

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Teorema de existencia de particiones de la
unidad en una variedad diferenciable**

TESIS DE GRADO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

Matemático

Autor:
Daniela BOLAÑOS

Director:
Dr. Alexander QUINTERO VÉLEZ

7 de septiembre de 2016



ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	II
Introducción	III
1. Preliminares topológicos	1
1.1. Espacios topológicos	1
1.2. Aplicaciones Continuas	3
1.3. Axiomas de separación	3
2. Variedades diferenciables	5
2.1. Cartas, atlas y variedades	5
2.2. Aplicaciones diferenciables	6
2.3. Espacio tangente y aplicación lineal tangente	7
3. Particiones diferenciables de la unidad	8
3.1. Topología de variedades diferenciables	8
3.2. Particiones diferenciables de la unidad	13
3.3. Aplicaciones	18

AGRADECIMIENTOS

Le doy gracias a mis padres Luzdey López y Andres Bolaños por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a mi director Alexander Quintero. Por haber compartido conmigo sus conocimientos.

A mis amigos por confiar y creer en mí y haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que nunca olvidaré. A jovanny ibarguen por apoyarme en los momentos de flaqueza y ayudarme a seguir adelante con sus apropiados consejos y su optimismo. A Daniel Tabares por hacer más amenos los días de arduo estudio con su carisma y optimismo. Y a David Gómez por haber creído en mí independientemente de las malas situaciones, por regalarme siempre una palabra de aliento cuando parecía decaer y por su apoyo incondicional siempre estaré agradecida.

INTRODUCCIÓN

El concepto de variedad surge al generalizar y formalizar la definición de curva y de superficie a cualquier dimensión. Informalmente hablando una variedad es un espacio topológico que localmente luce como $\mathbb{R}^n$. Este concepto va emergiendo gradualmente durante el siglo XIX de la geometría por un lado y la teoría de funciones por otro. La geometría diferencial estudiaba principalmente aspectos locales, tales como la curvatura, de curvas y superficies en el “espacio ordinario”, mientras que la teoría de funciones adaptaba un punto de vista más global.

Utilizando métodos puramente diferenciales en un principio, y basándose principalmente en técnicas combinatorias más tarde, Poincaré abordó en una serie de trabajos sobre *Analisis Situs* el estudio topológico de variedades tridimensionales. Aunque Hermann Weyl había definido variedades diferenciables abstractas en su libro de 1912 sobre superficies de Riemann, se debió esperar hasta los trabajos de Hassler Whitney de 1936 en adelante para que el concepto de variedad diferenciable alcance un status firme como un objeto matemático importante en muchos otros campos, incluyendo el de la matemática aplicada.

Una cuestión natural, entre otras cosas por el desarrollo histórico, es la siguiente: ¿puede toda variedad definida de forma abstracta considerarse como una subvariedad de algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$? La respuesta es sí, y es precisamente Whitney (1936) quien demuestra que toda variedad n -dimensional es difeomorfa a una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n+1}$ mejorando posteriormente este resultado a $\mathbb{R}^{2n}$ en 1944. En principio, no parece lógicamente necesario preocuparse en absoluto por la definición de variedad abstracta, puesto que toda variedad puede considerarse como una subvariedad de algún espacio euclidiano; sin embargo, es importante separar lo intrínseco de lo extrínseco, lo esencial de lo que no lo es, al tratar con objetos tan complicados en potencia como las variedades.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el teorema de existencia de particiones de la unidad en una variedad diferenciable arbitraria. Así mismo se buscan examinar algunas de sus aplicaciones como el lema de Urysohn, el teorema de extensión de Tietze y el teorema de Whitney. Con esta intención se seguirá el siguiente esquema: En el primer capítulo se introducirán los conceptos de la topología fundamental necesarios para desarrollar las temáticas siguientes, como son espacios topológicos, aplicaciones continuas y axiomas de separación. En el segundo capítulo se presentarán los conceptos de variedad diferenciable junto con algunos ejemplos, aplicaciones diferenciables, espacio tangente y aplicación lineal tangente. En el tercer y último capítulo se abordará directamente el tema central de éste documento, presentando algunos resultados de la topología de variedades diferenciables, siguiendo con particiones diferenciables de la unidad para así presentar el teorema de existencia de particiones de la unidad en una variedad diferenciable y finalizar con algunas aplicaciones de este teorema.

PRELIMINARES TOPOLÓGICOS

En éste capítulo se presenta el soporte teórico necesario para abordar las temáticas de los capítulos siguientes. Específicamente se dan las definiciones de espacio topológico, base de un espacio topológico, funciones continuas y se enuncian los axiomas de separación para el desarrollo posterior de este documento.

1.1 ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Existen diversas formas de introducir una *topología* sobre un conjunto X , todas ellas equivalentes. En este trabajo se considerará la topología inducida por los conjuntos *abiertos* de X . Se define como colección de abiertos para un conjunto X una familia $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple:

- (A1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$
- (A2) $\mathcal{G}$ es estable por intersecciones finitas.
- (A3) $\mathcal{G}$ es estable por uniones arbitrarias.

Al par $\tau = (X, \mathcal{G})$ se le llama un *espacio topológico*.

Se llama entorno de $x \in X$ a cualquier subconjunto de X que contenga a un abierto que a la vez contenga a x . Es inmediato comprobar que, usando (A.3), un conjunto es abierto si y solo si es entorno de cada uno de sus puntos. Si $\mathcal{V}_x$ representa la colección formada por todos los entornos de $x \in X$, se observa que se verifican las propiedades:

- (B1) Si $U \in \mathcal{V}_x$ entonces $x \in U$.
- (B2) Si $U, V \in \mathcal{V}_x$ entonces $U \cap V \in \mathcal{V}_x$.
- (B3) Dado $U \in \mathcal{V}_x$, existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que para todo $y \in V$ se cumple que $U \in \mathcal{V}_y$.
- (B4) Si $U \in \mathcal{V}_x$ y $U \subset V$ entonces $V \in \mathcal{V}_x$.

Si X es un conjunto y se da para cada $x \in X$ una colección $\mathcal{V}_x$ de partes de X , llamada *colección de entornos de x* , tal que verifique las propiedades (B.1), (B.2), (B.3) y (B.4), se obtiene una colección de abiertos para una topología de X , llamando abiertos a los conjuntos G tales que si $x \in G$ existe un $V \in \mathcal{V}_x$ con $V \subset G$.

Se dice que un conjunto es *cerrado* en X si su complemento es un conjunto abierto. Es decir, un conjunto $C \in \mathcal{P}(X)$ es cerrado si y solo si $C^c \in \mathcal{G}$.

Dado $A \subset X$, se llama *adherencia* de A a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A , y se denota por $\bar{A}$. Un punto $x \in X$ se llama punto *adherente* a A si $x \in \bar{A}$, y x es adherente a A si y solo si cualquiera que sea $V \in \mathcal{V}_x$ es $V \cap A \neq \emptyset$. Ésta última condición puede ser utilizada para definir la adherencia de A , resultando que A es cerrado si y solo si $A = \bar{A}$.

Los métodos habituales para definir una topología están dados por abiertos y cerrados, entornos y clausuras; no obstante puede plantearse la pregunta de dar métodos para construir abiertos, entornos y clausuras. Esto se consigue con los conceptos de *base* y *subbase de abiertos* (o de *cerrados*) y de *base de entornos*. En un espacio topológico llamamos *base de abiertos* a una colección $\mathcal{B}$ de abiertos tal que todo abierto es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Resulta que $\mathcal{B}$ es una base si se verifican las condiciones siguientes:

$$(C1) \quad \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X.$$

$$(C2) \quad \text{Si } x \in B_1 \cap B_2, \text{ con } B_1, B_2 \in \mathcal{B}; \text{ existe } B_3 \in \mathcal{B} \text{ tal que } B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Además, si se da una colección $\mathcal{B}$ que verifique (C.1) y (C.2) y se llama abierto a todo conjunto que sea unión de elementos de $\mathcal{B}$, entonces se obtiene una topología para la cual $\mathcal{B}$ es una base. Una aplicación de este concepto a un conjunto totalmente ordenado $(M, \leq)$ es definir como base la colección de intervalos abiertos $\mathcal{B} = (a, b)$ con $a, b \in M$; se obtiene la llamada *topología del orden* en $(M, \leq)$, que es la mínima colección de subconjuntos de M que es topología y contienen a la vez los intervalos abiertos.

En general, se puede plantear la pregunta de si dada una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X , existe una familia $\mathcal{G}$ de abiertos que contenga a $\mathcal{F}$. La respuesta es afirmativa: Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, la colección formada con las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{F}$ verifica siempre las condiciones (C.1), (C.2), es decir forman una base para una topología en X , $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, se dice que $\mathcal{F}$ es una subbase de $\mathcal{G}(\mathcal{F})$. Así, por ejemplo, los intervalos no acotados $(a, \infty) = \{x | a < x\}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$ forman una subbase para la topología del orden en un conjunto totalmente ordenado.

