



Modelo de retícula para la comprensión del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en los naturales

Jhon Stiven Delgado Ramos - 1824989

Miguel Angel Mayor Mutis - 1824986

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de ciencias, tecnologías y culturas
Licenciatura en Matemáticas
2024



Modelo de retícula para la compresión del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en los naturales

Jhon Stiven Delgado Ramos - 1824989

Miguel Angel Mayor Mutis - 1824986

Proyecto de Trabajo de Grado Presentado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Director de trabajo de grado

Mg. Jose Luis Vásquez Tigreros

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de ciencias, tecnologías y culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024

Dedicatoria

Primeramente a Dios, quien ha sido siempre nuestra fuente de sabiduría y fortaleza, por guiarnos en cada paso de este camino y por brindarnos la oportunidad de alcanzar este logro. Gracias por ser nuestro guía y refugio en los momentos más difíciles de este proceso y por bendecirnos con el don de la paciencia, conocimiento y la sabiduría.

A nuestras queridas familias, cuyo amor incondicional y apoyo constante han sido el pilar fundamental en todo este proceso educativo. Sin su ayuda, este logro no hubiera sido posible. A nuestros padres, hermanos y seres queridos, quienes con sus palabras de aliento, sacrificios y comprensión han hecho posible la realización de este sueño. Este logro también les pertenece a ustedes, por estar siempre presentes inspirándonos a dar lo mejor de nosotros.

A la universidad, por proporcionarnos el entorno adecuado para crecer tanto académica como personalmente. A los profesores y compañeros, gracias por su dedicación, enseñanzas y compañerismo, que han sido esenciales en esta etapa de nuestra formación como docentes.

Con profunda gratitud y aprecio,

Jhon Stiven Delgado Ramos y Miguel Ángel Mayor Mutis.

Índice de contenido

Resumen	8
Introducción	9
1. Aproximación al problema	11
1.1 Descripción del problema	11
1.2 Objetivos	14
1.2.1 Objetivo General	14
1.2.2 Objetivos Específicos	14
1.3 Justificación	15
1.4 Antecedentes	19
1.4.1 Estudios relacionados al concepto de retícula como modelo de representación.	19
1.4.2 Estudios relacionados con las dificultades en el tratamiento del MCM Y MCD (Divisibilidad)	25
2. Marco teórico	28
2.1 Análisis Didáctico	28
2.1.1 Análisis Conceptual	29
2.1.2 Análisis de Contenido	30
2.1.3 Análisis Cognitivo	31
2.1.4 Análisis de Instrucción	32
2.1.5 Análisis Evaluativo	32
2.2 Unidad Didáctica	34
2.3 MCM, MCD y Divisibilidad en N	36
2.4 La retícula como sistema gráfico de representación	37
2.4.1 Funcionamiento, Alcances y Beneficios del Modelo de Retícula	40
3. Marco metodológico	43
3.1 Método de Análisis Didáctico como metodología de Investigación	44
3.1.1 Análisis conceptual sobre el MCM y MCD (Divisibilidad) en N	45
3.1.2 Análisis de contenido sobre el MCM y MCD (Divisibilidad) en N	49
3.1.2.1 Modelos de representación del MCM y MCD (Divisibilidad)	54
3.1.3 Análisis cognitivo	59
3.1.4 Análisis de instrucción	65
3.2 Hallazgos en la implementación de la UD	66
3.2.1 Análisis de contenido	66
3.2.2 Análisis Cognitivo	81
3.2.3 Análisis de Instrucción	91
4. Conclusiones y Reflexiones finales	108
4.1 Conclusión en relación al Diseño de la UD	108
4.2 Conclusiones en relación a la Implementación de la UD	111

4.3 Reflexiones finales-----	112
Referencias bibliográficas-----	120
Anexos-----	123

Índice de figuras

Figura 1. Gráfico de retícula del número 2000.-----	20
Figura 2. Diagrama del Análisis Didáctico y organizativo del currículo. -----	33
Figura 3. El modelo de retícula para el número 8.-----	41
Figura 4. El modelo de retícula para el número 24.-----	41
Figura 5. El modelo de retícula para el número 60 -----	42
Figura 6. Diagrama de Hasse para la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$.-----	47
Figura 7. Estructura conceptual de divisibilidad.-----	50
Figura 8. Relaciones de divisibilidad entre a y b cuando $a : b$ es exacta. -----	51
Figura 9. Relaciones de divisibilidad para la terna de números (6,4,24). -----	51
Figura 10. Diagrama de Hasse para $D(p^\alpha)$.-----	56
Figura 11. Diagrama $D(p^\alpha q^\beta)$. -----	57
Figura 12. Diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$.-----	57
Figura 13. Diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$.-----	58
Figura 14- Respuesta a problema 1 de la actividad diagnóstica estudiante E1.-----	67
Figura 15. Respuestas a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica estudiante E2.-----	68
Figura 16. Respuestas a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica estudiante E4.-----	68
Figura 17. Respuesta al problema 3 de la actividad evaluativa estudiante E6.-----	69
Figura 18. Respuesta al problema 4 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E2 -----	69
Figura 19. Respuesta al problema 4.1 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E2. -----	70
Figura 20. Respuesta al problema 4 de la actividad diagnóstica, estudiante E2. -----	72
Figura 21. Respuesta al problema 5 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E3. -----	73
Figura 22. Gráfico del número 6, estudiante E2. -- -----	75
Figura 23. Gráfico del número 8, estudiante E4. -----	75
Figura 24. Respuesta estudiante E4. -----	76
Figura 25. Respuesta estudiante E1.-----	76
Figura 26. Respuesta estudiante E6. -----	76
Figura 27. Respuesta al problema 3 de la actividad diagnóstica, esquema de descomposición E7. -----	77

Figura 28. Respuesta al problema 1 de la actividad evaluativa, estudiante E10.	77
Figura 29. Respuesta a problema 1, actividad evaluativa, estudiante E3.	78
Figura 30. Respuest a problema 1, actividad diagnostica, estudiante E11	80
Figura 31. Respuesta problema 1 de la actividad evaluativa , estudiante E10.	80
Figura 32- Respuesta problema 1 de la actividad evaluativa , estudiante E17.	81
Figura 33. Respuesta problema 1 de la actividad diagnóstica , estudiante E15.	83
Figura 34. Respuesta problema 1 de la actividad diagnóstica , estudiante E9.	84
Figura 35. Respuesta problema 1 inciso a y b de la actividad diagnóstica , estudiante E13.	84
Figura 36. Respuesta problema 3 de la actividad diagnóstica, esquema de descomposición del 40, estudiante E1. —	85
Figura 37. Respuesta problema 1 de la prueba diagnóstica, estudiante E7. —	85
Figura 38. Respuesta problema 4 de la prueba diagnóstica, estudiante E12. —	85
Figura 39. Respuesta problema 4.1 de la prueba diagnóstica, estudiante E12. —	86
Figura 40. -Respuesta del problema 1 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E6. —	86
Figura 41. Problemas en blanco. —	86
Figura 42. Respuesta del problema 2 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación , estudiante E6. —	87
Figura 43. Respuesta del problema 2 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación , estudiante E8 —	87
Figura 44. Respuesta del problema 2 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación , estudiante E6 —	87
Figura 45. Descomposición prima del 6	89
Figura 46. Bola con el número 1. —	89
Figura 47. Palito equivalente a multiplicar por 2.	89
Figura 48. Palito equivalente a multiplicar por 3.	89
Figura 49. Gráfico de los factores 1 y 2. —	89
Figura 50. Gráfico de los factores 1,2 y 3.	90
Figura 51. Retícula del número 6.	90
Figura 52. Gráfico de los factores 1,2,3 y 5.	91
Figura 53. Respuesta a problema 1 de la actividad diagnóstica, estudiante E4.	92
Figura 54. Respuesta a problema 1 de la actividad diagnóstica, estudiante E13.	92
Figura 55. Respuesta a problema 1 inciso c) y d) de la actividad diagnóstica, estudiante E4.	93
Figura 56. Múltiplos de los números 6,10,15.	93
Figura 57. Descomposición del número 40.	93
Figura 58. Respuesta al problema 1 de la actividad diagnóstica, estudiante E4.	94
Figura 59. Respuesta a la actividad 2.	94
Figura 60. Respuesta a la actividad 3 por E10.	95
Figura 61. Respuesta a la actividad 4 por E5.	95

Figura 62. Representación del 6 en el modelo de retícula.-----	96
Figura 63. Representación del 8 en el modelo de retícula.-----	96
Figura 64. Representación del 12 en el modelo de retícula. -----	96
Figura 65. Representación del 18 en el modelo de retícula.-----	97
Figura 66. Reflexión de E8 acerca de la actividad.-----	97
Figura 67. Modelo de retícula del número 14.-----	97
Figura 68. Modelo de retícula del número 24.-----	98
Figura 69. Modelo de retícula del número 60.-----	98
Figura 70. Modelo de retícula del número 48.-----	98
Figura 71. Respuesta actividad de completar modelo de retícula.-----	99
Figura 72. Respuesta a la actividad Representación del número 36.-----	99
Figura 73. Respuesta acerca del MCM y MCD.-----	99
Figura 74. Descomposición del 18 y 36.-----	100
Figura 75. Descomposición del número 27.-----	100
Figura 76. Descomposición del número 36.-----	100
Figura 77. Descomposición del número 54.-----	101
Figura 78. Reflexión acerca del ejercicio por E9.-----	101
Figura 79. Modelo de retícula del 3 y el 5.-----	101
Figura 80. Descomposición de los números 15 y 21 con su modelo de retícula.-----	102
Figura 81. Explicación de la representación de números mediante el modelo de rejilla -----	104
Figura 82. Descomposición y modelo de retícula del número 27.-----	104
Figura 83. Ejercicio número 2 de la actividad.-----	105
Figura 84- Modelo de retícula de 3 y 5.-----	105
Figura 85. Respuesta de E8 ejercicio de descomposición y modelo de retícula de 15 y 21.-----	105
Figura 86. Participación de E2 respondiendo el ejercicio 2.-----	106

Resumen

Este proyecto tiene como finalidad el diseño de una unidad didáctica fundamentada en el modelo local de análisis didáctico para la enseñanza del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, a través de un enfoque visual de modelos de retículas. La investigación se sitúa dentro de un paradigma cualitativo, el cual permite una revisión de documentos obtenidos de los estudiantes durante la implementación de la unidad didáctica en la institución educativa Normal Superior Farallones de Cali, Valle del Cauca.

El objetivo es identificar evidencias de comprensión sobre las relaciones numéricas del MCM y MCD en los estudiantes a través de su interacción con las actividades propuestas en la Unidad Didáctica. Para ello, se diseña y fundamenta una secuencia de tareas basadas en modelos de retículas, desde una perspectiva curricular, didáctica y epistemológica. Estas actividades están diseñadas para promover la comprensión de los conceptos matemáticos mencionados, así como el desarrollo de competencias y saberes desde el análisis didáctico.

La estructura de la unidad incluye actividades diagnósticas, de desarrollo y exploración, así como evaluativas, todas orientadas a consolidar el conocimiento de los estudiantes sobre estas relaciones numéricas. Estas actividades permiten observar y analizar las respuestas y registros de los estudiantes, con el fin de describir los alcances y limitaciones en su comprensión de las relaciones entre el MCM y el MCD.

Palabras claves: *Representación visual, MCM y MCD, divisibilidad, evidencias de comprensión, enfoque visual, modelo de retícula.*

Introducción

Este trabajo se ubica en el campo del pensamiento numérico y sistemas numéricos, teniendo como objetivo identificar evidencias de comprensión sobre las relaciones numéricas de MCM y MCD para facilitar la comprensión del MCM y MCD a través del uso del modelo de retícula, en los alumnos de grado sexto A de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali. La enseñanza de estos conceptos frecuentemente enfrenta obstáculos pedagógicos, lo que afecta el desempeño académico y la comprensión de la matemática. Por tanto, este trabajo se propone caracterizar estos conceptos y relaciones a través del diseño de una unidad didáctica, que incorpore la retícula como modelo de representación visual y posibilite intervenciones estructuradas en el aula, de tal forma que permita el análisis de la misma conforme al estudio propuesto.

La investigación se estructura en cuatro secciones iniciando con la problemática identificada y algunos aspectos relacionados a esta. La aproximación al problema aborda inicialmente la descripción de la problemática, destacando los desafíos actuales en la enseñanza de la divisibilidad y su impacto en la comprensión del MCM y MCD. A partir de este análisis, se formulan tanto el objetivo general como los objetivos específicos. Asimismo, se justifica la relevancia de la investigación y se analizan antecedentes que exploran, por un lado, el uso de la retícula como modelo de representación visual y, por otro, las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de la divisibilidad y los conceptos del MCM y MCD.

En el Marco teórico se incluye un análisis didáctico que se desglosa en varios análisis como el conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluativo, cada uno de los cuales fundamenta el uso del modelo de retícula en el contexto de la enseñanza del MCM y MCD.

En el Marco metodológico, se utiliza el método de análisis didáctico como metodología de investigación, analizando, caracterizando y describiendo los conocimientos y desempeños que se desarrollan con el modelo de retícula a través de diferentes fases de implementación y análisis, como el análisis conceptual, de contenido, cognitivo e instruccional sobre el MCM y MCD, así como la evaluación del impacto de la unidad didáctica en el rendimiento y la comprensión de los estudiantes.

Además, como parte de los anexos se presenta la unidad didáctica diseñada con diferentes situaciones y tareas de acuerdo a un nivel de complejidad que posibilita recopilar información para describir los desempeños y conocimientos asociados a ella . Esta unidad se estructura para guiar a los estudiantes en la construcción de un pensamiento matemático ágil, promoviendo una comprensión de los conceptos y relaciones a través del uso de la retícula como sistema gráfico de representación con ayuda de las actividades propuesta, donde se proponen tres tipos de actividades: una diagnóstica, una actividad de exploración y desarrollo, y finalmente, una actividad evaluativa.

Finalmente, los hallazgos y conclusiones del trabajo se presentan mediante un análisis de la documentación recolectada de los estudiantes a partir de la implementación de la unidad didáctica, para luego discutir los alcances, limitaciones y posibles recomendaciones en futuras intervenciones con esta propuesta.

1. Aproximación al problema

En este capítulo abordaremos ideas y argumentos esenciales para comprender, caracterizar y presentar el problema asociado con el significado y representación de la divisibilidad en los números naturales y facilitar la comprensión de los conceptos de MCM y MCD a partir de un enfoque de representación visual basado en un modelo de retícula¹. Dicha comprensión se plantea a partir de la representación del MCM y MCD a través de modelos de retícula para desarrollar sentido acerca de los múltiplos y divisores de hasta dos números.

A continuación, se describen algunas ideas relacionadas con el problema de comprender, identificar y usar con sentido el MCM y MCD en situaciones abordadas en el problema de investigación considerado, posteriormente, se definen los objetivos, justificación y antecedentes que sitúan el problema en relación con el diseño de tareas mediante una unidad didáctica considerada en el marco del Análisis didáctico.

1.1 Descripción del problema

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, particularmente sobre los números naturales, sus aplicaciones y operaciones, se espera que los estudiantes comprendan el significado, uso e importancia de la divisibilidad. Sin embargo, en la práctica, a menudo se recurre a métodos tradicionales que enfatizan en la mecanización de fórmulas, procedimientos y conceptos que requieren memorizar procedimientos basados en la repetición de algoritmos de acuerdo con Bodí, Valls y Llinares (2005). Estos métodos tradicionales a menudo resultan en una actitud pasiva por parte de los estudiantes y eso en gran medida al uso o trabajo a través de una

¹ Modelo de representación de números enteros para la obtención del MCM y MCD

misma forma de representación, lo que conlleva al alumno a no lograr una verdadera comprensión y conceptualización del concepto matemático.

Ahora bien sobre el aprendizaje de la divisibilidad, Bodí, Valls y Llinares (2007) mencionan que existen varios problemas asociados a la comprensión de la divisibilidad por parte de estudiantes de secundaria, entre los que se destacan:

- Los estudiantes tienden a asociar los conceptos de divisor y múltiplo con las operaciones de dividir y multiplicar respectivamente, mostrando una comprensión incompleta y principalmente procedimental.
- Dificultad para establecer las equivalencias lógicas entre ser divisible, ser múltiplo, ser factor y ser divisor; los estudiantes no comprenden bien estas relaciones que definen el esquema de divisibilidad.
- No comprenden bien la descomposición en factores primos, lo cual dificulta entender la "indivisibilidad" y relacionarla con la divisibilidad.
- Aquellos estudiantes que logran coordinar criterios de divisibilidad y comprender bien el MCD y MCM tienen mayor éxito en resolver tareas de divisibilidad.

Al respecto, Molina y Castro (2015) expresan que uno de los principales problemas de la divisibilidad, es que los estudiantes a veces no logran comprenderla como una relación entre números, sino solo como una división exacta, es decir, entienden que un número es divisible por otro número, pero no llegan a conceptualizar la divisibilidad como una relación, además de que tampoco suelen reconocer que la divisibilidad establece una relación entre dos números: un número es divisible por otro número, no la ven como una conexión o vínculo matemático entre dos cantidades numéricas.

Debido a esto los estudiantes, cometen errores como intentar hallar divisores o múltiplos haciendo todas las divisiones posibles con cada número, en lugar de simplemente analizar las relaciones de divisibilidad o no logran identificar rápidamente si un número es divisible por otro mediante reglas y propiedades, porque no han comprendido la esencia relacional de la divisibilidad.

Esto tiene incidencia directa en la comprensión y el cálculo del MCD y MCM pues: Para hallar el MCD entre varios números, se deben identificar los divisores comunes más grandes. Si no se comprende bien la divisibilidad, puede ser difícil reconocer estos divisores comunes, del mismo modo, para el MCM es necesario identificar los múltiplos comunes más pequeños entre varios números, si falla la comprensión de la divisibilidad no se podrán reconocer fácilmente estos múltiplos. Tanto para el MCD como el MCM a menudo se aplican descomposiciones factoriales que limitan el reconocimiento de todos los divisores al descomponer en factores.

En cuanto a lo curricular y a la práctica docente, se pueden identificar algunos problemas en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad, el MCM y el MCD:

Respecto a la planificación, discurso y a las tareas diseñadas por el docente Castro y Molina (2015) argumentan que estos no trabajan adecuadamente la comprensión conceptual de la divisibilidad antes de abordar el MCM y MCD, no se dedica suficiente tiempo a desarrollar el significado del MCM y MCD en situaciones concretas.

Estos datos subrayan la necesidad de abordar los desafíos relacionados con la comprensión de propiedades y relaciones numéricas, como el MCD y el MCM para mejorar el rendimiento educativo en el país.

De acuerdo con la problemática descrita anteriormente, este estudio busca indagar sobre la pregunta problema que se plantea a continuación:

¿Qué alcances y/o limitaciones de comprensión sobre el MCM y MCD se identifican en situaciones propuestas en una Unidad Didáctica con un enfoque visual de modelo de retículas que se implementa con estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Identificar evidencias de comprensión sobre las relaciones numéricas de MCM y MCD a partir de una secuencia de tareas de una Unidad Didáctica basada en un enfoque visual de modelos de retículas, que se desarrolla con un grupo de estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Fundamentar la secuencia de tareas de la Unidad Didáctica basada en un enfoque visual de modelos de retículas a partir de referentes didácticos, curriculares, epistemológicos y fenomenológicos
- Caracterizar la secuencia de tareas basada en un enfoque visual de modelos de retículas para determinar los saberes, comprensiones y competencias desde la mirada del Análisis Didáctico en relación con el MCM y MCD

- Describir los alcances y limitaciones de comprensión sobre las relaciones numéricas de MCM y MCD a partir de los registros de los estudiantes y sus intervenciones frente a las tareas propuestas en la Unidad Didáctica.

1.3 Justificación

En los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) se reconoce el pensamiento numérico y los sistemas numéricos como ejes fundamentales en la educación matemática, ya que proporcionan bases conceptuales sólidas y herramientas necesarias para comprender y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos. Además, el desarrollo progresivo de estas habilidades a lo largo de la educación primaria y secundaria permite a los estudiantes adquirir una comprensión más sólida de los números, las operaciones y sus aplicaciones. Es por ello, que los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) para el desarrollo del pensamiento numérico y los sistemas numéricos enfatizan en la comprensión de los números y la numeración, la comprensión del concepto, las operaciones y los cálculos con números, así como la aplicación de números y operaciones. Estos dos últimos aspectos retomados en las situaciones propuestas en la Unidad didáctica de este estudio.

De acuerdo con los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) históricamente, la aritmética se centra en el sistema indo-arábigo, pero en el siglo XX se amplió a otros sistemas numéricos como enteros, racionales, reales y complejos lo que creó desafíos didácticos que surgen de la necesidad de enseñar esta variedad de sistemas de números y conceptos más abstractos, así como también a la necesidad de adaptarse a los cambios históricos en la forma en que se representan y operan los números. Es por ello, que los educadores deben buscar la forma de abordar estos desafíos de manera efectiva, para garantizar que los estudiantes logren adquirir una comprensión más sólida de las matemáticas a lo largo de su formación. Un

ejemplo de estos desafíos se encuentra en la introducción a la divisibilidad entre números naturales en relación con el MCM y el MCD, especialmente, en la comprensión de conceptos relacionados con la factorización y las propiedades de los números naturales, pues este proceso implica la necesidad de identificar y comprender la descomposición de los números en factores primos.

Por lo general, los estudiantes se enfrentan al reto de buscar qué método les permite encontrar estas relaciones, lo que representa para el estudiante el uso de habilidades de pensamiento lógico y abstracto. Asimismo, los estudiantes deben ser capaces de resolver problemas matemáticos que involucren la divisibilidad y el uso de estas relaciones en diversas situaciones y contextos, lo que a menudo requiere de una comprensión sólida de las propiedades de los números naturales.

En este contexto, es importante que la enseñanza de sistemas numéricos junto con sus propiedades, relaciones y operaciones se realice de manera progresiva a lo largo de la educación básica y media, permitiendo que los estudiantes aborden en cierto sentido la evolución histórica de las propiedades y relaciones numéricas durante su proceso formativo. La propuesta de trabajar un concepto matemático no solo a través de un solo registro como tradicionalmente se hace con el tratamiento del MCM y MCD, permite a los estudiantes comprender y utilizar propiedades y relaciones numéricas de manera más significativa, además de que el manejo de diversos registros de representación por parte de los estudiantes también es importante para lograr una comprensión de los objetos matemáticos más consciente.

Proponer modelos, enfoques o registros de un mismo objeto que fundamenten su eficacia en la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos a través de un registro visual, como se plantea en el modelo de retícula, es de gran relevancia para el aprendizaje del

alumno. Este enfoque proporciona una representación visual única para cada número, basándose en la descomposición en factores primos. Esto permite a los estudiantes visualizar y manipular estas representaciones, lo que facilita la comprensión de relaciones y propiedades multiplicativas, como la factorización prima.

Al respecto Duval (2004) afirma que para lograr la conceptualización, o lo que podríamos considerar “aprendizaje” el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica ya sea a través de gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. Duval plantea que el aprendizaje genuino no se logra solamente a través de procesos mentales internos, sino que requiere de manera inseparable la capacidad de emplear y transitar entre diversos sistemas semióticos de representación externa.

En particular también menciona que la verdadera comprensión de un concepto matemático requiere coordinar al menos dos registros de representación distintos, pues si un estudiante sólo se enfoca en un único registro, como el algebraico, no logrará captar todas las facetas y propiedades del concepto, limitando su aprendizaje a un nivel más superficial.

Es por lo anterior que la propuesta de un enfoque basado en modelos de retícula se vuelve relevante, pues este enfoque al utilizar múltiples registros de representación, permite a los estudiantes abordar los conceptos desde diferentes perspectivas, lo que facilita una comprensión más profunda y completa. Al incorporar elementos visuales, gráficos y simbólicos, el modelo de retícula ofrece una herramienta para ayudar a los estudiantes a visualizar y conectar conceptos abstractos, como la divisibilidad, con situaciones concretas y contextualizadas.

Además, este enfoque promueve el desarrollo de habilidades de razonamiento visual y espacial, lo que puede ser especialmente beneficioso en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos como el MCD y el MCM en la escuela.

Una ventaja que llega a hacer clave de este modelo visual, radica en su capacidad para ayudar a los estudiantes a descubrir y comprender teoremas matemáticos al explorar las construcciones visuales, un ejemplo de ello es que los estudiantes pueden visualizar que cualquier número con una cantidad impar de factores es un cuadrado perfecto. Esto contribuye al desarrollo de la intuición y el sentido numérico en relación con la estructura multiplicativa de los números naturales.

Por otra parte, en términos didácticos el modelo de retícula se presenta como una herramienta que puede abordar importantes desafíos en la enseñanza de matemáticas, especialmente en aquellos que se encuentran relacionados con la comprensión de las propiedades y de relaciones numéricas.

En resumen, este modelo de retícula se presenta como una herramienta que puede llegar a ser valiosa en la enseñanza de las matemáticas, facilitando la comprensión y uso de propiedades y relaciones numéricas propias de los números y la numeración a través de representaciones visuales, lo que contribuye significativamente a la mejora del proceso educativo en términos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas generando que los estudiantes más allá de que hagan uso de los conceptos matemáticos, interioricen y relacionen con la vida cotidiana los pensamientos matemáticos.

1.4 Antecedentes

Los antecedentes presentados en este estudio revelan una estrecha relación con el trabajo propuesto, enmarcado en el campo de la Educación Matemática. Se evidencia la presencia de dificultades y desafíos en el proceso de aprendizaje de los conceptos de MCD y MCM, lo que justifica la importancia de explorar alternativas pedagógicas y didácticas pertinentes.

