DETERMINACIÓN DE FUERZA ACÚSTICA MEDIANTE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA LEVITACIÓN DE PARTICULAS.

Autor:

JORGE FIDENCIO BRAVO ORDOÑEZ

Director:

JHON FERNANDO PAZOS OSPINA, M.Sc.



Trabajo de Grado presentado

para optar al título de

Ingeniero Mecánico

FACULTAD DE INGENIERÍA ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA SANTIAGO DE CALI

ENERO 2024

DEDICATORIA

A Dios por permitirme avanzar en cada momento importante de mi vida a pesar de los tropiezos.

A mis padres, a quienes debo cada logro de mi vida, por apoyarme e inculcarme los valores suficientes para afrontar la vida de la mejor manera.

A mi hermana por ser la inspiración de superarme cada día de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad del valle por darme la oportunidad de adquirir los conocimientos necesarios para formarme como profesional.

A mi director Jhon Fernando Pazos Ospina quien fue parte fundamental en el desarrollo de este trabajo, transmitiendo sus múltiples conocimientos y me brindo su apoyo en los diferentes procesos para su realización. A los integrantes del LaVA quienes de alguna u otra forma me dieron su apoyo, y me enseñaron muchas cosas a lo largo de este proceso.

ÍNDICE GENERAL

Índice

1. Introducción **6**

1.1. Planteamiento del problema y justificación 6

1.2. Objetivos 8

1.2.1. Objetivo general 8

1.2.2. Objetivos específicos 8

1.3. Estado del arte 9

2. Marco teórico **14**

2.1. Trampas acústicas 14

2.2. Transductor acústico 15

2.3. Ondas ultrasónicas 18

2.4. Ondas de frente plano 19

2.5. Ecuación de Onda 20

2.5.1. Ecuaciones de gobierno de un fluido 20

2.5.2. Ecuación de onda lineal 21

2.5.3. Presión por radiación acústica 25

2.5.4. Fuerza de radiación acústica 26

2.5.5. Cálculo de la FRA utilizando el potencial de Gor'kov 27

3. Metodología **33**

3.1. Modelo de elementos finitos utilizando el método de Gor'kov 33

3.1.1. DOMINIO DEL MODELO 35

3.1.2. Físicas implementadas 36

3.1.3. Condiciones de borde 36

3.1.4. Enmallado 39

3.1.5. Implementacion de expresion de Gor'kov en el modelo 41

3.2. Modelo de elementos finitos utilizando el método de Perturbación FEM . 42

3.3. Dominio del modelo 43
3.3.1. Físicas implementadas 44
3.4. Condiciones de borde 45
3.5. Enmallado 45
3.5.1. Implementación de expresión de Fuerzas generalizadas usando el método de perturbación utilizado en COMSOL Multiphysics. . . . 46

4. Resultados **48**
4.1. Validación 48
4.1.1. Seccion B 61
4.2. Paso 1 61
4.2.1. Paso 2 62
4.2.2. Paso 3 62
4.2.3. Paso 4 64
4.2.4. Paso 5 65
4.3. Simulación para una partícula esférica utilizando el método de Gor'kov . 67
4.4. Simulación para una partícula esférica utilizando el método de la perturbación 69

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de figuras

1. Árbol del problema 8
2. Trampas acústicas [1] 15
3. pinza acústica [22] 15
4. transductor acústico. 17
5. Radiadores 18
6. rango de frecuencias de ondas acústicas. Fuente: autor. 19
7. ondas de frente plano. Tomado de: [12] 20

8. Presión de radiación acustica 32
9. Fuerza de radiación acústica 32
10. Modelo de elementos finitos para método de Gor'kov 34
11. Convergencia de malla para método de Gor'kov 40
12. Modelo de elementos finitos para método de Perturbación 43
13. Convergencia de malla para método de perturbación FEA 46
14. Comparación de métodos 49
15. FRA para partícula de figura esférica atrapada en un campo de presion de frente plano, en función del tamaño. 50
16. FRA para una partícula esférica de Poliestireno atrapada en un campo de presion enfocado, en función del diámetro. 51
17. FRA para partículas de figuras diferentes atrapadas en un campo de presion de frente plano, en función del tamaño. 53
18. FRA para partículas de figuras diferentes atrapadas en un campo de presion de frente plano, en función de la dirección z del campo. 55
19. Entrada de COMSOL 62
20. Espacio dimensional 62
21. Acústica 63
22. Mecánica de sólidos 64
23. Dominio de la frecuencia 65
24. Parámetros 66
25. Unidades 66
26. Primer modelo 67
27. segundo modelo 69
28. Modelo del cilindro 71
29. Modelo del cono 71
30. Modelo de elipse 72
31. Modelo de romboide 72
32. Error de distancia de la superficie de integración a la partícula a levitar . 73

Resumen

La levitación de partículas a través de ondas acústicas, es un campo de estudio que recientemente ha ganado interés por parte de la comunidad científica y que comienza a mostrar un gran potencial en muchos tipos de aplicaciones de la ingeniería y la vida cotidiana, tales como la manipulación precisa y delicada sin contacto, la realidad aumentada y las interfaces hombres máquina. Para hacer posible su aplicación a diferentes campos es de gran importancia estimar con precisión la fuerza de radiación acústica (FRA) generada por el campo acústico emitido por los transductores. Estimar la FRA de forma analítica se complica a medida que las geometrías de los objetos y la estructura del campo acústico se hace más complejos, incluso en algunos casos no es posible obtener una solución cerrada. Debido a lo anterior este trabajo tiene como propósito realizar un análisis numérico para estimar dicha fuerza con precisión, para este objetivo se construirá un modelo, en elementos finitos, con base en expresiones matemáticas reportadas en la literatura para una partícula de forma irregular y para un campo acústico arbitrario.

1. Introducción

1.1. Planteamiento del problema y justificación

Las tecnologías de manipulación sin contacto cada vez tienen mayor importancia en diferentes campos de estudio como la biomedicina [23] , industrias de alimentos, farmacéutica, química, y manufactura de precisión [6],[40]. Actualmente la manipulación de objetos pequeños y delicados como microorganismos, tejidos, gotas de agua deben ser transportados y manipulados sin contacto [24]-[37], para lo cual se usan tecnologías como las pinzas ópticas, la electroforesis, los sistemas magnéticos y la levitación acústica. No obstante, es difícil determinar cuál de esos es mejor ya que para esto se deben analizar sus ventajas y desventajas [33].

En el caso de los sistemas ópticos, estos son sensibles al material de la partícula que se desea manipular [32]. La electroforesis depende de la constante dieléctrica del

material [30]. Por su parte, los sistemas de manipulación magnética están restringidos principalmente a materiales con propiedades magnéticas y, adicionalmente, requieren de la generación de campos externos que pueden interferir con el funcionamiento de otros equipos o dispositivos [38].

En los últimos años los sistemas basados en ondas acústicas ultrasónicas han ganado gran importancia, debido a que emplean tecnología de bajo costo y permiten la manipulación sin contacto de objetos de diversas dimensiones, formas y tipo de material. Los sistemas de ondas acústicas han demostrado su potencial de aplicación para atrapar, clasificar y transportar células, gotas, gases y sólidos a escalas que van desde los micrómetros hasta los centímetros [18]. Esto es posible gracias a la Fuerza de radiación acústica (FRA) ejercida por el campo acústico al interactuar con objetos. Para atrapar y manipular con ondas acústicas objetos frágiles, es necesario calibrar la FRA generada por el campo acústico, de tal modo que las muestras bajo manipulación no sufran daños en el proceso. Esta calibración implica la estimación precisa de dichas fuerzas. En la literatura, la mayoría de los trabajos reportados abordan el problema a través de modelos teóricos y numéricos. No obstante, la mayoría de las aproximaciones logradas con los modelos se limitan a campos simples y objetos con formas básicas tales como esferas o cilindros. Cuando se requiere modelar campos complejos y objetos de formas irregulares los modelos teóricos ya no son adecuados, por lo que se opta por utilizar modelos numéricos, que es lo que se pretende determinar con la realización de este trabajo.

A pesar de que hay varios trabajos a nivel internacional que tratan acerca de la FRA [1]-[40], a nivel local muy pocos trabajos han tratado el tema [28],[27], [14]. La comprensión de las interacciones acústico-estructura y el desarrollo de modelos numéricos que permitan estimarla es de gran importancia para el desarrollo de la investigación alrededor de la manipulación acústica. Este trabajo pretende avanzar en esa dirección con el desarrollo de un modelo computacional que sirva como herramienta para impulsar el desarrollo de investigación en este campo en la Universidad del Valle.

La Figura 1 ilustra la estructura del árbol del problema, facilitando su interpretación

adecuada.

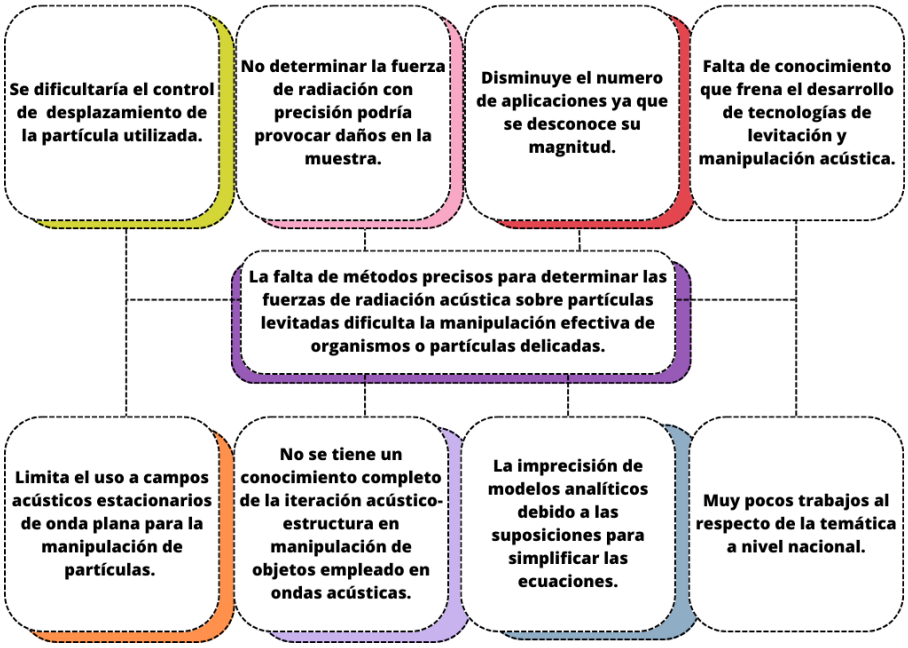

Figura 1: Árbol del problema

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Estimar las fuerzas de radiación acústica producto de la interacción entre un campo acústico arbitrario y un objeto de forma arbitraria, mediante un modelo en elementos finitos.

1.2.2. Objetivos específicos

1. Realizar una revisión del estado del arte acerca de los métodos de cálculo de fuerzas de radiación.

2. Implementar un modelo empleando elementos finitos, que permita estimar las fuerzas de radiación durante la interacción entre un campo acústico y algunos objetos de forma arbitraria.

3. Validar el modelo a través de resultados reportados en la literatura y/o resultados experimentales.

1.3. Estado del arte

El cálculo de la fuerza de radiación acústica (FRA) ha sido un área de investigación continua desde finales del siglo XIX debido al interés en comprender cómo las ondas sonoras interactúan con los objetos y pueden ejercer fuerzas sobre ellos. Esta línea de investigación fue motivada por la necesidad de explicar fenómenos físicos relacionados con la propagación del sonido y su capacidad para generar presión en un medio. Estos estudios sentaron las bases para aplicaciones prácticas como la manipulación de partículas mediante ondas acústicas, incluida la levitación acústica, que permite mover, sostener o separar partículas sin contacto físico. A continuación, se presenta una revisión de los principales aportes realizados en este campo a lo largo de la historia, destacando las limitaciones de las teorías anteriores y los avances que han permitido superar dichas limitaciones.

Rayleigh, en 1877 [34], investigó la propagación de ondas sonoras en medios elásticos, definiendo el sonido como una perturbación mecánica que se propaga a través de un medio. Desarrolló las ecuaciones diferenciales que describen estas ondas y estableció la relación entre la velocidad del sonido y propiedades físicas del material, como su densidad y elasticidad. Este análisis fue fundamental para entender cómo las ondas sonoras pueden ejercer fuerzas sobre objetos mediante la transferencia de impulso. Además, estudió cómo las ondas generan presión en el medio, lo que fue esencial para posteriores investigaciones sobre la capacidad de las ondas acústicas para manipular partículas, como en la levitación acústica.

En 1902, Rayleigh amplió su análisis al estudiar cómo las ondas sonoras ejercen presión sobre objetos pequeños, formulando una base teórica clave para el cálculo de la fuerza de radiación acústica (FRA), especialmente en partículas esféricas mucho menores que la longitud de onda, dentro de un campo de onda plana [31].

King, en 1934, realizó la primera investigación exhaustiva de las fuerzas de radiación

acústica sobre pequeñas partículas esféricas, en su estudio [19], King analizó una esfera rígida inmersa en un fluido no viscoso, tanto en el contexto de ondas planas progresivas como estacionarias. Aunque este trabajo proporcionó una sólida base para los posteriores desarrollos de cálculo de la FRA, su precisión se ve limitada al tratar con partículas incompresibles, lo que sugiere que puede no ser la opción mas óptima para el calculo preciso de partículas reales, como pueden ser, las esferas de poliestireno.

Las teorías previas, centradas en partículas incompresibles, tenían limitaciones que llevaron a Yosioka y Kawasima, en 1955, a derivar una expresión para la fuerza ejercida sobre partículas compresibles en el contexto de una onda plana. Este desarrollo es fundamental para comprender los efectos sobre partículas compresibles en tales condiciones. Sin embargo, la teoría de Yosioka y Kawasima se limita a describir la fuerza sobre partículas compresibles que son significativamente más pequeñas que la longitud de onda y que se encuentran en campos de presión generados por ondas planas [39].

Gor'kov en 1962 reformuló la expresión propuesta por Yosioka y Kawasima para describir la fuerza de radiación promediada en el tiempo, utilizando el potencial acústico. Aunque la deducción completa de este potencial está fuera del alcance de este trabajo, puede encontrarse en diversas fuentes especializadas [5], [21]. En su estudio, Gor'kov analizó cómo esta fuerza actúa sobre una esfera cuyo diámetro es mucho menor que la longitud de onda en un campo acústico arbitrario. Es importante destacar que la limitación de tamaño en su modelo subraya la necesidad de continuar la investigación para abordar casos más generales.

Entre 1994 y 1997, Doinikov demostró que los efectos térmicos y viscosos son fundamentales en el cálculo de la FRA. Ampliando las teorías existentes, desarrolló expresiones matemáticas más precisas y generalizadas que mejoran la precisión en situaciones experimentales, especialmente en aplicaciones donde estos efectos no pueden ser ignorados, como en fluidos biológicos [9]-[10].

Más adelante, entre 2006 y 2008, varios investigadores abordaron este tema utilizando enfoques numéricos. Por ejemplo, trabajos como los de Neild, Townsend y Hagsäter [25][35][16] emplearon representaciones bidimensionales de campos acústicos obtenidas numéricamente, que pueden combinarse con la formulación del potencial acústico propuesta por Gor'kov. Por otro lado, algunos investigadores optaron por enfoques completamente numéricos para modelar tanto el campo acústico como la FRA, eliminando las aproximaciones realizadas por Yosioka y Kawasima. Estas aproximaciones asumían partículas pequeñas en comparación con la longitud de onda y descartaban los efectos viscosos y térmicos, además de centrarse exclusivamente en ondas planas. Un ejemplo notable es el trabajo de Haydock en 2005 [17], quien utilizó el método de Lattice Boltzmann para incluir la viscosidad en el cálculo de la FRA sobre cilindros en ondas estacionarias. Por su parte, Wang y Dual en 2009 [36] realizaron simulaciones numéricas completas de las ecuaciones viscosas de Navier-Stokes, logrando calcular las fuerzas sobre un cilindro rígido mediante un enfoque de volumen finito.

Diego Baresch et al en 2013 modelaron las fuerzas de radiación acústica que actúan sobre una esfera elástica colocada en un fluido no viscoso. Las expresiones propuestas se derivaron de la teoría generalizada de Lorenz-Mie a través de expansión por armónicos esféricos, lo que limita su aplicación únicamente a partículas con forma de esfera. La ventaja de las expresiones presentadas en este trabajo es que no hay restricción con el tamaño de la partícula, como si sucede con Gor'kov. En ese trabajo también se muestran resultados para casos en los que la fuerza axial se dirige en dirección opuesta a la dirección de propagación del haz (haces abductores), y se demuestra el uso potencial de los haces de Bessel [2].

Thomas Schwarz, en 2013 expone varios conceptos y expresiones necesarias para el cálculo de la fuerza de radiación acústica y el par viscoso acústico generado por dos ondas perpendiculares desplazadas en fase [33]. El trabajo presenta un desarrollo completo de

las ecuaciones para calcular la FRA mediante el método de perturbación y el enfoque de Gor'kov. También proporciona las expresiones necesarias para su implementación en COMSOL Multiphysics, facilitando la solución de este problema. Sin embargo, aunque se trata de un análisis bien elaborado que detalla cómo aplicar las ecuaciones desarrolladas, carece de resultados que permitan evaluar el comportamiento de la FRA en función del tamaño de partículas con distintas geometrías y bajo diferentes configuraciones de campo acústico..

Glyne-Jones en 2013 presentó y verificó un método numérico para el cálculo de la FRA para predecir la FRA sobre partículas de forma, composición y campo arbitrarios, asumiendo un campo no viscoso. Este método se compara y verifica con resultados presentados por Hasegawa [13] que utiliza, un método analítico y las aproximaciones de Yosioka y Kawasima descritos anteriormente, demostrando que produce resultados precisos en corto tiempo.

Andrade en 2017 llevó a cabo una exhaustiva revisión del avance en levitación acústica, destacando las ecuaciones fundamentales y suposiciones necesarias para el cálculo preciso de la fuerza de radiación acústica [1]. Además, realizó un análisis numérico detallado utilizando el método de elementos finitos y la expresión desarrollada por Gor'kov. Este análisis abarcó tanto objetos que necesitan permanecer estáticos en la levitación como aquellos que requieren ser desplazados. Andrade presenta una mayor clarificación en la implementación del modelo de elementos finitos por lo que se aconseja revisar este trabajo para mejorar su comprensión, este trabajo también es utilizado como referencia para el desarrollo de los modelos implementados, sin embargo carece de resultados que permitan comparar los varios métodos para el calculo de la FRA en función del tamaño del objeto a levitar.

Jhon Pazos-Ospina en su artículo publicado en 2022 [28], utilizó las ecuaciones derivadas por Diego Baresh, para calcular la FRA en esferas de poliestireno. En su trabajo,

estudió como cambia la posición de equilibrio de las partículas en función de su tamaño. Llegando a la conclusión que la posición de equilibrio depende del campo de fuerzas acústico. Los resultados obtenidos en su articulo son usados para validar y comparar el modelo de elementos finitos desarrollado en este trabajo.

Las expresiones derivadas por Baresch, aunque precisas para calcular la FRA en esferas sin las limitaciones de tamaño impuestas por teorías anteriores, se aplican únicamente a figuras esféricas. Por lo tanto, es necesario implementar un modelo de elementos finitos basado en estas expresiones matemáticas para realizar un análisis más general que incluya figuras más complejas y diferentes tipos de campos acústicos.

La bibliografía consultada muestra un gran avance en soluciones analíticas y en la implementación de modelos numéricos para el calculo de la FRA. Sin embargo las aplicaciones de estos desarrollos son bastantes específicos limitándose a figuras simples como esferas, cilindros, conos entre otros. Estas limitaciones hacen evidente el desarrollo de modelos mas generales. El propósito de este trabajo es aprovechar los desarrollos ya existentes para generar un modelo de elementos finitos que permita un uso mas general del conocimiento disponible, adaptándolo a las necesidades locales del grupo de Investigación en Mejoramiento Industrial (GIMI) y del Laboratorio de Vibraciones y Acústica de la Universidad del Valle. El objetivo principal es que el modelo de elementos finitos desarrollado sirva como herramienta para el calculo de la FRA en objetos con figuras mas complejas y en campos arbitrarios. Esto proporciona al grupo del LaVA una base solida, permitiendo el avance de futuras investigaciones y aplicaciones que requieran el cálculo de la FRA.