Si se da un sistema de entornos $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$, una familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ se llama *base de entornos* si $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$ cualquiera que sea $x \in X$ y si para cada $U \in \mathcal{V}_x$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subset U$. En general, una base de entornos $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ verifica:

$$D1 \quad \text{Si } V \in \mathcal{B}_x, x \in V.$$

$$D2 \quad \text{Si } V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x \text{ entonces existe } V_3 \in \mathcal{B}_x \text{ con } V_3 \subset V_1 \cap V_2.$$

$$D3 \quad \text{Si } V \in \mathcal{B}_x \text{ existe } V_0 \in \mathcal{B}_x \text{ tal que para cada } y \in V_0 \text{ existe } W \in \mathcal{B}_y \text{ con } W \subset V.$$

Si para cada $x \in X$ se da una colección $\mathcal{B}_x$ de partes de X , tal que se verifican las propiedades inmediatamente anteriores, entonces las colecciones $\mathcal{V}_x = \{U \subset X | \exists V \in \mathcal{B}_x, V \subset U\}$ cumplen las condiciones (B.1), (B.2), (B.3) y (B.4) y, por tanto, definen una topología en X , para la cual $(\mathcal{B}_x)_{x \in X}$ son una base de entornos.

Existen tres métodos importantes para definir topologías a partir de otras conocidas. En primer lugar está el concepto de *subespacio*. Si $Y \subset X$ es un espacio topológico, las intersecciones de los abiertos de X con Y definen una topología en Y ; con ésta topología, Y se llama *subespacio* de X . En segundo lugar se debe citar la *topología cociente*: Si X es un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X , la *topología cociente* en $X/\sim$ es aquella que tiene como abiertos las imágenes de los abiertos de X por la proyección canónica. Finalmente, si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos, la *topología producto* en $\prod_{i \in I} X_i$ es aquella que tiene como subbase de abiertos los conjuntos $G_j \times \prod_{i \in I, i \neq j} X_i$ en donde G_j es un abierto de X_j .

1.2 APLICACIONES CONTINUAS

La noción de continuidad surge tomando como modelo la idea del análisis clásico: Si X, Y son dos espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ y $x_0 \in X$ se dice que f es *continua* en x_0 si para cada entorno V de $f(x_0)$ existe un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset V$.

Una función f se dice continua en X si es continua en cada uno de sus puntos, siendo condición necesaria y suficiente para que f sea continua en X que la imagen inversa de un abierto sea también un abierto, es decir, que si G es un abierto en Y , $f^{-1}(G)$ sea un abierto en X . Otras condiciones equivalentes de continuidad son: (1) que la imagen inversa de cerrados sea un cerrado, y (2) que para cada $A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \bar{f(A)}$. Se tiene también la propiedad clásica de *continuidad secuencial*, es decir, f es continua en x_0 si y solo si cada vez que una sucesión $x_n \rightarrow x_0$ se cumple $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Se dice que un espacio topológico X satisface el *primer axioma de numerabilidad* si cada $x \in X$ tiene una *base numerable de entornos*. Si X verifica el primer axioma de numerabilidad, entonces $x \in \bar{A}$ si y solamente si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ y $x_n \rightarrow x$.

Las aplicaciones continuas entre espacios topológicos juegan el papel de los morfismos en las estructuras algebraicas. En este sentido se habla de estructuras *finales* e *iniciales* de colecciones de aplicaciones si X es un conjunto, y $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de aplicaciones de X en espacios topológicos X_i , $f_i: X \rightarrow X_i$, se llama *topología inicial* de X respecto de las $(f_i)_{i \in I}$, a la mínima *topología inicial* en X que hace que las f_i sean continuas, es decir, la topología en X que tiene como *subbase* de abiertos a la colección $\{f_i^{-1}(G_i)\}_{i \in I}$, en donde G_i es un abierto de X_i . Un caso especial importante de la topología inicial es la topología producto que hemos definido anteriormente: la topología producto en $\prod_{i \in I} X_i$ es la topología inicial de las proyecciones $\Pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$. Las *estructuras finales* se obtienen “dualizando” las estructuras iniciales, siendo un caso especial de estructura final la *topología cociente*: Si X es un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X , la topología cociente en $X/\sim$ es la “mayor” topología que hace continua la proyección $\pi: X \rightarrow X/\sim$.

Si X, Y son espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación biyectiva, se dice que f es un *homeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son continuas. Es importante hacer notar que f puede ser continua y biyectiva sin que f^{-1} sea continua.

1.3 AXIOMAS DE SEPARACIÓN

En el caso clásico de la convergencia de sucesiones en el cuerpo real, es harto conocida la propiedad de que los límites de las sucesiones son únicos, es decir una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales (dotados éstos con la topología habitual que heredan de su orden natural) puede tender como máximo a un límite. Esta propiedad de unicidad proviene de que en $\mathbb{R}$ dos puntos distintos tienen siempre entornos disjuntos que los “separan”, hecho que permitió a Hausdorff introducir la condición de separación que lleva su nombre: Un espacio X se dice que verifica la *propiedad de separación* de Hausdorff si para cada par de puntos distintos x, y de X existen entornos $V \in \mathcal{V}_x$, $U \in \mathcal{V}_y$ tales que $U \cap V = \emptyset$. En estos espacios las sucesiones tienen a lo mas un límite.

Existen además otras propiedades que puede satisfacer un espacio topológico en función del grado en que distintos puntos o conjuntos cerrados pueden ser separados por medio de los abiertos de la topología: Un espacio se llama T_0 si para cada dos puntos distintos existe un entorno de uno de ellos que no contiene al otro; T_1 si para cada uno de dos puntos distintos existe un entorno que no contiene al otro, lo que puede enunciarse exigiendo que todo punto sea cerrado; T_2 cuando verifica la propiedad de separación de Hausdorff; T_3 cuando es un *espacio regular* y T_4 (un *espacio regular* es aquel en que todo punto tiene una base de entornos cerrados);

T_4 cuando es *normal* y T_1 (un espacio es *normal* cuando dos conjuntos cerrados disjuntos A, B admiten abiertos G, H con $A \subset G, B \subset H$ y $G \cap H = \emptyset$). Esta nomenclatura es coherente, ya que si un espacio verifica la propiedad T_{i+1} verifica la propiedad T_i .

Las propiedades de separación son de especial importancia al considerar la existencia de funciones continuas que verifican ciertas propiedades que son de interés en análisis. Si consideramos un conjunto X con la *topología trivial*, es decir, aquella topología en X que solamente tiene como abiertos $\emptyset$ y X , es obvio que las únicas funciones reales continuas que pueden definir sobre X son las constantes; este ejemplo nos hace ver que la posibilidad de separar puntos tiene mucho que ver con la existencia de una “cantidad razonable” de funciones reales definidas sobre X .

Pueden ocurrir casos realmente patológicos; se conocen espacios T_3 para los cuales las únicas funciones reales continuas son las constantes. Por este motivo se introducen los espacios *completamente regulares* como aquellos que verifican la propiedad de que dado un punto $x \in X$ y un cerrado $F, x \notin F$, existe una función continua tal que $f(x) = 0$, y $f|_F = 1$.

Los espacios completamente regulares que verifican T_1 se llaman Tychonoff, y son siempre regulares. Los espacios normales gozan de una propiedad muy importante, cuyo enunciado recibe el nombre de *lema de Urysohn*, que asegura que si A y B son dos cerrados disjuntos de un espacio normal X , existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$. Como corolario se obtiene que todo espacio T_4 es Tychonoff. Reviste especial interés la caracterización de los espacios normales dado por Tietze: “Un espacio X es normal si y sólo si siempre que A sea un cerrado de X , y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, existe una extensión F de f a todo X , es decir una función continua $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_A = f$.”

2

VARIETADES DIFERENCIABLES

A lo largo de éste capítulo se introducirán los conceptos de variedad diferenciable, espacio tangente y por último se muestra la noción de aplicación lineal tangente, para así dar paso al resultado principal de este proyecto y algunas de sus aplicaciones, que se presentan en el capítulo 3.

2.1 CARTAS, ATLAS Y VARIETADES

Una *variedad diferenciable* y dimensión n es un espacio topológico (generalmente Hausdorff) M junto con una colección de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ y aplicaciones correspondientes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

- (i) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (ii) $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi(U_i)$ es homeomorfismo para cada $i \in I$.
- (iii) Para todo par $(i, j) \in I \times J$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación compuesta

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es de clase C^∞ .

Los pares (U_i, φ_i) se denominan *cartas locales* sobre M , y el conjunto $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de todas ellas un *atlas* para M . Una *estructura* C^∞ sobre M es un conjunto maximal de cartas que satisfacen las propiedades anteriores. Los elementos del atlas maximal se denominan *sistema de coordenadas* de la estructura C^∞ , y si (U, φ) es un sistema de coordenadas, a U se le llama entorno de coordenadas y a $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ que escribiremos normalmente como $(x^1, \dots, x^n)$, *coordenadas* en U . Las aplicaciones $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ reciben el nombre de *transformaciones de coordenadas locales*. Evidentemente, la dimensión de la variedad es la dimensión del espacio modelo $\mathbb{R}^n$. Es obvio que, de una forma intuitiva, podemos considerar a la variedad como constituida por trozos de $\mathbb{R}^n$ “pegados entre sí” mediante homeomorfismos, que si se eligen como diferenciables proporcionan la variedad diferenciable.

