

LOS NÚMEROS NATURALES DESDE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

THAIRY STEPHANIA FERNANDEZ GONZALEZ
CARLOS ALBERTO MIRANDA PALMITO



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEÁTICA
SANTIAGO DE CALI, 2016

LOS NÚMEROS NATURALES DESDE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

THAIRY STEPHANIA FERNANDEZ GONZALEZ
CARLOS ALBERTO MIRANDA PALMITO

**Trabajo de grado para optar por el título de
LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA**

Dirige:
GUILLERMO ORTIZ
Departamento de Matemáticas



Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Santiago de Cali, 2016

Agradecimientos

En primer lugar agradecemos a Dios por darnos la salud, la paciencia, y el ánimo para culminar con este trabajo. Agradecemos también a nuestros familiares por su constante apoyo en nuestro proceso de formación como futuros profesionales.

Agradecemos a la profesora Maribel Anacona quién en un principio era nuestra tutora, que con su enorme carisma y amabilidad nos orientó y aportó ideas en la realización de este trabajo. A nuestro tutor Guillermo Ortiz quién siempre estuvo dispuesto a orientarnos, y a otorgarnos las herramientas necesarias para la elaboración y culminación de este trabajo.

De igual forma, agradecemos a nuestros profesores de carrera por ser partícipes de nuestra formación, darnos la materia prima de su conocimiento. y a nuestros compañeros por su amistad y compañía durante todo este proceso.

Resumen

El presente trabajo tiene como interés principal mostrar la forma en que se complementa la definición de los números naturales desde la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Categorías, con el fin de que la Teoría de Categorías empiece a ser considerada como una teoría matemática complementaria a la Teoría de Conjuntos en la formación de los futuros docentes de esta disciplina. Para ello, se muestra cómo a través de la historia, los trabajos de Dedekind sobre la fundamentación de la aritmética pueden ser considerados como los antecedentes de los enfoques estructuralistas del siglo XX. Además, se realiza un estudio detallado de la estructura básica de $\mathbb{N}$ en Teoría de Conjuntos y de forma paralela en Teoría de Categorías, para posteriormente realizar un análisis en el cual se logre identificar algunos de los distintos y novedosos acercamientos a $\mathbb{N}$ que ofrece la Teoría de Categorías.

Palabras Clave: Números Naturales, Teoría de Conjuntos, Teoría de Categorías, Principio de Inducción, Principio de Recursión, Axioma *N.N.O.*

Índice general

Introducción	v
1. Antecedentes Históricos de $\mathbb{N}$	1
1.1. Richard Dedekind	1
1.2. La objeción de Grandjot	5
1.3. La Teoría de Conjuntos como Fundamento	7
1.3.1. Una Mirada a la Historia de ZFC	9
1.3.2. Consideración de la Teoría de Categorías en los trabajos del Grupo Bourbaki	10
1.4. La Teoría de Categorías como Fundamento	13
1.4.1. Origen de las Categorías	13
1.4.2. Aportes de Lawvere, Grothendieck y Tierney a la Teoría de Categorías	15
2. Definición de $\mathbb{N}$ en ZFC	21
2.1. Axiomática ZFC	21
2.2. Definición de $\mathbb{N}$	24
2.3. Principio de Inducción	26
2.4. Relaciones	27
2.5. Orden en $\mathbb{N}$	28
2.6. Principio de Recursión	34
2.7. Operaciones con Números Naturales	36
2.8. Axiomas de Peano	41
3. Definición de $\mathbb{N}$ en Categorías	44
3.1. Definición de Categorías	44
3.2. Conceptos Básicos	47
3.3. Objeto Número Natural N.N.O	55
3.4. Principio de Inducción	58
3.5. Principio de Recursión	59
3.6. Axiomas de Peano	62

4. Reflexiones y Conclusiones	66
4.1. Conclusiones y Reflexiones sobre $\mathbb{N}$	67
4.2. Conclusiones Históricas	71
4.3. Algunas Reflexiones Educativas	73
4.4. Consideraciones Finales	77

Introducción

Este trabajo de grado se inscribe en la línea de formación en Historia y Epistemología de las Matemáticas; del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Dentro de la historia de las matemáticas es importante destacar que el siglo XX fue un periodo en el que se hicieron grandes aportes al desarrollo de las matemáticas, particularmente, nacieron nuevas teorías matemáticas como posible fundamento de éstas: una de ellas es la Teoría de Categorías, la cual apareció por primera vez en 1945, a partir de los trabajos de Eilenberg y Mac Lane. Sin embargo, hoy en día la Teoría de Categorías no se toma como referente en la formación de los futuros profesores de matemáticas; sino que es la Teoría de Conjuntos la única que predomina en su formación. Esto trae como consecuencia la no consideración de otras teorías fundacionales en la enseñanza de las matemáticas con plena vigencia en nuestros días, de acuerdo con Gavalas en [?].

En este sentido, este trabajo tiene como propósito central realizar una reflexión sobre algunos distintos y novedosos acercamientos que ofrece la Teoría de Categorías, como marco conceptual para definir los números naturales; con el fin de empezar a considerar la Teoría de Categorías como una teoría matemática complementaria a la Teoría de Conjuntos en la formación matemática de los futuros docentes de esta disciplina. Por consiguiente, surge la necesidad de abordarla, no sólo para comprender en un sentido más amplio el quehacer matemático contemporáneo sino para observar cómo puede aportar y qué podría ofrecer en la formación matemática de los jóvenes, a nivel de la educación media y universitaria.

Por otra parte, el conjunto de los números naturales es considerado un concepto importante para las matemáticas, dado que a partir de él se pueden generar los demás conjuntos numéricos, como los números enteros, racionales y reales. De manera que al ser el conjunto base, es necesario conocer muy bien su estructura y cómo ésta se relaciona con otras estructuras. Por lo tanto, si se tienen unos buenos conocimientos sobre $\mathbb{N}$, luego es posible comprender mejor los conjuntos que se construyen a partir de él.

El presente trabajo se ha estructurado en cuatro capítulos:

En el primer capítulo se exponen algunos desarrollos matemáticos realizados por Richard Dedekind, tanto en la definición de los números naturales como en el campo del álgebra. Particularmente, se presenta la definición de los números naturales dentro de su trabajo *¿Qué son y para que sirven los números?*, en el cual se incluyen en términos propios de su teoría los principios de inducción y recursión para $\mathbb{N}$, este último no se introduce de manera explícita. Además, se muestra cómo los trabajos de Dedekind en el álgebra pueden ser considerados como los antecedentes de los enfoques estructuralistas del siglo XX, se evidencia en los naturales con su teorema de categoricidad. Seguidamente, se menciona la estrecha relación que tienen los trabajos de Weber en álgebra, con la obra de Dedekind.

Además en este capítulo, se presenta la problemática expresada por Edmund Landau en el prefacio de su libro *Grundlagen der Analysis*, la cual es conocida como la *Objeción de Grandjot* y se refiere a la omisión presentada por Landau al no considerar el principio de Recursión en la definición de la suma y el producto en los números naturales. Por otra parte, se expone el problema histórico de la fundamentación de las matemáticas. En este sentido, se mencionan los aspectos más importantes del intento de fundamentar las matemáticas a través de la Teoría de Conjuntos, con la axiomática¹ de ZFC. Luego, se hará una introducción a los trabajos del Grupo Bourbaki quienes muestran una matemática más estructurada y se comentan algunas de las razones por las cuales el grupo decidió no tener en cuenta la Teoría de Categorías en sus trabajos, mientras que otros matemáticos como por ejemplo Grothendieck y Mac Lane mostraron su interés por desarrollar matemáticas dentro esta teoría.

Al final de este capítulo se expondrán los aportes de los trabajos realizados por los matemáticos Eilenberg, Mac Lane, Lawvere y Tierney en el desarrollo de la Teoría de Categorías, los cuales se sitúan en el periodo denominado como matemáticas contemporáneas. Se hace especial énfasis en el axioma 3 de la *Teoría elemental de la categoría de conjuntos* presentada por Lawvere, el cual garantiza la existencia de un objeto número natural² (*N.N.O*) y además permite definir los números naturales dentro de la Teoría de Categorías.

En el segundo capítulo se realizará la presentación de los Números Naturales desde la Teoría de Conjuntos a través de la axiomática ZFC. En la cual, a partir de la introducción del axioma del infinito se garantiza la existencia de los conjuntos inductivos, esto permite definir los Números Naturales como la intersección de todos los con-

¹Axiomática de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección

²En adelante se usarán las siglas *N.N.O* (Natural Number Object) por su escritura en inglés.

juntos inductivos, es decir el mínimo de los conjuntos inductivos. Esta presentación proporciona de manera inmediata el Principio de Inducción, además ZFC permite una elegante, pero larga y costosa presentación teórica del Principio de Recursión. Estos principios constituyen la base de la estructura de los Números Naturales, puesto que el primero permite verificar propiedades en $\mathbb{N}$ y el segundo justifica la buena definición de las operaciones en los números naturales. Así mismo ZFC permite mostrar que la aritmética de los Números Naturales es equivalente a la aritmética de Peano.

En el tercer capítulo se definen los números naturales dentro de la Teoría de Categorías. Para ello, se expondrán los conceptos básicos de la teoría y se introducirá el axioma *N.N.O* mediante un diagrama, con el fin de presentar los Números Naturales como el objeto inicial de un tipo especial de categoría con objetos que tienen una cierta estructura $\mathbf{X} = \langle X, 0, S \rangle$. *N.N.O* implica en forma casi inmediata los principios de inducción y recursión. Además, se pueden probar los axiomas de Peano a partir del axioma *N.N.O*.

Finalmente, en el cuarto capítulo se mostrará cómo la definición de los números naturales a través de la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Categorías resultan ser complementarias; y a su vez profundiza la formación de un docente de matemáticas. Se realiza una reflexión y se presentan las conclusiones basadas en nuestra experiencia como estudiantes y futuros docentes de matemáticas con respecto a identificar si la Teoría de Categorías puede servir como una herramienta para la educación, y en consecuencia poder identificar algunos distintos y novedosos métodos que ofrece la Teoría de Categorías en relación a la Teoría de Conjuntos.

Capítulo 1

Antecedentes Históricos de $\mathbb{N}$

*“Los números son creaciones
libres de la mente humana”*

R. Dedekind.

En este capítulo se presentan los trabajos de Richard Dedekind en la definición de los números naturales y se menciona cómo sus desarrollos en el álgebra se pueden considerar como los orígenes del estructuralismo de Bourbaki. Seguidamente, se expone el interés de fundamentar las matemáticas dentro de la Teoría de Conjuntos a través de la axiomática ZFC ³ y de los trabajos de Bourbaki. En ese sentido, se menciona la aparición de la Teoría de Categorías en el grupo Bourbaki y algunas de sus razones para no considerarla dentro de su obra.

Posteriormente, se muestra como se dio lugar a los primeros orígenes de la Teoría de Categorías a partir de los trabajos de Eilenberg y Mac Lane. Finalmente, se menciona la propuesta de Lawvere de fundamentar las matemáticas dentro de la Teoría de Categorías, dando lugar a la teoría de topos, en la cual se pueden definir los números naturales.

1.1. Richard Dedekind

Desde la antigüedad y en el transcurso de la historia se han tratado de fundamentar todas las matemáticas. En un principio la aritmética, el álgebra y el análisis, donde éstos dos últimos se pueden pensar como derivados del primero; fueron considerados como carentes de un fundamento adecuado desde el siglo XVI hasta el XIX; quien puso fin a esto fue el matemático Richard Dedekind, considerado como una de

³Es importante mencionar que la axiomática ZFC se puede usar como marco axiomático para definir los números naturales en la Teoría de Conjuntos, tal como se muestra en la *sección 2.2*.

las figuras centrales de su tiempo, tal como lo expresa Ferreirós en su traducción del libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* [?].

A principios del siglo XIX se dieron cuenta de la falta de fundamentación de la aritmética, a causa del problema de fundamentar el análisis. De modo que, para dar solución a este problema, algunas propuestas estaban ligadas a la noción de magnitud, entre los más destacados se encuentran los trabajos de Grassmann, H. y Weierstrass, K.; sin embargo, Dedekind prescinde de esta noción y se propone a desarrollar la aritmética, mediante el uso de la Teoría de Conjuntos. Además, en su intento de fundamentar la aritmética y el álgebra, se ocupó por desarrollar de manera rigurosa todo el sistema numérico, según dan cuenta algunas de sus publicaciones y manuscritos, particularmente en el campo de la teoría de números algebraicos y del álgebra. Dedekind en su libro de 1888 *¿Qué son y para qué sirven los números?* tiene como objetivo recuperar todo el edificio de la matemática de su tiempo por medio de las concepciones ahí expuestas.

En este libro, Dedekind plantea que a partir de la única base de los números naturales, es posible construir todo el sistema numérico. A pesar de saber esto, decidió no elaborar cada uno de los pasos de construcción, sino que su ambición fue más allá, la cual fue según Ferreirós en [?, p. 51]: “presentar la teoría general en que se basa todo el proceso, y reducir los propios números naturales a nociones más generales”.

En este orden de ideas, Dedekind a su apartado **1** lo ha llamado *Sistemas de elementos*, en el cual introduce un sistema S constituido con “cosas”, entendida por “cosa” todo objeto producido por el pensamiento, a los cuales llama *elementos* del sistema S , y dice que están contenidos en ese sistema S . Aquí Ferreirós menciona que uno de los mayores defectos que ha sido destacado es no diferenciar pertenencia e inclusión.

Otro aspecto importante es que él no tiene en cuenta el sistema vacío el cual no contiene ningún elemento, por razones determinadas; sin embargo, propone que para otras investigaciones puede ser cómodo incluir este sistema vacío. En otras palabras, no elimina por completo sus posibilidades de ser introducido en otros trabajos.

Luego, al apartado **2** lo llamó *Representación de un sistema*, en él introduce la noción de representación o también conocida como aplicación, la cual será considerada como la base de toda la teoría y la gran novedad del libro; así mismo, se destaca la forma moderna en que Dedekind introduce esta noción.

Posteriormente, Dedekind a su apartado **3** lo denominó *Similaridad de una representación*. *Sistemas Similares* y a **4** lo nombró *Representación de un sistema en*

si mismo. En éste último, introduce el teorema de inducción completa, pero no con la intención de demostrar propiedades en $\mathbb{N}$; sino para $A_{\circ}$ ⁴, la comunidad de todas aquellas cadenas de las cuales A es parte.

Seguidamente, en su apartado **5** llamado *Finito e Infinito*, Dedekind define cuándo un sistema S puede ser llamado infinito o finito. Ya en su apartado **6** con el nombre de *Sistema simplemente infinito. Serie de los números naturales*, define los números naturales como sigue:

“Un sistema $\mathbb{N}$ se llama simplemente infinito cuando una representación similar ϕ de $\mathbb{N}$ en sí mismo tal que $\mathbb{N}$ aparece como cadena de un elemento que no está contenido en $\phi(\mathbb{N})$. Llamamos a ese elemento, que en lo sucesivo designaremos mediante el símbolo 1, elemento base de $\mathbb{N}$, ... ,la esencia de un sistema simplemente infinito $\mathbb{N}$ consiste en la existencia de una representación ϕ de $\mathbb{N}$ y un elemento 1 que satisfacen las siguientes condiciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:...” [?, p. 118].

De lo anterior, se puede observar que para Dedekind el primer elemento de $\mathbb{N}$ es 1 y la función sucesor la llama ϕ , denotando al sucesor de n como n' . Además define los números naturales como un conjunto infinito. Más aún, en este apartado introduce el Principio de Inducción completa, ahora sí con el fin de probar propiedades en los elementos de n , tal como se muestra a continuación:

“... Para probar que un teorema vale para todos los números n de una cadena $m_{\circ}$, basta mostrar:
 ρ . que vale para $n = m$, y
 σ . que de la validez del teorema para un número n de la cadena $m_{\circ}$ se sigue siempre su validez para su sucesor n' ” [?, p. 119].

Los siguientes apartados **7** y **8** son llamados *Números mayores y menores* y *Partes finitas e infinitas de la serie numérica*, respectivamente. En el apartado **7** Dedekind expresa que todo número n debe ser distinto de su sucesor n' , de modo que se le está otorgando un orden a los números naturales.

Luego, en el apartado **9** llamado *Definición de una presentación de la serie numérica por inducción*, Dedekind introduce un teorema general que justifica las definiciones recursivas; este será utilizado para definir las operaciones de los números naturales.