Con esta revisión se cumple el primer objetivo específico, proporcionando al lector un panorama histórico y general de los avances relacionados con el cálculo de fuerzas acústicas. Se ha ofrecido una visión de los desarrollos más importantes en este campo. Algunos de los conceptos teóricos mencionados en esta sección serán abordados con mayor profundidad en la siguiente sección, donde se explorarán aspectos más detallados de los trabajos presentados.

2. Marco teórico

Para tener una mejor comprensión del trabajo se presentan las siguientes definiciones de los temas principales a tratar.

2.1. Trampas acústicas

Una trampa acústica es una región en el espacio donde se restringe el movimiento de objetos inmersos en un campo acústico, utilizando la (FRA), de manera similar a una prisión invisible. Estas trampas se forman debido a los gradientes de presión y velocidad dentro del campo acústico, y se crean a partir de campos acústicos estructurados generados por transductores acústicos. Estas trampas se pueden generar en los nodos o antínodos de los campos de presión. La trampa acústica más común se logra al generar un campo de ondas estacionarias, el cual se conforma a partir de la emisión de dos ondas contra propagantes como se muestra en la figura 2. En ese caso, los puntos de prisión son los nodos de presión, donde las fuerzas de radiación son capaces de anular las fuerzas gravitacionales. Empleando sistemas de multitransductores es posible generar campos más complejos y por ende trampas más elaboradas. El dispositivo compuesto por dos arreglos que se muestra en la figura 3 genera un campo capaz de levitar y atrapar partículas en diferentes posiciones del espacio.

Las trampas acústicas se pueden analizar en términos del origen de las fuerzas ejercidas, es decir, las fuerzas de radiación son generadas por gradientes de presión o gradientes de velocidad.

El arreglo mostrado en la figura 2 permite generar trampas acústicas que ayudan a levitar partículas en posiciones controladas gracias a los multi-transductores y la electrónica de control asociada. Por ejemplo, en la figura 3 se a generado un campo de tal forma que las partículas atrapadas conforman un triangulo.

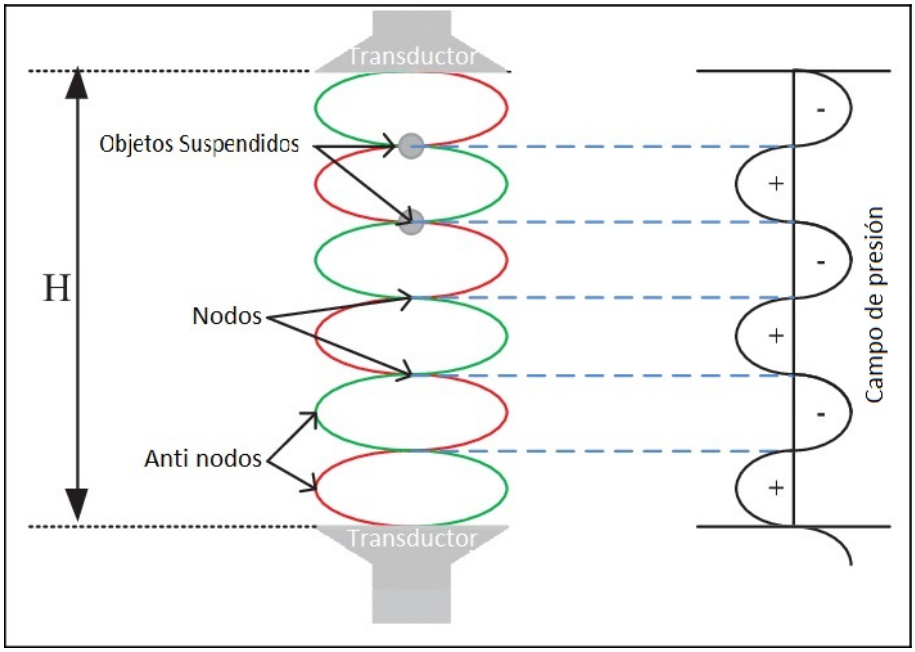

Figura 2: Trampas acústicas [1]

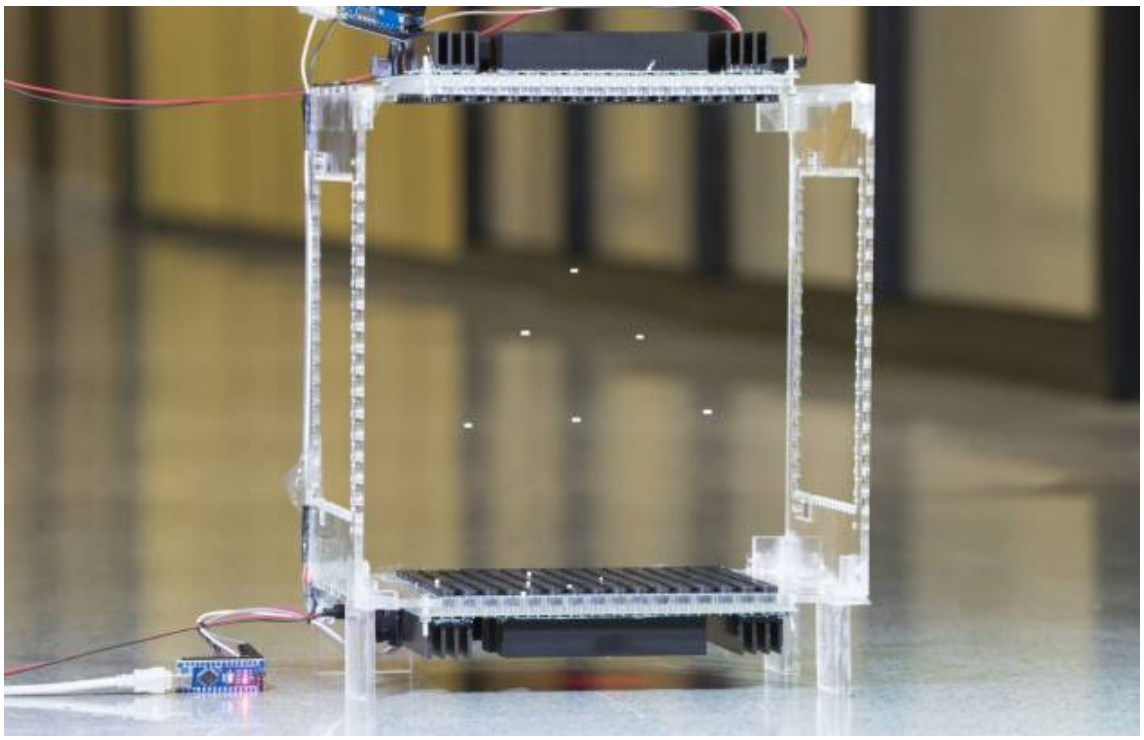

Figura 3: pinza acústica [22]

2.2. Transductor acústico

Un transductor acústico es un dispositivo capaz de convertir energía eléctrica en energía mecánica (ondas sonoras) y viceversa. Los transductores se clasifican según el

número de radiadores como monoelemento y multielemento. Los transductores monoelemento, como su nombre lo indica, poseen una única superficie radiante en fase, mientras que los transductores multielemento están compuestos por múltiples superficies radiantes que pueden o no estar en fase.

Por lo general, los transductores monoelemento son más simples, fáciles de fabricar y más robustos. Sin embargo, su rango de operación es limitado debido a que el campo acústico generado no es muy complejo y no puede ser modificado. En contraste, los transductores multielemento son más flexibles, ya que al poder controlar de forma independiente la fase y/o amplitud de cada elemento, es posible conformar campos acústicos mas complejos y modificarlos en cualquier momento. Como desventaja, tienen un mayor costo de fabricación y requieren tecnología adicional,como el uso de una electrónica mas avanzada para su control [14].

Los sistemas de levitación basados en multitransductores han ganado popularidad debido a la posibilidad de conformar campos acústicos arbitrarios, lo que permite el diseño de trampas acústicas para el atrapamiento y manipulación de partículas. La Figura 2.2 muestra algunos arreglos de multitransductores que ilustran diferentes métodos de levitación de partículas, dependiendo de la forma del arreglo de transductores utilizados para generar el campo de propagación de ondas acústicas.

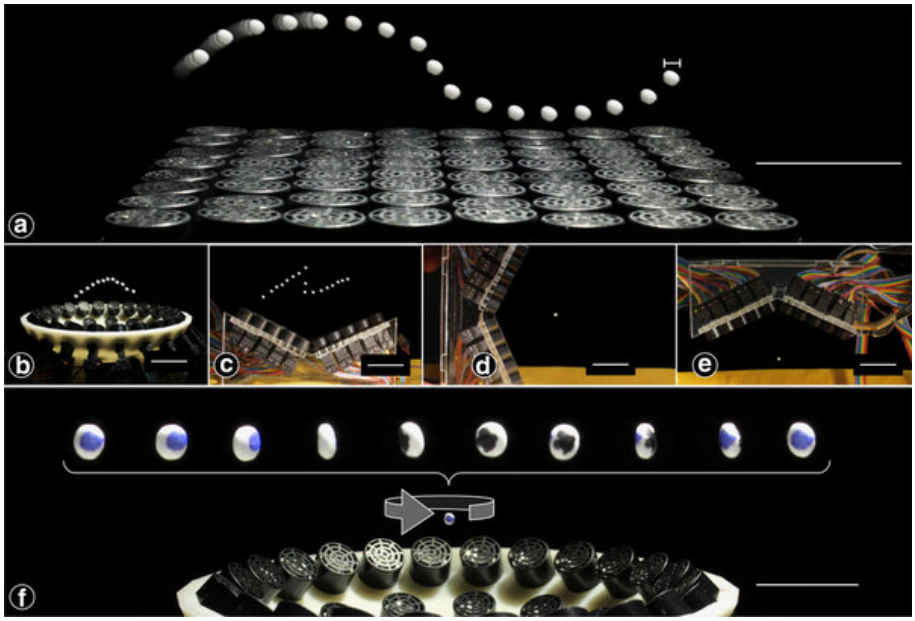

Figura 4: transductor acústico.
Partículas de poliestireno expandido de 0.6 a 3.1 mm de diámetro (a-c) Las partículas se pueden trasladar a lo largo de trayectorias 3D . (c–e) Las trampas son lo suficientemente fuertes como para sostener las esferas y contrarrestar la gravedad desde cualquier dirección. (f) Los objetos asimétricos, se pueden girar de forma controlada.[29].

Existen varios tipos de radiadores que dependiendo de la forma de su superficie se forma su frente de onda, algunos de estos se muestran en la figura 5 y son los siguientes: circular de superficie plana, circulares de superficie cóncava y uno muy particular es el de superficie helicoidal que se muestra en la figura 5-(f), la cual induce momento angular sobre el objeto gracias a las fuerzas de radiación acústica que se generan en este tipo de campo .

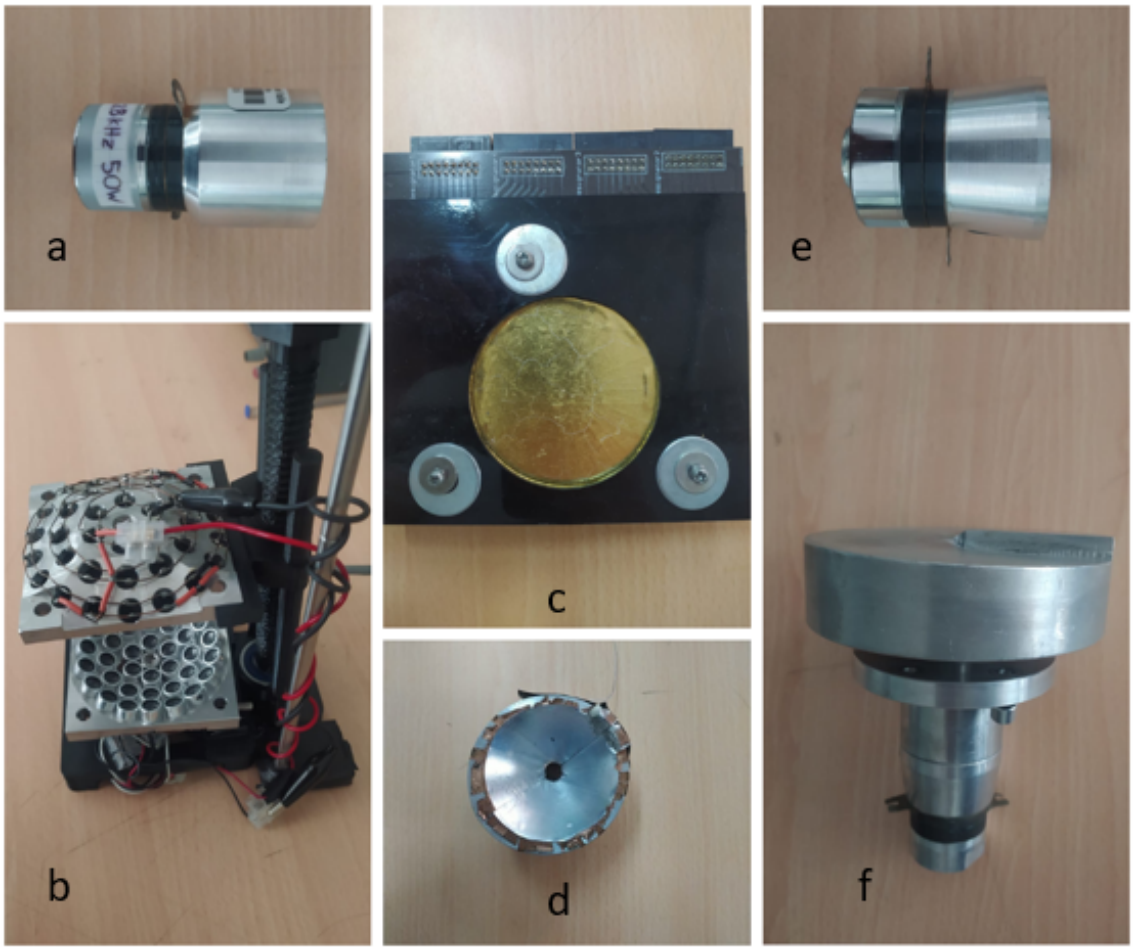

Figura 5: Radiadores
Los radiadores (a, c, e) tienen superficies de radiación que emiten ondas de frente plano. (b, d) son radiadores diseñados para campos enfocados, (f) radiador helicoidal. Fuente: autor.

La elección de cualquiera de los radiadores mostrados anteriormente en la figura 5 depende del tipo específico de aplicación que se esté desarrollando. Es esencial considerar varios factores, como las características del entorno, los requisitos de potencia, el tamaño del espacio a cubrir y las restricciones de diseño.

2.3. Ondas ultrasónicas

Se les llama ondas ultrasónicas porque las frecuencias de estas ondas elásticas operan a frecuencias altas en comparación con las ondas sonoras percibidas por el ser humano. Para ser clasificadas como ultrasónicas, la frecuencia de la onda debe ser superior a 20 KHz. Algunos animales como perros, murciélagos y ballenas son capaces de escuchar y generar

sonidos a estas frecuencias. Las ondas ultrasónicas son convenientes para aplicaciones de manipulación, debido a que se pueden generar grandes niveles de presión sin generar incomodidad a los seres humanos.

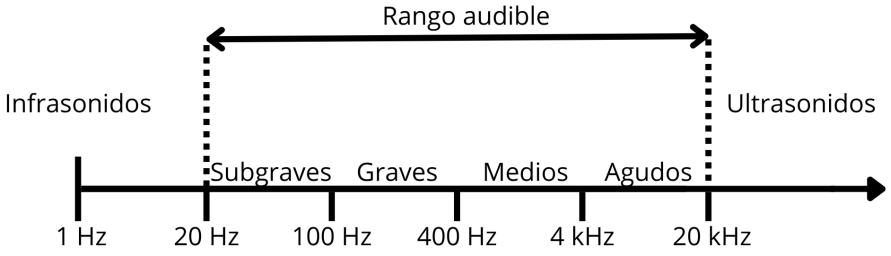

Figura 6: rango de frecuencias de ondas acústicas. Fuente: autor.

En la figura 6 se presenta el rango de frecuencias de sonido, este se divide tres partes principales, el primero es el rango infrasónico va desde 1 Hz hasta 20 Hz, el segundo es el rango sónico que va desde 20 Hz hasta 20 kHz dividido entre sonidos subrgaves, graves, medios y agudos, por ultimo el rango ultrasónico va desde 20 kHz en adelante, que es el rango en el que generalmente se trabaja al momento de la manipulación de partículas ya que así se evita generar posibles molestias para el oído humano que normalmente se genera entre 2 kHz y 4 khz [26].

2.4. Ondas de frente plano

El frente de ondas es el lugar geométrico de todos los puntos en el medio de propagación, que tienen igual fase. En el caso de las ondas de frente plano, se tiene que el lugar geométrico de todos los puntos con la misma fase son planos paralelos, en 2D los frentes de onda plana se muestran como lineas rectas paralelas (Ver Figura 7). Este tipo de frentes se puede generar empleando radiadores con superficie plana (pistones). Las ondas esféricas y cilíndricas a grandes distancias pueden aproximarse a ondas planas. Simplificando su análisis que permiten calcular las distribuciones de presion y velocidad

con facilidad. La imagen ubicada en la parte superior de la figura 7 muestra una fuente puntual en 3D, que a pesar de ser un frente de onda esférico, cuando se aleja lo suficiente se puede considerar como onda de frente plano. La imagen de la parte inferior de esta figura muestra como se propaga un frente de onda plano, y su flecha indica su dirección de propagacion.

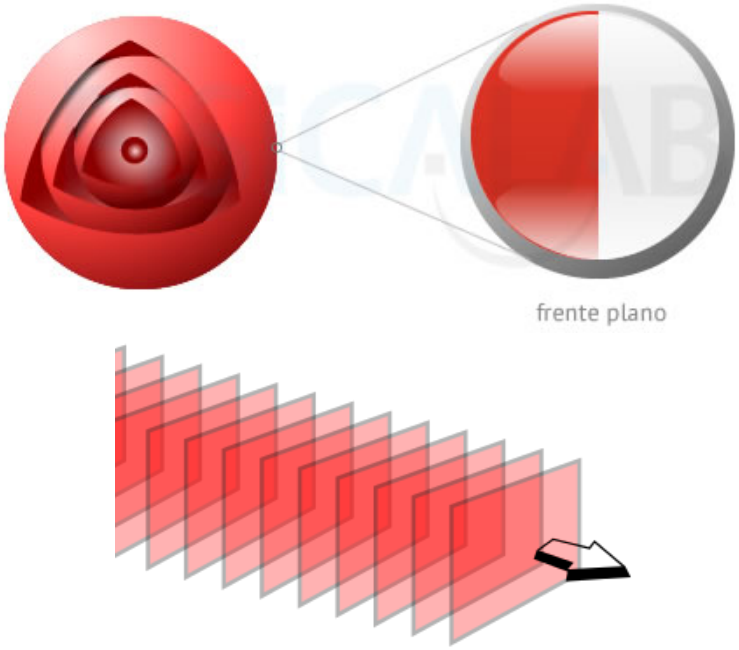

Figura 7: ondas de frente plano. Tomado de: [12]

2.5. Ecuación de Onda

Para derivar la ecuación de onda, es primordial comenzar con las ecuaciones fundamentales que gobiernan el comportamiento de los fluidos. Estas incluyen la ecuación de continuidad, la ecuación del balance de cantidad de movimiento y la ecuación de estado del fluido. A continuación, se describen las expresiones matemáticas de estas ecuaciones.

2.5.1. Ecuaciones de gobierno de un fluido

El movimiento de un pequeño volumen infinitesimal de fluido, dv, que contiene un gran número de moléculas y puede considerarse como un medio continuo, se describe en términos de su vector velocidad $\mathbf{u}$, densidad ρ y presión p. Estos campo pueden variar en

el espacio y en el tiempo, en consecuencia son funciones de la posición $\mathbf{r}$ y del tiempo t

Para describir el movimiento del fluido se utilizan coordenadas cartesianas, donde su vector posición $\mathbf{r} = \mathbf{x}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\hat{\mathbf{k}}$ se escribe en términos de sus vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$.