Una *subvariedad* de dimensión $n - m$ de una variedad diferenciable M de dimensión n es un subconjunto N de M tal que para todo $x \in N$ existe una carta local (U, φ) de M donde $x \in U$ y $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{n-m}$, es decir, para esta carta, los puntos de $U \cap N$ poseen coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$ tales que $x^1 = \dots = x^m = 0$. Evidentemente, las restricciones $(U \cap N, \varphi)$ de estas cartas locales definen sobre N una estructura de variedad diferenciable.

Para dar una estructura diferenciable sobre una variedad basta con dar un atlas diferenciable, y éste se buscará en general no necesariamente máximo sino lo más pequeño posible. Un ejemplo trivial para comprender el concepto de variedad diferenciable es el espacio n -dimensional $\mathbb{R}^n$; basta tomar como $\mathcal{A}$ la estructura diferenciable maximal que contiene a $\mathcal{A}_0 = \{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})\}$. Es decir, un atlas constituido por una sola carta formada por el abierto $U = \mathbb{R}^n$ y el homeomorfismo $\varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, identidad en $\mathbb{R}^n$.

Si $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión n , todo abierto $U \subset M$ es de nuevo una variedad diferenciable de dimensión n cuyo atlas viene dado por

$$\mathcal{A}_U = \{(U_i \cap U, \varphi_i|_{U_i \cap U}) \mid \text{para todo } (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}\}.$$

En efecto, como los abiertos U_i recubren a M , $V_i = U_i \cap U$ son abiertos en U que lo recubren. Las aplicaciones $\phi_i = \varphi_i|_{U_i \cap U}: V_i \rightarrow \phi_i(U_i \cap U) = \varphi_i(U_i \cap U)$ son homeomorfismos locales de U en $\mathbb{R}^n$. Además, $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ son diferenciables al ser las restricciones a $\varphi_i(U_i \cap U_i \cap U_j)$ de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$.

Otro ejemplo conocido de variedad diferenciable es la esfera n -dimensional

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2} = 1\}.$$

Sus abiertos coordenados son los conjuntos

$$U_{kj} = \{x \in S^n \mid (-1)^j x^k > 0\}, \quad j = 0, 1, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

y los homeomorfismos coordenados son

$$\varphi_{kj}: U_{kj} \rightarrow B(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}, \quad x \mapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^{n+1}).$$

Resulta demostrar fácil demostrar que éste atlas es diferenciable, pues la aplicación

$$\varphi_{kj}^{-1}: B(0; 1) \rightarrow S^n,$$

tiene la coordenada k -ésima igual a

$$(-1)^j \sqrt{1 - \sum_{i \neq k} (x^i)^2},$$

que es una aplicación diferenciable en el sentido usual en $B(0; 1)$ y φ_{kj} es la restricción de una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$.

2.2 APLICACIONES DIFERENCIABLES

En esta sección se establecerán los conceptos de función diferenciable en una variedad M y aplicaciones diferenciables entre variedades, para esto se hará uso del lenguaje de cartas locales. Si M es una variedad diferenciable, una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *diferenciable* ó de *clase C^∞* si para cada carta (U, φ) se verifica que $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Cabe resaltar que la diferenciable de f depende de la estructura diferenciable de M y no de la elección de las cartas; pues si (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas de M con $U \cap V \neq \emptyset$, $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable si y solo si $f \circ \psi^{-1}$ es diferenciable. Esto es consecuencia del hecho de ser $f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$.

Para el estudio local es natural no sólo considerar funciones $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en todo M sino también admitir funciones que estén definidas solamente en un entorno de un punto en M . Dado un punto x en una variedad diferenciable M , una función f se dice que es *diferenciable* (

ó de clase C^∞) en un entorno de x si su dominio D_f es abierto, $x \in D_f$ y f es diferenciable en D_f , cuando en D_f se considera la estructura diferenciable inducida por la de M . De ésta forma, f es diferenciable en un entorno del punto $x \in D_f$, si para toda carta (U, φ) en M con $x \in U$, la compoción $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(D_f \cap U) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Una aplicación $f: M \rightarrow N$ entre dos variedades C^k es una aplicación de clase C^∞ si para cualquier pareja de sistemas de coordenadas, (U_i, φ_i) en M y (V_j, ψ_j) en N , tal que $f(U_i) \subset V_j$, la aplicación compuesta $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i) \rightarrow \psi_j(V_j)$ es de clase C^∞ . Un homeomorfismo $f: M \rightarrow N$ entre variedades C^∞ es un *difeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son de clase C^∞ . Si existe un difeomorfismo entre M y N se dice que las variedades son difeomorfas; dos variedades difeomorfas son indistinguibles en lo que concierne a las estructuras topológicas y diferencial.

2.3 ESPACIO TANGENTE Y APLICACIÓN LINEAL TANGENTE

Sea M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Entenderemos por una curva en M pasando por p una aplicación $\gamma: I \rightarrow M$ de clase C^1 , donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, dependiente de γ , que contiene $t = 0$. Denotamos por $\mathcal{C}(M, p)$ el conjunto de todas las curvas en M pasando por p ; dos curvas $\gamma, \mu \in \mathcal{C}(M, p)$ son *tangentes* si existe una carta (U, φ) en M que contiene a p y tal que $(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$. Obsérvese que, si γ y μ son tangentes entonces tenemos $(\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \mu)'(0)$ para toda carta (V, ψ) que contenga a p . En efecto, como $\psi \circ \gamma = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$ y $\psi \circ \mu = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \mu)$, se sigue de la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \gamma)'(0) &= d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) \\ &= d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \mu)'(0) \\ &= (\psi \circ \mu)'(0). \end{aligned}$$

Es fácil ver que la relación $\sim$ en $\mathcal{C}(M, p)$ definida por

$$\gamma \sim \mu \iff \gamma \text{ es tangente a } \mu,$$

es una relación de equivalencia. Definimos

$$\mathcal{T}(M, p) = \mathcal{C}(M, p) / \sim$$

llamado *espacio tangente*, donde para cada $\gamma \in \mathcal{C}(M, p)$ denotamos por $[\gamma] \in \mathcal{T}(M, p)$ la clase de equivalencia determinada por γ ; una clase de equivalencia $[\gamma]$ es lo que se denomina *vector tangente* a la variedad en el punto p . El conjunto $\mathcal{T}(M, p)$ posee una estructura de espacio vectorial con la suma y el producto escalar.

Estamos ahora aptos para definir la *aplicación diferencial* de una función entre dos variedades diferenciables. Para cada variedad diferenciable M y para cada punto $p \in M$, el espacio vectorial $\mathcal{T}(M, p)$ será llamado el espacio tangente a M en el punto p y se denotará por $T_p M$.

Sean M, N variedades diferenciables y sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable. Para cada $p \in M$, la diferencial de f en el punto p debe ser un operador lineal $df(p): T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ que se define de la manera siguiente: Consideremos cartas (U, φ) en M y (V, ψ) en N con $p \in U$ y $f(U) \subset V$. Sea $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ la representación de f en las cartas φ y ψ . La *diferencial de f en el punto p* es el operador lineal $df(p): T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definido por

$$df(p) = (\bar{\psi}_{f(p)})^{-1} \circ d\tilde{f}(\varphi(p)) \circ \bar{\varphi}_p$$

donde $\bar{\varphi}_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ y está dado por $\bar{\varphi}_p([\gamma]) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$. Ésta definición viene dada por la correspondencia $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.

PARTICIONES DIFERENCIABLES DE LA UNIDAD

3.1 TOPOLOGÍA DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

En esta sección se recuerdan algunas nociones de la topología general y se demuestran algunos resultados esenciales sobre la topología de variedades diferenciables.

Se inicia con la siguiente observación.

Lemma 3.1. *Toda variedad diferenciable es regular.*

Demostración. Esta afirmación se sigue del hecho de que toda variedad diferenciable es localmente compacta, y del hecho de que todo espacio topológico localmente compacto es Hausdorff y regular. $\square$

De hecho, las variedades diferenciables son espacios normales. Para demostrar esto, necesitaremos primero un lema.