Observación 1.1.1 *El teorema general del apartado 9 se puede considerar, en términos modernos como el teorema de recursión que permite justificar la buena definición de las operaciones, (ver sección 2.6).*

⁴ $A_{\circ}$ es el símbolo utilizado por Dedekind para designar *cadena del sistema A*, ver en [?]

Dejando a un lado el apartado **10** que se retomará al final, a continuación se centra el interés en los apartados **11**, **12** y **13** denominados *Adición de los números*, *Multiplicación de los números* y *Potenciación de los números*, respectivamente. Como se puede observar, Dedekind hace un apartado para cada operación de los números naturales y las define por medio de la aplicación sucesor de manera recursiva; además el concebía las operaciones como aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

El último apartado que introduce Dedekind es el **14**, bajo el nombre de *Número [CARDINAL] de elementos de un sistema finito*.

Finalmente, en el apartado **10** con el nombre de *La clase de los sistemas simplemente infinitos*, Dedekind presenta la definición de número natural desde una visión “categórica”, para ello se propuso caracterizar el conjunto de los números naturales a partir de las propiedades más esenciales, con el fin de establecer el hecho de que si otro conjunto cumple con las mismas propiedades es isomorfo a $\mathbb{N}$. Ferreirós en [?] menciona la importancia de introducir el concepto de cadena de A , donde A es un subconjunto de C , para una aplicación ϕ de C . Lo anterior se hace con el fin de evitar la existencia de elementos en C que no cumplan con el Principio de Inducción. De esta manera, se da lugar a la definición de número natural (o sistema simplemente infinito) a través de unas condiciones particulares. Posteriormente, Dedekind enuncia y demuestra el teorema de categoricidad en este apartado, tal como sigue:

“Todos los sistemas simplemente infinitos son similares a la serie numérica $\mathbb{N}$ y por tanto son similares entre sí” [?, p. 132].

En el cual verifica que dos conjuntos simplemente infinitos son isomorfos, es decir, cualquier conjunto simplemente infinito es isomorfo a $\mathbb{N}$.

Retomando lo mencionado en párrafos anteriores, de que la noción de aplicación se consideraría la gran novedad del libro, esto se debe a que Dedekind fue consciente de que puede ser concebida una aplicación que va de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ a través de la función sucesor. En consecuencia, estas nociones de conjunto y aplicación permitían definir los números naturales como un conjunto con una estructura particular, a través de los cuales se construyen los demás sistemas numéricos, hasta llegar a los números complejos. En este sentido, con estas dos nociones es suficiente para desarrollar la aritmética, el álgebra y el análisis.

Como se mencionó en los primeros párrafos el principal interés de Dedekind se centró en los problemas de fundamentación, más que la intención de ofrecer nuevos resultados. Dedekind se caracterizaba por su rigor expositivo en sus trabajos, un rigor que expresa Ferreirós a menudo nunca visto.

De modo que, la obra que se ha expuesto brevemente en este trabajo se puede considerar en concordancia con Ferreirós [?, p. 15]: “como uno de los mayores esfuerzos por lograr una visión sistemática, unitaria y rigurosa de la matemática; no es casual que Bourbaki parezca considerarlo su principal ancestro”.

Así como la obra de Dedekind de 1888 proporcionó algunos desarrollos en la Teoría de Conjuntos, también lo hizo para el álgebra. Además, es importante destacar los aportes de Heinrich Weber en el campo del álgebra. En [?] se describe a Weber como un matemático polifacético y quien marcó la época con su mayor obra *Lehrbuch der Algebra* (1894-1896), la cual incluso hoy en día es tenida en cuenta. Esta obra ha sido de gran interés, dado que algunas de las ideas de Dedekind sobre la construcción del sistema numérico son retomadas en ella. En este sentido, en [?] Gray & Parshall mencionan la relación que pudieron tener los trabajos de Dedekind y Weber, puesto que en la presentación de un sólo volumen del libro de éste último se expone en principio su versión de la teoría de Kronecker para después dar paso a la Teoría de Dedekind.

Observación 1.1.2 *En el párrafo anterior se trata de manera breve de dar protagonismo al álgebra, ya que ha sido muy importante en el transcurso de la historia; es tanto así que más adelante, Lawvere expresa sentirse orgulloso de haber participado junto a otros categoristas en el logro de una conciencia contemporánea del álgebra, tal como lo es la Teoría de Categorías. Sin embargo, no se entrará en detalles sobre esta cuestión.*

Por otro lado, como se mencionó en este capítulo, la introducción del Principio de Recursión es importante para definir la operación de los números naturales. Esta cuestión resultó ser problemática en la obra de *Grudlagen der Analysis* de Landau, tal como se aborda en la siguiente sección.

1.2. La objeción de Grandjot

Edmund Landau en el prefacio para el docente del libro *Grudlagen der Analysis*⁵, menciona que esta obra se propone realizar una presentación rigurosa y completa de las matemáticas elementales, con el fin de proporcionar a los estudiantes universitarios las herramientas necesarias para que ellos sean capaces no sólo de entender los resultados más relevantes en cada uno de los campos en que se requieren las aplicaciones de las matemáticas, sino también que estén en la capacidad de descubrir teoremas auxiliares que les permita resolver problemas relacionados con su campo de estudio.

⁵Se ha tomado la traducción de Steinhard, *Fundations of Analysis* ver [?].

En primer lugar, Landau introduce los axiomas de Peano para los números naturales con el propósito de presentar posteriormente la teoría de los números reales y complejos. En ese sentido, el libro se desarrolla por capítulos de la siguiente manera:

Capítulo 1. Números naturales.

Capítulo 2. Fracciones y racionales positivos.

Capítulo 3. Números positivos (Racionales e irracionales).

Capítulo 4. Números reales (positivos, negativos y cero).

Capítulo 5. Números Complejos.

Además, dentro de este prefacio Landau menciona la objeción realizada por su entonces asistente Carlos Grandjot, quien utilizaba su libro de notas como una base para el estudio de los fundamentos del análisis. Grandjot expresa la necesidad de añadir más axiomas a los de Peano, puesto que el procedimiento seguido por Landau era incompleto en lo que corresponde a la definición de las operaciones de *suma* y *producto* en los números naturales.

Por su parte, Landau explica la objeción de Grandjot desde el caso particular para la suma de dos números x y y , pues supone que de forma análoga se tiene para el producto. De esta manera, expone que una situación similar a la mencionada por Grandjot se puede presentar al probar un teorema de los números naturales con el Principio de Inducción, puesto que para demostrar una propiedad en todos los números naturales⁶ sólo es necesario verificar la propiedad para 1 y para $s(n)$ a partir de la validez de la propiedad para n , sin haberla probado antes para el número natural n . No obstante, un estudiante que no conozca el Principio de Inducción objetará la demostración por el hecho de no haber probado la propiedad para n . Con respecto a lo anterior, Landau afirma: “La objeción (sobre el Principio de Inducción) no es justificada, pero es entendible; el estudiante nunca había oído del Principio de Inducción. La objeción de Grandjot⁷ suena similar, con la diferencia que fue justificada” [?] ⁸.

Posteriormente, Landau expone la definición de suma a partir de los axiomas de Peano para un número natural x fijo y todo número natural y , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x + 1 &= s(n) \\ x + s(y) &= s(x + y)\end{aligned}$$

⁶Los números naturales en este trabajo de Landau tienen como primer elemento el 1. Sin embargo, otros autores consideran que los números naturales tienen como primer elemento el 0, este es el caso de la axiomática ZFC, ver Capítulo 2.

⁷Un estudio más detallado de la objeción presentada por Grandjot, se encuentra en [?]

⁸“The objection is not justified but it is excusable; the student just had never heard of the axiom of induction. Grandjot’s objection sounds similar, with the difference that it was justified” [?]

No obstante, el problema de esta definición radica en que $x + y$ no está definido. Para ello, es importante realizar primero la definición del concepto de orden en los naturales. De acuerdo con Pi Calleja en [?], Peano primero define la suma y posteriormente introduce el orden; por el contrario, Dedekind presenta las definiciones recurrentes haciendo uso del concepto de orden definido previamente. Para solucionar esta cuestión, Landau propone la introducción del conjunto de los números $z \leq y$ para los cuales existe un único $f(z)$, tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$(i) \ f(1) = x$$

$$(ii) \ f(s(z)) = s(f(z))$$

En consecuencia, Landau en [?] menciona que con la ayuda de su colega von Neumann, ha realizado un procedimiento parecido al anterior, con el fin de darle la solución a la objeción presentada por Grandjot. Sin embargo, destaca que posteriormente se dio por enterado que el Dr. Kalmár⁹ había desarrollado una prueba más simple.

Observación 1.2.1 *La función f presentada por Landau para dar solución a la objeción expuesta por Grandjot se relaciona con la función h que se introduce en los capítulos 2 y 3 para presentar el Principio de Recursión.*

1.3. La Teoría de Conjuntos como Fundamento

En relación con los trabajos propuestos para la fundamentación de las matemáticas a través de la historia, el siglo XX fue considerado como uno de los periodos de la historia en el que se hicieron grandes aportes al desarrollo de las matemáticas, particularmente, fue un período en el que nacieron nuevas teorías matemáticas como posible fundamento de éstas.

Dicho lo anterior, una de esas teorías es la Teoría de Conjuntos, de la cual Georg Cantor y Dedekind es considerado como el creador de ella. A pesar de que el nacimiento de la Teoría de Conjuntos fue entre 1872 y 1882, se puede decir que gran parte de su desarrollo axiomático fue en el siglo XX. Cantor introdujo conceptos conjuntistas en el análisis; sin embargo, no era el único, ni el primero que realizó en ese periodo investigaciones con respecto a los conjuntos. De acuerdo con Ferreirós en [?], esto se debe a que Dedekind proporcionó dentro de la matemática moderna: el análisis, el

⁹László Kalmár(1905-1976), fue un matemático húngaro que presentó una prueba más simple que la proporcionada por Von Neumann a la objeción de Grandjot, esto lo hizo saber por medio de una comunicación oral a Landau. Kalmár trabajó en la lógica matemática para resolver ciertos problemas de decisión en el cálculo de predicados de primer orden. Para ver en detalle [?].

álgebra y la teoría de números un estilo conjuntista.

Aunque, Dedekind no escribió nunca sobre temas relacionados con los trabajos de Cantor, los cuales se han caracterizado en la Teoría de Conjuntos. sin embargo, los métodos expuestos en su trabajo de 1888 y la consideración de conjuntos infinitos han tenido gran relevancia en las matemáticas de hoy en día, de manera particular, en la Teoría de Conjuntos. En concordancia con Ferreirós en [?], esto ha contribuido a que esta teoría se convirtiera en una herramienta de las investigaciones matemáticas, específicamente para el desarrollo de un planteamiento conjuntista-estructural en álgebra, tal como sucede hoy en día.

La teoría de Dedekind expuesta en su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* puede reformularse fácilmente dentro de la Teoría de Conjuntos axiomática, aunque Dedekind en esta teoría no haya mencionado la palabra conjunto. Como consecuencia de esto, se ha propuesto modelos particulares de ‘conjunto simplemente infinito’, por parte de los teóricos conjuntista, como caso particular, los modelos presentados por Zermelo y Von Neumann. Aunque Dedekind no desarrolló de forma directa y explícita la Teoría de Conjuntos, se ha considerado que su trabajo fue fundamental en los inicios de esta teoría.

Por otra parte, Georg Cantor proporcionó una Teoría de Conjuntos intuitiva con motivaciones puramente matemáticas; mientras que, Gottlob Frege tenía unas motivaciones diferentes, de naturaleza puramente lógicas, de este modo desarrolló un enfoque equivalente al de Cantor, que hoy en día se conoce como *teoría ingenua de conjuntos*. Esta teoría se basa en dos principios: *principio de extensión* y *principio de comprensión*. Según Odifreddi en [?] se debe destacar que con estos dos principios lógicamente elementales se podía fundamentar todas las matemáticas, dado que ahora los trabajos de Cantor y Frege mostraban que la aritmética hasta ese momento considerada como el fundamento de las matemáticas, podía ser reducida a la Teoría de Conjuntos.

Sin embargo, se encontró una inconsistencia en esta cimentación, es por esta razón que se le llamó *ingenua* a la Teoría de Conjuntos de Frege. Esto se debe a que el filósofo y matemático Bertrand Russell, demostró que el *principio de comprensión* era contradictorio por medio de un razonamiento que se hizo famoso con el nombre de la *paradoja de Russell*. Como posible solución a esta paradoja y a otras más que se habían originado en esa época, introdujo en 1908 la *Teoría de tipos*, la cual es una versión de la teoría ingenua de conjuntos, basada igualmente en los principio de extensión y comprensión, pero con la diferencia de que los conjuntos no son de un solo tipo y que una propiedad de objetos de cierto tipo determina un conjunto del tipo sucesivo.

En ese mismo año Ernest Zermelo propuso una primera lista de axiomas, tal como se presentará en la siguiente sección, como consecuencia de que para encontrar una solución consistente a esa cuestión, de acuerdo con Odifreddi en [?] se debía abandonar el enfoque analítico y adoptar un enfoque sintético, en el cual se crearán una serie de principios de existencia y de reglas para la construcción de los conjuntos, con el fin de evitar los conjuntos paradójicos.

1.3.1. Una Mirada a la Historia de ZFC

En los orígenes de la Teoría de Conjuntos se puede reconocer a Georg Cantor como uno de los fundadores de ésta teoría, sin embargo, sus ideas intuitivas conducían a algunas paradojas, tal como la presentada por Russell. Es por ello que algunos matemáticos del comienzo del siglo XX, entre los que se destacan Ernest Zermelo, se propusieron a desarrollar un marco axiomático para la Teoría de Conjuntos.

De acuerdo con Anacona en [?], el primer marco axiomático de Zermelo fue presentado en el año 1908, con el fin de explicar y aclarar los fundamentos teóricos de su prueba del buen orden realizada en 1904, la cual causó polémica entre varios matemáticos de la época. Esta axiomática estaba compuesta por siete axiomas: extensionalidad, separación, existencia, pares, unión, conjunto potencia e infinito.

Por otro lado, Abraham Fraenkel era consciente de las limitaciones presentadas por el sistema axiomático de Zermelo y le expresa la necesidad de añadir un nuevo axioma. De esta manera, Fraenkel en 1922 presenta el axioma de reemplazo.

Posteriormente, hacia el año 1930, Zermelo agrega el axioma de fundamentación a su sistema axiomático y a su vez deja por fuera los axiomas de elección, unión e infinito. En concordancia con Anacona en [?], el sistema axiomático presentado por Zermelo en 1930 más los axiomas de elección, unión e infinito, se puede considerar como uno de los modelos conjuntistas más usados para el desarrollo de la Teoría de Conjuntos. Esta axiomática es denominada sistema ZFC.

Otras de las propuestas importantes para el fundamento axiomático de la Teoría de Conjuntos fue la presentada por Von Neumann, Bernays y Gödel, denominada como sistema Neumann-Bernays-Gödel (NBG). Como se menciona en [?], la noción primitiva en NBG es la de clase, en lugar de conjunto, lo cual permite considerar objetos mucho más grandes que los proporcionados por el sistema ZFC; sin embargo, aún seguían apareciendo las paradojas relacionadas con el tamaño. Se debe destacar además, que problemas similares aparecieron en los trabajos del grupo Bourbaki al intentar dar un fundamento conjuntista a la Teoría de Categorías. Estas consideraciones se abordarán con más detalle en la siguiente sección.

1.3.2. Consideración de la Teoría de Categorías en los trabajos del Grupo Bourbaki

La escasa visibilidad de la Teoría de Categorías como un fundamento matemático diferente al de la Teoría de Conjuntos [?], es una cuestión que se ha discutido a través de la historia, el Grupo Bourbaki en su interés por construir un fundamento sólido de las matemáticas, el cual les permitiera reunir todos los desarrollos matemáticos que se habían alcanzado hasta ese momento y que además les diera la certeza de no tener lugar a futuras contradicciones, se propuso realizar un trabajo minucioso que se caracterizaba por su organización y constante debate. Por otro lado, Bourbaki decidió adoptar un sistema axiomático equivalente¹⁰ al de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección sin el axioma de fundamentación (ZFC^-) e incorporar las estructuras como base para la fundamentación de las matemáticas, definidas mediante el concepto de conjunto. Además, dentro de su filosofía de trabajo se destaca que:

La ausencia de contradicción, en matemáticas como un todo o en cualquier rama particular, aparece como un hecho empírico, y no como un principio metafísico. Entre más se ha desarrollado una disciplina, menos probable resulta que contradicciones pueden ser encontradas en su desarrollo posterior,¹¹ [?, p. 3].