La obtención de estas ecuaciones se encuentra fuera del alcance de este trabajo sin embargo, se puede consultar su desarrollo en diferentes textos, como por ejemplo en las referencias: [8], [20]:

Para simplificar el análisis se supone fluido no viscoso, no conductor de calor. Las ecuaciones requeridas para describir el movimiento del fluido son: ecuación de continuidad (1), ecuación del balance de la cantidad de movimiento (2) y ecuación de estado del fluido (3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} \right] = -\nabla p \tag{2}$$

$$p = p\,(\rho) \tag{3}$$

2.5.2. Ecuación de onda lineal

Suponiendo que las ondas mecánicas tienen pequeñas amplitudes se puede combinar las ecuaciones (1)-(3) para describir la propagación de ondas mecánicas de pequeñas amplitudes en un fluido, considerando que en ausencia de la onda el fluido está en reposo ($u = 0$) y tiene presión constante p_0 y densidad contante ρ_0. Se suponen variaciones muy pequeñas en los campos (p, u, ρ) en relación con el fluido no perturbado (p_0, u_0, ρ_0). Se puede expresar los campos totales como la suma de los campos no perturbados y los campos de perturbación de primer orden (p_1, u_1, ρ_1):

$$p = p_0 + p_1 \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \tag{5}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \tag{6}$$

En las ecuaciones (4),(5) y (6) el subíndice 0 se refiere a los campos no perturbados y el subíndice 1 se utiliza para las aproximaciones de primer orden. Aquí se supone que el fluido esta en reposo, por lo que $\mathbf{u}_0 = 0$. En adición cuando se trata con ondas de pequeñas amplitudes podemos considerar $|p_1| \ll p_0$ y $|\rho_1| \ll \rho_0$, realizando estas aproximaciones y remplazando (5) y (6) en (1) se obtiene la ecuación de continuidad linealizada [1]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0 \tag{7}$$

De manera similar se puede linealizar la ecuación del balance de momentum suponiendo $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}| \ll \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|$, ya que los efectos viscosos y de aceleración temporal son dominantes, mientras se descartan los efectos inerciales del término convectivo $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}|$. Remplazando (4) en (2) y despreciando el término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}$, por ser mucho mas pequeño que $\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|$ resulta:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \tag{8}$$

Por último, se linealiza la ecuación de estado. Desarrollando la ecuación (3) en series de Taylor y ordenando términos obtenemos:

$$p - p_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \tag{9}$$

Reorganizando la anterior ecuación se puede expresar de la siguiente manera:

$$p_1 = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{B}{\rho_0} \rho_1 \tag{10}$$

Donde B es el módulo volumétrico adiabático del fluido y se expresa como:

$$B = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \tag{11}$$

Se realiza la siguiente sustitución:

$$c_0^2 = \frac{B}{\rho_0} \tag{12}$$

Donde c_0 es la velocidad isentrópica del sonido en el fluido.

Finalmente, la ecuación de estado del fluido linealizada se puede expresar como: [4]):

$$p_1 = c_0^2 \rho_1 \tag{13}$$

Combinando las ecuaciones (7), (8) y (13) se obtiene la ecuación de onda lineal:

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \tag{14}$$

La ecuación (14) se puede expresar en términos de un potencial de velocidad si se asume un fluido no viscoso e irrotacional, empleando la siguiente igualdad:

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \phi_1 \tag{15}$$

La función escalar ϕ_1 es el potencial de velocidad y es una solución de la ecuación de onda dada por:

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \tag{16}$$

La ecuación (14) es una de las formas más conocidas de la ecuación de onda y, además, es empleada por el software de análisis y resolución por elementos finitos COMSOL Multiphysics versión 5.6 para generar soluciones de acústica dependientes del tiempo.

La propagación de campos armónicos temporales esta presente en muchos problemas, por esto es conveniente simplificar el tratamiento matemático de ondas acústicas

armónicas temporales adoptando números complejos. El potencial de velocidades puede describirse por:

$$\phi_1(r,t) = \phi_1(r)\, e^{-i\omega t} \tag{17}$$

Donde (r) es la posición, t el tiempo y w la frecuencia angular.

La ventaja de adoptar números complejos es la facilidad para obtener las amplitudes y fases de los campos p_1, u_1 y ρ_1 tomando lo módulos y argumentos de los respectivos campos complejos. La solución física real puede ser determinada tomando tanto la parte real como imaginaria.

Con el objetivo de formular la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia, se procede a sustituir la ecuación (17) dentro de la ecuación (16). Este proceso permite obtener la expresión independiente del tiempo, esencial para el análisis y la comprensión de fenómenos ondulatorios en términos de sus componentes frecuenciales. De esta manera, se establece una representación que facilita la exploración y el estudio de las propiedades de las ondas en un contexto de análisis de frecuencias:

$$\nabla^2\phi_1 + k^2\phi_1 = 0 \tag{18}$$

Esta es la ecuación de Helmholtz, donde $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y λ es la longitud de onda. Aunque la ecuación (18) en términos del potencial de velocidad es mas conocida, COMSOL Multiphysics utiliza una variación de esta ecuación en términos de la presion. Para realizar este cambio de variable es necesario sustituir la ecuación (15) en (8) obteniendo:

$$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \tag{19}$$

Finalmente remplazando la ecuación (19) dentro de (18) y utilizando la definición de numero de onda la ecuación utilizada por COMSOL Multiphysics se expresa como se muestra a continuación:

$$\nabla \cdot (\nabla p) + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \tag{20}$$

2.5.3. Presión por radiación acústica

La aproximación de la ecuación de onda de la (ecuación (20)) no predice la presión de radiación acústica que es un fenómeno no lineal [3].

Para describir la presión de radiación acústica, es necesario incluir los efectos de la presión de segundo orden, donde los campos p, $\mathbf{u}$ y ρ se describen de la siguiente forma:

$$p = p_0 + p_1 + p_2 \tag{21}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} \tag{22}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 \tag{23}$$

Donde los términos con el subíndice 2 corresponden a las cantidades de segundo orden.

Remplazando (21), (22), (23) en (2) y manteniendo solo los términos de segundo orden se obtiene:

$$\nabla p_2 = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \rho_0 \left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_1 \tag{24}$$

Promediando en (24) se obtiene:

$$\nabla \left\langle p_2 \right\rangle = \rho_0 \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \right\rangle - \rho_0 \left\langle \left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_1 \right\rangle \tag{25}$$

Los paréntesis angulares $\langle\ \rangle$ representan el promedio en el tiempo. Según lo explicado por Bruus [4], cuando tenemos un campo armónico en función del tiempo, la velocidad de segundo orden ($\mathbf{u}_2$) sigue un patrón periódico. Al descomponerla en series de Fourier, obtenemos una combinación de ondas sinusoidales junto con una constante. El valor promedio a lo largo del tiempo de estas ondas sinusoidales y la derivada temporal de la constante son ambos igual a cero. Por ende, el primer término en el lado derecho de la ecuación (25) también se vuelve cero, lo que resulta en:

$$\nabla \left\langle p_2 \right\rangle = - \left\langle \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \right\rangle - \rho_0 \left\langle \left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_1 \right\rangle \tag{26}$$

Combinando (8) (13) y (26) y utilizando $\nabla\left(p_1^2\right) = 2p_1\nabla p_1$ y $\nabla\left(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1\right) = 2\left(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{u}_1$ se obtiene la presión de radiación acústica promediada en el tiempo [1]:

$$\langle p_2 \rangle = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\left\langle p_1^2 \right\rangle - \frac{\rho_0}{2}\left\langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \right\rangle \tag{27}$$

Si bien la presión de segundo orden es un fenómeno no lineal se puede utilizar la presión y la velocidad de primer orden que son fenómenos lineales para su cálculo.

El desarrollo de la presión de segundo orden es de gran importancia ya que en la teoría lineal, el término $\langle \sin(\omega t) \rangle$ siempre conduciría a un promedio temporal cero, durante un ciclo de oscilación completo, por lo tanto, los términos no lineales de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad son necesarios para obtener productos de dos factores de primer orden que conducirán a un promedio temporal distinto de cero como $\left\langle \sin^2(\omega t) \right\rangle = \frac{1}{2}$ [33].

2.5.4. Fuerza de radiación acústica

Para calcular la FRA sobre un objeto incompresible en una posición fija en el espacio se hace uso de la ecuación (27), integrando el promedio de la presion de segundo orden sobre una superficie de integración S_0[1]:

$$\mathbf{F}_{rad} = -\int_{S_0} \langle p_2 \rangle \, \mathbf{n} ds \tag{28}$$

Donde $\mathbf{F}_{rad}$ denota la fuerza de radiación acústica, y $\mathbf{n}$ denota el vector unitario normal a la superficie de integración.

Para objetos comprimibles, La integral debe tomarse sobre una superficie de una partícula que se mueve en respuesta a la fuerza aplicada. Esto significa que la superficie de integración es una función del tiempo $S = S(t)$. Para superar esta dificultad, Yosioka y Kawasima han indicado que la integración puede transformarse en una superficie de equilibrio S_0 que encierra la partícula. Si se compensa el error con la adición de un término de flujo de momento convectivo, la fuerza, en total, se convierte en [7]:

$$\mathbf{F}_{rad} = -\int_{S_0} \langle p_2 \rangle \, \mathbf{n} ds - \int_{S_0} \rho_0 \left\langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) \, \mathbf{u}_1 \right\rangle ds \tag{29}$$

2.5.5. Cálculo de la FRA utilizando el potencial de Gor'kov

Una simplificación para calcular la FRA se realiza asumiendo una esfera de radio mucho mas pequeño que la longitud de onda, además de asumir un campo acústico en un fluido ideal. Con estas suposiciones se puede utilizar el potencial acústico (U) para calcular la FRA [1]:

$$\mathbf{F}_{rad} = -\nabla U \tag{30}$$

El potencial acústico se puede calcular con la siguiente ecuación [1]:

$$U = 2\pi \ R^3 \left[\frac{f_1}{3\rho_0 c_o^2} \left\langle \left(p_1^{in}\right)^2 \right\rangle - \frac{f_2 \rho_0}{2} \left\langle \mathbf{u}_1^{in} \cdot \mathbf{u}_1^{in} \right\rangle \right] \tag{31}$$

Donde R representa el radio de la partícula, ρ es la densidad, y c es la velocidad de propagación del sonido. El subíndice 0 indica las propiedades del medio, mientras que el superíndice in se refiere al campo incidente.

Los factores f_1 y f_2 son función de las propiedades de la esfera (indicadas por el subíndice P) y del medio fluido, y se pueden calcular de la siguiente manera:

$$f_1 = 1 - \frac{\rho_0 c_o^2}{\rho_P c_P^2} \tag{32}$$

$$f_2 = 2 \left(\frac{\rho_P - \rho_0}{2\rho_P + \rho_0} \right) \tag{33}$$

Para encontrar los promedios temporales $\left\langle (\mathbf{u}_1^{in}.\mathbf{u}_1^{in})^2 \right\rangle$ y $\left\langle (p_1^{in})^2 \right\rangle$ se puede utilizar la siguiente expresión:

$$\langle HJ \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) J(t)^* dt \tag{34}$$

Donde: T es el período de observación o el intervalo de tiempo durante el cual se realiza la integración.$H(t)$ y $J(t)$ son las funciones complejas correspondientes a las variables H y J evaluadas en el tiempo, $J(t)^*$ denota el conjugado complejo de $J(t)$.

A diferencia de las ecuaciones (28) y (29) para calcular la fuerza de radiación usando el potencial de Gor'kov, no se requiere usar términos de segundo orden como se evidencia en la ecuación (31). En una onda estacionaria acústica la presion incidente de primer orden puede describirse mediante:

$$p_1^{in} = A\left(cos\left(kx + wt\right) + \cos\left(kx - wt\right)\right) \tag{35}$$

Donde A es la amplitud de la presion acústica. La presion acústica p_1^{in} dada por la ecuación (33) es solución de la ecuación de onda:

Haciendo uso de la ecuación (35) y de la definición del promedio de un producto de dos variables complejas presentadas en la ecuación (34) se puede obtener la siguiente la siguiente expresión, para el promedio de la presion al cuadrado:

$$\left\langle (p_1^{in})^2 \right\rangle = \left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = \frac{A^2}{\tau} \int_0^\tau \left(e^{2jkx} e^{-2jwt} + 2e^{jkx} e^{-jwt} e^{-jkx} e^{-jwt} + e^{-2jkx} e^{-2jwt}\right) dt \tag{36}$$

Expandiendo en términos de senos y cosenos, tomando en cuenta solo la parte real se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = \frac{A^2}{\tau} \int_0^\tau \Bigg(& 2\cos^2(kx)\cos^2(-wt) \\ & + 2\cos(kx)\cos(-wt)\cos(-kx)\cos(-wt) + \cos^2(-kx)\cos^2(-wt) \Bigg) dt \end{aligned} \tag{37}$$

Debido a que el coseno es una función par se simplifica de la siguiente manera:

$$Re\left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = \frac{A^2}{\tau} \int_0^\tau \left(4cos^2\left(kx\right) cos^2\left(wt\right)\right) dt \tag{38}$$

Integrando con respecto al tiempo se obtiene:

$$Re\left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = \frac{4A^2}{\tau} cos^2\left(kx\right) \left[\frac{sen\left(2wt\right) + 2wt}{4w} \right]_0^{\tau} \tag{39}$$

Se remplaza el periodo por la frecuencia angular:

$$Re\left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = \frac{4wA^2}{2\pi} cos^2\left(kx\right) \left[\frac{sen\left(2w\left(\frac{2\pi}{w}t\ \ \right)\right) + 2w\left(\frac{2\pi}{w}t\ \ \right)}{4w} \right]_0^{2\pi/w} \tag{40}$$

Evaluando los límites de integración dentro de la ecuación (40) se obtiene:

$$Re\left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = \frac{A^2}{2\pi} cos^2\left(kx\right)\left(4\pi\ \right) \tag{41}$$

Finalmente se simplifica la ecuación (41) para obtener la parte real de del promedio de la presion al cuadrado:

$$Re\left\langle p_1^{in} \cdot p_1^{in} \right\rangle = 2A^2 cos^2\left(kx\right) \tag{42}$$

La ecuación (42) juega un papel importante por que nos permite definir el potencial acústico en términos de parámetros conocidos.

Continuando con el desarrollo de los términos necesarios para utilizar el potencial acústico, se procede a calcular el promedio del producto punto de la velocidad, aplicando la definición del producto de dos variables complejas (ecuación (34)).

Primero se empieza por definir la velocidad en términos del campo de presión. La velocidad se obtiene a partir de la ecuación (8):

$$u = \int_0^t \frac{-\nabla \mathrm{p}}{\rho_0} dt \tag{43}$$

Dado que se conoce la expresión del campo de presión incidente de primer orden y se requiere únicamente su parte real, esta se desarrolla de la siguiente manera:

$$\mathrm{Re}(u) = \frac{-1}{\rho_0} \int_0^t \nabla \left(A\cos(kx + wt) + \cos(kx - wt)\right) dt \tag{44}$$

Primero se desarrolla el gradiente de la presión con respecto a la dirección x (dirección normal al frente de propagación de onda), realizando una simplificación solo tenemos el termino del coseno dentro de la integral:

$$Re(u) = \frac{Aksen(kx)}{\rho_0} \int_0^t 2cos(wt)dt \tag{45}$$

Procediendo a integrar obtenemos la expresión para la parte real de la velocidad:

$$Re(u) = \frac{2Aksen\,(kx)}{\rho_0} \quad \frac{sen(wt))}{w} \tag{46}$$

Conociendo la expresión de la parte real de la velocidad en función de los parámetros conocidos, ahora procederemos a calcular el valor promedio del cuadrado de la velocidad. Siguiendo el enfoque utilizado para el análisis de la presión, se procede a integrar el producto punto de la velocidad empleando integrales de funciones trigonométricas.

Se parte del cálculo del promedio temporal de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es la velocidad, a lo largo de un período τ. Se sustituye la expresión de $\mathbf{u}$ en función de sus componentes sinusoidales. Se plantea la integral sobre el período τ que se evaluará posteriormente.

$$Re\,\langle u.u\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(\frac{2Aksen\,(kx)}{\rho_0} \quad \frac{sen(wt))}{w}\right)^2 dt \tag{47}$$

La integral del cuadrado del seno da lugar a dos términos: uno proporcional al tiempo t, y otro relacionado con la oscilación $sen(2wt)$. Se evalúan los límites de integración en $t = 0$ y $t = \tau$, lo que simplifica el resultado en términos de τ.

$$Re\,\langle u.u\rangle = \frac{4A^2k^2sen^2\,(kx)}{\tau{\rho_0}^2w^2}\left[\frac{t}{2} - \frac{sen(2wt))}{4w}\right]_0^\tau \tag{48}$$

El intervalo de integración se modifica para abarcar un período completo de la función seno, es decir, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi/w$. Se reemplaza τ por $2\pi/w$ en el denominador, ya que se considera un ciclo completo.

$$Re\,\langle u.u\rangle = \frac{w4A^2k^2sen^2\,(kx)}{2\pi{\rho_0}^2w^2}\left[\frac{t}{2} - \frac{sen(2wt))}{4w}\right]_0^{2\pi/w} \tag{49}$$

Se evalúa la función seno en el límite superior, obteniendo $\sin(4\pi) = 0$, lo que anula el segundo término. El resultado se simplifica sustituyendo $\sin(4\pi)$ por su valor numérico.

$$Re\left\langle u.u\right\rangle = \frac{4A^2k^2sen^2\left(kx\right)}{2\pi{\rho_0}^2w}\left(\frac{\pi}{w} - \frac{sen\left(4\pi\right)}{4w}\right) \tag{50}$$

Tras simplificar los términos anteriores y eliminar las constantes comunes, se obtiene la expresión final para el promedio de **u**.**u** que depende únicamente de los parámetros físicos A k w y ρ junto con el factor geométrico $sen^2\left(kx\right)$

$$Re\left\langle u.u\right\rangle = \frac{2A^2k^2sen^2\left(kx\right)}{{\rho_0}^2w^2} \tag{51}$$

Remplazando las ecuaciones (38) y (47) en (28) se obtiene el potencial acústico:

$$U = \frac{2\pi R^3A^2}{\rho_0}\left(\frac{2f_1\cos^2\left(kz\right)}{3c_0^2} - \frac{f_2\left(k\sin\left(kz\right)\right)^2}{w^2}\right) \tag{52}$$

Con la definición utilizada para calcular la FRA en términos del potencial de Gor'kov, ecuación (30), se obtiene la siguiente expresión:

$$F_{rad} = \frac{-2\pi R^3A^2}{\rho_0}\left(\frac{-2kf_1\sin\left(2kz\right)}{3c_0^2} - \frac{f_2k^3\sin\left(2kz\right)}{w^2}\right) \tag{53}$$

En la mayoría de los experimentos de levitación acústica en el aire, podemos suponer que la densidad de la esfera es mucho mayor que la densidad del aire, lo que lleva a $f1 = 1$ y $f2 = 1$ [1],esto simplifica la anterior expresión resultando:

$$F_{rad} = \frac{-2\pi R^3A^2}{\rho_0}\left(\frac{-2k\sin\left(2kz\right)}{3c_0^2} - \frac{k^3\sin\left(2kz\right)}{w^2}\right) \tag{54}$$

Utilizando las ecuaciones (42) y (54) se obtienen los campos de la presión (figura 8) y de la FRA (figura 9), respectivamente, para el caso de onda de frente plano para esferas pequeñas de tamaño menor al 15 % de la longitud de onda (λ). Los ejes de estos dos campos son las direcciones vertical (x) y horizontal (z) que están en términos de λ.