Lemma 3.2. *Todo espacio regular que satisface el segundo axioma de numerabilidad es normal.*

Demostración. Sea X un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad y sean $F, G \subset X$ dos conjuntos cerrados disjuntos. Para todo $x \in F$, se tiene que el complemento de G es un entorno abierto de x ; puesto que X es regular, tal entorno abierto de x contiene también un entorno cerrado de x , esto es, existe un conjunto abierto $U_x \subset X$ tal que $x \in U_x$ y $\overline{U_x} \cap G = \emptyset$. A partir del recubrimiento abierto $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$ se puede extraer un subrecubrimiento numerable $F \subset \bigcup_{n \geq 1} U_{x_n}$. Similarmente, para cada $x \in G$ se puede obtener un conjunto abierto V_x con $x \in V_x$ y $\overline{V_x} \cap F = \emptyset$; a partir del recubrimiento abierto $G \subset \bigcup_{x \in G} V_x$ se puede también extraer un subrecubrimiento numerable $G \subset \bigcup_{n \geq 1} V_{x_n}$. Defina ahora:

$$A_n = U_{x_n} \setminus (\overline{V_{x_1}} \cup \overline{V_{x_2}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}}), \quad B_n = V_{x_n} \setminus (\overline{U_{x_1}} \cup \overline{U_{x_2}} \cup \dots \cup \overline{U_{x_n}})$$

para todo $n \geq 1$. Se sigue que A_n y B_n son abiertos para todo n y, por consiguiente, $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ y $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ son abiertos. Para completar la demostración, se verifica que $F \subset A$, $G \subset B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Sea $x \in F$. Como $F \subset \bigcup_{n \geq 1} U_{x_n}$, existe un n con $x \in U_{x_n}$. Puesto que $x \notin \overline{V_{x_i}}$ para todo i , se tiene que $x \in A_n$ y, por lo tanto, $x \in A$. En forma similar, se muestra que $G \subset B$. Se probará que $A \cap B = \emptyset$. Para ello, es suficiente verificar que $A_n \cap B_m = \emptyset$ para todo $n, m \geq 1$. Suponga $n \leq m$. Entonces $A_n \subset U_{x_n}$ y la conclusión se sigue del hecho de que $B_m \cap U_{x_n} = \emptyset$. En forma análoga, si $n \geq m$ entonces $B_m \subset V_{x_m}$ y la conclusión se sigue del hecho que $A_n \cap V_{x_m} = \emptyset$. $\square$

Corollary 3.3. *Toda variedad diferencial es normal.*

Demostración. En virtud del Lema 3.1, toda variedad diferencial es regular y, por definición, toda variedad diferenciable satisface el segundo axioma de numerabilidad, así, por el Lema 3.2 se obtiene la conclusión. $\square$

Un subconjunto S de un espacio topológico X se dice *relativamente compacto* en X si S está contenido en algún subconjunto compacto de X .

Remark 3.4. Si X es Hausdorff entonces $S \subset X$ es relativamente compacto en X si y solo si $\overline{S}$ es compacto. En efecto, si S está contenido en un conjunto compacto $K \subset X$ entonces K es cerrado y, por lo tanto, $\overline{S} \subset K$; de aquí se sigue que $\overline{S}$ es un conjunto cerrado relativo al espacio compacto K y, por consiguiente, también es compacto.

Remark 3.5. Si X es un espacio topológico localmente compacto entonces todo punto de X está contenido en un abierto relativamente compacto en X .

Sea X un espacio topológico. Una *exhaución por compactos* para X es una sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos compactos de X tal que $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ y tal que K_n está contenido en el interior de K_{n+1} para todo $n > 1$.

Lemma 3.6. *Todo espacio topológico localmente compacto que satisface el segundo axioma de numerabilidad admite una exhaución por compactos.*

Demostración. Sea X un espacio topológico localmente compacto que satisface el segundo axioma de numerabilidad. Es posible recubrir a X con abiertos relativamente compactos; este recubrimiento abierto posee a su vez un subrecubrimiento numerable. En particular, X puede ser escrito como una unión numerable de subconjuntos compactos, digamos $X = \bigcup_{n \geq 1} L_n$. Procedemos a construir inductivamente una exhaución por compactos para X . Tomemos $K_1 = L_1$. Suponiendo que K_n ha sido ya construido, definimos K_{n+1} de la siguiente manera. Para todo $x \in K_n$ existe un conjunto abierto U_x que contiene a x y que está contenido en un conjunto compacto C_x . El recubrimiento abierto $K_n \subset \bigcup_{x \in K_n} U_x$ posee un subrecubrimiento finito $K_n \subset \bigcup_{i=1}^p U_{x_i}$. Tomemos:

$$K_{n+1} = L_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^p C_{x_i}.$$

Puesto que K_n está contenido en el conjunto abierto $\bigcup_{i=1}^p U_{x_i}$ el cual a su vez está contenido en K_{n+1} , se sigue que K_n está contenido en el interior de K_{n+1} . Además, K_{n+1} es compacto, pues es unión finita de conjuntos compactos. Por último, la construcción implica que $L_n \subset K_n$ para todo $n \geq 1$ y por tanto:

$$X = \bigcup_{n \geq 1} L_n = \bigcup_{n \geq 1} K_n.$$

Esto completa la demostración. $\square$

Sea X un espacio topológico y sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X . Se dice que la familia $\{S_i\}_{i \in I}$ es *puntualmente finita* si cada $x \in X$ pertenece a S_i para una cantidad finita de $i \in I$, esto es, si para todo $x \in X$ el conjunto:

$$\{i \in I \mid x \in S_i\}$$

es finito. Se dice que la familia $\{S_i\}_{i \in I}$ es *localmente finita en X* si cada $x \in X$ posee un entorno abierto que interseca a S_i en una cantidad finita de índices $i \in I$, esto es, si para todo $x \in X$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a x tal que el conjunto:

$$\{i \in I \mid U \cap S_i \neq \emptyset\}$$

es finito. Obviamente, toda familia localmente finita es también puntualmente finita.

Remark 3.7. En realidad, la condición de una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X de ser puntualmente finita no depende de la topología de X . Tampoco depende el espacio “ambiente”, es decir, si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de Y y si $Y \subset X$ entonces $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia puntualmente finita de subconjuntos de X si y solamente si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia puntualmente finita de subconjuntos de Y . Por otro lado, la condición de una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de ser localmente finita en X depende (obviamente) de la topología de X y también del espacio “ambiente”. Para ser mas explícitos, si Y es un subespacio de un espacio topológico X entonces una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de Y puede ser localmente finita en Y , y no ser localmente finita en X . Es fácil, por otra parte, verificar que si $\{S_i\}_{i \in I}$ es localmente finita en X entonces $\{S_i\}_{i \in I}$ es localmente finita en Y .

Se sabe que la unión de una colección finita de subconjuntos cerrados de un espacio topológico es un subconjunto cerrado de ese espacio topológico; también, la clausura de una unión finita de subconjuntos de un espacio topológico coincide con la unión de las clausuras de estos subconjuntos. Tales propiedades no son ciertas para colecciones infinitas de subconjuntos, pero, como se demostrará a continuación resultan ser ciertas para colecciones localmente finitas.

Lemma 3.8. *Sea X un espacio topológico y sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita en X . Entonces la familia $\{\overline{S_i}\}_{i \in I}$ es también localmente finita en X .*

Demostración. Basta observar que si $U \subset X$ es un conjunto abierto entonces

$$\{i \in I \mid U \cap S_i \neq \emptyset\} = \{i \in I \mid U \cap \overline{S_i} \neq \emptyset\}.$$

□

Lemma 3.9. *Sea X un espacio topológico y sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X . Entonces $\bigcup_{i \in I} F_i$ es cerrado en X .*

Demostración. Sea $x \in X$ con $x \notin \bigcup_{i \in I} F_i$. Puesto que $\{F_i\}_{i \in I}$ es localmente finita, existe un conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a x tal que $U \cap F_i \neq \emptyset$ solamente en un número finito de índices $i \in I$, digamos, $i_1, \dots, i_p$. Se sigue que $U \setminus (F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_p})$ es un entorno abierto de x disjunto de $\bigcup_{i \in I} F_i$, por lo que el complemento de $\bigcup_{i \in I} F_i$ es abierto. □

Corollary 3.10. *Sea X un espacio topológico y sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita de subconjuntos de X . Entonces:*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} S_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{S_i}$$

.

Demostración. La inclusión:

$$\bigcup_{i \in I} \overline{S_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}$$

es válida en general. En efecto, basta notar que la clausura de $\bigcup_{i \in I} S_i$ es un conjunto cerrado que contiene a S_i para todo $i \in I$ y, por tanto, también contiene a $\overline{S_i}$ para todo $i \in I$. Para mostrar la inclusión, nótese que, en virtud de los Lemas 3.8 y 3.9, el conjunto $\bigcup_{i \in I} \overline{S_i}$ es cerrado y contiene a $\bigcup_{i \in I} S_i$, de donde se deduce que también contiene a la clausura de $\bigcup_{i \in I} S_i$. □

Lemma 3.11. *Sea X un espacio topológico y sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia localmente finita de subconjuntos de X . Si $K \subset X$ es compacto entonces el conjunto*

$$\{i \in I \mid K \cap S_i \neq \emptyset\}$$

es finito.

Demostración. Para todo $x \in K$ existe un conjunto abierto $V_x \subset X$ que contiene a x tal que el conjunto

$$I_x = \{i \in I \mid V_x \cap S_i \neq \emptyset\}$$

es finito. El recubrimiento $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$ posee un subrecubrimiento finito $K \subset \bigcup_{k=1}^p V_{x_k}$. Luego, si $i \in I$ es tal que $K \cap S_i \neq \emptyset$ entonces $V_{x_k} \cap S_i \neq \emptyset$ para algún $k = 1, \dots, p$. En otras palabras:

$$\{i \in I \mid K \cap S_i \neq \emptyset\} \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_p}.$$

□

Vamos a recordar ahora la noción de espacio topológico paracompacto. En diversos textos, las variedades diferenciables se definen como espacios topológicos de Hausdorff y paracompactos equipados de un atlas maximal C^∞ . Según veremos esta definición es equivalente a la que se dió en el capítulo anterior, a menos que se trate de una variedad con una cantidad no numerable de componentes conexas.