En ese sentido, si el Grupo Bourbaki pensaba en incluir la naciente Teoría de Categorías, debía proporcionar los fundamentos matemáticos apropiados que les permitiera justificar su incorporación, y que al mismo tiempo les otorgará la seguridad de no presentar contradicciones.

Es así como Bourbaki empieza por darle a la Teoría de Categorías, un marco fundacional conjuntista a partir del sistema ZFC^- , dado que éste constituía un piso axiomático el cual les otorgaba una seguridad empírica a ellos [?]. Sin embargo, Eilenberg y Mac Lane expresan en sus primeros artículos que este sistema axiomático no es un marco ideal para fundamentar la Teoría de Categorías; esto se debe a que uno de los principales problemas que surgen al tratar de darle un fundamento conjuntista a la Teoría de Categorías está relacionado con la noción de tamaño de los nuevos objetos, los cuales no logran ser completamente abordados por el concepto de conjunto, de manera que esto parecería terminar en paradojas familiares, como se menciona en [?], [?] y [?]. Por ende, es necesario hacer una distinción entre categorías pequeñas y categorías grandes; debido a que, el problema en sí, está en las categorías

¹⁰La prueba de esta equivalencia se encuentra en [?].

¹¹“Absence of contradiction, in mathematics as a whole or in any given branch of it, thus appears as an empirical fact, rather than as a metaphysical principle. The more a given branch has been developed, the less likely it becomes that contradictions may be met with in its further development”. [?, p. 3]

grandes, tales como, la categoría de todos los conjuntos, o la categoría de todos los grupos numerables, entre otras; por lo que si son tratadas sencillamente como conjuntos, puede llevar a posibles contradicciones. En [?, p. 4086] se expone el siguiente ejemplo:

The “category of all sets” cannot be a set because if the collection of all sets V was a set, then the collection of all its subsets $\wp(V)$, would be a set included in V , contradicting Cantor’s theorem.

En consecuencia, Bourbaki consciente de las limitaciones del sistema ZFC^- como marco fundacional para la Teoría de Categorías, propone un cambio axiomático de pasar de ZFC^- a NBG , debido a que este último permite restringir el tamaño de los conjuntos considerados y a su vez hacer una distinción entre conjuntos y clases, por lo cual es posible decir que cualquier conjunto puede ser una clase, más no todas las clases pueden ser conjuntos; por lo que, como marco fundacional les proporciona la seguridad de que las categorías de todos los conjuntos, o la categorías de todos los grupos numerables, no sean conjuntos, sino clases; legitimando su concepto de categorías. De esta manera, se hace posible definir lo que es una categoría grande, como lo expresa Marquis en su libro *From a Geometrical Point of view*: “a large category is a category whose class of morphisms is a proper class of NBG. Otherwise, the category is said to be small.” [?, p. 53].

Sin embargo, algunos integrantes del grupo Bourbaki, en particular Chevalley, dudaba de la efectividad y potencia de este sistema axiomático. Por otro lado, Lacombe otro integrante del grupo Bourbaki profundizó en la distinción entre clases y conjuntos, mostrando como resultado de que hay términos de la Teoría de Categorías que no pueden ser expresados por medio de clases. Grothendieck también integrante del grupo Bourbaki, estaba convencido de que con un cambio se podrían solucionar estos impedimentos; es por ello que propuso una alternativa diferente, en la cual era necesario introducir un nuevo axioma, que implicaba a su vez una nueva noción, esto con el fin de no renunciar a la Teoría de Conjuntos.

El motivo de la propuesta de Grothendieck se debe en parte a la objeción que tuvo con respecto a lo que proponía Lacombe de introducir una nueva categoría de objetos matemáticos, implicando que las clases fueran “conjuntos más grandes”, lo cual ocasionaba que no tuviera sentido hablar de la clase de todas las clases, por el solo hecho de contradecir la definición de clase; de este modo, se volverían a presentar algunas dificultades al tratar de formar categorías que parecen naturales en el desarrollo de la teoría, como lo son, la categoría de todos los grupos (Grp), la categoría de todos los espacios topológicos (Top) o la categoría de todas las categorías (Cat); y por tanto no se podría hablar de la categoría Grp^{Top} considerada como un objeto de Cat .

Es así como Grothendieck en la búsqueda de un nuevo marco fundacional para la Teoría de Categorías presenta **la noción de universo y el axioma de los universos**. Esto le permitía resolver el problema fundamental del tamaño de los objetos, en otras palabras, era una posible solución a la dificultad que existía para poder diferenciar entre categorías grandes y categorías pequeñas. En efecto, *la noción de Universo* proporciona argumentos para distinguir entre los diferentes tamaños de objetos, es decir, para cada conjunto de objetos está garantizada la existencia de un universo U_i dentro del cual están contenidos estos objetos, este a su vez está contenido en un universo U_{i+1} , y así sucesivamente. Paralelamente, *el axioma de los Universos* postula que todo objeto se encuentra en un Universo, lo que equivale a admitir la existencia de una sucesión infinita de Universos [?]. Sin embargo, el método de los Universos de Grothendieck no se salía del contexto de la axiomática de Bourbaki, pues bien, es posible expresar cada universo U_i , “como un modelo *debilitado* de la Teoría de Conjuntos” [?, p. 4091].

Aunque la propuesta de Grothendieck solucionó algunas de las dificultades con las que se encontró Bourbaki, para lograr dar fundamento conjuntista a la Teoría de Categorías, finalmente el grupo optó por no desarrollar la Teoría de Categorías en su obra. Bourbaki sabía muy bien que el axioma de los Universos era equivalente al axioma de Tarski, que garantiza la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles. De hecho, tenía una prueba de este resultado. Pero, Bourbaki necesitaba saber si al agregar el axioma de los universos a su sistema, el sistema obtenido seguía siendo relativamente consistente. Desafortunadamente esta consistencia relativa no es demostrable. La imposibilidad de poder demostrar la consistencia relativa del nuevo sistema, constituía un fuerte golpe a la tranquilidad que ofrecía su sistema [?]. Nada garantizaba que no se fuesen a encontrar en el futuro algunas contradicciones. Bourbaki sabía que aceptar el axioma de los universos significaba renunciar a la seguridad empírica considerada como uno de los principios de su filosofía práctica.

Más aún, Dubuc en su artículo *Categorías. Los 30 primeros años*, expresa:

Armand Borel cuenta que para los Bourbaki primó su política que afirmaba que generalizaciones que no agregan aplicaciones deben descartarse, versus la política de Grothendieck que sostenía que los fundamentos deberían estar hechos no solo para la matemática existente sino también para la posible matemática futura. [?, p. 3].

Habría que decir también, que el hecho de que la propuesta de Grothendieck no haya sido incorporada, se debe entre otras razones, a que Cartan miembro del grupo se oponía a considerar la inclusión de este nuevo axioma en un sistema axiomático que sirviera como marco fundacional para la Teoría de Categorías, ya que este axioma empleaba un sistema cerrado y esto podría originar futuras contradicciones. Por otra

parte, está Andre Weil quien fue considerado uno de los principales opositores de las ideas de Grothendieck y quien tal vez pudo incidir en el hecho de no respaldar la propuesta de Grothendieck por parte de los demás miembros, debido a la influencia obtenida por ser uno de los fundadores del grupo. Así mismo, se puede considerar la idea de que la decisión del grupo con respecto a no incorporar la Teoría de Categorías se vio influenciado por el hecho de que aceptar la propuesta de Grothendieck implicaba una reescritura completa de todo un libro que ya estaba escrito en su etapa final.

De acuerdo con Odifreddi en [?] las teorías de conjuntos de (Zermelo-Fraenkel) y la de estructura (Bourbaki), fueron y aún en algunos campos de las matemáticas de hoy en día se han considerado satisfactorias para gran parte de las matemáticas; sin embargo, se quedarían cortas al tratar conceptos mucho más complejos, de ahí que es necesario extender estas teorías, con el fin de construir una teoría mucho más amplia que permita recoger todos los conceptos matemáticos por complejos que sean. Esta nueva teoría supone una abstracción de tal grado, en la que se pueda sintetizar los objetos matemáticos tanto como éstos mismos lo permitan.

1.4. La Teoría de Categorías como Fundamento

1.4.1. Origen de las Categorías

Los conceptos básicos de categoría y funtor aparecieron por primera vez en los trabajos de Eilenberg y Mac Lane hacia 1942, [?]. La historia previa a la introducción de estas nociones se sitúa en un contexto de una amplia variedad de situaciones matemáticas que aparecieron en diversos campos de las matemáticas, pero más que todo en álgebra y topología. Entre estas situaciones se destaca la noción de “naturalidad”¹² que apareció con frecuencia en los trabajos de Eilenberg y Mac Lane, sin embargo no estaba definida formalmente. Este hecho motivo a que en el primer artículo escrito en conjunto entre Eilenberg y Mac Lane, se presentará una definición para naturalidad dentro de la teoría de grupos. No obstante, para una formulación axiomática general de este concepto se hacía necesario considerar las colecciones de todos los grupos y sus morfismos, similarmente para todos los espacios topológicos y sus funciones continuas, y así sucesivamente.

Más adelante en el artículo de Eilenberg y Mac Lane de año 1945, se introduce una formulación abstracta de los conceptos de categoría y funtor, con el fin de explicar los fenómenos de la naturalidad. En este artículo se presenta un ejemplo dentro de los espacios vectoriales, en el cual los autores llegan a que el isomorfismo entre un espacio L y su doble dual $T(L)$ es natural. Además este resultado los lleva a la necesidad de

¹²Para conocer en detalle el concepto de naturalidad, ver en [?].

considerar simultáneamente todos los espacios vectoriales y todos los morfismos entre ellos, esto condujo a definir las categorías.

De acuerdo con Corry en [?], se debe mencionar que en trabajos previos a este artículo dentro del campo de la teoría homológica se pudo dar origen al concepto de funtor, puesto que esta teoría busca asociar a cada espacio topológico dado un sistema algebraico, con el objetivo de deducir más fácilmente algunas propiedades de los espacios topológicos a través de los grupos homológicos. Además, lo anterior también implica la asociación de un homomorfismo de grupos para toda función continua entre los espacios topológicos dados.

Por otra parte, en una conferencia en honor a Marshall Stone en 1970, Mac Lane resalta que los trabajos de Stone sobre el álgebra de Boole ocuparon un papel decisivo en el desarrollo de la teoría de las categorías, ya que identificó en sus pruebas detalles de casos particulares de conceptos de categorías y funtores. Antes de Stone, las investigaciones en álgebra topológica asociaban un tipo específico a un espacio topológico para obtener información del primero a partir del último.

Hay que mencionar que Mac Lane se acerca al concepto de dualidad desde la teoría de grupos en su artículo *La dualidad en grupos* de 1950, el cual se considera como una de las primeras contribuciones al desarrollo de la Teoría de Categorías. En este artículo, Mac Lane pretende caracterizar la forma de las afirmaciones verdaderas si y sólo si sus duales son verdaderas. Además, como lo menciona Corry en [?, p. 357]: “Mac Lane afirma que la caracterización requerida se debe dar, no en términos de los elementos de grupos, sino más bien en términos de subgrupos y morfismos”¹³, es decir, aborda esta situación desde una visión categórica.

Mac Lane hace uso de los diagramas conmutativos, con el fin de relacionar el concepto de dualidad con las ideas categóricas. Particularmente, la dualidad se presenta como el cambio de las direcciones de las flechas involucradas en los diagramas dados para productos cartesianos y los productos libres. Así mismo, otro de los ejemplos considerados por Mac Lane, es el publicado por Samuel Eilenberg y Norman Steenrod en 1952, el cual se refiere a la formulación axiomática de homología y cohomología.

Observación 1.4.1 *En el capítulo 3 se realiza una observación detallada del principio de dualidad, particularmente, para las definiciones de producto y co-producto para las categorías.*

En concordancia con Corry en [?] es importante destacar los aportes de Eilenberg dentro del desarrollo de la Teoría de Categorías. De acuerdo con lo anterior, uno de

¹³“Mac Lane himself saw the phenomena of duality not as one concerning the elements of the groups, but rather the interrelations among the subgroups of the group.”, [?, p. 357]

los libros más relevantes de Eilenberg fue el escrito en conjunto con Norman Steenrod en 1952, dentro del cual abordaban la investigación axiomática para las teorías homológicas. En este punto vale la pena resaltar que esta definición axiomática evita la dependencia sobre consideraciones extraídas de la geometría analítica, el cual era el enfoque dominante antes de la propuesta de Eilenberg y Steenrod. De igual forma, en el marco de esta axiomática fue introducido el uso de diagramas como una herramienta matemática, donde la propiedad conmutativa debe ser verificada. Los autores destacan algunas de las ventajas en la presentación de la teoría a través de los diagramas: “Los diagramas incorporan una gran cantidad de información. Su uso proporciona amplios ahorros en el espacio y un esfuerzo mental... en el caso de muchos teoremas, la construcción del diagrama correcto es la parte principal de las pruebas”¹⁴, [?, p. 11].

Hacia el año 1956, Eilenberg publica un libro en conjunto con Cartan¹⁵ sobre el álgebra homológica, en el cual se recogen los trabajos realizados en años anteriores dentro de este campo. Es importante mencionar que los resultados de este libro son presentados en términos categóricos lo que permite cierta simplicidad en las definiciones, dado que los autores ya daban por aceptados los conceptos de categorías y funtor.

Finalmente, se debe resaltar que una de las principales dificultades de los trabajos publicados por Mac Lane y Eilenberg fue la necesidad de considerar colecciones de objetos muy grandes cuando se define una categoría. Esta fue una cuestión que se dejó abierta y aparece como no resuelta en artículos posteriores. No obstante, esta problemática entre la Teoría de Categorías y los fundamentos de las matemáticas fue abordada por Lawvere en la década de 1960, tal como se expondrá en la siguiente sección.

1.4.2. Aportes de Lawvere, Grothendieck y Tierney a la Teoría de Categorías

Odifreddi en [?] considera que el trabajo de Eilenberg y Mac Lane es un complemento natural del de Bourbaki; por un lado, debido a que Samuel Eilenberg fue un miembro del grupo Bourbaki, más aún, fue el único miembro no francés en toda su historia, y por otro lado, manifiesta que al introducir el concepto de categorías, podría dar una posible solución a los problemas de generalización que aún presentaba la teoría de los Bourbaki. Dado que las funciones llevan automáticamente consigo los conjuntos de sus argumentos y sus valores, sin duda alguna, no hay necesidad de

¹⁴The diagrams incorporate a large amount of information. Their use provides extensive savings in space and in mental effort ... in the case of many theorems, the setting up of the correct diagram is the major part of the proofs. [?, p. 11]

¹⁵El libro fue publicado en el año 1956 con el nombre de Homological Algebra, ver [?]

referirse explícitamente a estos conjuntos, por lo que como no se tiene la necesidad de hablar sobre ellos, no hace falta ningún uso residual de la teoría ingenua de conjuntos, que se encontraba aún presente en la noción de conjunto estructurado.

De esta manera, se puede considerar un fundamento ya no reducido a los conceptos de conjunto y pertenencia, sino de función y composición; tal como sucede con la Teoría de Categorías, puesto que los conjuntos vinculados por funciones son un ejemplo particular de categoría, tal como se menciona en [?]; es así, como solo bastaba caracterizar completamente de manera categorial sus propiedades para reducir toda la Teoría de Conjuntos a la Teoría de Categorías. Quien se ocupó de encontrar tal caracterización fue el matemático William Lawvere, lo cual más adelante constituiría un paso ulterior al análisis lógico; en consecuencia, lo que se pretendía era que así como toda la matemática del siglo XIX había sido reformulada en términos conjuntistas, así mismo, fué reformulada en términos categóricos.

F. William Lawvere puede ser considerado según Zalamea en [?, p. 11] como: “la mayor cabeza pensante de las categorías”, él hizo varios intentos de aplicar la Teoría de Categorías en fundamentos de las matemáticas. En 1964, Lawvere propuso en uno de sus primeros trabajos axiomatizar la categoría de todos los conjuntos, con el fin de reformular las matemáticas en términos categóricos, logrando *casi*¹⁶ la caracterización elemental de la categoría de conjuntos (**Set**), a través del desarrollo de su teoría elemental, conocida como la *teoría elemental de la categoría de conjuntos* (**ETCS**).

Por consiguiente, **ETCS** está constituida por 8 axiomas de primer orden a la teoría de primer orden habitual de una categoría abstracta; y tiene como objetivo dos propósitos. En primer lugar, busca caracterizar la categoría de conjuntos y sus funciones como una categoría abstracta, en el sentido de que si una categoría completa satisface esos 8 axiomas entonces ésta es equivalente a la categoría de conjuntos. Para Lawvere el término completitud, en concordancia con [?] significa que infinitos productos y sumas sobre cualquier conjunto indexado existe.

