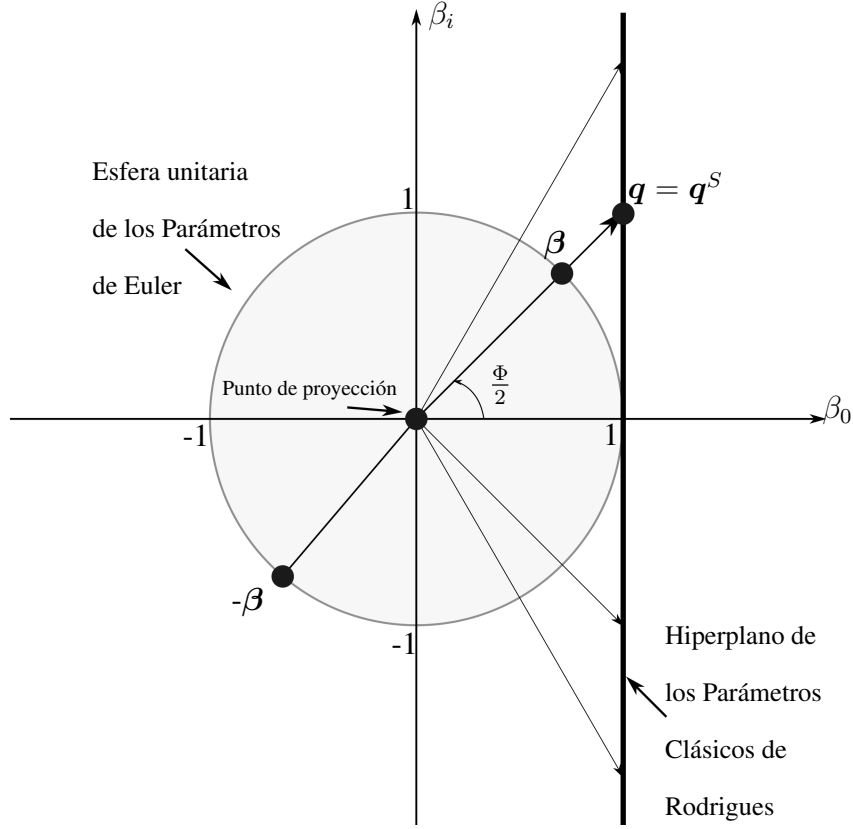


Figura 3-16.: Proyección estereográfica de cuaterniones: Parámetros clásicos de Rodrigues. Tomado de [Junkins and Schaub, 2009].

Dado que los CRP se definen a partir de los Parámetros de Euler y estos no tienen una representación única, se espera que la proyección de los parámetros no sea única. El set correspondiente al cuaternión $-\beta$ se lo denota como set *Sombra* y se lo identifica con una S como superíndice. Sin embargo, la sombra de los parámetros clásicos de Rodrigues es idéntica al set original y se evidencia cambiando el signo de los parámetros en la ecuación (3.61):

$$q_i^S = \frac{-\beta_i}{-\beta_0} = q_i \quad (3.64)$$

La DCM de los CRP puede hallarse partiendo de la ecuación (3.53) y recordando la definición principal de la ecuación (3.61):

$$[C] = \frac{1}{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}} \begin{bmatrix} 1 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_3) & 2(q_1 q_3 - q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_3) & q - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_2) & 2(q_2 q_3 - q_1) & 1 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Una forma simplificada se escribe en forma vectorial:

$$[C] = \frac{1}{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}} ((1 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbb{I}_3 + 2\mathbf{q}^T \mathbf{q} - 2[\tilde{\mathbf{q}}]) \quad (3.66)$$

A partir de esta matriz es posible obtener directamente la relación de los parámetros de Rodrigues:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\zeta^2} \begin{pmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Cinemática de los parámetros clásicos de Rodrigues

La ecuación diferencial cinemática de los CRP se encuentra tomando los parámetros derivativos de los cuaterniones y luego se reemplazan en la ecuación (3.61). La matriz resultante se muestra a continuación [Curtis, 2010]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + q_1^2 & q_1 q_2 - q_3 & q_1 q_3 + q_2 \\ q_2 q_1 + q_3 & 1 + q_2^2 & q_2 q_3 - q_1 \\ q_3 q_1 - q_2 & q_3 q_2 + q_1 & 1 + q_3^2 \end{bmatrix}^B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = [B(\mathbf{q})]^B \boldsymbol{\omega} \quad (3.68)$$

Esta expresión puede compactar si se escribe en forma matricial:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} [\mathbb{I}_3 + [\tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{q}\mathbf{q}^T]^B \boldsymbol{\omega} \quad (3.69)$$

La relación inversa establece:

$${}^B \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}} (\mathbb{I}_3 - [\tilde{\mathbf{q}}]) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.70)$$

Mediante estas relaciones se puede evidenciar que cuando $\mathbf{q}(t)$ se acerca a $\Phi = \pm 180^\circ$ tanto $\mathbf{q}$ como $\dot{\mathbf{q}}$ tienden a infinito, y con esto la ecuación (3.70) llega una singularidad de tipo ∞/∞ , la cual es indeseable para las representaciones de orientación. Adicionalmente, es posible observar que la ecuación diferencial posee no-linealidades cuadráticas, que son tratables con mayor facilidad que las trigonométricas.

Parámetros Modificados de Rodrigues - MRP

Una modificación reciente fue acuñada a la familia de Parámetros de Rodrigues, el cual posee propiedades interesantes y atractivas para la representación de la orientación (attitude) de los cuerpos. Al igual que los CRP, los MRP son un conjunto de coordenadas estereográficas de los parámetros de Euler. Se lo denota con la letra griega σ y se establece mediante la siguiente relación [Junkins and Schaub, 2009]:

$$\sigma_i = \frac{\beta_i}{1 + \beta_0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.71)$$

Su transformación inversa está dada por:

$$\beta_0 = \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2}, \quad \beta_i = \frac{2\sigma_i}{1 + \sigma^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.72)$$

Donde $\sigma^{2n} = (\sigma^T \sigma)^n$.

La ecuación (3.71) muestra igualmente, que existe una singularidad si $\beta_0 = -1$, que ocurre cuando $\Phi = \pm 360$ deg, lo que significa que cualquier rotación puede ser descrita, excepto una rotación completa, que devuelve a la orientación original. Lo que proporciona el doble del rango disponible en los CRP. Sucede igual con las expresiones inversas.

De forma análoga a los CRP, los MRP tienen su proyección estereográfica de los parámetro de Euler. Sin embargo, el set correspondiente al cuaternión $-\beta$ resulta en una sombra (o imagen) diferente. Cada uno de estos sets (σ y $-\sigma$) describen válidamente la misma ecuación diferencial cinemática [Junkins and Schaub, 2009]. Es posible permutar entre ambos sets de parámetros arbitrariamente, de acuerdo a la necesidad y conveniencia mediante la siguiente relación:

$$\sigma_i^S = \frac{-\beta_i}{1 - \beta_0} = \frac{-\sigma_i}{\sigma^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.73)$$

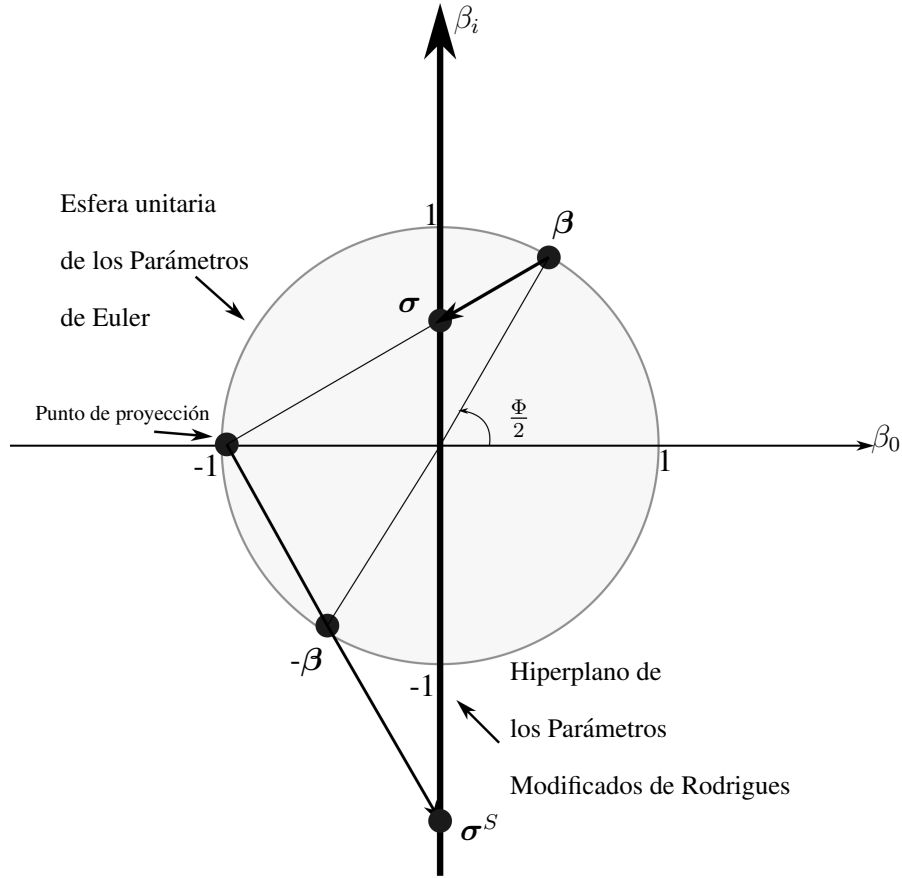


Figura 3-17.: Proyección estereográfica de quaternions: Parámetros modificados de Rodrigues. Tomado de [Junkins and Schaub, 2009]

Como se observa en la gráfica 3-17, σ está contenido dentro de la esfera unitaria y en cambio σ^S se encuentra por fuera. Dado que los parámetros de Euler no son únicos y dependen si $\Phi \geq 180^\circ$ o

si $\Phi \leq 180^\circ$, sucederá lo mismo para los MRP:

$$|\sigma| < 1 \quad \text{si} \quad \Phi < 180^\circ \quad (3.74)$$

$$|\sigma| > 1 \quad \text{si} \quad \Phi > 180^\circ \quad (3.75)$$

$$|\sigma| = 1 \quad \text{si} \quad \Phi = 180^\circ \quad (3.76)$$

$$(3.77)$$

De aquí el comportamiento de $|\sigma| = 1$ es de particular importancia. En este no solo se sitúan todas las rotaciones de 180° desde el origen, sino que muestra que mientras un set intenta salir de la esfera unitaria, el otro set sombra intentará entrar a la esfera. A diferencia del set original, esta relación hace que la singularidad de la sombra se presente en 0° , lo que permite evadir las singularidades mediante el cambio o permutación entre el original y la sombra cuando alguno se acerque a la singularidad. Es de interés mantener la representación dentro de la circunferencia, con lo que se garantiza un MRP de norma menor o igual a 1. Esta relación es un hecho fundamental porque tener una norma acotada demuestra que dos rotaciones pueden diferir únicamente por rotaciones finitas y además, la forma más corta de rotación [Junkins and Schaub, 2009].

La combinación de ambos sets sobre la superficie de la esfera (en donde $\sigma^T \sigma = 1$) proporcionan una descripción de la orientación (attitude) de manera no-singular, lo que es ideal para la descripción de rotaciones largas y arbitrarias. La combinación de ambos set también es de utilidad para las configuraciones de controladores con retroalimentación, ya que permite una buena linealización para ángulos pequeños y una norma acotada en 1 como máximo, con lo que se facilita la selección de las ganancias para la retroalimentación.

De igual forma que con los CRP, la matriz de cosenos directores de los MRP se obtiene de la ecuación (3.57) de los quaternions reemplazando la relación de estos con los MRP. Está dado por:

$$[C] = \frac{1}{(1+\sigma^2)^2} \begin{bmatrix} 4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) + (1 - \sigma^2)^2 & 8\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_3(1 - \sigma^2) & 8\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_2(1 - \sigma^2) \\ 8\sigma_2\sigma_1 - 4\sigma_3(1 - \sigma^2) & 4(-\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2) + (1 - \sigma^2)^2 & 8\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_1(1 - \sigma^2) \\ 8\sigma_3\sigma_1 + 4\sigma_2(1 - \sigma^2) & 8\sigma_3\sigma_2 - 4\sigma_1(1 - \sigma^2) & 4(-\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + (1 - \sigma^2)^2 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Una forma compacta se expresa mediante la siguiente escritura matricial:

$$[C] = \mathbb{I}_3 + \frac{8[\tilde{\sigma}]^2 - 4(1 - \sigma^2)[\tilde{\sigma}]}{(1 + \sigma^2)^2} \quad (3.79)$$

A partir de esta relación es posible encontrar la relación directa desde la DCM hacia los MRP:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\zeta(\zeta + 2)} \begin{pmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

Cinemática de parámetros modificados de Rodrigues

De forma similar a los CRP se hallan las relaciones para los MRP. La matriz resultante se establece en la siguiente relación [Curtis, 2010]:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \sigma^2 + 2\sigma_1^2 & 2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) & 2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2) \\ 2(\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3) & 1 - \sigma^2 + 2\sigma_2^2 & 2(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1) \\ 2(\sigma_3\sigma_1 - \sigma_2) & 2(\sigma_3\sigma_2 + \sigma_1) & 1 - \sigma^2 + 2\sigma_3^2 \end{bmatrix}^B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

De igual forma puede presentarse de una forma compacta mediante su escritura vectorial:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} [(1 - \sigma^2)\mathbb{I}_3 + 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma\sigma^T]^B \omega = \frac{1}{4} [B(\sigma)]^B \omega \quad (3.82)$$

Los MRP poseen una estructura similar a los CRP en su ecuación diferencial cinemática, presentando únicamente no-linealidades cuadráticas.

La relación inversa establece:

$$^B\omega = \frac{4}{(1 + \sigma^2)^2} [(1 - \sigma^2)\mathbb{I}_3 - 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma\sigma^T] \dot{\sigma} \quad (3.83)$$

O de forma simplificada:

$$^B\omega = \frac{4}{(1 + \sigma^2)^2} [B]^T \dot{\sigma} \quad (3.84)$$

3.2.2. Cinética

Dinámica es el estudio del movimiento de los cuerpos teniendo en cuenta las inercias y fuerzas que lo afectan. En este estudio se asume que el satélite es un cuerpo rígido, lo que significa que no hay deformación de las partículas debido al movimiento de otras. El movimiento del satélite es una superposición entre un movimiento de traslación (dinámica orbital) y un movimiento de rotación (dinámica de orientación) [Zamaro, 2010]. Por la segunda ley de Newton, el cambio del momento angular de un cuerpo será igual a la sumatoria de torques externos que se apliquen sobre el centro de masa de este cuerpo libre:

$$\dot{H}_{cm} = \sum_i L_{cm_i} \quad (3.85)$$

En donde el momento angular es el producto entre el momento de inercia y la velocidad angular del cuerpo rígido:

$$H_{cm} = [I_{cm}]\omega \quad (3.86)$$

Usando el teorema de transporte de Euler (o derivada material) se desarrolla la ecuación (3.85):

$$\dot{H}_{cm} = \frac{{}^B d}{dt}(H_{cm}) + \omega \times H_{cm} = L_c \quad (3.87)$$

Dado que es un cuerpo rígido $[I]$ es constante, luego la derivada del momento angular visto desde el marco $\mathcal{B}$ de referencia es:

$$\frac{{}^{\mathcal{B}}d}{dt}(\mathbf{H}_{cm}) = \frac{{}^{\mathcal{B}}d}{dt}([I])\boldsymbol{\omega} + [I]\frac{{}^{\mathcal{B}}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) = [I]\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.88)$$

Para la última igualdad de la ecuación previa, se tiene en cuenta que la derivada de la velocidad angular del cuerpo $\boldsymbol{\omega}$ es la misma vista en el marco $\mathcal{B}$ y en el marco $\mathcal{N}$:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{{}^{\mathcal{N}}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{{}^{\mathcal{B}}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{{}^{\mathcal{B}}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.89)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.86) y (3.88) en (3.87):

$$\sum_i \mathbf{L}_{cm_i} = [I]\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times ([I]\boldsymbol{\omega}) \quad (3.90)$$

Recordando la definición de matriz antisimétrica⁴, se llega a la *ecuación de movimiento rotacional de Euler*:

$$[I]\dot{\boldsymbol{\omega}} = -[\tilde{\boldsymbol{\omega}}][I]\boldsymbol{\omega} + \sum_i \mathbf{L}_{cm_i} \quad (3.91)$$

Cabe recordar que las ecuaciones fueron desarrolladas asumiendo que el vector de momento angular $\mathbf{H}_{cm}$ y el vector de torques externos $\mathbf{L}_{cm_i}$ están tomados respecto al centro de masa del cuerpo. Sin embargo, estas ecuaciones son válidas si se toman desde cualquier punto inercial arbitrario [Zamano, 2010]. Si se selecciona un sistema coordenado de referencia del cuerpo que esté alineado con los ejes principales de este, la matriz de este se transforma en una matriz diagonal que reduce la ecuación (3.91) en:

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = -(I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 + L_1 \quad (3.92)$$

$$I_{22}\dot{\omega}_2 = -(I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1 + L_2 \quad (3.93)$$

$$I_{33}\dot{\omega}_3 = -(I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 + L_3 \quad (3.94)$$

Perturbaciones

En el espacio exterior los satélites suelen estar expuestos a diferentes perturbaciones, que con el aumento progresivo del tiempo alteran tanto la órbita como la orientación del satélite. Entre las más relevantes se encuentran:

- **Presión de radiación solar (L_S):** este fenómeno es generado por la incidencia de la radiación solar sobre la superficie expuesta del satélite. Es función de parámetros como el flujo

⁴La matriz antisimétrica o SkewSymmetric permite remplazar el producto cruz entre dos vectores por una multiplicación algebraica matriz-vector.

solar, la altitud heliocéntrica y el área superficial de incidencia. El comportamiento de esta perturbación es descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{r}_{cp} \times \mathbf{F}_S \quad (3.95)$$

$$\mathbf{F}_S = -P_s A \cos \theta \left((1 - C_S) \hat{\mathbf{s}} + 2(C_S) \cos \theta + \frac{1}{3} C_D \right) \hat{\mathbf{n}} \quad (3.96)$$

$$P_s = I_s / c \quad (3.97)$$

Donde A es el área expuesta a la radiación solar, P_s es la constante de flujo solar, I_s es una constante solar la cual depende de la altitud heliocéntrica, c la velocidad de la luz, $\cos \theta = \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ($\hat{\mathbf{n}}$ vector unitario normal al área de incidencia, $\hat{\mathbf{s}}$ vector unitario paralelo al área de incidencia), C_S es el coeficiente de radiación especular y C_D es el coeficiente de radiación difusa. El torque es perpendicular a los rayos de incidencia del sol sobre el satélite. Los valores comunes son [Macdonald and Badescu, 2014] :

$$K = 0,5$$

$$S = 5 \text{ m}^2$$

$$I_s = 1400 \text{ W/m}^2$$

$$r = 0,1 \text{ m}$$

$$\mathbf{L}_S = 3,5 \times 10^{-6} \text{ Nm}$$

- **Arrastre aerodinámico** ($\mathbf{L}_A$): es originado por la fricción entre el satélite y las partículas atmosféricas del entorno presentes en la órbita baja, la cual es función de parámetros como el coeficiente de arrastre aerodinámico satelital, la densidad atmosférica y la altitud del cuerpo. El comportamiento de esta perturbación es descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{r}_{cp} \times \mathbf{F}_A \quad (3.98)$$

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{2} \rho C_D A v^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (3.99)$$

ρ es la densidad atmosférica del planeta, $\hat{\mathbf{v}}$ es el vector de velocidad del satélite en órbita, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie, A es el área de arrastre, C_D es el coeficiente de arrastre aerodinámico y $\mathbf{r}_{cp}$ es el vector de distancia hasta el centro de presiones del satélite. $\hat{\mathbf{n}}$ vector unitario normal al área de incidencia. Comúnmente los valores son [Macdonald and Badescu, 2014]:

$$\rho = 1 \times 10^{-12} \text{ kg/m}^3$$

$$C_D = 2$$

$$A = 0,0225 \text{ m}^2$$

$$r = 500 \text{ km}$$

$$\mathbf{L}_A = 1,2 \times 10^{-4} \text{ Nm}$$

- **Gradiente gravitacional** (L_G): esta perturbación es producida por el campo gravitatorio terrestre, varía de acuerdo a las características topográficas del planeta y respecto a la altitud del objeto respecto al planeta. El comportamiento de esta perturbación es descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{L}_G = \frac{3\mu}{R_C^5} \mathbf{R}_C \times [I] \mathbf{R}_C \quad (3.100)$$

$$\mathbf{L}_G = 3\eta^2 \hat{\mathbf{r}} \times [I] \hat{\mathbf{r}} \quad (3.101)$$

$$\eta^2 = \frac{\mu_{\oplus}^*}{(r_{\oplus} + h)^3} \quad (3.102)$$

Donde μ es la constante gravitacional del planeta central (GM); $\mathbf{R}_C$ es la distancia desde el centro del planeta hasta el centro de masas del satélite, desde el marco de referencia inercial; $r_{\oplus}$ es el radio de la Tierra; y h es la altura orbital del satélite. Normalmente el valor del torque suele ser $6 \times 10^{-5} Nm$ para entornos terrestres. Las ecuaciones presentadas (3.100 - 3.102) consideran idealmente a la Tierra como una esfera. En el capítulo 6 (Entorno de simulación) se hace uso de un modelo que incluye las anomalías gravitacionales debido a las irregularidades del planeta.

- **Torque magnético** (L_M): es inducido por momentos residuales magnéticos, originado por la interacción entre el satélite (dipolo magnético) y la magnetósfera. El comportamiento de esta perturbación es descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.103)$$

Donde m es el momento dipolar magnético del satélite y B el campo magnético del planeta, el cual depende de la orientación y la altitud del satélite. Generalmente los valores en un entorno terrestre son:

$$M = 0,1 \text{ Atm}^2; \quad \text{Ampere-turn-m}^2$$

$$B = 3 \times 10^{-5} \text{ Tesla}$$

$$\mathbf{L}_M = 3 \times 10^{-6} Nm$$

Cabe resaltar que al igual que para la propagación orbital de los satélites, existen modelos matemáticos que describen adecuadamente cada perturbación a lo largo de la órbita.

3.3. Controladores no Lineales

3.3.1. Estabilidad de sistemas no lineales

Estado de equilibrio

Se dice que en un sistema dinámico su vector de estados $\mathbf{x}_e$ se encuentra en equilibrio o es un punto de equilibrio si para cualquier instante t [Slotine et al., 1991]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \implies \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0 \quad \forall t > t_0 \quad (3.104)$$

Y una vez el sistema alcance el estado $\mathbf{x}_e$ permanecerá en este a lo largo del tiempo. Estos estados pueden ser pensados como estados naturales del sistema.

Vecindad B_δ

Dado un $\delta > 0$ y un vector de estados $\mathbf{x}(t)$, se dice que el vector de estados estará contenido en la vecindad $B_\delta(\mathbf{x}_r(t))$ si [Slotine et al., 1991]:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)\| < \delta \implies \mathbf{x}(t) \in B_\delta(\mathbf{x}_r(t)) \quad (3.105)$$

Donde la norma usada es una norma estándar Euclideana y la vecindad puede ser visualizada como una región esférica de radio δ con centro en $\mathbf{x}_r(t)$. La única condición de esta estabilidad es que se encuentre dentro de las fronteras finitas de δ .

Estabilidad de Lagrange

El movimiento de $\mathbf{x}(t)$ relativo a $\mathbf{x}_r(t)$ se dice que tiene una estabilidad de Lagrange (o que está acotado) si existe un $\delta > 0$ tal que [Slotine et al., 1991]:

$$\mathbf{x}(t) \in B_\delta(\mathbf{x}_r(t)) \quad \forall t > t_0 \quad (3.106)$$

Es decir, el sistema debe encontrarse dentro de la bola abierta a lo largo del tiempo.

Estabilidad de Lyapunov

El movimiento de $\mathbf{x}(t)$ relativo a $\mathbf{x}_r(t)$ se dice que tiene una estabilidad de Lyapunov si por cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que [Slotine et al., 1991]:

$$\mathbf{x}(t_0) \in B_\delta(\mathbf{x}_r(t_0)) \implies \mathbf{x}(t) \in B_\epsilon(\mathbf{x}_r(t)) \quad \forall t > t_0 \quad (3.107)$$

Es decir, el vector de estados $\mathbf{x}(t)$ permanecerá dentro de cualquier región arbitraria B_ϵ de $\mathbf{x}_r(t)$ dadas las condiciones iniciales de la vecindad $B_\delta(\mathbf{x}_r(t_0))$ de donde $\mathbf{x}(t)$ se originó. Si el movimiento de referencia $\mathbf{x}_r(t)$ resulta ser un estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$, la estabilidad de Lyapunov se simplifica de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(t_0) \in B_\delta(\mathbf{x}_e) \implies \mathbf{x}(t) \in B_\epsilon(\mathbf{x}_e) \quad \forall t > t_0 \quad (3.108)$$

Que se traduce en que el movimiento estará arbitrariamente el estado deseado.

Estabilidad asintótica

El movimiento de $\mathbf{x}(t)$ relativo a $\mathbf{x}_r(t)$ se dice que es estable asintóticamente si existe un $\delta > 0$ tal que [Slotine et al., 1991]:

$$\mathbf{x}(t_0) \in B_\delta(\mathbf{x}_r(t_0)) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r(t) \quad (3.109)$$

En otras palabras, existe una vecindad de tamaño δ con centro en $\mathbf{x}_r(t_0)$ cuyas condiciones iniciales de $\mathbf{x}(t_0)$ harán que el sistema converja asintóticamente hacia $\mathbf{x}_r(t)$. En el caso de que $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{x}_e$, se garantiza que el error de estado se aproxime a cero.

Estabilidad exponencial

Es un caso especial de la estabilidad asintótica, en donde el estado de equilibrio es estable exponencialmente si es asintóticamente estable y existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tales que [Slotine et al., 1991]:

$$\mathbf{x}(t_0) \in B_\delta(\mathbf{x}_r(t_0)) \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_r(t_0)\| \quad \forall t > t_0 \quad (3.110)$$

Lo que significa que la estabilidad converge de una forma exponencial. Sin embargo, probar su estabilidad es complicado.

Estabilidad global

El movimiento de $\mathbf{x}(t)$ relativo a $\mathbf{x}_r(t)$ se dice que será estable globalmente (estabilidad asintótica o exponencial) si $\mathbf{x}(t)$ es estable (estabilidad asintótica o exponencial) para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$.

3.3.2. Lyapunov

Una matriz $[K]$ se dice que es definida (o semidefinida) positiva o negativa para cualquier vector de estados $\mathbf{x}$ bajo las siguientes condiciones [Bachelor, 2018]:

$$\mathbf{x}^T [K] \mathbf{x} \begin{cases} \succ 0, & \implies \text{definida positiva} \\ \succeq 0, & \implies \text{semidefinida positiva} \\ \prec 0, & \implies \text{definida negativa} \\ \preceq 0, & \implies \text{semidefinida negativa} \end{cases} \quad (3.111)$$

Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es una función de *Lyapunov* del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si es continua y existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_r)$ se cumple:

1. $V(\mathbf{x})$ es una función definida positiva con centro en $\mathbf{x}_r$.
2. $V(\mathbf{x})$ tiene derivadas parciales continuas.

3. $\dot{V}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa.

Esta teoría de Lyapunov ayudará a analizar la estabilidad global de funciones para el diseño de los controladores. El análisis de estabilidad asintótica se desarrolla en el capítulo 7. Particularmente se tratarán dos controladores no lineales, uno basado en acciones no lineales de retroalimentación y otro es el controlador por modos deslizantes.

3.3.3. Funciones de Lyapunov

La teoría de Lyapunov sugiere entonces que debe encontrarse una función de aspecto energético cuyas propiedades conlleven a concluir que se garantice una estabilidad globalmente asintótica.

Cinética

Para un cuerpo rígido en rotación, la función de Lyapunov se basa en expresiones elementales de energía cinética:

$$V(\boldsymbol{\omega}) = T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T [I] \boldsymbol{\omega} \quad (3.112)$$

Esta función definida positiva (PDF) y tiende a infinito en cuanto $\boldsymbol{\omega}$ tiende a infinito, por lo que es también *Radialmente no acotada*. Al derivar temporalmente y simplificar esta ecuación se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \cdot 2 \boldsymbol{\omega}^T ([I] \dot{\boldsymbol{\omega}}) = \boldsymbol{\omega}^T (-[\tilde{\boldsymbol{\omega}}][I] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_T) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{u}_T \quad (3.113)$$

Con $\mathbf{u}_T$ el vector de torque total actuando sobre el cuerpo. Si se escoge $\mathbf{u}_T$ como una señal de control definida por $\mathbf{u}_T = -[P]\boldsymbol{\omega}$, con $[P] \succ 0$ matriz de ganancias, se observa finalmente que:

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\omega}^T [P] \boldsymbol{\omega} \preceq 0 \quad (3.114)$$

Es una función semi-definida negativa, con lo que se garantiza una estabilidad global. Adicionalmente se observa que la señal de control no depende de la inercia o de la orientación angular, caso que lo vuelve robusto ante las incertidumbres de masa presentes en el cuerpo.

El caso anterior se le conoce como control de regulación, cuyo objetivo es hallar una señal de control tal que $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$. En un satélite, esta operación de control se le conoce como *detumbling*. En caso de realizar apuntamientos, el control debe ser un control de seguimiento de referencias y su objetivo es $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_R = \delta\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$. Visto desde los marcos de referencia, esto es:

$${}^B \delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{B/N} - [B/R]{}^R \boldsymbol{\omega}_{R/N} = \boldsymbol{\omega}_{B/R} \quad (3.115)$$

Así, la función de Lyapunov y su derivada se reescriben como:

$$V(\delta\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \delta\boldsymbol{\omega}^T [I] \delta\boldsymbol{\omega} \quad (3.116)$$

$$\dot{V} = \delta\boldsymbol{\omega}^T [I] {}^B \frac{d}{dt} (\delta\boldsymbol{\omega}) \quad (3.117)$$

Aplicando la derivada material (teorema del transporte):

$${}^B \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_R + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_R \quad (3.118)$$

Reemplazando:

$$\dot{V} = \delta \boldsymbol{\omega}^T \left[[I](\dot{\boldsymbol{\omega}}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_R + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_R \right]; \quad \text{Recordar ec. 3.91} \quad (3.119)$$

$$\dot{V} = \delta \boldsymbol{\omega}^T (-[\tilde{\boldsymbol{\omega}}][I]\boldsymbol{\omega} + [I][\tilde{\boldsymbol{\omega}}]\boldsymbol{\omega}_R - [I]\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{u}_T) \quad (3.120)$$

Seleccionando $\boldsymbol{u}_T = +[\tilde{\boldsymbol{\omega}}][I]\boldsymbol{\omega} - [I][\tilde{\boldsymbol{\omega}}]\boldsymbol{\omega}_R + [I]\dot{\boldsymbol{\omega}} + [P]\delta \boldsymbol{\omega}$, la variación de la energía se simplifica en:

$$\dot{V} = -\delta \boldsymbol{\omega}^T [P] \delta \boldsymbol{\omega} \preceq 0 \quad (3.121)$$

Una función semi-definida negativamente.