Un espacio topológico X se dice ser *paracompacto* si todo recubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto localmente finito. Para ser más explícitos, X es paracompacto si dada una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ en X con $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, existe una familia localmente finita $\{V_j\}_{j \in J}$ de conjuntos abiertos en X con $X = \bigcup_{j \in J} V_j$ y tal que para todo $j \in J$ existe $i \in I$ con $V_j \subset U_i$.

La siguiente demostración es muy similar a la demostración del teorema de existencia de particiones de la unidad subordinadas a recubrimientos abiertos arbitrarios de una variedad diferenciable. Por esta razón, presentamos el argumento en forma un poco sucinta.

Theorem 3.12. *Toda variedad diferenciable es paracompacta.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable y sea $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recubrimiento abierto de M . Vamos a construir un refinamiento abierto localmente finito para $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Sea $\{K_n\}_{n \geq 1}$ una exhaustión por compactos para M y definamos $K_n = \emptyset$ para todo $n \leq 0$. Para todo entero n , designemos por C_n al conjunto compacto $K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$. Sean $n \geq 1$ y $p \in C_n$ fijos. Tenemos que existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. El conjunto:

$$V_{(n,p)} = \text{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^c \cap U_i$$

es un entorno abierto de p y el recubrimiento abierto $C_n \subset \bigcup_{p \in C_n} V_{(n,p)}$ posee un subrecubrimiento finito, es decir, existe un subconjunto finito $F_n \subset C_n$ tal que $C_n \subset \bigcup_{p \in F_n} V_{(n,p)}$. Consideremos la familia $\{V_j\}_{j \in J}$, donde:

$$J = \{(n, p) \mid n \geq 1, p \in F_n\}.$$

De $M = \bigcup_{n \geq 1} C_n$ y $C_n \subset \bigcup_{p \in F_n} V_{(n,p)}$, obtenemos que $M = \bigcup_{j \in J} V_j$. Además, por construcción, cada V_j es un conjunto abierto y para todo $j \in J$ existe $i \in I$ con $V_j \subset U_i$. Para completar la demostración, resta mostrar que la familia $\{V_j\}_{j \in J}$ es localmente finita. Sea $p \in M$ y sea $n \geq 1$ tal que $p \in K_n \setminus K_{n-1}$. Se sigue que $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ es un entorno abierto de p . Aseguramos que $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ interseca a los V_j en un número finito de índices $j \in J$. En efecto, sea $j \in J$ tal que $(\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}) \cap V_j \neq \emptyset$, digamos $j = (m, q)$, con $m \geq 1$ y $q \in F_m$. Se tiene que $V_j \subset \text{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^c$ y, por lo tanto,

$$\text{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-1}^c \cap \text{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^c \neq \emptyset,$$

donde $n-1 \leq m \leq n+2$. Se concluye entonces que:

$$\{j \in J \mid V_j \cap (\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}) \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{m=n-1}^{n+2} \{m\} \times F_m.$$

Esto prueba que la familia $\{V_j\}_{j \in J}$ es localmente finita y completa la demostración. $\square$

Vamos a mostrar ahora que en el caso de espacios de Hausdorff conexos con la topología inducida por un atlas, el segundo axioma de numerabilidad es equivalente a la paracompacidad.

Theorem 3.13. *Sean M un conjunto y $\mathcal{A}$ un atlas para M . Suponga que M está equipado con la topología inducida por $\mathcal{A}$. Si M es Hausdorff, paracompacto y conexo entonces M satisface el segundo axioma de numerabilidad. En particular, el conjunto M equipado con un atlas maximal que contenga a $\mathcal{A}$ es una variedad diferenciable.*

Demostración. La estrategia de la prueba es la siguiente: se construirá inductivamente una sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos compactos de M . Como M es conexo, se seguirá que M es igual a la unión de los conjuntos compactos K_n . Cada compacto K_n puede ser cubierto por un número finito de dominios de cartas pertenecientes a $\mathcal{A}$; se obtendrá así un atlas numerable para M contenido en $\mathcal{A}$ lo cual completará la demostración.

Se procede entonces a definir la sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1}$. Puesto que M es localmente compacto, M admite un cubrimiento abierto por conjuntos relativamente compactos; en virtud de la paracompacidad, este recubrimiento abierto admite un refinamiento abierto localmente finito. Se obtiene entonces un recubrimiento abierto $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ localmente finita de M donde cada U_i es relativamente compacto (como M es Hausdorff, esto significa que $\overline{U_i}$ es compacto). Tómese K_1 como cualquier subconjunto compacto no vacío de M ; por ejemplo, sea K_1 un conjunto unitario (el caso en $M = \emptyset$ es trivial). Suponga que el compacto K_n ha sido definido para cierto $n \geq 1$, defina K_{n+1} como sigue:

$$K_{n+1} = \bigcup_{i \in I_n} \overline{U_i},$$

donde:

$$I_n = \{i \in I \mid K_n \cap U_i \neq \emptyset\}.$$

Puesto que K_n es compacto y $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia localmente finita, se sigue que I_n es finito y, por consiguiente, K_{n+1} es compacto, pues cada $\overline{U_i}$ lo es. Nótese que $\bigcup_{i \in I_n} U_i$ es un conjunto abierto contenido en K_{n+1} que contiene a K_n , lo cual implica que K_n está contenido en K_{n+1} está contenido en el interior de K_{n+1} . Luego:

$$\bigcup_{n \geq 1} K_n = \bigcup_{n \geq 1} \text{int}(K_{n+1}).$$

Esto muestra que la unión $\bigcup_{n \geq 1} K_n$ es abierta. Dicha unión es, ciertamente, no vacía, pues K_1 es no vacío. Vamos ahora a mostrar que $\bigcup_{n \geq 1} K_n$ es también cerrado. Si $I' = \bigcup_{n \geq 1} I_n$, entonces:

$$\bigcup_{n \geq 1} K_n = K_1 \cup \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{i \in I_n} \overline{U_i} = K_1 \cup \bigcup_{i \in I'} \overline{U_i}.$$

Como la familia $\{U_i\}_{i \in I'}$ es localmente finita, se concluye que:

$$\bigcup_{n \geq 1} K_n = K_1 \cup \overline{\bigcup_{i \in I'} U_i}$$

es cerrado en M . Esto completa la demostración. $\square$

Corollary 3.14. *Sean M un conjunto y $\mathcal{A}$ un atlas para M . Suponga que M está equipado con la topología inducida por $\mathcal{A}$. Si M es Hausdorff y posee una cantidad numerable de componentes conexas, entonces M es paracompacto si y solamente si satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración. Ya se mostró que si M satisface el segundo axioma de numerabilidad entonces M es paracompacto (pues en ese caso M se torna en un variedad diferenciable equipada con un atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$). Recíprocamente, suponga que M es paracompacto. Sea M_0 una componente conexa de M . Puesto que M_0 es cerrada en M , se sigue que M_0 es paracompacto. Por otro lado, puesto que M_0 es abierta en M , el atlas $\mathcal{A}$ induce un atlas $\mathcal{A}_0$ en M_0 . Para ser mas explícitos, si $\mathcal{D}$ denota el atlas maximal en M que contiene a $\mathcal{A}$ entonces las cartas pertenecientes a $\mathcal{D}$ cuyos dominios están contenidos en M_0 constituyen un atlas $\mathcal{A}_0$ para M_0 ; además la topología inducida por $\mathcal{A}_0$ en M_0 coincide con la topología inducida por M en M_0 . Luego M_0 es Hausdorff, paracompacto, conexo y posee la topología inducida por un atlas. Se sigue del teorema anterior que M_0 satisface el segundo axioma de numerabilidad. De aquí que M puede ser recubierto por una colección numerable de abiertos que satisfacen el segundo axioma de numerabilidad y, por lo tanto, M también satisface el segundo axioma de numerabilidad. $\square$

3.2 PARTICIONES DIFERENCIABLES DE LA UNIDAD

Hasta ahora todos los resultados sobre variedades diferenciables que se han presentado son de naturaleza local y sus demostraciones se reducen, mediante la escogencia de cartas, a un problema de cálculo en $\mathbb{R}^n$. En esta sección se presenta la primera herramienta para el estudio de las propiedades globales de las variedades diferenciables: las particiones diferenciables de la unidad.

Recuérdese que si X es un espacio topológico y V es un espacio vectorial entonces el soporte de una aplicación $f: X \rightarrow V$ se define por:

$$\text{supp } f = \overline{\{f^{-1}(V \setminus \{0\})\}},$$

esto es, el soporte de f es la clausura del conjunto de puntos de X donde f no se anula. Intuitivamente el soporte de f es el subconjunto de X donde f está “concentrada”; para ser más precisos, si $x \in X$ es un punto fuera del soporte de f entonces f se anula en un entorno abierto de x .

Sea M una variedad diferenciable y sea $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recubrimiento abierto de M . Una *partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento* $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ es una familia $\{\psi_i\}_{i \in I}$ de funciones $\psi_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tales que:

- (i) $\psi_i(M) \subset [0, 1]$ para todo $i \in I$;
- (ii) $\text{supp } \psi_i \subset U_i$ para todo $i \in I$;
- (iii) la familia $\{\text{supp } \psi_i\}_{i \in I}$ es localmente finita en M ;
- (iv) $\sum_{i \in I} \psi_i(p) = 1$ para todo $p \in M$.