En particular, se destacan investigaciones que proponen el uso de modelos de representación visual como la retícula para representar los números naturales y sus relaciones multiplicativas, facilitando así la comprensión de estos conceptos matemáticos. La pertinencia de estos antecedentes radica en la necesidad de abordar las dificultades en la enseñanza de la divisibilidad y desarrollar estrategias efectivas que promuevan una comprensión más profunda de los conceptos de MCD y MCM. De esta manera, los antecedentes proporcionan el fundamento teórico y empírico necesario para justificar la investigación propuesta y orientar la búsqueda de soluciones que mejoren el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se tratan algunas problemáticas.

1.4.1 Estudios relacionados al concepto de retícula como modelo de representación.

Dias (2005) describe un modelo manipulativo alternativo propuesto por Grossi (en su informe *Novo jeito de ensinar matemática: começando pela divisão*, 2000) llamado “modelo de retícula” basado en los diagramas de Hasse, el cual representa visualmente los números naturales y sus relaciones multiplicativas. Este tipo de modelos suelen llegar a ser muy útiles para entender y visualizar relaciones numéricas del MCD y MCM.

Este modelo consiste en esferas de poliestireno y palitos de madera pintados de diferentes colores para representar los diferentes números primos y se etiquetan con los valores

correspondientes. Por ejemplo, para modelar el número $2000 = 2^4 \times 5^3$, se toman 4 palitos rojos que representan al primo 2 y se colocan en secuencia. En los extremos se fijan esferas etiquetadas como 1, 2, 4, 8 y 16. Luego se hace lo mismo con 3 palitos azules representando a 5, 25 y 125. Así se forma una retícula con todos los factores de un número

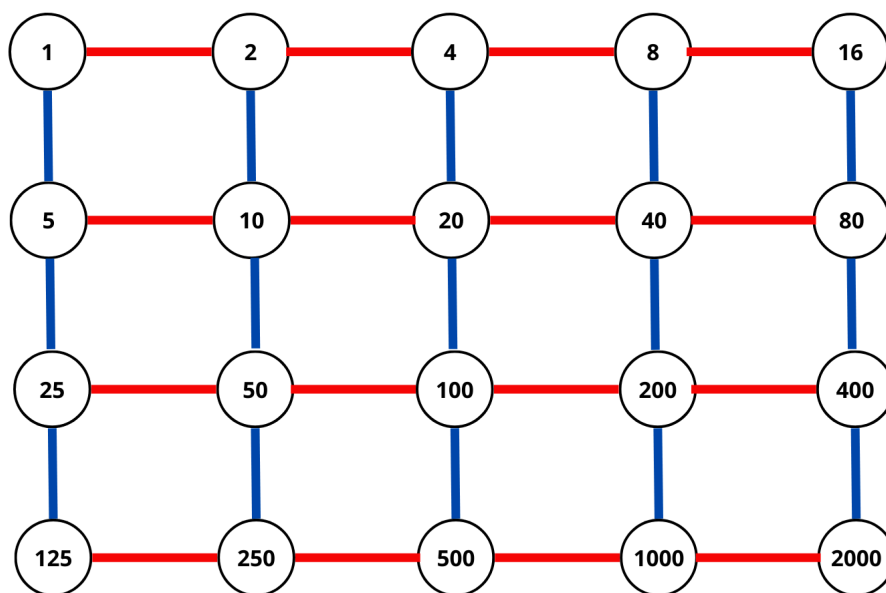


Figura 1- Gráfico de retícula del número 2000

Igualmente, Días (2005) menciona que los estudiantes a menudo se encuentran con dificultades para entender la estructura multiplicativa de los números naturales, especialmente cuando se trata en su forma factorial, los autores argumentan que múltiples representaciones como este tipo de modelos pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar un entendimiento más robusto de estos conceptos matemáticos.

Lo anterior, gracias a las propiedades de estos modelos, propiedades como

- La factorización prima única de cada número entero
- Las relaciones multiplicativas básicas (multiplicación y división)

- Conmutatividad de la multiplicación
- Asociatividad de la multiplicación
- Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma
- Concepto de factores de un número
- Concepto de múltiplos de un número
- Cálculo del MCD como la intersección de factores comunes
- Cálculo del MCM como la retícula más pequeña que contiene las retículas originales

Días (2005) menciona que el modelo refleja y permite trabajar convincentemente con “relaciones y propiedades de los números enteros positivos”, haciendo énfasis particular en la unicidad de la factorización prima, las operaciones básicas, el MCD y el MCM. Resaltando la naturaleza visual y manipulativa del modelo al facilitar poner en juego y razonar sobre estas propiedades fundamentales de la estructura multiplicativa de manera más intuitiva.

Además, Días (2011) menciona que algunos de los beneficios del uso de este modelo en el aprendizaje de las matemáticas son:

- Proporciona una representación visual única de cada número, basada en su descomposición en factores primos.
- Permite visualizar fácilmente relaciones y propiedades multiplicativas de los números, así como la unicidad de la factorización prima.
- Facilita descubrir y comprender teoremas al explorar las construcciones, como que todo número con cantidad impar de factores es un cuadrado perfecto.
- Ayuda a desarrollar una intuición y “sentido numérico” de la estructura multiplicativa de los números naturales.

- Los primos se convierten en “ladrillos” visuales para construir el modelo único de cada número, complementando la perspectiva aditiva.
- Aunque los modelos complejos pueden parecer difíciles, las construcciones físicas son sencillas y entretenidas para los estudiantes.
- Llena un vacío en la representación física de las propiedades multiplicativas de los números, tan importante como la perspectiva aditiva.

En pocas palabras, Días (2011) afirma que el modelo de retícula ofrece importantes beneficios conceptuales y pedagógicos para el entendimiento y aprendizaje de la estructura multiplicativa de los números naturales de forma visual e intuitiva la cual le permite al estudiante tener un mejor acercamiento a estos objetos.

En este mismo sentido, Mishra (2017), describe el uso de este mismo modelo de retícula para la enseñanza de matemáticas y detalla un estudio cualitativo llevado a cabo para evaluar su efectividad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El estudio se llevó a cabo en 40 estudiantes de octavo grado y 5 profesores de dos escuelas de la región de Koraput en la India. Los profesores recibieron capacitación sobre el uso de estos modelos de retícula para enseñar y abordar los conceptos de MCD y MCM, luego dieron una clase utilizando este método a los grupos de estudiantes seleccionados.

Al finalizar, se realizaron una serie de entrevistas estructuradas tanto a los profesores como a los estudiantes para conocer sus percepciones y actitudes. El 92,5% de los estudiantes manifestó haber disfrutado aprender con los modelos y sentirse más motivado trabajando con este modelo. El 85% de los participantes dijo haber comprendido mejor los conceptos.

Los profesores también valoraron positivamente la experiencia de enseñanza con modelos, aunque el 80% tuvo dificultades para planificar las clases y pidió más capacitación al respecto.

En conclusión, el estudio cualitativo llevado a cabo por Mishra (2017) , encontró que los modelos de retícula son una herramienta útil para incrementar la motivación y el interés de los estudiantes. Los resultados del estudio apoyan el uso de materiales manipulativos y el de las representaciones visuales como los modelos de retícula para hacer el aprendizaje de las matemáticas más significativo para los estudiantes.

Por su parte, Zainea (2019) en su trabajo presenta un estudio detallado donde explora el uso de representaciones gráficas llamadas diagramas de Hasse para visualizar la relación de divisibilidad entre los números naturales. Específicamente, se asocian conjuntos de divisores de la forma $D(n)$, donde $n =$ producto de potencias de primos distintos, con estos diagramas de Hasse particulares. Se descubre que varios de estos diagramas poseen propiedades de ordenamiento como ser retículos al tener ínfimo y supremo. A partir de ello, la autora define una relación de equivalencia basada en la superposición de diagramas que induce clases de equivalencia en los números naturales.

El trabajo también se centra en el estudio de propiedades sobre la forma y estructura de estos diagramas, como la cantidad de niveles y de elementos en cada nivel, encontrando patrones y regularidades en diferentes casos.

En esta misma perspectiva, el utilizar representaciones visuales y gráficas para el aprendizaje de conceptos algebraicos se encuentra respaldo en afirmaciones como las de Zimmermann y Cunningham (1991) quienes consideran que las matemáticas deben trabajar con

elementos no estrictamente algebraicos, pues se pueden incluir elementos de carácter espacial, verbal, lógico e intuitivo, procurando implementar la visualización y restaurarla a partir de modelos representables, puesto que la visualización es una forma de actuar en la que se presta atención a aquellas representaciones gráficas que desvelan las relaciones abstractas de la idea matemática que se estudia, con el fin de conseguir una destreza matemática en su manejo.

Es importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de las nuevas estrategias basadas en representaciones que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, la construcción de un concepto se dará a través la coordinación, libre de contradicciones, de diferentes sistemas semióticos de representación relacionados con el concepto en cuestión.

El beneficio más importante que se puede obtener a través de este enfoque es que cambiará la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas como una materia entretenida en lugar de una aburrida. Sin embargo, hay que señalar que el uso del modelo no es una solución mágica, sino una herramienta con enormes capacidades, particularmente cuando los manipulativos físicos se combinan con manipuladores virtuales coincidentes para involucrar a los estudiantes en el pensamiento y discurso matemático compartido. (Mishra, O. 2017).

Es así como la importancia de los objetos representados gráficamente toman relevancia dentro del aprendizaje significativo del estudiante, dando lugar al desarrollo de ciertas habilidades, tal y como Zimmermann y Cunningham afirman, no sólo se admite que la habilidad de visualizar relaciones matemáticas puede ser adquirida (Zimmermann y Cunningham, 1991), sino que el hecho de mejorar la educación visual en Matemáticas da lugar a un aumento de la intuición, a la vez que proporciona al alumnado una mayor capacidad de entendimiento (Cunningham, 1991).

Por otro lado, De Guzmán dice que los conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación de los mismos para la resolución de los problemas de campo (De Guzmán, 1996).

En resumen, los autores, a través de los estudios mencionados, destacan el potencial de los diagramas y la capacidad de cada modelo o registro de representación. Esto se debe a su facilidad para codificar visualmente propiedades algebraicas de orden, proporcionándoles herramientas para definir relaciones de equivalencia y particiones basadas en este tipo de representación. Por esta razón, la documentación presentada aquí se enfoca en la sustentación y justificación de la importancia del modelo de retícula como modelo de representación visual.

1.4.2 Estudios relacionados con las dificultades en el tratamiento del MCM Y MCD (Divisibilidad)

En este contexto un estudio realizado por Martínez, González y Sotos (2015) centrado en abordar estas dificultades en la comprensión y el aprendizaje de la divisibilidad, específicamente en relación del MCD y MCM, en donde este estudio analiza el nivel de competencia de los estudiantes en formación para profesores al resolver problemas verbales que involucran estos conceptos y evalúa cómo las palabras clave en los enunciados de estos problemas influyen en las respuestas proporcionadas por los estudiantes.

Los resultados de esta investigación revelan que los estudiantes para profesor enfrentan dificultades al determinar cuándo aplicar el MCD o el MCM en la resolución de problemas verbales y que la presencia de las palabras “máximo” y “mínimo” en los enunciados no ejerce

una influencia adecuada en sus decisiones. Además, muchos estudiantes no parecen comprender completamente las nociones esenciales de múltiplos y divisores cuando se enfrentan a problemas asociados a las relaciones mencionadas.

En resumen, estos hallazgos arrojados en Martínez, González y Sotos (2015) resaltan la necesidad de abordar las dificultades en la enseñanza de la divisibilidad y desarrollar estrategias de enseñanza más efectivas que ayuden a los estudiantes a comprender mejor la aplicación práctica de los conceptos de MCM y MCD. Esto implica explorar e identificar en qué etapa del proceso educativo del estudiante se produce esta falta de comprensión, para así mismo diseñar y proponer modelos visuales que promuevan una comprensión más profunda de estas relaciones matemáticas.

Por su parte Pulgarín (2016) en su proyecto de aula para la enseñanza de la Divisibilidad en el grado sexto, en la Institución Educativa Tulio Ospina, de la ciudad de Medellín, identificó dificultades comunes, entre las cuales se incluyen la falta de comprensión en relación con la divisibilidad entre dos números y la confusión entre los conceptos de múltiplo, divisor y divisible. Los estudiantes a menudo tienden a mezclar estos conceptos, lo que puede complicar la resolución de problemas relacionados con el MCD y el MCM.

Nortes y Nortés (2019) investigan sobre las estrategias que utilizan los futuros maestros en la resolución de problemas de divisibilidad, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm). Encontraron que antes de recibir formación sobre divisibilidad, la estrategia más común era descomponer números en factores primos. Sin embargo, después de la formación, pasó a aplicar los algoritmos de MCD y MCM. Aproximadamente 1 de cada 4 estudiantes no sabía si aplicar MCD o MCM, incluso después de la formación en 2º año del magisterio, lo cual

resulta preocupante. En 4º año, después de más formación matemática, mejoraron los resultados, aunque persisten dificultades en un grupo. Los autores concluyen que se debe insistir más en la enseñanza de resolución de problemas de divisibilidad usando diversos procedimientos para una mejor comprensión en los futuros maestros (Nortes y Nortes, 2019).

Los estudios consultados abordan principalmente el uso de modelos visuales, específicamente el modelo de retícula, para la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con la divisibilidad, el MCD y el MCM. Se exploraron los beneficios de estos modelos en la comprensión de la estructura multiplicativa de los números naturales, destacando su capacidad para representar visualmente relaciones numéricas complejas. Además, se investigaron las dificultades que enfrentan los estudiantes y futuros maestros en la comprensión y aplicación de estos conceptos, así como las estrategias utilizadas para resolver problemas asociados con dichos conceptos y relaciones numéricas.

Sin embargo, en la revisión consultada no se aborda la integración de estos modelos visuales con propuestas educativas específicas, ni se exploran las posibles desventajas o limitaciones del uso de estos modelos. Además, no se describe el impacto sobre el uso de estos modelos para la comprensión y aprendizaje de los estudiantes, así como la combinación de este recurso con otras estrategias de enseñanza para favorecer el aprendizaje matemático.

2. Marco teórico

Durante este capítulo, nos adentraremos en conceptos básicos que fundamentan la propuesta de Modelo local del análisis didáctico, una perspectiva entendida como un dispositivo que posibilita orquestar los conocimientos didácticos identificados a través de los organizadores propios del Análisis Didáctico que sustentan la propuesta concretada en la Unidad Didáctica entendida aquí como un dispositivo de concreción, reflexión-crítica y formación de profesores que orientan los aprendizajes y comprensiones del área de matemáticas, específicamente en relación a la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos como los del MCM y MCD, conceptos muy relevante dentro de la Didáctica de la Matemática. Esta perspectiva nos proporcionará herramientas fundamentales para comprender y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar, y tiene como objetivo principal fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, la aplicación de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. A continuación, se describen cuatro componentes claves que se destacan en relación con el marco teórico.

2.1 Análisis Didáctico

El análisis didáctico es un método propio de la Didáctica de la Matemática que se fundamenta en disciplinas como la historia, las matemáticas, la filosofía y la ciencia cognitiva; otorgándole una base interdisciplinaria. Su objetivo principal es fundamentar, dirigir y sistematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos en el contexto escolar, es decir, busca darles una base sólida a estos procesos. Para ello, emplea técnicas específicas como: a) el análisis conceptual, el cual examina rigurosamente las definiciones y conceptos matemáticos involucrados. b) Análisis de contenido, el cual estudia de

forma sistemática los materiales educativos. c) Análisis didáctico, el cual tiene un carácter cíclico e integrador, con componentes de análisis y síntesis conceptual. d) Análisis de instrucción, el cual se refiere a la transformación y adaptación de las consideraciones realizadas en los análisis previos y e) Análisis evaluativo, donde se lleva a cabo el análisis de los resultados que se obtuvieron en los procesos de enseñanza y aprendizaje. De esta manera, se utiliza de forma integrada categorías propias de las matemáticas y de la educación para interpretar significados e intenciones educativas. Este método se aplica al estudio de textos, normas y relatos sobre la enseñanza de las matemáticas generados por educadores matemáticos, con el fin de fundamentar, dirigir y sistematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático en las escuelas. El análisis didáctico se emplea en currículos escolares y planes de formación docente, proporcionando un medio para su mejora. Este método sistemático e integrador propio de la Didáctica de la Matemática busca comprender y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las escuelas, ofreciendo una herramienta valiosa en el ámbito curricular, profesional e investigador.

2.1.1 Análisis Conceptual

El análisis conceptual es un método teórico no empírico que profundiza en la comprensión de conceptos a través de una definición precisa, la exploración de su evolución histórica y ejemplos de uso, esto con el fin de establecer una base más precisa y clara sobre la cual llevar a cabo análisis de tipo didácticos.

Algunas de las características que distinguen a este tipo de análisis conceptual son:

- Indaga sobre principios al examinar de forma rigurosamente definiciones y ejemplos del uso de conceptos y términos con el propósito de lograr una precisión y claridad en su significado.

- Hace una revisión de la evolución histórica y de los diversos usos de un concepto y además hace uso de técnicas como ejemplos, contraejemplos, analogías y evocaciones en lugar de cuantificaciones o pruebas formales.
- Se basa en planteamientos de filosofía, epistemología e historia de la ciencia, y pretende detectar inconsistencias debidas a la falta de precisión conceptual.
- El análisis conceptual contextualiza las definiciones dentro del área de conocimiento correspondiente y precede y proporciona fundamentos al posterior análisis didáctico.
- Es una herramienta de reflexión imprescindible para educadores e investigadores en Didáctica de la Matemática.

2.1.2 Análisis de Contenido

El análisis de contenido es un método que examina sistemáticamente las dimensiones cuantitativas y cualitativas de los contenidos de comunicación. En el campo de las matemáticas escolares, esta técnica es útil para estudiar la diversidad de significados de conceptos y procedimientos matemáticos. El grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (DDM-PN) ha aplicado el análisis de contenido utilizando categorías basadas en la organización curricular y el significado de los conceptos escolares.

Este enfoque se concentra en examinar los significados atribuidos a conceptos y procedimientos matemáticos en textos, empleando categorías que abarcan aspectos conceptuales, formales, representacionales y fenomenológicos. La utilidad del análisis de contenido se extiende a la creación y evaluación de textos, la identificación de sesgos, e interpretación del conocimiento matemático histórico. También permite seleccionar áreas clave del conocimiento matemático escolar relacionadas con el tema de estudio, para establecer prioridades de aprendizaje.

El análisis de contenido sigue una serie de pasos sistemáticos, como la categorización, cuantificación e interpretación de contenidos escritos, que posibilitan el estudio en profundidad de materiales mediante el examen de sus contenidos semánticos y estructura interna.

2.1.3 Análisis Cognitivo

El análisis cognitivo en educación matemática se enfoca en examinar las competencias, errores y dificultades que se pueden presentar en el proceso de aprendizaje.

Este enfoque utiliza tres categorías principales.

- La primera categoría se refiere a las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, examinando la profundidad con la que están abordando los temas y si este nivel coincide con lo establecido en el sistema educativo. Se requiere identificar prioridades cognitivas en cada nivel, determinar sus objetivos y alcance, y organizar su relación con los contenidos.
- La segunda categoría se centra en las dificultades y errores, tanto teóricos como experimentales, que surgen en el aprendizaje, para comprender cómo superarlos.
- La tercera categoría analiza las tareas que plantean retos a los estudiantes para que aprendan de sus errores. Examina las tareas matemáticas en relación con los contenidos y expectativas de aprendizaje.

2.1.4 Análisis de Instrucción

El análisis de instrucción se refiere a la transformación y adaptación de las consideraciones realizadas en los análisis previos (análisis conceptual de contenido y análisis cognitivo) a las condiciones específicas de un marco de enseñanza, como un aula, un centro educativo o un proyecto de diseño de materiales escolares.

El análisis de instrucción busca responder a la pregunta de cómo y cuándo se lleva a cabo la formación, y se ocupa de aspectos como las funciones y tipos de tareas, la secuenciación de las mismas, los materiales y recursos utilizados, y la organización y gestión del trabajo en el aula.

2.1.5 Análisis Evaluativo

Este análisis permite llevar a cabo una evaluación de los resultados del proceso de enseñanza y aprendizaje, esto gracias a la utilización de categorías relacionadas con criterios e instrumentos de evaluación, interpretación de los resultados y toma de decisiones para mejorar el proceso. En síntesis este proporciona información sobre los logros, el desarrollo cognitivo de los estudiantes y las áreas de mejora.

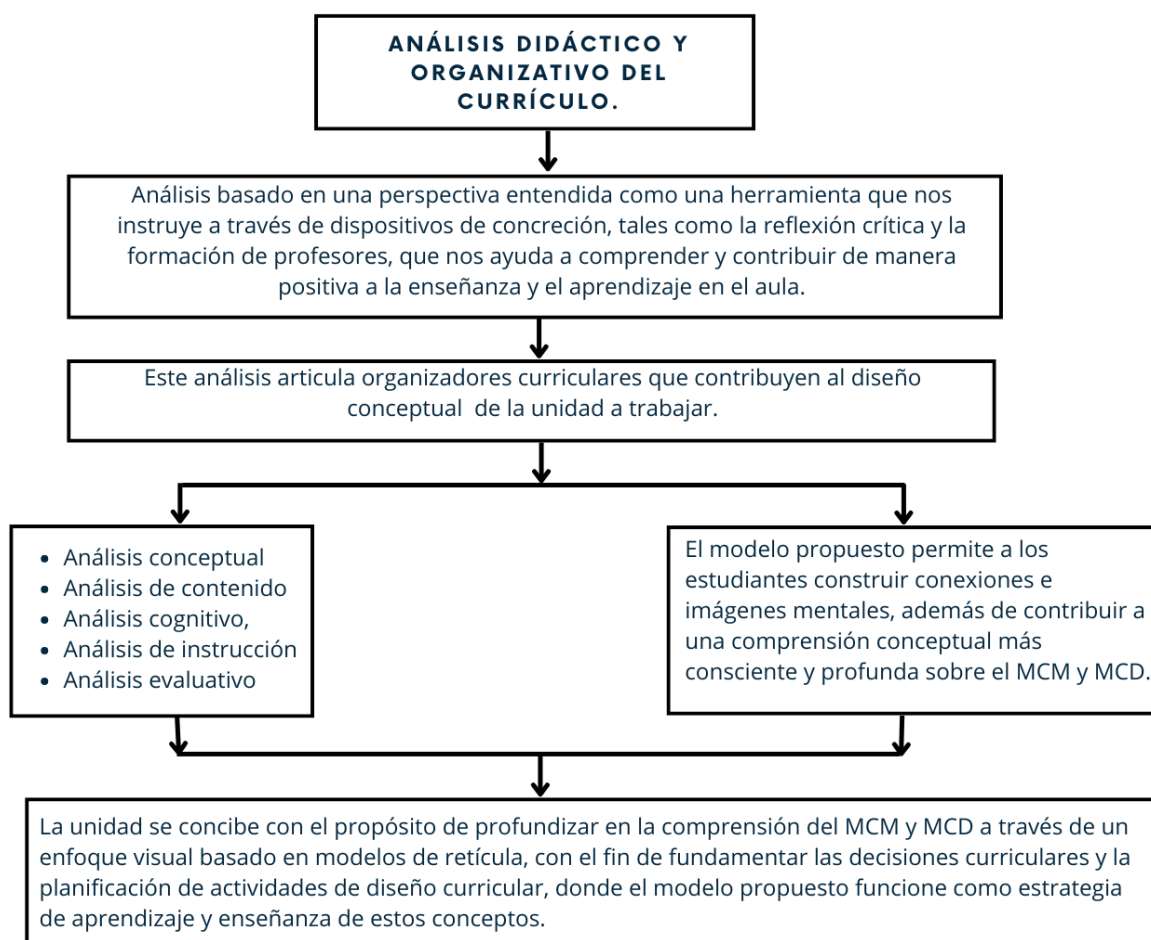


Figura 2.— Diagrama del Análisis Didáctico y organizativo del currículo

En conclusión, los análisis expuestos anteriormente se encuentran vinculados y se integran en un Modelo local de análisis didáctico, este modelo se aplicará a través de un modelo gráfico visual de retículas específico para la enseñanza y aprendizaje del MCM y MCD, cuya finalidad es facilitar una planificación curricular más significativa y contextualizada. Esta aproximación busca enriquecer la comprensión y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos matemáticos particulares en el entorno escolar.

2.2 Unidad Didáctica²

El proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en el aula se ve influenciado por dispositivos o mecanismos que favorecen la organización de los contenidos escolares a partir de situaciones o fenómenos que posibilitan la comprensión de los objetos matemáticos dispuestos en el currículo escolar. En este estudio se propone a partir de unidades de formación y de trabajo, estas unidades se denominan Unidades didácticas. Al respecto, Rico y Segovia (2001) describen una unidad didáctica como un estudio profundo de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que sirve para fundamentar las decisiones curriculares y de planificación de actividades de diseño curricular a nivel local. Este es un proceso amplio que va desde el análisis conceptual hasta las formas de intervención didáctica en el aula de clases que permite diseñar unidades coherentes y ajustadas al objetivo de conseguir un aprendizaje significativo en el estudiante.

Al respecto Rico y Segovia (2001) Sugieren algunas pautas y criterios fundamentados en los organizadores del currículo para el diseño de unidades didácticas de las matemáticas en primaria, a partir de una estructura organizativa de una Unidad didáctica donde se abordan diferentes aspectos relacionados con la planificación y organización de unidades didácticas de las matemáticas:

- Los organizadores del currículo, tales como los objetivos, la fenomenología, los sistemas de representación, la metodología, así como las dificultades y errores en el aprendizaje, se describen detalladamente. Cada uno de estos elementos se explican en términos de su contenido y función, destacando cómo pueden orientar efectivamente el diseño de unidades didácticas.