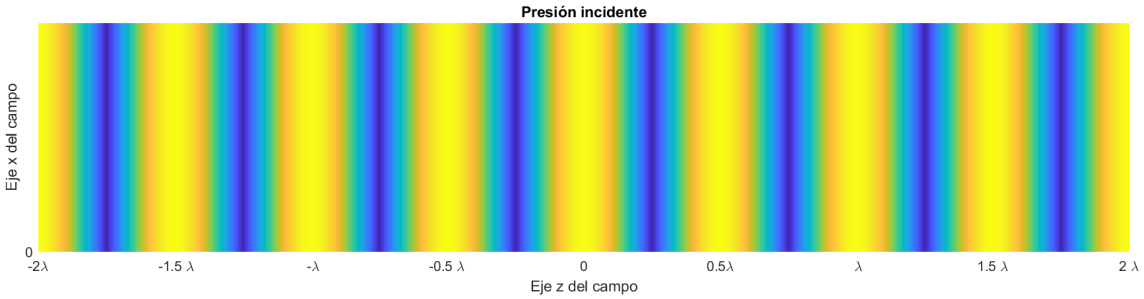

Figura 8: Presión de radiación acustica

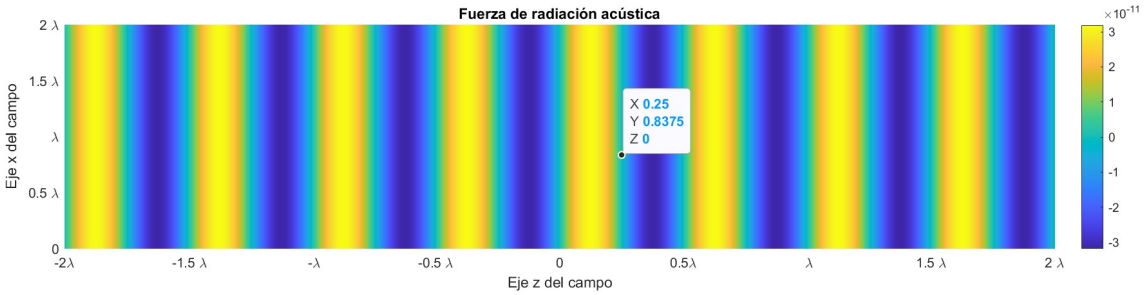

Figura 9: Fuerza de radiación acústica

Las figuras 8 y 9 son fundamentales para entender el comportamiento de los campos. En el campo de presión (figura 8) se observa una distribución periódica de la presión a lo largo del eje horizontal, mientras que en el eje vertical permanece constante debido a que son ondas de frente plano.

En el caso del campo de la distribución de la FRA mostrada en la figura 9 tiene gran relevancia, ya que con este gráfico es fácil ubicar los nodos, que se presentan en los lugares donde su fuerza es nula. Esto es clave para la elección de la posición en que se evalúa la FRA en función del diámetro de la partícula. Cabe aclarar que el hecho de que la FRA sea negativa en algunas posiciones es debido a que los dos radiadores están enfrentados, por lo que ejercen FRA en direcciones opuestas y una de estas se toma como dirección positiva y la otra como dirección negativa.

3. Metodología

En la metodología presentada, se desarrollaron dos modelos de elementos finitos para calcular la FRA, cada uno utilizando un enfoque diferente. Esto permite abarcar una amplia variedad de condiciones físicas según el tamaño de la partícula, garantizando precisión y eficiencia.

El primer modelo utiliza el *potencial de Gor'kov* ecuación (31), ideal para partículas esféricas pequeñas en relación con la longitud de onda acústica. Este método simplifica el cálculo de la FRA en todo el dominio sin necesidad de realizar cálculos detallados punto por punto, lo que lo hace especialmente eficiente. Es recomendable para partículas cuyo tamaño sea menor al 15 % de λ, ya que dentro de este rango, el comportamiento de la partícula se aproxima con gran precisión a la solución real, sin usar un gran recurso computacional y en un tiempo mucho más corto que el segundo método.

Para partículas más grandes, es decir, aquellas que superan el 15 % de λ, el modelo de Gor'kov pierde precisión debido a las simplificaciones asumidas. En estos casos se recomienda el uso del segundo modelo, basado en el *método de perturbación de análisis de elementos finitos (FEA)* resolviendo la integral de la ecuación (29). Este enfoque captura de manera más detallada los efectos complejos asociados a partículas de mayor tamaño, siendo la opción preferida cuando las partículas son más grandes.

3.1. Modelo de elementos finitos utilizando el método de Gor'kov

Para calcular las fuerzas de radiación usando el método de Gor'kov, se desarrollo un modelo 2D axisimétrico en COMSOL, en el cual se definen los parámetros, la geometría del dominio, los materiales y la formulación necesaria para su calculo.

Este método es particularmente útil para analizar campos acústicos generados por objetos de geometría arbitraria, ya que no requiere una forma específica y es adecuado para campos acústicos arbitrarios. Sin embargo, es importante tener en cuenta que este enfoque obtiene valores coherentes cuando se aplica a objetos cuyo tamaño es considerablemente menor que la longitud de onda (λ). En general, se recomienda que el tamaño máximo del

objeto no exceda el 15 % de λ, lo que garantiza resultados precisos y confiables.

El modelo está compuesto por un dominio de simulación acústico, que representa el medio circundante de aire. Este dominio se modela típicamente como un rectángulo que gira alrededor de un eje de simetría, formando un dominio cilíndrico. Este enfoque axisimétrico simplifica significativamente el análisis, permitiendo una representación precisa del comportamiento acústico en un espacio tridimensional a partir de un modelo bidimensional. La configuración del modelo FEM para un campo generado por una condición de presión de fondo se muestra en la Figura 10

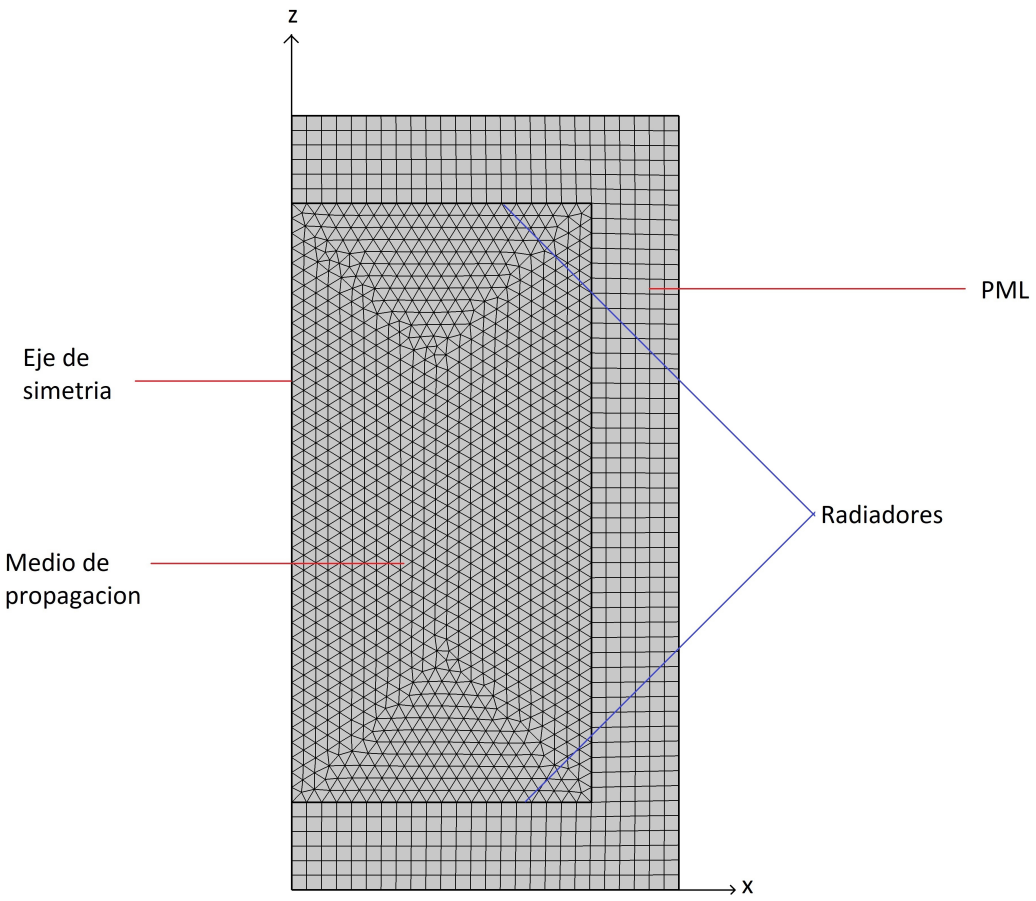

Figura 10: Modelo de elementos finitos para método de Gor'kov

Este modelo consta de un eje de simetría, una condición de capas perfectamente ajustadas (PML) y un campo acústico que puede ser generado por dos condiciones diferentes, como lo son la presión de fondo y el uso de radiadores que se definen a continuación:

1) Presión de fondo: asume un campo que se esta propagando en el medio y se conoce una función para el campo de presión. COMSOL solo permite simular la interacción de este campo con el medio y los objetos.
2) Uso de radiadores: Los radiadores generan el campo de presión y COMSOL resuelve la ecuación de onda para obtener el campo de presión acústica. Además para esta simulación no es necesario modelar ni la esfera ni la superficie que la encierra ya que los efectos que tienen en el modelo se incluyen en la ecuación (31).

El proceso de desarrollo implicó una secuencia de pasos que abarcan desde la definición del dominio hasta la integración de la expresión de Gor'kov para el calculo de la FRA, estos pasos se muestran en anexos en la sección B.

A continuación, se detalla el proceso necesario para la correcta implementación del modelo:

3.1.1. DOMINIO DEL MODELO

En primer lugar, se procedió a implementar un modelo de una partícula esférica atrapada en un campo estacionario de onda plana, modelado por la condición de presión de fondo. Esta implementación se realizó en COMSOL Multiphysics en un entorno 2D axisimétrico para garantizar una eficiencia computacional y un tiempo de simulación mas reducido.

La configuración geométrica consiste en dos rectángulos: uno interno y otro externo, que representan el dominio de la presión y la capa absorbente PML, respectivamente. El rectángulo interno tiene un ancho de dos veces la longitud de onda (λ) y una altura de cuatro veces λ. El rectángulo externo es ligeramente más grande, con un ancho 5 milímetros mayor y una altura 10 milímetros superior en comparación con el rectángulo interno, con el objetivo de generar una capa lo suficientemente gruesa para absorber las reflexiones de las ondas acústicas.

Es importante destacar que el dominio definido con sus propiedades se escogieron con base en los resultados reportados en [27] con el objetivo de validar el modelo desarrollado.

3.1.2. Físicas implementadas

El modelo de elementos finitos implementado se centra principalmente en la física de la presión acústica, abordando la resolución de la ecuación de onda en el medio fluido.

Para obtener la presión acústica en el dominio de la frecuencia, la ecuación que COMSOL Multiphysics resuelve es la ecuación (20).

3.1.3. Condiciones de borde

En el modelo implementado, es esencial definir condiciones de borde que permitan simular tanto los radiadores como las fronteras, evitando así la generación de reflexiones en el campo debido a las ondas propagadas.

Generación de campo

En cuanto a la generación del campo de presiones, existen dos enfoques utilizados. El primero implica el uso de una condición de presion de fondo, que genera un campo descrito por una expresión matemática ingresada. El segundo método utiliza una condición de aceleración normal provocada por las fuentes radiantes.

Para comparar los resultados obtenidos con los reportados en [29], se generó un campo estacionario de onda plana. En el caso de utilizar la presión de fondo (p_b), para el campo estacionario de onda plana COMSOL Multiphysics utiliza la siguiente ecuación:

$$p_\mathrm{b} = p_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{55}$$

Donde p_0 es la amplitud, k es el vector de onda con amplitud de $k_s = w/c$, y $\mathbf{x}$ es la ubicación en el límite

Para generar el mismo campo utilizando la condición de aceleración normal, es necesario aplicarla en dos superficies planas opuestas dentro del dominio, como se muestra en la figura (10). En la simulación, cuando se aplica la aceleración normal como condición de

borde en las superficies radiantes, COMSOL Multiphysics resuelve la siguiente ecuación para calcular la presión:

$$-\mathbf{n} \cdot \left(-\frac{1}{\rho_c} \left(\nabla p_t - \mathbf{q}_d \right) \right) = a_n$$

Donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superficie en la que se aplica la condición, indicando la dirección perpendicular en cada punto, $\mathbf{q}_d$ representa una posible fuente di-polar o contribución adicional al campo acústico, el cual en este caso es 0.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos con ambas condiciones en la evaluación de la FRA en función del diámetro de la esfera, se realizaron varias iteraciones para determinar qué valor de aceleración normal produce el mismo campo de presiones que la condición de presión de fondo.

Tras las iteraciones necesarias para alcanzar precisión en los resultados, se determinó que una aceleración normal de 17.000 $\mathrm{m/s^2}$ genera un campo estacionario equivalente al obtenido bajo la condición de presión de fondo. Este valor se estableció comparando la magnitud máxima del campo de presiones en ambos casos, asegurando que dichas magnitudes fueran idénticas. En este análisis, la magnitud máxima de la presión resultó ser de 2 kPa.

Condiciones de frontera

Para definir las condiciones de frontera y evitar la reflexión de las ondas propagadas que podrían interferir con el campo, se emplean dos métodos: la implementación de PML y condiciones de propagación que dependen de la geometría de la superficie incidente, estos dos métodos se detallan a continuación.

El primero consiste en la implementación de una PML (Capas Perfectamente Adaptadas). Esta técnica resulta altamente efectiva para garantizar la ausencia de reflexiones en las ondas propagadas, independientemente de la forma específica de la onda que se esté propagando.

Al incorporar una PML en el dominio de la frecuencia para resolver problemas de

presión acústica, se utilizan ecuaciones de onda que incluyen términos adicionales para modelar la absorción de las ondas dentro de la PML. La ecuación principal utilizada es la ecuación de Helmholtz modificada para reflejar los efectos de la PML. La forma general de esta ecuación modificada se describe a continuación:

$$\nabla^2 p + k^2 p - ik\sigma p = 0 \tag{49}$$

Donde: p es la presion acústica, k es el numero de onda y i es la unidad imaginaria, el término adicional $-ik\sigma p$ representa la absorción de ondas acústicas en la PML donde σ es una constante que se ajusta para controlar el grado de absorción de la PML, y su valor depende de la frecuencia y la geometría del problema. Este término adicional asegura que las ondas se absorban de manera eficiente dentro de la PML sin introducir reflexiones indeseadas.

El segundo método implica la implementación de condiciones de propagación que dependen de la geometría de la superficie incidente. En este modelo, para el campo generado por la condición de presión de fondo se han empleado dos tipos de condiciones: la Radiación de Onda Cilíndrica en la cara cilíndrica y la Radiación de Onda Plana en las caras inferior y superior.

Las condiciones de Radiación de Onda Plana y Cilíndrica agregan límites de radiación específicos para ondas planas y cilíndricas, respectivamente. Estas condiciones permiten que una onda plana saliente o cilíndrica abandone el dominio de modelado con reflexiones mínimas, asegurando así la precisión de la simulación.

La elección entre utilizar una PML o una condición de propagación depende de varios factores, como la precisión deseada y el costo computacional (para este caso se hizo uso de una PML). Cada método tiene sus ventajas y desventajas. A continuación, se detallan algunas ventajas y desventajas de utilizar PML frente a condiciones de propagación:

Ventajas: Absorbe eficazmente las ondas sin reflexión, aplicable a diferentes geometrías, y ofrece mayor precisión en los bordes.

Desventajas: Requiere mayor capacidad computacional y una configuración precisa para evitar errores numéricos.

3.1.4. Enmallado

La malla de elementos finitos fue diseñada, como se muestra en la Figura 10. En esta figura, se observa que los elementos del campo acústico tienen forma triangular, mientras que los elementos de la PML son rectangulares. Esta elección geométrica se realizó porque permiten una optimización eficiente en los modelos. Los elementos triangulares proporcionan alta precisión en zonas con geometrías complejas, mientras que los elementos rectangulares reducen el costo computacional en áreas con geometrías más simples, facilitando además la diferenciación de dominios

Para obtener una solución precisa de la ecuación de onda en el dominio del aire, se llevó a cabo un análisis de sensibilidad de la malla con el objetivo de determinar el tamaño óptimo de los elementos. Este análisis buscaba asegurar que la solución fuera independiente de la calidad de la malla. Para iniciar este proceso, se consideró el valor máximo recomendado según el teorema de Nyquist-Shannon. Este teorema establece que, para reconstruir la información de una señal de manera precisa, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la mayor componente frecuencial presente en la señal. De manera análoga, para garantizar resultados confiables en la solución de la ecuación de onda dentro del modelo, se definió el tamaño máximo de los elementos de la malla en función de la longitud de onda, tomando un tercio de λ como referencia. La gráfica de sensibilidad correspondiente al modelo se muestra en la figura 11.

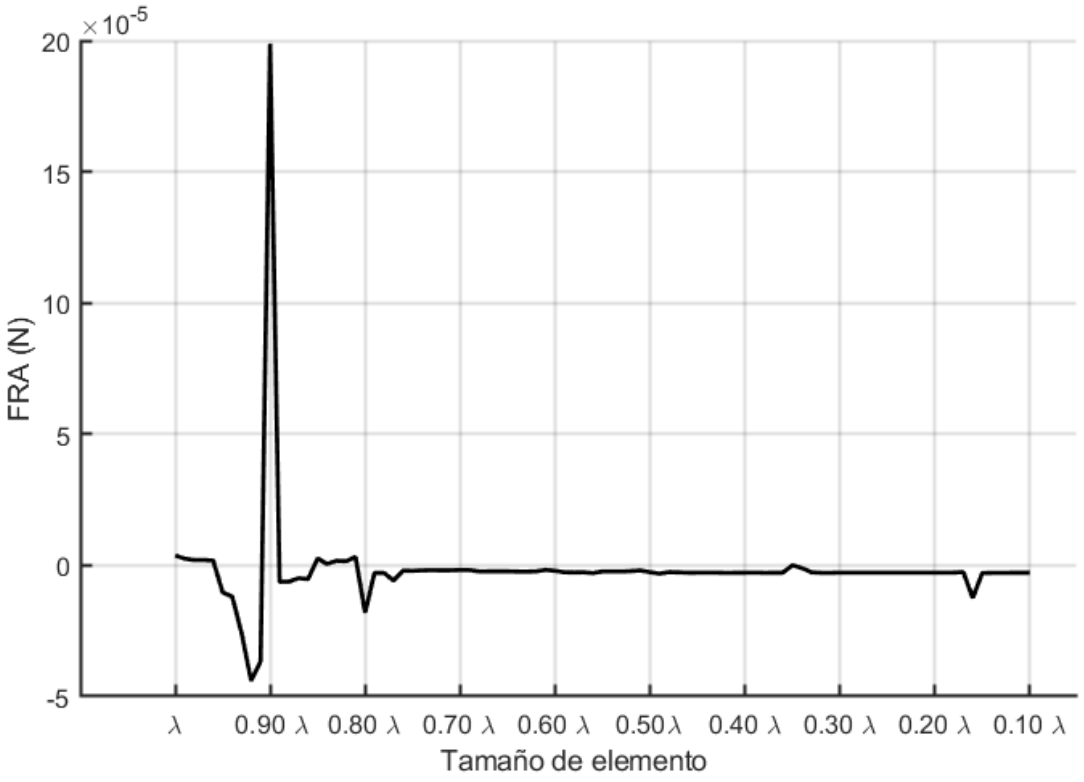

Figura 11: Convergencia de malla para método de Gor'kov

La figura 11 muestra la convergencia de la FRA en un punto específico del campo acústico ($\lambda/4$). El orden de magnitud de la fuerza es considerablemente bajo y tiende a cero a medida que se reduce el tamaño de los elementos de la malla. Esto se debe a que el punto analizado corresponde a una posición de levitación, ya sea un nodo o un antinodo del campo acústico.

Como se observa en la gráfica, cuando el tamaño de los elementos es mayor que 80 % de λ, los valores de la FRA presentan imprecaciones significativas. Por esta razón, se recomienda utilizar un tamaño de los elementos mucho menor como $\lambda/5$, lo cual garantiza resultados más precisos y confiables para la implementación de los modelos numéricos.

Además, se observan pequeñas fluctuaciones o picos en diferentes tamaños de los elementos, incluso en regiones donde se esperaría un comportamiento uniforme debido a la convergencia. Este fenómeno podría estar relacionado con errores de redondeo asociados a la precisión finita del modelo numérico, especialmente en regiones donde la malla es muy fina.

3.1.5. Implementacion de expresion de Gor'kov en el modelo

Una vez definido el modelo en su totalidad se procede a la implementación de la ecuación (31) que nos permite incluir la información sobre la partícula sin necesidad de realizar su simulación en el modelo, asumiendo que puede estar en cualquier lugar dentro del campo de presión.

Para realizar el calculo de la FRA de manera eficiente, se utiliza el software COMSOL Multiphysics, que utiliza técnicas numéricas para resolver ecuaciones relacionadas con la presión y velocidad del sonido. Para calcular la velocidad de primer orden, primero resuelve la ecuación (19) y luego utiliza las ecuaciones (14) y (16).

Esta combinación de métodos numéricos y software especializado nos brinda una forma sólida de resolver problemas relacionados con la propagación de las ondas y la interacción de partículas en fluidos.