En segundo lugar, Lawvere pretende proporcionar por medio de **ETCS** un fundamento para las matemáticas, diferente al de las teorías de conjuntos habituales, debido a que gran parte del álgebra, la teoría de números y el análisis elemental se pueden desarrollar y definir dentro de esta teoría, a pesar de que ya no tengan relación con las propiedades habituales de pertenencia “ $\in$ ”.

¹⁶Krömer en [?] resalta la palabra casi dado que al Lawvere referirse a una categoría completa, el término completitud para Lawvere es una propiedad no elemental, por lo que no se puede dar una caracterización totalmente elemental a la categoría de conjuntos.

Los axiomas¹⁷ de esta teoría elemental pueden considerarse como un listado de algunas de las propiedades básicas y matemáticamente útiles de **Set**.

A los 3 primeros axiomas no se le asignan números, puesto que se componen de los axiomas para una categoría abstracta en el sentido de [?]. Los 3 últimos axiomas abogan por la existencia de soluciones a ciertos “problemas universales de morfismos”, cada objeto y operación dados en estos axiomas son realmente únicos salvo isomorfismo, donde esto está determinado de manera única por una condición de “naturalidad” sugerido por la estructura del axioma particular, tal como se expresa en [?]; además menciona que esta condición de naturalidad se refiere a que el isomorfismo en cuestión conmuta con todos los “morfismos de una categoría $\mathcal{C}$ ” que ocurre en el planteamiento del problema universal de morfismo. Estos axiomas son:

Axioma 1: Existen todas las raíces finitas.

Axioma 2: La exponencial B^A de cualquier par de objetos existe.

Axioma 3: Existe un objeto $\mathbb{N}$ Dedekind-Pierce.

Axioma 4: 1 es un generador.

Axioma 5: Si el dominio del morfismo f tiene elementos, entonces existe un morfismo g tal que, $f \circ g \circ f = f$. Este axioma aquí es llamado como axioma de elección.

Axioma 6: Cada objeto que no sea 0 (es decir, aparte de objetos iniciales) tiene elementos.

Axioma 7: Cada elemento de una suma es un miembro de una de las inyecciones.

Axioma 8: Existe un objeto con más de un elemento.

Lawvere introduce el axioma de objeto número natural dentro de su teoría elemental como el axioma 3, además menciona un principio de recursividad; tal como lo manifiesta Zalamea en [?, p. 3]: “la definición de *N.N.O* se debe a Lawvere; captura el comportamiento de la estructura de los naturales con respecto a la definibilidad de funciones vía recursion simple”. En esto se entrará en más detalle en el capítulo 3.

Cabe agregar que, como este axioma garantiza la existencia de un objeto $\mathbb{N}$, se puede relacionar con el axioma del infinito en conjuntos *ver sección 2.1*, donde éste

¹⁷Solo serán mencionados, pero no se profundizará sobre ellos, para conocer en más detalle ver, [?]; excepto en el axioma 3 en el cuál afirman la existencia de un objeto $\mathbb{N}$, que representa los números naturales, (ver sección 3.3).

último garantiza la existencia de un conjunto inductivo lo que implica a su vez garantizar la existencia del conjunto de los números naturales.

En uno de los comentarios en [?], MacLarty expresa que los conjuntos de la teoría elemental de Lawvere son estructuras abstractas. Un elemento x que pertenece a un objeto X de **Set**, éste elemento no tiene propiedades, excepto que es un elemento que pertenece a X y a su vez, es distinto de cualquier otro elemento que también pertenezca a X . De esta manera, la estructura del número natural en **ETCS** es una tripla; es decir, un grupo de tres componentes que se vinculan entre sí, un conjunto $\mathbb{N}$, un elemento seleccionado $0 \in \mathbb{N}$ mediante un morfismo $\sigma : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$, y un morfismo sucesor $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Además, $\mathbb{N}$, σ y s simplemente no tienen propiedades más allá de aquellas que comparten con cada tripla isomorfa.

Por otra parte, los primeros tres axiomas de **ETCS** son asumidos por ciertas categorías comunes distintas de **Set**. Sin embargo, estas categorías no satisfacen los axiomas restantes. Por lo que **Set** no es la única formalmente adecuada como "fundamento", de modo que Lawvere concluye este trabajo pero no de forma definitiva, puesto que sus investigaciones comienzan a centrarse en la categorías de las categorías, las cuales son consideradas fundaciones más potentes por la PNAS¹⁸

Dado lo anterior, Lawvere proporciona una teoría provisional de la categoría de las categorías en su documento de 1966 llamado *The category of categories as a foundation for mathematics*, en el cual propone según Krömer en [?] cambiar completamente el enfoque al problema de la fundamentación de la matemática, considerando que en lugar de realizar construcciones de las matemáticas en la axiomática de primer orden de ZFC o la axiomática de NBG, lo que hace es introducir un lenguaje formal con el fin de formular una axiomatización provisional de la categoría de todas las categorías (**Cat**), dividida en una parte primaria y en una teoría un poco más profunda, la cual desempeña un papel análogo a la axiomatización propuesta para los conjuntos por Zermelo-Fraenkel, y permite establecer con antelación la existencia de algunas categorías y construcciones.

Por consiguiente, si la axiomatización de Lawvere se reduce a las categorías discretas, que son aquellas en las que sus morfismos representan únicamente a las funciones identidad, se logra obtener una axiomatización de la Teoría de Conjuntos en términos categóricos. Estos desarrollos posibilitaron que la Teoría de Categorías reivindicara un rol significativo de fundamento para las matemáticas. Lo que implica que Lawvere considerara las categorías particulares como objetos de **Cat**, la cual se encuentra caracterizada por los axiomas. Krömer en [?] expresa que lo que se propone resu-

¹⁸Es una revista científica de los Estados Unidos, denominada Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS, por sus siglas en inglés)

midamente es un cambio de papeles entre la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Categorías, lo cual en algunos aspectos se puede asimilar con un cambio de papeles entre la herramienta y el objeto, en otras palabras se podría hablar sobre el papel del marco y la estructura.

Sin embargo, Krömer en [?] expone que Isbell¹⁹ en su revisión del documento de Lawvere de 1966, acerca de la caracterización de la categoría de las categorías manifiesta que, lo que propone Lawvere no es una fundamentación de la Teoría de Categorías en la axiomática de la Teoría de Conjuntos, sino en el cálculo de predicados de primer orden; además afirma que un fundamento categórico es más natural, debido a que da mayor importancia a la noción de isomorfismo. Más tarde, Isbell encuentra un problema en el documento, dado que logró dar un contraejemplo a uno de los teoremas centrales ahí expuestos. Lo que implica que no se haya resuelto por completo el problema matemático de axiomatizar **Cat** y a su vez fundamentar las matemáticas sin problema mediante la Teoría de Categorías.

Este problema matemático fue ignorado hasta alrededor de 1973. Otros matemáticos como Blanc, Preller, Donnadieu, entre otros, contribuyeron a la solución del problema. Sin embargo, esta cuestión no será abordada dentro del trabajo²⁰

Por otra parte, Lawvere reformula la teoría de tipos de Russell en términos categóricos, obteniendo así, *la teoría de topos*, la cual para sorpresa de la época puede ser desarrollada en una lógica, que resultó ser equivalente a la lógica intuicionista, dado que los topos constituyen una semántica adecuada y completa para ella. Esta lógica fue introducida en 1912 por el topólogo Luitzen Brouwer, como alternativa crítica a la lógica Fregeana y a los fundamentos Cantorianos de las matemáticas, la cual es considerada más general que la lógica clásica aristotélica. Por su parte, Grothendieck en los años 1962 a 1964, a través de sus trabajos en geometría algebraica y del estudio de las categorías de haces de conjuntos, llegó de manera independiente a la teoría de topos, estos aparecen como generalización de espacio topológico, de manera que la noción de morfismos de topos correspondía a la noción de función continua e incorporaba de manera explícita la imagen inversa. Esta teoría de cierto modo permite comprender el por qué no se ha podido fundamentar las matemáticas por medio de la Teoría de Conjuntos, dado que los conjuntos forman un topos cuya lógica es clásica, lo que tiene como consecuencia de que no se logre entender la complejidad de la topología y de la geometría algebraica; en concordancia con [?] y [?].

¹⁹John Rolfe Isbell (1930-2005), fue un matemático estadounidense cuyos trabajos se desarrollaron en el campo de la topología y la Teoría de Categorías.

²⁰Para ver en detalle en [?].

Como se menciono en párrafos anteriores sobre el intento de Lawvere de fundamentar la matemática por medio de la Teoría de Categorías, se encontró en sus trabajos de 1962 a 1970, que propiedades de **Set** pueden ser expresadas mediante enunciados elementales del lenguaje categórico, los cuales son válidos también en la categoría de haces, llegando de esta manera a la teoría de topos.

Es así, como Lawvere en un trabajo conjunto con Tierney en el cual se apoyan sobre los trabajos de la escuela de Grothendieck, culminan estos desarrollos con la introducción del concepto de topos elemental y la propuesta de una axiomatización elemental²¹ de la teoría de topos, bajo el lema $Topos = Geometría \cap Lógica$. Este trabajo fue presentado en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1970. Además Pérez en [?] expresa que Lawvere y Tierney obtienen una prueba bastante original de la independencia de la hipótesis del continuo. Esta teoría de topos elemental, según Zalamea en [?, p. 11]: “alcanzará un enorme desarrollo, siguiendo el impulso de Lawvere, Freyd y toda la comunidad de categoristas en los años 1970”.

De acuerdo con todo lo anterior, Zalamea en [?] manifiesta que Lawvere junto a Mac Lane es considerado como el iniciador, normador y estabilizador de la Teoría de Categorías y a Grothendieck considerado como un gigantesco técnico y revolucionario de las matemáticas debido a sus aportes y grandes invenciones a las matemáticas; Lawvere ha ejercido un papel fundamental en percibir y aportar en los avances futuros de las categorías a lo largo de más de cuarenta años de actividad. Lawvere a causa de su capacidad única de análisis conceptual y una amplísima cultura matemática, ha logrado impulsar enormes programas de desarrollo en la Teoría de Categorías, como lo son las teorías algebraicas, la lógica categórica, la teoría de topos, la geometría sintética; además de intentar involucrar la física de los medios continuos dentro de esta teoría.

Todavía cabe señalar, que desde los primeros pasos de la Teoría de Categorías, y a alrededor de 70 años, ésta ha tenido grandes avances y desarrollos, de modo que algunos de los más destacados geómetras contemporáneos han implementado estos desarrollos categóricos en la realización de sus trabajos.

En resumen, en este capítulo se ha mencionado la evolución que tuvo la matemática en el siglo XX, motivada por la preocupación que existía hacia la abstracción y la síntesis. Este recorrido histórico nos muestra, cómo es posible cada vez más definir de manera más general los objetos matemáticos, pero ello implica una matemática mucho más abstracta, cada vez más profunda en el mundo de las ideas.

²¹Ver axiomas en [?].

Capítulo 2

Definición de $\mathbb{N}$ en ZFC

En este Capítulo se presentará la definición de los Números Naturales, el Principio de Inducción y el Principio de Recursión dentro de la Teoría de Conjuntos, utilizando la axiomática de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC). Para ello se realizará una traducción libre y comentada de algunos apartes de la tercera edición del libro *Introduction to Set Theory* en [?] y además se usarán algunas notas de clase para el curso de Teoría de Conjuntos en [?].

En la primera Sección se expone la axiomática ZFC, de manera que se emplearán el lenguaje y algunos resultados de la lógica de primer orden (lógica clásica bivalente) para que esto funcione adecuadamente.

2.1. Axiomática ZFC

El concepto fundamental dentro de la Teoría de Conjuntos es precisamente la noción de conjunto y de propiedad que poseen los elementos de un conjunto en particular. En ese sentido, una de las propiedades fundamentales que permite caracterizar un conjunto es la pertenencia, la cual se simboliza con $\in$. La fórmula $x \in Y$ se lee como x pertenece a Y , o se puede decir que x es elemento de Y . Los axiomas en una versión moderna que fundamentan la Teoría de Conjuntos mediante la axiomática de ZFC son los siguientes:

Axioma 2.1.1 (Extensionalidad) *Se dice que $A = B$, si y sólo si cada elemento de A pertenece a B , y además cada elemento de B pertenece a A . Este enunciado se puede traducir a un lenguaje lógico, de la siguiente manera:*

$$A = B \text{ si y sólo si } \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Axioma 2.1.2 (Separación) *Para todo conjunto A y $P(x)$ una propiedad, existe un conjunto B tal que $x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x)$. Además, por el axioma de extensionalidad,*

B es único y se denota por $B = \{x \in A : P(x)\}$.

Axioma 2.1.3 (Existencia) *Existe un conjunto que no contiene elementos. En el lenguaje lógico se escribe de la siguiente manera:*

$$\exists A \forall x (x \notin A)$$

Axioma 2.1.4 (Pares) *Dados A, B conjuntos existe un conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si $x = A$ ó $x = B$. Formalmente,*

$$\forall A \forall B \exists C (x \in C \leftrightarrow x = A \vee x = B)$$

Axioma 2.1.5 (Uniones Arbitrarias) *Para todo conjunto A existe un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $\exists X, X \in A \wedge x \in X$. Por el axioma de extensión esta unión es única y se denota como $B = \bigcup A$. En lenguaje formal se escribe:*

$$x \in \bigcup A \leftrightarrow \exists X (X \in A \wedge x \in X)$$

Definición 2.1.1 (Subconjunto) Se dice que B es un subconjunto de A , si y sólo si cada elemento de B pertenece a A , esto se designa como $A \subseteq B$. En el lenguaje lógico se escribe de la siguiente manera:

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } \forall x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Axioma 2.1.6 (Conjunto Potencia) *Para cualquier conjunto A existe un conjunto P formado por la colección de todos los subconjuntos de A , el cual se llamará Partes de A y se denota como $\mathcal{P}(A)$. En el lenguaje lógico se expresa de la siguiente forma:*

$$\forall A \exists B \forall X (X \in B \leftrightarrow X \subseteq A).$$

Para definir los números naturales es importante introducir el axioma del infinito; sin embargo, para esto previamente se debe presentar la definición de el sucesor y el conjunto inductivo.

Definición 2.1.2 (Sucesor) El *sucesor* de un conjunto x está dado por el conjunto $S(x) = x \cup \{x\}$.

Definición 2.1.3 (Conjunto Inductivo) Se dice que un conjunto I es *inductivo* si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

(i) $0 \in I$.

(ii) Si $x \in I$ entonces $S(x) \in I$.

Axioma 2.1.7 (Infinito) *Existe un conjunto inductivo.*

Axioma 2.1.8 (Fundamentación o Regularidad) *Para todo conjunto A no vacío, existe un $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$.*

Axioma 2.1.9 (Reemplazo) *Si la propiedad $P(x, y)$ es funcional, es decir, para todo x existe un único y tal que $P(x, y)$ se cumple; para todo conjunto A la imagen por P es un conjunto, el cual se denota como $P[A] = \{y : P(x, y) \wedge x \in A\}$.*

Axioma 2.1.10 (Elección) *Dada una colección no vacía $\{A_i : i \in I\}$ de conjuntos no vacíos, entonces existe un conjunto B tal que para todo conjunto A_i existe un elemento $a_i \in A_i$ y $a_i \in B$. Formalmente*

$$\exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists i \in I (x = a_i) \wedge a_i \in A_i).$$

Ahora, es importante realizar algunas observaciones sobre los axiomas. En particular, el Axioma de Extensionalidad implica la igualdad entre los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, a, b, b, c, c\}$, puesto que cada elemento de A están en B y viceversa, es decir, $A = B$.

Por otra parte, el Axioma de Separación permite formar nuevos conjuntos a partir de un conjunto ya establecido y de una propiedad cualquiera. Además, el conjunto B formado por elementos de un conjunto dado A y una propiedad $P(x)$ es único, puesto que si existiera otro conjunto C que cumpla ambas condiciones, se garantiza por el Axioma de Extensionalidad que estos conjuntos son iguales, esto es $B = C$.

A continuación se exponen algunas propiedades del conjunto que no contiene elementos, al que se llamará **conjunto vacío** ya que como se mostrará dicho conjunto es único y se denotará por $\emptyset$.