² La Unidad Didáctica descrita en este estudio se presenta como parte de los anexos de este informe

- Objetivos: deben orientarse al dominio conceptual y procedimental, al conocimiento de sistemas de representación, a la modelización, a la familiaridad con contextos de aplicación y al control de errores y dificultades.
- Fenomenología: se refiere a los fenómenos y situaciones del mundo real de donde surgen los conceptos matemáticos. Se debe considerar para motivar y dar significado a los conceptos.
- Sistemas de representación: son las distintas formas de representar los conceptos matemáticos (notaciones, gráficos, símbolos). Es importante el dominio de las conversiones entre sistemas por varias razones, algunas de ellas son: proporcionar flexibilidad y versatilidad al abordar conceptos, facilita la resolución de problemas y el razonamiento matemático, es esencial para traducir aplicaciones del mundo real a representaciones matemáticas, conecta representaciones intuitivas con formas más formales, permite aprovechar las ventajas de diferentes tipos de representaciones y contribuye a un aprendizaje más significativo, demostrando un mayor dominio técnico y adaptabilidad en el uso de herramientas representativas matemáticas.
- En la metodología propuesta, se fomentan métodos activos como el trabajo en grupo, la investigación actuando sobre materiales, el aula taller y laboratorio, También se destaca la importancia de la resolución de problemas en matemáticas como elemento esencial para el aprendizaje, pues este enfoque va más allá de la repetición mecánica de ejercicios, impulsando una comprensión profunda y cultivando habilidades de razonamiento, análisis, comunicación y autonomía, tanto dentro como fuera del ámbito matemático.
- Dificultades y errores: deben considerarse para diseñar estrategias que le permita al docente afrontarlos y utilizarlos de forma efectiva.

- Contenidos: se clasifican en conceptuales, procedimentales y actitudinales. Los objetivos sirven de guía para establecerlos en cada unidad.

En el marco de este estudio, la Unidad Didáctica se concibe con el propósito de profundizar en la comprensión del MCM y MCD a través de un enfoque visual basado en modelos de retícula que favorece en los estudiantes una asimilación más intuitiva y práctica de estos conceptos matemáticos. La utilización de representaciones gráficas en forma de retícula permite visualizar de manera clara las relaciones numéricas y patrones, facilitando así la internalización de los procesos y propiedades asociadas al MCM y MCD. Este enfoque visual no solo busca fortalecer la comprensión conceptual, sino también promover la participación activa de los estudiantes, fomentando un aprendizaje más significativo y duradero. Además, alineándose con los principios del modelo de análisis didáctico previamente mencionado, busca adaptar la Unidad Didáctica a las necesidades específicas del contexto educativo, asegurando una planificación curricular que sea tanto relevante como contextualizada.

2.3 MCM, MCD y Divisibilidad en $\mathbb{N}$

Es importante antes de iniciar cualquier discusión respecto a conceptos matemáticos como el MCM y el MCD se debe realizar una breve introducción histórica de los números primos, pues el estudio de este conjunto de números es parte importante dentro de la teoría de números y por ende, en la divisibilidad.

La primera prueba indiscutible del conocimiento de los números primos se remonta a alrededor del año 300 A.C. y se encuentra en los Elementos de Euclides (tomos VII a IX). Euclides define los números primos, demuestra que hay infinitos de ellos, define el MCD, el MCM y proporciona un método para determinarlos, método que hoy en día se conoce como el algoritmo de Euclides. Los Elementos contienen asimismo el teorema fundamental de la

aritmética y la manera de construir un número perfecto a partir de un número primo de Mersenne. La criba de Eratóstenes, atribuida a Eratóstenes de Cirene, es un método sencillo que permite encontrar números primos. (Babini, 1986) citado por Chacón (2012).

Ahora bien, por divisibilidad se entiende a la propiedad que tiene un número de ser divisible por otro. Es decir, que un número “a” es divisible por un número “b” si al dividir “a” entre “b” se obtiene un cociente entero y resto 0.

Algunas nociones importantes sobre divisibilidad se mencionan a continuación

- Un número “a” es divisible por otro “b” si “b” es un factor o divisor de “a”.
- Existen criterios o reglas que permiten saber si un número es divisible por otros sin tener que hacer la división.
- Los números primos solo son divisibles por 1 y por sí mismos. Los números compuestos tienen más de 2 divisores.
- El máximo común divisor (MCD) de dos o más números es el mayor número que los divide a todos.
- El mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más números es el menor número que es múltiplo de todos ellos

En conclusión, la divisibilidad estudia qué números pueden dividir exactamente a otros números, sin dejar resto. Permite determinar factores, identificar números primos y compuestos, y encontrar divisores y múltiplos comunes, esta comprensión se deriva de principios fundamentales establecidos históricamente y se aplica en diversos contextos matemáticos.

2.4 La retícula como sistema gráfico de representación

La importancia de la visualización en el estudio de las matemáticas ha sido destacada por numerosos autores a lo largo del tiempo. La visualización se ha convertido en un recurso crucial

para facilitar la comprensión y el aprendizaje efectivo de conceptos matemáticos, ya que aborda la naturaleza a través de lo visual y lo abstracto de esta disciplina, proporcionando una representación más accesible de las ideas, relaciones y propiedades de los conceptos matemáticos a trabajar

Zimmermann y Cunningham (1991) definen a la visualización matemática como “la habilidad, el proceso y el producto de la creación, decodificación, uso y reflexión de cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de graficar y comunicar información...” (p.3). Esta definición destaca la capacidad de la visualización para representar conceptos matemáticos de manera más concreta y accesible, lo cual es crucial para abordar la naturaleza misma de las matemáticas

En este mismo contexto la utilización de sistemas de representación es esencial en el abordaje de conceptos matemáticos abstractos, pues el trabajar con diversos sistemas de representación y establecer conexiones entre ellos favorece una mejor comprensión de las nociones matemáticas asociadas a cada tema, esto gracias a que la incorporación de este tipo de sistemas en la enseñanza de las matemáticas beneficia a los estudiantes al facilitar la asimilación de conceptos y sus relaciones, lo cual impacta de forma positiva en la realización de tareas donde se percibe la utilidad de los conceptos tratados y su aplicabilidad en situaciones de la vida real y cotidiana del estudiante.

La teoría de Duval, por su parte, propone que un sistema semiótico debe permitir tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la formación de una representación, el tratamiento de una representación dentro del mismo registro y la conversión de una representación en otra de otro registro, manteniendo el significado inicial.

Duval (1998) “Para que un sistema semiótico sea un registro de

representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis:

1. La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
2. El tratamiento de una representación es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.”

Ahora bien, Según Ana Dias (2005), el modelo de retícula es importante como sistema gráfico de representación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pues “permite representar visualmente los números naturales mediante esferas y palitos de colores que representan los factores primos, lo que sugiere conexiones sobre las propiedades y relaciones entre los números, da una imagen concreta del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de números, conceptos que usualmente los estudiantes calculan de manera algorítmica sin comprensión intuitiva. Además refleja todas las relaciones y propiedades de los números enteros positivos, incluyendo la unicidad de la factorización primaria y también permite a los estudiantes construir una imagen mental de las relaciones entre los números naturales, más allá de exponentes y números, fomentando una comprensión más profunda e intuitiva" (2005).

Es por lo descrito anteriormente que la facilidad de la visualización que otorga este modelo es que se alinea con la importancia de la visualización en matemáticas, proporcionando una representación concreta y accesible que facilita la formación, el tratamiento y la conversión de representaciones, tal y como lo sugieren las perspectivas de Zimmermann y Cunningham

(1991), así como la teoría de Duval. Este enfoque visual de retícula contribuye al aprendizaje efectivo de conceptos matemáticos, tanto del MCM y el MCD, como del concepto de divisibilidad en $\mathbb{N}$.

2.4.1 Funcionamiento, Alcances y Beneficios del Modelo de Retícula

Este modelo de retícula propuesto por Dias (2011) es una propuesta que involucra una adaptación de los diagramas de Hasse, para representar números enteros y sus factores, donde se ocupan esferas y palitos de madera pintados en diferentes colores. Este modelo funciona de la siguiente manera:

1. Se utilizan esferas de polietileno y palitos de madera de colores para representar los distintos números primos (por ejemplo, rojo = 2, amarillo = 3, etc.).
2. Para construir el modelo de un número, se empieza colocando en secuencia palitos del color del primer primo en su descomposición. En los extremos se ubican esferas con las potencias de ese primo.
3. Luego se agregan palitos de otro color en dirección perpendicular para el siguiente primo. Se sigue así sucesivamente para todos los primos en la descomposición del número.
4. Se van llenando los espacios para incluir las combinaciones de productos entre las potencias de los distintos primos.
5. Cada número tiene una factorización prima única, por lo que cada modelo de retícula es único.
6. Para hallar el MCD entre dos números se compara la intersección de sus modelos, siendo el factor común más grande.
7. Para el MCM se construye el modelo más pequeño que contenga a ambos números dados, completando la estructura combinada.

Por ejemplo, para la representación del número ocho ($2 \times 2 \times 2$) requiere tres palos para representar la operación multiplicado por 2. Y mostrará los cuatro factores del número ocho (Figura 9)



Figura 3. - Dias (2011) El modelo de retícula para el número 8.

Para el caso de introducir otro primo en la imagen, como por ejemplo, el número 24, dado que su descomposición es $2 \times 2 \times 2 \times 3$, necesitaremos colocar palos de otro color y en otra dirección .

(Figura 10)

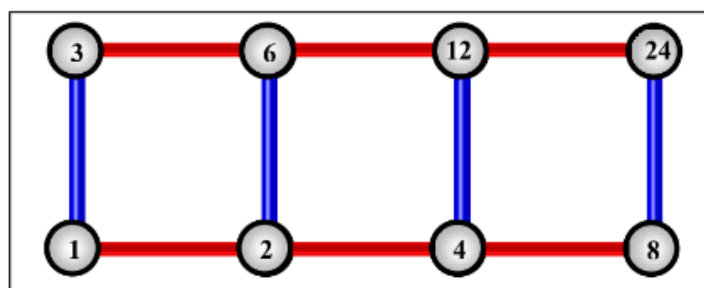


Figura 4. - Dias (2011) El modelo de retícula para el número 24

Para cuando se quiere representar un número con 3 o más de 3 factores primos distintos mediante el modelo de retícula, se procede de la siguiente manera:

Se siguen agregando secuencias de palitos y esferas con potencias para cada nuevo primo en una dirección diferente (pág. 545).

Como por ejemplo la representación del número $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ requerirá el uso de tres dimensiones (Figura 11)

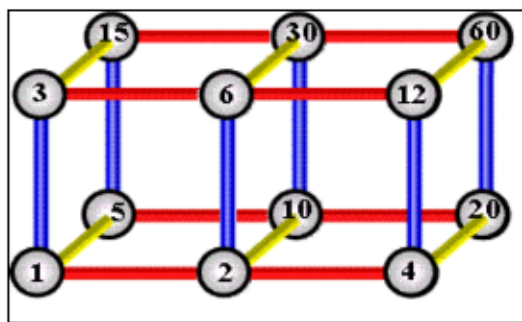


Figura 5. - Dias (2011) El modelo de retícula para el número 60

Dias (2011) menciona que “entre más factores primos distintos tenga el número que se desea representar, el diagrama de su modelo de retícula se puede volver muy complicado” (p.546). Sin embargo, aclara que a pesar de que los diagramas se pueden ver muy complejos en el papel cuando se trata de graficar modelos con más de 3 primos distintos, las construcciones físicas y manipulables de estos modelos no son complicadas y que al contrario, la autora resalta que son divertidas de armar y de explorar para los estudiantes y que por ello, en la práctica, construir el modelo de retícula de números con 4, 5 o más factores primos mediante las esferas y palitos de colores es perfectamente posible y constituye una actividad didáctica para los estudiantes.

De esta manera, los modelos reflejan todas las relaciones y propiedades de los números enteros positivos, incluyendo la unicidad de su factorización prima, además de permitir la visualización de conceptos como el MCD Y MCM.

En cuanto a los alcances y beneficios del uso de este modelo de representación, Días destaca que su aplicación como sistema visual permite representar de manera manipulable los números naturales y sus factores/divisores. Este enfoque resalta las relaciones multiplicativas entre ellos, facilitando la comprensión conceptual del máximo común divisor y mínimo común múltiplo entre números naturales al visualizarlos en los modelos. Además, fomenta que los

estudiantes descubran y formulen conjeturas sobre propiedades matemáticas, como la identificación de cuándo un número es cuadrado perfecto. El modelo contribuye al desarrollo del sentido numérico en la estructura multiplicativa de los números naturales, ofreciendo una experiencia manipulativa y kinestésica que complementa el conocimiento abstracto. Finalmente, establece una conexión significativa entre la representación simbólica de un número y el modelo concreto.

3. Marco metodológico

En el marco metodológico que se presenta a continuación se basa en el ciclo de análisis didáctico como metodología de investigación para el diseño experimental de una unidad didáctica que posibilite articular un modelo local de análisis didáctico con los organizadores curriculares de este, focalizándose en la comprensión de los conceptos de MCM y MCD. Este enfoque se llevará a cabo mediante la utilización de un modelo gráfico basado en retículas para el aprendizaje de estos conceptos. Es relevante destacar que nos centraremos en un paradigma cualitativo, siguiendo la perspectiva de Camargo (2021), cuyo enfoque se alinea con la importancia de las estrategias cualitativas en la investigación educativa, la autora define las estrategias cualitativas como “El mecanismo que pone en funcionamiento un diseño investigativo en el mundo empírico, permitiendo a los investigadores conectar sus presupuestos teóricos con formas específicas de obtener información para analizarla” (Camargo, 2021, p. 25) Según Camargo (2021) las estrategias cualitativas más utilizadas en la investigación en educación matemática son:

- Estrategias naturalistas: Buscan describir lo que ocurre en ambientes naturales. Incluyen estrategias basadas en prácticas usuales, en primera persona, estudio de caso y revisión documental.
- Estrategias clínicas: Indagan sobre cómo ocurren ciertos procesos. Incluyen entrevista estructurada, entrevista semiestructurada, entrevista basada en tareas y observación clínica.
- Estrategias de diseño: Estudian qué podría ocurrir en determinadas condiciones. Incluyen experimento de enseñanza, experimento comparativo e investigación-acción.

Cada estrategia conlleva formas particulares de obtener y analizar información. La elección de la estrategia depende de las preguntas y objetivos de la investigación. Además, pueden combinarse estrategias de diferentes tipos en una misma investigación (Camargo, 2021).

Así pues, Camargo (2021) define las estrategias cualitativas como los mecanismos que operacionalizan el diseño investigativo, conectando presupuestos teóricos con formas de obtener y analizar información de manera flexible y adaptada a cada estudio en educación matemática. A continuación, nos adentraremos en el Método de Análisis Didáctico como una metodología de investigación clave en nuestro estudio, este método nos brinda las herramientas necesarias para desglosar, examinar y reflexionar sobre cada componente necesario para este estudio.

3.1 Método de Análisis Didáctico como metodología de Investigación

El análisis didáctico como una metodología de investigación se basa en la articulación de diferentes análisis, como el análisis conceptual y de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo. Estos análisis se retoman de manera en la que se profundiza en el estudio de los contenidos matemáticos escolares y su enseñanza.

En este proceso de análisis, es importante destacar que no seguimos una secuencia lineal estricta, sino más bien adoptamos un enfoque flexible, similar al uso de una caja de herramientas, donde cada análisis disponible se convierte en una herramienta valiosa. Al abordar el análisis didáctico como una caja de herramientas, reconocemos la diversidad de métodos y enfoques disponibles para comprender y mejorar la enseñanza y el aprendizaje, este enfoque adaptable nos permite seleccionar y aplicar cada análisis de manera estratégica, considerando las particularidades del contexto educativo, ajustándose a las necesidades que puedan surgir durante este proceso.

Esta metodología desglosa el contenido matemático en partes simples para su estudio y comprensión, y luego se sintetizan los resultados obtenidos para organizar y planificar la enseñanza de dicho contenido. Además, se utiliza un sistema de categorías específicas para el análisis de contenido, que permiten identificar y comprender los diferentes aspectos, significados y usos de los conceptos matemáticos escolares

La metodología de investigación del análisis didáctico se caracteriza por su método, repetitivo y basado en la articulación de diferentes análisis, con el objetivo de profundizar en el estudio de los contenidos matemáticos escolares y su enseñanza.

A continuación, se presentan algunas consideraciones que se toman como punto de partida en cada uno de los organizadores curriculares descritos en el marco teórico de este estudio y que fundamentan el diseño, gestión práctica y reflexiva sobre el desarrollo del sentido, significado y comprensión en relación al aprendizaje y enseñanza del MCM y MCD a través de un enfoque visual de retículas

3.1.1 Análisis conceptual sobre el MCM y MCD (Divisibilidad) en $\mathbb{N}$

La revisión realizada sobre la estructura multiplicativa de números naturales, la divisibilidad, MCM y MCD han permitido reconocer algunas definiciones y algunas de sus relaciones de carácter formal, como se menciona a continuación:

- Se dice que un número a es divisible por otro número b , denotado como $a \bmod b = 0$, si existe un entero k tal que $a = b \cdot k$, donde k es un número entero.
- Un número primo p es un número entero mayor que 1 que solo tiene dos divisores distintos: 1 y el propio número primo p . Es decir, un número primo p cumple la propiedad de que el número de divisores distintos es igual a 2.
- Un número compuesto c es un número entero mayor que 1 que tiene más de dos divisores distintos. Es decir, un número compuesto c cumple la propiedad de que el número de divisores distintos es mayor que 2.
- Dado un conjunto de números enteros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, el máximo común divisor (MCD) de estos números, denotado como $\text{MCD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, es el mayor entero positivo que divide a todos los números del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sin dejar residuo. Es decir, $\text{MCD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es el máximo valor de d tal que d es un divisor común de todos los números $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- Dado un conjunto de números enteros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, el mínimo común múltiplo (MCM) de estos números, denotado como $\text{MCM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, es el menor entero positivo que es divisible por cada uno de los números del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sin dejar residuo. Es decir, $\text{MCM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es el menor valor de m tal que cada a_i es un divisor de m para $i=1, 2, \dots, n$.

Ahora bien Gomez (2016) no presenta explícitamente una definición del MCD en el conjunto de los números naturales. Sin embargo, hace referencia a cómo se deduce esta noción a partir del diagrama de Hasse de la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$.

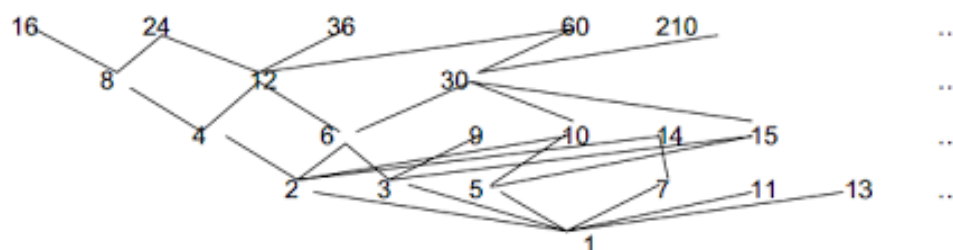


Figura 6. —Sanchez, Angel y Luque, (2014) citados por Gomez (2016). Diagrama de Hasse para la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$.

De aquí se puede concluir que los números primos son aquellos que se encuentran en la segunda fila del diagrama, y los demás todos se relacionan con algunos de ellos, por eso tiene sentido pensar que estos son los elementos base para la descomposición Sánchez, Ángel y Luque (2014, citado por Gomez, 2016, pág. 8) Es decir, Cada nodo/punto en el diagrama representa un número natural que pertenece al conjunto de divisores de un número n .

La posición vertical de los nodos indica el “nivel” o “rango” de los divisores. Los nodos más abajo representan los divisores más pequeños, y los nodos más arriba los divisores más grandes. El nodo en la parte superior del diagrama representa al número n mismo, y todos los nodos debajo de él son sus divisores propiamente dichos.

El nodo en la parte inferior del diagrama es el 1, que divide a todos los números naturales. Cualquier nodo está conectado por segmentos a los nodos inmediatamente encima, indicando divisibilidad directa

Así, la estructura del diagrama de Hasse codifica visualmente todas las relaciones de divisibilidad presentes en el conjunto de divisores de n , aprovechando las propiedades transitiva y antisimétrica de la relación de orden dada por la divisibilidad.

Por lo tanto, se puede concluir que el MCD entre dos números naturales a y b se define implícitamente como el mayor número primo que divide tanto a a como a b .

Mientras que para Lewin (2011, citado por Ramos y Martínez, 2020, pág 17) define el MCM de la siguiente manera: “El mínimo común múltiplo de dos enteros no nulos a y b es el menor entero positivo que es múltiplo de a de b . Se le denotará $[a,b]$, o bien, $mcm(a,b)$ ”.

Para Dias, (2011) “El máximo común divisor (MCD) de dos números se encuentra comparando el conjunto de divisores de esos números, encontrando los divisores que tienen en común y determinando cuál es el mayor de ellos” (Dias, 2011, p. 544), mientras que para el MCM explica que “El mínimo común múltiplo MCM de dos o más números es el menor número que contiene en su modelo de retícula los modelos de todos esos números dados. Es decir, es el modelo de retícula más pequeño que se puede construir y que incluye en su interior las retículas de los números dados” (Dias, 2011, p. 545).

La exploración detallada de la estructura multiplicativa de los números naturales, la divisibilidad, el MCM y el MCD por algunos autores, revela dimensiones fundamentales en la comprensión de las relaciones conceptuales propias de estos conceptos. Las perspectivas

presentadas por Zazkis y Campbell (1996) y Luque, Mora y Páez (2002), así como Sánchez, Ángel y Luque (2014), ofrecen una visión integral que destaca tanto la naturaleza multiplicativa de los números como la importancia de la divisibilidad. Las definiciones de Días (2011) para el MCD y el MCM aportan claridad adicional al establecer que el MCD implica la identificación del mayor divisor común, mientras que el MCM se refiere al menor múltiplo común que abarca las retículas de los números dados. En conjunto, estas perspectivas convergen para ofrecer una visión completa y enriquecedora de la importancia, relación e interconexión de la divisibilidad y la estructura multiplicativa en el contexto de los números naturales.

3.1.2 Análisis de contenido sobre el MCM y MCD (Divisibilidad) en N

El estudio de la Teoría de la Divisibilidad se originó debido a la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades, cuestiones que a veces no tenían solución debido a la no divisibilidad del número tratado.

En la división y la divisibilidad: se dice: $a|b$, y se lee “a divide a b”, si existe un número entero “c” tal que $b=a*c$. En la Figura 3 se presenta un mapa conceptual de la estructura conceptual de la divisibilidad y destacamos las relaciones de orden que se identifican entre diferentes elementos involucrados. (López, Castro y Cañadas, 2013. pág 2).

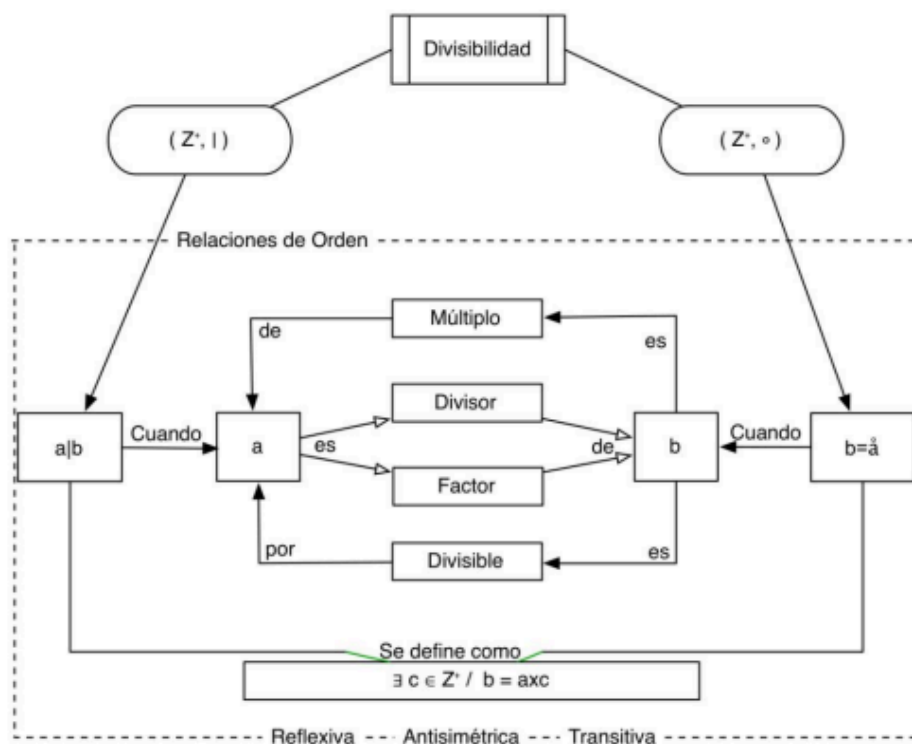


Figura 7. - López, Castro y Cañadas (2013). Estructura conceptual de divisibilidad.