Una vez que se obtienen la presión y la velocidad de primer orden, se emplea la definición del promedio del producto de dos campos de primer orden ecuación (56), como lo describe Bruus (2007), para determinar los productos promediados en el tiempo de la presión y la velocidad $\langle (u_1^{in}.u_1^{in}) \rangle$ y $\left\langle (p_1^{in})^2 \right\rangle$, respectivamente. El desarrollo de estas expresiones es crucial para la implementación de la expresión de Gor'kov, ya que COMSOL no tiene la opción para ingresar estas expresiones directamente.

$$\langle H\,(t)\,J\,(t) \rangle = \frac{1}{2} Re[H_0 J_0^*] \tag{56}$$

Donde: $H(t)$ y $J(t)$ son variables complejas dependientes del tiempo y H_0 y J_0* son sus amplitudes complejas constantes cuando se promedia en el tiempo, el asterisco se emplea para denotar el conjugado de J_0. Para el caso de la presion resulta de la siguiente manera:

$$\left\langle (p_1^{in})^2 \right\rangle = \left\langle (p_1^{in} p_1^{in}) \right\rangle = \frac{1}{2} Re[P_0 P_0^*] \tag{57}$$

Donde P_0 y P_0^* representan la amplitud de la presión entrante de primer orden y su conjugado respectivamente. De igual forma se hace para el promedio de los productos de la velocidad $\langle (u_1^{in}.u_1^{in}) \rangle$ como se muestra a continuación:

$$\left\langle (u_1^{in}.u_1^{in}) \right\rangle = \frac{1}{2} Re[V_0 V_0^*] \tag{58}$$

Donde V_0 y V_0^* representan la amplitud de la velocidad entrante de primero orden y su conjugado respectivamente.

Finalmente remplazando las ecuaciones (57) y (58) en la ecuación (29) resulta la ecuación (59) para posteriormente utilizarla en la ecuación (24) para el calculo de la FRA implementada en COMSOL Multiphysics como resulta en la ecuación (60).

$$U = 2\pi\ R^3 \left[\frac{f_1}{3\rho_0 c_0} (\frac{1}{2} Re[P_0 P_0^*]) - \frac{f_2 \rho_0}{2} \frac{1}{2} (Re[V_0 V_0^*]) \right] \tag{59}$$

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\nabla \left[2\pi R^3 \left(\frac{f_1}{3\rho_0 c_0} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[P_0 P_0^*\right] \right) - \frac{f_2 \rho_0}{2} \operatorname{Re}\left[V_0 V_0^*\right] \right) \right] \tag{60}$$

3.2. Modelo de elementos finitos utilizando el método de Perturbación FEM

Este método se fundamenta en la resolución de la ecuación integral (29) utilizando el método de perturbación, el cual permite expresar las cantidades acústicas de segundo orden en términos de las de primer orden. Para ello, se implementa un modelo de elementos finitos para scattering acústico, una herramienta poderosa que facilita el análisis de la interacción entre ondas acústicas y estructuras en medios complejos, basado en una formulación lineal y de primer orden. Esta aproximación es numéricamente más eficiente, ya que resolver ecuaciones lineales es menos complejo que resolver ecuaciones no lineales. De esta manera, se obtiene la FRA de forma precisa y eficiente.

Una de las ventajas significativas de este método radica en su capacidad para abordar partículas de formas y tamaños arbitrarios. Esto significa que no se limita a geometrías simples, sino que puede manejar objetos con una diversidad de formas y dimensiones. Además, este enfoque no solo es aplicable a campos acústicos específicos, sino que también puede ser utilizado para analizar campos arbitrarios, lo que aumenta su versatilidad y utilidad en una variedad de contextos de levitación acústica. La configuración del modelo

FEM se muestra en la figura 12:

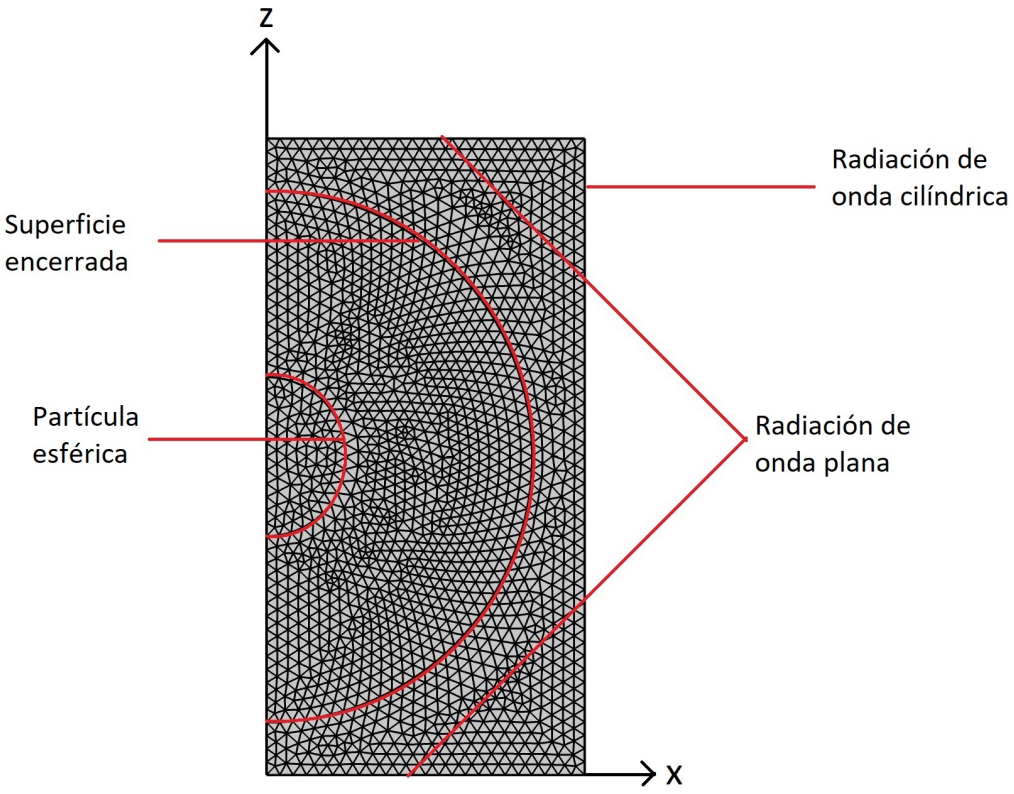

Figura 12: Modelo de elementos finitos para método de Perturbación

En la figura 12 se muestra el segundo modelo utilizado para calcular la FRA mediante el método de perturbación FEA. Este modelo incluye un eje de simetría, una esfera cuyo tamaño varía, una superficie de control que rodea la partícula, y un campo acústico que puede generarse mediante dos condiciones diferentes: la presión de fondo o el uso de radiadores, como se describió previamente en el modelo basado en el método de Gor'kov en la sección 3.1. En este modelo, se reemplazó la PML por condiciones de radiación de onda plana y cilíndrica en los bordes del dominio, con el fin de reducir el costo computacional y comprobar que ambas condiciones minimizan las reflexiones de las ondas.

3.3. Dominio del modelo

El dominio utilizado es 2D axisimétrico, pero es necesario incluir tanto la geometría de la partícula como una superficie cerrada que la rodee. Esta superficie es esencial para garantizar la precisión y validez de los cálculos de la FRA, ya sea en un campo generado

por dos radiadores enfrentados o por una presión de fondo. La superficie que rodea la partícula actúa como una frontera de control donde se aplican las condiciones de contorno, permitiendo una correcta simulación del campo acústico y facilitando la integración de las cantidades acústicas necesarias.

Para determinar la distancia adecuada entre la superficie y la partícula, se realizó un análisis de error comparando los resultados con el método de Gor'kov. El objetivo fue identificar la distancia que produjera los resultados más precisos. Este análisis, que se muestra en la figura (32), destaca varios puntos donde el error relativo es mínimo. Basándonos en estos resultados y en lo reportado en el artículo [5], que sugiere que la fuerzas se deben calcular en el campo lejano que se da una distancia aproximada de una longitud de onda λ, se eligió una superficie situada a 1.2 veces λ de la partícula.

3.3.1. Físicas implementadas

El modelo de elementos finitos implementado utiliza la interacción acústico-estructura en el dominio de la frecuencia, integrando principalmente las físicas de la presión acústica y la mecánica de sólidos. El uso de la presión acústica ya fue detallado en la metodología del modelo basado en el método de Gor'kov, descrito anteriormente.

La mecánica de sólidos permite resolver tanto la ecuación de equilibrio de fuerzas como las deformaciones de la partícula, proporcionando una visión detallada de cómo interactúa con el campo acústico. En el caso de la esfera de poliestireno, se eligió este material para comparar con los resultados del artículo [28]. Dado que la partícula es pequeña, con un diámetro máximo del 15 % λ, se modela utilizando la física de sólidos. Los desplazamientos de la partícula se rigen por la ley de Hooke de elasticidad lineal, expresada en la ecuación (61), donde S es el tensor de deformaciones, T el tensor de esfuerzos, y C el tensor de constantes elásticas, que depende del material. Este enfoque garantiza una representación precisa del comportamiento mecánico de la partícula frente al campo acústico.

$$T = C : S \tag{61}$$

Además, en el contexto de la mecánica de sólidos, las ecuaciones de equilibrio se derivan de la segunda Ley de Newton, las cuales se expresan en términos del tensor de esfuerzos T y se presentan en la ecuación (62). En esta expresión, $\mathbf{f_v}$ representa el vector de fuerza por unidad de volumen, u es el campo de desplazamiento y ρ la densidad del material de la partícula.

$$\nabla \cdot \ T + \mathbf{f_v} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \tag{62}$$

3.4. Condiciones de borde

la condición de borde de interacción acústico-estructura entre la partícula levitada y el dominio de aire se describe mediante las ecuaciones (63) y (64):

$$T = -P\hat{n} \tag{63}$$

$$\hat{n} \cdot \nabla \ \mathrm{p} = -\rho \hat{n} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{64}$$

Donde T es el tensor de esfuerzos, p la presion acústica y n es el vector normal en la superficie del dominio solido en dirección al dominio de fluido [11]. Estas ecuaciones de acople están implicadas en una condición de borde en el modelo de COMSOL, que se aplica sobre la superficie de la partícula suspendida que esta en contacto con el aire.

Las condiciones de contorno restantes para este modelo no difieren de las descritas en el modelo de elementos finitos utilizando el método de Gor'kov. Por lo tanto, las mismas condiciones de contorno pueden ser aplicadas en este modelo sin necesidad de modificaciones adicionales.

3.5. Enmallado

Para obtener una solución precisa de las ecuaciones a resolver, se realizó un análisis de sensibilidad de la malla para este modelo. Este análisis de la FRA se llevó a cabo a una distancia de $\lambda/8$ en la dirección normal al eje horizontal, siguiendo el mismo enfoque empleado previamente en el modelo de Gor'kov. Esto es crucial para optimizar el tamaño

máximo de los elementos, lo que garantiza una precisión óptima en los resultados mientras se ahorra costo computacional. La gráfica de sensibilidad correspondiente al modelo se muestra en la figura 13.

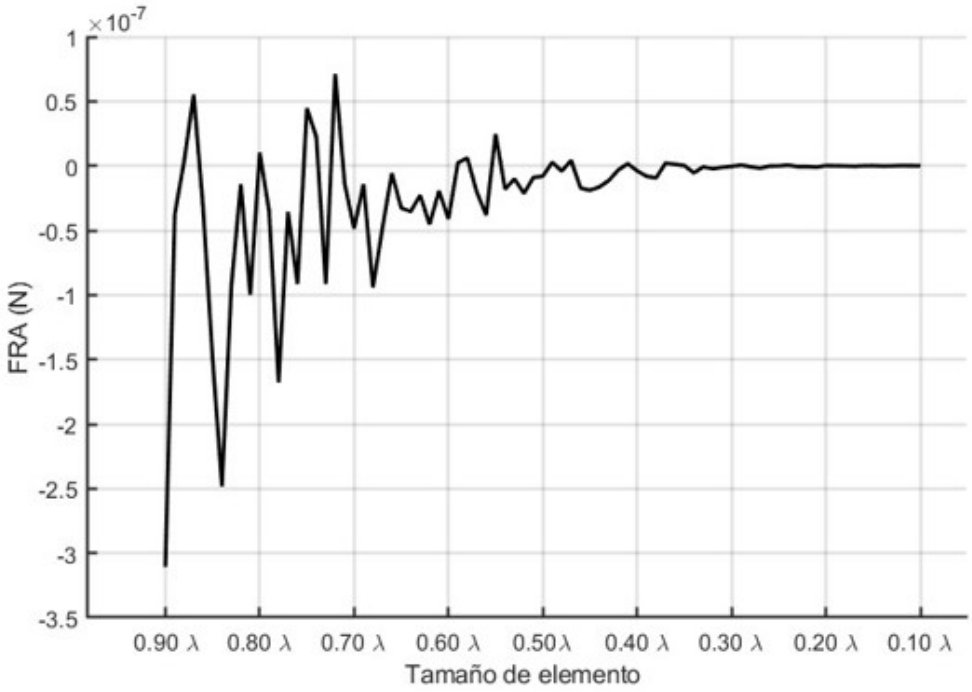

Figura 13: Convergencia de malla para método de perturbación FEA

La figura 13 ilustra la convergencia de la FRA en el mismo punto empleado para el anterior modelo. Se ha empleado la misma discretización que en la figura 32 ubicada en la sección de anexos. Sin embargo, en este caso, la convergencia de la FRA se logra con un tamaño de elemento del 30 % de λ. Con el fin de obtener resultados más precisos, se ha seleccionado un tamaño máximo de elemento del 10 % de λ. El modelo con la malla definida con este tamaño máximo de elemento se ilustra en la figura 12

3.5.1. Implementación de expresión de Fuerzas generalizadas usando el método de perturbación utilizado en COMSOL Multiphysics.

Una vez que se ha definido por completo el modelo, es necesario crear un acoplamiento no lineal de integración sobre la superficie que rodea a la partícula. Dado que se trata de un operador, es posible definir un operador de integración (por ejemplo, intop1) para una parte específica de la geometría (como un límite) y luego utilizarlo en múltiples ocasiones

dentro del modelo para calcular integrales sobre ese límite para diferentes integrandos. Este enfoque facilita el cálculo de integrales sobre límites definidos de manera eficiente y permite una implementación precisa de la expresión para el método de perturbación.

La expresión del método de perturbación para la integración de la superficie de la partícula, (ecuación 24). Para su correcta adaptación en COMSOL Multiphysics las variables de esta ecuación deben implementarse como se muestra en anexos, en la sección A.

En este capítulo se ha cumplido el segundo objetivo específico, que consistía en implementar un modelo de elementos finitos para estimar las fuerzas de radiación acústica generadas durante la interacción entre un campo acústico y un objeto esférico. Este modelo, basado en la formulación de la ecuación (29), puede extrapolarse para analizar objetos con geometrías arbitrarias. La flexibilidad de esta formulación permite su aplicación a cualquier tipo de figura, garantizando resultados precisos, como se demostró en el caso de una partícula esférica. Se desarrollaron dos modelos numéricos, uno basado en el potencial de Gor'kov, adecuado para partículas pequeñas, y otro utilizando el método de perturbación FEM, diseñado para partículas de mayor tamaño.

4. Resultados

4.1. Validación

Para validar el modelo desarrollado, se decidió contrastar los resultados obtenidos con los reportados en [27], donde se presentan cálculos para una partícula esférica utilizando tanto el método analítico de Gor'kov como el método generalizado de Lorenz-Mie (GLMT). Estos resultados cubren tanto el caso de un campo acústico con frente plano como el de un campo enfocado.

Para asegurar una validación adecuada, se adoptaron los mismos parámetros reportados en [27], como la frecuencia de radiación, la presión de entrada, las dimensiones de la geometría, y las propiedades de los materiales. Estos parámetros se detallan en la Tabla (1).

Parámetros utilizados	**Campo de frente plano**	**Campo enfocado**
Densidad del aire	1.2 kg m^{-3}	1.2 kg m^{-3}
Densidad de partícula	13.8 kg m^{-3}	13.8 kg m^{-3}
Velocidad del sonido en el aire	343 m s^{-1}	343 m s^{-1}
Frecuencia	40 kHz	40 kHz
Presión incidente	2 kPa	2 kPa
Altura del dominio de presión	4 λ^{-1}	4 λ^{-1}
Ancho del dominio de presión	2 λ^{-1}	2 λ^{-1}
Posición de partícula (eje z)	$\lambda/8$	-$\lambda/8$
Curvatura de foco		55 ($10^{-}3$) m

Tabla 1: Parámetros utilizados en las simulaciones para los campos de frente plano y enfocado.

El uso de estos valores garantiza que cualquier discrepancia o coincidencia en los resultados puede atribuirse a la precisión de los modelos numéricos y no a variaciones en las condiciones de simulación, lo que fortalece la validez de la comparación.

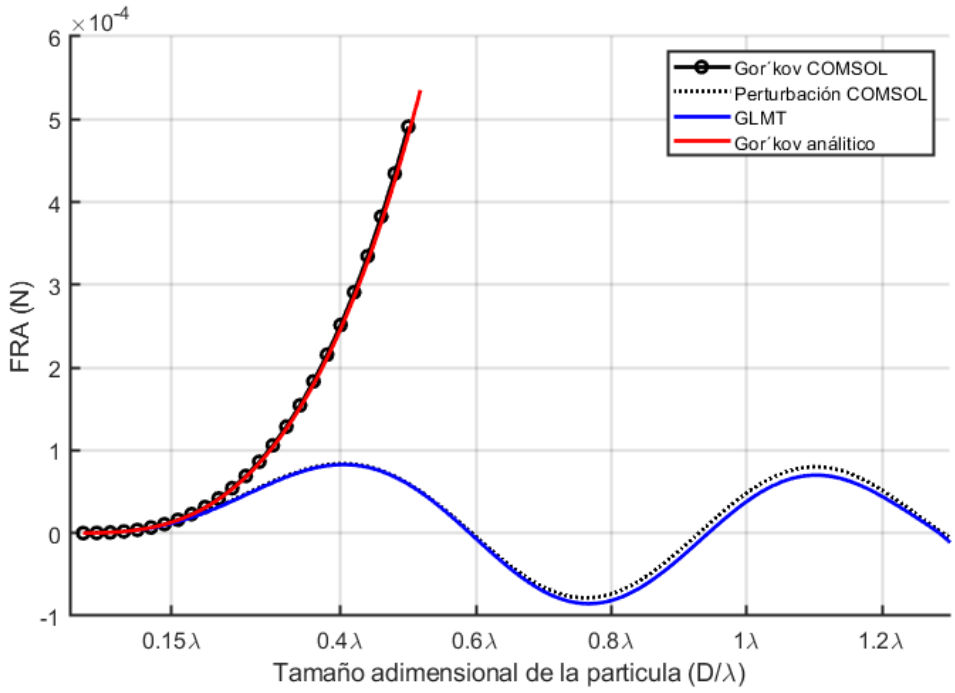

Figura 14: Comparación de métodos

La precisión del método de perturbación queda demostrada al contrastarlo con el método generalizado de Lorenz-Mie como se muestra en la figura 14, lo que respalda su eficacia para calcular la FRA en partículas de formas y tamaños variables, así como en diversos campos acústicos. Sin embargo, al compararlo con el método de Gor'kov, este último muestra una disminución en la precisión a medida que la partícula aumenta de tamaño, siendo válido únicamente para partículas de tamaño inferior al 15 % de λ. Basándonos en este análisis, se opta por utilizar el método de perturbación para la construcción de los demás modelos. Una vez validados los resultados para la levitación de partículas esféricas, se procedió a realizar los respectivos modelos para figuras diferentes de los cuales se representa como varía la fuerza en relación a su tamaño y de como varia la fuerza en relación a la dirección z del campo. Cuyos resultados se muestran a continuación:

FRA para partícula esférica en un campo de frente plano mediante método de Gor´kov

El cálculo de la FRA mediante el método de Gor'kov puede llevarse a cabo utilizando una presión de fondo o mediante la condición de aceleración normal aplicada a dos superficies enfrentadas, como se detalló en la sección de metodología, donde se describieron las consideraciones físicas para su implementación. Para realizar una comparación, se desarrollaron ambos modelos, los cuales se presentan en la figura 15.