La idea básica detrás de la noción de partición diferenciable de la unidad es la de expresar una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ como suma de una familia de funciones de clase C^∞ con “soporte pequeño”. Para ser más explícitos, si $\{\psi_i\}_{i \in I}$ es una partición diferenciable de la unidad subordinada a un recubrimiento abierto $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ entonces, para todo $i \in I$, la función $f_i = f \circ \psi_i$ es de clase C^∞ y tiene soporte contenido en U_i ; además, $f = \sum_{i \in I} f_i$. El recubrimiento abierto $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ sirve para definir una noción conveniente de “conjunto pequeño” en un contexto determinado; siendo más explícitos, “soporte pequeño” significa soporte contenido en U_i para algún $i \in I$.

Las particiones diferenciables de la unidad son utilizadas, por ejemplo, para el estudio de la integración en variedades diferenciables. De hecho, utilizando una partición de la unidad apropiada es posible escribir la integral de una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ como una suma de integrales

de funciones f_i que tienen “soporte pequeño”; en este caso, “soporte pequeño” significa soporte contenido en el dominio de una carta. La integral de una función cuyo soporte está contenido en el dominio de una carta se reduce esencialmente al cálculo de la integral de una representación de dicha función en el sistema de coordenadas inducido por la carta.

Obsérvese que si $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia de funciones $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ y si la familia $\{\text{supp } f_i\}_{i \in I}$ es puntualmente finita, entonces la suma:

$$f = \sum_{i \in I} f_i$$

da como resultado una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ bien definida. En efecto, para todo $p \in M$ se tiene que $f_i(p) = 0$ excepto para un número finito de índices $i \in I$ y, por consiguiente, tiene sentido considerar la suma $f(p) = \sum_{i \in I} f_i(p)$. La motivación para la condición (iii) que aparece en la definición de partición diferenciable de la unidad está dada por el siguiente resultado.

Lemma 3.15. *Sea M una variedad diferenciable y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ de clase C^∞ . Si la familia $\{\text{supp } f_i\}_{i \in I}$ es localmente finita en M entonces la función $\sum_{i \in I} f_i$ es de clase C^∞ .*

Demostración. Dado $p \in M$ es posible encontrar un abierto $U \subset M$ que contiene a p tal que $U \cap \text{supp } f_i \neq \emptyset$ para un número finito de índices $i \in I$, digamos, para $i_1, \dots, i_s$. De aquí que la restricción de $\sum_{i \in I} f_i$ a U sea igual a la restricción de $\sum_{k=1}^s f_{i_k}$ a U , la cual es una función de clase C^∞ . Luego, todo punto de M posee un entorno abierto tal que la restricción de $\sum_{i \in I} f_i$ a tal entorno es de clase C^∞ . $\square$

El objetivo ahora es demostrar que a todo recubrimiento abierto de una variedad diferenciable se le puede subordinar una partición diferenciable de la unidad. Para ellos, se requieren algunos resultados preliminares. Se comienza demostrando la existencia de funciones no nulas de clase C^∞ y de soporte pequeño en $\mathbb{R}^n$.

Lemma 3.16. *Existe una función $\lambda_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\lambda_1(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\lambda_1(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \geq 2$ y $\lambda_1 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \leq 1$.*

Demostración. Considere la función $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que α es de clase C^∞ y obviamente $\alpha(t) > 0$ para todo $t > 0$. Defina $\alpha_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\alpha_1(t) = \alpha((1-t)(t-2)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces α_1 es de clase C^∞ , $\alpha_1(t) > 0$ si $t \in (1, 2)$ y $\alpha_1(t) = 0$ para $t \notin (1, 2)$. La función $\alpha_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(-t) - \alpha_1(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ que coincide con $-\alpha_1$ en el intervalo $[0, \infty)$. La función buscada $\lambda_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \alpha_2(s) ds,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $C = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(s) ds = \int_1^2 \alpha_1(s) ds > 0$. Nótese que la integral que define a λ_1 es finita, ya que α_2 se anula fuera del intervalo $[-2, 2]$.

Vamos a verificar que λ_1 satisface las propiedades deseadas. Obviamente λ_1 es de clase C^∞ y $\lambda_1' = \alpha_2/C$. Se tiene también que λ_1 es constante en los intervalos $(-\infty, -2]$, $[-1, 1]$ y $[2, \infty)$, puesto que α_2 es nula en estos intervalos. Asimismo, λ_1 es estrictamente creciente en el intervalo $[1, 2]$ puesto que α_2 es no-negativa en el interior de dicho intervalo. Obviamente $\lambda_1(t) = 0$ para $t \leq -2$, porque $\alpha_2(t) = 0$ para $t \leq -2$; también $\lambda_1(t) = 0$ para $t \geq 2$, ya que α_2 es una función impar y por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2(s)ds = 0$. Para completar la demostración basta verificar que $\lambda_1(-1) = 1$. En efecto, se tiene que:

$$\lambda_1(-1) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{-1} \alpha_2(s)ds = \frac{1}{C} \int_{-2}^{-1} \alpha_2(s)ds = \frac{1}{C} \int_1^2 \alpha_2(-s)ds = \frac{1}{C} \int_1^2 \alpha_1(s)ds = 1. \quad \square$$

Corollary 3.17. *Existe una función $\lambda_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\lambda_n(\mathbb{R}^n) \subset [0, 1]$, $\lambda_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| \geq 2$ y $\lambda_n(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| \leq 1$, donde $\|\cdot\|$ designa la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Basta tomar $\lambda_n(x) = \lambda_1(\|x\|)$, donde λ_1 es la función del enunciado del lema anterior. Obviamente λ_n es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; puesto que λ_n es una constante en un entorno del origen, se sigue que λ_n es, de hecho, de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^n$. $\square$

Corollary 3.18. *Sea M una variedad diferenciable. Dados un punto $p \in M$ y un conjunto abierto $W \subset M$ que contiene a p , existe una función $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\psi(M) \subset [0, 1]$, $\text{supp } \psi \subset W$ y tal que ψ es constante e igual a 1 en algún entorno de p .*

Demostración. Sea (U, φ) una carta en M con $p \in U$. Puesto que $\varphi(U \cap W)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\varphi(p)$, existe $r > 0$ tal que $B[\varphi(p); r] \subset \varphi(U \cap W)$, donde $B[\varphi(p); r]$ designa la bola cerrada de centro en $\varphi(p)$ y radio r con respecto a la norma euclidiana. Considere el difeomorfismo $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por:

$$\alpha(x) = \frac{2}{r}(x - \varphi(p)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se sigue entonces que $\varphi_1 = \alpha \circ \varphi: U \rightarrow \alpha(\varphi(U))$ es una carta en M tal que $\varphi_1(p) = 0$; además, α envía $B[\varphi(p); r]$ sobre la bola cerrada de centro en el origen y radio 2. Por lo tanto,

$$\varphi_1(U \cap W) = \alpha(\varphi(U \cap W)) \supset B[0; 2].$$

Sea λ_n la función del corolario anterior. Defina $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\psi(q) = \begin{cases} \lambda_n(\varphi_1(q)), & q \in U, \\ 0, & q \notin U. \end{cases}$$

Puesto que $B[0; 2] \subset \varphi_1(U \cap W)$, la bola abierta $B(0, 1)$ de centro en el origen y de radio 1 es un entorno abierto de $\varphi_1(p) = 0$ contenido en $\varphi_1(U \cap W)$; como $\varphi_1|_{U \cap W}: U \cap W \rightarrow \varphi_1(U \cap W)$ es un homeomorfismo entre abiertos, se sigue que $\varphi_1^{-1}(B(0, 1))$ es entorno abierto de p contenido en $U \cap W$. Se tiene entonces que ψ es una función constante e igual a 1 en $\varphi_1^{-1}(B(0, 1))$ y obviamente $\psi(M) \subset [0, 1]$. Para completar la demostración, hay que verificar que $\text{supp } \psi \subset W$ y que ψ es de clase C^∞ . Se tiene que $B[0; 2]$ es un subconjunto compacto de $\varphi_1(U \cap W)$ y, por consiguiente, $\varphi_1^{-1}(B[0; 2])$ es un subconjunto compacto de $U \cap W$; obviamente, ψ es idénticamente igual a cero por fuera de $\varphi_1^{-1}(B[0; 2])$. Como M es Hausdorff, el conjunto compacto $\varphi_1^{-1}(B[0; 2])$ es cerrado, lo cual implica que:

$$\text{supp } \psi \subset \varphi_1^{-1}(B[0; 2]) \subset U \cap W \subset W.$$

Para mostrar que ψ es de clase C^∞ , obsérvese que los conjuntos U y $M \setminus \varphi_1^{-1}(B[0; 2])$ construyen un recubrimiento abierto de M ; la restricción de ψ a U es de clase C^∞ , ya que tal restricción coincide con $\lambda_n \circ \varphi_1$. La restricción de ψ a $M \setminus \varphi_1^{-1}(B[0; 2])$ también es de clase C^∞ , puesto que tal restricción es idénticamente cero. $\square$

El lema siguiente constituye el paso principal en la demostración de la existencia de particiones diferenciables de la unidad subordinadas a un recubrimiento arbitrario.