En este mismo contexto Molina y Castro (2015) exploran las relaciones entre números naturales, entre las cuales se incluyen las siguientes definiciones:

Relaciones de divisibilidad

La división de dos números naturales, $a:b$, pueden dar resultado nulo. se dice entonces que la división es exacta. Si $a : b = c$, se tiene que $a = b * c$. también $a = c * b$, dado que la multiplicación es una operación conmutativa. en esta situación se dan las siguientes relaciones de divisibilidad entre los números a , b y c :

- b es divisor o factor de a
- a es divisible por b
- a es múltiplo de b
- c es divisor o factor de a

- a es divisible por c
- a es múltiplo de c

La figura sintetiza estas relaciones para el caso de a y b

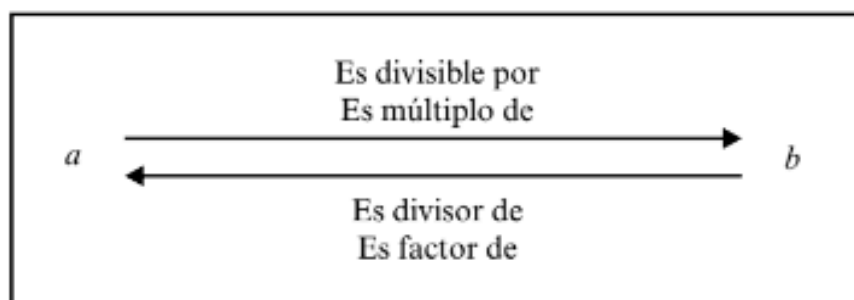


Figura 8. - Molina y Castro (2015). Relaciones de divisibilidad entre a y b cuando $a : b$ es exacta.

A modo de ejemplo los autores muestran las relaciones de divisibilidad que se desprenden de la división exacta $24 : 6$, equivalente a $24 = 6 \times 4$, en la siguiente figura.

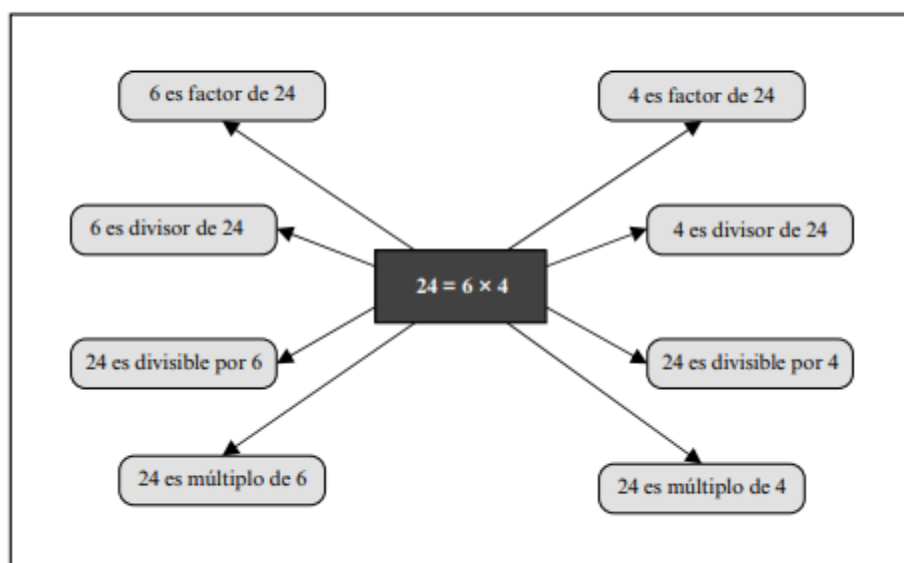


Figura 9. - Molina y Castro (2015). Relaciones de divisibilidad para la terna de números (6,4,24)

Para dos números naturales a y b , se dice que b es divisor de a , y se escribe b/a , si al hacer la división $a : b$ el resto es nulo, es decir, si existe un número natural que al multiplicarlo por b da a . También se dice que b es factor de a o es divisible por b . (Molina y Castro, 2015, pág.127).

La utilización de la palabra divisor en este contexto denota una relación entre dos números. Su aplicación aquí difiere de cómo se emplea al señalar los distintos términos involucrados en una operación de división, como dividendo, divisor, cociente y resto.

Relaciones entre la divisibilidad y números primos

Para los autores, algunas de las principales relaciones entre la divisibilidad y los números primos dan lugar a propiedades, como las que se enuncian a continuación: *“Todo número natural tiene, al menos, un divisor primo”* (Molina y Castro 2015, p. 134).

Ejemplo, si el número es primo, como 17, él mismo es su divisor; luego ya tiene un divisor primo. Si el número es compuesto, al menos uno de sus factores es primo, como ocurre en $12 = 3 \times 4$, donde 3 es primo.

En consecuencia de la propiedad anterior, se enuncia el siguiente teorema: *“Todo número natural mayor que 1 puede escribirse como producto de factores primos de forma única. Simbólicamente: $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$, expresión en la cual los factores son números primos”* (Molina y Castro, 2015, p. 135)

El anterior teorema es conocido como el teorema fundamental de la aritmética, el muestra que todo número natural mayor que 1 puede escribirse como producto de factores primos de forma única. El teorema muestra que los números primos son los elementos básicos que constituyen la estructura multiplicativa de los números naturales, ya que todo número natural se expresa como producto de factores primos.

Este teorema tiene implicaciones significativas en el estudio y la resolución de problemas asociados con el MCM y el MCD. Pues permite expresar cada número en términos de su factorización en números primos. Al tener una factorización única, el cálculo del MCM para dos números implica considerar los factores primos comunes y no comunes, elevados a la mayor potencia. Asimismo, la factorización única facilita la identificación de los factores primos comunes y sus potencias más bajas para el cálculo del MCD. En este caso, el MCD de dos números se obtiene tomando los factores primos comunes elevados a las potencias más bajas. Este teorema proporciona una estructura única para los números enteros, simplificando el análisis y la resolución de problemas relacionados con el MCM y el MCD.

Gracias a lo anterior es que se pueden enunciar las siguientes definiciones:

Máximo Común Divisor de dos números

Para Molina y Castro, (2015) definen el MCD de dos números naturales a y b como:

Todo número tiene un número finito de divisores. Dos números distintos tienen, por tanto, un número finito de divisores comunes. Entre estos divisores comunes hay uno que es el mayor de ellos. Al mayor de los divisores que tienen en común dos números naturales a y b se le denomina máximo común divisor de a y b . Abreviadamente, se escribe $MCD(a, b)$ (Molina y Castro, 2015, p.138).

Es decir, sean dos números naturales cualesquiera, el máximo común divisor es el mayor número que los divide a ambos exactamente, o, dicho de otro modo, el mayor de los divisores comunes entre ambos números, representando así el divisor más grande que se puede utilizar para dividir de forma exacta dichos dos números. Esta definición permite agrupar o repartir cantidades relacionadas con esos números en la mayor cantidad de grupos posible.

Mínimo Común Múltiplo de dos números

El MCM para Molina y Castro (2015) se define de la siguiente forma: “Al menor de los múltiplos que tienen en común dos números naturales a y b se le denomina mínimo común múltiplo de a y b . Abreviadamente, se escribe $MCM(a, b)$ ”(Molina y Castro, p.141)

Es decir, dados dos números naturales, el mínimo común múltiplo es el menor número que es múltiplo de ambos números; O lo que es equivalente, el más pequeño número que contiene a los dos números dados un número exacto de veces.

Esta definición representa el múltiplo más pequeño que se puede expresar como un producto de ambos números, permitiendo agrupar cantidades relacionadas con dichos números en la menor cantidad posible de grupos. En resumen, es el menor número que tiene como factores a todos los factores primos de los dos números dados, cada factor elevado al mayor exponente con que aparece en las descomposiciones de dichos números.

3.1.2.1 Modelos de representación del MCM y MCD (Divisibilidad)

La comprensión profunda de los conceptos matemáticos, en particular, la naturaleza de los números enteros y sus factores, requiere un enfoque multidimensional que va más allá de la mera manipulación abstracta de símbolos.

Según Días (2011), existen varios modelos o representaciones que se pueden utilizar para trabajar el concepto de números enteros y sus factores:

- “Representaciones verbales: palabras que representan números utilizan palabras que denotan valores numéricos (por ejemplo, "diez ", "veinte ", etc.).
- Numerales: cifras que denotan cantidades, usan los símbolos decimales tales como 10, 20 para representar cantidades.

- Bloques Multibase: son bloques físicos de plástico o madera, de diferentes formas y tamaños, que representan unidades, decenas, centenas, etc. Permiten el conteo y construcción de números.
- Varillas Cuisenaire: varillas de madera de 10 colores, donde cada color denota una longitud proporcional a los demás. Sirven para explorar relaciones numéricas.
- Modelos discretos: fichas, contadores u otros objetos separados que se usan para representar cardinalidades de conjuntos y permite además realizar conteos.
- Forma factorial prima: expresión de un número como producto de factores primos (por ejemplo $30 = 2 \times 3 \times 5$). Enfatiza la estructura multiplicativa única de cada número.
- Modelo de retícula (lattice model): Un modelo manipulativo propuesto por la autora, que utiliza esferas y palitos de colores para crear retículas únicas que representan los factores primos de un número. (Días, 2011, p. 543).

De acuerdo con Días, los diversos modelos de representación de números enteros son importantes porque:

“Cada representación resalta características específicas de un concepto. Para comprender totalmente un concepto, si es que eso es alcanzable, uno debería explorar tantas representaciones diferentes de ese concepto como sea posible. Al examinar y utilizar distintas representaciones siempre podemos obtener más conocimiento sobre un objeto o idea matemática” (Días, 2011, p. 543).

Asimismo, la autora argumenta que:

“Para aplicar de forma flexible la estructura multiplicativa en el razonamiento, uno necesita lidiar con las factorizaciones primas y ser capaz de identificar múltiples y factores a través de la aplicación de procesos significativos” (Días, 2011, p. 544).

Por ello, modelos manipulativos como su “modelo de retícula” resultan valiosos para construir una comprensión sólida del número entero y sus propiedades.

Por otro lado, el trabajo de Zainea (2019) nos introduce a un ámbito específico sobre: la visualización de la relación de divisibilidad entre números naturales a través de los diagramas de Hasse asociados al conjunto de divisores $D(n)$. Por ello, se presentan diferentes modelos de representación gráfica para visualizar la relación de divisibilidad entre los números naturales, específicamente a través de los diagramas de Hasse asociados al conjunto de divisores $D(n)$. Los principales modelos de representación introducidos por el autor son:

- Segmentos: Se muestra que el diagrama de Hasse asociado al conjunto $D(p^\alpha)$, es decir los divisores de la forma de una potencia de un número primo, puede representarse como un segmento de longitud α . Cada punto representa un divisor (p.14).

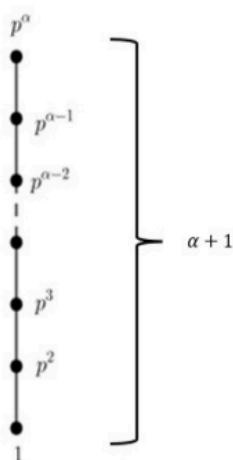


Figura 10. - Zainea (2019) Diagrama de Hasse para $D(p^\alpha)$

- Paralelogramos: El diagrama de $D(p^\alpha \cdot q^\beta)$, divisores de la forma producto de dos potencias de primos distintos, se asocia con un paralelogramo de lados α y β . Cada punto ahora representa un divisor entre estos dos primos (p.18).

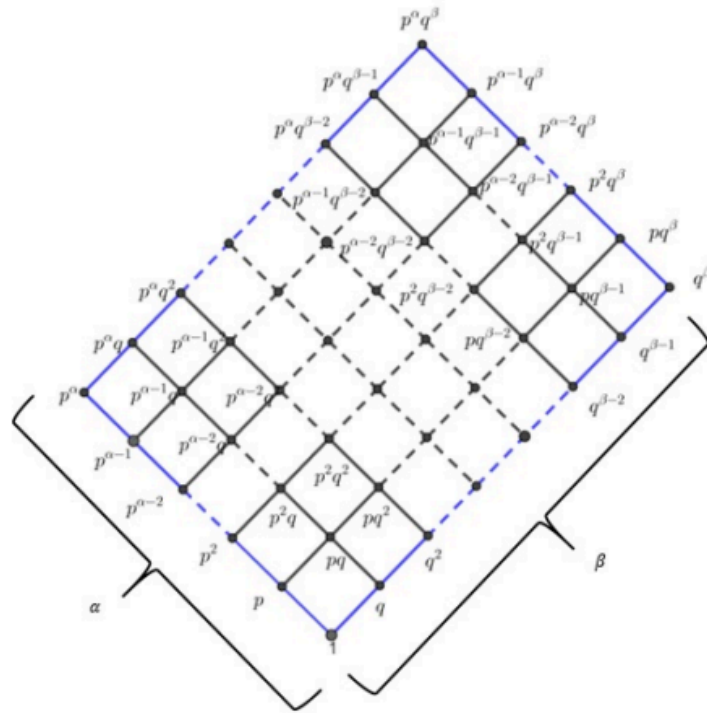


Figura 11. - Zainea (2019)Diagrama $D(p^\alpha q^\beta)$

- Prismas: Para el caso $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$, producto de potencias de tres primos, el diagrama toma la forma de un prisma de dimensiones $\alpha \times \beta \times \gamma$. Los puntos representan divisores entre los tres primos (pág. 22).

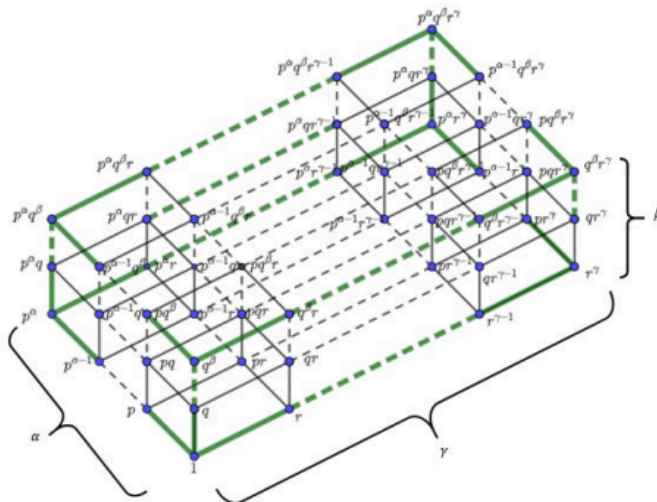


Figura 12. - Zainea (2019) Diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$

- Hiper cubos con proyección: Finalmente el diagrama de $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi)$ se relaciona mediante la proyección de un hipercubo 4D, donde cada arista o eje representa el exponente de cada primo (p.28).

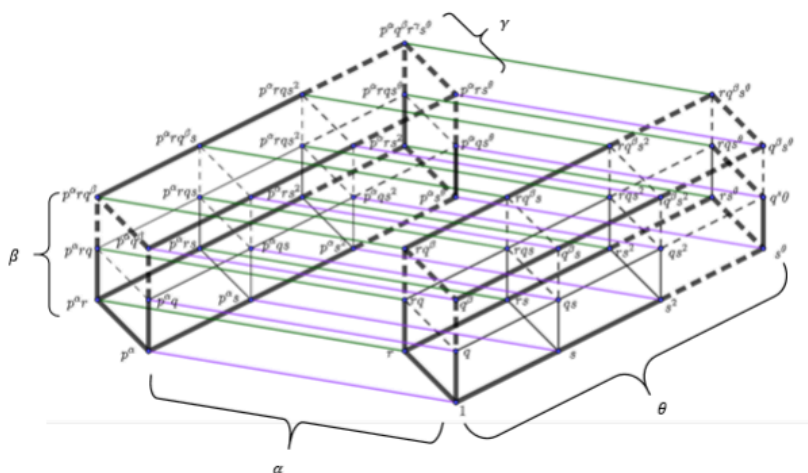


Figura 13. - Zainea (2019). Diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$

En conclusión, Zainea (2019) aporta modelos geométricos que permiten visualizar algebraicamente la relación de divisibilidad. Estos modelos se construyen incrementalmente en dimensiones y primos, utilizando figuras familiares como segmentos, paralelogramos, prismas e hipercubos proyectados. Por otro lado, los diagramas de Hasse ofrecen una metodología visual y geométrica poderosa para revelar y estudiar propiedades abstractas de orden inherentes a la relación de divisibilidad entre los números naturales.

Estos diagramas posibilitan la representación gráfica de las propiedades de ordenamiento en el conjunto de divisores de un número, estableciendo niveles determinados por la relación “divide a”. Esta disposición facilita el estudio de propiedades algebraicas abstractas. Además, los diagramas de Hasse permiten definir relaciones de equivalencia entre números naturales basadas

en la superposición y coincidencia de sus representaciones gráficas asociadas, dando lugar a clases de equivalencia sobre este conjunto.

3.1.3 Análisis cognitivo

De acuerdo a los lineamientos curriculares, “el pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (MEN, 1998, pág. 26). Esto implica desarrollar la comprensión de los significados de los números, del sistema de numeración decimal y del valor posicional, así como la comprensión conceptual de las operaciones matemáticas y su aplicación flexible en la resolución de problemas de la vida cotidiana. También, se enfatiza en la construcción de significados a partir de situaciones concretas, el uso de materiales manipulativos, la reflexión sobre las estrategias aplicadas y el desarrollo de habilidades de cálculo mental, estimación y razonamiento numérico, más allá de la pura mecanización de algoritmos.

De acuerdo a los lineamientos, el desarrollo del pensamiento numérico implica:

- La comprensión de los números y la numeración. Esto incluye construir el significado de los números a partir de experiencias cotidianas, desarrollar el concepto de número, comprender el sistema de numeración decimal, el valor posicional, y desarrollar habilidades como contar, agrupar, etc.
- La comprensión del concepto de las operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división). Esto implica reconocer su significado en situaciones concretas, comprender modelos y problemas verbales asociados a cada operación, entender sus propiedades y el efecto de aplicar cada operación.

- Desarrollar habilidades de cálculo con números y aplicación de operaciones, incluyendo algoritmos formales e informales, cálculo mental, estimación, uso de calculadora, resolución de problemas, selección de estrategias eficientes, revisión de resultados, etc.
- La comprensión se va desarrollando gradualmente a partir de situaciones significativas, uso de material concreto, reflexión sobre acciones y estrategias. La mecanización de algoritmos no implica comprensión numérica.

Lo que se busca es un desarrollo integral del pensamiento numérico, no sólo destrezas aisladas, poniendo énfasis en la construcción de significados, la aplicación en contextos reales, y el uso flexible y reflexivo de conocimientos numéricos.

Es por lo anterior que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en los escolares en cuanto a las competencias, se destaca la importancia de desarrollar la comprensión de los números y las operaciones, así como el uso de magnitudes y medidas, pues todo comienza con los números naturales, donde se aprende a contar, ordenar, codificar, medir y realizar operaciones aritméticas básicas. Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). También se destaca la necesidad de trabajar en la resolución de problemas que permitan a los escolares aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos en diferentes contextos, esperando en los estudiantes que la profundidad de su comprensión coincida con los estándares educativos ya establecidos, y para ello es necesario tratar con problemas relacionados a la comprensión y al abordaje de los conceptos de MCM, MCD y la divisibilidad por lo estudiantes, al respecto.

Ahora bien, respecto a las expectativas de aprendizaje descritas en los Estándares Básicos de Competencias -EBC (MEN, 2006), explican los conceptos y procedimientos propios del pensamiento numérico donde se espera que los escolares evidencien las siguientes comprensiones:

- Reconocer significados del número en diferentes contextos como medición, conteo, comparación, codificación, localización, etc.
- Describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Utilizar representaciones concretas y pictóricas para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
- Reconocer propiedades de los números como ser par, impar, ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.
- Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Utilizar diversas estrategias de cálculo y estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identificar regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo.
- Interpretar las fracciones en diferentes contextos como medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones.
- Justificar el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.

En cuanto a los errores dificultades y obstáculos en el aprendizaje del concepto de divisibilidad en los escolares, se resaltan las siguientes

Como lo mencionan Zazkis y Campbell (1996) quienes destacan que en la mayoría de los estudiantes entrevistados abordaban la divisibilidad desde un enfoque principalmente

procedimental, apoyándose en acciones como la división, en lugar de una comprensión conceptual más profunda:

“Las respuestas de los participantes a las preguntas y tareas indicaron disposiciones generalizadas hacia apegos procedimentales, incluso cuando algún grado de entendimiento conceptual era evidente.” (p. 545)

Algunos ejemplos de este abordaje procedimental hacia la divisibilidad mencionados son:

- El realizar división para comprobar si un número es divisible o no por otro.
- El intentar con diferentes números en forma de "prueba y error" para encontrar un número divisible por algún valor.
- El aplicar de manera limitada o inapropiada reglas de divisibilidad.
- Las dificultades para hacer conexiones y coordinar conceptos relacionados como factores primos y números compuestos.

Los autores encontraron una tendencia fuerte de los estudiantes a enfocarse en procedimientos y algoritmos al abordar conceptos relacionados a la divisibilidad. Ramos y Martínez (2020) señalan que los estudiantes abordan la comprensión del concepto del MCM de una manera mecanizada, repitiendo procedimientos sin llegar a comprender realmente el concepto:

La mecanización en clases de matemáticas se basa en la repetición y absorción de contenidos sin un mayor análisis de estos. Si bien esta forma de enseñanza funciona para el objetivo que tienen las pruebas estandarizadas, dificulta la comprensión de los conceptos matemáticos, dejándolos como herramientas de cálculo y no profundiza en las preguntas principales: “¿qué?, ¿para qué? y ¿por qué?” (Ramos y Martínez, 2020, p.016).

“Dicha mecanización es observable en el mcm con la descomposición de factores primos, estrategia de cálculo que no tiene mucha relación con la definición específica del mcm y genera que este objeto matemático sea comprendido por los estudiantes como una herramienta útil para otros objetos matemáticos o para resolver problemas.” (Ramos y Martínez, 2020, pág.16).

Es así como Ramos y Martínez (2020) evidencian la preocupante tendencia hacia la mecanización en la enseñanza de las matemáticas se plantean desafíos cada vez más significativos en el desarrollo de una comprensión conceptual profunda

En cuanto a Días (2005) menciona que los estudiantes suelen abordar la comprensión de los conceptos de máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm) de las siguientes formas tradicionales:

1. Establecer intersección: creando una lista ordenada de múltiplos consecutivos para cada número y encontrando el primero que aparece en ambas listas;
2. Crear un múltiplo y dividir: creando una lista ordenada de múltiplos consecutivos de un número y simultáneamente verificando cada nuevo elemento por divisibilidad por el segundo número;
3. Factorización prima: comparando la descomposición en factores primos de los dos números y encontrando el producto mínimo de potencias de primos que contenga ambas descomposiciones (a menudo referido como la regla del exponente más alto)(pág. 2).

Según la autora, estas son aproximaciones algorítmicas en las que los estudiantes carecen de explicaciones intuitivas sobre por qué funcionan estos métodos. Estas observaciones realizadas respecto a las aproximaciones algorítmicas y procedimentales que los estudiantes suelen emplear respecto a los conceptos tratados en el conjunto de los números naturales

comparten la carencia de explicaciones intuitivas, como algunos de los autores mencionados anteriores afirman, estos autores destacando una preocupación fundamental en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre el aprendizaje de la matemáticas, en especial en el empleo de enfoques de parte de los alumnos basados en algoritmos, sin tener en consideración la comprensión profunda de la lógica que subyace de estos conceptos matemáticos, lo cual genera una desconexión entre los pasos de cálculo y el significado conceptual de estos conceptos.

Por otro lado, la falta de explicaciones intuitivas puede llevar a que los estudiantes vean estos procedimientos como simples manipulaciones de números, sin comprender el por qué detrás de cada paso y procedimiento algorítmico, este enfoque mecanizado resulta en una aplicación superficial de las técnicas aprendidas y memorizadas por los estudiantes, limitando la capacidad de estos para generalizar y aplicar sus conocimientos a contextos matemáticos mucho más amplios

Con el objeto de mitigar estos errores y dificultades en el estudiante lineamientos curriculares de matemáticas mencionan que, existen diversas actividades y tareas que los docentes pueden llevar a cabo para promover una mejor comprensión de conceptos numéricos como la divisibilidad, MCM y el MCD (MEN, 1998).

Respecto a la divisibilidad, proponen plantear ejercicios y problemas donde los alumnos puedan identificar números divisibles por ciertas cifras, aplicar reglas de divisibilidad, y determinar la divisibilidad entre números de forma práctica. En cuanto al desarrollo del concepto de MCM, los lineamientos sugieren plantear tareas en donde se debe descomponer en factores primos para hallar factores comunes, elaborar diagramas de Venn con los múltiplos y razonar para hallar el mínimo común, aplicar el método de factorización, y resolver problemas del contexto real mediante MCM y sobre el MCD, las tareas pueden enfocarse en extraer

factores primos comunes entre números, utilizar el algoritmo de Euclides de forma significativa, y plantear y resolver situaciones problemáticas que requieran el uso del máximo común divisor.

Los lineamientos proponen plantear e implementar una serie de tareas prácticas, concretas y contextualizadas para consolidar estos saberes claves de las matemáticas, con el objetivo de fomentar en el alumno la comprensión y el aprendizaje significativo de estos conceptos.

Así pues dadas las reflexiones sobre estas aproximaciones hacia el tratamiento y errores de los estudiantes al enfrentarse a conceptos como MCM y MCD realizadas desde distintas miradas se subraya en la necesidad de fomentar el uso de nuevos enfoques pedagógicos y diseño de tareas que fomenten una comprensión más profunda de dichos conceptos, permitan evidenciar en el estudiante el desarrollo de su pensamiento en áreas como las mencionadas anteriormente.

3.1.4 Análisis de instrucción

Este análisis de instrucción implica la adaptación de consideraciones previas, como el análisis conceptual de contenido y el análisis cognitivo, a contextos específicos de enseñanza, como aulas, centros educativos o proyectos de diseño de materiales. Su objetivo es abordar el cómo y cuándo se realiza la formación, abarcando aspectos como funciones y tipos de tareas, secuenciación, materiales y recursos utilizados, así como la organización y gestión del trabajo en el aula.