Proposición 2.1.1 *El conjunto del axioma de existencia es único.*

Demostración

Por el axioma de existencia se garantiza que existen los conjuntos A y B que no contienen elementos. Para probar que existe un único conjunto que no contiene elementos se debe llegar a que $A = B$. Por consiguiente, se deben verificar las siguientes proposiciones: $A \subset B$ y $B \subset A$, lo cual equivale a decir que $x \in A \rightarrow x \in B$ y $x \in B \rightarrow x \in A$.

Las afirmaciones $x \in A$ de la primera y $x \in B$ de la segunda implicación, respectivamente, son falsas dado que contradicen el Axioma de Existencia.

En consecuencia, $x \in A \rightarrow x \in B$ y $x \in B \rightarrow x \in A$ son implicaciones verdaderas, puesto que sus antecedentes son falsos ■

Adicionalmente, $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A , la prueba de esto se realiza por justificaciones similares a la anterior.

Es pertinente señalar que el axioma de Pares permite formar el conjunto $C = \{\emptyset, \emptyset\}$ con $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$. De manera que, $C = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$

De igual forma, la existencia del conjunto $D = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ está garantizada por el Axioma de Pares, con $A = \emptyset$ y $B = \{\emptyset\}$.

El Axioma de Regularidad permite restringir la admisión de ciertos conjuntos que dan lugar a paradojas tales como el conjunto de Russell, los conjuntos con regresión al infinito, entre otros. Este axioma admite la existencia del conjunto de los Números Naturales y Números Reales.

Por otro lado, es importante mencionar que el Axioma de Elección tiene un carácter diferente a los demás axiomas presentados, al no tener una construcción formal para formar el nuevo conjunto puesto que los elementos que lo componen se pueden elegir arbitrariamente. Sin embargo, su uso es importante para llegar a resultados dentro de la matemática estándar, a través de sus múltiples aplicaciones y representaciones.

2.2. Definición de $\mathbb{N}$

Antes de definir formalmente los números naturales dentro de la axiomática ZFC, es necesario explorar algunas otras formas que eventualmente se podrían emplear para definir los números naturales, las cuales se expondrán en los siguientes párrafos. Se concluirá finalmente que estas definiciones no permiten capturar lo que en esencia son los Números Naturales.

En ese sentido, se puede definir el cero como el conjunto que no tiene elementos, es decir, $0 = \emptyset$. Es importante resaltar que no existe otra forma de definir el cero puesto que el conjunto vacío es único.

Siguiendo este mismo procedimiento, el número 1 se puede definir como el conjunto que contiene un solo elemento. Sin embargo, existen varios conjuntos que cumplen con esta condición, por ejemplo $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$. De igual manera sucede al definir el número 2, pues existen diferentes conjuntos que contienen dos elementos, tales como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Esta misma situación se repite si se tratan

de definir de la forma anterior cada uno de los Números Naturales, a excepción del número cero.

No obstante, la forma más adecuada para definir el número 1 es mediante el conjunto que contiene el objeto que ya está definido, es decir, $0 = \emptyset$. En otras palabras, $1 = S(0) = \{\emptyset\} = \{0\}$. Por consiguiente, de manera similar se define el número 2 a través del conjunto que contiene los dos números definidos previamente, esto es, $2 = S(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$. De esta forma, cualquier número natural $S(n)$ se puede definir como el conjunto que contiene los números naturales ya antes definidos.

Adicionalmente, la manera como se define un número natural $S(n)$, puede ser expresado por medio del Axioma de Unión entre n y el conjunto formado únicamente por n . Es decir,

$$S(n) = n \cup \{n\}$$

Por ejemplo,

$$2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$$

$$3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

Sin embargo, no es posible expresar el número cero de esta misma forma. Por otro lado, es de resaltar que esta definición se ajusta muy bien a la estructura de los números naturales, la cual permite dar paso a la definición orden.

Proposición 2.2.1 *Sea $\mathcal{C}$ una colección no vacía, es decir, existe un conjunto $C_0 \in \mathcal{C}$. Entonces, existe un conjunto B tal que $x \in B \leftrightarrow \forall C(C \in \mathcal{C} \rightarrow x \in C)$.*

Demostración

Para demostrar la existencia del conjunto B , se dice que $P(x)$ es la propiedad que establece que $\forall C(C \in \mathcal{C} \rightarrow x \in C)$. Por el axioma de Separación existe el conjunto $B = \{x \in C_0 | P(x)\}$ ■

Proposición 2.2.2 *Dada una colección $\mathcal{C}$ no vacía y el conjunto $B = \{x \in C_0 | P(x)\}$ tal que $P(x)$ establece que $\forall C(C \in \mathcal{C} \rightarrow x \in C)$. Luego, la existencia del conjunto B no depende de C_0 .*

Demostración

Dado que $\mathcal{C}$ es una colección no vacía, existen $C_0 \in \mathcal{C}$ y $C'_0 \in \mathcal{C}$. Se debe probar que el conjunto $B = \{x \in C_0 : P(x)\}$ es igual al conjunto $B' = \{x \in C'_0 : P(x)\}$. De

manera que, $x \in B \leftrightarrow x \in C_0 \wedge P(x)$, además por la propiedad $P(x)$ se cumple que $\forall C(C \in \mathcal{C} \rightarrow x \in C)$, en particular para $C'_0 \in \mathcal{C}$ entonces se cumple que $x \in C'_0$. En consecuencia, $x \in C'_0 \wedge P(x) \leftrightarrow x \in B'$. Por consiguiente, $x \in B \rightarrow x \in B'$.

Análogamente, se muestra que $x \in B' \rightarrow x \in B$. Por lo tanto $B = B'$. El cual se denota como $B = \bigcap \mathcal{C}$ ■

Observación 2.2.1 Si la colección $\mathcal{C} = \emptyset$, se tiene que $\bigcap \mathcal{C}$ no existe, puesto que $x \in \bigcap \mathcal{C} \leftrightarrow \forall C(C \in \mathcal{C} \rightarrow x \in C)$. Por ser $C \in \mathcal{C}$ falso, luego la implicación es verdadera. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{C} = \mathbf{V}$, tal que $\mathbf{V}$ es el “universo”, es decir, la colección de todos los conjuntos.

Si se considera $\mathcal{C}$ la colección de todos los conjuntos inductivos, entonces esta colección no es vacía por el axioma de infinito y por la proposición 2.2.1 el conjunto $\bigcap \mathcal{C}$ existe. En consecuencia, esta intersección se denotará como $\mathbb{N}$, es decir, $\mathbb{N}$ es el conjunto inductivo más pequeño.

Definición 2.2.1 (Números Naturales) El conjunto de los Números Naturales está dado por:

$$\mathbb{N} = \bigcap \{I \mid I \text{ es un conjunto inductivo}\} = \{x \mid x \in I \text{ para cada conjunto inductivo } I\}$$

2.3. Principio de Inducción

El Principio de Inducción junto con el Principio de Recursión son teoremas de suma importancia en la estructuración de los Números Naturales, debido a que sustentan propiedades en $\mathbb{N}$.

Teorema 2.3.1 Sea $P(x)$ una propiedad. Si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Se cumple $P(0)$.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, si se cumple $P(n)$ implica que $P(S(n))$ también se cumple.

Entonces todos los números naturales n cumplen la propiedad $P(x)$.

Demostración

Sea el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$, la existencia de este conjunto está garantizada por el Axioma de Compresión. A es un conjunto inductivo por las condiciones (i) y (ii), de esta manera $\mathbb{N} \subseteq A$. Además por la manera en que está definido A , se tiene que $A \subseteq \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathbb{N} = A$, es decir, $\forall n, n \in \mathbb{N}$ se cumple la propiedad $P(n)$ ■

El Principio de Inducción permite probar algunas propiedades del orden en los naturales, las cuales se mostrarán en la *sección* 2.5.

2.4. Relaciones

El concepto de relación es fundamental en matemáticas, particularmente dentro de la Teoría de Conjuntos puesto que permite caracterizar las estructuras de algunos conjuntos, entre ellos los números naturales. Además este concepto es importante para la definición del orden, las equivalencias y las funciones. Previamente a este concepto, se debe considerar la definición par ordenado, que para el caso de ZFC se tiene la definición dada por Kuratowski.

Definición 2.4.1 (Par Ordenado) Sean los conjuntos A y B , el par ordenado (a, b) , para $a \in A$ y $b \in B$, está dado por el conjunto: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Esta definición permite inferir que de la igualdad de los pares ordenados $(a, b) = (c, d)$ se tiene que, $a = c$ y $b = d$. La cual es adecuada para definir el concepto de relación, puesto que si solo se define relación utilizando conjuntos, estos no permiten capturar la idea de orden, debido a que hay relaciones que no son simétricas. En particular, si se define la relación “Pedro (P) es padre de Pedrito (p)”, como el conjunto $\{P, p\}$ que es igual a $\{p, P\}$. Esto implica que “Pedrito es padre de Pedro”, lo cual no es correcto, por que la relación “ser padre de”, no es simétrica.

Definición 2.4.2 (Producto Cartesiano) Dado los conjuntos A y B el producto cartesiano $A \times B$ se define como: $A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Definición 2.4.3 (Relación) Una relación binaria R , de un conjunto A a un conjunto B , es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Es decir, los elementos de R serán parejas ordenadas de la forma (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, además se denota como aRb lo que significa que a está relacionado con b bajo la relación R .

Observación 2.4.1 Una Relación sobre A , es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$, es decir, que es una relación que va de A en A .

Definición 2.4.4 (Función) Sean los conjuntos A y B con $a \in A$ y $b, c \in B$. Una relación binaria F del conjunto A al conjunto B es llamada función si para todas las parejas ordenadas $(a, b) \in F$ y $(a, c) \in F$ se tiene que $b = c$. Por otra parte, el elemento b de la pareja ordenada es llamado valor F de a y se denota como $F(a)$.

Definición 2.4.5 (Tipos de Relación) Si R es una relación sobre un conjunto A tal que:

(i) Si para todo $x \in A$ entonces $(x, x) \in R$, se dice que R es una **relación reflexiva**.

(ii) Si para todas las parejas ordenadas $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ se tiene que $(x, z) \in R$, se dice que R es una **relación transitiva**.

(iii) Si para todas las parejas ordenadas $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ se tiene que $x = y$, se dice que R es una **relación antisimétrica**.

Definición 2.4.6 (Orden Parcial y Orden Lineal) Una relación R sobre un conjunto A se denomina **Orden Parcial** si R cumple con las propiedades reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Una relación R sobre un conjunto A con $a, b \in A$, es de **Orden Lineal** si a y b son comparables, es decir, $(a, b) \in R$ ó $(b, a) \in R$

Definición 2.4.7 (Conjunto Bien Ordenado) Dado un orden lineal $\leq$ para un conjunto $\mathbb{N}$, se dice que este es un buen orden si todo subconjunto no vacío de A tiene un primer elemento. Al conjunto $(A, \leq)$ se le llama conjunto **Bien Ordenado**.

2.5. Orden en $\mathbb{N}$

En esta sección se hace necesario ordenar los números naturales por su tamaño, puesto que cada número natural $s(n)$ tiene como elementos a todos los números naturales hasta n e incluyendo el mismo n , es decir, $S(n) = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$; por lo tanto, $n \in S(n)$. Además ya una vez definido el Principio de Inducción en la *sección* 2.3., es posible probar algunas propiedades del orden en $\mathbb{N}$.

Definición 2.5.1 (Orden en $\mathbb{N}$) La relación $\leq$ para todos los números naturales m y n está definida como:

(i) $n < m$ si y sólo si $n \in m$

(ii) $n \leq m$ si y sólo si $n < m$ o $n = m$.

Lema 2.5.2 $n \leq S(n)$ y no existe un número m tal que $n < m < S(n)$.

Demostración

El hecho de que $n \leq S(n)$, es inmediato, pues por la definición de sucesor se tiene

que $n \leq n \cup \{n\}$.

Para probar que no existe un número z tal que $x < z < S(x)$, se supone que existe z , luego por la definición de sucesor $x < z < x \cup \{x\}$. Por la definición de $<$, $x \in z \in x \cup \{x\}$. Ahora, $z \in x$ o $z \in \{x\}$. Si $z \in x$ entonces $x \in z \in x$. Por otro lado, si $z \in \{x\}$, luego $z = x$ esto implica que $x \in x$, en ambos casos se contradice al axioma de regularidad. Por lo tanto no existe un número z tal que $x < z < S(x)$ ■

Lema 2.5.3 *La relación $\leq$ cumple las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Para todo $k, n \in \mathbb{N}$, $k < S(n)$ si y sólo si $k < n$ o $k = n$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, existe un único número natural k tal que $n = S(k)$.

Demostración

1. Esta propiedad se probará mediante el Principio de Inducción, para este caso $P(x)$ es $0 \leq x$. Esto implica que debe verificar que se satisfacen las condiciones (i) y (ii) de 2.3.

Para probar (i) se debe cumplir $P(0)$, es decir establecer que $0 \leq 0$, lo cual es cierto dado que $0 = 0$.

Por otro lado, para probar la condición (ii), se debe establecer que si se cumple $P(n)$ implica que $P(S(n))$ también se cumple. Sea n tal que $P(n)$ se cumple, es decir, $0 \leq n$. Luego, por definición de $<$, se tiene que $0 \in n$ o $0 = n$. El caso de que $0 = n$ ya se probó; si $0 \in n$ entonces $0 \in n \cup \{n\}$, es decir $0 \in S(n)$. Por lo tanto, $P(S(n))$ también se cumple.

Por consiguiente, dado que $P(x)$ se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Para probar esta propiedad se empezará por verificar la siguiente implicación:

$(\Rightarrow)$ Para todo $k, n \in \mathbb{N}$, si $k < S(n)$ entonces $k < n$ o $k = n$.

Se supone que para todo $k, n \in \mathbb{N}$, con $k < S(n)$, por definición de sucesor y definición de orden en $\mathbb{N}$ se tiene que $k \in n \cup \{n\}$, luego $k \in n$ o $k \in \{n\}$.

Ahora, si $k \in n$ por la definición de orden en $\mathbb{N}$ entonces $k < n$. Por otro lado, si $k \in \{n\}$ se dice que $k = n$.

A continuación se verificará la otra implicación:

($\Leftarrow$) Para todo $k, n \in \mathbb{N}$, si $k < n$ o $k = n$ entonces $k < S(n)$.

Se supone que $k, n \in \mathbb{N}$, con $k < n$ o $k = n$. Si $k < n$ por definición de orden en $\mathbb{N}$ se tiene que $k \in n$. Por otro lado, si $k = n$, entonces $k \in \{n\}$. luego $k \in n \cup \{n\}$. Por tanto, por definición de sucesor y definición de orden en $\mathbb{N}$ se tiene que $k < S(n)$.

3. Para probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, existe un único número natural k talque $n = S(k)$, se supone que existe otro número natural m talque $n = S(m)$. Por la definición de sucesor se tiene que $S(m) = m \cup \{m\}$ y $S(k) = k \cup \{k\}$, pero al ser $S(m) = n = S(k)$, luego $m \cup \{m\} = k \cup \{k\}$. Por otro lado, se tiene que $m \in m \cup \{m\}$ entonces $m \in k \cup \{k\}$; luego, $m \in k$ o $m = k$; por otra parte, si $k \in m \cup \{m\}$ entonces $k \in m$ o $k = m$. De modo que no se puede dar que $m \in k$ y $k \in m$ puesto que contradice el axioma de regularidad, por consiguiente, $m = k$. Por tanto, existe un único número natural k talque $n = S(k)$ ■

El siguiente teorema es importante, debido a que con él se puede demostrar el Principio de Inducción completa, el cual será presentado después de este teorema, y posteriormente junto con el principio mostrar que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado.

Teorema 2.5.4 $\leq$ es un Orden Total y discreto sobre $\mathbb{N}$

Demostración

Para establecer que la relación $\leq$ es un orden total y discreto sobre $\mathbb{N}$ se deben probar las siguiente condiciones:

(i) Es reflexiva.

Para probar que $\leq$ es reflexiva se debe verificar que $n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dado que $n = n$, luego por definición de $\leq$, $n \leq n$.

(ii) Es antisimétrica.

Se debe probar que si $n \leq m$ y $m \leq n$ entonces $n = m$. Por la definición $\leq$ por un lado se tiene que $n < m \wedge m < n$ o por otro lado, que $n = m$. Sin embargo, si $n < m$

$\wedge m < n$ entonces $n \in m \in n$, lo cual contradice el axioma de regularidad. Por lo tanto, $n = m$.

(iii) Es transitiva.