Lemma 3.19. *Sea M una variedad diferenciable y sea $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recubrimiento abierto de M . Entonces existe una familia $\{\eta_j\}_{j \in J}$ de aplicaciones $\eta_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

- (i) $\eta_j(p) \geq 0$ para todo $p \in M$ y $j \in J$;
- (ii) para todo $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $\text{supp } \eta_j \subset U_i$;
- (iii) la familia $\{\text{supp } \eta_j\}_{j \in J}$ es localmente finita en M ;
- (iv) $\sum_{j \in J} \eta_j(p) > 0$ para todo $p \in M$.

Demostración. Sea $M = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ una exhaustión por compactos para M . Defina $K_n = \emptyset$ para $n \leq 0$. Para todo entero n , el conjunto $C_n = K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$ es compacto, al ser la intersección del compacto K_n con el cerrado $\text{int}(K_{n-1})^c$. Puesto que M es Hausdorff, cada compacto K_n es cerrado. También se tiene que:

$$M = \bigcup_{n \geq 1} (K_n \setminus K_{n-1}) = \bigcup_{n \geq 1} C_n;$$

en efecto, dado $p \in M$, si $n \geq 1$ es el menor entero tal que $p \in K_n$ entonces $p \in K_n \setminus K_{n-1} \subset C_n$. Intuitivamente, los compactos K_n pueden ser visualizados como una sucesión creciente de discos concéntricos que recubren a M y los compactos C_n serían entonces regiones “anulares” cerradas localizadas entre dos discos consecutivos. La estrategia consistirá en recubrir cada región “anular” C_n con un número finito de soportes de funciones η de clase C^∞ ; asimismo, se escogerán las funciones η de modo que sus soportes intercepten solamente un número finito de regiones “anulares” C_m y tales que dichos soportes estén contenidos en abiertos U_i del recubrimiento dado.

Vamos a los detalles. Sea $n \geq 1$ un entero y sea $p \in C_n$. Como $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un recubrimiento, existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. Se sigue que el conjunto $\text{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^c \cap U_i$ es un entorno abierto de p y, por consiguiente, el corolario anterior nos proporciona una aplicación $\eta_{(n,p)}: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\eta_{(n,p)}(M) \subset [0, 1]$,

$$\text{supp } \eta_{(n,p)} \subset \text{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^c \cap U_i,$$

y tal que $\eta_{(n,p)}$ es igual a 1 en un entorno abierto $V_{(n,p)}$ de p . Se obtiene de esta forma, para cada $n \geq 1$ un recubrimiento abierto $C_n \subset \bigcup_{p \in C_n} V_{(n,p)}$ del compacto C_n ; este recubrimiento posee un subrecubrimiento finito, esto es, existe un subconjunto finito F_n de C_n tal que:

$$C_n \subset \bigcup_{p \in F_n} V_{(n,p)}.$$

Así, pues, se obtiene una familia $\{\eta_j\}_{j \in J}$ de funciones $\eta_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , donde:

$$J = \{(n, p) \mid n \geq 1, p \in F_n\}.$$

Por construcción se tiene que $\eta_j(M) \subset [0, 1]$ para todo $j \in J$; además, para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $\text{supp } \eta_j \subset U_i$. Las condiciones (i) y (ii) que aparecen en el enunciado del lema son por lo tanto satisfechas.

Vamos a mostrar que la familia $\{\text{supp } \eta_j\}_{j \in J}$ es localmente finita en M . Sea $p \in M$ y sea $n \geq 1$ con $p \in K_n \setminus K_{n-1}$ entonces $p \in \text{int}(K_{n+1})$ y $p \notin K_{n-1}$, de donde se sigue que $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ es un

entorno abierto de p . Aseguramos que $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ interseca a $\text{supp } \eta_j$ solamente en un número finito de índices $j \in J$. Sea entonces $j \in J$ tal que $\text{supp } \eta_j$ interseca a $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$; escriba $j = (m, q) \in J$, con $m \geq 1$ y $q \in F_m$. Se tiene que $\text{supp } \eta_j$ está contenido en $\text{int}(K_{n+1}) \cap K_{m-2}^c$ y, por consiguiente,

$$(\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}) \cap (\text{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^c) = \text{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-1}^c \cap \text{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^c \neq \emptyset$$

En efecto, el hecho de que $K_{n+1} \cap K_{m-2}^c \neq \emptyset$ implica que $n+1 > m-2$; similarmente, $K_{m+1} \cap K_{n-1}^c \neq \emptyset$ implica que $m+1 > n-1$. Luego, $n-1 \leq m \leq n+2$. Esto demuestra que:

$$\{j \in J \mid (\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}) \cap \text{supp } \eta_j \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{m=n-1}^{n+2} \{m\} \times F_m.$$

Por lo tanto, $\text{supp } \eta_j$ interseca a $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ solamente para un número finito de índices $j \in J$. Esto completa la demostración de la condición (iii). Para terminar, vamos demostrar la condición (iv). Puesto que cada función η_j es no negativa, es suficiente verificar que para todo $p \in M$ existe $j \in J$ con η_j es no negativa, es suficiente verificar que para todo $p \in M$ existe $j \in J$ con $\eta_j(p) > 0$. Sea $n \geq 1$ tal que $p \in C_n$. Se tiene que $p \in V_{(n,q)}$ para algún $q \in F_n$; luego $(n, q) = j$ y $\eta_j(p) = 1$. $\square$

Finalmente, estamos en condiciones de probar el teorema central de esta sección.

Theorem 3.20. *Sea M una variedad diferenciable. Dado un recubrimiento abierto $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ de M existe una partición diferenciable de la unidad subordinada a dicho recubrimiento.*

Demostración. Sea $\{\eta_j\}_{j \in J}$ una familia de aplicaciones como lo indica el enunciado del lema anterior. Para cada $j \in J$, escoja $i = \sigma(j) \in I$ tal que $\text{supp } \eta_j \subset U_i$. Se obtiene entonces una aplicación $\sigma: J \rightarrow I$. Para cada $i \in I$ se define una aplicación $\xi_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\xi_i = \sum_{j \in \sigma^{-1}(i)} \eta_j,$$

donde se entiende que $\xi_i = 0$ si $\sigma^{-1}(i) = \emptyset$. Puesto que la familia $\{\text{supp } \eta_j\}_{j \in J}$ es localmente finita, se sigue que, en virtud del Lema 3.15, que ξ_i es de clase C^∞ . Nótese también que ξ_i es una función no negativa, ya que cada η_j lo es. Para todo $i \in I$ se tiene que:

$$\{p \in M \mid \xi_i(p) \neq 0\} \subset \bigcup_{j \in \sigma^{-1}(i)} \text{supp } \eta_j.$$

Utilizando nuevamente el hecho de que la familia $\{\text{supp } \eta_j\}_{j \in \sigma^{-1}(i)}$ es localmente finita y teniendo en cuenta que la unión de una familia localmente finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, se concluye que $\bigcup_{j \in \sigma^{-1}(i)} \text{supp } \eta_j$ es un conjunto cerrado. Luego:

$$\text{supp } \xi_i \subset \bigcup_{j \in \sigma^{-1}(i)} \text{supp } \eta_j \subset U_i$$

Vamos a mostrar que la familia $\{\text{supp } \xi_i\}_{i \in I}$ es localmente finita. Sea $p \in M$ un punto. Como la familia $\{\text{supp } \eta_j\}_{j \in J}$ es localmente finita, existe un abierto U de M que contiene a p el cual interseca a $\text{supp } \eta_j$ solamente para un número finito de índices $j \in J$. Si $i \in I$ es tal que $U \cap \text{supp } \xi_i \neq \emptyset$ entonces $U \cap \text{supp } \eta_j \neq \emptyset$ para algún $j \in \sigma^{-1}(i)$. En otras palabras, si U interseca a $\text{supp } \xi_i$ entonces $i = \sigma(j)$ para algún $j \in J$ tal que U interseca a $\text{supp } \eta_j$; en símbolos:

$$\{i \in I \mid U \cap \text{supp } \xi_i \neq \emptyset\} \subset \sigma(\{j \in J \mid \text{supp } \eta_j \neq \emptyset\})$$

Esto muestra que $\{i \in I \mid U \cap \text{supp } \xi_i \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito y, por consiguiente, la familia $\{\text{supp } \xi_i\}_{i \in I}$ es localmente finita. Una vez más, aplicando el Lema 3.15, se sigue que la función:

$$\xi = \sum_{i \in I} \xi_i$$

está bien definida y es de clase C^∞ . Aseguramos que ξ es una función positiva. En efecto, puesto que cada función ξ_i es no negativa, es suficiente mostrar que para todo $p \in M$ existe $i \in I$ tal que $\xi_i(p) > 0$. Pero sabemos que existe $j \in J$ tal que $\eta_j(p) > 0$ lo cual implica que $\xi_i(p) > 0$ si $i = \sigma(j)$. Defina ahora :

$$\psi_i = \frac{\xi_i}{\xi},$$

para todo $i \in I$. Se tiene que $\psi_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa de clase C^∞ para todo $i \in I$ y $\text{supp } \psi_i = \text{supp } \xi_i$. Luego, la familia $\{\text{supp } \psi_i\}_{i \in I}$ es localmente finita y $\text{supp } \psi_i \subset U_i$ para todo $i \in I$. Obviamente $\sum_{i \in I} \psi_i = 1$ y, puesto que cada función ψ_i es no negativa, se tiene que $\psi_i(M) \subset [0, 1]$ para todo $i \in I$. Así pues, $\{\psi_i\}_{i \in I}$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. $\square$

3.3 APLICACIONES

En esta sección se presentarán algunas aplicaciones interesantes del Teorema 3.20.