Cinemática

Considerando la representación angular de los Parámetros Modificados de Rodrigues (MRP) se tiene que:

$$V(\boldsymbol{\sigma}) = 2\boldsymbol{\sigma}^T [K] \boldsymbol{\sigma} \quad (3.122)$$

El 2 al comienzo de la ecuación funciona como factor de simplificación durante la demostración. Se procede a hallar la derivada temporal de la función energética:

$$\dot{V} = 2 \cdot (2\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T) [K] \boldsymbol{\sigma} \quad (3.123)$$

$$\dot{V} = \frac{4}{4} \boldsymbol{\omega}^T ([B(\boldsymbol{\sigma})]^T [K] \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.124)$$

Recordar por ecuación de cinemática (3.82) que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{4} [B(\boldsymbol{\sigma})] \boldsymbol{\omega}$. Reemplazando su escritura vectorial se tiene que:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\omega}^T ((1 - \sigma^2) \mathbb{I}_3 + 2[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] + 2\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T) [K] \boldsymbol{\sigma} \quad (3.125)$$

Asumiendo que la ganancia de retroalimentación K es escalar y recordando que $\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} = \sigma^2$, $\dot{V}$ se simplifica a:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\omega}^T (K(1 + \sigma^2) \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.126)$$

que conduce a una ley de control de retroalimentación no lineal en términos de $\boldsymbol{\sigma}$. De acuerdo con [Tsotras, 1996], es posible escoger otra función para parámetros no redundantes de actitud, la cual no conlleva a no-linealidades:

$$V(\boldsymbol{\sigma}) = 2K \ln(1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.127)$$

Esta función es *positivamente definida* (PDF) y tiende a infinito en cuanto $\boldsymbol{\sigma}$ tiende a infinito, por lo que es también *Radialmente no acotada*. Debido a la propiedad de sombra de los MRP, la función de Lyapunov puede describir cualquier rotación sin encontrar alguna singularidad, resultando en un desempeño acotado para el error de actitud. Lo que hace que sus derivadas parciales sean continuas

en un rango de $[0, 2\pi)$, lo cual es conveniente para desarrollar controladores no lineales. Derivando temporalmente:

$$\dot{V} = 2K \cdot \frac{2\sigma^T \dot{\sigma}}{1 + \sigma^2} \quad (3.128)$$

Reemplazando y simplificando:

$$\dot{V} = \frac{4K\sigma^T}{1 + \sigma^2} \cdot \frac{1}{4}((1 - \sigma^2) + 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma^2)\omega \quad (3.129)$$

$$\dot{V} = \frac{K\sigma^T}{1 + \sigma^2} ((1 + \sigma^2) + 2[\tilde{\sigma}]) \omega \quad (3.130)$$

$$\dot{V} = K\sigma^T \omega + \frac{2K\sigma^T[\tilde{\sigma}]}{1 + \sigma^2} \omega \quad (3.131)$$

Por propiedades de las matrices antisimétricas (B), el segundo término en (3.131) se hace 0, llegando a la siguiente expresión:

$$\dot{V} = \omega^T (K\sigma) \quad (3.132)$$

Con esto presente, se desarrollarán leyes de control que permitan hacer seguimiento de referencia de actitud para efectuar apuntamientos.

En resumen, mediante el propagador orbital se abarcan los elementos orbitales y las dinámicas de un cuerpo en órbita para describir el movimiento de traslación que el satélite tiene durante su misión alrededor de la Tierra. Se deducen las ecuaciones de cinética rotacional y cinemática de los parámetros modificados de rodrigues para expresar el movimiento de rotación que el satélite tiene durante la órbita; este movimiento es el objetivo de control de la investigación. Por último, se abordan los conceptos de estabilidad y las funciones de Lyapunov que serán usadas para el diseño de los controladores.

4. Diseño de la misión

Este capítulo incluye aspectos generales de simulación de la misión y del ACS del satélite. Incluye los estados iniciales del satélite, la órbita y la descripción de los modos de operación.

4.1. Descripción de misión

Dado que ValleSat será lanzado desde la ISS, este se encuentra en una órbita baja Terrestre (LEO) y se dispone a observar la superficie no iluminada de la Tierra. El nanosatélite debe abarcar dos (2) operaciones principales: observar la superficie Terrestre y transmitir la información capturada por el sensor a la estación terrena. Además de esto, debe orientarse en dirección al sol para recargar las baterías. Entonces, las acciones de apuntamiento del satélite se resumen en las siguientes operaciones de acuerdo con las condiciones de la órbita en la que se encuentre:

- ***Estado Científico***: apuntará el sensor (o carga útil) a la superficie del planeta.
- ***Estado de Potencia***: apuntará los paneles solares en dirección al sol.
- ***Estado de Comunicaciones***: apuntará las antenas de comunicación a la estación terrena en Cali.

La figura 4-1 ilustra las operaciones de apuntamiento del ValleSat dentro de la misión satelital:

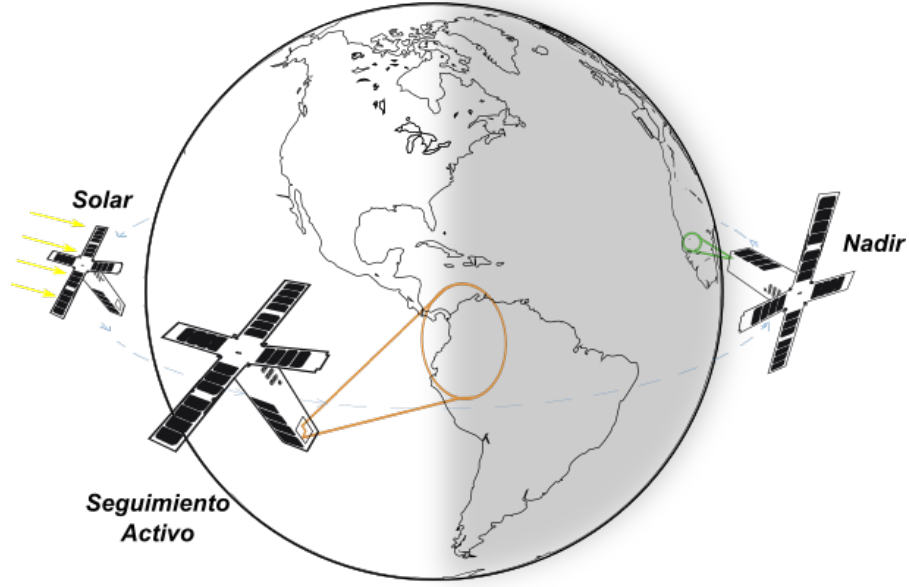


Figura 4-1.: Ilustración del escenario de la misión satelital.

La órbita de ValleSat es descrita mediante el Marco de Hill ($\mathcal{H}$). La figura 4-2 ilustra la orientación del satélite en el marco de Hill respecto al marco inercial ($\mathcal{N}$). En el marco de Hill, $\hat{i}_r$ apunta hacia el satélite, $\hat{i}_h$ está en dirección del vector de momentum angular, e $\hat{i}_\theta = \hat{i}_h \times \hat{i}_r$. Es importante notar que la definición del marco de Hill se hace mediante la representación de Ángulos de Euler (3-1-3) [Reid, 2009]. El nanosatélite está equipado con una antena para comunicaciones con la estación terrena (alineado con $\hat{b}_2$), un sensor para observar la Tierra (alineado con $-\hat{b}_3$), y los paneles solares para la potencia eléctrica (alineado con $+\hat{b}_3$).

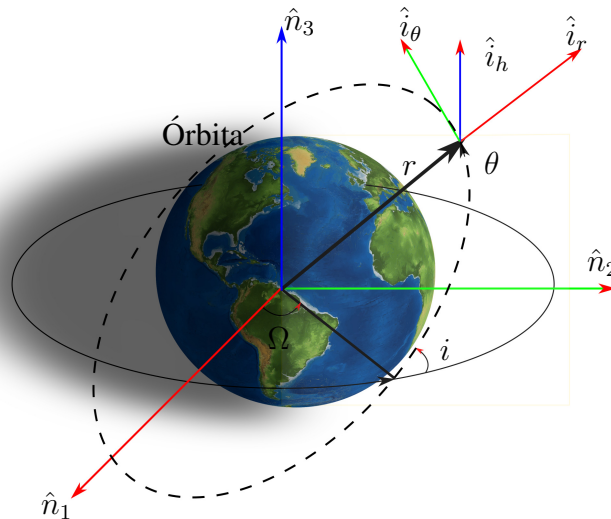


Figura 4-2.: Ilustración del marco Inercial $\mathcal{N} : \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$ y del Marco Orbital de Hill $\mathcal{H} : \{\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_h\}$.

La figura 4-3 muestra la disposición del satélite y el marco de referencia del cuerpo ($\mathcal{B}$).

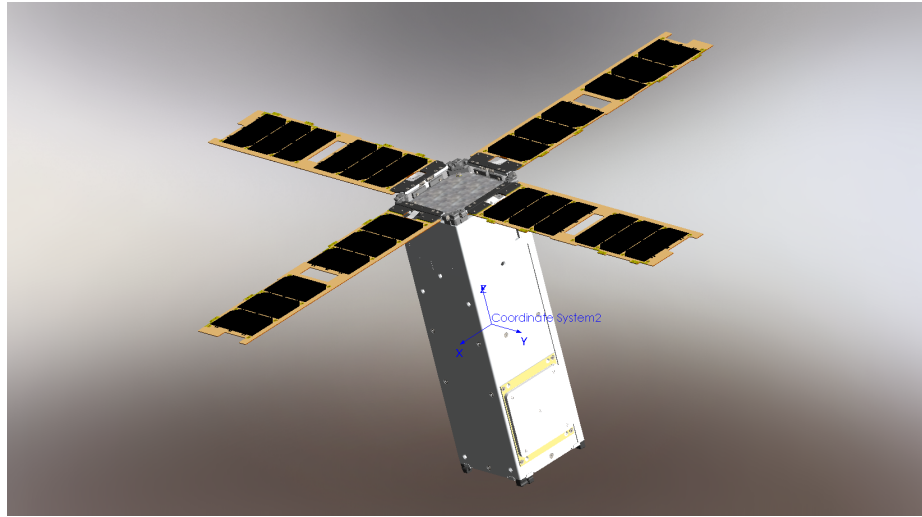


Figura 4-3.: Ilustración del satélite y el marco del cuerpo.

Sobre ValleSat (figura 4-3), se escoge un modelo de configuración de 3U, pensando en los tamaños reales de productos comerciales. Un kit de ADCS (ruedas de reacción, magnetorquers, sensores) dispone normalmente de 1U para su funcionamiento ¹, de igual manera un conjunto de baterías ² y la carga útil ³. Los paneles solares del modelo se seleccionan desplegables, esto con el objetivo de poder ejecutar la maniobra de apuntamiento al Sol para aprovechar la incidencia perpendicular sobre los paneles, ya que al estar siempre fijo en los costados no habría necesidad de ejecutar la maniobra.

Para llevar a cabo la misión, deben calcularse las expresiones de actitud de referencia que el satélite debe seguir así como los errores de actitud asociados. Una vez se conozcan estas cantidades, tanto la posición como la orientación actual del satélite, eventualmente se implementan las leyes de control que hacen que el nanosatélite se oriente desde el marco del cuerpo $\mathcal{B}$ hacia el marco de referencia $\mathcal{R}$ para los tres (3) modos de operación.

¹<https://bit.ly/3YcK1QE>

²<https://bit.ly/3kX9ZJE>

³<https://bit.ly/3XZ72qA>

4.2. Aspectos de simulación de misión

4.2.1. Estados de actitud de la nave

La orientación inicial se establece a partir del estado inicial de la referencia, con una diferencia de 0.1 por componente:

$$\sigma_{B/N}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La velocidad angular inicial del cuerpo se escoge nuevamente aleatoriamente, considerando que las acciones del satélite comienzan luego del detumbling:

$${}^B\omega_{B/N}(t_0) = {}^B \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,75 \\ -2,2 \end{bmatrix} \quad [^\circ/s] \quad (4.2)$$

La matriz de momentos de inercia principales del nanosatélite se define preliminarmente (mediante software de modelado gráfico) con los siguientes valores:

$${}^B[I] = \begin{bmatrix} 0,0335 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0337 & 0 \\ 0 & 0 & 0,019 \end{bmatrix} \quad kg \cdot m^2 \quad (4.3)$$

4.3. Escenarios de apuntamiento

Esta sección describe los diferentes modos de apuntamiento para el nanosatélite. Por simplificación, se puede asumir que el sol está a una distancia infinita de distancia y siempre se encuentra en la dirección $\hat{n}_2$, como se muestra en la figura 4-2.

Durante la misión, la ley de control debe ser capaz de re-orientar el satélite para apuntar activamente su antena ($\hat{b}_2$) hacia la estación terrena, su sensor ($-\hat{b}_3$) hacia la Tierra (dirección Nadir o dirección $-\hat{r}$) o sus paneles solares ($\hat{b}_3$) en la dirección solar siempre que la nave se encuentre en la cara iluminada de la Tierra (o dirección positiva de la coordenada $\hat{n}_2$). En otras palabras, cuando se encuentre en **Modo de Potencia**, la nave debe apuntar el eje de los paneles solares ($\hat{b}_3$) en la dirección ($\hat{n}_2$). Para completar la definición de este marco de referencia, se asume que $\hat{r}_1$ apunta en la dirección $-\hat{n}_1$.

Cuando la nave se encuentre en la cara no iluminada de la Tierra (hemisferio con dirección negativa de la coordenada $-\hat{n}_2$), deberá entrar en **Modo Científico** o **Modo de Comunicación**. En

el **Modo Científico**, el eje de la carga útil $-\hat{b}_3$ debe apuntar al centro de la Tierra o en la dirección de Nadir. Para completar este marco de referencia, se asume que $\hat{r}_2$ se alinea con la órbita con el eje de velocidad $\hat{i}_\theta$. El **Modo de Comunicación** requiere que los vectores de posición LEO y de Cali tengan una diferencia angular menor a 180° . En este modo el nanosatélite apuntará el eje del módulo de comunicación $\hat{b}_2$ hacia la estación terrena.

La tabla 4-1 resume las operaciones de apuntamiento:

Condición orbital	Objetivo principal del escenario de apuntamiento
Sat en cara iluminada de Tierra	Apuntar eje de paneles solares $\hat{b}_3$ al sol.
Sat en cara no iluminada de Tierra y Cali visible	Apuntar eje de antenas $\hat{b}_2$ a Estación Terrena.
Sat en cara no iluminada de Tierra y Cali no visible	Apuntar eje de sensor $-\hat{b}_3$ a Tierra en la dirección de Nadir.

Tabla 4-1.: Requerimientos de apuntamiento de la misión satelital.

4.4. Visión general de la órbita

Los parámetros orbitales iniciales se obtienen del TLE usado para la misión de ValleSat:

```

1 VALLESAT
2 1 25544U 98067A 22130.00000000 -.00003336 00000-0 -59655-4 0 00000
3 2 25544 051.6444 182.4237 0001080 268.0653 100.3194 15.49364799225949

```

Donde los elementos orbitales se muestran en la tabla 4-2

Elemento	Perigeo	Apogeo	excentricidad (e)	Long. Nodo ascendente (Ω)	inclinación (i)	Argumento de perigeo (ω)	Anomalía verdadera (θ)
Valor	414 km	418 km	0.000010	182.4°	51.6°	268.1°	100.3°

Tabla 4-2.: Parámetros orbitales iniciales.

Estos parámetros iniciales en la órbita de VALLESAT permite tener condiciones donde los eventos de apuntamiento aparecen en las tres primeras órbitas de simulación. La figura 4-4 fue obtenida mediante el software de STK y muestra el estado inicial del satélite en órbita:

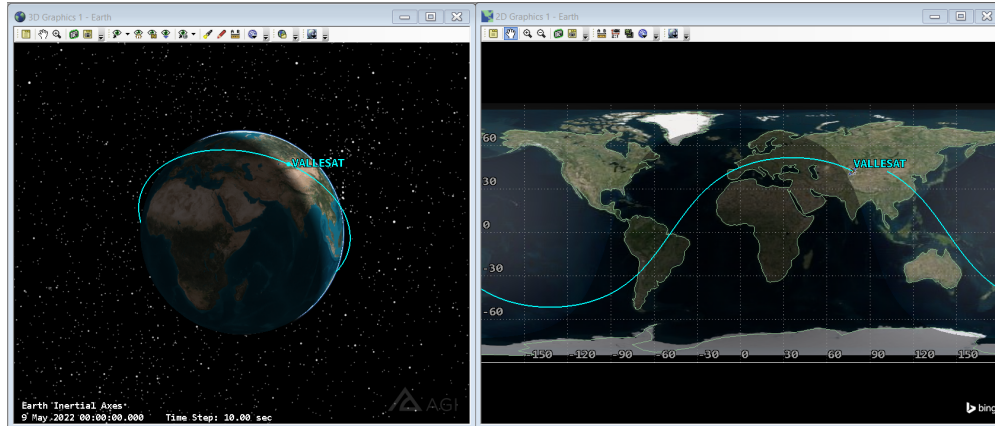


Figura 4-4.: Estado inicial orbital de la misión.

4.5. Visión general de controladores

Para desarrollar las operaciones de apuntamiento/seguimiento se emplean las siguientes leyes de control de actitud:

$$\text{No Lineal: } {}^B u = -K\sigma - [P]\omega + [I](\dot{\omega}_R - [\tilde{\omega}_B]\omega_R) + [\tilde{\omega}][I]\omega - L \quad (4.4)$$

$$\text{PD: } {}^B u = -K\sigma - [P]\omega - L \quad (4.5)$$

$$\text{SMC: } {}^B u = -b * \text{sign} \left(a * (\sigma_{B/N} - \sigma_{R/N}) + \omega \right) \quad (4.6)$$

4.6. Visión general del sistema ADCS

Como se ilustra en el marco teórico, el sistema de ACS recibe una coordenada de actitud (MRP) desde el ADS y una actitud de referencia para el apuntamiento (Figura 4-5). Con estas dos señales el algoritmo de control en el ACS calcula una señal de control que será la entrada para los actuadores que estén disponibles.

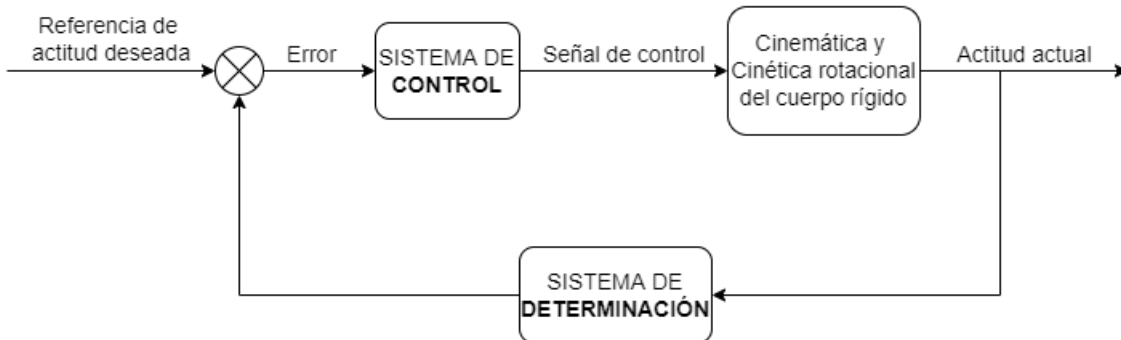


Figura 4-5.: Diagrama de bloques resumido del ADCS.

El sistema ADS está compuesto por un conjunto de múltiples sensores encargados de la determinación de actitud. Sin embargo, el diseño y simulación de observadores para el ADS es igual de extenso y complejo que los controladores del ACS. Por lo que, por simplicidad el diseño del sistema de determinación de actitud (ADS) no será parte del alcance de esta tesis de investigación.

4.7. Modos del ACS

La funcionalidad del ACS se dividen en seis (6) modos, usados en diferentes fases de la misión. La transición entre los modos será de forma autónoma, por ejemplo, luego de que el satélite es insertado en su órbita debe activar el control de actitud por primera vez. Estos modos se ilustran en la tabla 4-3:

Modo	Descripción
Inserción orbital	Momento luego de que se expulsa el nanosatélite de la ISS
Detumbling	Atenuación del cambio de actitud del satélite
Nadir	Apuntamiento al centro de la Tierra, Estado Científico
Seguimiento de objetivo	Apuntamiento activo a estación terrena, Estado de Comunicaciones
Solar	Apuntamiento en dirección del sol, Estado de Potencia
Seguro	Contingencia en caso de que algún evento inesperado ocurra.

Tabla 4-3.: Modos del ADCS

A continuación se describen los diferentes modos:

4.7.1. Inserción Orbital

El modo de Inserción Orbital se activa una vez el CubeSat se expulsa de la ISS. Luego de la expulsión, el CubeSat no tiene permitido generar o transmitir ninguna señal durante los primeros 45 minutos [CalPoly, 2020]. Lo que implica que el ACS no podrá usar los magnetorquers ni las ruedas de reacción. El detumbling no podrá ejecutarse hasta que se encuentre en un umbral de velocidad menor a 10 °/s. La actitud resultante y la posible velocidad de tumbling son proporcionados por el vehículo de lanzamiento hasta 45 minutos después de su expulsión.

4.7.2. Detumbling

Una vez la Inserción Orbital ha concluido el CubeSat es encendido y empezará una fase de tumbling con una velocidad dada por la acumulación de perturbaciones en la ISS durante la primera fase de la misión. Lo que significa que el CubeSat deberá ejecutar acciones de Detumbling.

El Detumbling se realiza mediante el uso de magnetorquers, el cual usa el campo magnético de la Tierra para crear un momento magnético en la dirección opuesta. Esta maniobra ralentizará eventualmente la velocidad angular del CubeSat y lo llevará a un estado estable en donde acciones de control más complejas podrán ser ejecutadas.

4.7.3. Nadir

En el modo de *Nadir* se efectúa el *Estado Científico* donde se almacenan datos de la carga útil. Las acciones de este modo consisten en apuntar la carga útil al centro de la Tierra.

4.7.4. Seguimiento de Objetivo

En el modo de Seguimiento de Objetivo se efectúa el *Estado de Comunicaciones* donde se usan las antenas para la transferencia de datos con la estación Terrena. Las acciones de este modo se desarrollan en un apuntamiento activo para un objetivo específico sobre la superficie de la Tierra u otro objetivo que requiera seguimiento.

4.7.5. Solar

En el modo Solar se efectúa el *Estado de Potencia*, donde se recargan las baterías mediante el uso de los paneles solares. A estos tipos de modos de operación se les conoce como *inactivos* o *Idle*, en el sentido que no hay objetivos para hacerle seguimiento o se almacenan datos para alguna carga útil.

4.7.6. Seguro

El modo Seguro suele usarse cuando el satélite enfrenta eventos inesperados, como el mal funcionamiento mecánico de los actuadores o en eventos donde el ADS se degrade significativamente, como en el caso de eclipse si el satélite depende mayoritariamente de sensores solares. En este último caso, el satélite es re-inducido al modo de Detumbling cuyo actuador magnético está exento de fallas mecánicas.

4.8. Operación de los modos de ACS

Estos modos pueden ser modelados como una máquina de estado finita y cada estado representa un modo. Un diagrama general de estados de transición del ACS se ilustra en la figura [4-6](#)

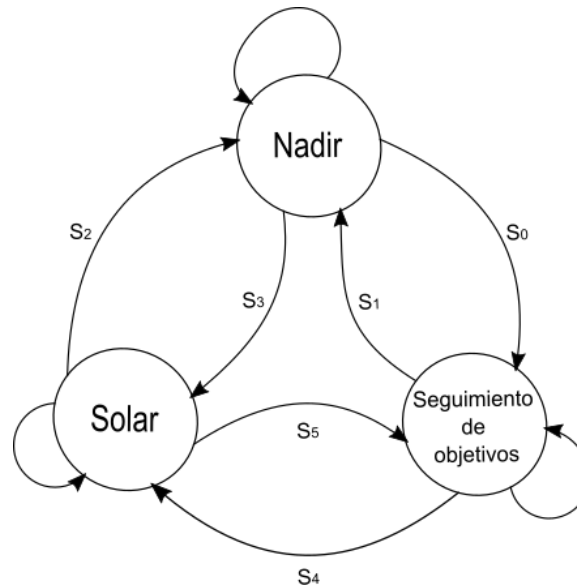


Figura 4-6.: Modos del ACS.

Las condiciones de transición entre los eventos relevantes se describen a continuación:

- S_1 : Transición del modo de Seguimiento de Objetivo al modo de Nadir. Esta transición normalmente ocurre cuando un pase⁴ ha finalizado el objeto a seguir ya no se encuentra en la línea de vista.
- S_2 : Transición del modo de Nadir al modo de Seguimiento de Objetivo. Esta transición ocurre cuando luego de otras operaciones, un objetivo de interés aparece en la línea de vista.
- S_3 : Transición del modo de Nadir al modo Solar. Esta transición ocurre cuando el sistema requiera suplir descargas de energía de las baterías y el satélite se encuentre en una zona de incidencia solar.
- S_4 : Transición del modo Solar a Nadir. Esta transición ocurrirá una vez el satélite haya recargado las baterías y en el caso de esta misión cuando se encuentre en eclipse.
- S_5 : Transición del modo de Seguimiento de Objetivo a modo Solar. De igual forma como S_3 , ocurrirá cuando el sistema requiera suplir descargas de energía de las baterías, la estación terrena ya no se encuentre en la línea de vista y el satélite se encuentre en una zona de incidencia solar.
- S_6 : Transición del modo Solar al modo de Seguimiento de Objetivo. Para esta misión ocurrirá cuando el satélite pase de una zona de incidencia solar a una zona de eclipse y la estación terrena de seguimiento aparezca en la línea de vista.

⁴Entiéndase como el tiempo o momento de visita sobre una zona u objetivo de interés

Todos estos estados pueden ser generados o inducidos por la computadora a bordo o por un operario en Tierra.

Cabe resaltar que los modos de *Inserción Orbital* y *Detumbling* no son objeto de estudio de esta investigación, por lo que no se incluyen en la máquina de estados descrita previamente. Los detalles de esto se mencionan en el siguiente capítulo.

En el anexo [D](#) se resumen los aspectos del diseño de misión.

5. Requerimientos del ACS

En este capítulo se enlistan los requerimientos funcionales y operacionales del ACS. En primera instancia se muestran los requerimientos funcionales, que luego serán divididos en sub-requerimientos operacionales en orden de complementar los requerimientos funcionales.

5.1. Requerimientos funcionales del ACS

La tabla 5-1 resume los requerimientos funcionales para el ACS en la misión:

Requerimiento	Título	Descripción	Referencia	Sub-requerimientos
R1	Nadir	El ACS debe ser capaz de realizar un apuntamiento a Nadir	Sección 4.7.3	R1.1, R1.2 R1.3 y R1.4
R2	Seguimiento objetivo	El ACS debe ser capaz de realizar un apuntamiento activo	Sección 4.7.4	R2.1, R2.2 y R2.3
R3	Solar	El ACS debe ser capaz de realizar apuntamiento al sol	Sección 4.7.5	R3.1, R3.2 R3.3 y R3.4

Tabla 5-1.: Requerimientos funcionales del ACS.

5.2. Requerimientos operacionales

En el Anexo C, la tabla C-1 resume especificaciones comerciales actuales del control y exactitud de apuntamiento de algunas empresas aeroespaciales alrededor del mundo. En base a esto se establece el requerimiento asociado al error de apuntamiento. A continuación se establecen los requerimientos operacionales asociados a cada modo de operación

5.2.1. Inserción Orbital

En esta fase el satélite no tiene permitido generar ningún tipo de señal, por lo que no existen requerimientos operacionales para este modo.

5.2.2. Detumbling

Como se describe en el capítulo anterior, el satélite entrará en esta fase luego de la Inserción Orbital o cuando entre al modo Seguro por alguna contingencia. Típicamente el detumbling debe llevar al satélite de un movimiento de 10 °/s a un estado estable menor a 0.3 °/s en tres órbitas [Ørsted et al., 2005]. Sin embargo, este control de regulación no es foco de la investigación, por lo que no será diseñado ni será incluido en la simulación.

5.2.3. Nadir

En el modo de apuntamiento Nadir el satélite apunta perpendicular a la superficie de la Tierra como efecto de apuntar a su centro. Esto implica que el satélite debe llevar una velocidad angular específica, la cual se calcula con los elementos orbitales que lleve el satélite. La figura 5-1 ilustra la ejecución del apuntamiento Nadir:

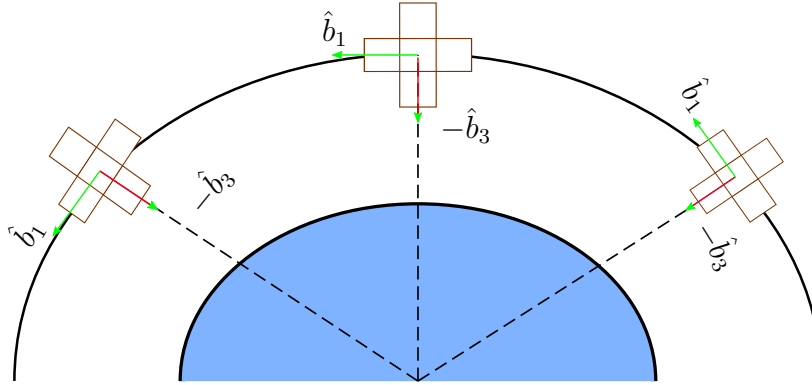


Figura 5-1.: Orientación del satélite cuando se encuentra en modo Nadir. Usa la dirección $-\hat{b}_3$ para apuntar la carga útil al centro de la Tierra.

En el modo nadir, la cámara de carga útil orientada en la dirección $-z$ o $-\hat{b}_3$ apuntará a Nadir. Esto requiere una velocidad angular específica para mantener la actitud. Ya que ValleSat se encuentra en una órbita aproximadamente circular, la velocidad angular puede ser descrita en términos del periodo orbital T , el cual se obtiene de los elementos orbitales. Así, la velocidad angular está dada por:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \quad (5.1)$$

Observando los registros de la ISS, se encuentra que el rango orbital se encuentra entre 90.52 min en 300 km y 92.56 min en 400 km [Wertz and Larson, 1999]. La mayor velocidad angular (peor caso) se encontrará entonces en 90.52 min:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{90,52 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cong 0,0012 \text{ rad/s} \quad (5.2)$$

Luego, la tabla 5-2 reúne los requerimientos operacionales para el modo de Nadir.

Sub-requerimiento	Título	Descripción	Requerimiento
R1.1	Exactitud	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	R1
R1.2	Velocidad de respuesta (Slew Rate)	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta $>0.0012 \text{ rad/s}$	R1
R1.3	Tiempo de asentamiento	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	R1
R1.4	Rango	Debe ser capaz de alcanzar el actitud de Nadir desde todas las actitudes iniciales	R1

Tabla 5-2.: Requerimientos operacionales del modo de Nadir.

5.2.4. Seguimiento de Objetivo

El modo de Seguimiento de Objetivo es el modo usado para el apuntamiento activo. De forma distinta al apuntamiento a Nadir, el apuntamiento activo encuentra la velocidad de respuesta para un objetivo en específico sobre la superficie de la Tierra. La figura 5-2 ilustra la ejecución del apuntamiento activo:

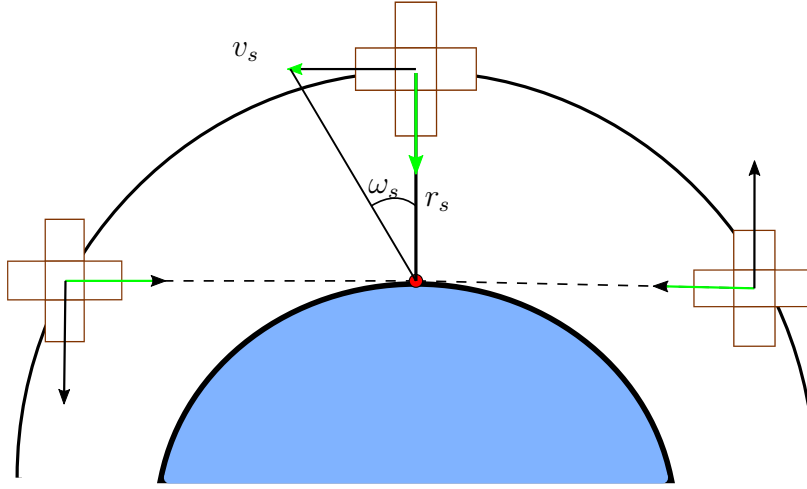


Figura 5-2.: Muestra el cambio de orientación satelital para efectuar seguimiento de objetivo.