El análisis de instrucción hace un barrido de las tareas del tema dando posibilidad a alcanzar los objetivos que se proponen y que además se detecten y se solucionan errores y dificultades que puedan presentar los alumnos, por lo mismo este análisis es tan importante a la hora de identificar el razonamiento matemático a la hora de desarrollar la actividad matemática, ya que nos permite caracterizar la planificación de tareas.

Ahora bien, es importante destacar que, aunque este análisis de instrucción es fundamental para el diseño educativo, la planificación detallada de tareas específicas no se aborda en esta etapa del proyecto. La planificación detallada de tareas se considerará en fases posteriores, permitiendo una adaptación más precisa a las necesidades y características particulares de los estudiantes y del contexto educativo en cuestión.

3.2 Hallazgos en la implementación de la UD

A continuación, se presentan los hallazgos obtenidos durante la implementación de la Unidad Didáctica. Este apartado recoge y analiza los resultados y observaciones realizadas a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje del MCM y MCD. Se pretende ofrecer una visión detallada de los avances y dificultades encontradas. Además, se incluyen reflexiones sobre la adecuación de los materiales utilizados y la respuesta de los estudiantes ante las actividades propuestas. Estos hallazgos son fundamentales para evaluar el impacto de las actividades desarrolladas en la Unidad Didáctica.

3.2.1 Análisis de contenido

Hallazgos sobre el MCM

Gracias a las actividades propuestas a estudiantes de sexto grado y a las intervenciones realizadas por estos, se reconoce un conocimiento parcial respecto a las relaciones que anteceden al MCM, como se evidencia en intervenciones como la siguiente:

P: Niños, algunos recuerdan ¿que es el MCM y MCD?

E2: (*Levanta la mano*).

P: Dime.

E2: El MCM es colocar 2 números de los que se quiere saber cual su MCM y con la ayuda de la tabla sacarle la mitad y luego si tiene otra vez la mitad y con esos número se sabe cual es.

En esta intervención da cuenta que en su respuesta se encuentra un reconocimiento parcial del método para la obtención del MCM, el alumno intenta explicar el procedimiento, aunque de manera algo confusa trata de referirse al proceso de descomposición, aunque no lo menciona explícitamente, esto evidencia una falta de entendimiento en cuanto a las relaciones que anteceden al MCM y su significado.

Lo anterior se puede ver evidente en las respuestas obtenidas del desarrollo de las siguientes actividades

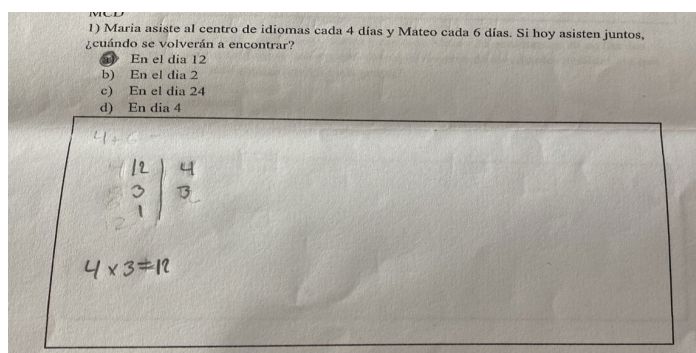


Figura 14- Respuesta a problema 1 de la actividad diagnóstica estudiante E1

En este primer caso, el estudiante recurre al método tradicional para factorizar. Sin embargo, parece hacerlo mediante ensayo y error, dado que intentó primero con el 4 y continuó con 12. Aunque llegó a la respuesta, el proceso que utilizó demuestra dificultades en su uso además de de dificultades en sus resolución de problemas.

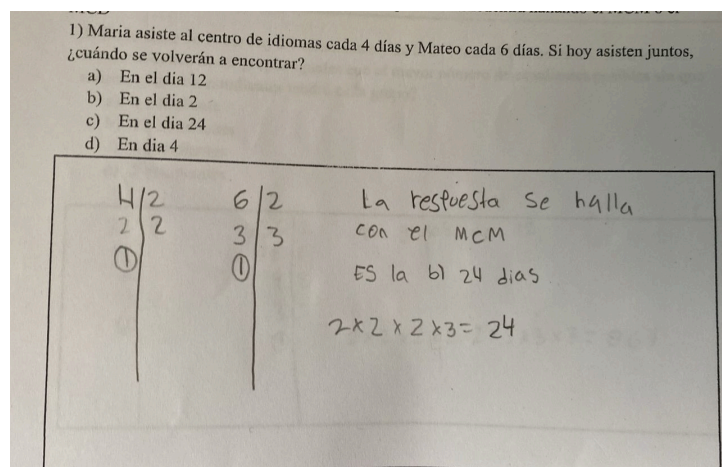


Figura 15- Respuestas a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica estudiante E2

El desarrollo por parte de este alumno muestra su capacidad para reconocer y poner en práctica el método tradicional de factorización prima, identificando bien los datos del problema. Sin embargo, en la obtención del MCM presenta dificultades para identificar que solo se debe tomar el factor de mayor potencia, o en este caso, el que más veces se repite, lo que deriva en un error.

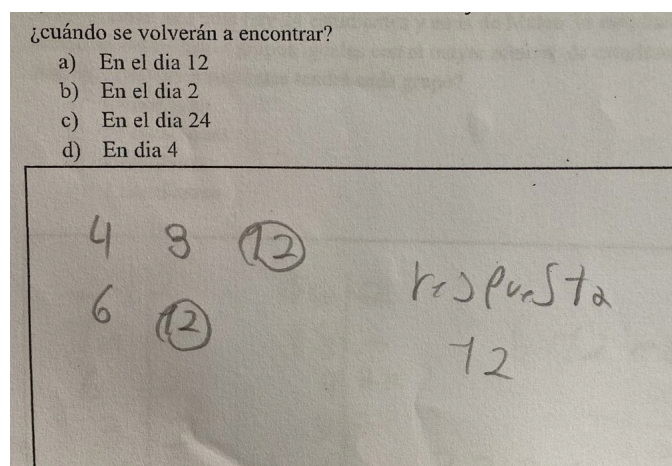


Figura 16- Respuestas a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica estudiante E4

El método empleado en este caso tiende al reconocimiento de patrones, aparentemente utilizado como estrategia para llegar a la respuesta. Por otro lado, se identifica una confusión

entre la obtención del MCM y el MCD, que, aunque le proporciona una respuesta correcta, conlleva errores en su procedimiento

Ahora bien, después de la intervención con el método de retícula, donde se trabajó con material manipulativo, se les presentaron problemas iguales a los propuestos al inicio, con el objetivo de comparar las respuestas obtenidas en ambos casos. En esta ocasión se logró un avance en relación al interés de los alumnos, además de identificar el entendimiento de algunas relaciones numéricas. A continuación, se muestran algunas de sus respuestas:

En una calle se están instalando dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 3 minutos y el otro, cada 5 minutos. Una vez se conectan los semáforos, ¿cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo por primera vez?

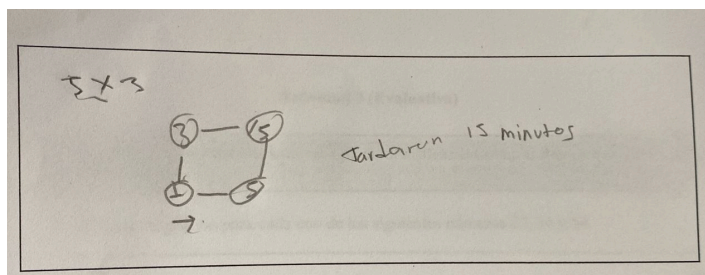


Figura 17- Respuesta a problema 3 de la actividad evaluativa estudiante E6

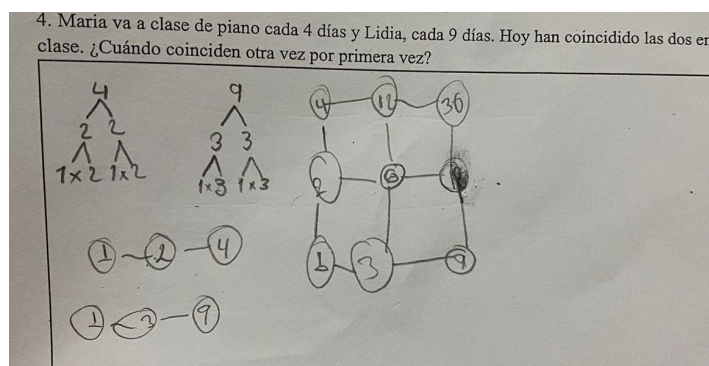


Figura 18- Respuesta al problema 4 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E2

Ahora bien, vemos el desarrollo de las siguientes problemas, en ambos casos se logra reconocer que el alumno es capaz de identificar las siguientes relaciones numéricas:

- Reconoce la descomposición de números en factores primos
- Identifica una secuencia al reconocer que, si cada palito representa multiplicar por 2 y va en una dirección, los demás números, resultado de este producto, van en esa misma dirección, conservando una secuencia en un orden específico
- Se evidencia un reconocimiento de patrones en cada gráfico, dando cuenta que cada número sigue una secuencia establecida

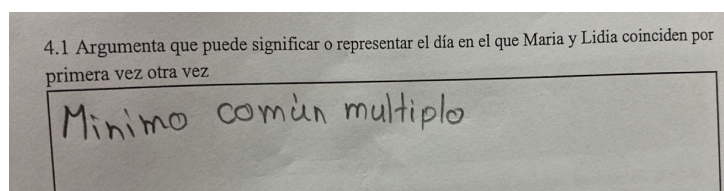


Figura 19- Respuesta al problema 4.1 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E2

Por otro lado, si bien da cuenta de la relación que tiene la respuesta que encontró con el MCM, el estudiante no argumenta el por qué, aunque su respuesta sea correcta.

En conclusión, gracias a las actividades propuestas y a las intervenciones realizadas, se identifica un conocimiento parcial en cuanto a las relaciones que anteceden al MCM. Las respuestas y los procedimientos utilizados por los alumnos evidencian una comprensión inicial del método de descomposición, aunque de manera confusa y con errores en la aplicación práctica. La intervención mediante el uso del método de retícula y material manipulativo ha mostrado cierta utilidad en el aumento del interés de los alumnos y su entendimiento de las relaciones numéricas, como la descomposición en factores primos y el reconocimiento de

patrones. A pesar de las dificultades iniciales, los estudiantes han mostrado avances en la identificación y aplicación correcta de los conceptos necesarios para calcular el MCM, lo que indica una progresión en su aprendizaje y comprensión matemática.

Hallazgos sobre el MCD

P: ¿Alguien sabe qué es el MCD?

E2: (*levanta la mano*) ¿Es el número más grande que puede dividir a dos o más números ?

P: Exacto, bien, ahora sabes cuales son los divisores de 12?

E2: mmmmmmmmm, 1, 2, 3, 4, 6 ?

P: Sii, pero falta uno

E2: el mismo profe

P: exacto el 12, ahora dime los divisores del 15

E3: ¡Profeee!, serian el 1, 3, 5 y 15

P: aja (*los escribe en el tablero*), bien, ahora que sabemos cuales son los divisores de cada número, ¿quién puede decirme cómo hacemos para averiguar el MCD de 12 Y 15?

E5: Profe, Multiplicamos los números: 12×15

P: mm no no, eso nos da el producto no el MCD .

En esta intervención se evidencia que el alumno confunde los procesos para obtener el MCD con los del MCM, esto pasa cuando se le pide que encuentre los divisores de los números 12 y 15, el estudiante nombra correctamente los divisores, pero al intentar encontrar el MCD, sugiere multiplicar los números, lo que indica dificultades en proceso del cómo se calcula el MCD. El MCD no se encuentra multiplicando los números, sino identificando los factores comunes y tomando el mayor común divisor de estos.

Estas dificultades y error también se ven en el desarrollo de los siguientes problemas

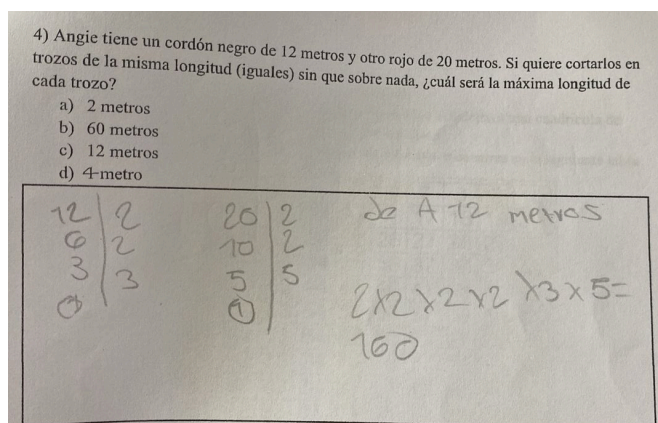


Figura 20- Respuesta al problema 4 de la actividad diagnóstica, estudiante E2

Una de las primeras dificultades que se logran ver es la confusión entre los procesos para hallar el MCM y el MCD. En este primer caso, el estudiante usa el algoritmo para encontrar el MCM de 12 y 20, cuando lo que el problema pide es hallar la máxima longitud de cada trozo, para lo cual solo era necesario encontrar el MCD. Además, un error recurrente a lo largo de las actividades es olvidar que, para multiplicar los factores primos de 12 y 20, es necesario escoger el factor con mayor exponente o el que más se repita dentro de la descomposición, y luego multiplicarlos. Este error se presenta frecuentemente en el desarrollo de estas actividades

Ahora bien, luego de introducir el modelo de retícula como un método particular para la obtención del MCD, obtuvimos la siguiente información a partir de la solución de los siguientes problemas:

5. Alfonso tiene una tablilla rectangular de 18 cm de largo y 36 cm de ancho. Corta la tablilla en cuadrados iguales lo más grandes posibles. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado?

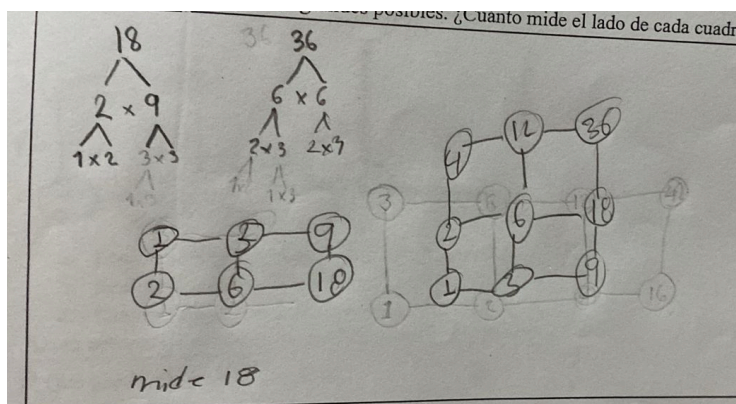


Figura 21- Respuesta al problema 5 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E3

El desarrollo de parte de los estudiantes en relación a este problema muestra que el estudiante:

- Reconoce la descomposición de números en factores primos
- Identifica una secuencia al reconocer que, si cada palito representa multiplicar por 2 y va en una dirección, los demás números, resultado de este producto, van en esa misma dirección, conservando una secuencia en un orden específico
- Es capaz del reconocimiento de patrones en cada gráfico, dando cuenta que cada número sigue una secuencia establecida
- Gracias a las rejillas o retículas, recuerda más fácilmente que para encontrar el MCD de dos números solo debe comparar las rejillas e identificar el máximo factor común entre ellas. En cambio, para la obtención del MCM, se debe proceder intersectando los gráficos y completando las rejillas si es necesario hasta obtener el MCM

En conclusión, la intervención muestra que los estudiantes confunden los procesos para obtener el MCD con los del MCM. Esto se evidencia cuando, al intentar encontrar el MCD de 12

y 15, el estudiante sugiere incorrectamente multiplicar los números en lugar de identificar los factores comunes y tomar el mayor divisor común. Este error también se observa en actividades posteriores, donde los estudiantes aplican incorrectamente el algoritmo para el MCM en problemas que requieren el MCD. Sin embargo, la introducción del modelo de retícula ha facilitado una mejor comprensión de estas relaciones. Esta metodología ha demostrado ser interesante, ya que los alumnos recuerdan más fácilmente los pasos necesarios para resolver estos problemas, esto gracias a sus características visuales que permiten en el estudiante el reconocimiento de propiedades y relaciones numéricas.

Hallazgos sobre modelos de representación

La implementación de las actividades relacionadas con el modelo de representación propuesto en la secuencia de tareas ha resultado en que los alumnos perciban una forma diferente de representar números para la obtención del MCM y el MCD. Esta metodología ha facilitado la comprensión de estos conceptos, sino que también ha promovido el uso consciente de relaciones numéricas necesarias para llevar a cabo cada actividad. Los estudiantes se ven obligados a ser más conscientes sobre aspectos relacionados con la divisibilidad y números primos, el reconocimiento de patrones, el producto entre números y múltiplos, lo anterior flejado en actividades como las siguientes:

1. Desarrolla la siguiente actividad siguiendo el mismo patrón de colores, apoyate en la tabla de números de la primera actividad si es necesario, arma cada gráfica utilizando las bolitas palitos y puntos como representación de factores



Figura 22- Gráfico del número 6, estudiante E2

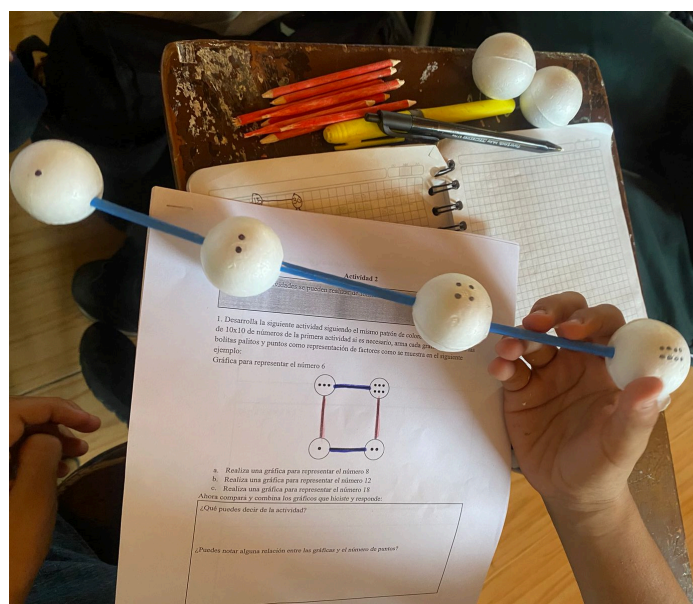


Figura 23-Gráfico del número 8, estudiante E4

Por otro lado, he observado que trabajar un tema que por lo general es muy procedimental de manera un poco lúdica y didáctica despertado un gran interés entre los alumnos por trabajar y construir cada número como si fuesen legos, a continuación algunos de sus comentarios al respecto:

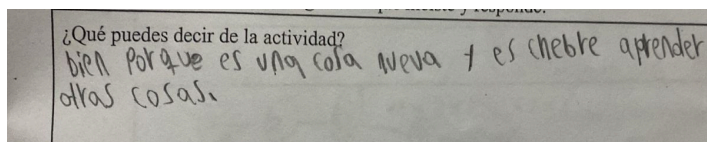


Figura 24-Respuesta estudiante E4.

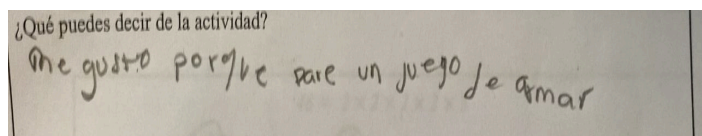


Figura 25-Respuesta estudiante E1

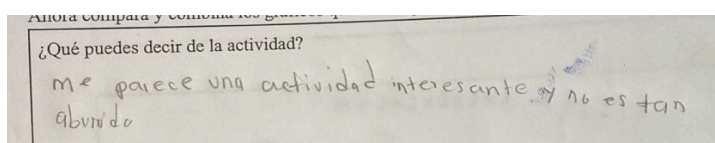


Figura 26-Respuesta estudiante E6

En conclusión, la implementación del modelo de representación en las actividades ha permitido a los estudiantes abordar el cálculo del MCM y el MCD de manera más comprensible y visual, lo que ha facilitado el entendimiento de conceptos clave como la divisibilidad y los números primos. Al utilizar representaciones gráficas, como bolitas, palitos y puntos, los alumnos han logrado desarrollar un mayor reconocimiento de patrones y una mejor comprensión de las relaciones numéricas. Esto sugiere que la integración de modelos de representación puede ser una estrategia para promover un aprendizaje más profundo y consciente de conceptos y relaciones matemáticas.

Hallazgos Divisibilidad

La relación de divisibilidad estuvo presente durante todas secciones de clase, se lograba ver una comprensión en relación al concepto de divisibilidad en momentos como:

E5: El 2

P: ¿Por qué son llamados números primos?

E4: Porque son divisibles. Solo tienen dos divisores

P: Dos divisores, ¿quiénes?

E4: El mismo y por 1

P: Por el mismo aja, y la unidad que es uno

P: Bien niños, vamos a desarrollar la siguiente actividad

(reparte la actividad)

Donde se menciona que los números primos solo tienen dos divisores, resalta una comprensión básica pero esencial de la divisibilidad y cómo se aplica a los números primos.

Por otro lado actividades como la descomposición de números en factores primos, reta al estudiante a conocer el proceso de divide por el menor número primo posible y continuar dividiendo el cociente obtenido por el menor número primo hasta que llegues a un cociente primo

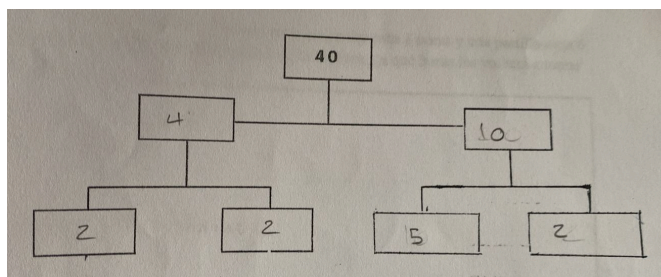


Figura 27- Respuesta a problema 3 de la actividad diagnóstica, esquema de descomposición E7

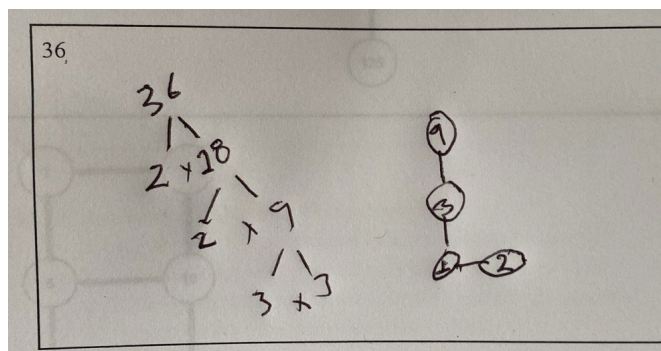


Figura 28- Respuesta a problema 1 de la actividad evaluativa, estudiante E10

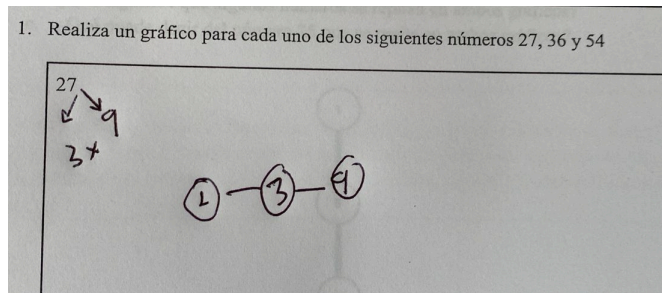


Figura 29-Respuesta a problema 1, actividad evaluativa, estudiante E3

El desarrollo de estos problemas muestra un conocimiento sobre las relaciones de divisibilidad necesarias para encontrar números los números primos de cada número descompuesto.

En conclusión, la relación de divisibilidad estuvo presente en todas las secciones de clase, demostrando una comprensión clara y esencial de esta relación. Esto se evidenció en momentos, como cuando se discutió sobre los números primos, donde los estudiantes mostraron entender que los números primos solo tienen dos divisores: el mismo número y la unidad. Además, actividades como la descomposición de números en factores primos desafiaron a los estudiantes a aplicar el proceso correcto de divisibilidad, dividiendo sucesivamente por el menor número posible. El desarrollo de estos problemas reflejó un conocimiento de las relaciones de divisibilidad necesarias para identificar los números primos de cada número descompuesto.

Hallazgos sobre Números primos

Se evidencia un reconocimiento del concepto de números primos en algunos alumnos, a través de intervenciones como la siguiente:

P: ¿Recuerdan que son los números primos?

E1: No

E2: No

E3: No

Profesor: ¡Bien!, veamos.

E4: Profe, si yo se(*levanta la mano*)

P: Si, dime

E4: El 7, el 5

E5: El 2

P: ¿Por qué son llamados números primos?

E4: Porque son divisibles. Solo tienen dos divisores

P: Dos divisores, ¿quiénes?

E4: El mismo y por 1

P: Por el mismo aja, y la unidad que es uno

P: Bien niños, vamos a desarrollar la siguiente actividad

(*reparte la actividad*)

Ahora bien, a partir de esta conversación se ejemplifican varios aspectos clave de la relación entre la divisibilidad y los números primos, como se observa en afirmaciones tales como:

“P: ¿Por qué son llamados números primos?

E4: Porque son divisibles. Solo tienen dos divisores

P: Dos divisores, ¿quiénes?

E4: El mismo y por 1”

Por otro lado también se evidencia un reconocimiento de de estos por identificar correctamente algunos de estos números, en la siguientes líneas de intervención

P: Si dime

E4: El 7, el 5

E5: El 2

lo que ilustra la capacidad de reconocer estos números basándose en su propiedad única de divisibilidad.