Se debe mostrar que si $\forall n, m, k \in \mathbb{N} \ n \leq m$ y $m \leq k$ entonces $n \leq k$. Por la definición $\leq$ se tiene que $n < m$ o $n = m$ y $m < k$ o $m = k$; luego, si $n < m$ y $m < k$ esto significa por definición de $<$ que $n \in m$ y $m \in k$ entonces $n \in k$, lo que implica que $n < k$; ahora, si $n = m$ y $m = k$ luego $n = k$. Por último, si $n < m$ y $m = k$ entonces $n < k$, esto se debe a que por definición $<$, $n \in m$ y al se $m = k$, luego $n \in k$, de manera que $n < k$. De manera análoga sucede para el caso en que si $n = m$ y $m < k$ entonces $n < k$.

(iv) $\leq$ es un orden lineal de $\mathbb{N}$

Decir que $\leq$ es un orden lineal de $\mathbb{N}$ es probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \vee n \leq m$, lo cual se probará mediante el Principio de Inducción, en este caso $P(x)$ es la propiedad que tienen todos $m \in \mathbb{N}$ tal que se tiene ya sea que $m < x$ ó $m = x$ ó $x < m$.

Para verificar que $P(0)$ se cumple, se debe probar que para todos $m \in \mathbb{N}$, $m < 0$ ó $m = 0$ ó $0 < x$. Pero lo anterior está demostrado a través del Lema 2.4.9.

Por otro lado, se debe probar que si se cumple $P(n)$ implica que $P(S(n))$ también se cumple, es decir, para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene ya sea que $m < S(n)$ ó $m = S(n)$ ó $S(n) < m$. Por consiguiente, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que se tiene ya sea $m < n$ ó $m = n$ ó $n < m$. En el caso que $m < n$ ó $m = n$, por el Lema 2.5.3, se concluye que $m < S(n)$.

Ahora, en el caso $n < m$ se debe obtener que $m = S(n)$ ó $S(n) < m$, pues son los dos resultados que faltan para completar la demostración. En otras palabras, se debe verificar que si $n < m$ entonces $m = S(n)$ ó $S(n) < m$, lo cual se hará aplicando el Principio de Inducción sobre m . En ese sentido, se debe probar la propiedad $P(x)$ que establece si $n < x$ entonces $x = S(n)$ ó $S(n) < x$. Probar $P(0)$ es verificar que si $n < 0$ entonces $0 = S(n)$ ó $S(n) < 0$, lo cual es válido puesto que por el Lema 2.4.9 no existe tal número $n \in \mathbb{N}$, entonces dado que el antecedente es falso, por las leyes de la Lógica de Primer Orden, la implicación $P(0)$ es verdadera. Por otra parte, se debe probar que a partir de $P(m)$ se concluye que $P(S(m))$ también se cumple, esto significa que se debe verificar que si se tiene $n < S(m)$ implica $S(m) = S(n)$ ó $S(n) < S(m)$. Además, la hipótesis inductiva $P(m)$ afirma que si se tiene $n < m$ entonces $m = S(n)$ ó $S(n) < m$. De acuerdo con esto, sea $n < S(m)$, por el Lema 2.4.9 se obtiene que $m = n$ ó $n < m$. Del primer caso cuando $n < m$, aplicando la hipótesis inductiva se puede inferir que $m = S(n)$ ó $S(n) < m$ y por el Lema 2.4.9 se

obtiene que $S(n) < S(m)$. En el otro caso, si $m = n$ entonces $S(m) = S(n)$, puesto que $S(n) = n \cup \{n\}$, pero por ser $m = n$ se tiene que $S(n) = m \cup \{m\} = S(m)$ por la definición de sucesor. Por consiguiente, $P(m)$ se cumple para todos $m \in \mathbb{N}$, lo que permite verificar la propiedad $P(x)$ que tienen todos $m \in \mathbb{N}$ tal que se tiene ya sea que $m < x$ ó $m = x$ ó $x < m$, para cualquier $x \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $<$ es un orden lineal de $\mathbb{N}$.

(v) Es discreto, es decir, $n \leq S(n)$ y no existe m talque $n < m < S(n)$.
Demostración en el lema 2.5.2 ■

En conclusión, dado que se probaron las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) para $\mathbb{N}$, luego $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado y la relación $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{N}$, y junto con la condición (v) se tiene entonces que $\leq$ es un orden total y discreto sobre $\mathbb{N}$.

Llegado a este punto, es necesario presentar el Principio de Inducción Completa con el fin de probar que los Números Naturales es un conjunto Bien Ordenado.

Principio de Inducción Completa Sea $P(x)$ una propiedad (posiblemente con parámetros) con $n \in \mathbb{N}$, talque: Si $P(k)$ se cumple para todo $k \leq n$, entonces $P(n)$ también se cumple. Por lo tanto, $P(x)$ se cumple para todos los números naturales n .

Esta otra forma de presentar el Principio de Inducción, equivale a decir que para probar $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ basta con verificar que $P(n)$ se cumple para todos los números naturales menores que n .

Demostración

Para realizar esta prueba, se verificará mediante la primera presentación del Principio de Inducción que la propiedad $Q(n)$ que establece que $P(k)$ se cumple para todo $k \leq n$ es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. En el caso $Q(0)$, se debe verificar que $P(k)$ se cumple para todo $k \leq 0$, lo cual es verdadero según el Lema 2.5.3 no existe $k \leq 0$, por esta razón $Q(0)$ se cumple. Al mismo tiempo, se cumple para $x = 0$ la propiedad $I(x)$ que establece que Si $P(k)$ se cumple para todo $k \leq x$ entonces $P(x)$ también se cumple, pues se verifico que si $P(k)$ se cumple para todo $k \leq 0$ entonces $P(0)$ se cumple.

Ahora, debemos probar que si $Q(n)$ se cumple implica que $Q(S(n))$ también se cumple, lo mismo se debe realizar para la propiedad $I(x)$. Como hipótesis inductiva para $Q(n)$ se tiene que $P(k)$ se cumple para todo $k \leq n$. Por otra parte, para $I(x)$ se tiene como hipótesis inductiva que si $P(k)$ se cumple para todo $k \leq n$ entonces $P(n)$. Esto quiere decir que $P(k)$ se cumple para $k \leq n$ y también para $k = n$, puesto

que $P(n)$ se cumple según la hipótesis inductiva para $I(x)$. En consecuencia, por el Lema 2.5.3 $P(k)$ se cumple para $k \leq S(n)$, de manera que $Q(S(n))$ se cumple. Por el Principio de Inducción se ha probado que $Q(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$, dado que $k \in \mathbb{N}$ entonces existe algún n mayor que k , por lo menos esto es cierto para n sucesor de k , es decir $n = S(k)$. Por lo tanto, se tiene que $P(k)$ es verdadero para todo $k \in \mathbb{N}$, puesto que siempre va existir algún número mayor que k . Por consiguiente, se obtiene que $P(S(n))$ también se cumple, lo que significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ si $P(k)$ se cumple para todo $k \leq n$, entonces $P(n)$ también se cumple. ■

Es importante resaltar que el orden expuesto para $\mathbb{N}$ posee una propiedad que lo diferencia del orden de otros conjuntos numéricos, como por ejemplo los racionales o los reales. Esta propiedad se refiere a que el conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$ es Bien Ordenado como se explica a continuación.

Teorema 2.5.5 $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto Bien Ordenado.

Demostración

Sea un subconjunto A de $\mathbb{N}$, el cual es distinto de vacío, se probará que A tiene un primer elemento. Para ello se supone que A no tiene un primer elemento y se considera el conjunto $\mathbb{N} - A$. Luego, si $k \in \mathbb{N} - A$ para todo $k \leq n$, se tiene que $n \in A$ ó $n \in \mathbb{N} - A$. Si $n \in A$ significa que n es el primer elemento de A , lo cual contradice lo supuesto de que A no tiene un primer elemento, luego $n \in \mathbb{N} - A$. Por otro lado, si se toma $P(x)$ la propiedad que establece que $x \in \mathbb{N} - A$, entonces se ha probado por medio del Principio de Inducción Completa que $P(x)$ se cumple para todos los números naturales, puesto que se supuso que si $k \in \mathbb{N} - A$ para todo $k \leq n$ se obtuvo que $n \in \mathbb{N} - A$. Por lo tanto, $A = \emptyset$ lo cual contradice la hipótesis inicial de que A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, luego A tiene un primer elemento. Por consiguiente, $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto Bien Ordenado. ■

Teorema 2.5.6 Si un conjunto no vacío de números naturales tiene una cota superior en el orden $\leq$, entonces tiene un elemento que es mayor a todos los demás elementos.

Demostración

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$. Se define el conjunto $B = \{k \in \mathbb{N} | k \text{ es una cota superior de } A\}$, para esta prueba se supone que $B \neq \emptyset$, es decir, A tiene por lo menos una cota superior. Según el Principio de Inducción completa y la definición de conjunto bien ordenado, el conjunto B tiene un primer elemento n , en otras palabras $n = \sup(A)$. Por otro lado, se tiene que $n = 0$ ó $n = S(k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$, por el Lema 2.5.3. Ahora, falta demostrar que $n \in A$ para completar la prueba. Para ello se supone que $n \notin A$, es decir que $m \leq n$ para todo $m \in A$. Dado que $B \neq \emptyset$, n no puede ser 0, puesto que contradice el Lema 2.5.3. Luego, $n = S(k)$, además $k \leq n$ para algún

$k \in \mathbb{N}$, según el Lema 2.5.2 y la definición de orden en $\mathbb{N}$. En consecuencia, se tiene que $m \leq S(k)$ lo que implica que $m \leq k$ para todo $m \in A$, según el Lema 2.5.3. De manera que k es una cota superior de A con $k \leq n$, lo cual contradice el hecho de que n es el primer elemento de B . Por lo tanto, $n \in A$ lo que significa que n es el mayor elemento que está en A ■

2.6. Principio de Recursión

Como se expuso en el capítulo 1, el Principio de Recursión es uno de los teoremas más importantes dentro de la Teoría de Conjuntos, por lo que permite justificar la buena definición de las operaciones en $\mathbb{N}$, tales como la adición, multiplicación y potencia. Además evita problemas dentro de estas definiciones como lo fue la presentada por Grandjot. En este sentido, se introduce el Principio de Recursión en Teoría de Conjuntos de la siguiente manera:

Teorema 2.6.1 *Para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$, cualquier $a_0 \in A$ y cualquier función $g : A \times \mathbb{N} \rightarrow A$ existe una única función $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que:*

$$(i) \ h(0) = a_0 .$$

$$(ii) \ h(S(n)) = g(h(n), n)$$

Demostración

Sea el conjunto H tal que cumple con las siguientes condiciones:

$$(i) \ (0, a_0) \in H$$

$$(ii) \ (n, b) \in H \rightarrow (S(n), g(b, n)) \in H$$

Ahora, sea la colección

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid H \text{ cumple con las condiciones (i) y (ii)}\}.$$

La colección $\mathcal{H}$ es no vacía, puesto que, $\mathbb{N} \times A \in \mathcal{H}$ ya que cumple con las condiciones (i) y (ii). Luego, se define $h = \bigcap \mathcal{H}$, es decir h es el conjunto más pequeño de la colección $\mathcal{H}$.

Por otro lado, se ha probado que h existe y es única, pero falta verificar que h es una función para completar la demostración. En otras palabras, se debe probar que para cada pareja ordenada (a, b) a su abscisa a le corresponde una única ordenada b . Para ello, se supone que $(0, a_0) \in h$ y $(0, c) \in h$ con $a_0 \neq c$. Sin embargo, esto

contradice el hecho de que h es el conjunto más pequeño de la colección $\mathcal{H}$, dado que si se considera el conjunto $h' = h - (0, c)$, el cual cumple con las condiciones (i), (ii), es decir, $h' \in \mathcal{H}$ y es el conjunto más pequeño de la colección $\mathcal{H}$. Luego, para $(0, a_0) \in h$ no existe $(0, c) \in h$ con $a_0 \neq c$.

Además, $h = \bigcap \mathcal{H}$ cumple con las condiciones (i) y (ii) del Principio de Recursión, dado que:

(i) $h(0) = a_0$ se puede ver como la pareja ordenada $(0, a_0) \in h$.

(ii) $h(S(n)) = g(h(n), n)$ se puede ver como la pareja ordenada $(S(n), g(b, n)) \in h$, talque $h(n) = b$ ■

Como se dijo en párrafos anteriores, el Principio de Recursión permite la buena definición de las operaciones de los números naturales, pero para un n fijo, por lo que se hace necesario introducir a continuación el Principio de Recursión paramétrica, dado que con éste principio se pueden definir de forma general las operaciones.

Teorema 2.6.2 Principio de Recursión Paramétrica: *Para cualquier par de funciones $a : P \rightarrow A$ y $g : A \times \mathbb{N} \times P \rightarrow A$, existe una única función $h : \mathbb{N} \times P \rightarrow A$ tal que:*

(i) $h(0, p) = a(p)$, para todo $p \in P$.

(ii) $h(S(n), p) = g(h(n, p), n, p)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ $p \in P$.

Demostración

Sea el conjunto H tal que cumple con las siguientes condiciones:

(i) $((0, p), a(p)) \in H$.

(ii) $((n, p), b(p)) \in H \rightarrow ((S(n), p), g(b(p), n, p)) \in H$.

Se define la siguiente colección:

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times P \times A) \mid H \text{ cumple con las condiciones (i) y (ii)}\}.$$

La colección $\mathcal{H}$ es no vacía, dado que, $\mathbb{N} \times P \times A \in \mathcal{H}$ puesto que cumple con las condiciones (i) y (ii). Ahora, sea $h = \bigcap \mathcal{H}$, es decir h se define como el conjunto más pequeño de la colección $\mathcal{H}$.

En consecuencia, se ha probado la existencia y unicidad de h , sin embargo falta probar que h es una función para terminar la demostración. Para ello, se supone que $((0, p), a(p)) \in h$ y $((0, p), c(p)) \in h$ con $a(p) \neq c(p)$. No obstante, si se considera el conjunto $h' = h - ((0, p), c(p))$, se contradice el hecho de que h es el conjunto más pequeño de la colección $\mathcal{H}$. Así, no existen $((0, p), a(p)) \in h$ y $((0, p), c(p)) \in h$ con $a(p) \neq c(p)$. Análogamente, si se supone que existen $((S(n), p), g(b(p), n, p))$ y $((S(n), p), c)$ con $g(b(p), n, p) \neq c$.

Luego se puede definir el conjunto $h' = h - ((S(n), p), c)$, $h' \in \mathcal{H}$, lo cual contradice el hecho de que h es el conjunto más pequeño de la colección $\mathcal{H}$. De manera que no existen las parejas ordenadas $((S(n), p), g(b(p), n, p))$ y $((S(n), p), c)$ con $g(b(p), n, p) \neq c$. Por lo tanto h es función.

Además, $h = \bigcap \mathcal{H}$ cumple con las condiciones (i) y (ii) del Principio de Recursión, dado que:

(i) $h(0, p) = a(p)$ se puede ver como la pareja ordenada $((0, p), a(p)) \in h$.

(ii) $h(S(n), p) = g(h(n, p), n, p)$ se puede ver como la pareja ordenada $((S(n), p), g(b(p), n, p)) \in h$, donde $h(n, p) = b(p)$ ■

Por consiguiente, es importante presentar las operaciones con los números naturales, tal como se realizará a continuación; dado que a partir de éstas, se pueden definir con el mismo rigor las operaciones en los otros conjuntos numéricos (enteros, racionales, etc).

2.7. Operaciones con Números Naturales

Dado que ya está justificada la buena definición de las operaciones sobre los números naturales, se presentarán algunos resultados importantes en este sentido.

Definición 2.7.1 (Suma) La suma para todo número natural n está definida como la función $+_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que cumple las siguientes condiciones:

(i) $+_n(0) = n$.

(ii) $+_n(S(m)) = S(+_n(m))$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

La existencia y unicidad de la función $+_n$ está justificada por el Principio de Recursión, pues para este caso $A = \mathbb{N}$, $a_0 = n$ y $g(h(m), m) = S(+_n(m))$. Además,

de acuerdo con el Principio de Recursión Paramétrica la función $+_n$ se puede ver como la función $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Para representar la suma entre m y n se hará mediante la siguiente notación $+(n, m) = +_n(m) = n + m$. Por otra parte, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se tiene por la definición de función que la imagen $n + m$ va a estar contenida dentro de $\mathbb{N}$, es decir, la suma cumple la Propiedad Clausurativa. Por otro lado si $n = m$, la suma $\forall p \in \mathbb{N}$ en m y n es $+_m(p) = +_n(p)$, puesto que $+_m = +_n$, dado que por el Principio de Recursión y la definición de suma $+_n$ debe ser única. Por consiguiente la suma cumple la propiedad uniforme por derecha. A continuación, se expondrán algunas propiedades de la suma de los números naturales.