De la figura 5-2 se observa que la velocidad angular del satélite es una composición entre la velocidad angular en Nadir y la velocidad angular necesaria para seguir un objetivo en la superficie terrestre. La velocidad necesaria se puede calcular mediante la siguiente relación geométrica:

$$\omega_s = \tan \left(\frac{v_s}{r_s} \right) \quad (5.3)$$

donde:

- ω_s : es el peor caso de velocidad angular.
- v_s : es la velocidad orbital del satélite.
- r_s : es la distancia más pequeña entre el satélite y el objetivo.

De la fórmula 5.3 se observa que un ángulo pequeño de rotación causará una velocidad angular mayor (peor caso). De la ISS se conoce que la menor distancia orbital es aproximadamente 300 km, cuya velocidad asociada es de 7.73 km/s. Así:

$$\omega_s = \tan \left(\frac{7,73}{300} \right) \cong 0,0257 \text{ rad/s} \quad (5.4)$$

Luego, los requerimientos para el modo de Seguimiento de Objetivo se resumen en la tabla 5-3:

Sub-requerimiento	Título	Descripción	Requerimiento
R2.1	Exactitud	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	R2
R2.2	Velocidad de respuesta (Slew Rate)	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta >0.0257 rad/s	R2
R2.3	Tiempo de asentamiento	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	R2

Tabla 5-3.: Requerimientos operacionales del modo Seguimiento de Objetivo.

5.2.5. Solar

Para este apuntamiento, dada la suposición de la Sección 4.3, se realizará el apuntamiento de los paneles solares orientados en la dirección $+z$ o $\hat{b}_3$ a un punto fijo, de forma similar al apuntamiento Nadir. Luego, los requerimientos para el modo Solar se resumen en la tabla 5-4:

Sub-requerimiento	Título	Descripción	Referencia
R3.1	Exactitud	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	R3
R3.2	Velocidad de respuesta (Slew Rate)	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta >0.0012 rad/s	R3
R3.3	Tiempo de asentamiento	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	R3
R3.4	Rango	Debe ser capaz de alcanzar el actitud Solar desde todas las actitudes iniciales	R3

Tabla 5-4.: Requerimientos operacionales del modo Solar.

5.2.6. Seguro

El modo Seguro usaría el modo Detumble, por lo que sus requerimientos son idénticos.

En resumen, en este capítulo se presentan los requerimientos operacionales y funcionales asociadas al ACS de la misión. Se limitarán los requerimientos operacionales a los requerimientos asociados al apuntamiento más demandante para los algoritmos de control: Seguimiento de objetivo (R2).

6. Entorno de simulación

Recordando la figura 3-1 del marco teórico, el aspecto de control del ADCS se compone de tres aspectos principales:

- Dinámica orbital.
- Dinámica satelital.
- Técnicas de control/observación.

En este capítulo se abordan los aspectos de simulación del eje temático de dinámica orbital, dinámica satelital y la interfaz entre ellos para completar el Escenario de Misión. Las técnicas de control y sus resultados se muestran en el capítulo siguiente.

Todos los códigos desarrollados y las funciones auxiliares creadas se encuentran disponibles en el repositorio de GitHub ¹.

6.1. Modelado orbital

Para esta sección se desarrolla una función que simula el propagador orbital SGP4. El modelo está basado en códigos desarrollados por MSc. Meysam Mahooti, los cuales pueden ser instaladas en MATLAB libremente ².

El esquema de código que utiliza está basado en los modelos desarrollados por Celestrak para el SGP4 -TLE³.

El comando *hpop* es una función que fue desarrollada fusionando aspectos de las librerías de HPOP y SGP4. Las entradas de la función son el TLE satelital, el tiempo máximo de simulación (minutos), el step (segundos) y el peso en gramos del satélite. Las salidas de la función son la efemérides (tiempo, posición y velocidad) satelital en los marcos ECI y ECEF. Dentro de la función *hpop* se cargan datos de perturbación orbital, propiedades físicas del satélite y constantes del

¹Repositorio de GitHub: <https://github.com/edcortessg13/MasterThesis>

²**SGP4:** Meysam Mahooti (2022). SGP4 (<https://bit.ly/2JgXjZf>), MATLAB Central File Exchange. Recuperado Junio 17, 2022.

HPOP: Meysam Mahooti (2022). High Precision Orbit Propagator (<https://bit.ly/3Tem6hj>), MATLAB Central File Exchange. Recuperado Junio 17, 2022.

³**Special Perturbation Techniques:** <https://bit.ly/3Tc0lNs>. **Force Model:**<https://bit.ly/3g25yL9>

modelo de propagación; mediante el TLE se extraen los elementos orbitales, la efemérides en el marco TEME (True Equator, Mean Equinox) y los tiempos de simulación (aspecto de SGP4), luego estos datos son propagados para obtener la efemérides en ECI y ECEF hasta el tiempo máximo ingresado (HPOP).

Tomando el TLE de ValleSat, con un tiempo de simulación de 86400 s (1 día), un paso de 60 s (1 min) y una masa de 10 kg se tienen los siguientes resultados:

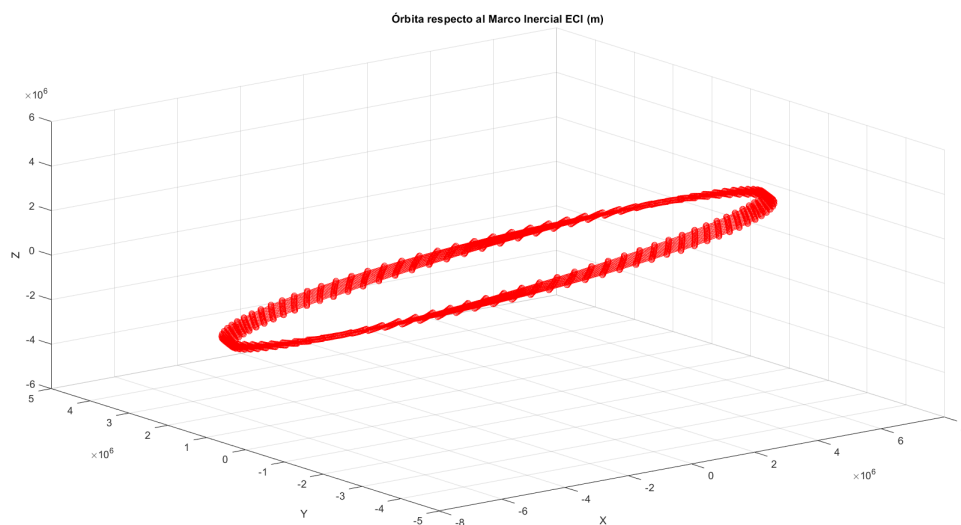


Figura 6-1.: Trayectoria orbital en ECI.

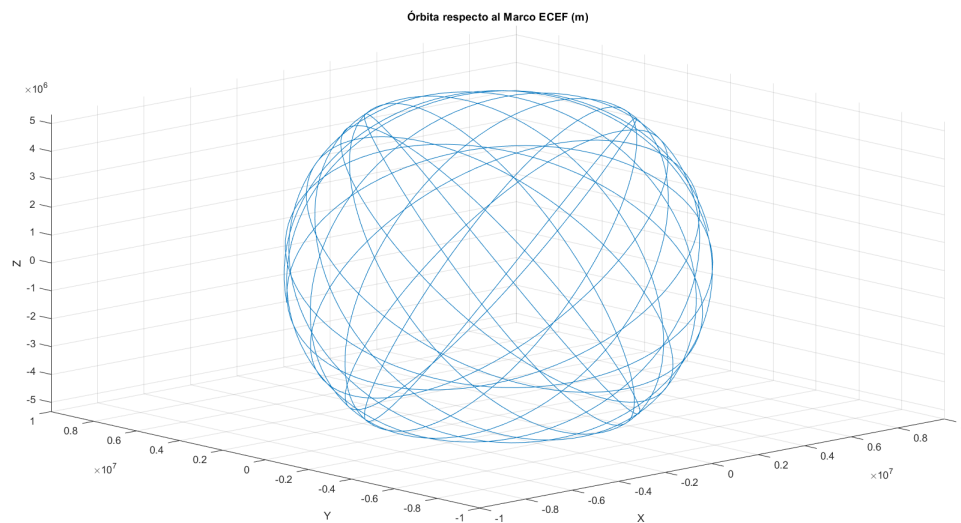


Figura 6-2.: Trayectoria orbital en ECEF.

Ambas gráficas muestran la posición del satélite desde el centro de la Tierra, describiendo trayectorias orbitales desde dos tipos de marcos de referencias distintos. Respecto al marco *ECI* (Figura 6-1), al ser un marco inercial, la trayectoria satelital describe un órbita donde algunos de sus elementos orbitales podrían apreciarse a simple vista. Por otro lado, respecto al marco *ECEF* (Figura 6-2), al variar con la rotación de la Tierra, la trayectoria descrita muestra el paso del satélite sobre la superficie terrestre.

Dado este hecho del marco ECEF, es posible transformar el tipo de coordenadas a coordenadas geocéntricas las cuales tienen como argumento la Longitud, Latitud, y Altura (ϕ, λ, h). La figura 6-3 muestra el resultado:

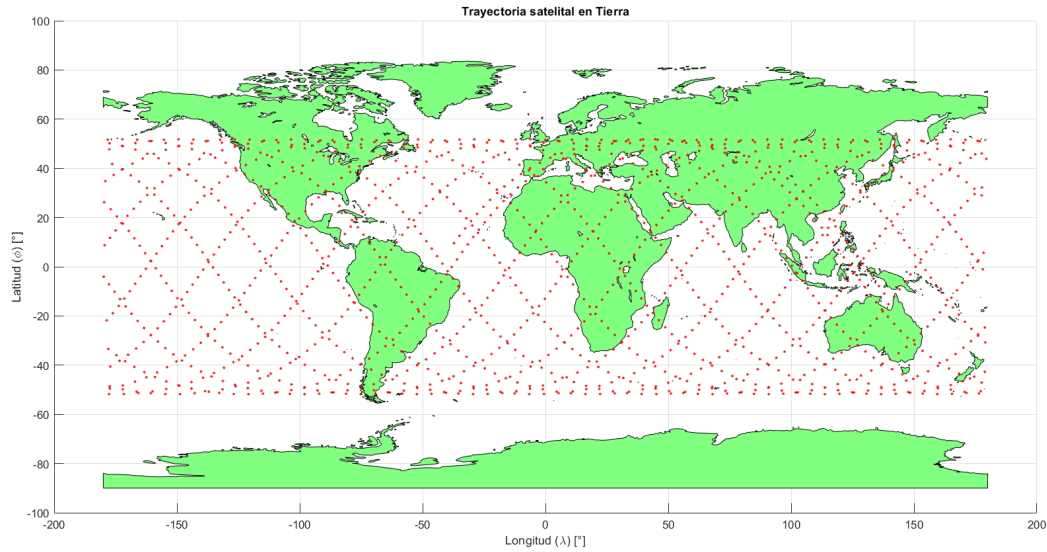


Figura 6-3.: Trayectoria satelital sobre la Tierra.

En donde se aprecia la proyección de la trayectoria satelital sobre la superficie terrestre. Para una órbita circular de 400 km de altitud, el periodo de esta es de $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu_{\oplus}}} \cong 5544,38 \text{ s}$. Teniendo

en cuenta que el periodo rotacional de la tierra es de 24 h, se tiene alrededor de $\left(\frac{8600 \text{ s}}{5544,38 \text{ s}} \cong 15,583 \right)$ 15 pases o vueltas alrededor de la Tierra. Esto es posible de evidenciar en el gráfico de la figura 6-3, contando la cantidad de líneas paralelas que se hallan en el mismo sentido.

De igual manera que con la efemérides satelital, es posible hallar la efemérides del sol, la cual servirá para generar el actitud de referencia de apuntamiento solar. En esta ocasión se hace uso del comando *toolbox Aerospace Toolbox* desarrollado por MATLAB, usando el comando *planetEphemeris*, el cual basa su funcionamiento en una base de datos generada por NASA Jet Propulsion

Laboratory (JPL)⁴, en la cual se tiene información de tiempo, posición y velocidad de los planetas con referencia a diferentes astros del sistema solar. Se halla la efemérides solar para un día de simulación:

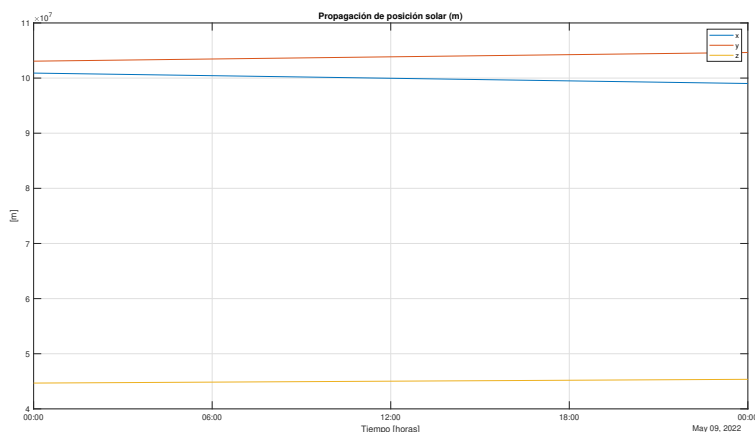


Figura 6-4.: Variación de posición solar.

La gráfica de la figura 6-4 muestra la posición solar respecto al marco inercial terrestre ECI. Es posible analizar que para sus tres componentes cartesianas la pendiente de variación es muy pequeña. Hecho que corrobora la suposición de que el sol se encuentra en una posición fija y a larga distancia para la simulación.

6.2. Modelado satelital

Recordando lo visto en el Marco Teórico Satelital, la actitud satelital está conformada por dos estados principales: la orientación angular y la velocidad angular, por lo que se requieren dos ecuaciones diferenciales para analizar su comportamiento. Es así como la *dinámica satelital* está compuesta por dos temáticas fundamentales: la cinética y la cinemática. La *cinética* estudia el movimiento rotacional del cuerpo rígido y cómo los torques externos lo afectan; en este se obtiene la propagación de la velocidad angular en el tiempo. La *cinemática*, por otro lado, analiza geométricamente el comportamiento de la velocidad angular y su repercusión directa en la orientación angular, por lo que mediante este se obtiene la propagación de la orientación angular en el tiempo.

6.2.1. Cinemática

Para la representación angular se hace uso de un sistema coordenado no-redundante, cuyas propiedades son de interés tanto como para la orientación angular como para las técnicas para abordar

⁴Base de datos NASA-JPL: https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html

las no linealidades del sistema. Recordando la ecuación (3.82):

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} [(1 - \sigma^2)\mathbb{I}_3 + 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma\sigma^T]^B \omega = \frac{1}{4}[B(\sigma)]^B \omega$$

Para resolver esta ecuación se debe escoger un método de solución numérico de ecuaciones diferenciales e iterarlo hasta un tiempo máximo y un paso de simulación. Para solucionar esta ecuación se usa el método de Euler, el cual establece que:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f'(x_i, y_i) \quad (6.1)$$

A modo de ejemplificación y partiendo de un estado inicial aleatorio, se propagan los MRP asumiendo que la velocidad angular del satélite tiene la siguiente expresión:

$$\omega_{BN}(t) = 20 \begin{pmatrix} \sin(0,1t) \\ 0,01 \\ \cos(0,1t) \end{pmatrix} \quad [^\circ/s]$$

Para un tiempo de simulación de 120 s y un paso de 0.01 s, el resultado se muestra en la figura 6-5:

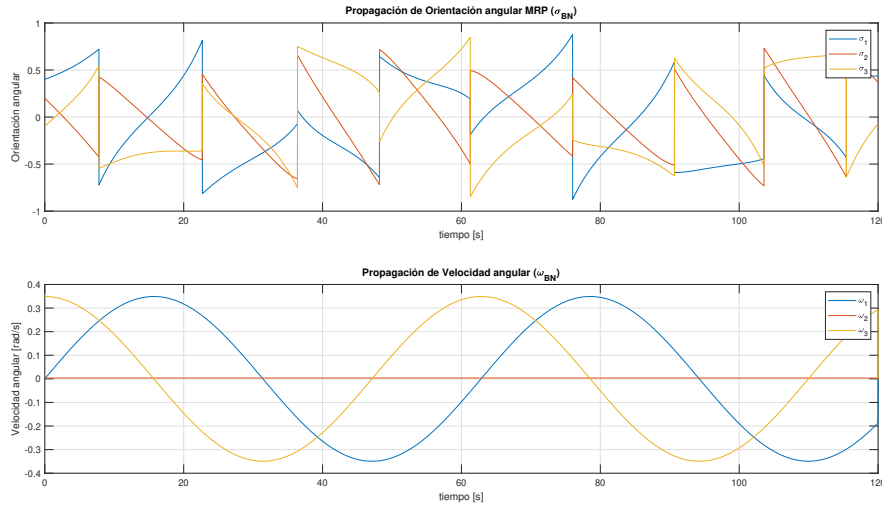


Figura 6-5.: Orientación angular y velocidad angular para modelado de cinemática.

La velocidad angular sigue el comportamiento que fue establecido, teniendo dos componentes sinusoidales y uno lineal. Por otro lado, la orientación angular evidencia un comportamiento que es regulado por la norma de los MRP. Tan pronto como la norma se encuentra cerca de 1, el MRP es cambiado o switchado por su sombra o conjugado. De esta forma puede describirse completamente la orientación y la propagación se encuentra en una zona de convergencia.

6.2.2. Cinética

Recordando la ecuación (3.91) de cinética rotacional:

$$[I]\dot{\omega} = -[\tilde{\omega}][I]\omega + u + L_{cm}$$

se construye el vector de estados de actitud, el cual va a estar conformado por la orientación y velocidad angular. El método para solucionar esta ecuación es el mismo procedimiento que para la ecuación cinemática.

Para ejemplificar, se asume una matriz de inercia diagonal dada por $diag([100, 75, 80]) \text{ kg.m}^2$, se usan condiciones iniciales aleatorias para la actitud satelital y se propaga para 120 s con un paso de 0.01 s, el resultado se muestra en la figura 6-6:

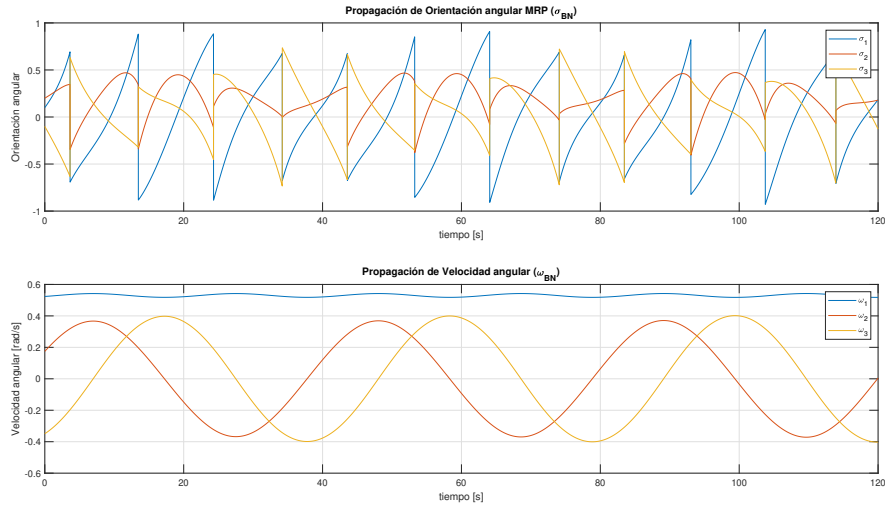


Figura 6-6.: Orientación angular y velocidad angular para modelado de cinética.

La velocidad angular en este caso sus tres componentes exhiben un comportamiento sinusoidal, dictado en gran medida por el orden de la matriz de inercias. De igual manera la orientación angular, muestra un comportamiento que es regulado por la norma de los MRP, permaneciendo siempre acotado. Cabe resaltar que este resultado no muestra convergencia a algún valor en específico por falta de referencia y ausencia del controlador.

6.3. Modelado: generador de referencias

Para conectar el aspecto orbital con el satelital es necesario generar una interfaz de *referencias de actitud* basada en los modos de operaciones satelitales (presentado en el capítulo de Diseño de Misión)

6.3.1. Apuntamiento Solar

Para establecer la referencia de apuntamiento solar se usa la suposición de que el sol se encuentra fijo respecto a la tierra y se encuentra en la dirección $\hat{n}_2$ como fue descrito en el diseño de misión. Para describir la referencia se hace uso del marco inercial - ECI.

Marco solar

La **variación** entre el marco inercial terrestre (ECI) y uno fijado en el sol se presenta por la traslación de la Tierra respecto al sol. Esta velocidad de traslación se le conoce como Movimiento Medio o Mean Motion ($\eta_{\odot}$). El movimiento medio de la Tierra es de $\left(\eta = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{d_{\oplus}^3}}\right)$ 3.45e-10 rad/s, por lo que se asume que, dado el tiempo de simulación de 1 día, no existirá movimiento relativo entre estos.

Dado lo planteado en el diseño de misión, la alineación de los marcos de referencia se hará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= -\hat{n}_1 \\ \hat{b}_2 &= \hat{b}_3 \times \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 &= \hat{n}_2\end{aligned}\tag{6.2}$$

6.3.2. Apuntamiento Nadir

Para establecer la referencia de apuntamiento a Nadir basta con conocer la efemérides satelital en ECI durante el tiempo de simulación.

El marco de referencia a usar para el apuntamiento nadir es el marco de referencia orbital.

Marco de Nadir

El marco orbital está basado en el marco de referencia de Hill (o LVLH). A partir de este se describen sus componentes.

$$\begin{aligned}\hat{i}_r &= \frac{\mathbf{r}_{sat}}{\|\mathbf{r}_{sat}\|} \\ \hat{i}_\theta &= \hat{i}_h \times \hat{i}_r \\ \hat{i}_h &= \frac{\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{v}_{sat}}{\|\mathbf{r}_{sat}\| \cdot \|\mathbf{v}_{sat}\|}\end{aligned}\tag{6.3}$$

Luego, consecuentemente con lo dispuesto en el diseño de misión, se plantea la siguiente alineación de marcos de referencia:

$$\begin{aligned}\hat{b}_1 &= \hat{i}_t \\ \hat{b}_2 &= \hat{b}_3 \times \hat{b}_1 \\ \hat{b}_3 &= \hat{i}_r\end{aligned}\tag{6.4}$$

La **variación** de entre el marco de referencia ECI y el marco de Hills se debe a la variación angular del satélite en órbita. Esto es el Movimiento Medio (η). Para este apuntamiento, este valor se extrae de los parámetros orbitales mediante la función auxiliar *ParamOrbital*. Se estima que este valor sea de $\eta = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} \cong 0,0011 \text{ rad/s}$.

6.3.3. Seguimiento activo

Para realizar apuntamiento activo es necesario conocer la posición de la estación terrena respecto al marco inercial (ECI) y su posición relativa y línea de vista con el satélite (THCS).

Por el requerimiento de la misión se conoce que la estación terrena está ubicada en Cali. Cali cuenta con la siguientes coordenadas geodésicas:

Latitud: 03°26'14"N, **Longitud:** 76°31'21"W, **Altitud:** 926 m.s.n.m.

Estas coordenadas geocéntricas están referenciadas en el marco ECEF y para relacionarlo con los diferentes aspectos de la simulación es necesario transformarlo al marco ECI. Esta transformación se realiza mediante la función de MATLAB *lla2eci* y cuyo fundamento se basa en una Rotación tipo 3 y el ángulo de rotación fue descrito por la ecuación (3.15) en el marco teórico orbital.

Una vez se halla la posición de la estación terrena se procede a encontrar la Línea de Vista. Para encontrar el ángulo de visión entre el satélite y la estación terrena, se hace necesario encontrar un vector que exprese la posición relativa de la estación terrena desde el satélite:

$$\Delta \mathbf{r} = {}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}_{est} - {}^{\mathcal{N}}\mathbf{r}_{sat} \quad (6.5)$$

Con este vector de posición relativa y el vector de posición de la estación terrena es posible encontrar el ángulo de visión entre ambos puntos:

$$\cos(\alpha) = \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{est}}{||\Delta \mathbf{r}|| \cdot ||\mathbf{r}_{est}||} \quad (6.6)$$

El ángulo de vista tiene un rango desde que el satélite aparece en el horizonte hasta que se oculta. Esto corresponde a un rango de 180°.

Marco de apuntamiento activo

Con el planteamiento previo de la Línea de Vista, se plantea el siguiente alineamiento entre marcos de referencia:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= \frac{\Delta \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}_3}{||\Delta \mathbf{r}|| \cdot ||\hat{\mathbf{n}}_3||} \\ \hat{\mathbf{b}}_2 &= \frac{\Delta \mathbf{r}}{||\Delta \mathbf{r}||} \\ \hat{\mathbf{b}}_3 &= \hat{\mathbf{b}}_1 \times \hat{\mathbf{b}}_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para hallar la **variación** entre estos marcos de referencia se recuerda que:

$$\frac{d([RN])}{dt} = -[\tilde{\omega}][RN] \quad (6.8)$$

A su vez:

$$-[RN]^T \frac{d([RN])}{dt} = [\tilde{\omega}] \quad (6.9)$$

Luego, en estructura de código esto es:

$$\mathcal{N}[\tilde{\omega}]_{RN} = -[RN(t)]^T \cdot \frac{[RN(t+dt)]}{dt} \quad (6.10)$$

Recordando la estructura de matriz antisimétrica, se escogen las posiciones negativas de cada componente, para contrarrestar el signo *menos* (-) de la ecuación.

6.3.4. Condiciones de apuntamiento

De este modo y con todos los parámetros definidos, la referencia tomavalor para los siguientes casos

- Si el satélite se encuentra en la cara iluminada $\implies x_{RN} = x_{Solar}$. Esto ocurre cada que la segunda componente de la posición sea positiva.
- Por el contrario, si el satélite está en la cara oscura y la estación terrena se encuentra en la línea de vista $\implies x_{RN} = x_{Target}$. Esto ocurre cada que el ángulo $|\alpha| < 90^\circ$.
- De lo contrario, si el satélite está en la cara oscura y está fuera de la línea de vista $\implies x_{RN} = x_{Nadir}$

Con esto presente, la figura 6-7 muestra la señal de referencia para medio día de simulación y la figura 6-8 muestra la señal de referencia para tres (3) órbitas de simulación:

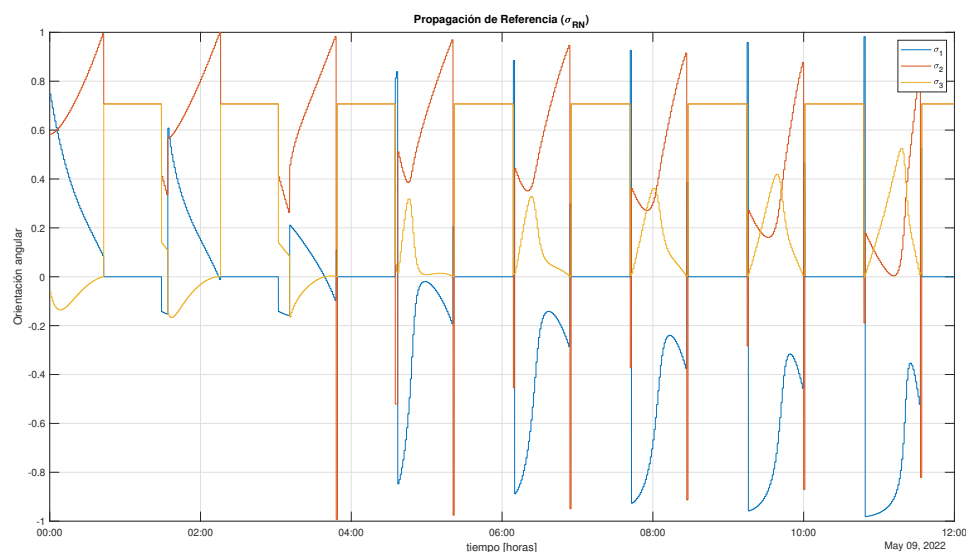


Figura 6-7.: Señal de referencia de actitud para medio día.

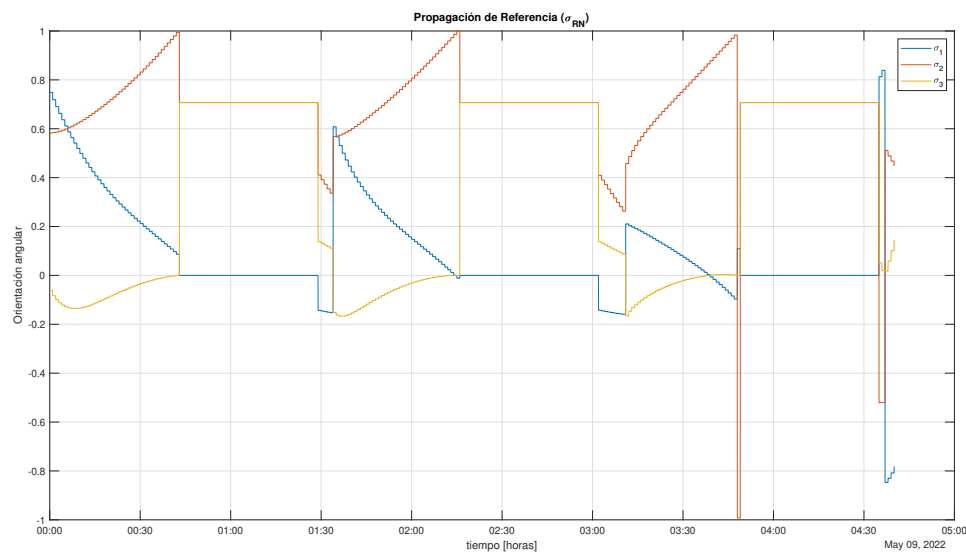


Figura 6-8.: Señal de referencia de actitud para tres (3) órbitas.

Esta será la referencia de actitud deseada y mediante la cual se desarrollará el control. Como se observa posee cambios abruptos que son productos del switcheo del conjugado o sombra y del cambio de apuntamiento/seguimiento. Para efectos prácticos de simulación se estudiarán las 3 primeras órbitas, las cuales contienen los tres eventos de apuntamiento de interés para la investigación. La figura 6-8, recoge entonces lo previamente establecido y es la señal usada para la simulación.

6.4. Modelado en simulink

Del mismo modo como se implementa mediante código la misión por cada controlador, se desarrolla en *simulink* la misión, la cual facilita la implementación de los índices del error para la evaluación del desempeño del controlador.

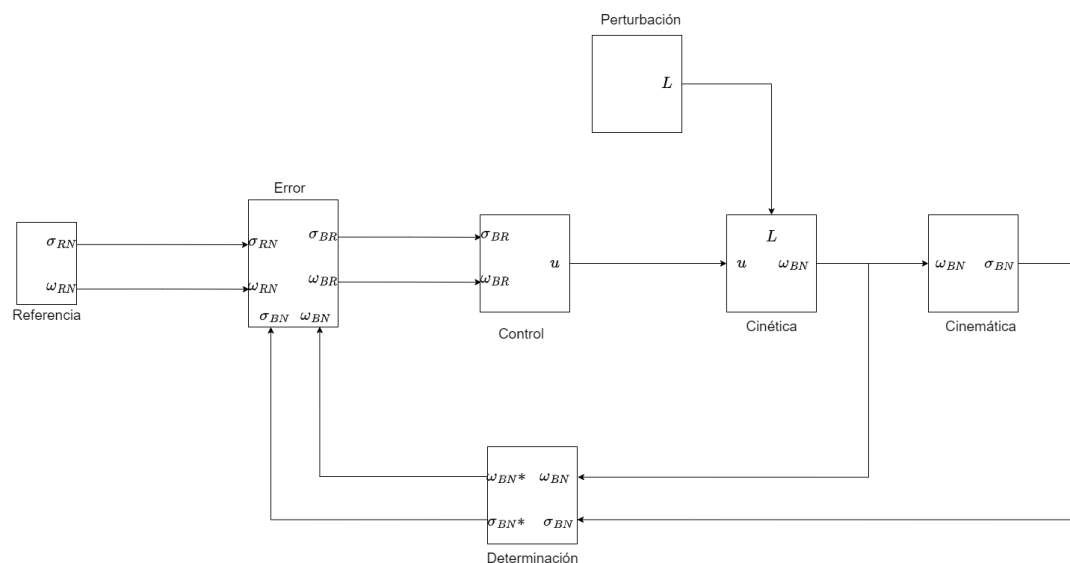


Figura 6-9.: Diagrama de bloques de control en Simulink.