Lo anterior también se ve en la siguiente actividad propuesta y en su desarrollo como por ejemplo:

Actividad 1

En la siguiente actividad se les proporciona a los estudiantes una cuadrícula de números de 10x10 con las siguientes instrucciones
Identifica y colorea todos los número primos que encuentres en la siguiente tabla

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 30-Respuest a problema 1, actividad diagnostica, estudiante E11

En esta actividad se puede apreciar el reconocimiento de los números primos en la tabla. Esto es importante mencionar, ya que en el desarrollo de las actividades relacionadas con la retícula, los estudiantes deben tener un adecuado reconocimiento de estos números. Un ejemplo de tales actividades es:

1.Realiza un gráfico para cada uno de los siguientes números 27, 36 y 54

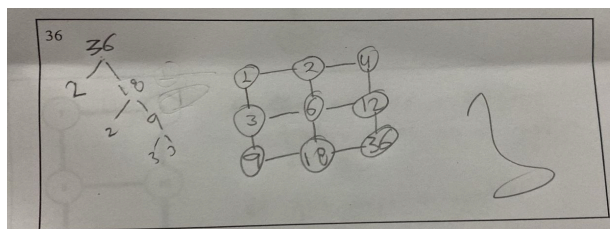


Figura 31-Respuesta problema 1 de la actividad evaluativa , estudiante E10

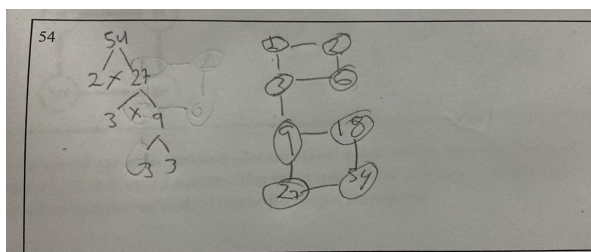


Figura 32-Respuesta a problema 1 de la actividad evaluativa , estudiante E17

Actividades donde es necesario el conocimiento de estos números y de sus relaciones con la divisibilidad y unicidad de esta misma.

Los anteriores hallazgos evidencian que algunos alumnos han logrado un reconocimiento básico del concepto de números primos, particularmente en su capacidad para identificar números primos y comprender la relación entre divisibilidad y los divisores específicos de estos números. Las intervenciones en clase revelan que los estudiantes reconocen que los números primos tienen solo dos divisores: el 1 y el mismo número. Aunque aún existen lagunas en el conocimiento de algunos estudiantes, el intercambio en el aula y las actividades propuestas han permitido fortalecer su entendimiento, especialmente en la identificación de números primos a través de sus características divisibles. Este proceso refleja un avance gradual en su comprensión.

3.2.2 Análisis Cognitivo

Hallazgos sobre el EBC y DBA

Estándares Básicos de Competencias (EBC):

1. Comprensión de números y numeración:

Las actividades propuestas permiten a los estudiantes interactuar con números enteros, números primos, criterios de divisibilidad entre otros, facilitando la comprensión del MCM y MCD

2. Resolución de problemas:

A través de la resolución de problemas relacionados con el MCM, MCD y números primos, los estudiantes practican estrategias para abordar situaciones matemáticas y aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones problema.

3. Razonamiento y Argumentación:

Las intervenciones de los estudiantes y el profesor destacan la importancia de que los estudiantes argumenten y justifiquen sus respuestas, promoviendo así el desarrollo del razonamiento matemático.

4. Comunicación Matemática:

Se observa cómo los estudiantes participan en discusiones y explican sus procesos de pensamiento, lo que contribuye a mejorar sus habilidades de comunicación matemática.

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA):

1. Utiliza las propiedades de los números enteros:

Aunque se observan dificultades en la aplicación de las propiedades de los números enteros y su descomposición, las actividades permiten a los estudiantes practicar estrategias de cálculo y reconocer la importancia de estas propiedades en la resolución de problemas relacionados con el reconocimiento e identificación de ciertos tipos de números y sus propiedades

2. Argumenta la necesidad de establecer relaciones y características en conjuntos de números:

A través de las intervenciones y actividades, los estudiantes empiezan a comprender la importancia de establecer relaciones y características en conjuntos de números, como los números primos y sus divisores.

Ahora bien, las actividades diseñadas han facilitado a la comprensión del MCM, el MCD y otros conceptos fundamentales en relación a estos mismos temas, promoviendo el razonamiento matemático y la resolución de problemas. Aunque se han identificado dificultades en la aplicación de propiedades de números enteros y en la comprensión de relaciones numéricas, las actividades relacionadas al modelo de retícula han brindado una base más fuerte para mejorar las habilidades de cálculo y reconocer la importancia de establecer relaciones numéricas

Hallazgos sobre Dificultades y errores

Durante las sesiones de clases y el desarrollo de las actividades, los estudiantes presentaron dificultades y errores en las siguientes actividades:

- Reconocimiento de números primos: Cometiendo errores en el método para identificar estos números, algunos estudiantes colorearon los números impares, pensando que si el último dígito de un número es impar, entonces es primo, cayendo así en un error

Actividad 1

1. En la siguiente actividad se les proporciona a los estudiantes una cuadrícula de números de 10x10 con las siguientes instrucciones

- Identifica y colorea todos los número primos que encuentres en la siguiente tabla

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 33-Respuesta problema 1 de la actividad diagnóstica , estudiante E15

Actividad 1

1. En la siguiente actividad se les proporciona a los estudiantes una cuadrícula de números de 10x10 con las siguientes instrucciones

- Identifica y colorea todos los número primos que encuentres en la siguiente tabla

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 34-Respuesta problema 1 de la actividad diagnóstica , estudiante E9

- Reconocimiento de múltiplos de un número, los estudiantes colorean columnas completas sin tener en consideración lo que el problema les pide

a. Colorear los múltiplos de 2 de color azul
b. Colorear los múltiplos de 6 de color amarillo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 35-Respuesta problema 1 inciso a y b de la actividad diagnóstica , estudiante E13

- Descomposición prima de un número, el estudiante no identifica de manera correcta la descomposición en números primos que el problema requiere

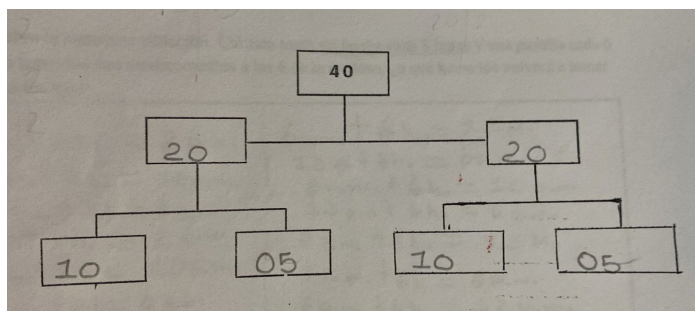


Figura 36-Respuesta problema 3 de la actividad diagnóstica, esquema de descomposición del 40, estudiante E1

- Desconocimiento para aplicar el método para obtener MCM, dificultades para identificar que solo se debe tomar el factor de mayor potencia

MCD

1) Maria asiste al centro de idiomas cada 4 días y Mateo cada 6 días. Si hoy asisten juntos, ¿cuándo se volverán a encontrar?

a) En el día 12
b) En el día 2
c) En el día 24
d) En día 4

La respuesta se halla con el MCM
ES la b) 24 días
 $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

Handwritten work for MCD:

4/2	6/2
2/2	3/3
①	①

Figura 37- Respuesta problema 1 de la prueba diagnóstica, estudiante E7

4) Angie tiene un cordón negro de 12 metros y otro rojo de 20 metros. Si quiere cortarlos en trozos de la misma longitud (iguales) sin que sobre nada, ¿cuál será la máxima longitud de cada trozo?

a) 2 metros
b) 60 metros
c) 12 metros
d) 4 metro

Handwritten work for MCD:

12-20	20-20
-16-10	-20-1
3-5	5-2

$2 \times 2 = 4$

Figura 38-Respuesta problema 4 de la prueba diagnóstica, estudiante E12

- Dificultades para argumentar y comunicar ideas

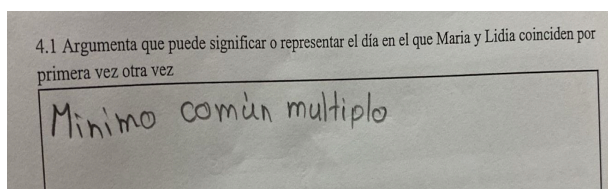


Figura 39-Respuesta problema 4.1 de la prueba diagnóstica, estudiante E12

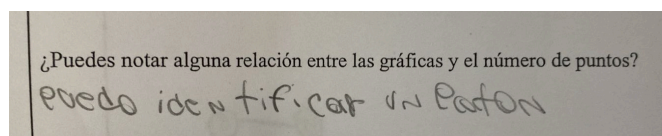


Figura 40-Respuesta del problema 1 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación, estudiante E6

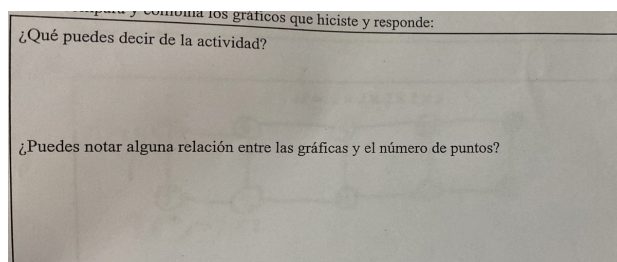


Figura 41-Problemas en blanco

- Dificultades y errores en el reconocimiento de relaciones y patrones para hacer uso del modelo de retícula

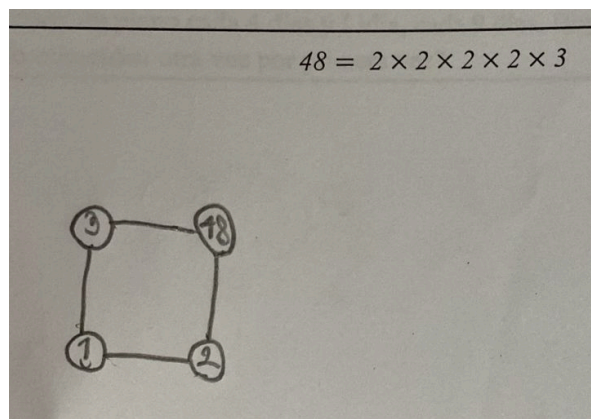


Figura 42-Respuesta del problema 2 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación , estudiante E6

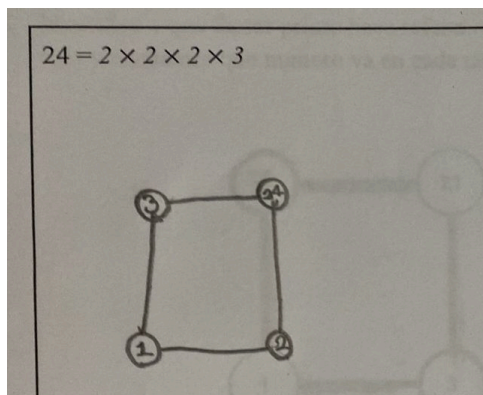


Figura 43-Respuesta del problema 2 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación , estudiante E8

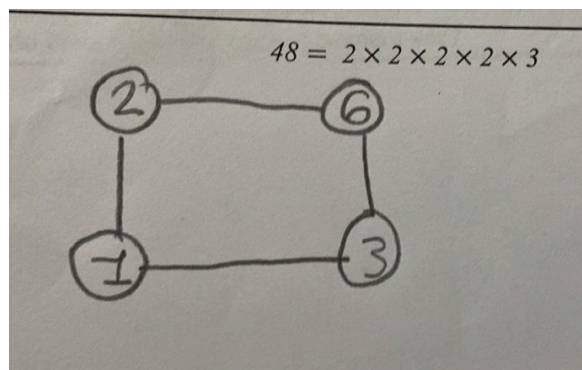


Figura 44-Respuesta del problema 2 de la actividad de desarrollo, exploración y ampliación , estudiante E6

Las anterior caracterización de las dificultades y errores presentes durante las sesiones fueron las más recurrentes durante las actividades propuestas y llevadas a cabo.

En el análisis de las dificultades y errores presentados por los estudiantes durante las actividades muestra varios patrones recurrentes. Los errores más comunes incluyeron una identificación incorrecta de los números primos, confusión al reconocer múltiplos de un número, y dificultades con la descomposición prima. Además, se observaron fallas al aplicar el método correcto para obtener el MCM, especialmente al identificar el factor de mayor potencia, y una limitada capacidad para argumentar y comunicar ideas matemáticas. Estos problemas reflejan no sólo una comprensión insuficiente de conceptos clave, sino también dificultades en el uso de modelos y patrones, como el modelo de retícula.

Hallazgos sobre oportunidades de aprendizajes

La enseñanza de la retícula otorga oportunidades de aprendizaje tales como:

- Comprensión de los factores primos
- Visualización y manipulación de números
- Resolución de problemas de MCD y MCM
- Pensamiento crítico y resolución de problemas

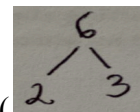
Esto se debe a las relaciones numéricas intrínsecas que se trabajan al poner en práctica este modelo de representación.

Un ejemplo al respecto se da en el siguiente momento de enseñanza, en el cual se evidencia la necesidad de comprender las relaciones numéricas que preceden al MCM y MCD para la comprensión de este método.

P: Vamos a trabajar algo distinto hoy, esta clase se trata de usar un modelo para representar números que al final nos va a ayudar a averiguar cual es el MCM y MCD entre dos números, es un método distinto al que usualmente empleamos, por favor necesito su atención, bueno

E1: Buenos profe...

P: Bien, veamos, a este método se le llama retícula o rejilla listo, por ejemplo para el caso del

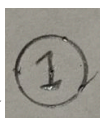


número primero buscamos los factores primos de 6, de la siguiente manera (**Figura**

45- Descomposición prima del 6), ahora bien, lo siguiente es representarlo a través de nuestro modelo de rejilla donde, en este caso tenemos a los factores primos 3 y 2

P: Bien, sigamos, entonces para el caso del 6 como ya dijimos tiene como factores primos al 3 al 2 y además a que otro número?

E2: (*levanta la mano*) al 1

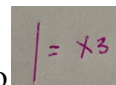


P: Exacto, entonces, ponemos al 1(**Figura 46-Bola con el numero 1**), en el primer círculo y un palito de color negro que represte el multiplicar por cada factor, para el caso del 6

seria el multiplicar por 2 (*dibueja en el tablero* **Figura 47-Palito equivalente a multiplicar**

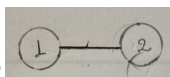


por 2) y el de color rojo el multiplicar por 3(*dibuja en el tablero* **Figura 48-Palito** equivalente a multiplicar por 3), entonces si colocamos primero el 1 y multiplicamos por 2 hacia la derecha cuánto me da?



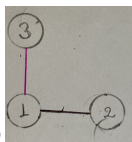
E2: 2

P: aja, 2, así (*dibuja en el tablero* **Figura 49-Gráfico de los factores 1 y 2**) ahora si



tengo el 1 aquí y multiplicamos hacia arriba que me da?

E3: 3

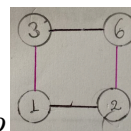


P: Exacto 3 (*dibuja en el tablero* **Figura 50**-Gráfico de los factores 1,2 y 3) ahora solo completamos la figura teniendo en cuenta lo que representa cada cosa y averiguamos el número que nos hace falta, que sería?

E2: el 6 profe?

P: ¿Por qué el 6?

E2: Porque si multiplicamos el 2 por tres que es el valor del palito rojo entonces me da 6



P: ajaaaa, y entonces el gráfico nos quedaría así (*dibuja en el tablero* **Figura**

51-Retícula del número 6)

E1: Profe, como se le llama a eso

P: Gráfico de rejilla o también retícula

E1: ahhh (*escribe en el cuaderno*)

P: Entonces qué obtuvimos, una rejilla que representa al número 6 a través de sus números primos.

Ese es un ejemplo para aquellos números que tiene en su descomposición solo a 2 factores primos

E2:Profe(*levanta la mano*) entonces cómo se hace para los números que tiene más de 2 factores, como el 30 por ejemplo

P: ¿Qué factores tiene el 30?

E2: 2, 5 y 3

P: Ajá, 2,5 y 3 cierto

P: Para este caso cuanto palitos necesitamos?

E2: 3 profe, 3 porque el 30 tiene 3 factores

P. Exacto, tres palitos, estos tres palitos van de la siguiente manera, uno de forma vertical, uno de forma horizontal y otro de forma diagonal, de la siguiente manera *(dibuja en el tablero)*

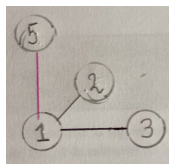


Figura 52-Gráfico de los factores 1,2,3 y 5) en este caso no sería una rejilla

cuadrada sino un rejilla en forma de cubo

E2: ahhhh, listo profe

P: Bien, niños, ahora vamos a trabajar las actividades que tienen en la guía

En conclusión, la enseñanza de la retícula ofrece múltiples oportunidades de aprendizaje que van más allá de la simple memorización de algoritmos. Al permitir la comprensión de los factores primos, la visualización y manipulación de números, y la resolución de problemas relacionados con el MCD y MCM, este método fomenta un pensamiento crítico y una habilidad para resolver problemas de manera efectiva. El ejemplo en clase muestra cómo los estudiantes pueden desarrollar una comprensión profunda de las relaciones numéricas al representar visualmente los números y sus factores.

3..2.3 Análisis de Instrucción

Hallazgos sobre tareas propuestas y sus respuestas

Actividad 1

1. En la siguiente actividad se les proporciona a los estudiantes una cuadrícula de números de 10x10 con las siguientes instrucciones

- Identifica y colorea todos los números primos que encuentres en la siguiente tabla

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 53-Respuesta a problema 1 de la actividad diagnóstica, estudiante E4.

- Colorear los múltiplos de 2 de color azul
- Colorear los múltiplos de 6 de color amarillo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 54-Respuesta a problema 1 de la actividad diagnóstica, estudiante E13.

- Colorear los múltiplos de 10 de color rojo
- Colorear los múltiplos de 15 de color verde

1) Maria asiste al centro de idiomas cada 4 días y Mateo cada 6 días. Si hoy asisten juntos, ¿cuándo se volverán a encontrar?

- a) En el día 12
- b) En el día 2
- c) En el día 24
- d) En día 4

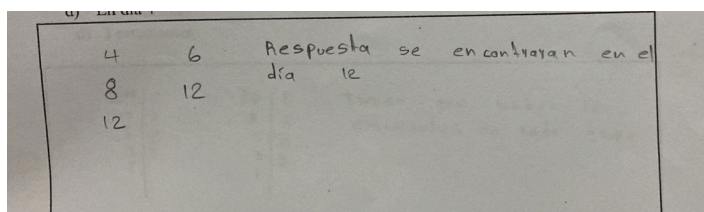


Figura 58-Respuesta al problema 1 de la actividad diagnóstica, estudiante E4

2) Resuelve la siguiente situación. Carmen toma un jarabe cada 8 horas y una pastilla cada 6 horas. Si tomó los dos medicamentos a las 6 de la mañana, ¿a qué horas los volverá a tomar al mismo tiempo?

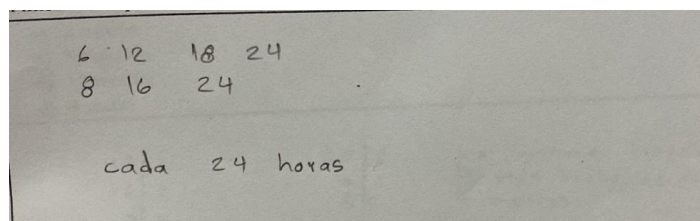


Figura 59- Respuesta a la actividad 2.

3) En la clase de Paola hay 24 estudiantes y en la de Mateo 36 estudiantes. Si en los dos cursos se deben hacer grupos iguales con el mayor número de estudiantes posibles sin que sobren, ¿cuántos estudiantes tendrá cada grupo?

- a) 1 estudiante
- b) 12 estudiantes

- c) 4 estudiantes
- d) 2 estudiantes

Handwritten student work showing the prime factorization of 24 and 36 to find their greatest common divisor (GCD). The work is written on a piece of paper with a rectangular border.

For 24: $24 \div 2 = 12$, $12 \div 2 = 6$, $6 \div 2 = 3$, $3 \div 3 = 1$. The prime factors are 2, 2, 2, 3.

For 36: $36 \div 2 = 18$, $18 \div 2 = 9$, $9 \div 3 = 3$, $3 \div 3 = 1$. The prime factors are 2, 2, 3, 3.

The common prime factors are 2, 2, and 3. The GCD is $2 \times 2 \times 3 = 12$.

Text written on the right: "Tienen que haber 12 estudiantes en cada grupo".

Figura 60- Respuesta a la actividad 3 por E10.

4) Angie tiene un cordón negro de 12 metros y otro rojo de 20 metros. Si quiere cortarlos en trozos de la misma longitud (iguales) sin que sobre nada, ¿cuál será la máxima longitud de cada trozo?

- a) 2 metros
- b) 60 metros
- c) 12 metros
- d) 4 metros

Handwritten student work showing the prime factorization of 12 and 20 to find their greatest common divisor (GCD). The work is written on a piece of paper with a rectangular border.

For 12: $12 \div 2 = 6$, $6 \div 2 = 3$, $3 \div 3 = 1$. The prime factors are 2, 2, 3.

For 20: $20 \div 2 = 10$, $10 \div 2 = 5$, $5 \div 5 = 1$. The prime factors are 2, 2, 5.

The common prime factors are 2 and 2. The GCD is $2 \times 2 = 4$.

Text written on the right: "La máxima longitud de cada trozo es de 4 metros".

Figura 61- Respuesta a la actividad 4 por E5.

Actividad 2

1. Desarrolla la siguiente actividad siguiendo el mismo patrón de colores, apoyate en la tabla de números de la primera actividad si es necesario, arma cada gráfica utilizando las bolitas palitos y puntos como representación de factores



Figura 62- Representación del 6 en el modelo de retícula



Figura 63-Representación del 8 en el modelo de retícula.

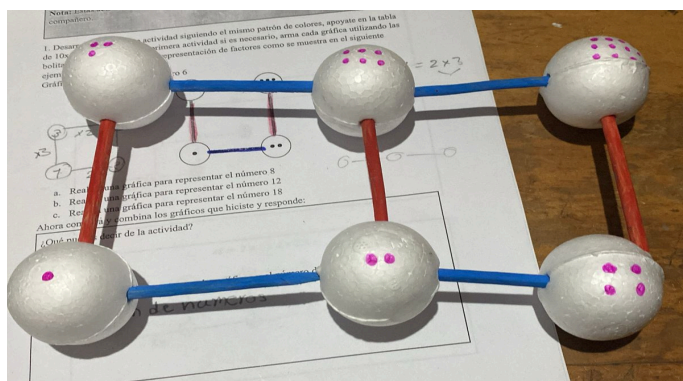


Figura 64-Representación del 12 en el modelo de retícula.



Figura 65-Representación del 18 en el modelo de retícula.

¿Qué puedes decir de la actividad?

¿Puedes notar alguna relación entre las gráficas y el número de puntos?

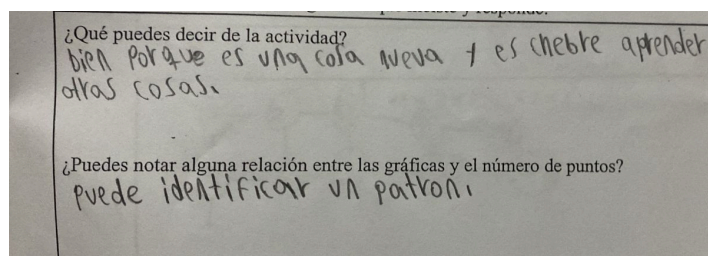


Figura 66-Reflexión de E8 acerca de la actividad.

2. Observa la descomposición prima de los siguientes números y realiza un gráfico para cada uno de ellos

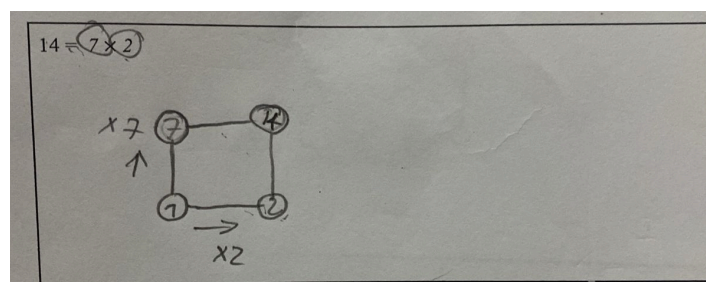


Figura 67- Modelo de retícula del número 14.

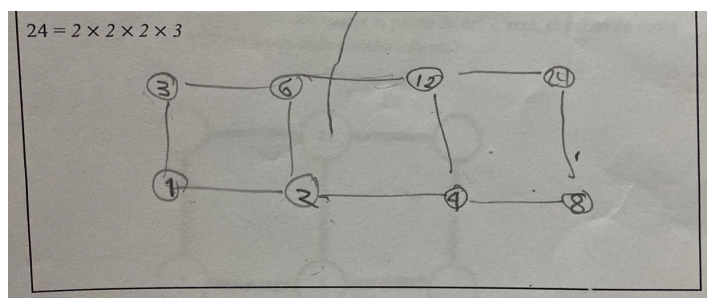


Figura 68-Modelo de retícula del número 24.

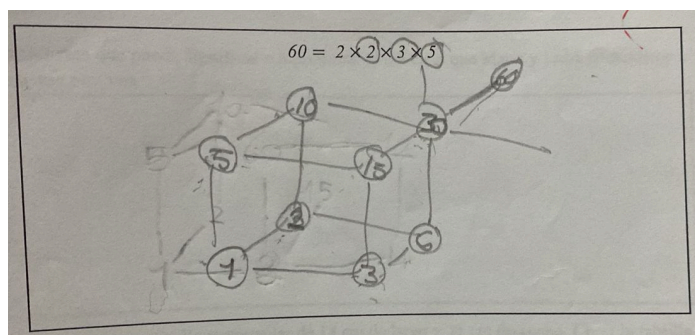


Figura 69-Modelo de retícula del número 60.