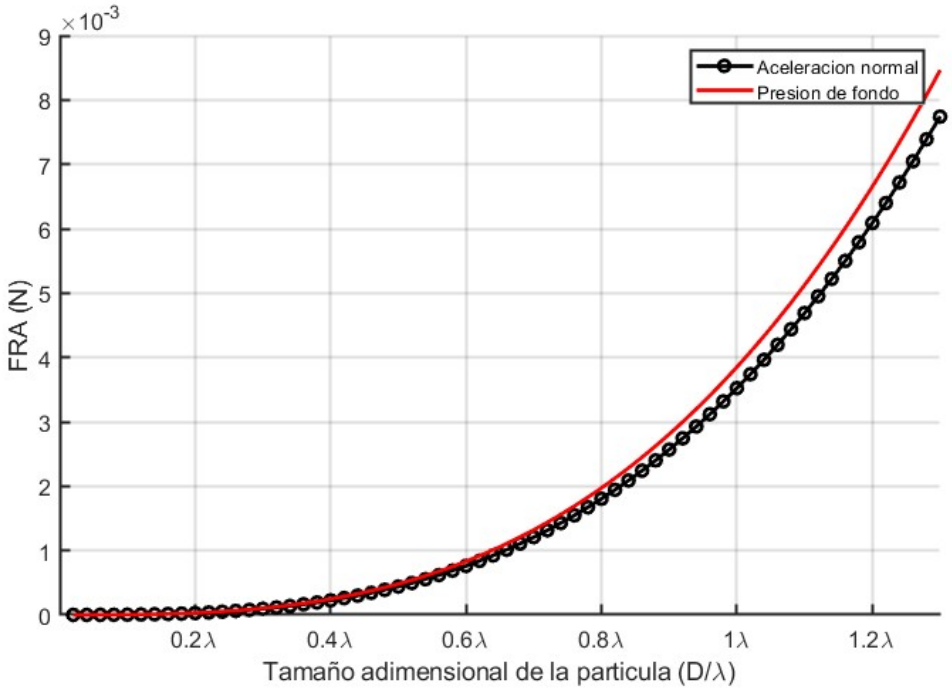

Figura 15: FRA para partícula de figura esférica atrapada en un campo de presion de frente plano, en función del tamaño.

En la figura 15 se muestra cómo varía la FRA en función del diámetro de la partícula esférica para un campo de presión generado tanto por una presión de segundo orden como por una aceleración normal emitida por transductores enfrentados. Los resultados obtenidos con ambas opciones son bastante similares. Sin embargo, a medida que aumenta el diámetro de la partícula, las diferencias en la FRA comienzan a hacerse evidentes. Esto se debe a que el campo de presión generado por la presión de segundo orden es un modelo idealizado, mientras que el campo de presión generado por la aceleración normal de los transductores representa una aproximación más realista. Esta última opción permite

simulaciones que predicen de manera más precisa el comportamiento de la presión en condiciones experimentales, ya que el modelo se ajusta mejor a las situaciones reales observadas en los experimentos.

FRA para una partícula esférica en un campo enfocado

Para el caso de un campo enfocado, se decidió desarrollar un modelo para una partícula esférica de poliéstireno. Esta partícula se encuentra inmersa en un medio de aire. Se ajustó el modelo al de referencia en [27] utilizando las propiedades mencionadas en la (tabla 1) con el fin de comparar el desempeño de los modelos realizados con los métodos reportados en el articulo de referencia (método analítico mediante expresión de Gor'kov y método generalizado de Lorenz-Mie).

La FRA para un campo enfocado se calculo utilizando los métodos analizados anteriormente, para este caso se utilizo una expresión desarrollada en funciones de Bessel, para determinar la presión incidente, simulando así un campo enfocado.

En la figura 16 se muestra como varia la FRA en función del diámetro de la partícula

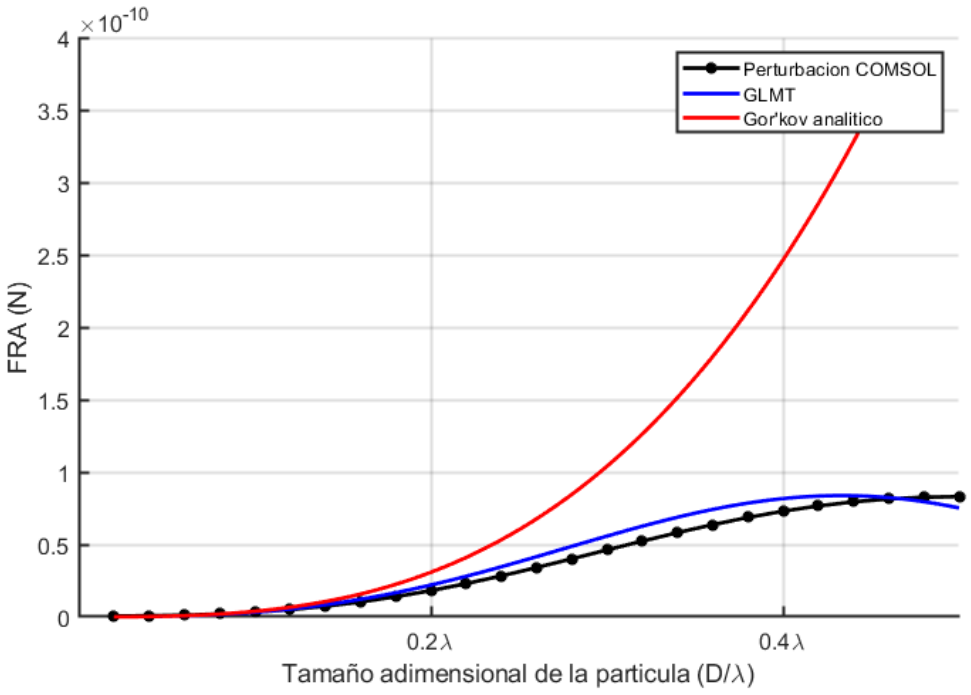

Figura 16: FRA para una partícula esférica de Poliestireno atrapada en un campo de presion enfocado, en función del diámetro.

En la figura 16, se aprecia cómo la gráfica del método de perturbación guarda una notable similitud al utilizar el método de Lorenz-Mie. Sin embargo, se evidencian diferencias entre ambas curvas debido a las características del modelo de elementos finitos. En este modelo, la presencia de superficies rígidas que generan el campo acústico conlleva a sucesivas reflexiones que alteran la configuración del campo y aumentan la fuerza. Este fenómeno se debe a que los ecos generan una composición constructiva.

Aunque el comportamiento es similar en ambos casos, se presenta una diferencia en la amplitud. Esto se debe a que el modelo semianalítico no tiene en cuenta las sucesivas reflexiones, a diferencia del modelo de elementos finitos que, al considerar dichas reflexiones, provoca un aumento en la amplitud de la fuerza. Para mitigar este efecto, se manipuló la atenuación del medio del aire, con el fin de reducir la contribución de los ecos, para así obtener mayor similitud en la comparación de resultados de los métodos anteriormente mencionados.

Es importante destacar que los resultados del modelo de elementos finitos ofrecen una mejor aproximación al modelo real, ya que en los levitadores reales se generan ecos tal como sucede con la simulación de elementos finitos.

FRA para partículas de diferentes figuras en un campo de frente plano

Para el desarrollo de los modelos necesarios para el cálculo de la FRA mediante el método de perturbación, se siguió la metodología descrita previamente. Se emplearon las mismas propiedades utilizadas en el proceso de validación, el cual se llevó a cabo utilizando una esfera de poliestireno de tamaño variable como referencia. En este sentido, a continuación se presenta una comparación de los resultados de la FRA en función del tamaño para diversas figuras (ver figura 17). Además, se muestra la comparación de la variación de la FRA en función de la dirección z (eje vertical), manteniendo un tamaño fijo del objeto con dimensiones proporcionales (ver figura 18).

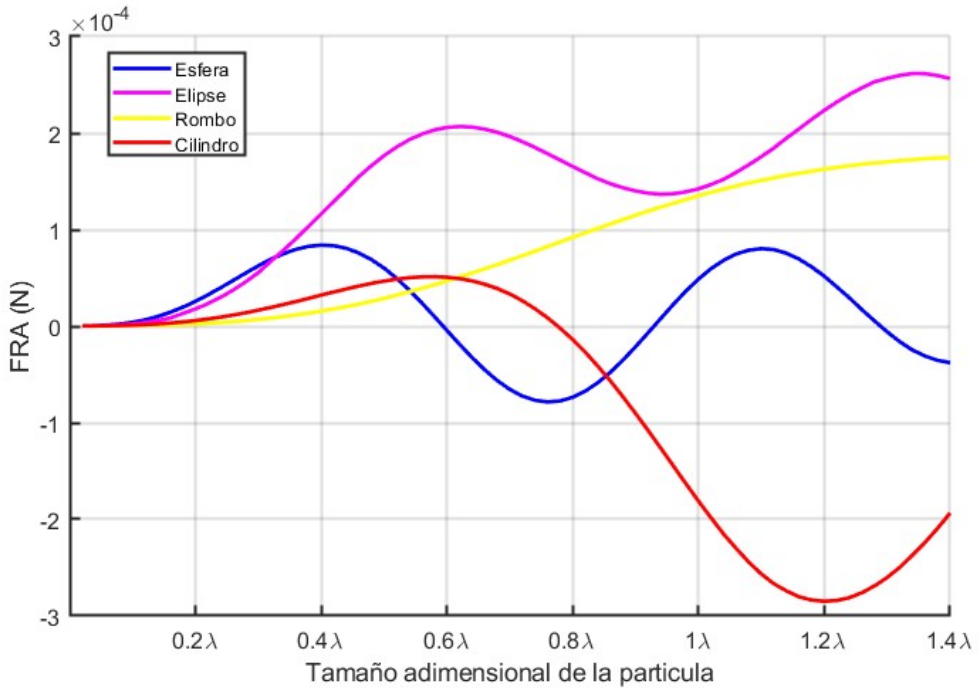

Figura 17: FRA para partículas de figuras diferentes atrapadas en un campo de presion de frente plano, en función del tamaño.

En la figura 17 se presenta el cálculo de la FRA para diversas figuras. La FRA es un factor determinante en el proceso de levitación acústica, ya que es responsable de contrarrestar la gravedad y mantener el objeto suspendido en el aire mediante el uso de ondas acústicas. Al analizar las gráficas asociadas a cada figura, se puede observar que la magnitud y la distribución de la FRA varían significativamente según la geometría del objeto.

La importancia de considerar la geometría del objeto a levitar radica en su influencia directa en el comportamiento del campo de presiones acústicas. La forma y la superficie de reflexión del objeto afectan la manera en que las ondas acústicas interactúan con él, lo que a su vez modifica la distribución y la intensidad del campo de presiones. Por lo tanto, comprender y tener en cuenta estos aspectos geométricos es crucial para obtener un cálculo preciso de la FRA y garantizar una levitación estable y controlada.

Adicionalmente, al comparar la FRA en función del tamaño para diferentes figuras geométricas, como la esfera, el elipsoide, el rombo y el cilindro, es necesario considerar un parámetro común que permita establecer una base de comparación. Una opción es

utilizar una longitud característica representativa de cada geometría: el eje mayor en el caso del elipsoide, la distancia desde el centro a una de las caras horizontales en dirección normal para el cilindro, y la distancia desde el centro a uno de los vértices para el rombo. Este enfoque permite analizar las diferencias en la FRA de forma consistente a medida que aumenta el tamaño de la partícula.

En las gráficas FRA vs. tamaño, se observa que para partículas pequeñas (cuyas dimensiones son comparables a 0.4 veces la longitud de onda del campo acústico), la FRA tiende a crecer de manera no lineal. Este comportamiento está relacionado con la interacción resonante entre la partícula y el campo acústico, donde las propiedades geométricas juegan un papel crucial. Sin embargo, a medida que el tamaño de la partícula aumenta, las diferencias en la forma se vuelven más evidentes. Por ejemplo, las superficies curvas de una esfera o un elipsoide tienden a generar distribuciones de presión más uniformes en comparación con los bordes pronunciados de un rombo, los cuales pueden inducir concentraciones de presión o áreas de baja estabilidad.

Asimismo, la FRA no solo afecta la capacidad de levitación, sino también la estabilidad y la manipulación del objeto. Mientras que las figuras geométricas con superficies lisas y simétricas, como esferas y elipsoides, suelen favorecer la estabilidad del objeto al minimizar fluctuaciones, otras geometrías, como los romboides, pueden generar puntos de inestabilidad debido a su forma irregular.

En resumen, la geometría del objeto desempeña un papel fundamental en el cálculo de la FRA y su relación con el tamaño. Considerar cuidadosamente estos aspectos permite no solo mejorar la precisión del modelo de FRA, sino también optimizar la estabilidad y el control del sistema de levitación acústica en aplicaciones prácticas.

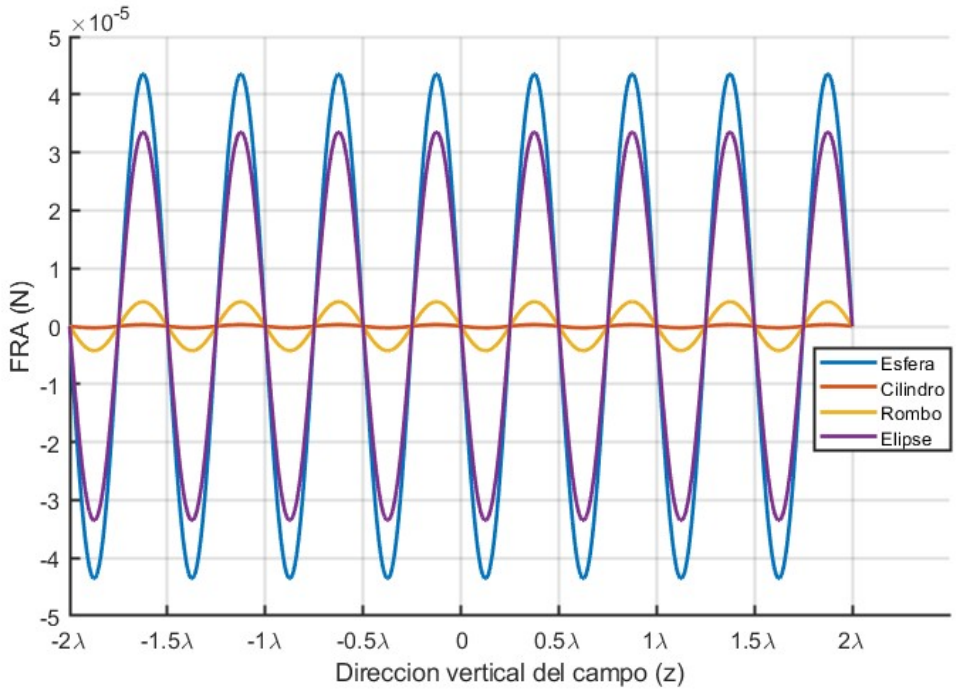

Figura 18: FRA para partículas de figuras diferentes atrapadas en un campo de presion de frente plano, en función de la dirección z del campo.

La figura 18 ilustra cómo varía la amplitud de la FRA, de manera periódica a lo largo del desplazamiento del campo generado en la dirección z, para diferentes formas de partículas. Al analizar cada una de las gráficas presentadas en dicha figura, se observa que la amplitud de la FRA difiere entre las distintas formas de partículas. Esto se debe a que la propagación de la fuerza incidente es más eficiente en partículas con superficies más uniformes con respecto a su centro geométrico, como las formas de elipse y esfera. Por lo tanto, la magnitud de la FRA será mayor para estas formas en comparación con el cilindro y el romboide.

Además, en la figura 18, se aprecia que las mayores magnitudes de la FRA se manifiesta en los mismos puntos del campo, independientemente de la geometría de la partícula. Este fenómeno garantiza una mayor precisión en el cálculo de la FRA, ya que sugiere una consistencia en la respuesta del sistema, independientemente de la forma de la partícula, cuando se elige realizar las simulaciones con la partícula ubicada en un mismo punto .

En este capítulo se han presentado los resultados de los modelos numéricos desarrollados para estimar las fuerzas de radiación acústica (FRA), que fueron validados mediante

comparaciones con datos de la literatura y algunos resultados experimentales. Los resultados muestran una buena concordancia con estudios previos, demostrando la precisión y robustez de los modelos al estimar las fuerzas en objetos de diversas geometrías y bajo diferentes condiciones acústicas, evidenciando su utilidad para el análisis y diseño de sistemas de manipulación acústica. Con esto, se da cumplimiento al tercer y último objetivo específico, relacionado con la validación de los modelos implementados.

Conclusiones

La revisión del estado del arte demuestra el creciente interés en mejorar los métodos de cálculo de la FRA debido a su relevancia en diversas aplicaciones. A lo largo del tiempo, las aproximaciones tanto analíticas como numéricas han experimentado avances significativos, lo que ha permitido una mayor precisión en la predicción de los efectos de la FRA en diversas situaciones. Este trabajo pretende proporcionar una visión general de estos avances, facilitando futuras investigaciones tanto a nivel local como global que contribuyan al desarrollo de nuevas tecnologías aplicables en diferentes campos de la ingeniería y la vida cotidiana, como por ejemplo en la manipulación de células, o de componentes electrónicos altamente sensibles.

El trabajo empleado mostró la eficiencia de utilizar métodos de elementos finitos para determinar la FRA, comparando la solución analítica empleada por Gor'kov para partículas pequeñas, comparando con el método de perturbación que es un caso mas general en el cual se puede puede utilizar en figuras y tamaños diferentes, se mostró su similitud para el caso de una partícula esférica hasta un tamaño del 15 % de λ, a partir de aquí sus resultados comienzan a diferenciarse. Además al comparar el método de perturbación con el método semianalítico de Lorenz-Mie se mostró su similitud para diferentes tamaños de la partícula. Con esto se concluyo la eficiencia de utilizar este método, y se procedió a utilizar la misma metodología empleada para este caso sencillo para las diferentes figuras. Con las comparaciones de la variación de la FRA, en función del tamaño y de la variación del campo en dirección vertical, se evidenció que la fuerza depende de la figura a analizar, lo cual es crucial para aplicaciones como la levitación acústica, donde la estabilidad y la posición de la partícula dependen de su geometría. Por lo tanto, al calcular la FRA para partículas de un tamaño mayor a 15 % de λ, es fundamental considerar la forma de la partícula, para garantizar la efectividad del proceso.

El análisis realizado se puede extender a figuras diferentes y en dimensiones diferentes al de 2D asimétrico, como es el caso de los modelos 3D, donde se pueden emplear figuras diferentes a las de sólidos de revolución analizadas anteriormente. Se ha demostrado la similitud entre el uso de una presión de fondo y la radiación generada por radiadores

que emiten aceleración normal al emplear el método de Gor'kov. Sin embargo, se observa una diferencia significativa al aplicar estas condiciones en el contexto del método de perturbación, ya que este último tiene en cuenta la distorsión del campo debido a la fuerza reflejada por la partícula.

Trabajos futuros

Este trabajo representa un punto de partida crucial para futuras investigaciones en el ámbito de la FRA, con implicaciones relevantes para el grupo del LaVA de la Universidad del Valle en Colombia. Se identifican diversas áreas de interés que podrían beneficiar tanto a la institución académica como a la comunidad local. Algunas propuestas para trabajos futuros incluyen:

Aplicar el cálculo de la FRA en el diseño y desarrollo de dispositivos médicos de alta precisión, tales como equipos de ultrasonido o sistemas de terapia por ondas acústicas, contribuyendo así al avance de la medicina y la salud pública.

Fomentar colaboraciones interdisciplinarias con investigadores de diversas disciplinas dentro de la universidad, explorando aplicaciones innovadoras de la FRA en áreas como la manipulación de partículas en la industria farmacéutica o la ingeniería de materiales.

Realizar estudios experimentales utilizando los recursos y equipos disponibles en la universidad para validar y ampliar los resultados obtenidos en este trabajo, fortaleciendo así la base experimental de la investigación en acústica.

Promover la divulgación y transferencia de conocimiento mediante la organización de talleres y conferencias dirigidos a estudiantes y profesionales interesados en los campos de la acústica y la física aplicada, fomentando así el aprendizaje y la colaboración entre pares.

Establecer colaboraciones estratégicas con otras instituciones académicas y centros de investigación en Colombia para impulsar la investigación conjunta y facilitar el intercambio de conocimientos en el campo de la FRA, promoviendo así el desarrollo científico y tecnológico a nivel nacional.