Recuérdese que el *Lema de Urysohn* afirma que si X es un espacio topológico normal y si $F, G \subset X$ son conjuntos cerrados disjuntos entonces existe una función continua $\xi: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\xi(x) = 1$ para todo $x \in F$ y $\xi(x) = 0$ para todo $x \in G$. A continuación, se demuestra una versión diferenciable del Lema de Urysohn.

Lemma 3.21. (*Urysohn C^∞*). Sea M una variedad diferenciable y sean $F, G \subset M$ dos conjuntos cerrados disjuntos. Entonces existe una función $\xi: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ con $\xi(M) \subset [0, 1]$, $\xi(p) = 1$ para todo $p \in F$ y $\xi(p) = 0$ para todo $p \in G$.

Demostración. Se tiene que los conjuntos $U_1 = M \setminus F$ y $U_2 = M \setminus G$ constituyen un recubrimiento abierto de M . Existe por tanto una partición diferenciable de la unidad $\{\psi_1, \psi_2\}$ subordinada a este recubrimiento, esto es, $\psi_i(M) \subset [0, 1]$ y $\text{supp } \psi_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. De aquí se infiere que $\text{supp } \psi_1$ es disjunto de F y $\text{supp } \psi_2$ es disjunto de G . Esto implica que $\psi_2(p) = 0$ para todo $p \in G$ y $\psi_1(p) = 0$ para todo $p \in F$. Además, $\psi_1(p) = 0$ implica que $\psi_2(p) = 1$. Por lo tanto, la función $\xi = \psi_2$ satisface las condiciones deseadas. $\square$

Recuérdese que el *Teorema de Tietze* establece que si X es un espacio topológico normal y $F \subset X$ es un subconjunto cerrado entonces toda aplicación continua $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ admite una extensión continua a todo el espacio X . A continuación, se demuestra una versión diferenciable del Teorema de Tietze.

Lemma 3.22. (*Tietze C^∞*). Sea M una variedad diferenciable y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^r$ una aplicación de clase C^∞ definida en un abierto $U \subset M$. Entonces para todo cerrado F en M contenido en U existe una aplicación $g: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ de clase C^∞ tal que $g|_F = f|_F$.

Demostración. En virtud del Corolario 3.3, M es normal, por lo que existe un conjunto abierto $V \subset M$ tal que $F \subset V$ y $\overline{V} \subset U$. A partir de los cerrados disjuntos F y V^c se obtiene, por el Lema de Urysohn C^∞ , una función $\xi: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\xi(p) = 1$ para todo $p \in F$ y $\xi(p) = 0$ para todo $x \notin V$. Defina g haciendo $g(p) = \xi(p)f(p)$ para todo $p \in U$ y $g(p) = 0$ para todo $x \in M \setminus U$. Se tiene entonces que la restricción de g a los abiertos U y $\overline{V}^c$ es de clase C^∞ ; en efecto, la restricción de g a U coincide con el producto $(\xi|_U)f$ y la restricción de g a $\overline{V}^c$ es

nula. Puesto que $M = U \cup \overline{V}^c$, se sigue que g es de clase C^∞ en M . Por último, como $\xi|_F = 1$, se tiene que $g|_F = f|_F$. $\square$

Corollary 3.23. Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$ un punto, $v \in \mathbb{R}^r$ un vector y $L: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^r$ una aplicación lineal. Entonces existe una aplicación $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ de clase C^∞ tal que $f(p) = v$ y $df(p) = L$.

Demostración. Sea (U, φ) una carta en M con $p \in U$. Considere la aplicación lineal:

$$\tilde{L} = L \circ d\varphi(p)^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r.$$

Entonces existe una aplicación $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ de clase C^∞ tal que $\tilde{f}(\varphi(p)) = v$ y $d\tilde{f}(\varphi(p)) = \tilde{L}$; en efecto, basta tomar:

$$\tilde{f}(x) = v + \tilde{L}(x - \varphi(p)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Considere la aplicación $f_0: U \rightarrow \mathbb{R}^r$ definida por $f_0 = \tilde{f} \circ \varphi$. Se tiene que $f_0(p) = v$ y $df_0(p) = \tilde{L} \circ d\varphi(p) = L$. Para completar la demostración, basta construir una aplicación $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ de clase C^∞ que coincide con f_0 en un entorno de p . Obviamente se tendrá que $f(p) = f_0(p) = v$ y $df(p) = df_0(p) = L$. En virtud del Lema 3.1, M es regular, por lo que p posee un entorno cerrado F contenido en U . El lema anterior nos garantiza entonces la existencia de una aplicación $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$ de clase C^∞ que coincide con f_0 en F . $\square$

El Teorema de Whitney afirma que si M es una variedad diferenciable de dimensión n entonces existe una inmersión inyectiva de M en $\mathbb{R}^{2n}$ que es una inmersión difeomórfica de M en $\mathbb{R}^{2n+1}$. A continuación se demuestra una versión más débil del Teorema de Whitney, válida únicamente para variedades compactas y donde no se especifica la dimensión del espacio euclidiano en el que se encaja la variedad M .

Theorem 3.24. Si M es una variedad diferenciable compacta entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ y una inmersión difeomorfa $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Demostración. Para cada $p \in M$, escoja una carta (U_p, φ_p) en M con $p \in U_p$. Puesto que M es regular (véase Lema 3.1), todo punto de M posee un sistema fundamental de entornos cerrados; luego existen abiertos V_p, W_p en M tales que:

$$p \in W_p \subset \overline{W_p} \subset V_p \subset \overline{V_p} \subset U_p.$$

Por el Lema de Tietze C^∞ , existe una aplicación $\phi_p: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ que es igual a φ_p en el cerrado $\overline{V_p}$. Por el Lema de Urysohn C^∞ , se puede obtener una función $\xi_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ que es igual a 1 en los puntos del cerrado $\overline{W_p}$ y es igual a cero en los puntos del cerrado V_p^c . El recubrimiento abierto $M = \bigcup_{p \in M} W_p$ posee un subrecubrimiento finito $M = \bigcup_{k=1}^r W_{p_k}$.

Defina la aplicación $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ mediante:

$$f(p) = (\phi_{p_1}(p), \dots, \phi_{p_r}(p), \xi_{p_1}(p), \dots, \xi_{p_r}(p)),$$

para todo $p \in M$, donde $N = rn + r$. Obviamente f es una aplicación de clase C^∞ . Vamos a mostrar que f es una inmersión difeomorfa. Para todo $p \in M$ y todo $v \in T_p M$ se tiene que:

$$df(p) \cdot v = (d\phi_{p_1}(p) \cdot v, \dots, d\phi_{p_r}(p) \cdot v, d\xi_{p_1}(p) \cdot v, \dots, d\xi_{p_r}(p) \cdot v).$$

Suponga que $df(p) \cdot v = 0$; se probará que $v = 0$. Sea $k = 1, \dots, r$ tal que $p \in W_{p_k}$. Las aplicaciones ϕ_{p_k} y φ_{p_k} coinciden en el abierto $V_{p_k} \ni p$ y por lo tanto $d\varphi_{p_k}(p) \cdot v = d\phi_{p_k}(p) \cdot v = 0$; puesto que φ_{p_k} es un difeomorfismo, se sigue que $d\varphi_{p_k}(p)$ es un isomorfismo, de donde se concluye que $v = 0$. Esto muestra que f es una inmersión. Dado que M es compacta, para

establecer que f es una inmersión difeomorfa es suficiente verificar que f es inyectiva. Sean $p, q \in M$ con $f(p) = f(q)$. Entonces $\phi_{p_k}(p) = \phi_{p_k}(q)$ y $\xi_{p_k}(p) = \xi_{p_k}(q)$ para $k = 1, \dots, r$. Sea $k = 1, \dots, r$ tal que $p \in W_{p_k}$. Se tiene que $\xi_{p_k}(p) = 1$ y por lo tanto $\xi_{p_k}(q) = 1$. Como ξ_{p_k} es nula en el complemento de V_{p_k} , se sigue que $q \in V_{p_k}$. Pero ϕ_{p_k} coincide con la carta φ_{p_k} en los puntos de V_{p_k} lo cual nos dice que la restricción de ϕ_{p_k} a V_{p_k} es inyectiva. Las condiciones $\phi_{p_k}(p) = \phi_{p_k}(q)$ y $p, q \in V_{p_k}$ implican, por tanto, que $p = q$. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. M. L. (auth.). *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 218. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2012.
- [2] L. C. (auth.). *Differentiable Manifolds*. Birkhäuser Advanced Texts / Basler Lehrbücher. Birkhäuser Basel, 2 edition, 2001.
- [3] K. J.L. *General topology*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1975.
- [4] T. R. Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Global analysis, pure and applied. Longman Higher Education, 1st edition, 1983.