La figura 6-9 muestra los diagramas de bloque generales dispuestos para el sistema de control de la misión satelital. En las siguientes sub-secciones se detalla el contenido de cada bloque. Debido a la alta complejidad de acciones y funciones necesarias para la implementación de la misión, los vectores de posición satelital (LLA) y la referencia de actitud serán importados desde *mathowrks*, así como diversos parámetros usados para simulación.

6.4.1. Orbital

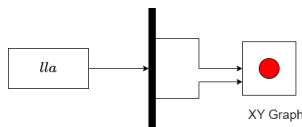


Figura 6-10.: Bloques aspecto orbital en Simulink.

La figura 6-10 muestra la implementación del vector de posición satelital en coordenadas geocéntricas Longitud-Latitud-Altitud. Este vector temporal fue importado desde el mathworks de MATLAB y dentro de los 16800 segundos de simulación muestra los resultados de la figura 6-11.

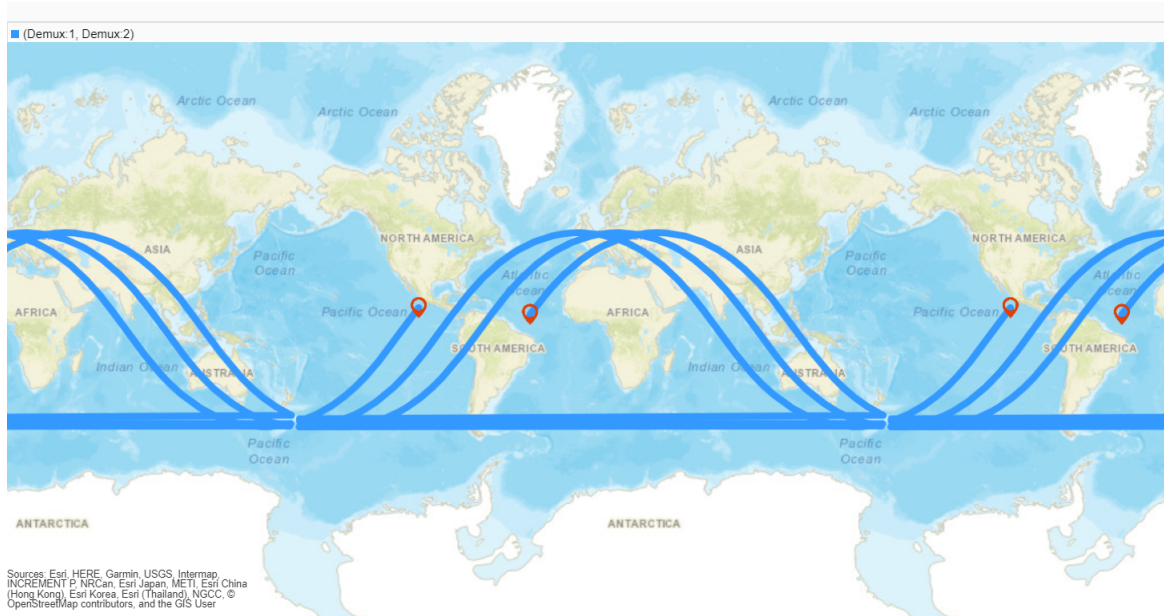


Figura 6-11.: Posición satelital geocéntrica en Simulink.

Se observa como los 16800 segundos corresponden a las tres (3) primeras órbitas del satélite y además representa las condiciones adecuadas para la ejecución de las tres maniobras de apuntamiento planteadas.

6.4.2. Generador de referencias

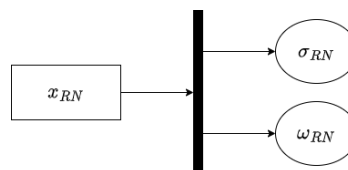


Figura 6-12.: Bloques de referencia de actitud en Simulink.

La figura 6-12 ilustra el uso del vector de referencia de actitud para el sistema de control. El vector se fragmenta en dos, la orientación angular y la velocidad angular.

6.4.3. Cálculo del Error

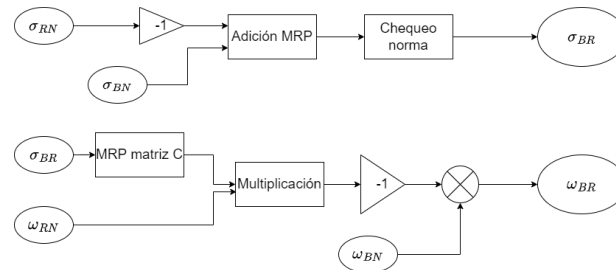


Figura 6-13.: Bloque de error en Simulink.

La figura 6-13 muestra la implementación del cálculo del error de control tanto para la orientación angular como para velocidad angular.

6.4.4. Control

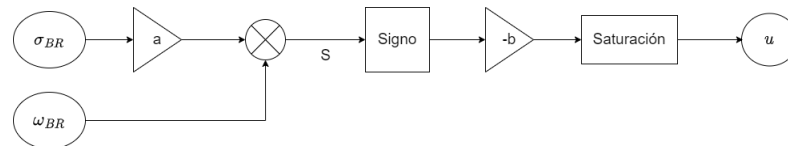


Figura 6-14.: Bloque de control en Simulink.

La figura 6-14 ilustra el diagrama de bloques desarrollado para el controlador de modos deslizantes (SMC), del mismo modo se desarrolla para los otros dos controladores.

6.4.5. Satélite

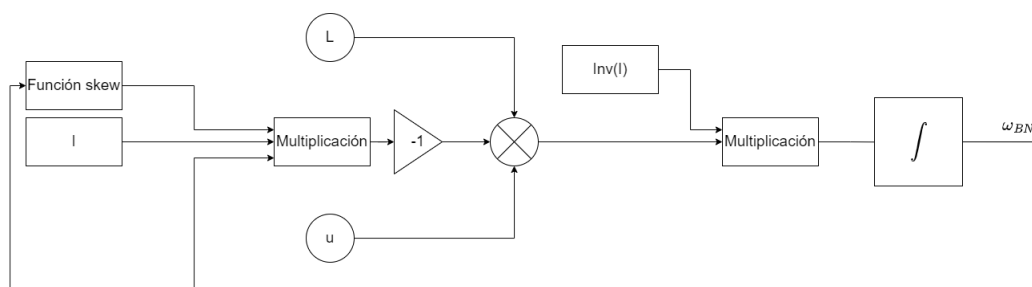


Figura 6-15.: Bloques de cinética en Simulink.

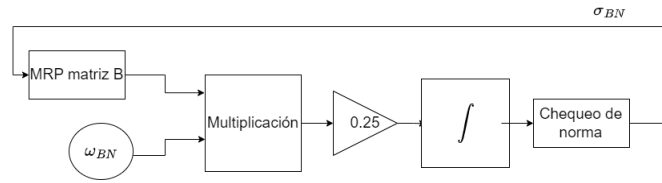


Figura 6-16.: Bloque de cinemática en Simulink.

Las figuras 6-15 y 6-16 constituyen los diagramas de bloque asociados a la dinámica satelital, la cual está compuesta por el aspecto cinético y el aspecto cinemático para obtener finalmente la orientación y velocidad angular del cuerpo (Satélite).

6.4.6. Estimador

Con el fin de simular la retroalimentación del ADCS satelital, se desarrolla este diagrama de bloques (emulador) para incluir las incertidumbres presente en la estimación de los estados (Figura 6-17).

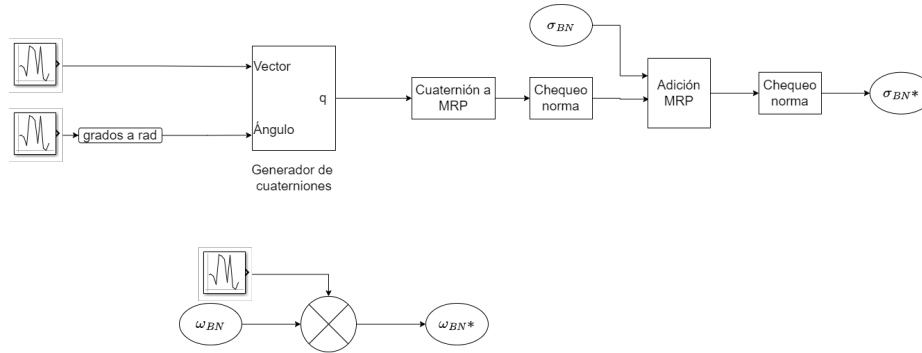


Figura 6-17.: Bloque de determinación en Simulink.

La función de este emulador es la de agregar ruido a la retroalimentación de los estados para imitar las especificaciones de un estimador de actitud, lo cual resulta en una prueba para la robustez de los controladores.

Las especificaciones de este ruido se toman de los requerimientos planteados en [Jensen and Vinther, 2010], el cual establece que la actitud estimada se encuentra en un rango de $\pm 5^\circ$ con una tasa de muestreo de 1 Hz.

En resumen, en este capítulo se abordan los aspectos de simulación del eje temático de dinámica orbital, dinámica satelital y la interfaz entre ellos para completar el Escenario de Misión. Adicionalmente, se muestra el desarrollo de una plataforma de simulación en donde se recogen los aspectos de dinámica orbital, satelital, de control, el ámbito de determinación y la implementación para índices del error que servirá para la evaluación del desempeño de los controladores diseñados.

7. Diseño de controladores y simulación de misión

En este capítulo se diseñan los controladores mediante las funciones halladas previamente, se ajustan, se ponen a prueba y finalmente se implementan en el entorno de la misión satelital diseñado.

7.1. Retroalimentación no lineal

Partiendo de las ecuaciones cinética y cinemática que describen el fenómeno de rotación del satélite en el espacio:

$$\begin{aligned} [I]\omega_{B/N} &= -[\tilde{\omega}][I]\omega_{B/N} + u + L && \text{Ecuación Cinética} \\ \dot{\sigma} &= \frac{1}{4} [(1 - \sigma^2)\mathbb{I}_3 + 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma^T\sigma] \delta\omega && \text{Ecuación Cinemática MRP} \end{aligned}$$

El objetivo del control de seguimiento de referencias es:

$$\underbrace{\delta\omega}_{\text{Error}} = \underbrace{\omega_B}_{\text{Cuerpo}} - \underbrace{\omega_R}_{\text{Referencia}} \longrightarrow 0; \quad \sigma_{B/R} \longrightarrow 0$$

Recordando las funciones de Lyapunov de cinética y cinemática desarrolladas previamente en el marco teórico:

$$V(\delta\omega, \sigma) = \frac{1}{2} \delta\omega^T [I] \delta\omega + 2K \ln(1 + \sigma^T \sigma) \quad (7.1)$$

Derivando temporalmente la función de Lyapunov:

$$\dot{V} = \delta\omega^T [I] \frac{d(\delta\omega)}{dt} + \frac{4K}{1 + \sigma^2} \left(\sigma^T \boxed{\dot{\sigma}} \right); \quad \text{Recordar ec. 3.82} \quad (7.2)$$

$$\dot{V} = \delta\omega^T [I] \frac{d(\delta\omega)}{dt} + \frac{4K\sigma^T}{1 + \sigma^2} ((1 + \sigma^2) + 2[\tilde{\sigma}] + 2\sigma\sigma^T) \delta\omega \quad (7.3)$$

$$\dot{V} = \delta\omega^T \left([I]^B \frac{d}{dt} (\delta\omega) + K\sigma \right) \quad (7.4)$$

Para garantizar estabilidad $\dot{V}$ debe ser una Función Semi-Definida Negativa, por lo que se forzará a ser:

$$\dot{V} = -\delta\omega^T [P] \delta\omega \quad (7.5)$$

con $[P] \succ 0$ matriz diagonal de ganancias. Con lo que se llega a

$$\delta\omega^T \left([I] \left[{}^B \frac{d}{dt} (\delta\omega) \right] + K\sigma \right) = -\delta\omega^T [P] \delta\omega; \quad \text{Recordar derivada material} \quad (7.6)$$

Cancelando $\delta\omega^T$ y recordando la derivada material:

$$[I](\dot{\omega} - \dot{\omega}_R + \omega \times \omega_R) + P\delta\omega + K\sigma = 0; \quad \text{Recordar ec. 3.91} \quad (7.7)$$

$$-[\tilde{\omega}][I]\omega + u + L - [I](-\dot{\omega}_R + \omega \times \omega_R) + P\delta\omega + K\sigma = 0 \quad (7.8)$$

Así, al despejar la señal de control u se encuentra:

$$u = \underbrace{[\tilde{\omega}_{B/N}][I]\omega_{B/N}}_{\text{Feedback}} + \underbrace{[I]({}^B\dot{\omega}_{R/N} - \tilde{\omega}_{B/N}{}^B\omega_{R/N})}_{\text{FeedForward}} - \underbrace{[P]\omega_{B/R}}_{\text{Derivativo}} - \underbrace{K\sigma_{B/R}}_{\text{Proporcional}} - L \quad (7.9)$$

Al reemplazar esta expresión de control en (7.4) llegaremos a (7.5). Sin embargo, es observable que esta expresión compromete un costo computacional, además de que requiere de diversos sensores para estimar las variables. Una alternativa a esta función de control es:

$$u = -K\sigma - [P]\omega \quad (7.10)$$

que conlleva a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega^T [I] \dot{\omega} + K\sigma^T \omega \\ \dot{V} &= \omega^T (-[\tilde{\omega}][I]\omega + u + K\sigma) \\ \dot{V} &= \boxed{\omega^T (-[\tilde{\omega}])} [I]\omega - K\sigma - [P]\omega + K\sigma; \quad \text{Por propiedades se cancelan} \\ \dot{V} &= -\omega^T [P]\omega \preceq 0 \end{aligned}$$

Cuyo costo computacional disminuye notoriamente. Las ecuaciones (7.9) y (7.10) corresponden a leyes de control No Lineal y Lineal respectivamente y sus desempeños serán analizados junto al SMC para la simulación de la misión satelital. Las constantes P y K serán las ganancias derivativa y proporcional del lazo de retroalimentación. Estas pueden ser calculadas según especificaciones y requerimientos de diseño [Schaub and Junkins, 2003]:

$$T_i = \frac{2I_i}{P_i} \quad \text{Tiempo de decaimiento} \quad (7.11)$$

$$\zeta_i = \frac{P_i}{\sqrt{KI_i}} \quad \text{Amortiguamiento} \quad (7.12)$$

Con I_i y P_i elementos diagonales de las matrices.

7.2. Análisis de estabilidad asintótica

Dado que $\dot{V}$ en (7.5) es semidefinida negativa, solo es posible concluir que la señal de control u es globalmente estable. Una condición suficiente para garantizar estabilidad asintótica se menciona en [Mukherjee and Chen, 1993] basado en el *teorema de Lasalle*, el cual establece que existe una derivada de orden superior, que al evaluarse en el conjunto de estados que hacen que $\dot{V}$ sea cero, es distinta de cero, de orden impar y definida negativa.

De este modo al derivar (7.5):

$$\ddot{V} = -2\delta\omega^T[P]\delta\dot{\omega} \quad (7.13)$$

Recordar que $\dot{V}$ es cero si $\delta\omega$ es cero. Por lo que se debe evaluar (7.15) en $(\sigma, \delta\omega = 0)$. Obteniendo así:

$$\ddot{V}(\sigma, \delta\omega = 0) = 0 \quad (7.14)$$

Derivando nuevamente (7.15) :

$$\ddot{V} = -2\delta\omega^T[P]\delta\ddot{\omega} - 2\delta\dot{\omega}^T[P]\delta\dot{\omega} \quad (7.15)$$

De (7.6), recordar que $\delta\dot{\omega} = -[I]^{-1}K\sigma$, si $\delta\omega = 0$.

Aplicando esto y evaluando $\delta\omega = 0$ en (7.15):

$$\ddot{V}(\sigma, \delta\omega = 0) = -2K^2\sigma^T[I]^{-1}[P][I]\sigma \prec 0 \quad (7.16)$$

De este modo (7.16), es una derivada de orden impar y es definida negativa, con lo que se garantiza estabilidad global asintótica.

7.3. Controlador por modos deslizantes (SMC)

De acuerdo con [Khalil, 2013], los controladores SMC son robustos ante la incertidumbre de parámetros. Un acercamiento al tipo estándar basa su principio en encontrar una cota en donde el sistema es estable, y mediante acciones de switcheo se controla su comportamiento hasta la convergencia. Lo cual es aplicable para el sistema de orientación satelital.

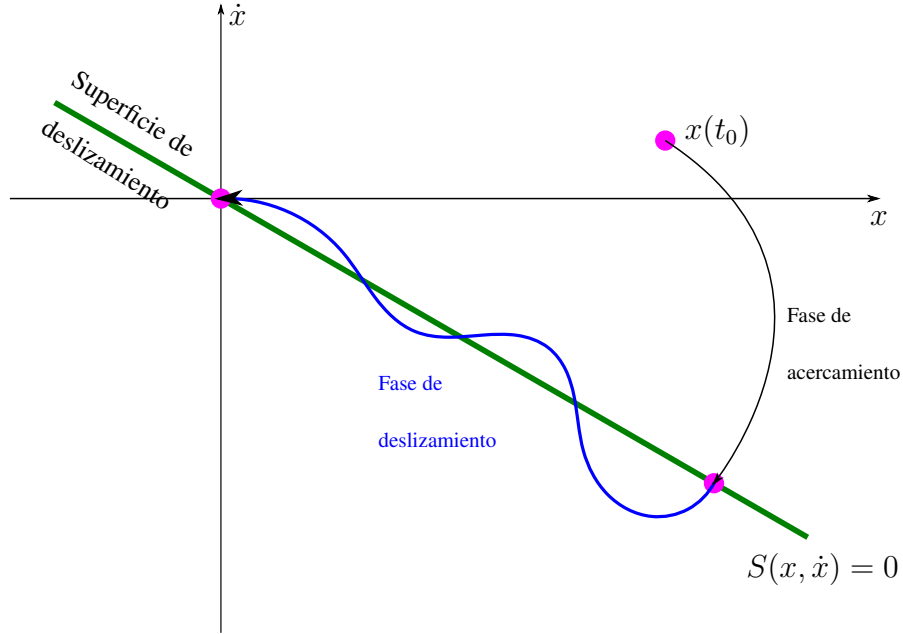


Figura 7-1.: Superficie de control de deslizamiento.

El controlador de modos deslizantes contiene una estabilidad asintótica, en donde el sistema dinámico se desliza sobre una superficie S hasta el punto de equilibrio de convergencia. Considerando un sistema no lineal descrito por:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = h(x) + f(x) \cdot u$$

Se asume que existe una superficie S tal que $S(x) = 0$ tal que si $x \in S(x)$, x se deslizará al punto de equilibrio o de operación. Se define S como la superficie de deslizamiento dada por [Bachelor, 2018]:

$$S = ax_1 + x_2 \tag{7.17}$$

Si se alcanza la superficie $S=0$, el sistema es estable sin importar $h(x)$ y $f(x)$. La derivada de S cumple la relación:

$$\dot{S} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = ax_2 + h(x) + f(x) \cdot u \tag{7.18}$$

Tomando una función candidata de Lyapunov de la forma $V(x) = 0,5S^T S$, se tiene que:

$$V(x) = \frac{1}{2}S^T S \tag{7.19}$$

$$\dot{V} = S \cdot \dot{S} = S(ax_2 + h(x) + f(x)u) \tag{7.20}$$

Asumiendo que el sistema es acotado y que esta cota $p(x)$ es tal que:

$$\left| \frac{a \cdot \mathbf{x}_2 + h(\mathbf{x})}{f(x)} \right| \leq p(\mathbf{x}) \quad (7.21)$$

se obtiene que

$$\dot{V} = S(a\mathbf{x}_2 + h(\mathbf{x})) + S(f(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u} \leq p(\mathbf{x})f(\mathbf{x})|S| + S(f(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u} \quad (7.22)$$

Tomando la señal de control como:

$$\mathbf{u} = -b(\mathbf{x})\text{sgn}(S) \quad (7.23)$$

Donde $\text{sgn}(S)$ es la función signo de S . Obteniendo así:

$$\dot{V} \leq p(\mathbf{x})f(\mathbf{x})|S| - f(\mathbf{x})(p(\mathbf{x}) + b_0)S \cdot \text{sgn}(S) \quad (7.24)$$

suponiendo que $b(x) \leq b_0 + p(\mathbf{x})$ y que $f(\mathbf{x}) = f_0 + \hat{f}(x)$ con $f_0 > 0$ y $\hat{f}$ f estimado:

$$\dot{V} \leq f_0 b_0 |S| \leq 0 \quad (7.25)$$

Resultando en una función semi-definida negativa, por lo que el sistema es estable.

Cambiando las variables por el caso de la dinámica satelital, se tiene entonces que:

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\sigma}_{B/R}; \quad \mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\omega}_{B/R} \quad (7.26)$$

se tiene entonces que la señal de control está dada por:

$$\mathbf{u} = -b \cdot \text{sgn} \left(a \cdot \boldsymbol{\sigma}_{B/R} + \boldsymbol{\omega}_{B/R} \right) \quad (7.27)$$

Para hallar las constantes a y b debe iterarse la relación:

$$\left| \frac{a \cdot \mathbf{x}_2 + h(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \right| \leq b \quad (7.28)$$

que en el caso de la dinámica satelital:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \underbrace{-[I]^{-1}([\tilde{\boldsymbol{\omega}}][I]\boldsymbol{\omega})}_{h(\mathbf{x})} + \underbrace{[I]^{-1} \cdot \mathbf{u}}_{f(\mathbf{x})} \quad (7.29)$$

El procedimiento a seguir es:

1. Se examina componente a componente la inequidad (7.28) buscando una relación que conlleve a la cota superior.
2. Se definen los valores e incertidumbres de los parámetros, asegurando escoger siempre el valor mayor.

3. Se varían distintos valores de a para hallar los respectivos valores de b .
4. Escoger la pareja (a, b) adecuada para los requerimientos del sistema.

Abordando el paso 1. (para la primera componente) en el contexto de dinámica satelital se tiene:

$$\frac{a \cdot \omega_1 + \left(\frac{I_z - I_y}{I_x} \right) (\omega_2 \omega_3 + L_1)}{\frac{1}{I_x}} \leq b \quad (7.30)$$

$$a \cdot I_x \omega_1 + (I_z - I_y) (\omega_2 \omega_3 + L_1) \leq b \quad (7.31)$$

$$a \cdot I_x \omega_1 + (I_z + I_y) (\omega_2 \omega_3 + L_1) \leq b \quad (7.32)$$

De esta forma, sucesivamente debe realizarse con cada componente. Una vez se incluyan todos los aspectos para la simulación completa de la misión se reportarán los valores de las constantes obtenidas para el controlador

7.4. Ajuste preliminar de controladores

Se hace una simulación previa a los controladores con el fin de examinar su comportamiento y tener una expectativa y validación sobre su desempeño en el entorno de la misión satelital. La simulación se hace para 100 s, la referencia de actitud son tres señales sinusoidales dadas por la siguiente expresión:

$$\sigma_{RN} = \begin{bmatrix} 0.2 \sin(0.05t) \\ 0.3 \cos(0.05t) \\ -0.3 \sin(0.05t) \end{bmatrix} \quad [\text{rad/s}]$$

a los 50 s de simulación se aplica una perturbación permanente tipo paso (o escalón) dada por la siguiente expresión:

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad [\text{N.m}]$$

Los resultados del ajuste de los controladores se muestran en las siguientes sub-secciones

7.4.1. Simulación controlador retroalimentación no lineal

Se ajustan las ganancias para un tiempo de decaimiento de 5 s y un subamortiguamiento de 0.5. Se obtienen los siguientes resultados:

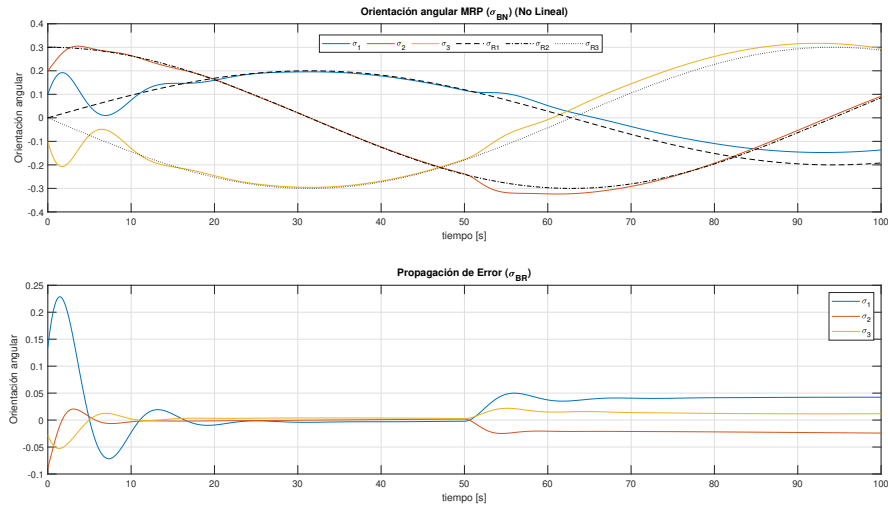


Figura 7-2.: Controlador no lineal por Lyapunov.

La figura 7-2 muestra el desempeño del controlador no lineal ante el seguimiento de referencias sinusoidales y el rechazo de perturbaciones. En este se observa que el sistema alcanza la estabilización alrededor de los 20 segundos y de no incluirse la perturbación en la señal de control este no es capaz de rechazar adecuadamente la perturbación que se le induzca.

Adicionalmente, se observa la señal de error, la cual haya su estabilidad en 0 para los 20 segundos y luego de la perturbación no le es posible estabilizarse en cero.

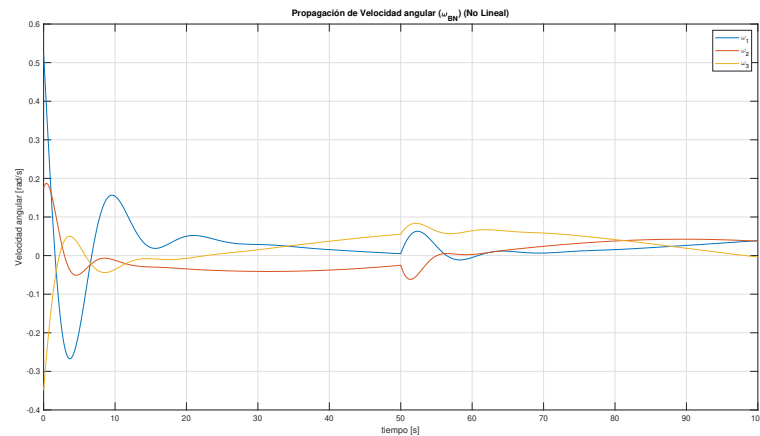


Figura 7-3.: Velocidad angular - Controlador no lineal por Lyapunov.

La figura 7-3 muestra la velocidad angular del cuerpo durante la simulación. En este se observa que el sistema se estabiliza entre 0.05 y -0.05 rad/s y de forma sinusoidal. Además, luego de la perturbación no logra seguir la referencia.

La figura 7-11 contiene una comparación de las señales de control.

7.4.2. Simulación controlador lineal

Se ajustan las ganancias para un tiempo de decaimiento de 5 s y un subamortiguamiento de 0.5

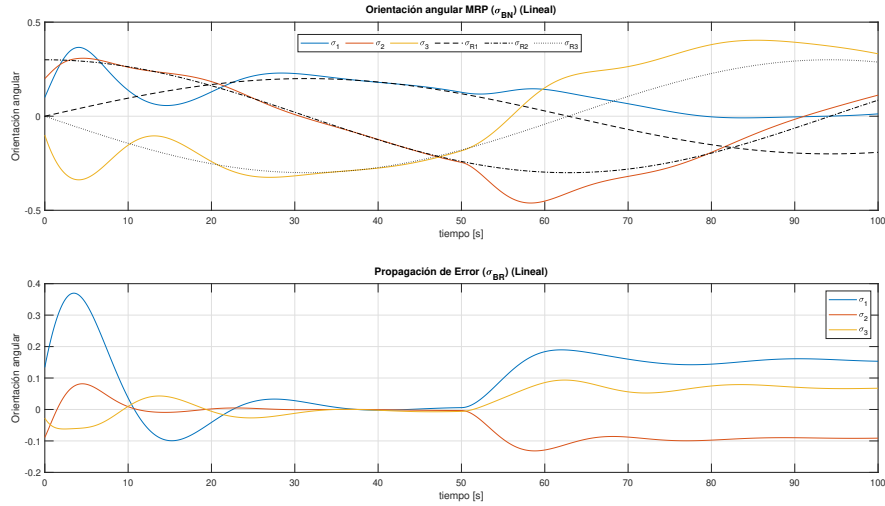


Figura 7-4.: Controlador lineal por Lyapunov.

La figura 7-4 muestra el desempeño del controlador lineal ante el seguimiento de referencias sinusoidales y el rechazo de perturbaciones. En este se observa que el sistema alcanza la estabilización alrededor de los 40 segundos y de no incluirse la perturbación en la señal de control este no es capaz de hacer rechazar la perturbación que se le induceca.

Adicionalmente, se observa la señal de error, la cual haya su estabilidad en 0 para los 40 segundos y luego de la perturbación no le es posible estabilizarse en cero.

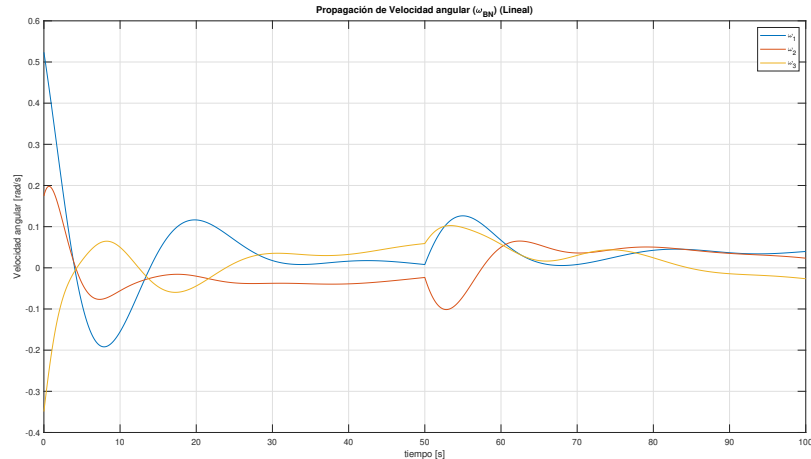


Figura 7-5.: Velocidad angular - Controlador lineal por Lyapunov.

La figura 7-5 muestra la velocidad angular del cuerpo durante la simulación. En este se observa que el sistema se estabiliza entre 0.05 y -0.05 rad/s y que luego de la perturbación no logra seguir la referencia.