Un área de gran interés para trabajos futuros es la manipulación de micro-fluidos. Dada la naturaleza delicada y la sensibilidad de los micro-fluidos, resulta desafiante aplicar métodos de manipulación por contacto sin riesgo de daño o contaminación. El uso de la fuerza de radiación acústica podría permitir una manipulación precisa y sin contacto, ideal para transportar y posicionar micro-gotas, células o partículas altamente sensibles. Esto abriría posibilidades significativas para aplicaciones biomédicas y de ingeniería de tejidos,

donde la preservación de la integridad celular es fundamental. Además, la precisión en el control acústico a nivel microscópico proporcionaría un avance en la micro-manipulación, ofreciendo un método fiable y no invasivo para el manejo de fluidos y partículas en sistemas complejos

Estas propuestas representan solo una muestra de los posibles trabajos futuros que podrían tener un impacto significativo en la Universidad del Valle y en la comunidad local, reafirmando el compromiso de la institución con la excelencia académica y la contribución al desarrollo socio-económico del país.

Anexos

Seccion A

Expresiones utilizadas para la adaptación de la expresión de Fuerzas generalizadas extraídas de [7].

$$p2av = 0{,}25/acpr.rho/c0^2 * realdot(acpr.p_t, acpr.p_t) - 0{,}5 * acpr.rho * acpr.v_rms^2 \quad (65)$$

$$f1densz = p2av * acpr.nz \quad (66)$$

$$f1densr = p2av * acpr.nr \quad (67)$$

$$f2densz = 0{,}5 * acpr.rho * (realdot(acpr.vz, (acpr.vr * acpr.nr + acpr.vz * acpr.nz))) \quad (68)$$

$$f2densr = 0{,}5 * acpr.rho * (realdot(acpr.vr, (acpr.vr * acpr.nr + acpr.vz * acpr.nz))) \quad (69)$$

$$Fneto = intop1(f1densz + f2densz) \quad (70)$$

Donde $\rho 0$ es la densidad del medio, c0 es la velocidad del sonido en el medio, $acpr.p_t$ es la presion total, $acpr.vz$ y $acpr.vz$ son las componentes de velocidad acustica en direccion z y r, respectivamente, $acpr.nz$ y $acpr.nr$ son las componentes del vector normal que encierra la superficie. Observando la ecaucion 12 y compararla con la ecuacion (24)

4.1.1. Seccion B

Para realizar las simulaciones implementadas en COMSOL MultiPhysics se procede a realizar los siguientes pasos.

4.2. Paso 1

Se elige el modelo a utilizar en la simulación, en este caso se utiliza Model Wizard con el fin de facilitar la construcción del modelo para la familiarización del programa de métodos numéricos COMSOL.

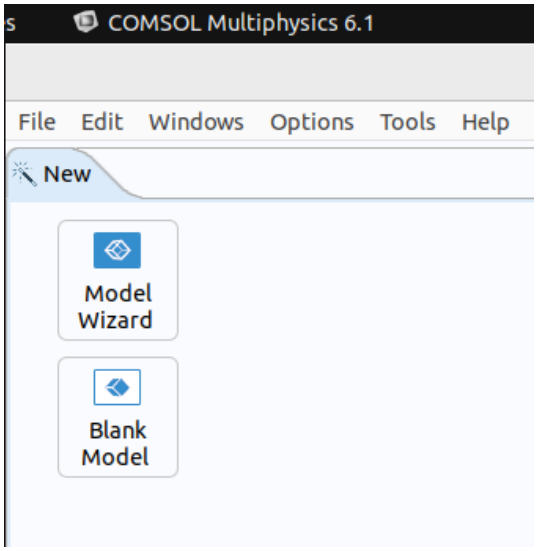

Figura 19: Entrada de COMSOL

4.2.1. Paso 2

Se elige la dimensión del espacio a utilizar, se elige 2D asimétrico aprovechando la simetría del modelo para así ahorrar costo computacional y tiempo de simulación.

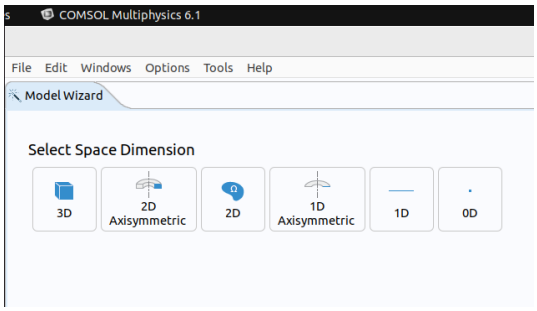

Figura 20: Espacio dimensional

4.2.2. Paso 3

Se selecciona la física a utilizar, se elige la parte de acústica en la que es de gran interés analizar la presión en el dominio de la frecuencia, también se elige mecánica de sólidos en el apartado de mecánica estructural.

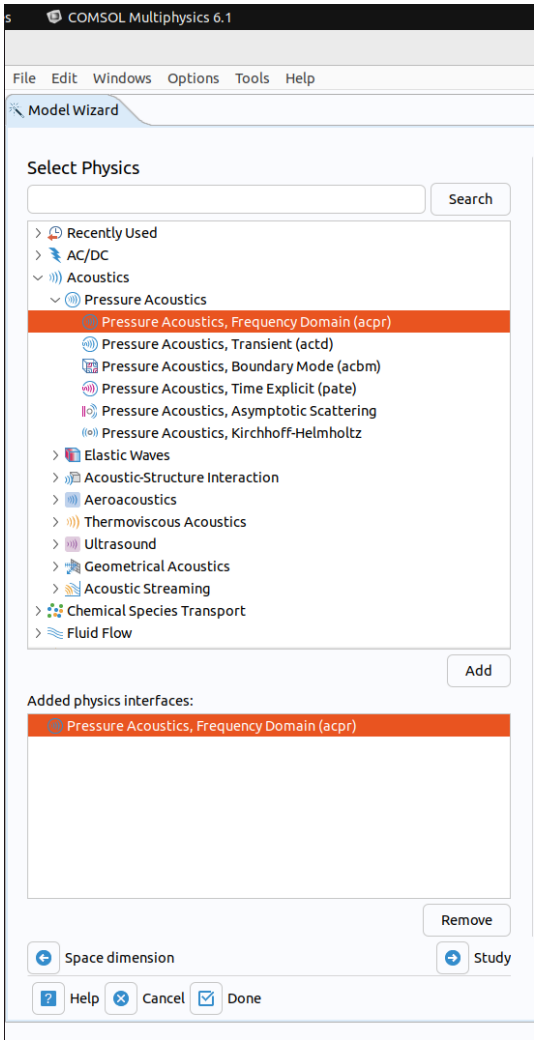

Figura 21: Acústica

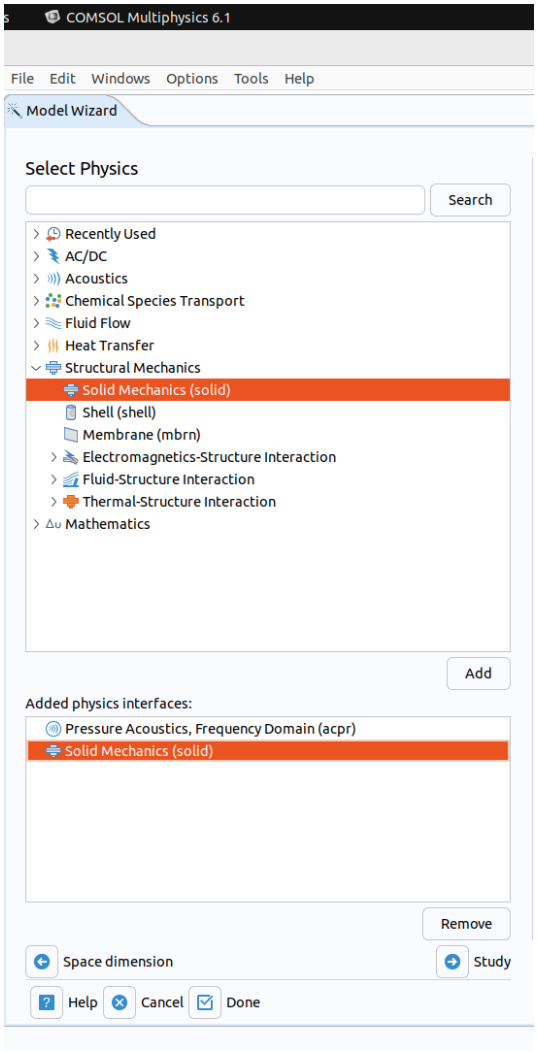

Figura 22: Mecánica de sólidos

4.2.3. Paso 4

Se selecciona el estudio de interés, en este caso simple es el dominio de la frecuencia.

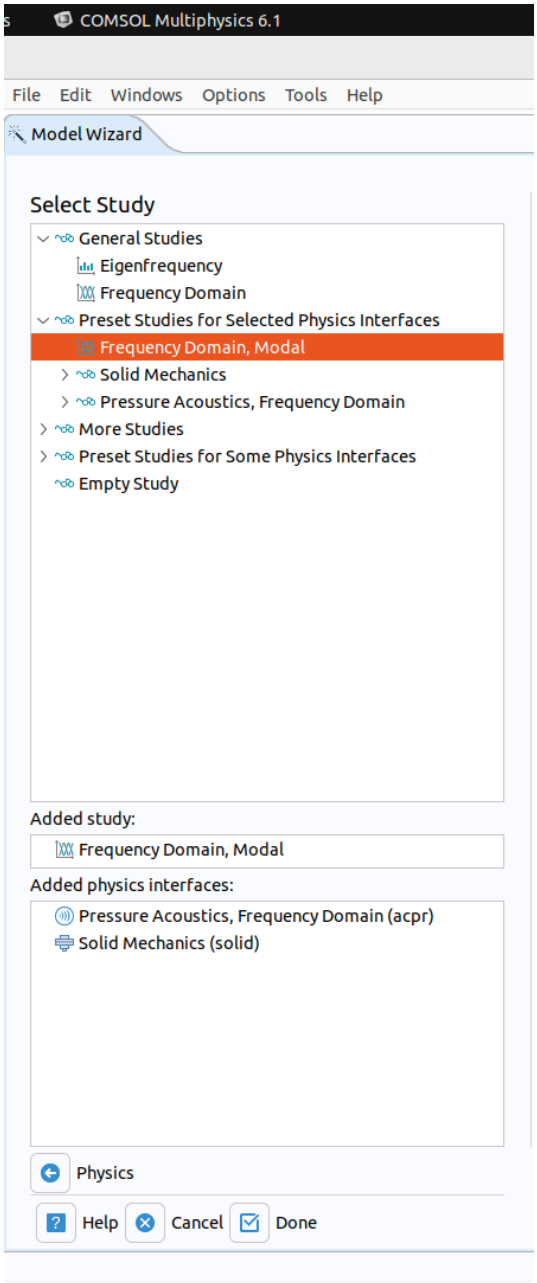

Figura 23: Dominio de la frecuencia

4.2.4. Paso 5

Una vez seleccionado el estudio de interés se procede a definir los parámetros a utilizar en la simulación en este caso se muestran un los parámetros utilizados para la simulación de la esfera.

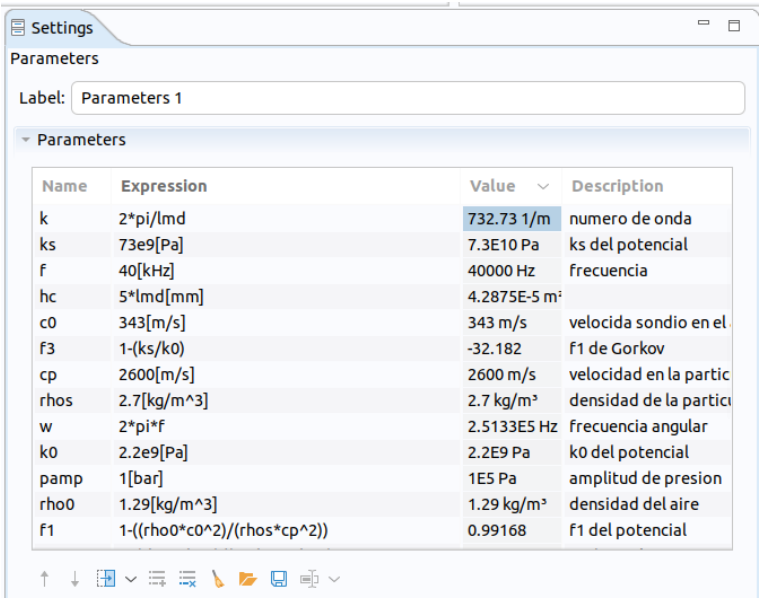

Figura 24: Parámetros

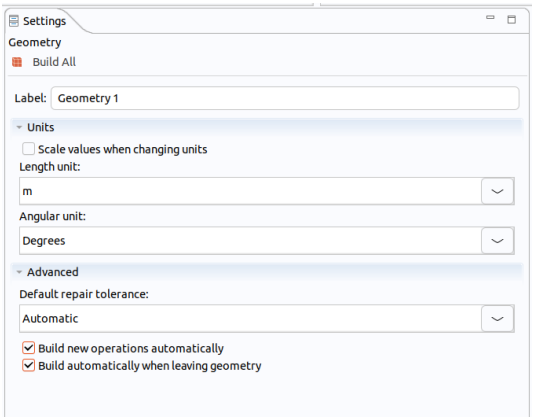

Figura 25: Unidades

4.3. Simulación para una partícula esférica utilizando el método de Gor'kov

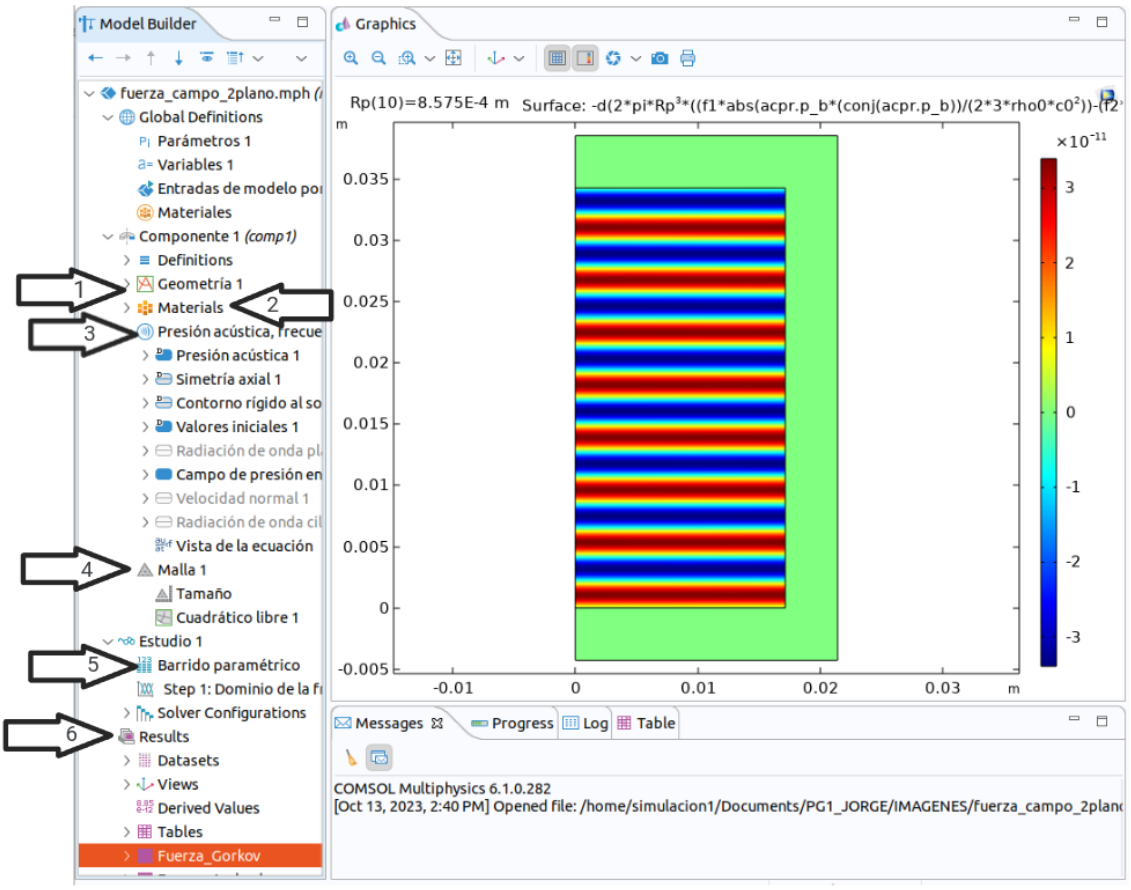

Figura 26: Primer modelo

Para el desarrollo de la simulación con el método de Gor'kov se desarrollaron una secuencia de pasos:

1. Definir la geometría del campo. Para esto se escogió dos radiadores circulares enfrentados de radio igual a la longitud de onda, estos radiadores están separados con una distancia de dos veces la longitud de onda, como el modelo se realizó en 2D axisimétrico se realiza un rectángulo de cuatro veces lambda y de ancho igual dos veces lambda, También se gráfico otro rectángulo más grande para formar una capa perfectamente ajustada la cual está desfasada del campo la mitad de la longitud de onda, esto se hace para que no halla efectos rebote de las ondas y así no interfieran con los resultados.

2. Elegir materiales del medio fluido.

Para el medio del fluido se utilizó el aire.

3. Definir las condiciones de frontera primero se define una presión de Background definida en la literatura, donde se escoge como dominio de aplicación todo el campo a excepción de la partícula para después encontrar el valor equivalente para la condición de aceleración normal.

4. Selección de malla.

De acuerdo con el análisis de sensibilidad de malla realzado se escogió una malla triangular de tamaño máximo de elementos de doce veces más pequeño que la longitud de onda.

5. En la sección de estudio se realiza un barrido paramétrico para ir variando el radio de la partícula con el fin de ver su comportamiento a medida que su tamaño se vaya incrementando, para este barrido paramétrico se escogió variar como parámetro el diámetro de la partícula,también se define la frecuencia de las ondas, que en este caso se utilizó una frecuencia de 40 KHz.

6. En la sección de resultados nos interesa ver el comportamiento del campo de presión, y el gráfico de la FRA en función del diámetro de la partícula, comportamiento que irá cambiando a medida que se incrementa su tamaño, también nos interesa ver como va cambiando la fuerza a medida que se desplaza en el campo sobre el eje z esto con el fin de conocer en que puntos puedo tener una FRA máxima.

4.4. Simulación para una partícula esférica utilizando el método de la perturbación

El segundo modelo se realizo tomando como referencia un blog de COMSOL [15], para este modelo se tomaron los parámetros definidos anteriormente.Para el desarrollo de la simulación con el método de la perturbación se desarrollaron una secuencia de pasos mostrados a continuación:

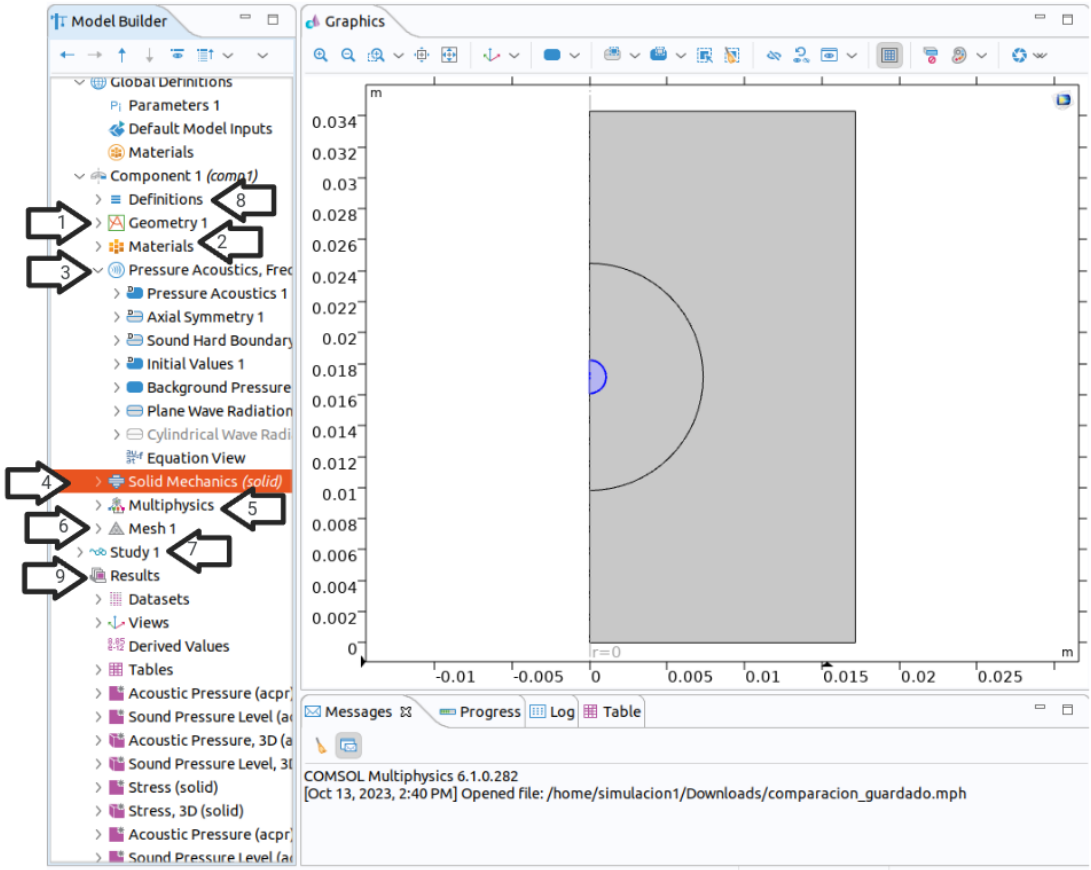

Figura 27: segundo modelo

1. Definir la geometría del campo, de la partícula y de la superficie de integración.

En el apartado de geometría se debe elegir las unidades con las que se va a trabajar, para luego definir la geometría del campo, de la esfera y de la superficie Gausiana. El radio del campo es dos veces la longitud de onda, el campo tiene una altura de 2 veces su radio, para la esfera se define un radio pequeño de la octava parte de la longitud de onda y para la superficie Gausiana su radio será la distancia escogida en el análisis

realizado en el apartado de convergencia de superficie mas el radio de la partícula esférica.