Teorema 2.7.2 *Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $0 + m = m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
2. $(m + n) + s = m + (n + s)$ (Propiedad Asociativa de la Suma).
3. $m + n = n + m$ (Propiedad Conmutativa de la Suma).

Demostración

1. Para probar este resultado se procederá a través del Principio de Inducción. Se debe verificar que $0 + 0 = 0$, lo cual es inmediato puesto que, de la definición de suma se tiene que $+_n(0) = n$, en este caso $n = 0$, luego $+_0(0) = 0 = 0 + 0$. Por otra parte, se debe establecer que si se cumple $0 + n = +_0(n) = n$ implica que $0 + S(n) = S(n)$ también se cumple. Por consiguiente, se supone que $0 + n = n$ se cumple, además $0 + S(n) = +_0(S(n)) = S(+_0(n))$, por la condición (ii) de la definición de suma. De manera que $S(+_0(n)) = S(n)$, por hipótesis inductiva. En consecuencia $0 + S(n) = S(n)$. Por lo tanto, $0 + m = m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Dado que se tiene $0 + m = m$ y $m + 0 = m$, este último por la condición (i) de la definición de suma, se llama al número natural 0 como el módulo para la operación suma.

2. $(m + n) + s = m + (n + s)$

Esta prueba se hará por medio del Principio de Inducción sobre s , tomando m y n fijos. Se debe verificar para $s = 0$, es decir, $(m + n) + 0 = m + (n + 0)$. Puesto que $(m + n) + 0 = m + n$ y $m + (n + 0) = m + n$, por la condición (i) de la definición de suma. Luego, $(m + n) + 0 = m + (n + 0)$.

Por otro lado, se debe probar que si se tiene que $(m+n)+k = m+(n+k)$ implica que $(m+n)+S(k) = m+(n+S(k))$. Ahora, $(m+n)+S(k) = S((m+n)+k) = S(m+(n+k))$ según la condición (ii) de la definición de suma y por hipótesis inductiva. Además, $m+(n+S(k)) = m+S(n+k) = S(m+(n+k))$ por la condición (ii) de la definición de suma. Por consiguiente, $(m+n)+S(k) = m+(n+S(k))$. Por lo tanto, se ha probado que $(m+n)+s = m+(n+s)$ para todo $s \in \mathbb{N}$. De igual manera, por el Teorema de Generalización esta propiedad se cumple para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

3. $m+n = n+m$

Para realizar esta demostración se empleará el Principio de Inducción sobre n , tomando a m como fijo. En primer lugar se debe verificar que $m+0 = 0+m$, lo cual es cierto según lo demostrado en el ítem (1) y la condición (i) de la definición de suma, puesto que $m+0 = m = 0+m$.

Ahora, se debe probar que si está propiedad se cumple para $m+n = n+m$ se deduce que también se cumple para $m+S(n) = S(n)+m$. Para demostrar lo anterior se aplicará inducción sobre m . En ese sentido, se debe verificar que se cumple $0+S(n) = S(n)+0$, lo cual se deduce de lo demostrado en el ítem (1) y la condición (i) de la definición de suma, dado que $S(n)+0 = S(n) = 0+S(n)$.

Por otro lado, se debe probar que si se cumple $m+S(n) = S(n)+m$, se obtiene que $S(m)+S(n) = S(n)+S(m)$, para ello se supone que $m+S(n) = S(n)+m$ se cumple. Luego, $S(m)+S(n) = S(S(m)+n)$, por la condición (ii) de la definición de suma. Además, $S(S(m)+n) = S(n+S(m)) = S(S(n+m)) = S(S(m+n)) = S(m+S(n))$ según la Hipótesis Inductiva para n y la condición (ii) de la definición de suma. Asimismo, $S(m+S(n)) = S(S(n)+m) = S(n)+S(m)$ por la Hipótesis Inductiva para m y la condición (ii) de la definición de suma. En consecuencia, $S(m)+S(n) = S(n)+S(m)$. Por consiguiente, se cumple que $m+S(n) = S(n)+m$ para $m \in \mathbb{N}$, por lo tanto se ha demostrado que $m+n = n+m$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con m fijo. De manera que por el Teorema de Generalización se tiene $m+n = n+m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ ■

Definición 2.7.3 (Multiplicación) La multiplicación para un número natural n se define como la función $\bullet_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que además cumple con las siguientes condiciones:

$$(i) \bullet_n(0) = 0.$$

$$(ii) \bullet_n(S(m)) = \bullet_n(m) + n, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

La buena definición de esta operación en los Números Naturales está justificada por el Principio de Recursión, el cual permite probar la existencia y unicidad de dicha operación. Así mismo, el Principio de Recursión Paramétrica permite expresar la operación $\bullet_n$ como una función $\bullet_n : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ siendo este el parámetro p . Por comodidad se usará la siguiente notación $\bullet(n, m) = \bullet_n(m) = n \bullet m$. Además, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que la imagen $n \bullet m \in \mathbb{N}$, por la definición de función, es decir, la suma cumple la Propiedad Clausurativa. Por otra parte, si $m = n$ la multiplicación para todo $p \in \mathbb{N}$ en m y n es $\bullet m(p) = \bullet n(p)$, puesto que por el Principio de Recursión y la definición de suma la función $\bullet n$ debe ser única. En consecuencia, la multiplicación cumple la propiedad Uniforme por derecha. Llegado a este punto, es importante introducir algunas propiedades de la multiplicación de los Números Naturales.

Teorema 2.7.4 *Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $0 \bullet m = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
2. $S(0) \bullet m = m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
3. $m \bullet n = n \bullet m$ (Propiedad Conmutativa de la Multiplicación)
4. $m \bullet (n + s) = m \bullet n + m \bullet s$ (Propiedad Distributiva)
5. $(m \bullet n) \bullet s = m \bullet (n \bullet s)$ (Propiedad Asociativa de la Multiplicación)

Demostración

1. Se procederá a probar por el Principio de Inducción que tiene como propiedad $P(x)$, la cual establece x tal que $0 \bullet x = 0$ se cumple para todos los Números Naturales. El caso $P(0)$, es decir, $0 \bullet 0 = 0$ se obtiene por la condición (i) de la definición de multiplicación puesto que por notación $0 \bullet 0 = \bullet_0(0) = 0$.

Por otra parte, se debe suponer que $P(n)$ se cumple para verificar que $P(S(n))$. Por consiguiente, $\bullet_0(n) = 0 \bullet n = 0$ se cumple, además $0 \bullet S(n) = \bullet_0(S(n)) = \bullet_0(n) + 0$ según la condición (ii) de la definición de multiplicación. En consecuencia, $\bullet_0(n) + 0 = 0 + 0 = 0$, por hipótesis inductiva y según el Teorema 2.6.2. De manera que $0 \bullet S(n) = 0$. Por lo tanto, $0 \bullet m = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

2. Antes de proceder con la demostración es importante resaltar que $m \bullet S(0) = m$, se deduce directamente de la definición de multiplicación. Puesto que $m \bullet S(0) = \bullet_m(S(0)) = \bullet_m(0) + m = 0 + m = m$ de suma y el Teorema 2.6.2.

Esta prueba se hará mediante el Principio de Inducción sobre m , donde $P(x)$ es x tal que $S(0) \bullet x = x$. En primer lugar, se debe probar que $P(0)$ se cumple, es decir, $S(0) \bullet 0 = \bullet_{S(0)}(0) = 0$, lo cual es cierto por la condición (i) de la definición de multiplicación.

Ahora, se debe verificar que si $P(n)$ se cumple, entonces $P(S(n))$ también se cumple. Por consiguiente, sea n talque $S(0) \bullet n = \bullet_{S(0)}(n) = n$. Por otro lado, $S(0) \bullet S(n) = \bullet_{S(0)}(S(n)) = \bullet_{S(0)}(n) + S(0) = S(0) \bullet n + S(0) = n + S(0)$ según la condición (ii) de la definición de multiplicación y la hipótesis inductiva. Además, $n + S(0) = +_n(S(0)) = S(+_n(0)) = S(n + 0) = S(n)$ según las condiciones (i) y (ii) de la definición de suma. En consecuencia, $S(0) \bullet S(n) = S(n)$.

Por lo tanto, $S(0) \bullet m = m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

En conclusión, se tiene que $m \bullet S(0) = m$ y $S(0) \bullet m = m$, de manera que se llama al número natural $S(0)$ como el módulo para la operación multiplicación.

3. Se prueba de forma análoga a (ii) del Teorema 2.6.2.
4. Se prueba de forma análoga a (iii) del Teorema 2.6.2.
5. La prueba se realiza de forma análoga a (v) del Teorema 2.6.2., esto es empleando el Principio de Inducción para n y luego para m .
6. $m \bullet (n + s) = m \bullet n + m \bullet s$

Esta prueba se hará mediante el Principio de Inducción sobre s . Primero, se debe verificar que se cumple para $s = 0$, es decir, $m \bullet (n + 0) = m \bullet n + m \bullet 0$. Por un lado, $m \bullet (n + 0) = m \bullet n$ según la condición (i) de la definición de suma. Por otro lado, $m \bullet n + m \bullet 0 = m \bullet n + 0 = m \bullet n$, por la condición (i) de la definición de suma y de la multiplicación.

Ahora, se debe probar que si $m \bullet (n + s) = m \bullet n + m \bullet s$ se cumple, implica que $m \bullet (n + S(s)) = m \bullet n + m \bullet S(s)$ también se cumple. Se supone que $m \bullet (n + s) = m \bullet n + m \bullet s$ se cumple. Luego, $m \bullet (n + S(s)) = m \bullet S(n + s)$ y a su vez, $m \bullet S(n + s) = m \bullet (n + s) + m = m \bullet n + m \bullet s + m$ por Hipótesis Inductiva y la definición de suma y multiplicación.

Además, $m \bullet n + m \bullet s + m = m \bullet n + m \bullet S(s)$ por la condición (ii) de la definición de multiplicación. Por lo tanto, $m \bullet (n + s) = m \bullet n + m \bullet s$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Del Teorema de Generalización $s \in \mathbb{N}$ se deduce que $m \bullet (n + s) = m \bullet n + m \bullet s$ para todo $m, n, s \in \mathbb{N}$.

$$7. (m \bullet n) \bullet s = m \bullet (n \bullet s)$$

Para demostrar esta propiedad se empleará el Principio de Inducción sobre s con m y n fijos, puesto que por Teorema de Generalización se obtiene que esta propiedad se cumple para todo $m, n, s \in \mathbb{N}$. En ese sentido, se debe verificar que $(m \bullet n) \bullet 0 = m \bullet (n \bullet 0)$, dado que $(m \bullet n) \bullet 0 = 0$ y $m \bullet (n \bullet 0) = m \bullet 0 = 0$ según la condición de la definición (i) de la multiplicación.

Por ende, $(m \bullet n) \bullet 0 = 0 = m \bullet (n \bullet 0)$.

Por otra parte, se supone que si $(m \bullet n) \bullet s = m \bullet (n \bullet s)$ se cumple entonces $(m \bullet n) \bullet S(s) = m \bullet (n \bullet S(s))$ también se cumple. Por consiguiente, se tiene que $(m \bullet n) \bullet S(s) = (m \bullet n) \bullet s + (m \bullet n) = m \bullet (n \bullet s) + (m \bullet n)$ según la condición (ii) de la definición de multiplicación e Hipótesis Inductiva. Luego, $m \bullet (n \bullet s) + (m \bullet n) = m \bullet (n \bullet s + n) = m \bullet (n \bullet S(s))$. Por lo tanto, $(m \bullet n) \bullet s = m \bullet (n \bullet s)$ para todo $m, n, s \in \mathbb{N}$ ■

Existen otras operaciones de la aritmética que se definen a partir de la suma y multiplicación de los números naturales, las cuales se pueden observar en el siguiente teorema.

Teorema 2.7.5 *Para cada $m \in \mathbb{N}$, con $m \neq 0$, se definen $m^0 = 1$ y $m^{s(n)} = m^n \bullet m$, entonces:*

1. m^n única para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $m^n \bullet m^k = m^{n+k}$.
3. $m^n \bullet k^n = (m \bullet k)^n$.

Con el teorema anterior, se tiene el objetivo de mostrar que existen otras operaciones de la aritmética definidas a partir de la suma y multiplicación; sin embargo, no será demostrado.

A continuación se presentará los axiomas de Peano, dado que este sistema permite desarrollar de manera axiomática la teoría de la aritmética de los números naturales.

2.8. Axiomas de Peano

En esta sección se mostrará que la aritmética de los números naturales en el sistema ZFC, expuesta a lo largo de este capítulo, es equivalente a la aritmética presentada a través del sistema axiomático desarrollado por el matemático italiano Giuseppe

Peano, el cual se fundamenta mediante los siguientes axiomas:

P1: 0 es un número natural.

P2: Si n es un número natural, entonces $S(n)$ también es un número natural.

P3: (Principio de Inducción) Si X es un conjunto de Números Naturales tal que:

(i) $0 \in X$

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que si $n \in X$, entonces $S(n) \in X$.

Por tanto, $X = \mathbb{N}$.

P4: 0 no es el sucesor de ningún número natural (para todo número natural n , $0 \neq S(n)$).

P5: Números naturales diferentes tienen distintos sucesores (si $n \neq m$, entonces $S(n) \neq S(m)$).

Teorema 2.8.1 *Los axiomas de Peano se deducen directamente de la definición de los Números Naturales en la axiomática ZFC.*

Demostración

P1: Según la definición de Conjunto Inductivo, para cualquier $0 \in I$ conjunto inductivo I , luego $0 \in \bigcap I$. Por otro lado, los Números Naturales están definidos como la intersección de todos los conjuntos inductivos, en consecuencia 0 es un número natural.

P2: Sea $n \in \mathbb{N}$, luego por ser $\mathbb{N}$ un conjunto inductivo se tiene que $S(n) \in \mathbb{N}$, según la definición de Conjunto Inductivo. Por lo tanto, si n es un número natural entonces $S(n)$ también es un número natural.

P3: Sea $X \subseteq \mathbb{N}$, luego $X \subset \mathbb{N}$ o $X = \mathbb{N}$. Sin embargo, si $X \subset \mathbb{N}$ es contradictorio puesto que X sería inductivo al heredar todas las propiedades de $\mathbb{N}$ y el cual a su vez sería el conjunto inductivo más pequeño. Por lo tanto, $X = \mathbb{N}$. Por otro lado, X puede definirse como el conjunto de Números Naturales tal que cumple una cierta propiedad $P(x)$ y al mismo tiempo cumple las dos condiciones anteriores. Por consiguiente se obtiene que $\mathbb{N}$ también cumple dicha propiedad, pues como se mostró $X = \mathbb{N}$.

P4: Por el lema 2.5.3. se tiene que $0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego no existe ningún número natural n tal que $0 = S(n)$. Pues bien, si existiera n entonces $n < 0$, lo cual contradice lo anterior.

P5: Sea $n \neq m$, para probar este axioma se supone que $S(n) = S(m)$, luego se llegará a una contradicción. Si $S(n) = S(m)$ entonces $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$, según la definición de sucesor. Por consiguiente, $\{n\} = \{m\}$ y $n = m$, lo cual contradice la hipótesis puesto que $n \neq m$. Por lo tanto, $S(n) \neq S(m)$ ■

De manera que, la equivalencia en los dos primeros axiomas se prueban usando la definición de número natural; puesto que cero es un número natural, y además todo número natural tiene que su sucesor es también un número natural. Peano en su tercer axioma define el Principio de Inducción, de modo que para mostrar la equivalencia entre los principios de inducción de Peano y ZFC, se utilizó la definición de los números naturales y se mostró que $\mathbb{N}$ cumple una propiedad $P(x)$ y con las condiciones (i) y (ii) dadas por Peano en este axioma. Por último, se consideran dos axiomas más, en el que cero no es sucesor de algún número natural, esta equivalencia esta garantizada por el lema 2.5.3, de modo que 0 es el primer elemento de los números naturales, y por otro lado se muestra la unicidad del sucesor de un número natural.