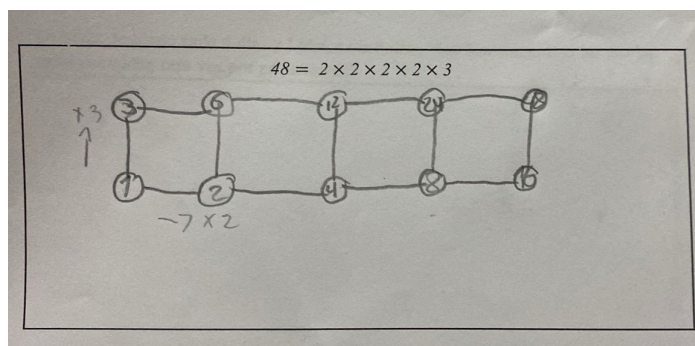


Figura 70-Modelo de retícula del número 48.

3. Dado el siguiente gráfico, completa según corresponda cada espacio faltante y luego responde:
- Identifica a que factor primo hace referencia el palito de color azul, el palito de color rojo y encuentra que numero va en cada circulo faltante?

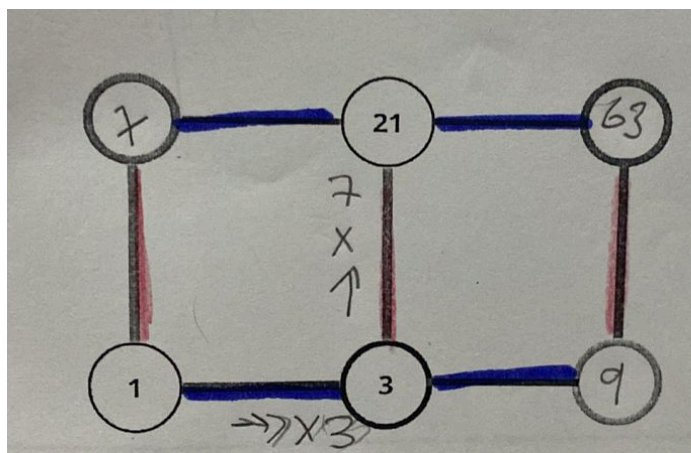


Figura 71- Respuesta actividad de completar modelo de retícula.

4. Maria va a clase de piano cada 4 días y Lidia, cada 9 días. Hoy han coincidido las dos en clase. ¿Cuándo coinciden otra vez por primera vez?

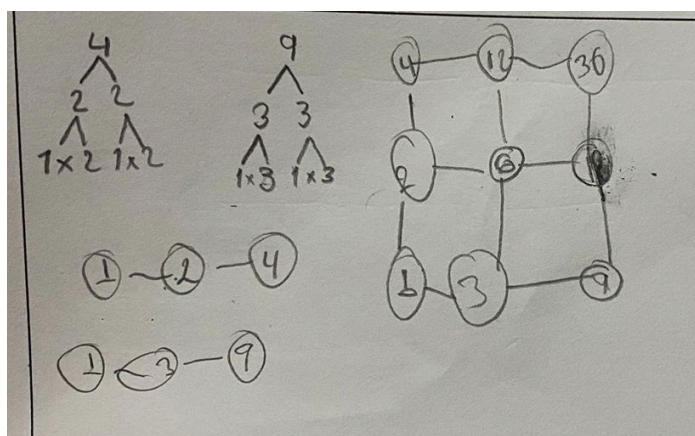


Figura 72- Respuesta a la actividad Representación del número 36.

4.1 Argumenta que puede significar o representar el día en el que Maria y Lidia coinciden por primera vez otra vez

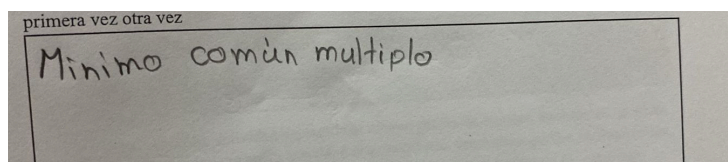


Figura 73- Respuesta acerca del MCM y MCD.

5. Alfonso tiene una tablilla rectangular de 18 cm de largo y 36 cm de ancho. Corta la tablilla en cuadrados iguales lo más grandes posibles. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado?

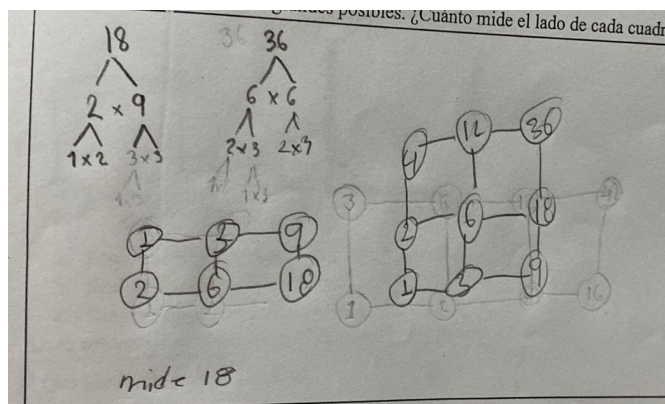


Figura 74- Descomposición del 18 y 36.

Actividad 3

1. Realiza un gráfico para cada uno de los siguientes números 27, 36 y 54

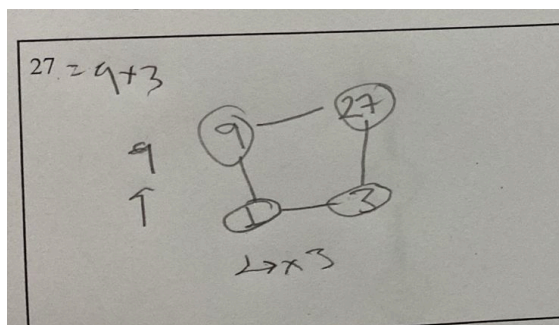


Figura 75- Descomposición del número 27.

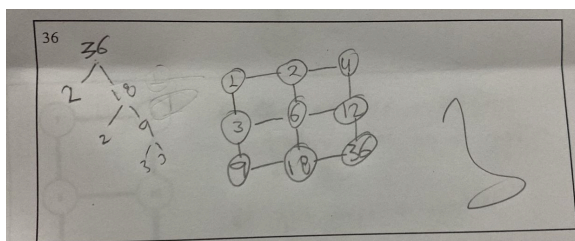


Figura 76- Descomposición del número 36.

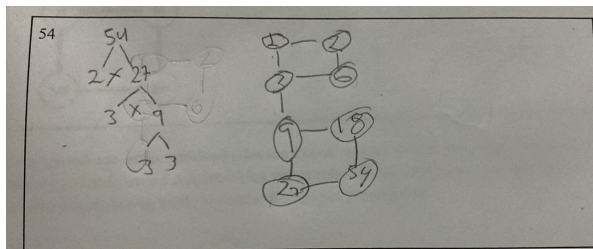


Figura 77. Descomposición del número 54

2. Compara los siguientes números 250 y 125 representados a continuación y responde:
 - a. ¿Encuentras alguna relación entre los gráficos?
 - b. ¿Qué significa que algunos números se repitan en ambos gráficos?
 - c. ¿Qué puede decir del número 25 que se repite en ambos gráficos?

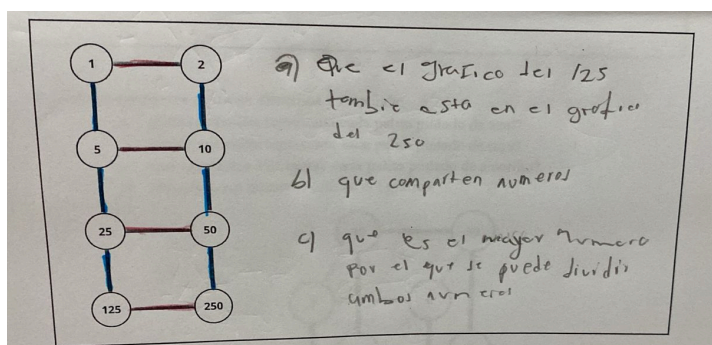


Figura 78- Reflexión acerca del ejercicio por E9.

2. En una calle se están instalando dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 3 minutos y el otro, cada 5 minutos. Una vez se conectan los semáforos, ¿cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo por primera vez?

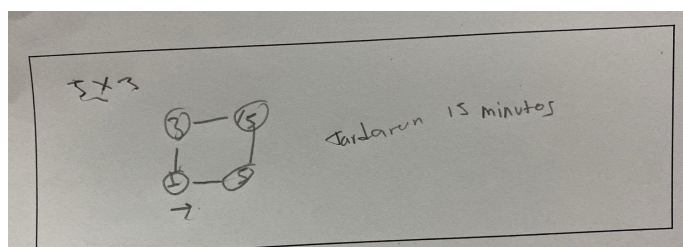


Figura 79- Modelo de retícula del 3 y el 5.

3. A Ana le han regalado 15 rosas rojas y 21 gardenias y quiere colocarlas en floreros en varias estancias de su casa de modo que cada florero tenga el mismo número de rosas y el mismo número de gardenias y que éstas sean el máximo posible. ¿Cuántos floreros necesita Ana?

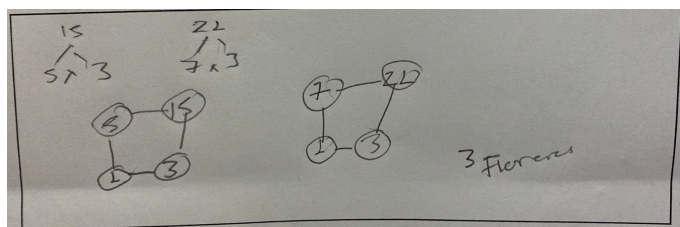


Figura 80- Descomposición de los números 15 y 21 con su modelo de retícula

En conclusión, el análisis de las tareas propuestas y las respuestas de los estudiantes revela que, a través de las actividades diagnósticas y de desarrollo, los alumnos han mostrado diversas habilidades y dificultades en la comprensión y aplicación de conceptos como el MCM, MCD, múltiplos y números primos. Las tareas que involucran representaciones gráficas y el uso de modelos de retícula ayudaron a algunos estudiantes a visualizar las relaciones entre los números y sus descomposiciones. Por otro lado, se identificaron dificultades en la interpretación y aplicación de las instrucciones, especialmente al identificar múltiplos y primos, y al justificar respuestas relacionadas con el MCM y MCD. A pesar de estos errores, las actividades fomentaron la reflexión y el análisis, y en muchos casos, los estudiantes lograron reconocer patrones y desarrollar una mayor comprensión de los conceptos a través de las representaciones visuales y manipulativas. Estos resultados destacan la importancia de integrar enfoques didácticos visuales y lúdicos para mejorar la comprensión matemática.

Hallazgos sobre el contexto de aula

La implementación y desarrollo de las actividades propuestas en este trabajo se llevaron a cabo en la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, con estudiantes de grado

sexto. Algo a resaltar de este grado es la diversidad de la población, donde se pudieron identificar estudiantes con un conocimiento superior en relación a los conceptos matemáticos con los que trabajamos. Esta parte de la población se mostró más receptiva y participativa durante cada sesión de clase, lo que contribuyó al buen desarrollo de la clase.

Por otro lado, también encontramos estudiantes con dificultades relacionadas con la comprensión de ciertas relaciones numéricas. Esto resultó en la necesidad de dedicar más tiempo de clase para tratar de nivelar a esta parte de la población, permitiendo así que pudieran continuar con las actividades programadas.

Hallazgos sobre la transiciones de las situaciones

Se realizaron dos sesiones de clase, divididas en tres situaciones. La primera sesión se desarrolló durante una hora y comenzó con una introducción y contextualización de algunos contenidos, relacionados con la primera situación denominada prueba diagnóstica.

La segunda sesión se desarrolló durante dos horas, divididas en dos situaciones. La primera se denominó actividades de desarrollo, exploración y ampliación, y la segunda situación, actividades evaluativas.

La primera transición entre estas situaciones se presentó cuando iniciamos con las actividades de desarrollo, exploración y ampliación. En esta fase, tuvimos que retomar temas relacionados con la divisibilidad, identificación de números primos y factorización, ya que los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica evidenciaban que una gran parte de la población estudiantil de sexto grado tenía problemas con estos temas. Por lo tanto, se hizo un refuerzo relacionado con estos temas y posteriormente se continuó con la presentación y explicación de las actividades de la segunda situación, donde se explicó detalladamente el modelo de retícula para la representación de números enteros.

(véase la figura 81)

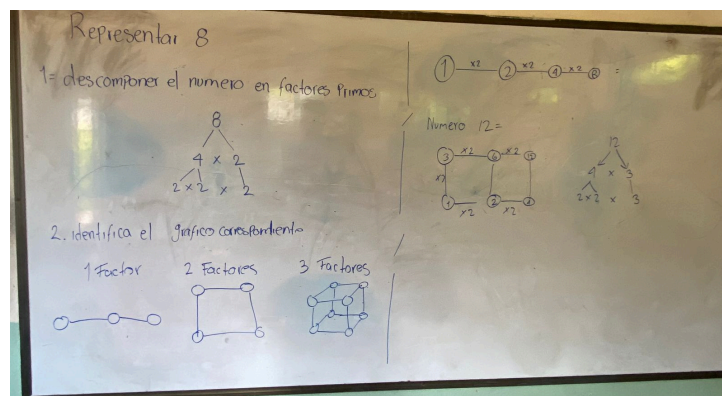


Figura 81- Explicación de la representación de números mediante el modelo de rejilla

Posteriormente, se inició con el desarrollo de las actividades de la situación de desarrollo, exploración y ampliación y luego pasamos a la situación de evaluación. Esta segunda transición se realizó de manera regular, ya que tuvo lugar justo después de la segunda situación, por lo que esta transición se facilitó gracias a las actividades desarrolladas previamente.

Hallazgos sobre los aprendizajes y comprensiones (evaluación)

Durante el proceso de enseñanza, se implementan evaluaciones formativas como cuestionarios breves, actividades en clase y discusiones grupales para monitorear los aprendizajes y las comprensiones de los estudiantes, además de una sesión dedicada a las actividades evaluativas. Gracias a estas actividades, se logró conocer que la mayoría de los estudiantes demostraron una mayor comprensión sobre las relaciones básicas de divisibilidad, la identificación de números primos, la factorización de números y sus divisores

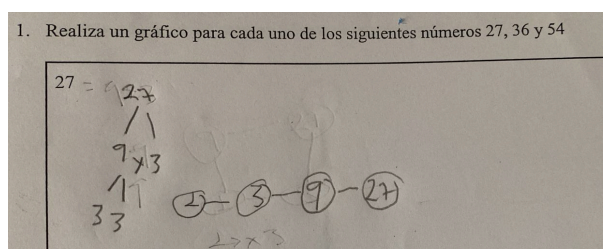


Figura 82- Descomposición y modelo de retícula del número 27.

Por otro lado, aunque al inicio hubo confusión entre el MCM y el MCD, las evaluaciones mostraron una mejora significativa en la diferenciación y aplicación correcta de estas relaciones tras la intervención con el modelo de retícula. Los estudiantes identificaron de manera más sencilla el procedimiento a seguir para hallar lo que el problema requería

2. En una calle se están instalando dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 3 minutos y el otro, cada 5 minutos. Una vez se conectan los semáforos, ¿cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo por primera vez?

Figura 83- Ejercicio número 2 de la actividad

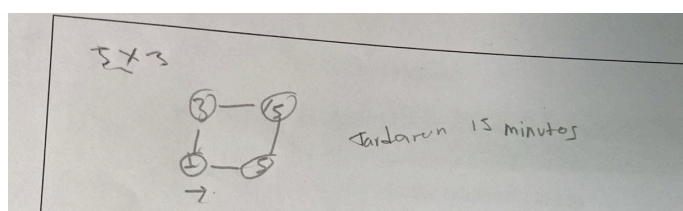


Figura 84- Modelo de retícula de 3 y 5

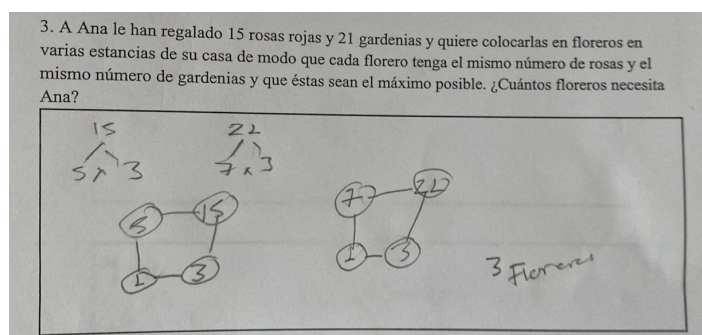


Figura 85- Respuesta de E8 ejercicio de descomposición y modelo de retícula de 15 y 21

Dentro de estas actividades evaluativas también surgieron espacios que permitieron a los estudiantes no solo demostrar su conocimiento, sino también desarrollar competencias en el ámbito de la comunicación y la colaboración.



Figura 86. Participación de E2 respondiendo el ejercicio 2

En conclusión, la implementación de evaluaciones formativas, como cuestionarios breves, actividades en clase y discusiones grupales, junto con una sesión dedicada a las actividades evaluativas, resultó en una mejora en la comprensión de los estudiantes sobre conceptos fundamentales de matemáticas. La mayoría de los estudiantes demostraron un dominio significativo en las relaciones básicas de divisibilidad, la identificación de números primos, la factorización de números y sus divisores. Aunque inicialmente hubo confusión entre el MCM y MCD, las evaluaciones indicaron una mejora en la diferenciación y aplicación correcta de estas relaciones numéricas tras la intervención con el modelo de retícula.

Hallazgos sobre Retos de enseñanza y de aprendizaje

Los retos de enseñanza a los cuales nos enfrentamos durante la implementación de la unidad están relacionados con:

1. la diversidad de la población presente en el salón de clase. Algunos estudiantes presentaron dificultades con temas relacionados a la factorización de números compuestos, identificación de números primos y relaciones de divisibilidad, dificultades que se trataron de mitigar con un acompañamiento durante a esta población durante la clase y el desarrollo de las actividades

2. El interés de los estudiantes: Mantener a los estudiantes interesados y motivados durante las sesiones resulta tedioso, especialmente cuando la hiperactividad de los estudiantes es alta.
3. El uso del material manipulativo: La implementación y gestión de las actividades con material manipulativo en el aula se convirtió en un reto debido a la logística que esto representó y al poco tiempo que se tenía a disposición.

En relación a los retos de aprendizaje surgieron algunos como:

1. La conceptualización y aplicación: Muchos de los estudiantes tenían muy presentes las relaciones numéricas, pero tenían dificultades para aplicar estas relaciones a problemas prácticos.
2. Representación de números: En algunos casos, los estudiantes perdían la idea de cómo debían organizar cada esfera y palito para que el gráfico represente correctamente el número. Esta dificultad surgió con frecuencia y se convirtió en un reto, lo cual nos hizo replantear nuestra heurística en varias ocasiones.

En conclusión, los principales retos de enseñanza incluyeron la diversidad de niveles en la clase, con dificultades en factorización, identificación de números primos y divisibilidad, lo que requirió mayor acompañamiento. Además, mantener el interés de los estudiantes, especialmente en un ambiente de alta hiperactividad, fue un desafío. El uso de material manipulativo resultó complicado por cuestiones logísticas y de tiempo. En cuanto al aprendizaje, los estudiantes mostraron dificultades para aplicar relaciones numéricas a problemas prácticos y confusión al representar números visualmente, lo que obligó a ajustar la estrategia didáctica.

4. Conclusiones y Reflexiones finales

A continuación, se presentan las conclusiones y reflexiones finales que surgen a partir de la elaboración del trabajo y la secuencia de tareas diseñadas para favorecer la enseñanza y comprensión del MCM y MCD. Para mayor practicidad, utilizaremos las siglas OE1 para referirnos a la fundamentación de la secuencia de tareas de la Unidad Didáctica basada en un enfoque visual de modelos de retículas a partir de referentes didácticos, curriculares, epistemológicos y fenomenológicos, OE2 para la caracterización de la secuencia de tareas basada en un enfoque visual de modelos de retículas para determinar los saberes, comprensiones y competencias desde la mirada del Análisis Didáctico en relación con el MCM y MCD y OE3 para referirnos a la descripción de los alcances y limitaciones de comprensión sobre las relaciones numéricas de MCM y MCD a partir de los registros de los estudiantes y sus intervenciones frente a las tareas propuestas en la Unidad Didáctica, así como designamos las siglas OEG para referirnos al objetivo general que pretende identificar evidencias de comprensión, sobre las relaciones numéricas de MCM y MCD a partir de una secuencia de tareas de una Unidad Didáctica basada en un enfoque visual de modelos de retículas, que se desarrolla con un grupo de estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali.

4.1 Conclusión en relación al Diseño de la UD

OE1 La metodología y el diseño de la Unidad Didáctica, fundamentada en un enfoque visual a través de modelos de retículas, ponen de manifiesto cómo los métodos activos de enseñanza, basados en referentes didácticos, curriculares, epistemológicos y fenomenológicos, promueven una adquisición más consciente del conocimiento por parte de los estudiantes. Estas

estrategias no solo facilitan la implementación de recursos visuales y manipulativos, sino que también fortalecen la capacidad de los estudiantes para abordar problemas matemáticos relacionados con el MCM y el MCD. A través del uso de modelos de representación, los alumnos logran una mayor flexibilidad y versatilidad al conceptualizar y representar matemáticamente las relaciones numéricas, lo que les permite una mejor comprensión de los procesos y propiedades. (Días, 2011)

OE2 La caracterización de la secuencia de tareas permite determinar saberes, comprensiones y competencias en los estudiantes en relación con el MCM y MCD, gracias a que la fundamentación del diseño y desarrollo de esta secuencia se realizó en coherencia con los análisis Didácticos establecidos a lo largo de la investigación, así pues las actividades desarrolladas no solo facilitaron una comprensión más profunda de las relaciones numéricas de MCM y MCD desde una perspectiva visual, sino que también promovieron el desarrollo de competencias matemáticas importantes, mejorando la capacidad de los estudiantes para aplicar dichos conceptos en la resolución de problemas prácticos y reales (Zimmermann, 1991).

El diseño de las tareas se estructuró siguiendo un patrón progresivo de complejidad, con el objetivo de guiar a los estudiantes en el descubrimiento y familiarización del modelo de retícula. A medida que avanzaban en la secuencia, los estudiantes se enfrentaron a niveles de representación como el simbólico y el gráfico y el manipulativo que les permitieron visualizar y comprender de manera gradual las relaciones entre el MCM y el MCD. No obstante, aunque las primeras tareas facilitaron el acercamiento inicial al modelo, se observaron limitaciones en la transición hacia situaciones más abstractas, donde algunos estudiantes se encontraron dificultades para generalizar los conceptos.

A pesar de estos retos, las actividades lograron alcanzar el objetivo que era el de promover una comprensión desde la representación visual más sólida de las relaciones numéricas relacionadas con el MCM y el MCD.

OE3 La estructura y organización del diseño de la Unidad Didáctica, junto con la secuencia de actividades, permitió una articulación entre los contenidos y los materiales utilizados. Esto posibilitó una exploración significativa de las relaciones numéricas asociadas al MCM y MCD desde una perspectiva visual y manipulativa, facilitando la identificación de los alcances y limitaciones en la comprensión de estos conceptos por parte de los estudiantes.

El diseño de la Unidad Didáctica basada en el modelo local de análisis didáctico permitió estructurar las tareas de manera más precisa, enfocándose de primera mano en los saberes previos de los estudiantes y los objetivos de aprendizaje vinculados con el MCM y MCD. A partir de este enfoque, se valora la importancia de secuenciar las actividades y tareas de forma coherente, atendiendo tanto a los niveles de complejidad como a los diferentes registros de representación utilizados para facilitar la comprensión de los estudiantes. Sin embargo, durante el proceso de diseño y desarrollo de la Unidad Didáctica nos enfrentamos a dificultades al intentar anticipar todas las posibles respuestas de los estudiantes, especialmente en los relacionados con la interpretación visual del modelo de retícula. También fue un reto tratar de equilibrar las actividades para que, aunque accesibles, mantuvieran un nivel de desafío que promoviera la reflexión y del descubrimiento autónomo de los estudiantes. Estas experiencias nos ayudaron a afinar nuestro enfoque, reconociendo la importancia de la flexibilidad y la adaptabilidad en el deseo para responder a las necesidades emergentes de los estudiantes.

4.2 Conclusiones en relación a la Implementación de la UD

OE1 Las interacciones de los estudiantes con el modelo de retícula permiten evidenciar cómo un enfoque visual fundamentado en referentes didácticos y curriculares, puede transformar la percepción sobre las relaciones numéricas y como se trabaja con ellas, por otro lado, el interés generado al trabajar con un recurso novedoso subraya la importancia de fundamentar la secuencia de tareas desde una perspectiva que valore la experiencia visual, gráfica y manipulativa, lo cual fomenta un pensamiento matemático más consciente y dinámico de las matemáticas y sus relaciones (Mishra, 2017).

OE2 La implementación de actividades estructuradas permite caracterizar la secuencia de tareas en función de los saberes y competencias adquiridos por los estudiantes. La necesidad de una preparación adecuada del discurso docente y la consideración de los intereses y niveles de comprensión de los alumnos, resaltan la importancia del Análisis Didáctico, evidenciando cómo estas estrategias favorecen un aprendizaje significativo y contextualizado del MCM y MCD (Dias, 2005).