2. Elegir materiales del medio fluido y de la partícula.

para el medio del fluido se utilizó el aire y para la partícula se escogió como material el Nylon

3. Definir las condiciones de frontera. Se define una condición de aceleración normal y una condición de radiación de onda de frente plano en la pared del rectángulo.

4. En la sección de física de sólidos se elige la partícula.

5. En la sección de multifisica se selecciona los bordes de la partícula

6. Selección de malla. Se escogio la misma configuración implementada para el método de Gor'ov

7. En la sección de estudio se realiza un barrido paramétrico para ir variando el radio de la partícula igual como se hizo para el método de Gor'kov

8. Una vez que se tiene el modelo implementado en la sección de definiciones, se definen las variables a utilizar para el cálculo de la fuerza de radiación por método de la perturbación. También se define la superficie de integración donde se seleccionan sus bordes.

9. En la sección de resultados nos interesa ver el comportamiento del campo de presión el gráfico de la FRA en función del diámetro de la partícula y la FRA en función de la dirección z.

A continuación se muestran las simulaciones realizadas para las distintas figuras:

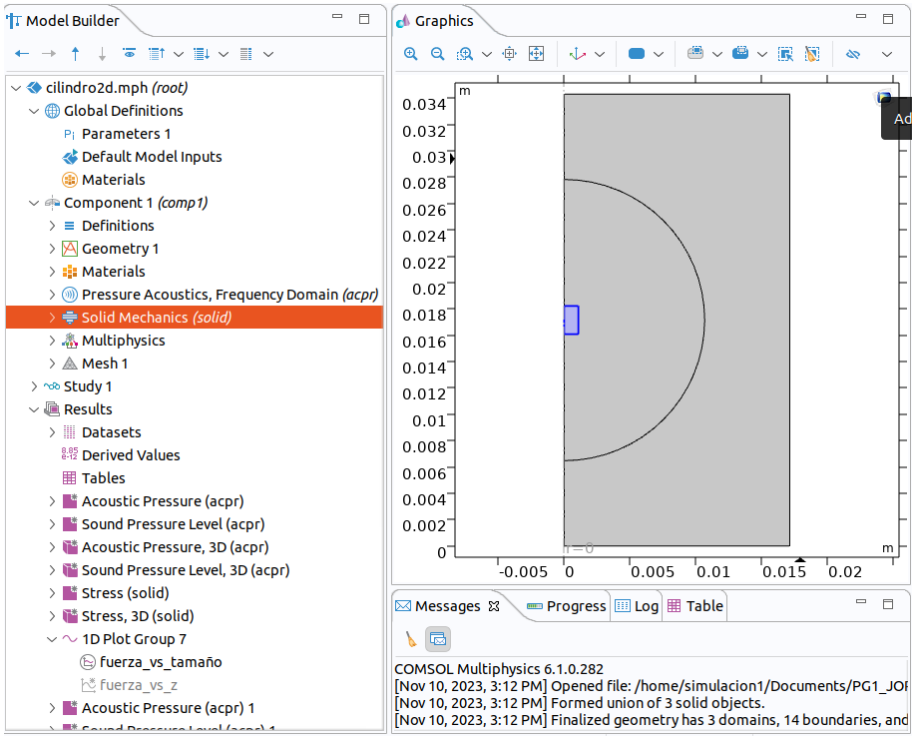

Figura 28: Modelo del cilindro

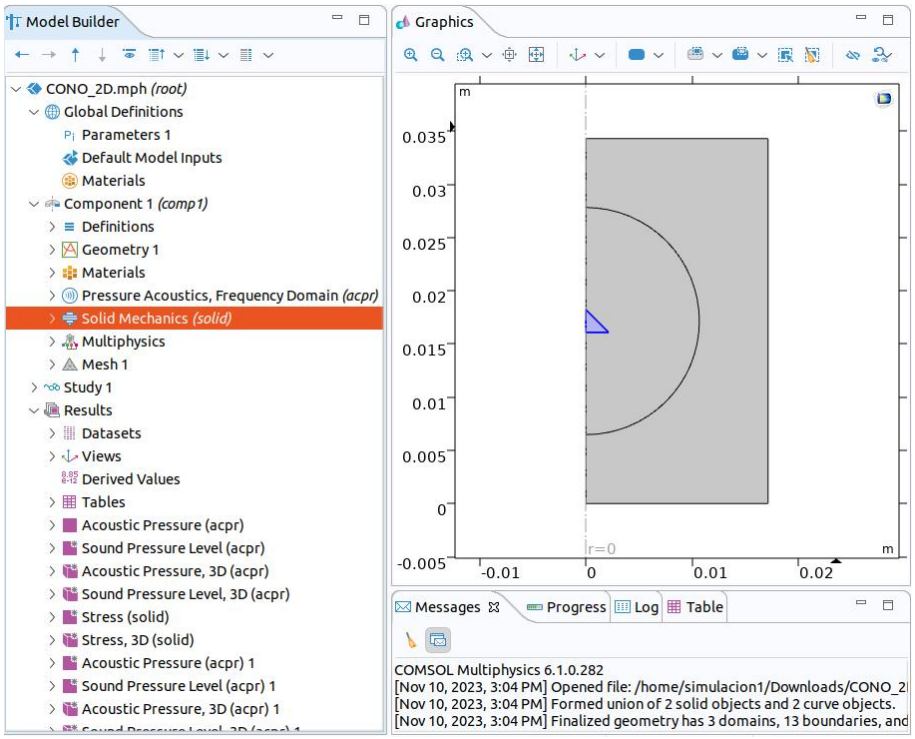

Figura 29: Modelo del cono

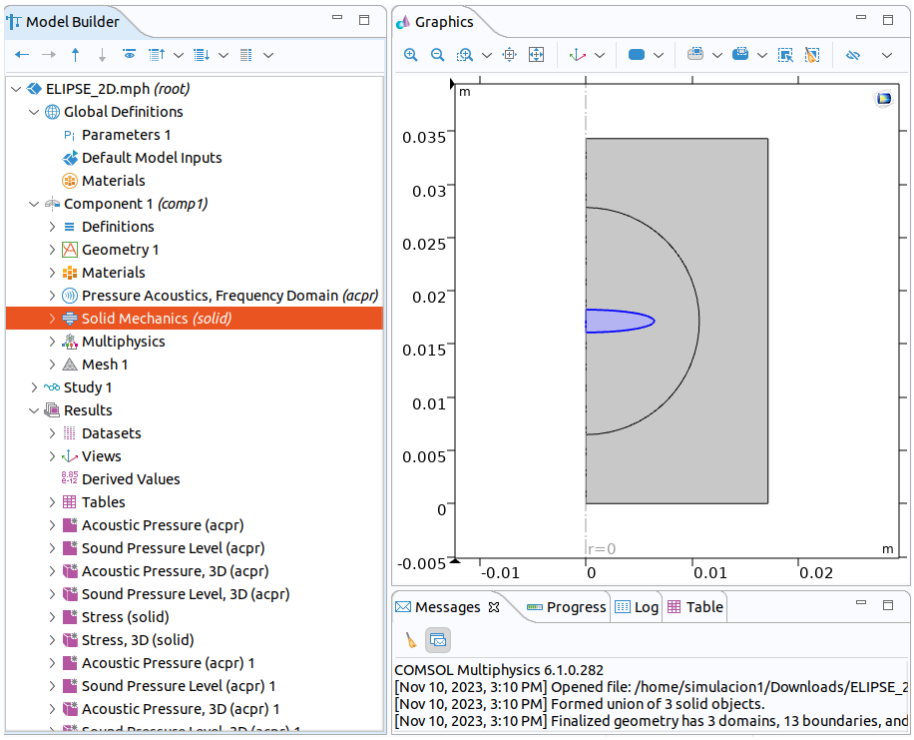

Figura 30: Modelo de elipse

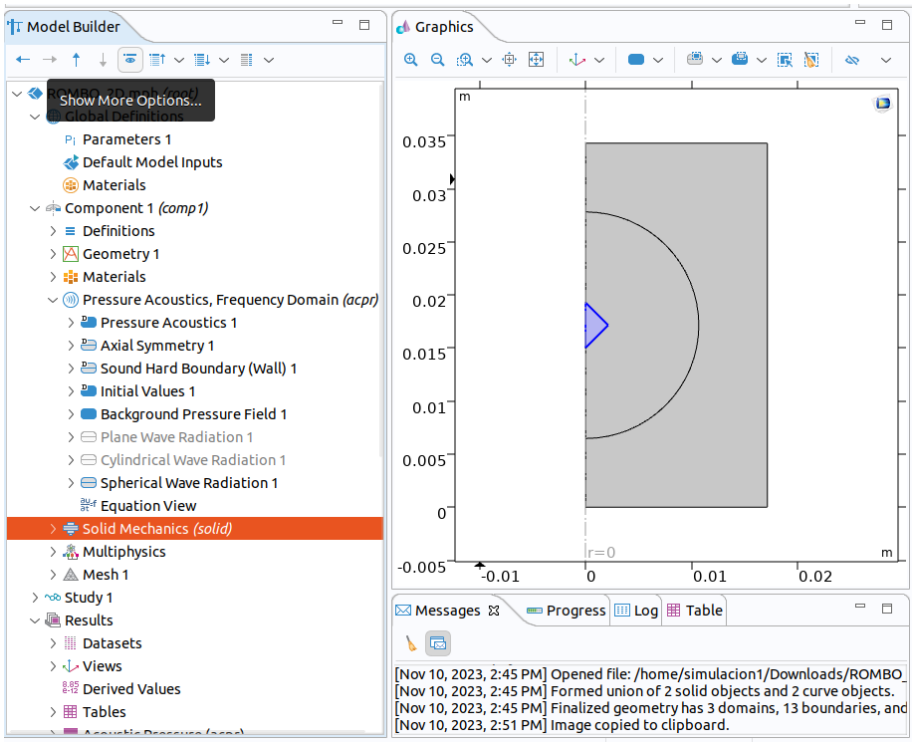

Figura 31: Modelo de romboide

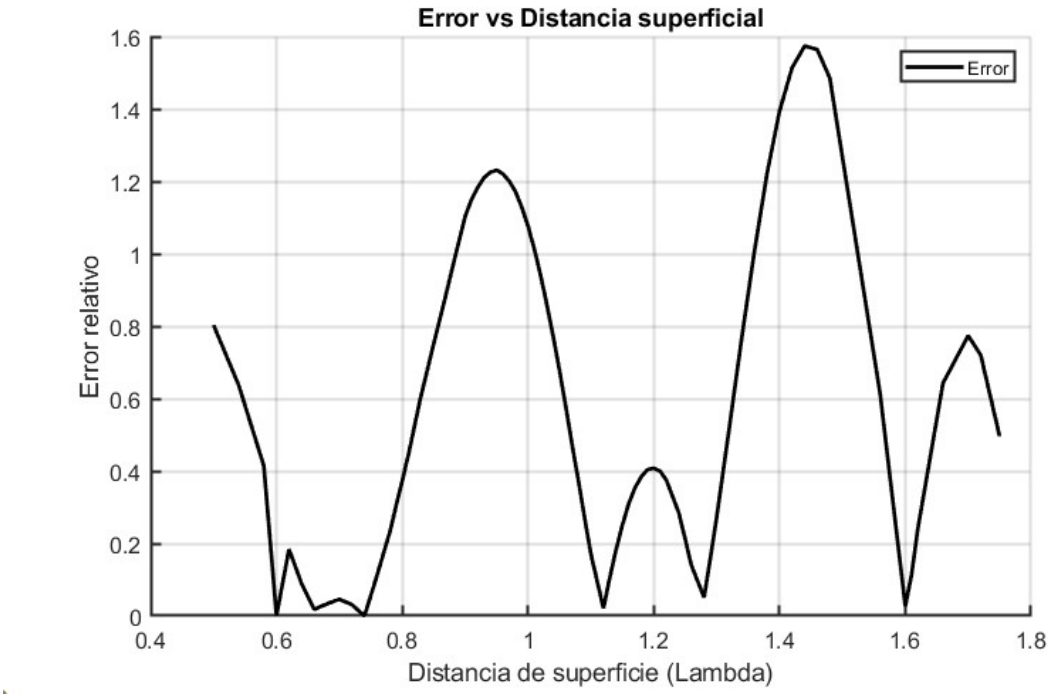

Figura 32: Error de distancia de la superficie de integración a la partícula a levitar

Referencias

[1] Marco AB Andrade, Nicolás Pérez, and Julio C Adamowski. Review of progress in acoustic levitation. *Brazilian Journal of Physics*, 48:190–213, 2018.

[2] Diego Baresch, Jean-Luc Thomas, and Regis Marchiano. Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, 133(1):25–36, 2013.

[3] Robert T Beyer. Radiation pressure—the history of a mislabeled tensor. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(4):1025–1030, 1978.

[4] Henrik Bruus. *Theoretical microfluidics*, volume 18. Oxford university press, 2007.

[5] Henrik Bruus. Acoustofluidics 7: The acoustic radiation force on small particles. *Lab on a Chip*, 12(6):1014–1021, 2012.

[6] Kejie Chen, Mengxi Wu, Feng Guo, Peng Li, Chung Yu Chan, Zhangming Mao, Sixing Li, Liqiang Ren, Rui Zhang, and Tony Jun Huang. Rapid formation of size-controllable multicellular spheroids via 3d acoustic tweezers. *Lab on a Chip*, 16(14):2636–2643, 2016.

[7] COMSOL. How to compute the acoustic radiation force, 2015.

[8] Bobby G Crawford and Daisie D Boettner. Integrating thermodynamics and fluid mechanics instruction: Practical solutions to issues of consistency. In *2011 ASEE Annual Conference & Exposition*, pages 22–917, 2011.

[9] AA Doinikov. Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 447(1931):447–466, 1994.

[10] Alexander A Doinikov. Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. ii. force on a rigid sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2):722–730, 1997.

[11] J. F. A. Espinosa. Diseño, construcción y puesta en marcha de un dispositivo tipo hal para la generación de vórtices acústicos en aire. *Universidad del Valle*, 2019.

[12] FisicaLab. Frente de Onda. https://www.fisicalab.com/apartado/frente-de-onda, Fecha de acceso: 8 de septiembre de 2023.

[13] Peter Glynne-Jones, Puja P Mishra, Rosemary J Boltryk, and Martyn Hill. Efficient finite element modeling of radiation forces on elastic particles of arbitrary size and geometry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(4):1885–1893, 2013.

[14] J. González Hernández. *Diseño y caracterización de multitransductores con arreglo en fase para generar vórtices ultrasónicos en aire*. PhD thesis, Universidad del Valle, 2013.

[15] Alon Grinenko. Como calcular la fuerza de radiacion acustica, 2015.

[16] SM Hagsäter, Andreas Lenshof, Peder Skafte-Pedersen, Jörg Peter Kutter, Thomas Laurell, and Henrik Bruus. Acoustic resonances in straight micro channels: Beyond the 1d-approximation. *Lab on a Chip*, 8(7):1178–1184, 2008.

[17] David Haydock. Lattice boltzmann simulations of the time-averaged forces on a cylinder in a sound field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(15):3265, 2005.

[18] Ashley F. Johnston, Kevin J. Trujillo, Mónica G., and Henrik Bruus. Acoustic manipulation of particles in microfluidics. *Lab on a Chip*, 2012.

[19] Louis Vessot King. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 147(861):212–240, 1934.

[20] 1908 Landau, Lev Davidovich. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, 1987.

[21] Otto Manneberg. *Multidimensional ultrasonic standing wave manipulation in microfluidic chips*. PhD thesis, KTH, 2009.

[22] Asier Marzo and Bruce W. Drinkwater. Holographic acoustic tweezers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(1):84–89, dec 2018.

[23] Asier Marzo, Sue Ann Seah, Bruce W Drinkwater, Deepak Ranjan Sahoo, Benjamin Long, and Sriram Subramanian. Holographic acoustic elements for manipulation of levitated objects. *Nature communications*, 6(1):8661, 2015.

[24] Thomas J. Matula. Single-bubble sonoluminescence in microgravity. *Ultrasonics*, 38(1-8):559–565, mar 2000.

[25] Adrian Neild, Stefano Oberti, Albrecht Haake, and Jürg Dual. Finite element modeling of a microparticle manipulator. *Ultrasonics*, 44:e455–e460, 2006.

[26] Occupational Safety and Health Administration. Occupational noise exposure. https://www.osha.gov/noise, 2022.

[27] Jhon F Pazos Ospina, Victor Contreras, Jordan Estrada-Morales, Diego Baresch, Joao Luis Ealo, and Karen Volke-Sepúlveda. Particle-size effect in airborne standing-wave acoustic levitation: Trapping particles at pressure antinodes. *Physical Review Applied*, 18(3):034026, 2022.

[28] J. F. Pazos. Exploración de nuevas alternativas para la generación de vórtices acústicos y su potencial aplicación en la manipulación de partículas. Master's thesis, Universidad del Valle, 2016.

[29] Asier Marzo Perez. Holographic acoustic elements for manipulation of levitated particles: Applications to human-computer interaction. 2016.

[30] P. S. Pershan and J. P. Kirkwood. Dielectric effects in electrophoresis. *The Journal of Chemical Physics*, 1952.

[31] Lord Rayleigh. Xxxiv. on the pressure of vibrations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 3(15):338–346, 1902.

[32] O. G. Rodríguez-Herrera, C. Arzate-Vázquez, and K. Volke-Sepúlveda. Optical trapping and manipulation of nanostructures. *Journal of Optics*, 2019.

[33] Thomas Schwarz. *Rotation of particles by ultrasonic manipulation.* PhD thesis, ETH Zurich, 2013.

[34] John William Strutt and John William Strutt Rayleigh. *The theory of sound*, volume 1. Macmillan, 1877.

[35] RJ Townsend, M Hill, NR Harris, and NM White. Investigation of two-dimensional acoustic resonant modes in a particle separator. *Ultrasonics*, 44:e467–e471, 2006.

[36] Jingtao Wang and Jurg Dual. Numerical simulations for the time-averaged acoustic forces acting on rigid cylinders in ideal and viscous fluids. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(28):285502, 2009.

[37] A. L. Yarin, M. Pfaffenlehner, and C. Tropea. On the acoustic levitation of droplets. *Journal of Fluid Mechanics*, 356:65–91, feb 1998.

[38] Yasuo Yoshikawa and Kazuo Nakajima. Magnetic manipulation techniques in experimental systems and biochemistry. *Bioscience, Biotechnology, and Biochemistry*, 2002.

[39] Kawashima Yosioka and Yukihiko Kawasima. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acta Acustica united with Acustica*, 5(3):167–173, 1955.

[40] Yuqing Zhu, Vahid Serpooshan, Sean Wu, Utkan Demirci, Pu Chen, and Sinan Güven. Tissue engineering of 3d organotypic microtissues by acoustic assembly. pages 301–312, 2017.