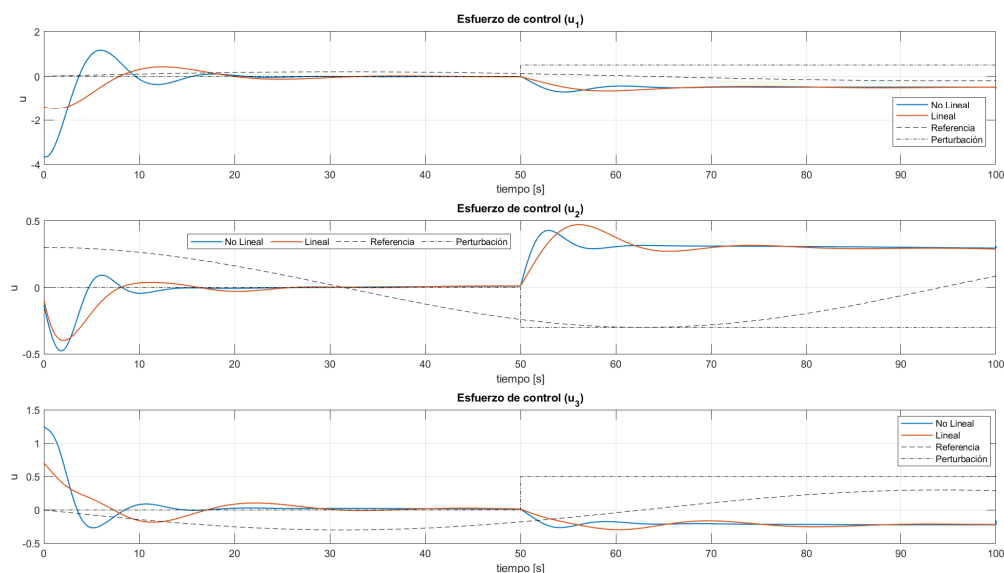


Figura 7-6.: Esfuerzos de control - Controlador no lineal y lineal.

La figura 7-6 muestra el comportamiento de los esfuerzos de control de los controladores no lineal y lineal diseñados. Si bien, el controlador no lineal tiene una respuesta más rápida, el controlador lineal (PD) posee una respuesta mucho más suavizada y sin tanto amortiguamiento. Aspecto que puede ser deseado dependiendo de las necesidades de aplicación.

7.4.3. Simulación controlador SMC

Se ajustan las ganancias del controlador asumiendo una velocidad angular máxima de $0,1 \text{ rad/s}$, y luego de muchas iteraciones el valor de $a = 10$ obtuvo la mejor respuesta para la estabilidad del sistema.

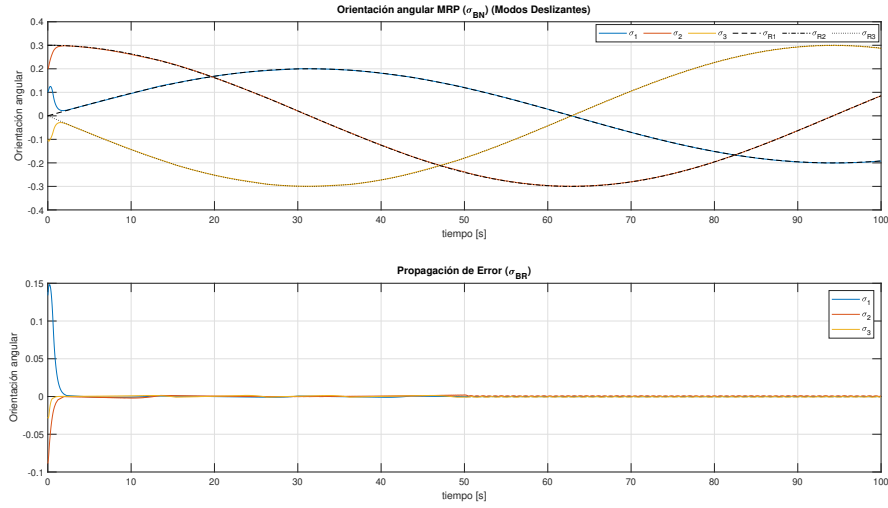


Figura 7-7.: Controlador SMC.

La figura 7-7 muestra el desempeño del controlador lineal ante el seguimiento de referencias sinusoidales y el rechazo de perturbaciones. En este se observa que el sistema alcanza la estabilización alrededor de 2 segundos y rechaza perturbaciones inducidas adecuadamente. Adicionalmente, se observa la señal de error haya su estabilidad en 0 para los 2 segundos y se mantiene en este valor inclusive ante la presencia de la perturbación inducida.

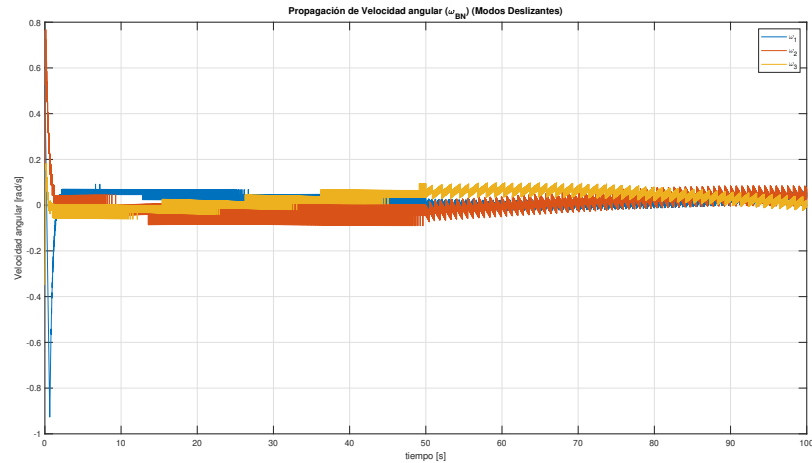


Figura 7-8.: Velocidad angular - Controlador SMC.

La figura 7-8 muestra la velocidad angular del cuerpo durante la simulación. En este se observa que el sistema se estabiliza entre 0.1 y -0.1 rad/s y que mantiene una oscilación constante e instantánea entre estos límites. Comportamiento que puede ser indeseado dependiendo de las necesidades de aplicación.

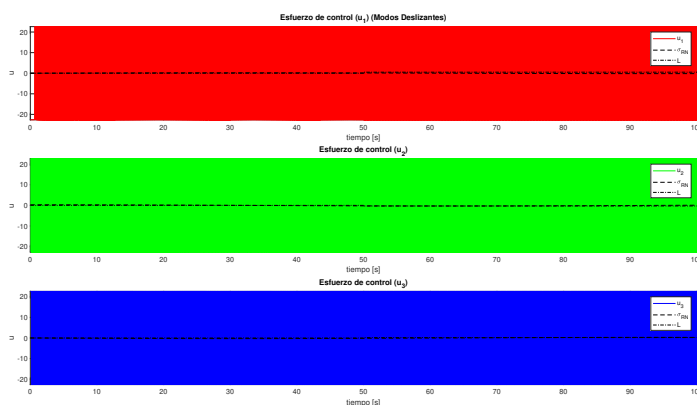


Figura 7-9.: Esfuerzos de control - SMC.

La figura 7-6 muestra el comportamiento del esfuerzo de controlador SMC diseñado. Se observa que su desempeño, al igual que la velocidad angular, presenta cambios drásticos, repentinos entre dos cotas. Este esfuerzo de control es demandante para el actuador y puede ser perjudicial para su desempeño.

7.4.4. Comparación

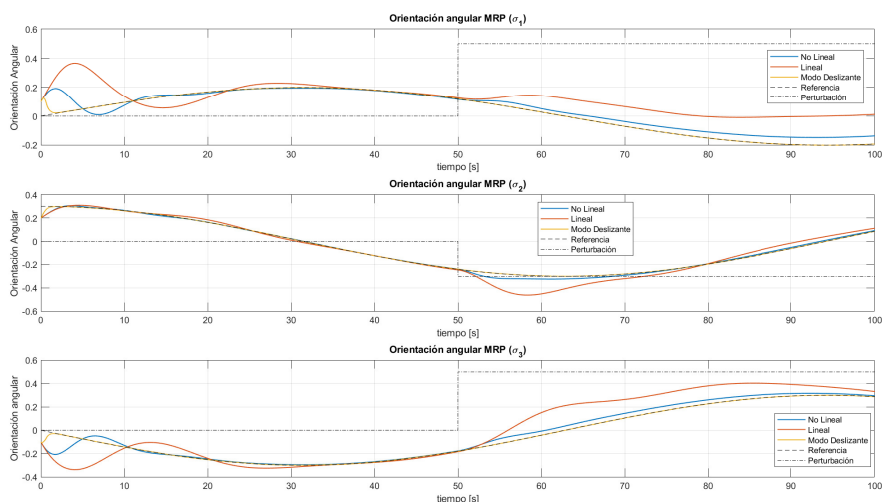


Figura 7-10.: Orientación angular controladores

La figura 7-10 muestra el desempeño de cada uno de los componentes de orientación angular por controlador. En este se observa como el controlador SMC tiene mejor desempeño entre todos, tiene mejor tiempo de estabilización y rechaza perturbaciones adecuadamente

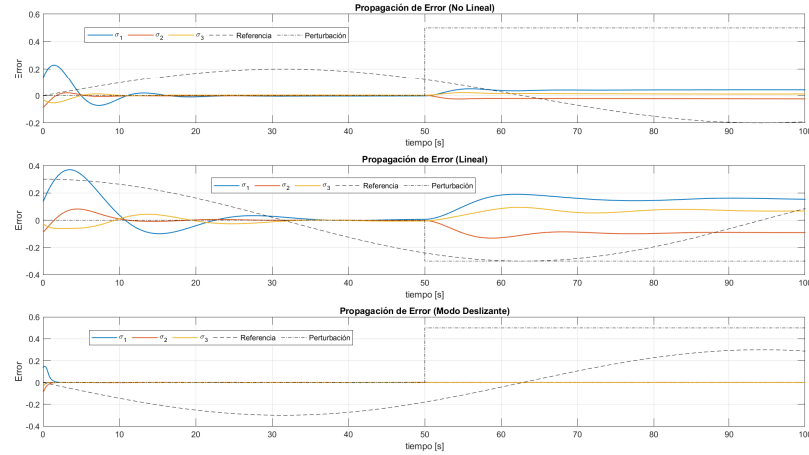


Figura 7-11.: Señal de controladores

Del mismo modo, la figura 7-11 evidencia el hecho anterior mediante la señal del error de los controladores. El controlador SMC logra mantenerse en 0 en corto tiempo y rechaza adecuadamente las perturbaciones. Su desventaja viene en el alto esfuerzo de control y su repercusión en la velocidad angular del cuerpo. Por lo que alternativas como el controlador no lineal entran en consideración dependiendo de las necesidades de aplicación.

7.5. Resultados Misión

Por último, se prueban los controladores ante la trayectoria de referencia calculada.

7.5.1. Controlador no lineal

Haciendo uso de los aspectos de simulación descritos en el diseño de misión, el modelado de la dinámica orbital, la dinámica satelital y el generador de referencias, se ajustan las ganancias del controlador para tener un tiempo de elevación de 1.3 s y un amortiguamiento menor o igual a 1, escogiendo los valores más grandes de las ganancias para garantizar la estabilidad del sistema.

Tomando en cuenta los valores típicos de las perturbaciones, se asume un vector permanente de valores constantes, cuya norma es menor a 0.62 Nm ($[0,5 \ -0,3 \ 0,2]^T$ Nm).

Para calcular el error de actitud (σ_{BR} , ω_{BR}), debe recordarse la forma de adicionar vectores de rotación y la forma de adicionar vectores en distintos marcos de referencia, descritos en el anexo B.

Los resultados de la simulación del escenario de misión para el controlador lineal para 16800 s se muestran a continuación:

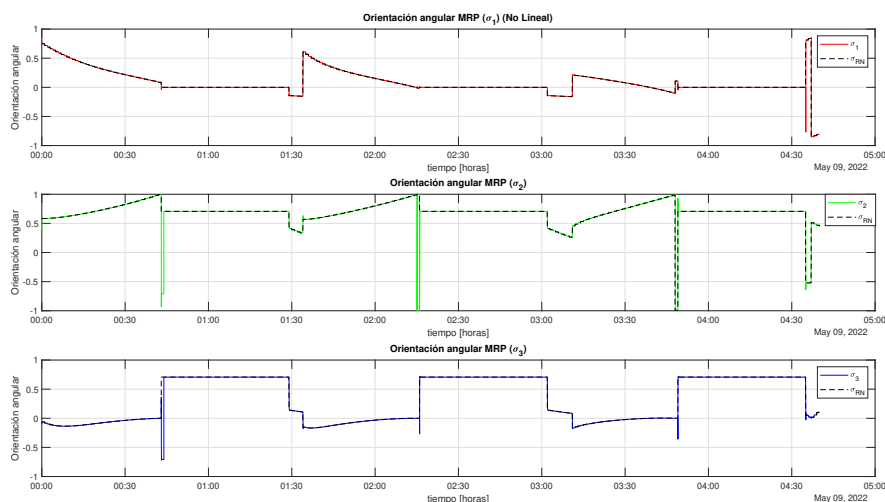


Figura 7-12.: Controlador no lineal por Lyapunov.

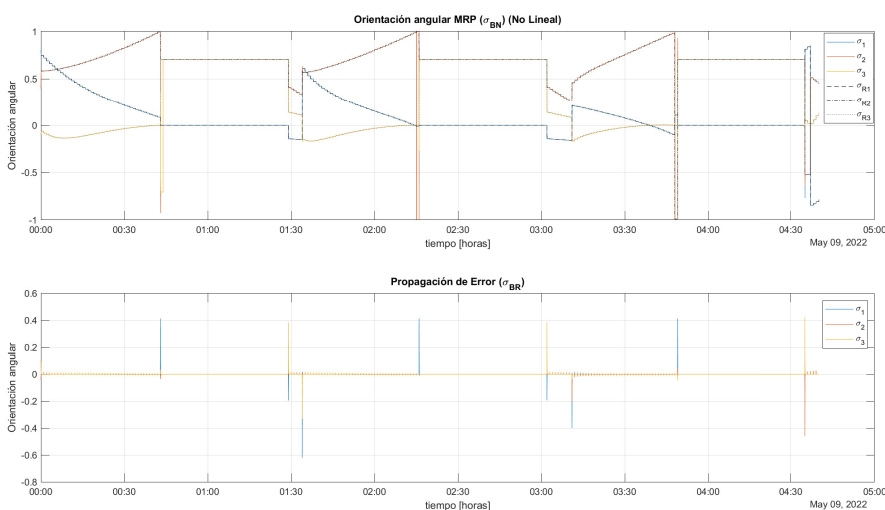


Figura 7-13.: Orientación angular y error de actitud con controlador no lineal por Lyapunov.

Las gráficas de las figuras 7-12 y 7-13 muestran el comportamiento del cuerpo satelital y el error de actitud asociado para las primeras tres (3) órbitas (16800 s) de simulación.

La gráfica 7-12 evidencia que el controlador es capaz de hacer seguimiento de la trayectoria de referencia propuesta como era de esperarse. Alrededor de los primeros 45 minutos de simulación

se efectúa el apuntamiento solar, maniobra que requiere que la norma de los MRP sea de 1 precisamente, por lo que el controlador debe ser igual de preciso para no ejecutar el cálculo de la sombra. En este tramo se evidencia un cambio abrupto al comienzo de la maniobra, proceso correspondiente a la estabilización del controlador en esta referencia.

De la gráfica 7-13 se evidencia la referencia y el desempeño del controlador en sus tres componentes, adicionalmente se evidencia la evolución del error de actitud para el controlador no lineal. El error muestra tendencia a estabilizarse en cero y al cambio de referencia, correspondiente al cambio de apuntamiento, se evidencian los cambios efectuados por el controlador para seguir la referencia.

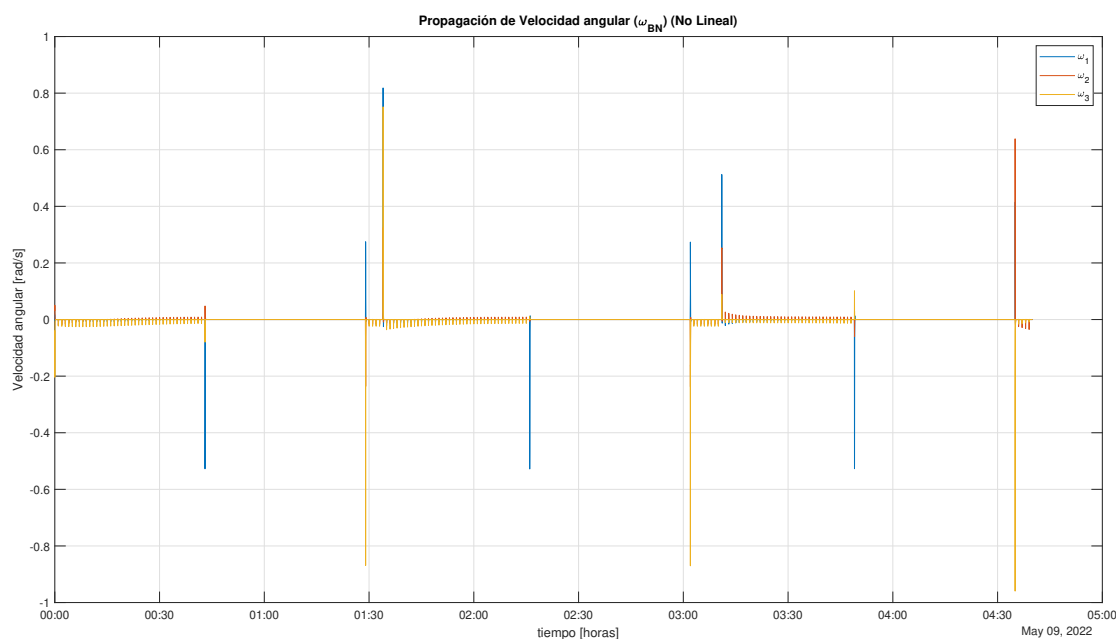


Figura 7-14.: Velocidad angular con controlador no lineal.

La figura 7-14 muestra como el comportamiento de la velocidad angular a lo largo de las tres (3) primeras órbitas. En este se observa que la velocidad angular intenta estabilizarse en 0 rad/s y se mantiene oscilando con baja amplitud. En consecuencia con los instantes de saturación presentados en la orientación angular, la velocidad angular exhibe un incremento repentino (por el cambio de referencia) para nuevamente buscar una estabilidad alrededor de 0 rad/s .

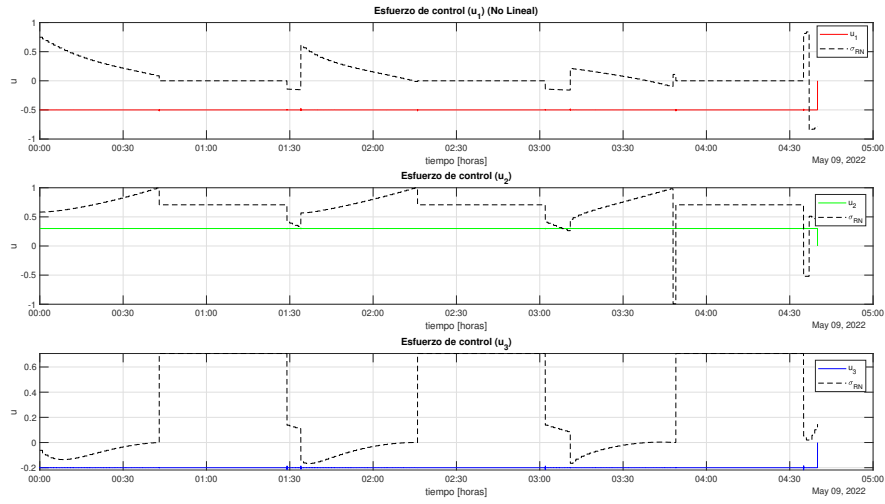


Figura 7-15.: Esfuerzo de control del controlador no lineal.

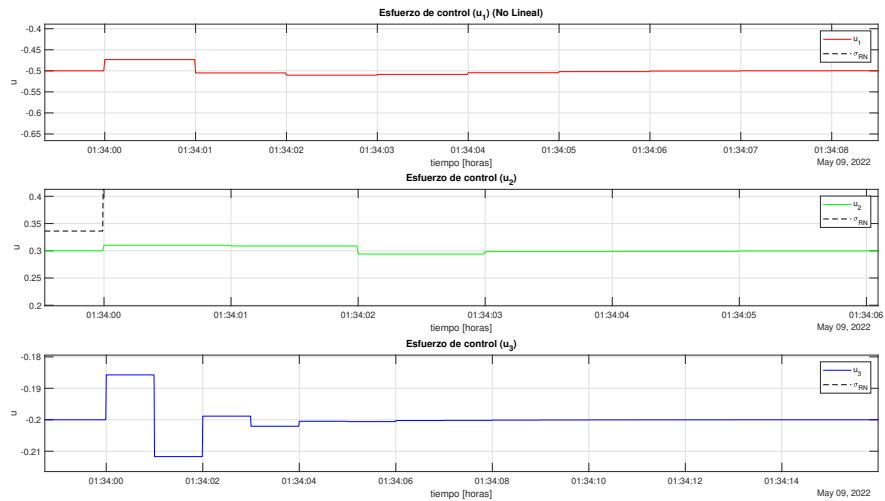


Figura 7-16.: Esfuerzo de control del controlador no lineal (Zoom).

Las figuras 7-15 y 7-16 muestran el desempeño de la señal de control para las tres (3) órbitas y un Zoom cerca de la hora y media de simulación. En ella se evidencia que la señal del controlador tiene un comportamiento casi instantáneo ante los cambios en la señal de referencia. Se estabiliza en cierto valor y es ligeramente perturbada ante los cambios de referencia. El transitorio muestra una convergencia asintótica hacia los valores de estabilización.

7.5.2. Controlador lineal

Haciendo uso de los aspectos de simulación descritos en el diseño de misión, el modelado de la dinámica orbital, la dinámica satelital y el generador de referencias, se ajustan las ganancias del controlador para tener un tiempo de elevación de 1.3 s y un amortiguamiento menor o igual a 1, escogiendo los valores más grandes de las ganancias para garantizar la estabilidad del sistema.

Tomando en cuenta los valores típicos de las perturbaciones, se asume un vector permanente de valores constantes, cuya norma es menor a 0.62 Nm ($[0,5 \ -0,3 \ 0,2]^T$ Nm).

Para calcular el error de actitud (σ_{BR} , ω_{BR}), debe recordarse la forma de adicionar vectores de rotación y la forma de adicionar vectores en distintos marcos de referencia, descritos en el anexo B.

Los resultados de la simulación del escenario de misión para el controlador lineal para 16800 s se muestran a continuación:

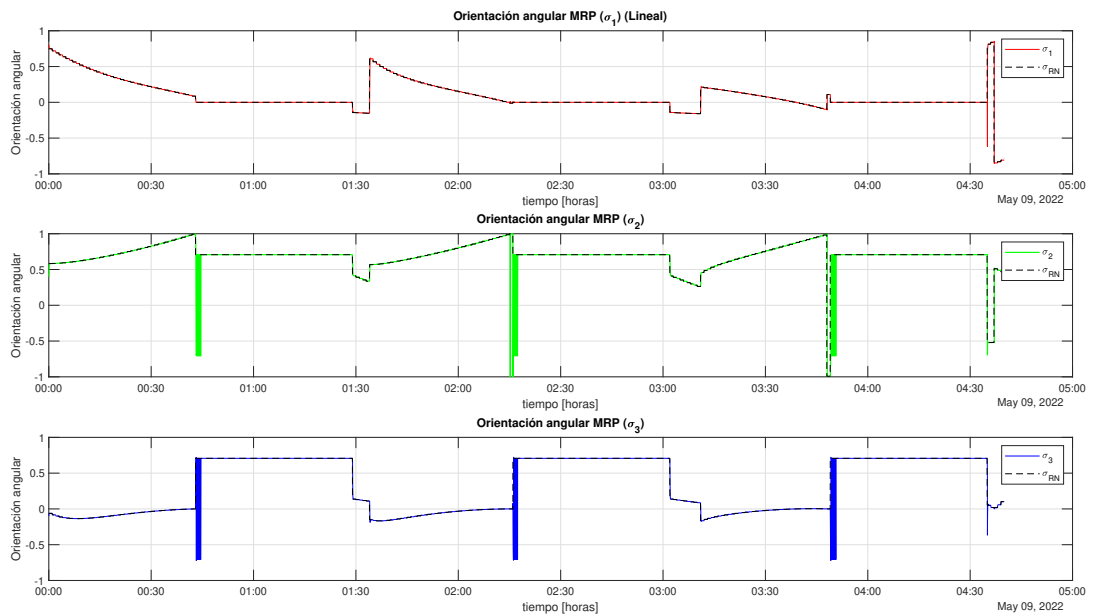


Figura 7-17.: Controlador lineal por Lyapunov.

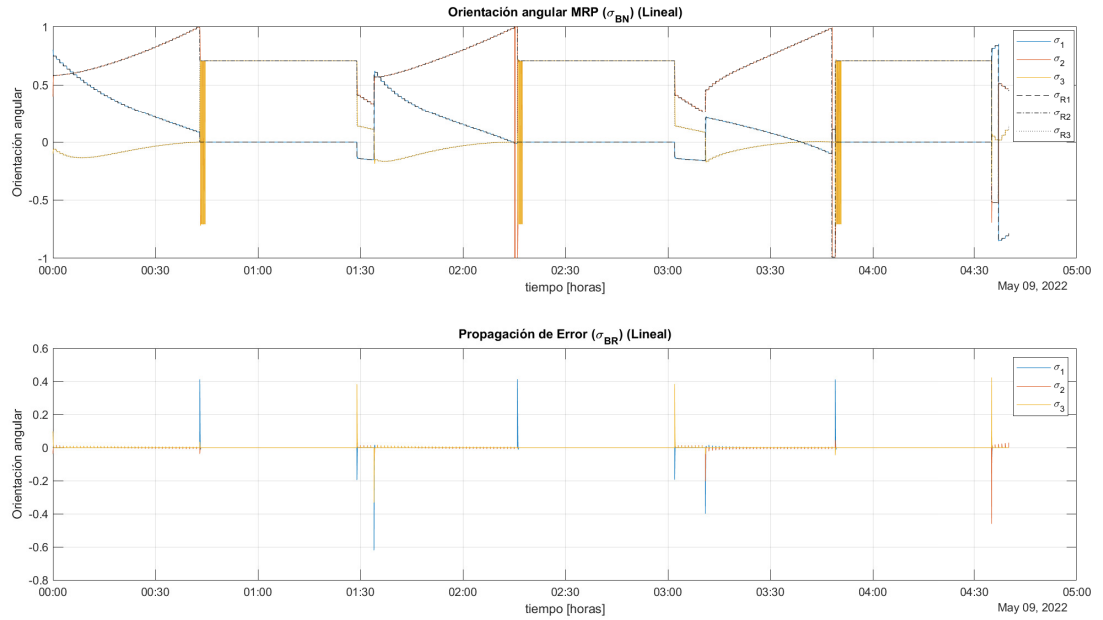


Figura 7-18.: Orientación angular y error de actitud con controlador lineal por Lyapunov.

Las gráficas de las figuras 7-17 y 7-18 muestran el comportamiento del cuerpo satelital y el error de actitud asociado para las primeras tres (3) órbitas (16800 s) de simulación.

La gráfica 7-17 evidencia que el controlador es capaz de hacer seguimiento de la trayectoria de referencia propuesta como era de esperarse. Alrededor de los primeros 45 minutos de simulación se efectúa el apuntamiento solar, maniobra que requiere que la norma de los MRP sea de 1 precisamente, por lo que el controlador debe ser igual de preciso para no ejecutar el cálculo de la sombra. En este tramo, y en los siguientes dos similares, se evidencia un cambio abrupto al comienzo de la maniobra, proceso correspondiente a la estabilización del controlador en esta referencia.

De la gráfica 7-18 se evidencia la referencia y el desempeño del controlador en sus tres componentes, adicionalmente se evidencia la evolución del error de actitud para el controlador lineal. El error muestra tendencia a estabilizarse en cero y al cambio de referencia, correspondiente al cambio de apuntamiento, se evidencian los cambios efectuados por el controlador para seguir la referencia.

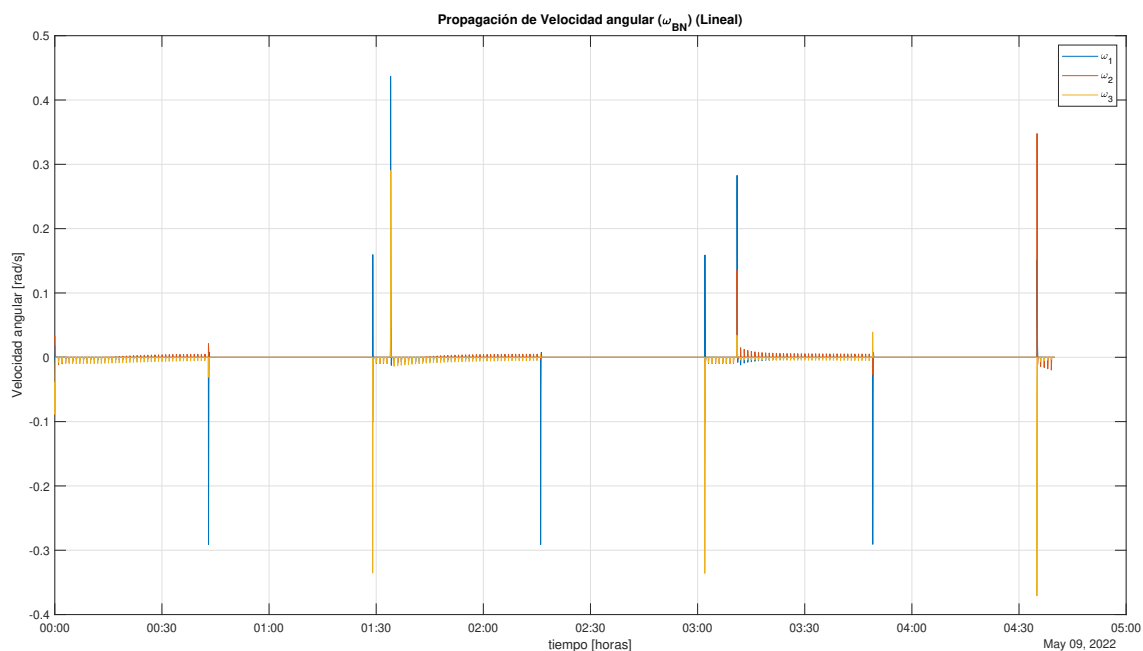


Figura 7-19.: Velocidad angular con controlador lineal.

la figura 7-19 muestra como el comportamiento de la velocidad angular del cuerpo intenta estabilizarse en 0 rad/s y se mantiene oscilando con baja amplitud. En consecuencia con los instantes de saturación presentados en la orientación angular, la velocidad angular exhibe un incremento repentino (por el cambio de referencia) para nuevamente buscar una estabilidad alrededor de 0 rad/s.

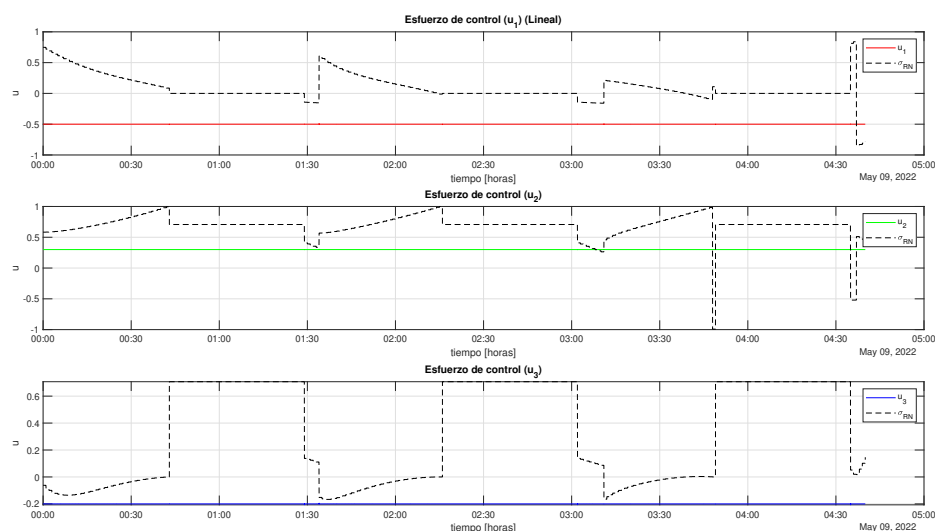


Figura 7-20.: Esfuerzo de controlador lineal.