OE3 Las observaciones sobre las reacciones y participaciones de los estudiantes ofrecen información valiosa para describir los alcances y limitaciones en la comprensión de las relaciones numéricas de MCM y MCD. Al documentar las intervenciones y registros de los estudiantes, se puede identificar cómo el uso de modelos de retícula ayuda a clarificar conceptos y, al mismo tiempo, señalar áreas donde se requiere mayor atención y adaptación en la enseñanza. En particular, algunos de los estudiantes observados fueron capaces de visualizar y representar gráficamente el MCM y el MCD de dos números de forma intuitiva, lo que facilitó la comprensión de cómo se relacionan entre sí el MCM y el MCD.

La implementación de un modelo visual y manipulativo en las actividades permitió a los estudiantes percibir nuevas formas de representar los números para la obtención del MCM y MCD. Este enfoque no solo facilitó la comprensión de estos conceptos, sino que promovió un uso consciente de relaciones numéricas como la divisibilidad, los números primos y el producto de números (secuencias numéricas y de patrones). Las actividades lúdicas y manipulativas, como la construcción de gráficas y representaciones con materiales, incrementaron el interés de los alumnos, transformando un tema que suele ser procedimental en una experiencia más didáctica y significativa.

El material manipulativo favoreció a la comprensión más intuitiva y visual de las relaciones entre múltiplos y divisores además de lograr visualizar de manera más clara la organización y estructura de los números, lo que les permitió abordar las tareas propuestas con una mayor confianza y precisión durante las sesiones de clase. Por otro lado, el diseño de las actividades también evidenció ciertas limitaciones como en la interpretación de los colores y en el significado de las direcciones de cada palito o recta para representar el cambio hacia un nuevo número primo, además, algunos de los estudiantes mostraron dificultades para generalizar estos conceptos a problemas más complejos, si bien las actividades prácticas facilitaron la comprensión inicial, algunos estudiantes presentaron dificultades para trasladar estos conocimientos a situaciones numéricas simbólicas. Estos aspectos sugieren la necesidad de explorar estrategias adicionales, para fortalecer la comprensión visual y conceptual en futuras actividades didácticas relacionadas a la implementación de este modelo.

4.3 Reflexiones finales

OE1 - La elaboración de las tareas de esta unidad didáctica, enfocada en referentes didácticos, curriculares, epistemológicos, fenomenológicos e históricos, ha enriquecido de

manera significativa el diseño de la misma. La atención a estos elementos ha posibilitado la estructuración de tareas pedagógicas alineadas con los objetivos educativos, la contextualización adecuada de los contenidos en el plan de estudios, así como la profundización en la naturaleza del conocimiento y la incorporación de una perspectiva histórica enriquecedora de los conceptos matemáticos que hacen parte de la secuencia de tareas.

Por otro lado, la importancia del análisis didáctico se ha convertido para nosotros en más que una simple herramienta metodológica para la elaboración de unidades en torno a un objeto matemático. También lo vemos como una estrategia integral que abarca formación, innovación e investigación. Es una forma de aprendizaje activo a través del análisis, una herramienta para adquirir conocimiento didáctico mediante la sistematización investigativa, y una fuente de innovación que se refleja en propuestas curriculares y de aula para abordar desafíos en la enseñanza.

El modelo local de análisis didáctico en matemáticas es una organización que se utiliza para interpretar y transformar el discurso matemático escolar, con el objetivo de establecer los significados de los conceptos y comprender la intencionalidad educativa detrás de ellos. Este modelo permite identificar y analizar las dificultades de aprendizaje y los obstáculos epistemológicos que pueden surgir en el proceso educativo, facilitando la creación de estrategias didácticas más efectivas y adaptadas a las necesidades específicas de los estudiantes. Además, fomenta la reflexión crítica sobre las prácticas docentes y promueve la colaboración entre educadores, contribuyendo así a la mejora continua del proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de las matemáticas.

OE2 - La integración de un enfoque como el de la retícula para la enseñanza de MCM y MCD surge como una estrategia favorable, pues este modelo no solo actúa como un medio para

representar gráficamente conceptos, sino que también funciona como un catalizador para la comprensión y la aplicación práctica de otros principios matemáticos involucrados, contribuyendo significativamente al desarrollo de habilidades matemáticas y al fortalecimiento del pensamiento lógico y abstracto en los estudiantes de este nivel educativo.

La organización de las tareas de la unidad didáctica se llevó a cabo en tres momentos. El primer momento tenía como objetivo hacer una caracterización de la población estudiantil de sexto grado. El segundo momento se diseñó con el propósito de introducir el modelo de retícula, comenzando con el reconocimiento de las relaciones numéricas que este modelo ofrece para llegar a la identificación del MCM y MCD. En este sentido, cada tarea se organizó con este propósito. Finalmente, en el tercer momento se presentó la evaluación, cuyo objetivo era recoger evidencia sobre la comprensión, aprendizaje, almacenes y limitación de este modelo y de las relaciones numéricas intrínsecas en su uso e implementación.

El uso del modelo de retícula para la obtención del MCM y MCD ofrece importantes beneficios en la enseñanza de matemáticas. Este enfoque proporciona una representación tangible de la factorización en números primos y permite visualizar tanto el MCD como el MCM. A través de la experiencia de construir y visualizar estos modelos, los estudiantes fueron capaces de identificar las propiedades y relaciones numéricas intrínsecas en la construcción de cada retícula. Además, estos modelos permiten a los estudiantes construir imágenes mentales de las relaciones entre los números naturales, más allá de los símbolos numéricos y exponenciales, enriqueciendo así su comprensión y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, este modelo presenta algunas limitaciones, la más importante de estas es el aumento en la complejidad para graficar números producto de más de tres factores primos.

Durante la implementación de la unidad, se presentaron desafíos en términos de gestión de la clase, organización de los grupos de trabajo para el uso de material manipulativo y manejo de este material en cada actividad planificada. Sin embargo, el desarrollo de las actividades permitió la caracterización de los saberes, la comprensión y los aprendizajes que los estudiantes mostraron durante cada sesión. Estos alumnos iniciaron con problemas relacionados con el reconocimiento de números primos, su factorización, las relaciones de divisibilidad y el desconocimiento del significado de MCM y MCD. Al final de la implementación, estos problemas se redujeron significativamente gracias a la intervención con el modelo de retícula, cuyo objetivo era fomentar el aprendizaje de las relaciones numéricas que subyacen al tratamiento del MCM y MCD.

OE3 - El análisis de los registros de los estudiantes y sus intervenciones frente a las tareas propuestas en la unidad didáctica revela tanto alcances como limitaciones en su comprensión de las relaciones numéricas del MCM y MCD.

Algunos de los alcances son:

1. Comprensión de factores primos: Los modelos de retícula han facilitado a los estudiantes una representación visual clara de los factores primos, permitiéndoles identificar y manipular los números de manera tangible.
2. Visualización del MCM y MCD: La visualización de los números y sus relaciones mediante la retícula ha permitido a los estudiantes entender de forma intuitiva cómo se determina el MCM y el MCD. Este método ha mejorado su habilidad para identificar estos valores al observar la intersección de los modelos de retícula para el MCD y la construcción del modelo más pequeño común para el MCM.

3. Desarrollo de habilidades de razonamiento y comunicación: La participación en actividades de retícula ha fomentado el razonamiento matemático y la capacidad de los estudiantes para argumentar y justificar sus respuestas, así como para comunicar sus procesos de pensamiento de manera más efectiva.

Ahora bien en relación a las limitaciones de comprensión de las relaciones numéricas, se ha podido concluir que algunas de estas son:

1. Reconocimiento de números primos: Algunos estudiantes mostraron dificultades en la identificación de números primos, confundiendo a veces los números impares con números primos.
2. Descomposición en factores primos: Hubo errores en la descomposición de números en sus factores primos, lo que indica una comprensión incompleta de este concepto.
3. Aplicación del método para MCM: Varios estudiantes presentaron dificultades para aplicar correctamente el método para obtener el MCM, especialmente en la identificación y uso de los factores de mayor potencia.
4. Dificultades de comunicación y argumentación: A pesar de los avances, aún se observan desafíos en la capacidad de los estudiantes para argumentar y comunicar sus ideas matemáticas de manera clara y coherente.
5. Reconocimiento de relaciones y patrones: Los estudiantes tuvieron problemas para reconocer y aplicar las relaciones y patrones necesarios para utilizar el modelo de retícula de manera efectiva.

Si bien la propuesta del modelo de retícula, ha demostrado ser beneficiosa para mejorar la comprensión de los factores primos, el MCM y el MCD, también ha resaltado áreas que requieren atención adicional.

OG - Las evidencias de comprensión sobre las relaciones numéricas de MCM y MCD se observaron a través del análisis de los resultados obtenidos en varios momentos de la implementación, argumentación y justificación de procedimientos en las tareas propuestas en la Unidad Didáctica. Algunas de estas evidencias son:

1. Resolución de problemas: Los estudiantes demostraron su comprensión del MCM y MCD al resolver problemas que requerían la identificación y aplicación de estas relaciones numéricas en distintos contextos.
2. Uso de material manipulativo: La facilidad o dificultad con la que los alumnos trabajaron con este modelo de representación de números naturales también proporcionó evidencias de su comprensión.
3. Aplicación de estrategias: El uso adecuado del modelo de retícula para la resolución de problemas indicó una sólida comprensión de las estrategias aprendidas.
4. Regularidad en el reconocimiento de patrones: Durante la implementación de la Unidad, la mayoría de los estudiantes identificaban en la construcción de cada retícula una regularidad en sus construcciones, demostrando un reconocimiento de relaciones numéricas que anteceden al MCM y MCD

En conclusión, el análisis de estos aspectos reveló un progreso significativo en la comprensión y aplicación de las relaciones numéricas de MCM y MCD entre los estudiantes.

Para abordar las limitaciones observadas en la unidad didáctica, se sugiere implementar diversas estrategias. Esto incluye diseñar actividades diversificadas que integren materiales manipulativos como modelos de retícula, así como problemas de resolución y discusiones en grupo para fortalecer la comprensión de los conceptos de MCM y MCD desde múltiples

perspectivas. Además, es importante brindar oportunidades adicionales para que los estudiantes refuercen conceptos básicos, como la identificación de números primos y la descomposición en factores primos, a través de actividades específicas y ejercicios de práctica. Asimismo, se propone realizar intervenciones individualizadas, identificando a los estudiantes con dificultades particulares y proporcionándoles apoyo adicional, ya sea a través de tutorías individualizadas, actividades diferenciadas o recursos específicos de aprendizaje.

Algunas oportunidades de mejora a considerar en futuros trabajos con este diseño, son:

1. Incorporar herramientas digitales, como aplicaciones interactivas y software educativo, puede facilitar la creación y manipulación de retículas, permitiendo a los estudiantes trabajar con números más grandes de manera más manejable y atractiva para ellos.
2. Capacitación docente sobre el uso del modelo de retícula, incluyendo estrategias para abordar sus limitaciones y para integrar eficazmente en el currículo, para mejorar la implementación y los resultados de aprendizaje
3. Implementar materiales de apoyo, crear y distribuir materiales didácticos adicionales, como guías paso a paso, ejemplos resueltos, y ejercicios prácticos, puede ayudar a los estudiantes a consolidar su comprensión y a los docentes a facilitar el aprendizaje.

Estas son algunas de las oportunidades a tener en cuenta que podrían mejorar el uso e implementación de este modelo de representación para la comprensión del MCM y MCD.

Propuesta de continuación para el estudio de aplicación del modelo de retícula descrito en esta investigación.

El uso del modelo de retícula para la enseñanza del MCM y MCD podría estudiar su efectividad en la aplicación a problemas contextualizados, en los que se reflejen situaciones de la vida real. Esto permitiría a los estudiantes ver la relevancia de estos conceptos fuera del entorno

solamente académico. Un estudio podría enfocarse en diseñar y probar tareas que involucren situaciones cotidianas donde el MCM y MCD sean útiles, como la sincronización de eventos recurrentes, la optimización de recursos, o la resolución de problemas. Además se podría emplear el uso de herramientas tecnológicas para simular modelos de retícula, que podría enriquecer la enseñanza del MCM y MCD, proporcionando una experiencia interactiva que facilite la comprensión visual y dinámica de estos conceptos.

Referencias bibliográficas

- Bodí, S.D., Valls, J. y Llinares, S. (2005), El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en $\mathbb{N}$. La construcción de un instrumento, *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 60, 3-24.
- Bodí, S.; Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en $\mathbb{N}$. Un análisis implicativo. Disponible en: <http://www.asi4.uji.es/actas/p2a1.pdf>
- Chacón, M. (2012) *Propuesta Didáctica para la enseñanza del mínimo común múltiplo y máximo común divisor* (Trabajo de grado). Universidad central de Venezuela, facultad de humanidades y educación. Venezuela, Caracas.
- Dias, A. (2005) Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple.
- Dias, A. (2011) *A Representation For Whole Numbers and Their Factors*, *Mathematic Department*. Central Michigan University.
- Duval, R. (2004) *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Cali. Merlín I.D
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, 5, 101-120.
- De Guzmán, M. de (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Madrid: Pirámide

- Gomez, J. (2016). *Un estudio de la relación de divisibilidad en subconjuntos de Z* (Trabajo de grado). Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Martínez, S., González, J. A. y Sotos, M. A. (2015). La influencia del enunciado en la resolución de problemas de m.c.d. y m.c.m. de estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 343-350). Alicante: SEIEM
- Martínez, S., González, J.A.y Sotos, M. A. (2015). Resultados preliminares de una investigación para el estudio de las dificultades en problemas de M.C.D. y M.C.M. ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete.
- Mishra, O. (2017). *Mathematical Modelling - An Effective Method for Making Mathematics Learning Joyful At Lower Secondary Level*. IOSR Journal of Research & Method in Education (IOSR-JRME) e-ISSN: 2320-7388,p-ISSN: 2320-737X Volume 7, Issue 1 Ver. III (Jan. - Feb. 2017), PP 44-50 www.iosrjournals.org
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencia en matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2015). Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas.
- López, A., Castro, E. y Cañadas, M.C. (2013). Significados de las relaciones “ser múltiplo” y “ser divisor” mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 355-365). Bilbao: SEIEM.

- Molina, M., Castro, E.(2015) Introducción a la divisibilidad. En. Segovia A, I., & Rico Romero, L (Eds.) *Matemáticas para maestros en Educación Primaria*. (123-146) Madrid: Pirámide.
- Pulgarin, H. (2016). *Proyecto de aula para la enseñanza de la divisibilidad en grado sexto en la Institución Educativa Tulio Ospina de la ciudad de Medellín* (Trabajo de grado). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.
- Ramos, E., y Martínez, C. G. (2020). Experimento de enseñanza para el tratamiento del mínimo común múltiplo. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16(59), pp. 16-32.
- Rico, L. y Segovia, I. (2001). Unidades didácticas: organizadores. En E. Castro *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pág. 83-104). España: Editorial Síntesis.
- Zainea, N. E. (2019). *Comentarios sobre la relación de divisibilidad y el diagrama de Hasse asociado a los divisores de un número* (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia.
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.). (1991). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization? En G. Kadunz y M. Yerushalmy. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7). Mathematical Association of America.
- Zazkis, R. y Campbell, SR (1996). Divisibilidad y estructura multiplicativa de los números naturales: comprensión de los futuros profesores. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 27 (5), 540-563.

Anexos

Unidad Didáctica

Introducción

Esta unidad didáctica está diseñada para fomentar el aprendizaje del MCD y el MCM en estudiantes de sexto grado. En esta unidad se utiliza un enfoque práctico, visual y manipulativo a través de un modelo denominado retícula con la intención de averiguar qué tanto facilita a la comprensión de estos conceptos matemáticos. La estructura de la unidad incluye actividades diagnósticas, de desarrollo y exploración, así como evaluativas, todas orientadas a consolidar el conocimiento de los estudiantes sobre estas relaciones numéricas.

Las actividades propuestas en este instrumento se llevan a cabo con estudiantes de sexto grado de secundaria pertenecientes a la Institución Educativa Normal Farallones de Cali. El tiempo estimado para el desarrollo de las secciones es de dos clases: una de una hora y otra de dos horas. En la primera sección se explicará el tema y se aplicará la prueba diagnóstica, mientras que en la segunda sección se realizarán las actividades de exploración y desarrollo, para finalmente evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

El objetivo general es que los estudiantes comprendan y utilicen el modelo de retícula para identificar el MCM y el MCD.

Para ello, se han diseñado diversas actividades que fomentan la identificación de conocimientos previos, la exploración activa y la evaluación continua del progreso de los estudiantes. Dichas actividades incluyen el uso de materiales manipulativos, como palitos de madera y esferas de polietileno, que permiten a los estudiantes visualizar de manera manipulativa las relaciones numéricas y patrones asociados con el MCM y MCD. Además, se integran problemas prácticos que requieren la aplicación de estos conceptos en situaciones reales, promoviendo así una comprensión profunda y significativa de estos conceptos.

Secuencia de actividades

Actividad (Diagnóstica)

Objetivo: Identificar conocimientos y saberes previos relacionados a los conceptos de MCM y MCD en los estudiantes de grado sexto.

Descripción: Realización de actividades relacionadas al MCM y MCD con el objetivo de sondear el nivel de comprensión y destrezas de los estudiantes. Estas actividades buscan evaluar

no solo el conocimiento teórico, sino también la capacidad para aplicar estos conceptos en situaciones prácticas.

Actividad 1

2. En la siguiente actividad se les proporciona a los estudiantes una cuadrícula de números de 10x10 con las siguientes instrucciones
 - Identifica y colorea todos los números primos que encuentres en la siguiente tabla

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura N°1

- a. Colorear los múltiplos de 2 de color azul
- b. Colorear los múltiplos de 6 de color amarillo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura N°2

- c. Colorear los múltiplos de 10 de color rojo
- d. Colorear los múltiplos de 15 de color verde

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura N°3

2. Enlista los primeros 10 múltiplos de los siguientes números:

6: ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ...

10: ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ...

15: ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ____ - ...

3. Completa el esquema de descomposición del 40 y determina su descomposición prima en el siguiente diagrama:

NOTA: Descomponer un número en factores primos es convertirlo en una multiplicación indicado de factores primos

Véase el ejemplo de la figura 4

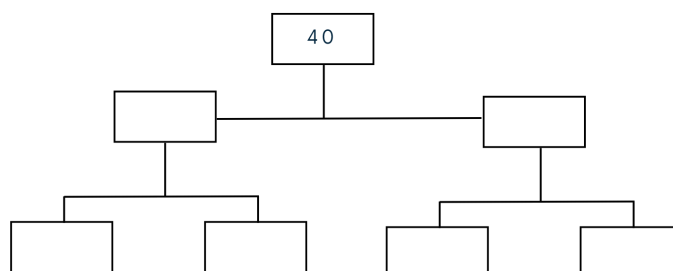
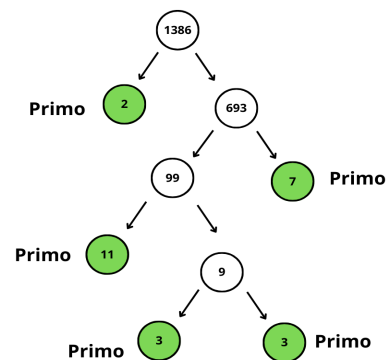


Figura N°5

PROBLEMAS: Responda y justifique si la respuesta se encuentra hallando el MCM o el MCD

1) Maria asiste al centro de idiomas cada 4 días y Mateo cada 6 días. Si hoy asisten juntos, ¿cuándo se volverán a encontrar?

- e) En el día 12
- f) En el día 2
- g) En el día 24
- h) En día 4

2) Resuelve la siguiente situación. Carmen toma un jarabe cada 8 horas y una pastilla cada 6 horas. Si tomó los dos medicamentos a las 6 de la mañana, ¿a qué horas los volverá a tomar al mismo tiempo?

3) En la clase de Paola hay 24 estudiantes y en la de Mateo 36 estudiantes. Si en los dos cursos se deben hacer grupos iguales con el mayor número de estudiantes posibles sin que sobren, ¿cuántos estudiantes tendrá cada grupo?

- e) 1 estudiante
- f) 12 estudiantes
- g) 4 estudiantes
- h) 2 estudiantes

4) Angie tiene un cordón negro de 12 metros y otro rojo de 20 metros. Si quiere cortarlos en trozos de la misma longitud (iguales) sin que sobre nada, ¿cuál será la máxima longitud de cada trozo?

- e) 2 metros
- f) 60 metros
- g) 12 metros
- h) 4 metro

Actividad 2 (Desarrollo, exploración y ampliación)

Especificaciones y materiales a ocupar:

Para esta actividad haremos uso de los siguientes materiales: palitos de madera, pintura, bolitas de poliestireno o plastilina y un marcador.



Instrucciones

Primero, lo que debes hacer es construir los modelos y elegir un color diferente para representar cada número primo que se va a representar. *Por ejemplo*, podemos estipular que el color rojo representará al 2 primo, el amarillo representará 3, el azul representará 5, el verde representará 7, y así sucesivamente.

Después, los palos de madera deben pintarse en estos colores, y representarán el factor principal en la constitución de un número.

Ahora bien, las esferas de poliestireno representarán los factores de un número y estarán etiquetadas con un bolígrafo o marcador. *Ejemplo*: Si queremos representar el 100, que su descomposición prima sería $2 \times 2 \times 5 \times 5$ o lo que igual $2^2 \times 5^2 = 100$, tendremos que comenzar sacando dos palitos del color azul que representa el 2 primo y colocándolos en secuencia. En los extremos de cada palo, colocamos una esfera marcada con la secuencia: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$

Preparamos otra secuencia lineal de palitos de color rosa y marcamos las bolitas para la siguiente secuencia: $5^0 = 1$, $5^1 = 5$ y $5^2 = 25$

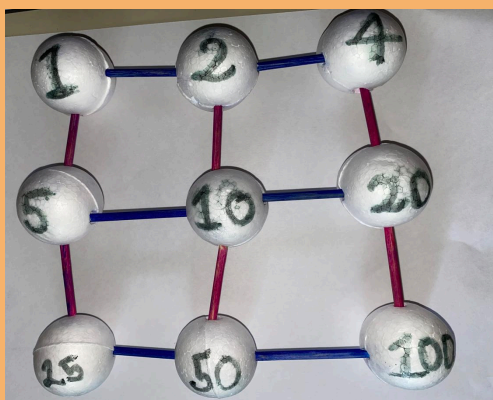


Figura N°9

Nota: Estas actividades se pueden realizar de forma individual o con ayuda de un compañero.

1. Desarrolla la siguiente actividad siguiendo el mismo patrón de colores, apoyate en la tabla de números de la primera actividad si es necesario, arma cada gráfica utilizando las bolitas palitos y puntos como representación de factores

- Realiza una gráfica para representar el número 6
- Realiza una gráfica para representar el número 8
- Realiza una gráfica para representar el número 12
- Realiza una gráfica para representar el número 18

Ahora compara y combina los gráficos que hiciste y responde:

¿Qué puedes decir de la actividad?

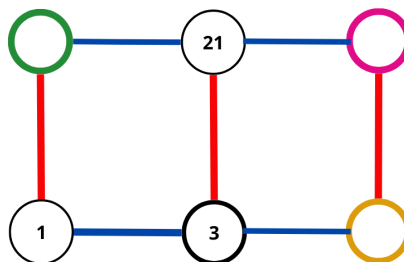
¿Puedes notar alguna relación entre las gráficas y el número de puntos?

2. Observa la descomposición prima de los siguientes números y realiza un gráfico para cada uno de ellos

- $14 = 7 \times 2$
- $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$
- $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
- $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

3. Dado el siguiente gráfico, completa según corresponda cada espacio faltante y luego responde:

- Identifica a que factor primo hace referencia el palito de color azul, el palito de color rojo y encuentra que numero va en cada circulo faltante?



4. Maria va a clase de piano cada 4 días y Lidia, cada 9 días. Hoy han coincidido las dos en clase. ¿Cuándo coinciden otra vez por primera vez?

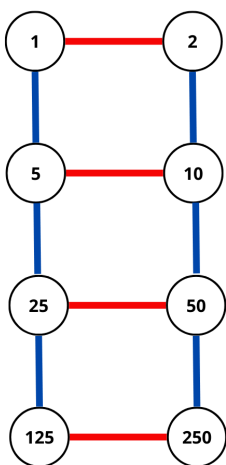
4.1 Argumenta que puede significar o representar el día en el que Maria y Lidia coinciden por primera vez otra vez

5. Alfonso tiene una tablilla rectangular de 18 cm de largo y 36 cm de ancho. Corta la tablilla en cuadrados iguales lo más grandes posibles. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado?

Actividad 3 (Evaluativa)

Nota: Puedes usar la tabla de números para identificar los primos de estos números y su descomposición.

1. Realiza un gráfico para cada uno de los siguientes números 27, 36 y 54
2. Compara los siguientes números 250 y 125 representados a continuación y responde:
 - a. ¿Encuentras alguna relación entre los gráficos?
 - b. ¿Qué significa que algunos números se repitan en ambos gráficos?
 - c. ¿Qué puede decir del número 25 que se repite en ambos gráficos?



3. En una calle se están instalando dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 3 minutos y el otro, cada 5 minutos. Una vez se conectan los semáforos, ¿cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo por primera vez?
4. A Ana le han regalado 15 rosas rojas y 21 gardenias y quiere colocarlas en floreros en varias estancias de su casa de modo que cada florero tenga el mismo número de rosas y el mismo número de gardenias y que éstas sean el máximo posible. ¿Cuántos floreros necesita Ana?

Referencias

- Dias, A. (2011) *A Representation For Whole Numbers and Their Factors, Mathematic Department*. Central Michigan University.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencia en matemática*. Bogotá: Magisterio.