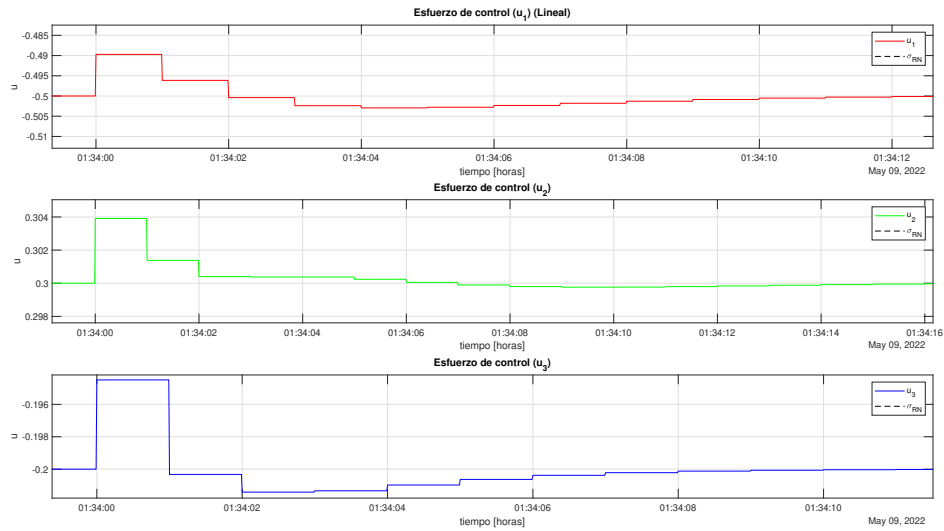


Figura 7-21.: Esfuerzo de controlador lineal (Zoom).

Las figuras 7-20 y 7-21 muestran el desempeño de la señal de control para las tres (3) órbitas y un Zoom cerca de la hora y media de simulación. En ella se evidencia que la señal del controlador tiene un comportamiento casi instantáneo ante los cambios en la señal de referencia. Se estabiliza en cierto valor y es ligeramente perturbada ante los cambios de referencia. El transitorio muestra una convergencia asintótica hacia los valores de estabilización.

7.5.3. Modos Deslizantes

Haciendo uso de los aspectos de simulación descritos en el diseño de misión, el modelado de la dinámica orbital, la dinámica satelital y el generador de referencias, se ajustan las ganancias del controlador asumiendo una velocidad angular máxima de 0,1 rad/s, y luego de muchas iteraciones el valor de $a = 20$ obtuvo la mejor respuesta para la estabilidad del sistema.

Tomando en cuenta los valores típicos de las perturbaciones, se asume un vector permanente de valores constantes, cuya norma es menor a 0.62 Nm ($[0,5 \text{ } -0,3 \text{ } 0,2]^T \text{ Nm}$).

Para calcular el error de actitud (σ_{BR} , ω_{BR}), debe recordarse la forma de adicionar vectores de rotación y la forma de adicionar vectores en distintos marcos de referencia, descritos en el anexo B.

Los resultados de la simulación del escenario de misión para el controlador por Lyapunov se muestran a continuación:

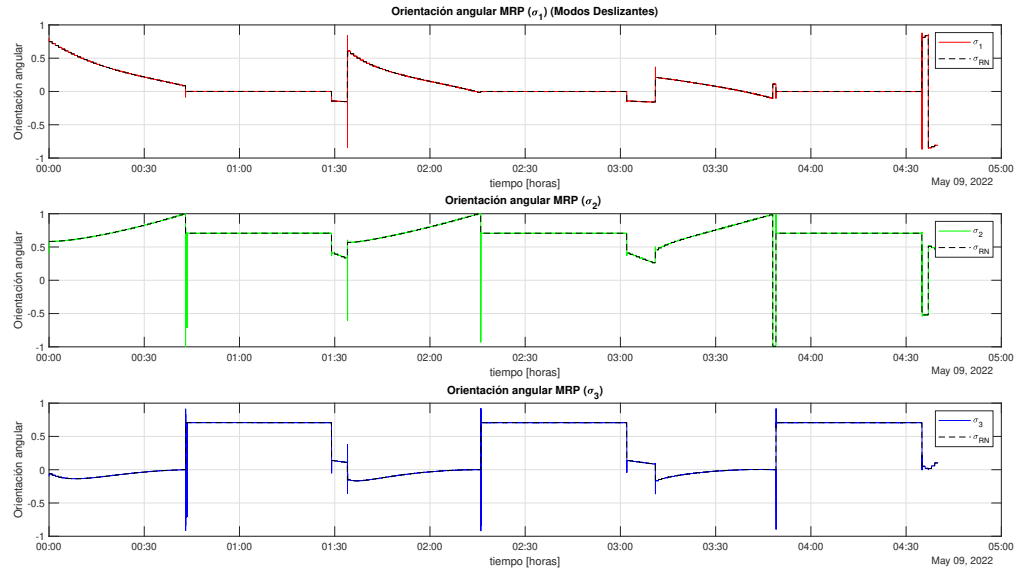


Figura 7-22.: Controlador SMC.

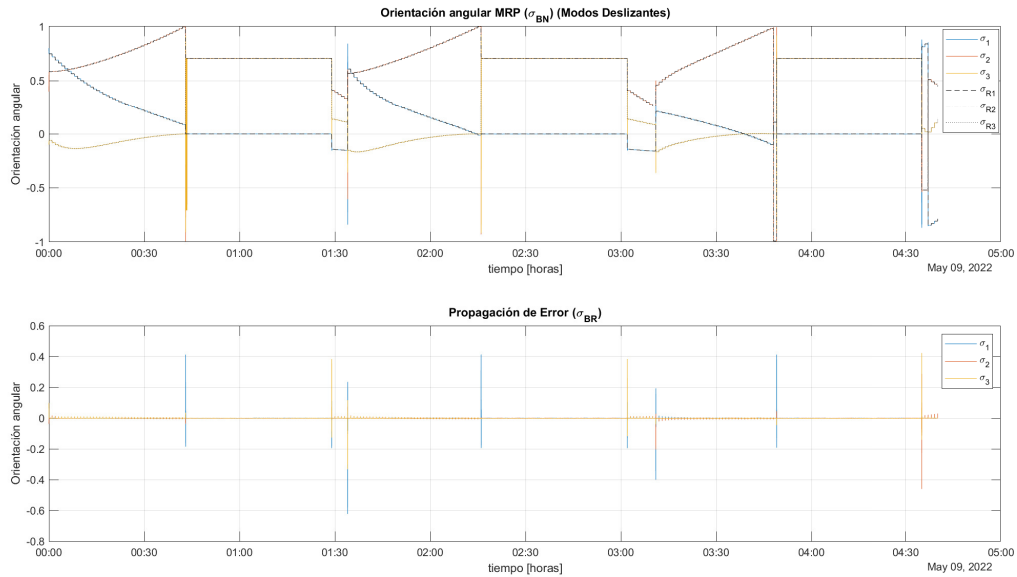


Figura 7-23.: Orientación angular y error de actitud con controlador SMC.

Las gráficas de las figuras 7-22 y 7-23 muestran el comportamiento del cuerpo satelital y el error de actitud asociado para las primeras tres (3) órbitas (16800 s) de simulación.

La gráfica 7-22 evidencia que el controlador es capaz de hacer seguimiento de la trayectoria de

referencia propuesta como era de esperarse. Alrededor de los primeros 45 minutos de simulación se efectúa el apuntamiento solar, maniobra que requiere que la norma de los MRP sea de 1 precisamente, por lo que el controlador debe ser igual de preciso para no ejecutar el cálculo de la sombra. En este tramo se evidencia un cambio abrupto al comienzo de la maniobra, proceso correspondiente a la estabilización del controlador en esta referencia.

De la gráfica 7-23 se evidencia la referencia y el desempeño del controlador en sus tres componentes, adicionalmente se evidencia la evolución del error de actitud para el controlador SMC. El error muestra tendencia a estabilizarse en cero y al cambio de referencia, correspondiente al cambio de apuntamiento, se evidencian los cambios efectuados por el controlador para seguir la referencia.

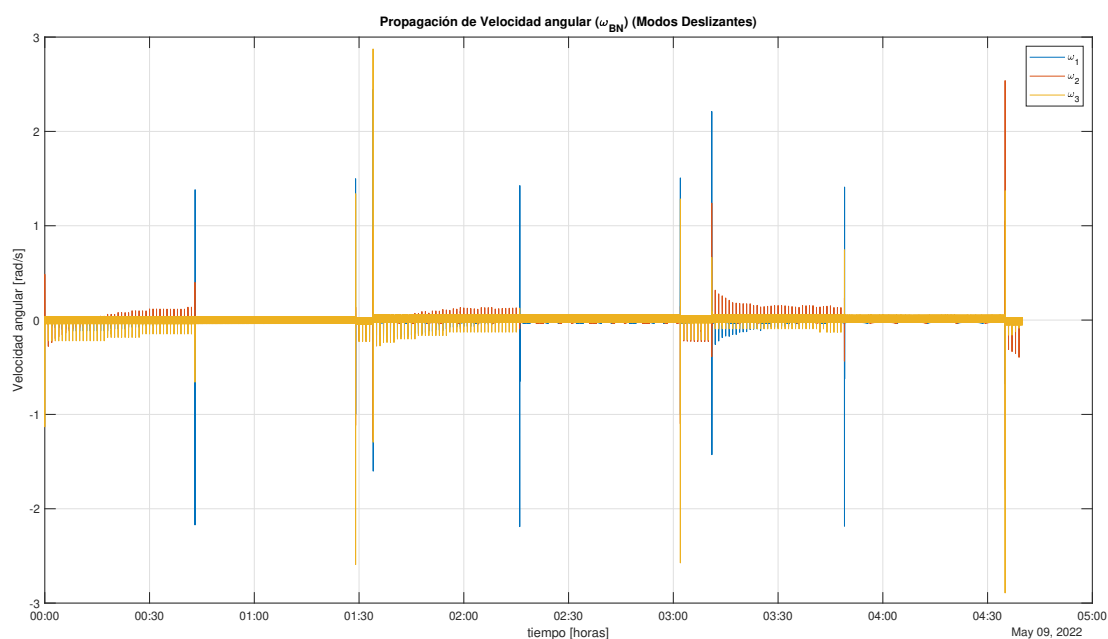


Figura 7-24.: Velocidad angular con controlador SMC.

La figura 7-24 muestra que el comportamiento de la velocidad angular del cuerpo intenta estabilizarse en 0 rad/s . Sin embargo, a diferencia de los otros controladores en este la velocidad angular fluctúa constantemente y de forma instantánea, comportamiento que puede ser no deseado para el sistema. La velocidad angular exhibe incrementos repentinos para nuevamente buscar una estabilidad alrededor de 0 rad/s .

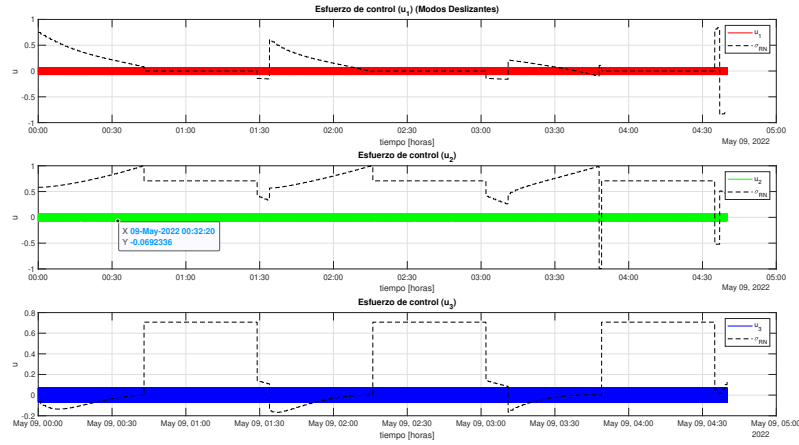


Figura 7-25.: Esfuerzo de controlador SMC.

La figura 7-25 muestra el desempeño de la señal de control para las tres (3) órbitas de simulación. En ella se evidencia que la señal del controlador tiene un comportamiento de múltiples cambios drásticos e instantáneos. Este comportamiento del controlador es un esfuerzo demandante sobre los actuadores, que los puede saturar y perjudicar su funcionamiento a corto y largo plazo.

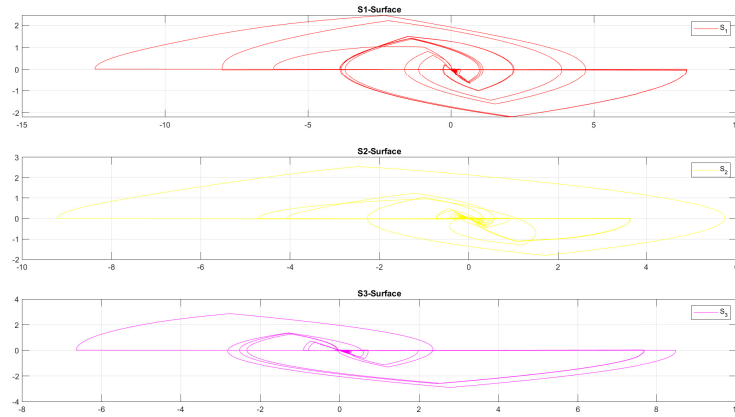


Figura 7-26.: Superficies de convergencia descritas por el sistema ante el SMC.

Las gráficas de la figura 7-26 muestran las superficies de deslizamiento S para cada componente. Se observa en estas que el comportamiento de las señales es convergente hacia el origen (0,0), logrando el cometido con el principio de funcionamiento del controlador SMC.

En resumen, en este capítulo se hace un ajuste preliminar de los controladores diseñados para examinar su respuesta de seguimiento y tener una validación para el entorno de misión. Posteriormente se implementan los controladores dentro de la referencia de actitud calculada y se analiza el comportamiento de cada controlador.

8. Evaluación de desempeño

En este capítulo se hace uso de índices del error para evaluar el desempeño de los controladores diseñados e implementados.

Basado en la normatividad de ESA (ESSB-HB-E-003) y de la ECSS (ECSS-E-HB-60-10A) con base al error de apuntamiento, se definen los siguientes índices de desempeño del error (en función del tiempo):

- **APE (*Absolute Performance Error*)**: Es la diferencia entre el parámetro objetivo (actitud, geolocalización) y el parámetro actual en un instante determinado.
- **MPE (*Mean Performance Error*)**: Valor medio del APE para un intervalo de tiempo Δt .
- **RPE (*Relative Knowledge Error*)**: Diferencia entre el APE en un intervalo dado Δt , y el MPE dado en el mismo intervalo.
- **PDE (*Performance Drift Error*)**: Diferencia entre los MPEs tomados en dos intervalos de tiempos separados por un tiempo especificado Δt_s , durante un periodo de observación.
- **PRE (*Performance Reproducibility Error*)**: Diferencia entre los MPEs tomados en dos intervalos de tiempos separados por un tiempo especificado Δt_s , durante diferentes periodos de observación.
- **AKE (*Absolute Knowledge Error*)**: Es la diferencia entre el parámetro real (actitud, geolocalización, etc) y el parámetro conocido (medido o estimado) en un instante determinado.
- **MKE (*Mean Performance Error*)**: Valor medio del AKE para un intervalo de tiempo Δt .
- **RKE (*Relative Knowledge Error*)**: Diferencia entre el AKE en un intervalo dado Δt , y el MKE dado en el mismo intervalo.
- **KDE (*Performance Drift Error*)**: Diferencia entre los MKEs tomados en dos intervalos de tiempos separados por un tiempo especificado Δt_s , durante un periodo de observación.
- **KRE (*Performance Reproducibility Error*)**: Diferencia entre los MKEs tomados en dos intervalos de tiempos separados por un tiempo especificado Δt_s , durante diferentes periodos de observación.

La gráfica 8-1 ilustra la relación entre los diferentes índices del desempeño del error:

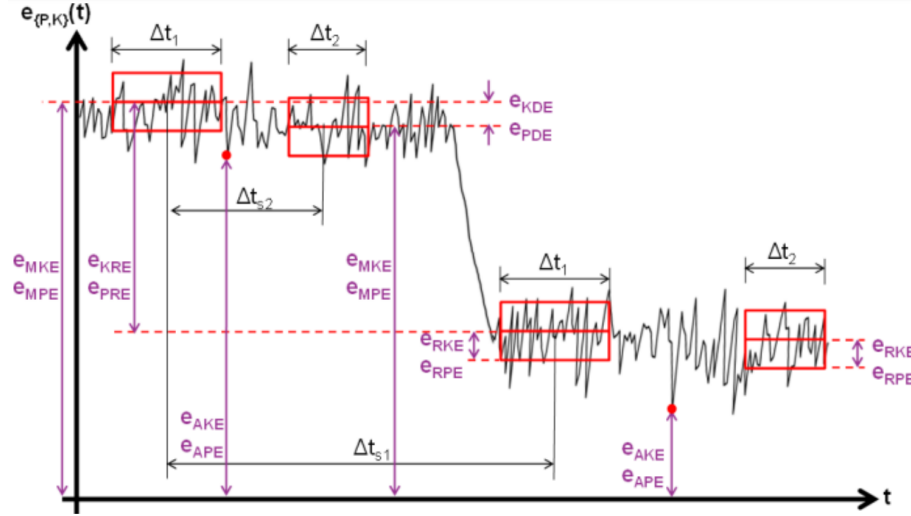


Figura 8-1.: Relación gráfica de índices de desempeño del error de apuntamiento (Tomado de [Hirth et al., 2017]).

De este modo, los índices que relacionan a *P* (*Performance*) pueden asociarse al control de actitud y los índices que relacionan a *K* (*Knowledge*) pueden asociarse a la determinación de actitud. Matemáticamente se formulan los índices de error de apuntamiento en la tabla 8-1:

Índice		Expresión matemática
APE	e_{APE}	$e_P(t)$
AKE	e_{AKE}	$e_K(t)$
MPE	e_{MPE}	$\bar{e}_P(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} e_P(t) dt$
MKE	e_{MKE}	$\bar{e}_K(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} e_K(t) dt$
RPE	e_{RPE}	$e_P(t) - \bar{e}_P(t, \Delta t)$
RKE	e_{RKE}	$e_K(t) - \bar{e}_K(t, \Delta t)$
PDE	e_{PDE}	$\bar{e}_P(t, \Delta t_1) - \bar{e}_P(t + \Delta t_s, \Delta t_2)$
PRE	e_{PRE}	
KDE	e_{KDE}	$\bar{e}_K(t, \Delta t_1) - \bar{e}_K(t + \Delta t_s, \Delta t_2)$
KRE	e_{KRE}	
Δt_s		Tiempo de estabilización

Tabla 8-1.: Expresión matemática de los índices de error de apuntamiento.

Analizando la órbita y las condiciones de cada apuntamiento es posible determinar los tiempos de acceso (ventanas) por cada evento durante las tres (3) primeras órbitas. La tabla 8-2 resume esta información:

Evento	Δt [s]									
<i>Solar</i>	0	Δt_1	0	0	Δt_2	0	0	0	2760	0
		2760								
<i>Nadir</i>	0	0	Δt_1	0	0	0	Δt_2	0	0	0
			480							
<i>Target</i>	2580	0	0	Δt_1	0	Δt_2	0	Δt_3	0	300
				2340						
						180		2340		

Tabla 8-2.: Ventanas de acceso por apuntamiento.

Los valores en negrillas corresponden a las ventanas (Δt_i) de cada apuntamiento seleccionados para analizar el desempeño de los controladores basados en el estándar previamente descrito.

Debido a que la cantidad de índices de error asociados a P , los tres eventos de apuntamiento y la cantidad de ventanas seleccionadas, se analizan alrededor de 45 resultados. Razón por la cual, se muestran a continuación los resultados de los índices asociados al evento más demandante: seguimiento de objetivos. Sin embargo, los otros resultados son tenidos en cuenta en la sección de *Comparación* para el análisis final. Conforme a esto se examinan los índices de error de los distintos controladores:

8.1. Controlador no lineal

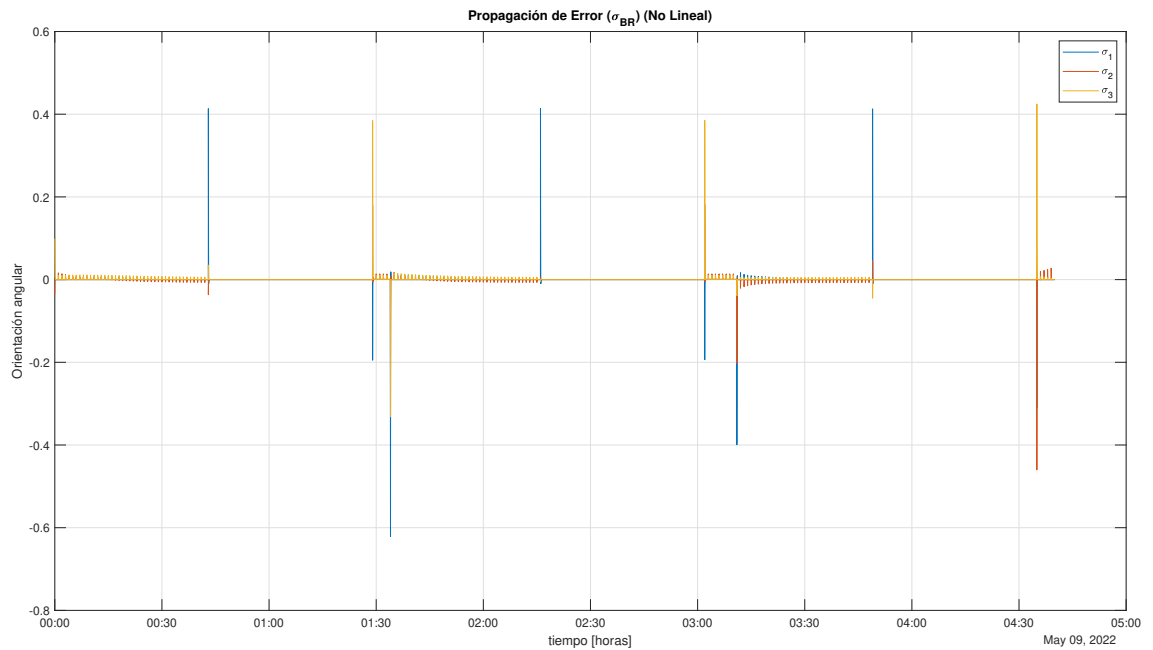


Figura 8-2.: Propagación de error con controlador no lineal.

La figura 8-2 muestra que la tendencia general del error es de converger a 0. De igual manera que la velocidad angular hay incrementos repentinos como consecuencia del cambio abrupto en la señal de referencia. El desempeño de este será analizado en la siguiente sección con el fin de validar los requerimientos planteados.

8.1.1. MPE

La figura 8-3 muestra el índice del MPE para las tres ventanas del seguimiento de objetivo. Dado que este índice es el integral dentro de un intervalo dado, interesa el último valor alcanzado por la gráfica, estos corresponden a 0.000724, 0.01082 y 0.00101, respectivamente. Si bien estos valores son muy cercanos a cero (lo cual es bueno para calificar el desempeño) es de interés conocer en conjunto el desempeño de otros controladores para presentar un mejor análisis (Tabla 8-6).

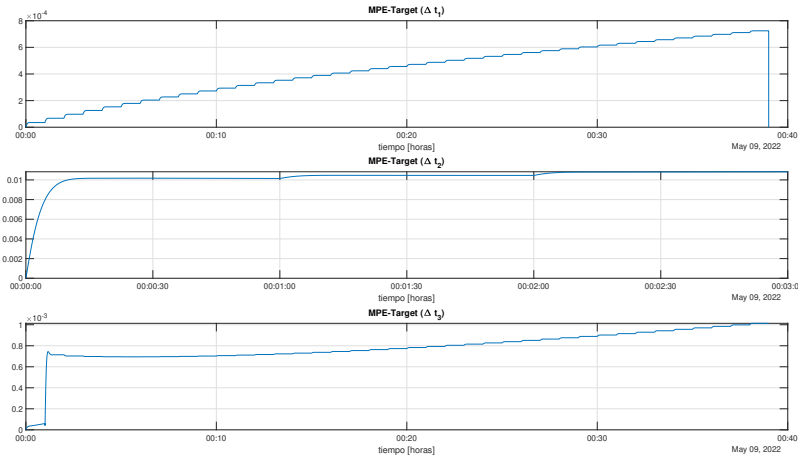


Figura 8-3.: Índice MPE en seguimiento de objetivos controlador no lineal.

8.1.2. RPE

La figura 8-4 muestra el índice RPE para la primera ventana de seguimiento de objetivo (Δt_1). Este índice muestra el error relativo entre el APE y el MPE en cierta ventana seleccionada. Por lo que el comportamiento ideal de este índice es converger a 0. Para el caso del controlador lineal, se observa un valor máximo en 0.448 y suele estabilizarse en 0.00078, estos valores se examinan en conjunto en la tabla 8-6.

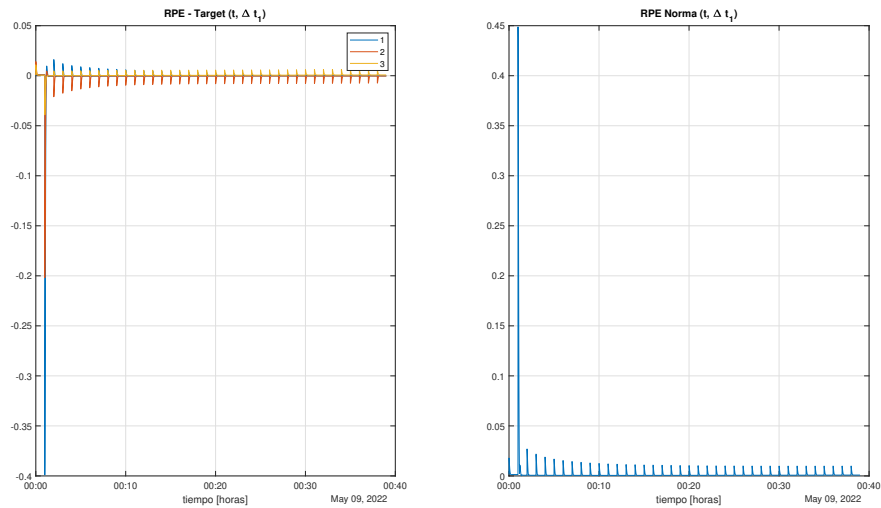


Figura 8-4.: Índice RPE en seguimiento de objetivos controlador no lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

8.1.3. PRE

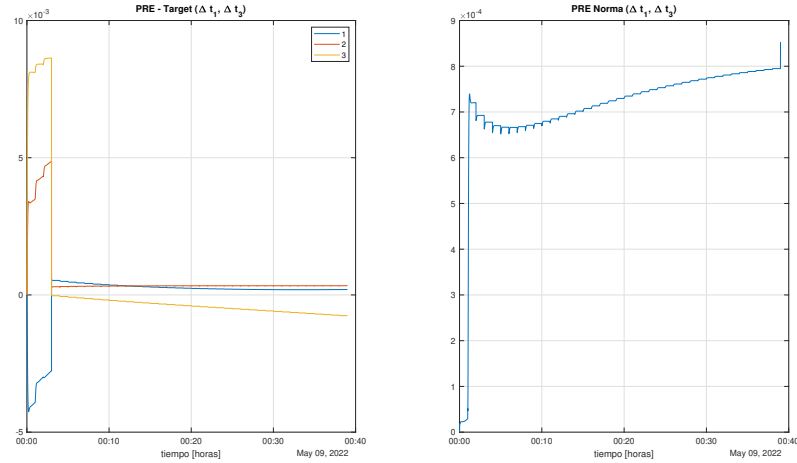


Figura 8-5.: Índice PRE en seguimiento de objetivos controlador no lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-5 muestra el índice PRE para las ventanas 1 y 2 del seguimiento de objetivo. Este índice muestra el error relativo de apuntamiento entre dos MPE para dos ventanas distintas. En el presente caso se seleccionan ventanas de distintas órbitas. Dado que en ambas ventanas se realiza el mismo tipo de apuntamiento, el error reflejado debe acercarse una vez más a 0. El último valor se encuentra en 0.000794, este valor se examina en conjunto en la tabla 8-6.

8.1.4. PDE

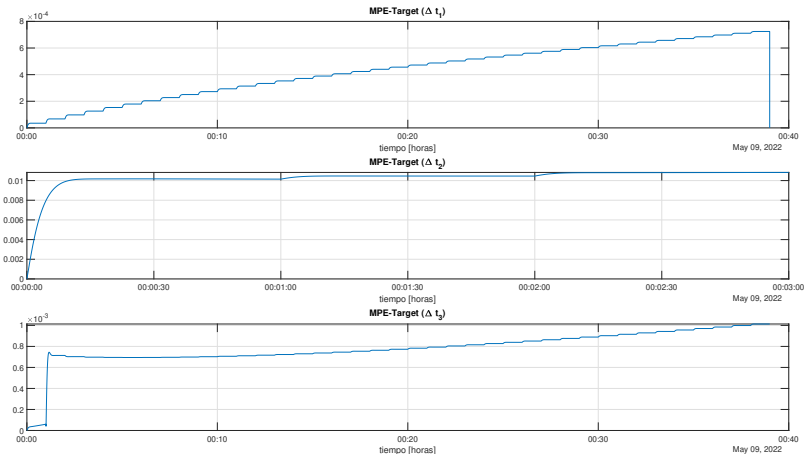


Figura 8-6.: Índice PDE en seguimiento de objetivos controlador no lineal.

La figura 8-6 muestra el índice PDE para las ventanas 2 y 3 del seguimiento de objetivo. Este índice muestra el desvío del error entre dos intervalos de una misma ventana de apuntamiento. En el presente caso se seleccionan ventanas de apuntamiento correspondientes a la misma órbita. El valor final es de 0.0103, este valor se examina en conjunto en la tabla 8-6.

Adicionalmente a estos, se evalúa el índice de error cuadrático integrativo (ISE / Integral-Squared Error), el cual muestra el desempeño global del controlador durante la misión.

8.1.5. ISE

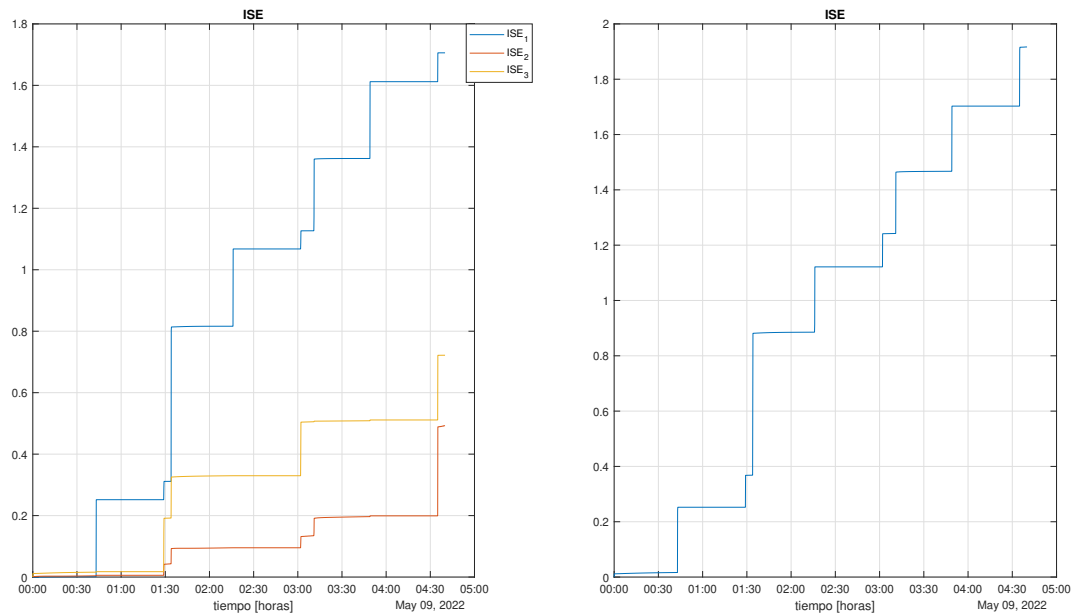


Figura 8-7.: Índice ISE del controlador no lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-7 muestra el índice ISE para el controlador no lineal. En este se abarca el desempeño global del controlador independientemente de las ventanas de los apuntamientos. Al ser este una integral evaluada en el tiempo completo de simulación, es de interés el último valor reportado por la gráfica. Para el controlador lineal este valor corresponde a 1.916, debe compararse con los otros controladores para establecer una conclusión final.

8.1.6. Alcance de requerimientos

Requerimientos funcionales

Como fue observado en el capítulo anterior y en este, el controlador es capaz de realizar apuntamiento a nadir (R1), seguimiento de objetivo (R2) y apuntamiento solar (R3). Por lo que se satisfacen los requerimientos funcionales planteados.

Requerimientos operacionales

De acuerdo con lo establecido en el capítulo 5, se verificarán los requerimientos asociados al evento más demandante: el seguimiento de objetivo:

- **R2.1.:** El error máximo debe ser menor a 10° (0.017 rad). La magnitud del error de este controlador está del orden de 0.00033, por lo que se cumple este requerimiento operacional.
- **R2.2.:** La velocidad angular es inferior a 0.01 rad/s y responde en menos de 15 segundos, hallándose por lo que cumple con este requerimiento operacional.
- **R2.3.:** El controlador muestra que responde en menos de 15 segundos (Figura 8-20), por lo que cumple con este requerimiento.

Con lo que cumple con los requerimientos operacionales planteados. La tabla 8-3 resume lo previamente mencionado:

Sub-requerimiento	Descripción	Resultados controlador no lineal
R2.1	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	Error de 0.00033 rad
R2.2	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta $>0.0257 \text{ rad/s}$	Velocidad angular de 0.01 rad/s , en menos de 15 s de respuesta
R2.3	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	Respuesta menor a 15 s

Tabla 8-3.: Resultados de requerimientos para controlador no lineal.

8.2. Controlador Lineal

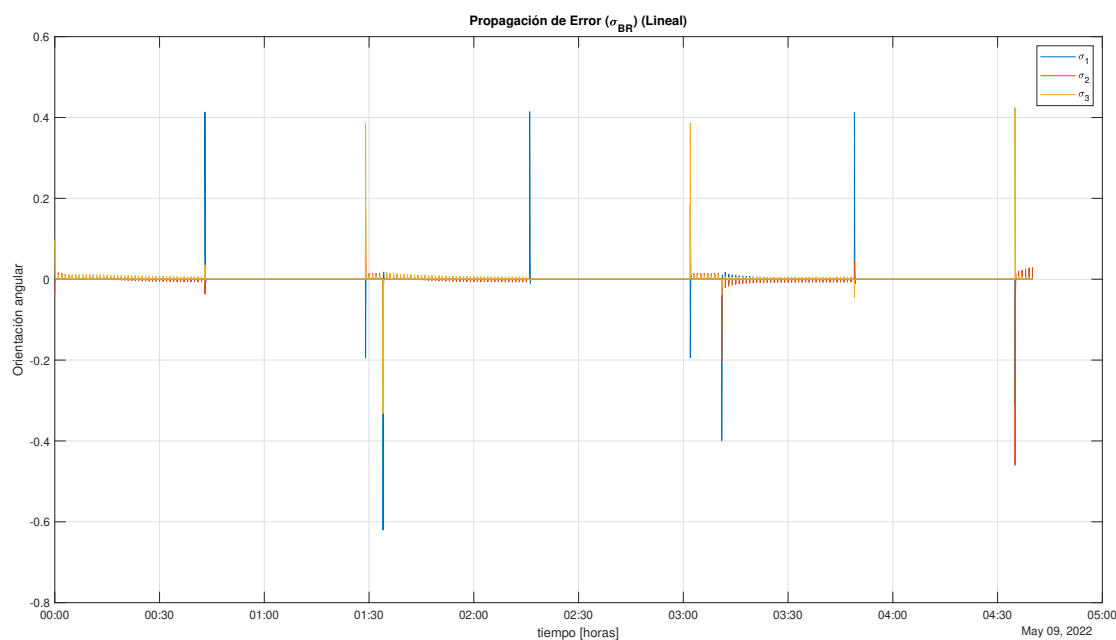


Figura 8-8.: Propagación de error con controlador lineal.

La figura 8-8 muestra que la tendencia general del error es de converger a 0. De igual manera que la velocidad angular hay incrementos repentinos como consecuencia del cambio abrupto en la señal de referencia. El desempeño de este será analizado en el siguiente capítulo con el fin de validar los requerimientos planteados.

8.2.1. MPE

La figura 8-9 muestra el índice del MPE para las tres ventanas del seguimiento de objetivo. Dado que este índice es el integral dentro de un intervalo dado, interesa el último valor alcanzado por las gráficas, estos corresponden a 0.000807, 0.01222 y 0.00114, respectivamente. Si bien estos valores son muy cercanos a cero (lo cual es bueno para calificar el desempeño) nos interesa conocer en conjunto el desempeño de otros controladores para presentar un mejor análisis (Tabla 8-6).

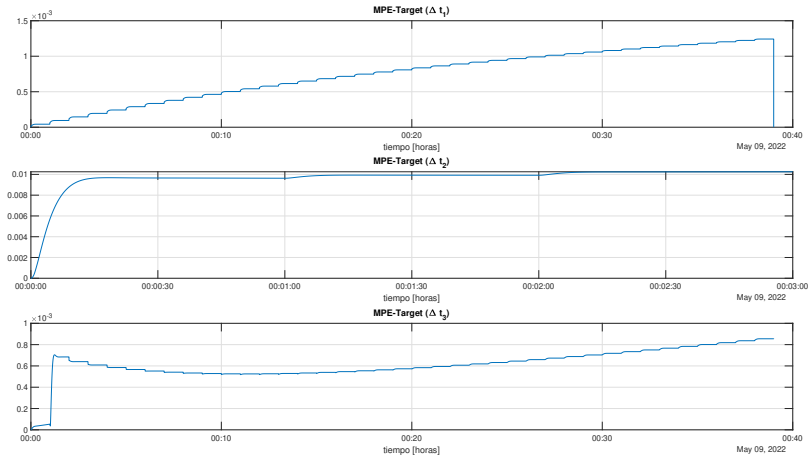


Figura 8-9.: Índice MPE en seguimiento de objetivos controlador lineal.

8.2.2. RPE

La figura 8-10 muestra el índice RPE para la primera ventana de seguimiento de objetivo (Δt_1). Este índice muestra el error relativo entre el APE y el MPE en cierta ventana seleccionada. Por lo que el comportamiento ideal de este índice es converger a 0. Para el caso del controlador lineal se observa un valor máximo en 0.448 y suele estabilizarse en 0.00085, estos valores se examinan en conjunto en la tabla 8-6.

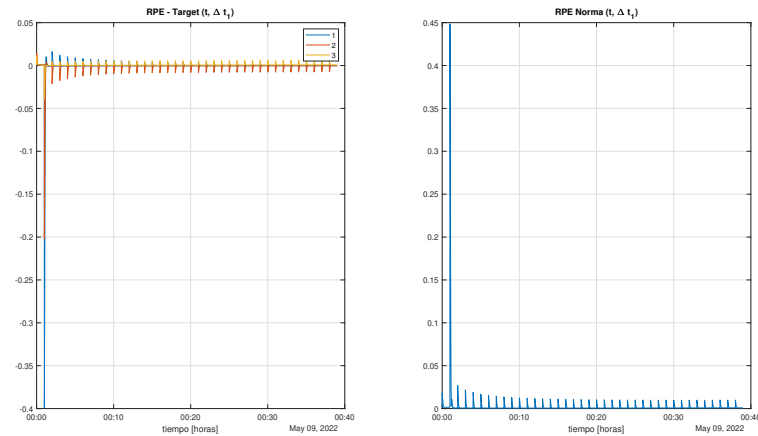


Figura 8-10.: Índice RPE en seguimiento de objetivos controlador lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

8.2.3. PRE

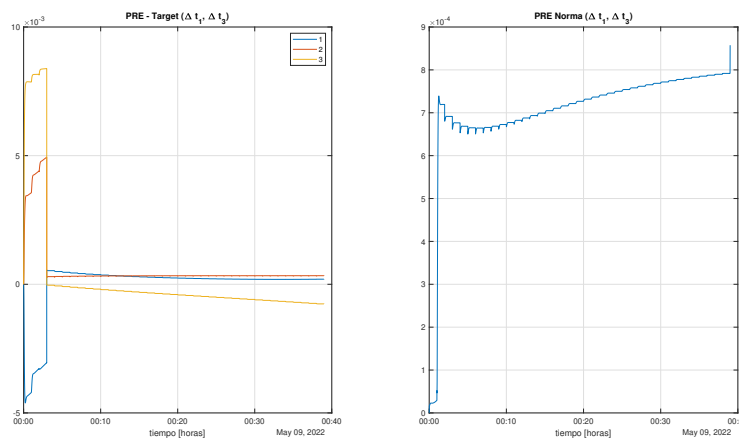


Figura 8-11.: Índice PRE en seguimiento de objetivos controlador lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-11 muestra el índice PRE para las ventanas 1 y 2 del seguimiento de objetivo. Este índice muestra el error relativo de apuntamiento entre dos MPE para dos ventanas distintas. En el presente caso se seleccionan ventanas de distintas órbitas. Dado que en ambas ventanas se realiza el mismo tipo de apuntamiento, el error reflejado debe acercarse una vez más a 0. El último valor se encuentra en 0.000791, este valor se examina en conjunto en la tabla 8-6.

8.2.4. PDE

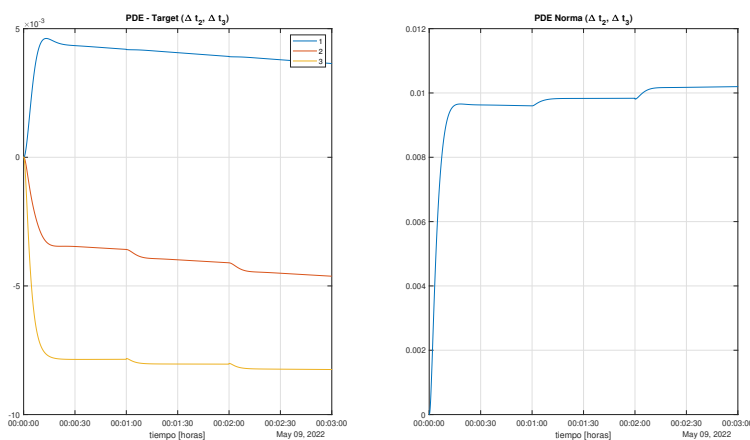


Figura 8-12.: Índice PDE en seguimiento de objetivos controlador lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-12 muestra el índice PDE para las ventanas 2 y 3 del seguimiento de objetivo. Este índice muestra el desvío del error entre dos intervalos de una misma ventana de apuntamiento. En el presente caso se seleccionan ventanas de apuntamiento correspondientes a la misma órbita. El valor final es de 0.0101, este valor se examina en conjunto en la tabla 8-6.

Adicionalmente a estos, se evalúa el índice de error cuadrático integrativo (ISE / Integral-Squared Error), el cual muestra el desempeño global del controlador durante la misión.

8.2.5. ISE

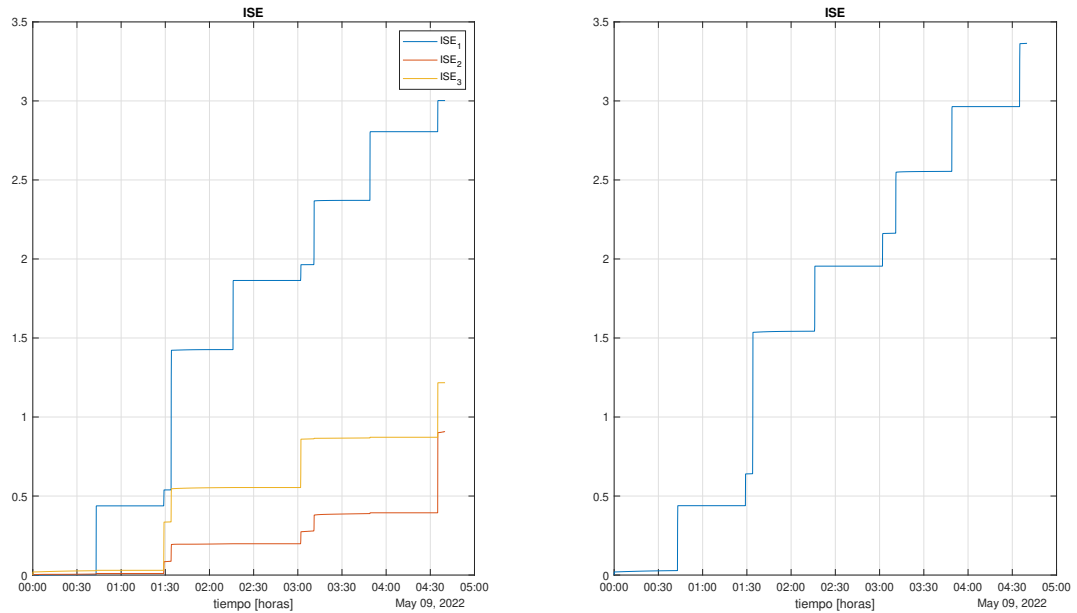


Figura 8-13.: Índice ISE del controlador lineal. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-13 muestra el índice ISE para el controlador lineal. En este se abarca el desempeño global del controlador independientemente de las ventanas de los apuntamientos. Al ser este una integral evaluada en el tiempo completo de simulación, es de interés el último valor reportado por la gráfica. Para el controlador lineal este valor corresponde a 3.363, debe compararse con los otros controladores para establecer una conclusión final.

8.2.6. Alcance de requerimientos

Requerimientos funcionales

Como fue observado en el capítulo anterior y en este, el controlador es capaz de realizar apuntamiento a nadir (R1), seguimiento de objetivo (R2) y apuntamiento solar (R3). Por lo que se satisfacen los requerimientos funcionales planteados.

Requerimientos operacionales

De acuerdo con lo establecido en el capítulo 5, se verificarán los requerimientos asociados al evento más demandante: el seguimiento de objetivo:

- **R2.1.:** El error máximo debe ser menor a 10° (0.017 rad). La magnitud del error de este controlador está del orden de 0.00087, por lo que se cumple este requerimiento operacional.
- **R2.2.:** La velocidad angular es inferior a 0.01 rad/s y responde en menos de 15 segundos, hallándose por lo que cumple con este requerimiento operacional.
- **R2.3.:** El controlador muestra que responde en menos de 15 segundos (Figura 8-20), por lo que cumple con este requerimiento.

Con lo que cumple con los requerimientos operacionales planteados. La tabla 8-4 resume lo previamente mencionado:

Sub-requerimiento	Descripción	Resultados controlador lineal
R2.1	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	Error de 0.00087 rad
R2.2	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta $>0.0257 \text{ rad/s}$	Velocidad angular de 0.01 rad/s , en menos de 15 s de respuesta
R2.3	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	Respuesta menor a 15 s

Tabla 8-4.: Resultados de requerimientos para controlador lineal PD.

8.3. Controlador SMC

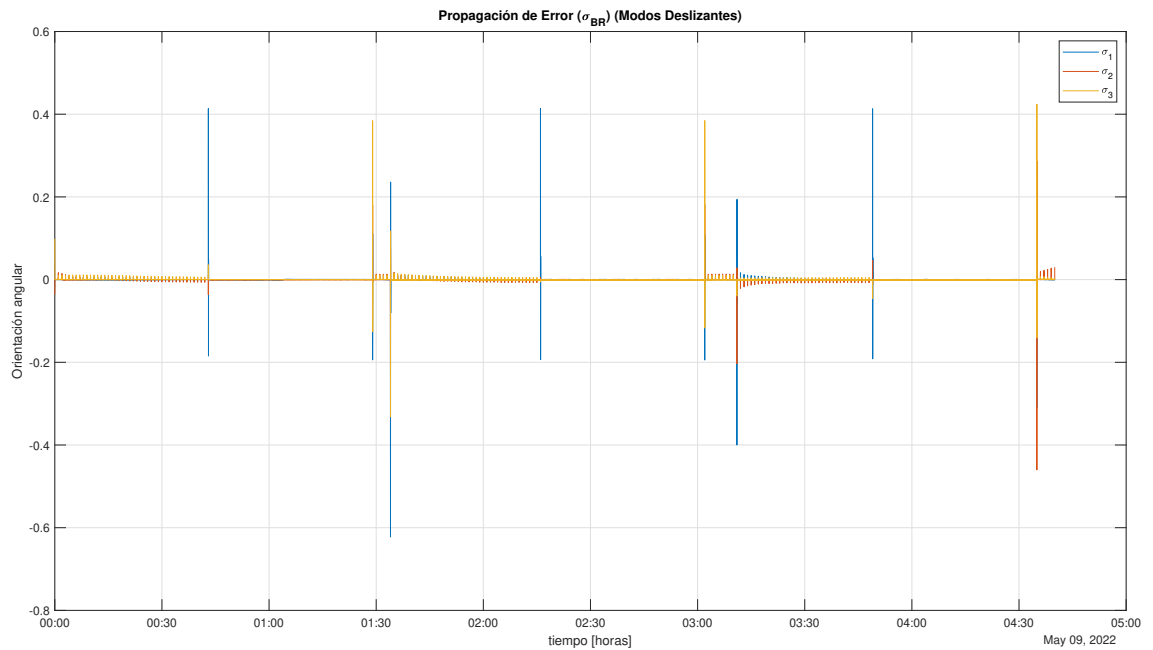


Figura 8-14.: Propagación del error con controlador SMC.

La figura 8-14 muestra que la tendencia general del error es de converger a 0. De igual manera que la velocidad angular hay incrementos repentinos como consecuencia del cambio abrupto en la señal de referencia. El desempeño de este será analizado en el siguiente capítulo con el fin de validar los requerimientos planteados.

8.3.1. MPE

La figura 8-15 muestra el índice del MPE para las tres ventanas del seguimiento de objetivo. Dado que este índice es el integral dentro de un intervalo dado, interesa el último valor alcanzado por las gráficas, estos corresponden a 0.000586, 0.000776 y 0.0000691, respectivamente. Si bien estos valores son muy cercanos a cero (lo cual es bueno para calificar el desempeño) nos interesa conocer en conjunto el desempeño de otros controladores para presentar un mejor análisis (Tabla 8-6).

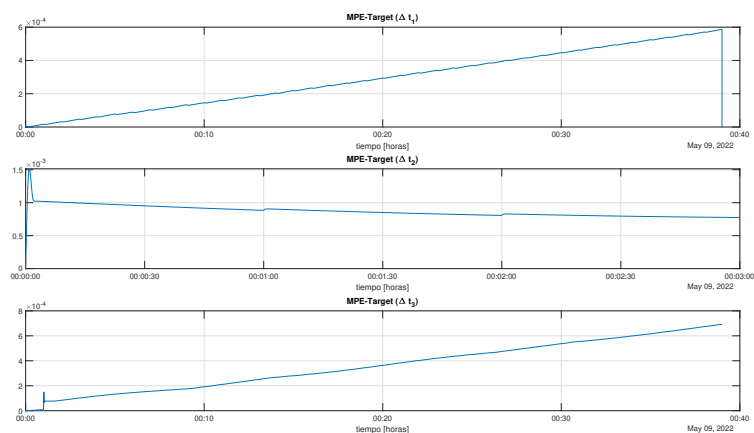


Figura 8-15.: Índice MPE en seguimiento de objetivos controlador SMC.

8.3.2. RPE

La figura 8-16 muestra el índice RPE para la primera ventana de seguimiento de objetivo (Δt_1). Este índice muestra el error relativo entre el APE y el MPE en cierta ventana seleccionada. Por lo que el comportamiento ideal de este índice es converger a 0. Para el caso del controlador lineal se observa un valor máximo en 0.450 y suele estabilizarse en 0.0004, estos valores se examinan en conjunto en la tabla 8-6.

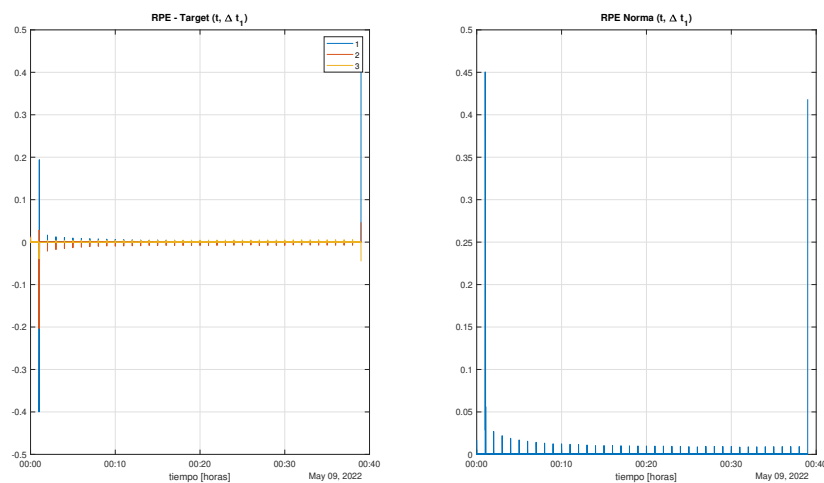


Figura 8-16.: Índice RPE en seguimiento de objetivos controlador SMC. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

8.3.3. PRE

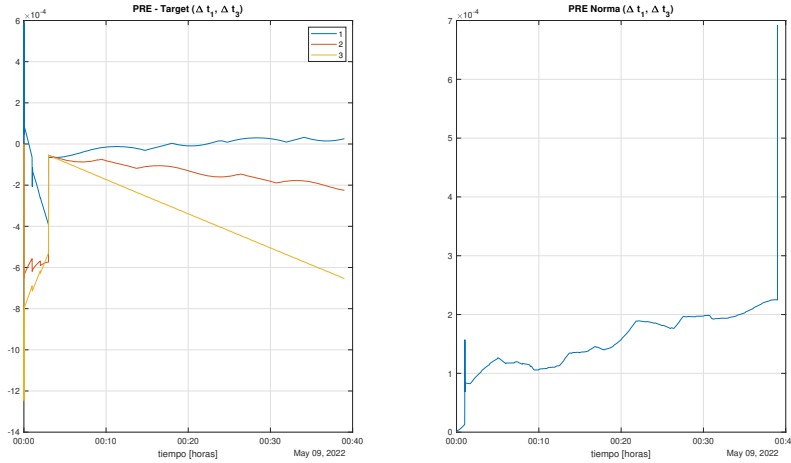


Figura 8-17.: Índice PRE en seguimiento de objetivos controlador SMC. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-17 muestra el índice PRE para las ventanas 1 y 2 del seguimiento de objetivo. Este índice muestra el error relativo de apuntamiento entre dos MPE para dos ventanas distintas. En el presente caso se seleccionan ventanas de distintas órbitas. Dado que en ambas ventanas se realiza el mismo tipo de apuntamiento, el error reflejado debe acercarse una vez más a 0. El último valor se encuentra en 0.00022, este valor se examina en conjunto en la tabla 8-6.

8.3.4. PDE

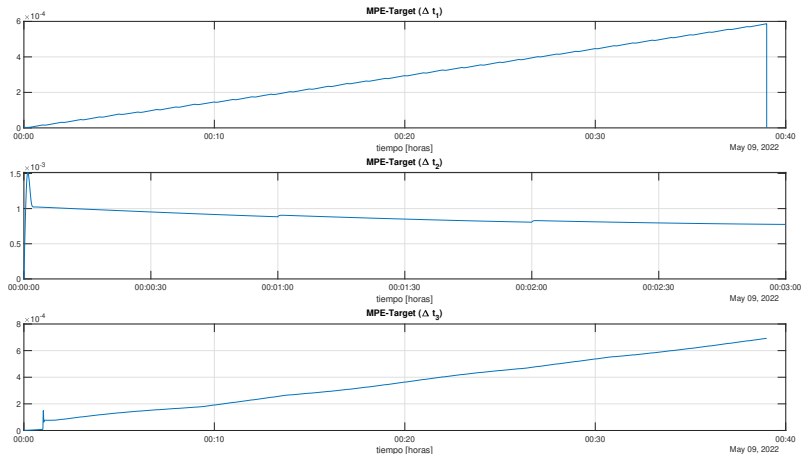


Figura 8-18.: Índice PDE en seguimiento de objetivos controlador SMC.

La figura 8-18 muestra el índice PDE para las ventanas 2 y 3 del seguimiento de objetivo. Este índice muestra el desvío del error entre dos intervalos de una misma ventana de apuntamiento. En el presente caso se seleccionan ventanas de apuntamiento correspondientes a la misma órbita. El valor final es de 0.000873, este valor se examina en conjunto en la tabla 8-6.

Adicionalmente a estos, se evalúa el índice de error cuadrático integrativo (ISE / Integral-Squared Error), el cual muestra el desempeño global del controlador durante la misión.

8.3.5. ISE

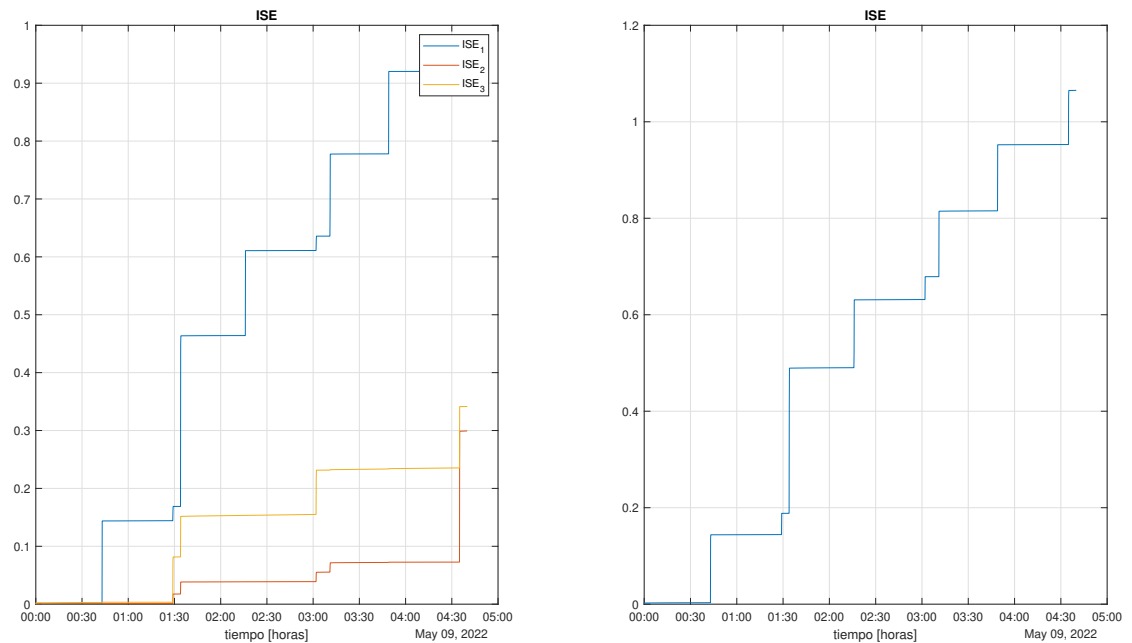


Figura 8-19.: Índice ISE del controlador SMC. Gráfica izquierda visualiza cada componente del vector, gráfica derecha la norma del vector.

La figura 8-19 muestra el índice ISE para el controlador SMC. En este se abarca el desempeño global del controlador independientemente de las ventanas de los apuntamientos. Al ser este una integral evaluada en el tiempo completo de simulación, es de interés el último valor reportado por la gráfica. Para el controlador lineal este valor corresponde a 1.065, debe compararse con los otros controladores para establecer una conclusión final.

8.3.6. Alcance de requerimientos

Requerimientos funcionales

Como fue observado en el capítulo anterior y en este, el controlador es capaz de realizar apuntamiento a nadir (R1), seguimiento de objetivo (R2) y apuntamiento solar (R3). Por lo que se satisfacen los requerimientos funcionales planteados.

Requerimientos operacionales

De acuerdo con lo establecido en el capítulo 5, se verificarán los requerimientos asociados al evento más demandante: el seguimiento de objetivo:

- **R2.1.:** El error máximo debe ser menor a 10° (0.017 rad). La magnitud del error de este controlador está del orden de 0.00006, por lo que se cumple este requerimiento operacional.
- **R2.2.:** La velocidad angular es inferior a 0.01 rad/s y responde en menos de 5 segundos, hallándose por lo que cumple con este requerimiento operacional.
- **R2.3.:** El controlador muestra que responde en menos de 5 segundos (Figura 8-20), por lo que cumple con este requerimiento.

Con lo que cumple con los requerimientos operacionales planteados. La tabla 8-5 resume lo previamente mencionado:

Sub-requerimiento	Descripción	Resultados controlador SMC
R2.1	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	Error de 0.00006 rad
R2.2	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta $>0.0257 \text{ rad/s}$	Velocidad angular de 0.01 rad/s , en menos de 5 s de respuesta
R2.3	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	Respuesta menor a 5 s

Tabla 8-5.: Resultados de requerimientos para controlador SMC.

8.4. Comparación

Las figura 8-20 y 8-21 muestran el desempeño de los controladores para la orientación angular y el error de apuntamiento:

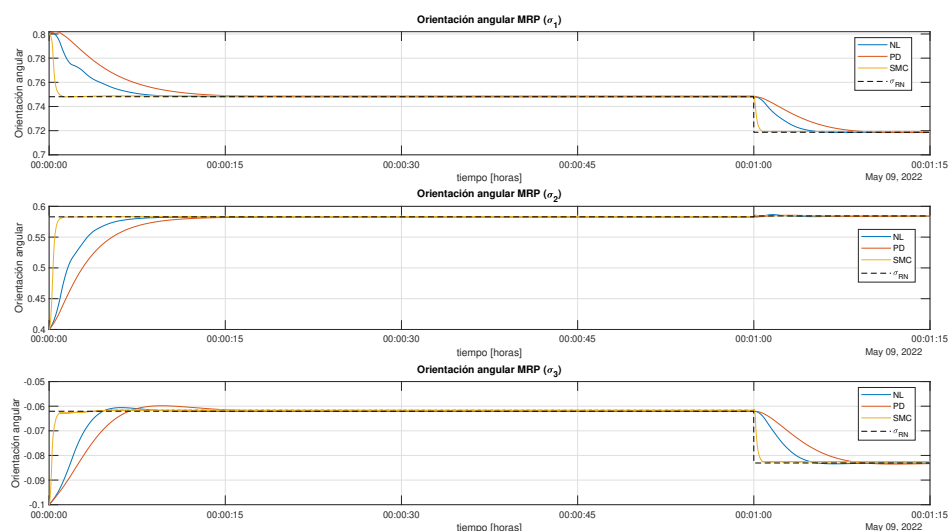


Figura 8-20.: Comparación desempeño de tres controladores (Orientación angular).

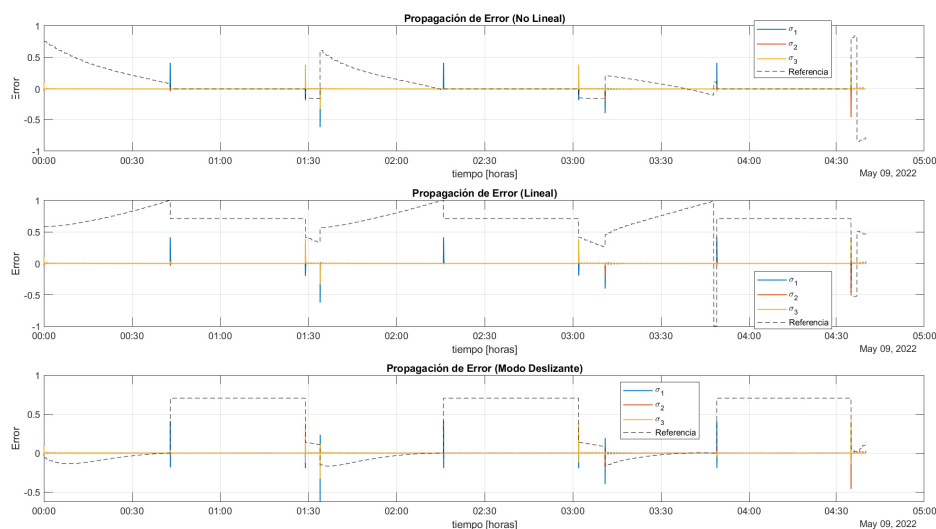


Figura 8-21.: Comparación desempeño de tres controladores (Error de actitud).

La figura 8-20 da un indicio de que el controlador con mejor desempeño sería el controlador por modos deslizantes (SMC). En cuanto al error de apuntamiento, se observa que todos tienen

un comportamiento similar, por lo que debe analizarse mediante índices del error para tener más certeza de lo visualmente analizado.

La tabla 8-6 resume los resultados obtenidos por los índices del error de cada controlador:

Controlador	ISE	Evento	MPE		RPE ($\Delta t_1, \Delta t_2$)		PRE ($t, \Delta t_1$)	PDE ($\Delta t_2, \Delta t_3$)
SMC	1.065	Nadir	Δt_1	0.000483	Máximo	0.7444	1.240E-04	-
			Δt_2	0.000593	Mínimo	0.00044		
		Solar	Δt_1	0.000292	Máximo	0.4668	8.450E-04	-
			Δt_2	0.000769	Mínimo	0.00036		
		Target	Δt_1	0.000586	Máximo	0.4504	2.240E-04	0.000873
			Δt_2	0.000776	Mínimo	0.00047		
			Δt_3	0.000691				
No-Lineal	1.916	Nadir	Δt_1	0.005702	Máximo	0.735	6.700E-04	-
			Δt_2	0.004386	Mínimo	0.00581		
		Solar	Δt_1	0.0006	Máximo	0.416	7.770E-05	-
			Δt_2	0.000597	Mínimo	0.00057		
		Target	Δt_1	0.007243	Máximo	0.448	7.448E-04	0.0103
			Δt_2	0.010826	Mínimo	0.00078		
			Δt_3	0.001013				
Lineal (PD)	3.363	Nadir	Δt_1	0.006394	Máximo	0.736	6.885E-04	-
			Δt_2	0.004976	Mínimo	0.00621		
		Solar	Δt_1	0.000669	Máximo	0.416	7.360E-05	-
			Δt_2	0.000665	Mínimo	0.00057		
		Target	Δt_1	0.000807	Máximo	0.448	7.917E-04	0.0101
			Δt_2	0.012222	Mínimo	0.00085		
			Δt_3	0.001141				

Tabla 8-6.: Resultados de índices de error.

De la tabla 8-6 se puede concluir que el controlador con mejor desempeño es el controlador por modos deslizantes (SMC), debido a que contiene los índices con valores más cercanos a 0. De forma individual, los índices del error del estándar muestran que para los tres casos de apuntamiento el controlador SMC muestra un mejor desempeño, tanto como para una misma ventana de observación como para el desempeño relativo entre dos ventanas. Consecuentemente y de forma global, el índice cuadrático del error (ISE) corrobora lo descrito previamente, su valor es el más pequeño entre los tres controladores. Por lo que se concluye que en términos de precisión de apuntamiento y seguimiento, este controlador tiene mejor desempeño según el índice del error.

Por otro lado, en términos energéticos, es posible que este controlador exija un esfuerzo considerable debido a los cambios drásticos que presenta su comportamiento y las saturaciones a las que conlleva a los actuadores. Debe analizarse este aspecto al momento de implementarse en una misión real. Razón por la cual se calcula el índice de la integral de la norma del vector de control para tener un estimado del consumo energético de cada controlador. Los resultados se muestran en la tabla 8-7:

Controlador	Índice $\int \ u(t)\ dt$
SMC	2014.59
No-Lineal	10356.2119
Lineal (PD)	10356.2146

Tabla 8-7.: índice de consumo energético de los controladores.

En esta tabla se observa, que a diferencia de lo que se esperaba, el controlador por modos deslizantes logra tener un menor consumo que los otros dos controladores. La razón de esto se debe a que los valores de estabilización de los controladores por Lyapunov son hasta 10 veces mayores que los alcanzados por modos deslizantes. De este modo, este índice muestra que el controlador SMC tiene un mejor desempeño para el consumo energético.

En este capítulo se hace uso de índices del error para evaluar el desempeño de cada uno de los controladores durante la simulación de la misión. Se hace uso del estándar ESSB-HB-E-003 para analizar individualmente el desempeño de los controladores por cada maniobra de apuntamiento (Figuras de 8-3 a 8-18) y luego se hace uso del índice Integral-squared Error (ISE) para analizar globalmente el desempeño de cada controlador durante el tiempo de simulación (Figuras 8-7, 8-13, 8-19). Finalmente se hace uso de la integral de la norma del vector de control como índice para estimar el consumo energético de los controladores.

9. Conclusiones

9.1. Conclusiones

Los requerimientos operacionales y funcionales del ACS establecidos dentro del diseño de la misión satelital permiten tener condiciones y parámetros para el diseño de los controladores, así como del entorno de simulación (O1). Mediante la implementación de modelos de dinámica orbital y satelital se establecen las ecuaciones diferenciales que conllevan a las no linealidades y singularidades del sistema de actitud satelital que son abarcadas en el entorno de simulación (O2). Dados los requerimientos de la misión satelital, se diseñan controladores de seguimiento de referencia capaces de realizar maniobras de apuntamiento/seguimiento dentro de las condiciones establecidas. Los controladores diseñados fueron dos controladores no lineales (retroalimentación no lineal y por modos deslizantes) y un controlador lineal (PD) (O3). Para la evaluación y contraste entre de los controladores se hace uso de índices del error que miden y estiman el desempeño y precisión de los controladores. El contraste, según los índices, muestra que el controlador por modos deslizantes (SMC) tiene el mejor desempeño global entre los tres, considerando un esfuerzo de control demandante; Por otro lado, un controlador con menos esfuerzo de control pero con menos precisión de apuntamiento sería el controlador no lineal, por lo que puede ser usado en condiciones similares de acuerdo con las necesidades. Adicionalmente, se hace uso de un indicador que estima el consumo energético de los controladores, en base a este el SMC muestra mejor desempeño que los otros dos controladores. Los tres controladores cumplen con los requerimientos operacionales planteados en el diseño de misión y el controlador SMC, según los índices usados, muestra tener mejor desempeño ante los tres tipos de apuntamiento/seguimiento planteados y la transición entre estos (O4).

9.2. Trabajo futuro

Para profundizar y complementar el ACS diseñado y simulado, pueden incluirse las dinámicas de los actuadores comúnmente usados por nanosatélites. Otro aspecto a implementar es el sistema de ADS con las técnicas dinámicas de estimación (observación) así como los sensores que lo conforman para tener una simulación completa de un ADCS satelital.

Una vez el sistema de simulación esté completo es posible implementar los diseños en un prototipo de nanosatélite que podría testearse y/o lanzarse al espacio dentro del marco de una misión satelital académica o no.

Es posible, además, implementar algoritmos de control en hardware estandarizado haciendo uso de modelos de ingeniería y de vuelo de nanosatélites, lo que permite validar operaciones de control de apuntamiento desde una estación terrena simulada. De este modo, es posible complementar el análisis de desempeño del ADCS y el uso adecuado de las herramientas de error de apuntamiento para estandarizar el producto del subsistema y volverlo comercial.

Del mismo modo, es posible incluir otros subsistemas al modelo de pruebas, tales como el de comunicaciones para obtener respuestas del segmento espacial frente a los requerimientos del segmento terrestre.

Bibliografía

- [Archinal et al., 2011] Archinal, B. A., A’Hearn, M. F., Bowell, E., Conrad, A., Consolmagno, G. J., and R. Courtin, e. a. (2011). Report of the IAU working group on cartographic coordinates and rotational elements: 2009. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 109:101–135.
- [Bachelor, 2018] Bachelor, J. W. (2018). Nonlinear attitude control for a 6u cubesat with a flexible, deployable boom.
- [Bolandi et al., 2012] Bolandi, H., Haghparast, M., Saberi, F., Vaghei, B., and Smailzadeh, S. (2012). Satellite attitude determination and control. *Measurement and Control*, 45(5):151–157.
- [CalPoly, 2020] CalPoly (2020). Cubesat design specification rev. 14. the cubesat program, cal poly slo cubesat design specification.
- [Castellanos et al., 2018] Castellanos, C. A., Carlos, G., Suárez, A., and Resumen, F. (2018). Algunos métodos de representación matemática de las rotaciones de un cuerpo rígido. Master’s thesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- [Chin et al., 2017] Chin, J., Coelho, R., Foley, J., Johnstone, A., Nugent, R., Pignatelli, D., and et. al (2017). CubeSat 101: Basic Concepts and Processes for First-Time CubeSat Developers. NASA, (October):96.
- [Cortiella et al., 2016] Cortiella, A., Vidal, D., Jané, J., Juan, E., Olivé, R., Amézaga, A., Munoz, J. F., Carreno-Luengo, P. V. H., and Camps, A. (2016). 3cat-2: Attitude determination and control system for a gnss-r earth observation 6u cubesat mission. *European Journal of Remote Sensing*, 49:759–776.
- [Cortés, 2019] Cortés, E. (2019). Experimentación del control de actitud en un prototipo de cubesat con ruedas de reacción.
- [Cortés and Rodríguez, 2019] Cortés, R. and Rodríguez, H. (2019). A total energy attitude control system strategy for rigid spacecraft. *IEEE Access*, 7:112996–113004.
- [Crowell, 2011] Crowell, C. W. (2011). *Development and analysis of a small satellite attitude determination and control system testbed*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Curtis, 2010] Curtis, H. D. (2010). *Rigid-Body Dynamics*. Elsevier.

- [Finley et al., 2013] Finley, T., Rose, D., Nave, K., Wells, W., Redfern, J., Rose, R., and Ruf, C. (2013). Techniques for leo constellation deployment and phasing utilizing differential aerodynamic drag. *Arbor*, 1001:48109–2143.
- [Gerber and Steyn, 2014] Gerber, J. and Steyn, W. H. (2014). A 3-axis attitude control system hardware design for a cubesat.
- [Gravdahl and Pedersen, 2004] Gravdahl, J. T. and Pedersen, M. (2004). Nonlinear attitude control of the microsatellite eseo nonlinear attitude control of the micro-satellite ESEO.
- [Gómez, 2010] Gómez, R. C. (2010). Sistema de control robusto, basado en cuaterniones, para un satélite de órbita baja. Master's thesis, Pontificia Universidad Javeriana.
- [Halim and Ubay, 2017] Halim, A. and Ubay, M. S. N. (2017). Performance simulation of i-pd based adcs for earth observation micro satellite. In *2017 15th International Conference on Quality in Research (QiR) : International Symposium on Electrical and Computer Engineering*, pages 325–329.
- [Hillen et al., 2021] Hillen, S. J. P. H., Muñoz, M., Second, A., and Larsen, G. (2021). Integration project the design of an non-linear satellite attitude controller.
- [Hirth et al., 2017] Hirth, M., Su, H., Ott, T., Casasco, M., and Ortega, G. (2017). Peet v1.0: The state-of-the-art pointing and performance error engineering tool for space missions.
- [Howley, 2012] Howley, B. (2012). Aa236: Overview of spacecraft attitude determination and control.
- [Jensen and Vinther, 2010] Jensen, K. F. and Vinther, K. (2010). Attitude determination and control system for aausat3.
- [Johnny et al., 2022] Johnny, K.-K. L., Yenb, T. B.-X., Leec, S. S.-R., Changd, A. Y.-C., Houe, L. S.-L., and Hsiehf, J. X.-C. (2022). Single-gimbal control moment gyro with spherical motor technology for attitude determination and control system.
- [Jonsson, 2019] Jonsson, L. (2019). Simulations of satellite attitude maneuvers-detumbling and pointing.
- [Junkins and Schaub, 2009] Junkins, J. L. and Schaub, H. (2009). *Analytical Mechanics of Space Systems, Second Edition*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Khalil, 2013] Khalil, H. (2013). *Nonlinear Systems*. Always Learning. Pearson Education Limited.
- [Li et al., 2018] Li, Y., Ye, D., and Sun, Z. (2018). Time efficient sliding mode controller based on bang–bang logic for satellite attitude control. *Aerospace Science and Technology*, 75:342–352.

- [Macdonald and Badescu, 2014] Macdonald, M. and Badescu, V. (2014). *INTERNATIONAL HANDBOOK OF SPACE TECHNOLOGY*. Springer.
- [Martínez, 2015] Martínez, D. E. F. (2015). Diseño del bloque de estimación de un sistema ADCS para un pico satélite de estándar cubesat usando filtro de partículas como técnica de estimación. Master's thesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- [Martínez, 2010] Martínez, J. P. V. (2010). Modelo teórico mimo para un sistema de orientación de 3DOF de un satélite. Master's thesis, Pontificia Universidad Javeriana.
- [Martínez, 2020] Martínez, R. (2020). Una novedosa plataforma educativa levitada magnéticamente para la determinación, control y simulación de la actitud de pequeños satélites. Master's thesis, Universidad del Valle.
- [Mukherjee and Chen, 1993] Mukherjee, R. and Chen, D. (1993). Asymptotic stability theorem for autonomous systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM*, 16:961–963.
- [NASA, 2021] NASA (2021). Small spacecraft technology state of the art report.
- [Pack et al., 2017] Pack, D. W., Hardy, B. S., and Longcore, T. (2017). CubeSat Nighttime Earth Observations. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 2017, pages A41I–2403.
- [Portilla, 2018] Portilla, J. G. (2018). *Principios de mecánica celeste*. Universidad Nacional de Colombia.
- [Puig-Suari et al., 2001] Puig-Suari, J., Turner, C., and Ahlgren, W. (2001). Development of the standard cubesat deployer and a cubesat class picosatellite. In *2001 IEEE Aerospace Conference Proceedings (Cat. No.01TH8542)*, volume 1, pages 1/347–1/353 vol.1.
- [Reid, 2009] Reid, T. (2009). The effect of aerodynamic drag forces on the formation flying of satellites dual frequency multi-constellation (dfmc) I5 sbas view project arctic navigation view project.
- [Ricardo and Suárez, 2011] Ricardo, J. and Suárez, R. (2011). Algoritmo de ADCS (attitude determination and control system) para un picosatélite.
- [Rodríguez, 2019] Rodríguez, B. (2019). Diseño y simulación de una antena microstrip de rango de operación de super altas frecuencia (3.5 GHz a 6 GHz) para la evaluación de la tasa de absorción específica en tejidos humanos.
- [Rodríguez, 2021] Rodríguez, G. (2021). *Desarrollo de arquitecturas de control en sistemas satelitales multiagente para servicios de observación terrestre*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.

- [Rodríguez et al., 2020] Rodríguez, G., Sofrony Esmeral, J., Cortés García, E. D., and Rueda, K. (2020). Diseño de misión, síntesis de factores operacionales y representaciones del segmento espacial, caso FACSAT y EMFF. *Ciencia y Poder Aéreo*, 15(2):143–165.
- [Schaub and Junkins, 2003] Schaub, H. and Junkins, J. L. (2003). *Analytical Mechanics of Space Systems*. AIAA Education Series, Reston, VA.
- [Simonini et al., 2019] Simonini, L., Iskender, O. B., Asia, W. M. N. T. S., and Ling, K. V. (2019). Detumbling of small satellites with model predictive control.
- [Slotine et al., 1991] Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- [Thomson, 2012] Thomson, W. T. (2012). *Introduction to space dynamics*. Courier Corporation.
- [Tsotras, 1996] Tsotras, P. (1996). A passivity approach to attitude stabilization using nonredundant kinematic parameterizations.
- [Vallado, 2001] Vallado, D. A. (2001). *Fundamentals of astrodynamics and applications*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- [Wen-Chi et al., 2018] Wen-Chi, L., Lili, D., and Yi-Xian, C. (2018). De-tumbling control of a cubesat. Advanced Manufacturing : 2018 IEEE International Conference on Advanced Manufacturing (IEEE ICAM 2018).
- [Wertz and Larson, 1999] Wertz, J. and Larson, W. (1999). *Space Mission Analysis and Design*. Space Technology Library. Springer Netherlands.
- [Westgaard and Gravdahl, 2015] Westgaard, M. F. and Gravdahl, J. T. (2015). Software design and controller evaluation for the adcs on the ntnu test satellite.
- [Yale and Agrawal, 1998] Yale, G. E. and Agrawal, B. N. (1998). Lyapunov controller for cooperative space manipulators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21:477–484.
- [Zamaro, 2010] Zamaro, M. (2010). Coupled orbital and attitude SDRE control system for spacecraft formation flying.
- [Ørsted et al., 2005] Ørsted, B., Claus, A., Rasmus, G., Knudsen, H., Nielsen, C., Sørensen, K. K., Taagaard, D., and Bhandari, D. (2005). Attitude control system for aausat-ii.

A. Anexo: Estándar CubeSat

CubeSat es un estándar de diseño de satélite a pequeña escala que surge como desarrollo académico para realizar proyectos en el ámbito espacial. Una unidad (1U) consiste en un cubo de arista 10 cm y puede modularse e interconectarse con otras unidades para involucrar subsistemas y componentes para la misión. Creando así modelos de 2U (10x10x20 cm), 3U (10x10x30 cm), 6U (10x20x30 cm) que son dos (2) de 3U, 12U que son dos (2) de 6U y así sucesivamente.

Los componentes que lo conforman varían dependiendo de los subsistemas que logren incluirse. El *subsistema de carga útil* incluye instrumentos (sensores) que pueden encargarse de observación terrestre, comunicación, navegación y/u otros aspectos de ciencia y tecnología. El *subsistema de potencia* incluye dispositivos para la captación, almacenamiento y distribución de la energía, como lo son los paneles solares y las baterías. El *subsistema de comunicaciones* incluye antenas de emisión y recepción de datos.

Particularmente, el *subsistema de actitud* (ADCS) se conforma de diversos sensores y actuadores que permiten realizar maniobras de orientación. La figura A-1, ilustra las funciones e interacciones típicas entre los componentes previamente descritos de un ADCS:

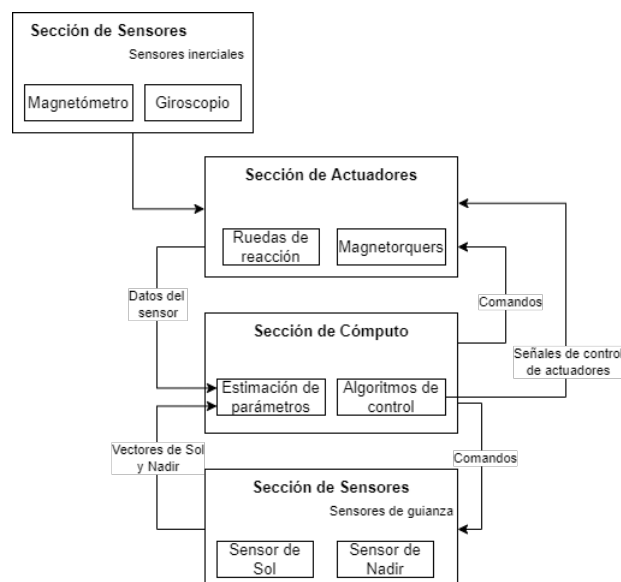


Figura A-1.: Interacción típica de las secciones del ADCS [Gerber and Steyn, 2014].

La sección de sensores se subdivide en categorías de acuerdo a la aplicación de estos dispositivos dentro de la misión. Los *sensores inerciales* son aquellos que miden y determinan la actitud actual del satélite (orientación y velocidad angular), entre los más comunes se encuentran el giroscopio, el magnetómetro y el acelerómetro. Los *sensores de guianza* que al igual que los sensores inerciales estiman la actitud actual, entre los más comunes se encuentran el sensor de sol, el sensor de Tierra y el rastreador de estrellas (star tracker). Los *sensores de navegación* permiten determinar la efemérides del satélite (posición y velocidad orbital), el más común es el receptor de GPS, que provee el TLE satelital [Howley, 2012].

Un componente electromecánico característico de la sección de actuadores, son las *ruedas de reacción*. Este dispositivo se basa en el principio de la conservación de momentum angular, en donde un motor sin escobillas hace girar un volante de inercia de alta densidad para generar un torque. El cuerpo experimenta entonces un movimiento en sentido opuesto al ejercido. Estos suelen aportar una gran precisión de apuntamiento a cambio de un gran consumo de potencia. Particularmente, en la figura A-2 la configuración en la que se disponen las ruedas es tal que tres de ellas entregan torque en las direcciones X , Y y Z del cuerpo satelital y una cuarta rueda (RW_0) que dada su orientación logra entregar un torque adicional a cada una de las direcciones XYZ .

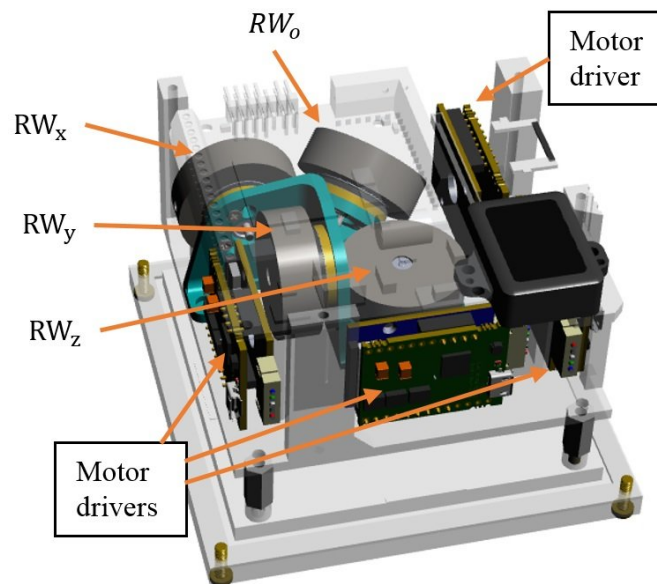


Figura A-2.: Ruedas de reacción de un nanosatélite. Tomado de [Cortés and Rodríguez, 2019].

Otro componente característico de la sección de actuadores son los *magnetorquers*, los cuales aprovechan el campo magnético terrestre para generar un torque electromagnético. Estos suelen aportar una menor precisión de apuntamiento a cambio de un menor consumo de potencia. La figura A-3 muestra tres (3) bobinas que se disponen para generar un torque en cada una de las direcciones del cuerpo satelital.



Figura A-3.: Magnetorquer de un nanosatélite. Tomado de <https://bit.ly/3wZCY28>.

Adicionalmente, para más especificaciones de los CubeSats se recomienda visitar los siguientes links: <https://go.nasa.gov/3lfZe5a>, <https://bit.ly/3WZUKwN>, <https://www.cubesat.org>, <https://bit.ly/3JB7p6p>

B. Anexo: Definiciones algebraicas

B.1. Matriz antisimétrica

Es posible simplificar muchas expresiones y cálculos computacionales al hacer uso de las matrices Skew-Symmetric o antisimétricas [Bachelor, 2018].

Se dice que una matriz es skew-symmetric si y solo si

$$[S]^T + [S] = 0 \quad (\text{B.1})$$

Una matriz skew-symmetric 3x3 tiene la siguiente forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

donde se cumple la relación

$$s_{ij} + s_{ji} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{B.3})$$

Para los términos diagonales $s_{ii} = 0$ mientras que los otros términos $s_{ij} = -s_{ji}$.

Si existe un vector columna 3x1 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ es posible definir una matriz skew-symmetric $S(\mathbf{a})$ como:

$$[S(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{a}}] \quad (\text{B.4})$$

Derivada de una matriz de rotación

Se supone ahora que la matriz de rotación tridimensional $\mathbf{C}$ es función de una sola variable. Entonces $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\theta)$ para cada θ . Dado que $\mathbf{C}$ es una matriz ortonormal, se tiene que:

$$[\mathbf{C}(\theta)][\mathbf{C}(\theta)]^T = \mathbb{I}_3 \quad (\text{B.5})$$

Al derivar ambos términos de la ecuación respecto a θ usando la regla del producto:

$$\frac{d[\mathbf{C}]}{d\theta}[\mathbf{C}(\theta)]^T + [\mathbf{C}(\theta)]\frac{d[\mathbf{C}]^T}{d\theta} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Definiendo una matriz $[S]$ como

$$[S] := \frac{d[C]}{d\theta} [C(\theta)]^T \quad (\text{B.7})$$

Luego su transpuesta es

$$[S]^T = \left(\frac{d[C]}{d\theta} [C(\theta)]^T \right)^T = [C(\theta)] \frac{d[C]^T}{d\theta} \quad (\text{B.8})$$

Con lo que se llega a que

$$[S] + [S]^T = 0 \quad (\text{B.9})$$

Luego, la matriz $[S]$ definida en (B.7) resulta ser una matriz skew-symmetric o antisimétrica. Multiplicando a ambos lados de la ecuación (B.7) por $[C]$ y recordando (B.5)

$$\frac{d[C]}{d\theta} = [S][C(\theta)] \quad (\text{B.10})$$

Con lo que se llega a que la derivada de una matriz de rotación C es equivalente a la multiplicación matricial entre C y una matriz anti-simétrica S . Comúnmente C es una matriz de rotación o una serie de multiplicaciones de matrices de rotación [Bachelor, 2018].

B.1.1. Adición de rotaciones

A veces, es necesario encontrar la orientación correspondiente a dos rotaciones sucesivas, lo que se conocería como “adicionar” dos rotaciones. Suponga que un cuerpo desarrolla una rotación $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ seguida de otra rotación $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, el attitude final resultante es expresado relativamente respecto al original mediante el vector $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ mediante la expresión [Junkins and Schaub, 2009]:

$$[RN(\psi)] = [RB(\phi)][BN(\theta)] \quad (\text{B.11})$$

El procedimiento es similar cuando se desea “sustraer” dos rotaciones:

$$[BR(\psi)] = [BN(\phi)][RN(\theta)]^T \quad (\text{B.12})$$

El procedimiento se desarrolla de igual forma para todas las representaciones angulares. Deben llevarse a su DCM y a partir de ahí realizar la operación; debe evitarse sumarse y restarse en su forma vectorial.

B.2. Cambio de marcos de referencia

Es una acción muy común cambiar de marco de referencia para analizar y evaluar situaciones relacionadas con el control de actitud desde perturbaciones, apuntamientos y dinámicas expresadas desde sus propios marcos. Como por ejemplo el cambio del marco del cuerpo al inercial, del orbital al cuerpo y así sucesivamente. Un vector normal puede describirse usando dos marcos coordinados, suponga que existe un vector de velocidad angular que representa el cambio relativo entre el marco

Inercial y el marco de Referencia [Cortiella et al., 2016]. Para ver este vector desde el marco del cuerpo, debe usarse una matriz de rotación que vaya de la referencia al cuerpo para usarla como matriz de transformación, así:

$${}^B\omega = [BR]\omega_{R/N} \quad (\text{B.13})$$

De igual manera para otros casos basta con escoger la matriz del marco de referencia de interés y multiplicarla por el vector a transformar. Por ejemplo:

$${}^B\omega = [BN]\omega_{N/O} \quad (\text{B.14})$$

$${}^N\omega = [RN]^T\omega_{R/B} \quad (\text{B.15})$$

B.3. Adición de vectores

Dada la consideración de marcos de referencias descritas en las secciones anteriores, se recomienda sumar y sustraer vectores en el mismo marco de referencia. Por ejemplo:

$$\omega_{B/R} = \omega_{B/N} - [BR]\omega_{R/N} \quad (\text{B.16})$$

C. Anexo: Requerimientos comerciales de apuntamiento

Empresa	País	Nanosatélite	Tamaño - Volumen (U)	Control de apuntamiento	Exactitud de apuntamiento
AAC Clyde Space	Suiza	EPIC 1U	0.3 U	$<5^{\circ}$	0.02 °/s
		EPIC 3U	3 U	$<0.1^{\circ}$	0.005 °/s
Blue Canyon Technologies	USA	XB3	3U	$\pm 0.002^{\circ}$	$\pm 0.002^{\circ}$
C3S Electronics Development	Hungría	3U	3U	$<1^{\circ}$	0.00833°
EnduroSat	Bulgaria	3U	3U	0.2 - 1 °	0.2 - 1 °
GomSpace	Dinamarca	GomS-3U	3U	2.5°	2°
Gumush	Turquía	n-ART	3U	20°	$<1^{\circ}$
Orbital Astronautics	Reino Unido	ORB-3	3U	$<0.1^{\circ}$	$<0.01^{\circ}$
SatRevolution	Polonia	NanoBus	3U	$<1^{\circ}$	$<1^{\circ}$

Tabla C-1.: Especificaciones comerciales del control de apuntamiento de nanosatélites [NASA, 2021].

D. Anexo: Aspectos diseño de misión

D.1. Configuración de simulación

- Tiempo de simulación: 16800 s (tres órbitas).
- Paso de simulación: 0.01 s.

D.1.1. Parámetros

$${}^B[I] = \begin{bmatrix} 0,0337 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0335 & 0 \\ 0 & 0 & 0,019 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

D.2. Condiciones iniciales

Orientación angular

$$\sigma_{B/N}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

Velocidad angular

$${}^B\omega_{B/N}(t_0) = {}^B \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,75 \\ -2,2 \end{bmatrix} [^\circ/s]$$

Órbita

```

1 VALLESAT
2 1 25544U 98067A 22130.00000000 -.00003336 00000-0 -59655-4 0 00000
3 2 25544 051.6444 182.4237 0001080 268.0653 100.3194 15.49364799225949

```

D.3. Controladores

Requerimientos funcionales

Requerimiento	Título	Descripción	Referencia	Sub-requerimientos
R1	Nadir	El ACS debe ser capaz de realizar un apuntamiento a Nadir	Sección 4.7.3	R1.1, R1.2 R1.3 y R1.4
R2	Seguimiento objetivo	El ACS debe ser capaz de realizar un apuntamiento activo	Sección 4.7.4	R2.1, R2.2 y R2.3
R3	Solar	El ACS debe ser capaz de realizar apuntamiento al sol	Sección 4.7.5	R3.1, R3.2 R3.3 y R3.4

Tabla D-1.: Requerimientos funcionales del ACS.

Requerimientos operacionales

Sub-requerimiento	Título	Descripción	Requerimiento
R2.1	Exactitud	Debe ser capaz de apuntar con un error $<10^\circ$	R2
R2.2	Velocidad de respuesta (Slew Rate)	Debe ser capaz de cambiar la actitud con una velocidad de respuesta >0.0257 rad/s	R2
R2.3	Tiempo de asentamiento	1 min Para un movimiento máximo $<5^\circ$	R2

Tabla D-2.: Requerimientos operacionales del modo Seguimiento de Objetivo.

Condiciones de apuntamiento

Condición orbital	Objetivo principal del escenario de apuntamiento
Sat en cara iluminada de Tierra	Apuntar eje de paneles solares $\hat{b}_3$ al sol.
Sat en cara no iluminada de Tierra y Cali visible	Apuntar eje de antenas $\hat{b}_2$ a Estación Terrena.
Sat en cara no iluminada de Tierra y Cali no visible	Apuntar eje de sensor $-\hat{b}_3$ a Tierra en la dirección de Nadir.

Tabla D-3.: Requerimientos de apuntamiento de la misión satelital.