En conclusión, para este capítulo fue necesario introducir la axiomática de ZFC, debido a que los axiomas que proporciona son fundamentales para definir los números naturales. En particular, el axioma del infinito garantiza la existencia de los conjuntos inductivos. De esta manera, surge la necesidad de definir el conjunto inductivo y a su vez las intersecciones arbitrarias, con el fin de introducir la definición de los Números Naturales como la intersección de todos los conjuntos inductivos, lo que implica que los naturales sean el objeto minimal de la colección que contiene todos los conjuntos inductivos, es decir, el conjunto más pequeño. Esta forma de definir los Números Naturales garantiza directamente el Principio de Inducción, el cual es fundamental para justificar algunas propiedades de los Números Naturales. Además, de definir los números naturales es relevante exponer su estructura, en este sentido se presentó la definición de orden con el objetivo de mostrar que el conjunto de los número naturales es un conjunto bien ordenado. Por otra parte, al introducir Principio de Recursión se garantiza la buena definición de las operaciones en $\mathbb{N}$, es decir, que cada operación definida exista y sea única. Por lo tanto, $\langle \mathbb{N}, +, \bullet, < \rangle$ es una estructura algebraica ordenada.

Capítulo 3

Definición de $\mathbb{N}$ en Categorías

En este capítulo se presenta la definición de $\mathbb{N}$ junto con el Principio de Inducción y el Principio de Recursión dentro de la Teoría de Categorías. Particularmente, se introduce a $\mathbb{N}$ como un objeto inicial de un cierto tipo de categorías, tal como se muestra en el artículo *An Elementary Theory of Category of Sets* en [?]. De antemano, se exponen algunos conceptos básicos de la Teoría de Categorías, utilizando *Topoi: The Categorical Analysis of Logic* en [?] y *Matemáticas Conceptuales. Una Introducción a la Teoría de Categorías* en [?] como libros guía.

Inicialmente, las categorías pueden ser consideradas como un universo de discurso matemático, las cuales se determinan mediante un tipo particular de objeto matemático y un morfismo entre objetos. Sin embargo, el aspecto central de las Categorías no se enfoca en la naturaleza de sus objetos y morfismos, sino en la forma en que se comportan estos morfismos, en concordancia con Goldblatt en [?].

3.1. Definición de Categorías

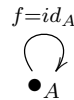
En primer lugar, es importante exponer la definición axiomática de categoría con el fin de presentar los principios de inducción y recursión en los números naturales dentro de la Teoría de Categorías.

Definición 3.1.1 (Axiomática de Categoría) Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Una colección de **objetos**: $A, B, C, \dots$
2. Una colección de **Morfismos**: $f, g, h, \dots$

3. Para cada morfismo f existe un único par de objetos asociados $dom(f)$ y $cod(f)$, los cuales se denominan **dominio de f** y **codominio de f** , respectivamente. Para denotar el morfismo f con $dom(f) = A$ y $cod(f) = B$ se utiliza la siguiente notación: $f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$, para el cual su dominio y codominio no necesariamente son diferentes.
4. Para cualquier pareja de morfismos f y g con $cod(f) = dom(g)$, existe un morfismo composición $g \circ f$, tal que $dom(g \circ f) = dom(f)$ y $cod(g \circ f) = cod(g)$. Además, para los siguientes morfismos: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ se obtiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, a esta propiedad se le llama **Ley Asociativa**.
5. Para cualquier objeto B es asignado un morfismo $id_B : B \longrightarrow B$, llamado el morfismo identidad en B . De modo que para cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ se tiene que $id_B \circ f = f$ y $g \circ id_B = g$, llamada la **ley de Identidad**.

De acuerdo con la definición anterior se puede considerar la categoría compuesta por un solo objeto A y un solo morfismo f , la cual es conocida como **1**. Dado que A es el único objeto de la categoría, se tiene que $dom(f) = cod(f) = A$. Por otro lado, la única composición entre morfismos que tiene lugar en esta categoría es $f \circ f = f$; y como f es el único morfismo de la categoría, por tanto debe ser el morfismo identidad en A , el cual se denota como $f = id_A : A \longrightarrow A$. En consecuencia, esto permite que la categoría cumpla con la ley de la identidad ya que $id_A \circ f = f \circ id_A = f$ y la ley asociativa dado que $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = f$. Esta categoría se representa por medio del siguiente diagrama:



Sin embargo, hasta ahora no se ha dicho el tipo de objeto que es A . En efecto, A puede ser un conjunto y f la función identidad. De otra manera, f puede ser una pareja de números o una silla; de igual forma para A . Aquí lo fundamental es que la estructura siga conservando los axiomas dados para categorías, independientemente si se sabe de la naturaleza de los objetos y morfismos involucrados. En este sentido, existe solo una categoría que tiene un solo objeto y un solo morfismo. Como un caso particular, se puede tomar como objeto el número cero y la función f como la pareja ordenada $(0, 0)$.

De la misma forma, se puede considerar la categoría que consta de dos objetos y tres morfismos, la cual se le conoce como **2**. Para esta categoría se tomará como objetos los números 1 y 0, y como morfismos las parejas ordenadas $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Los

morfismos identidad en esta categoría están dados por las parejas ordenadas $(0, 0)$, $(1, 1)$ para los objetos 0 y 1, respectivamente. Esta categoría se puede expresar por medio del siguiente diagrama:



Este tipo de categorías en la cuales se tiene que para cada dos objetos p y q está definido un único morfismo $p \longrightarrow q$, representan fielmente los preórdenes conjuntistas. En ese sentido, si se tiene una colección P de todos los objetos de una categoría de preorden, entonces se puede definir la relación binaria R sobre P tal que:

$(p, q) \in R$ si y sólo existe un morfismo $p \longrightarrow q$ en la categoría de preorden.

Es importante mencionar que la relación R es reflexiva y transitiva. Además, existen categorías de preorden que satisfacen la propiedad antisimétrica, las cuales representan el orden parcial definido en la Teoría de Conjuntos, por ejemplo la categoría **1** y **2**. De esta manera, se denomina **Poset** a la pareja $(P, \leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ es un orden parcial sobre P .

De acuerdo con lo anterior, el conjunto $\{0\}$ es un **Poset** dado que se puede expresar como $0 \leq 0$, su correspondiente categoría de preorden es **1**. Así mismo, **2** corresponde a un **Poset**, puesto que los morfismos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ satisfacen la propiedad reflexiva; y con el morfismo $(0, 1)$ se cumplen las propiedades transitiva y antisimétrica. Más aún, si se considera la relación $\leq$ como el orden en $\mathbb{N}$, se obtiene que la colección infinita de todos los números naturales es una categoría de preorden.

Otros ejemplos de categorías son: **Set**, la categoría de todos los conjuntos y cuyos morfismos son todas las funciones entre conjuntos; **Finset**, esta es la categoría que tiene por objetos todos los conjuntos finitos y sus morfismos son todas las funciones entre conjuntos finitos; **Top**, se trata de la categoría de todos los espacios topológicos y tiene como morfismos todas las funciones continuas entre espacios topológicos.

Teorema 3.1.2 *El morfismo identidad para cada objeto es único. Además distintos objetos tienen distintos morfismos identidad.*

Demostración

Supongamos que id_A y id'_A son morfismo identidad de A . Luego, según la Ley de la Identidad. $id'_A = id'_A \circ id_A = id_A$.

Por otro lado, sean los objetos A y B talque $A \neq B$. Así, $Dom(id_A) = A$ y $A \neq Dom(id_B) = B$, por tanto $id_A \neq id_B$ ■

3.2. Conceptos Básicos

Esta sección tiene como propósito presentar algunas proposiciones y definiciones de los conceptos básicos de la Teoría de Categorías, debido a que son importantes para la comprensión de ésta y, además permiten entender con claridad la presentación de los números naturales, el Principio de Inducción, el Principio de Recursión, y por último los axiomas de Peano. De esta manera, se da paso a la siguiente definición.

Definición 3.2.1 (Endomorfismo) Se dice que un morfismo f es un endomorfismo si $\text{dom}(f) = \text{cod}(f)$.

Por otra parte, en la Teoría de Conjuntos se dice que una función es inyectiva si y sólo si a dos imágenes iguales le corresponde una única preimagen, es decir, $f(x) = f(y) \longrightarrow x = y$. Esta definición de función inyectiva se puede expresar mediante morfismos y diagramas de la Teoría de Categorías, de modo que si se toma una función inyectiva $f : A \longrightarrow B$ y dos funciones $g : C \longrightarrow A$ y $h : C \longrightarrow A$, para las cuales el siguiente diagrama conmuta, es decir, tal que $f \circ g = f \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & A \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Luego, por las propiedades de la función composición $f \circ g = f \circ h$ se puede ver como $f(g(x)) = f(h(x))$, por consiguiente $g(x) = h(x)$, dado que f es una función inyectiva. Esto significa que si f es una función inyectiva cumple la propiedad cancelativa por izquierda.

Por otro lado, si se considera solamente la condición de que $f \circ g = f \circ h$ y la función f cumple la propiedad cancelativa por izquierda, se tiene que para $x, y \in A$, $g(0) = x$ y $h(0) = y$ con $f \circ g(0) = f(g(0)) = f(x) = f(y) = f(h(0)) = f \circ h(0)$. Sin embargo, por la propiedad cancelativa por izquierda $g = h$, lo que implica que $g(0) = x = y = h(0)$, es decir, que f sea una función inyectiva.

En consecuencia, las funciones inyectivas de la Teoría de Conjuntos pueden ser representadas en categorías mediante la siguiente definición, por lo cual se puede decir que estas funciones en categorías cumplen con la propiedad cancelativa por izquierda.

Definición 3.2.2 (Monomorfismo) Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en la categoría $\mathcal{C}$ es un Monomorfismo si dados dos morfismos $g : C \longrightarrow A$ y $h : C \longrightarrow A$ en $\mathcal{C}$, la igualdad $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$. Se usará la siguiente notación $f : A \rightarrowtail B$, para indicar que f es un Monomorfismo.

De manera general, los morfismos de la categoría del preorden son monomorfismos, pues dados los morfismos $g : C \longrightarrow A$ y $h : C \longrightarrow A$, se tiene que $g = h$, dado que existe un único morfismo $C \longrightarrow A$. Particularmente, en la categoría $\mathbb{N}$ todos los morfismos son monomorfismos, es decir, para la función suma si $m + n = m + p$ implica que $n = p$, puesto que se cumple la propiedad cancelativa por izquierda.

Análogamente, también en Teoría de Conjuntos se dice que una función es sobreyectiva si el codominio es igual al rango de la función. En otras palabras si se tiene una función $f : A \longrightarrow B$, f es sobreyectiva si $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $y = f(x)$. Lo cual da paso a la siguiente definición.

Definición 3.2.3 (Epimorfismo) Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en la categoría $\mathcal{C}$ es un epimorfismo, si para cualquier pareja de morfismos de la categoría $\mathcal{C}$; $g, h : B \rightrightarrows C$, se tiene que el siguiente diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

Entonces $g = h$.

Este diagrama representa un epimorfismo f en $\mathcal{C}$ para el cual se cumple la propiedad cancelativa por derecha. De esta manera, se puede decir que en **Set** cualquier epimorfismo representan las funciones sobreyectivas.

De manera general, en cualquier pre-orden todos los morfismos son epimorfismos. En el caso particular, cada morfismo de la categoría $\mathbb{N}$ es un epimorfismo. Así, la igualdad $n + m = p + m$ implica que $n = p$.

Habría que decir también que en Teoría de Conjuntos una función que a la vez es inyectiva y sobreyectiva es llamada biyectiva, la característica especial de este tipo de funciones es que existe la función inversa. En otras palabras, para una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ existe una función $g : B \longrightarrow A$, tal que se cumplen que $g(f(x)) = x, \forall x \in A$ y $f(g(x)) = x, \forall x \in B$, lo cual implica que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Lo anterior conduce en teoría de categoría a la definición de isomorfismo.

Definición 3.2.4 (Isomorfismo) Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo o morfismo invertible, si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$, además al morfismo g se le denomina inverso para f . Se usará la notación $f : A \cong B$, para indicar que f es un isomorfismo.

La siguiente proposición tiene como fin demostrar que el inverso de un morfismo es único.

Proposición 3.2.1 *Si $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo, luego existe un único morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$, es decir el inverso g de f es único.*

Demostración

Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo, con $g : B \longrightarrow A$ y $h : B \longrightarrow A$ inversos para f . En consecuencia, se cumple que

$$g \circ f = id_A \text{ y } h \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B \text{ y } f \circ h = id_B$$

Luego, $g = id_A \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ id_B = h$. Por lo tanto el morfismo inverso de f es único y se denota con el símbolo f^{-1} ■

De la proposición anterior se puede hacer una analogía de que en conjuntos también es necesario demostrar que el inverso de una función es único. Luego, así como los isomorfismos representan las funciones biyectivas de los conjuntos y ésta se define en términos de función inyectiva y sobreyectiva, en la siguiente proposición se demuestra que un isomorfismo es a la vez monomorfismo y epimorfismo.

Proposición 3.2.2 *Un isomorfismo es a la vez monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración

Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo, luego existe f^{-1} . Por otro lado, sean los morfismos $g : B \longrightarrow C$ y $h : B \longrightarrow C$, los cuales cumplen la condición $g \circ f = h \circ f$. En consecuencia $g = g \circ id_B = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = (h \circ f) \circ f^{-1} = h \circ id_B = h$. Por lo tanto, f es un epimorfismo, es decir, cumple la propiedad cancelativa por derecha. De forma análoga se prueba que f es monomorfismo ■

Observación 3.2.1 *El recíproco de la proposición anterior no es cierto para todas las categorías. De manera particular, los morfismos en la Categoría $\mathbf{N}$ son monomorfismos y epimorfismos, sin embargo no todos los morfismos en la Categoría $\mathbf{N}$ son isomorfismos. En general en la categoría **Poset**, los únicos isomorfismos son los morfismos identidad.*

La siguiente definición es importante porque permite establecer la correspondencia uno a uno entre dos objetos, de lo cual se puede inferir que ambos tienen una misma estructura.

Definición 3.2.5 (Objetos Isomorfos) Se dice que dos objetos A y B son *isomorfos* en una categoría $\mathcal{C}$ si existe al menos un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$. Se utiliza la notación $A \cong B$ para indicar que A es isomorfo a B .

En Teoría de Categorías considerar el objeto A es lo mismo que considerar un objeto B isomorfo a él; el interés se centra en las propiedades comunes entre A y B . En este sentido, los isomorfismos establecen una correspondencia uno a uno, es decir, una relación entre dos objetos en la que se mantiene las características fundamentales de su estructura. En **Set**, si existe una biyección entre A y B se dice que $A \cong B$. Esto significa, que para cualquier conjunto A que sea isomorfo a B , se puede presentar B como una reasignación de los elementos de A y viceversa.

En los objetos isomorfos de cualquier teoría matemática no se puede conocer la diferencia que existe entre ellos en términos de esa teoría. De manera que, el fin de una teoría matemática es estudiar las construcciones y propiedades que son comunes entre los isomorfismos de la teoría.

Observación 3.2.2 *En categorías un objeto que posee una propiedad se dice que es único salvo isomorfismo, esto es, si cualquier objeto que posee esa propiedad es isomorfo a él.*

La Teoría de Categorías estudia todas las nociones que son invariantes bajo todas las formas de isomorfismo. En este sentido, la mayoría de las definiciones básicas y construcciones que se puedan realizar en una categoría no son presentadas de forma única, sino sólo, en términos del concepto salvo isomorfismo.

Con respecto a la siguiente definición, ésta es relevante en la presentación de $\mathbb{N}$ como objeto número natural, tal como se mostrará en la sección 3.3.

Definición 3.2.6 (Objeto Inicial) Un objeto 0 es *inicial* en una categoría $\mathcal{C}$ si para todo objeto A en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $f : 0 \longrightarrow A$. La notación $! : 0 \longrightarrow A$ es utilizada para referirse al único morfismo $f : 0 \longrightarrow A$.

En relación con lo anterior, la siguiente proposición muestra que dos o más objetos iniciales de una misma categoría $\mathcal{C}$ conservan una misma estructura.

Proposición 3.2.3 *Si 0 y $0'$ son dos objetos iniciales en una categoría $\mathcal{C}$ entonces son isomorfos, es decir, $0 \cong 0'$.*

Demostración

Sean 0 y $0'$ objetos iniciales, entonces existen los únicos morfismos $f : 0' \longrightarrow 0$ y $g : 0 \longrightarrow 0'$. Ahora, $f \circ g : 0 \longrightarrow 0$ debe ser id_0 dado que 0 es un objeto inicial, por lo que existe únicamente un morfismo $id_0 : 0 \longrightarrow 0$.

De igual forma, $g \circ f : 0' \longrightarrow 0' = id_{0'}$, puesto que $0'$ es un objeto inicial. Por consiguiente, existe un isomorfismo $f : 0' \longrightarrow 0$, Por lo tanto $0' \cong 0$. El siguiente diagrama presenta claramente que 0 y $0'$ son isomorfos de forma única.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{g} & 0' \\
 & \searrow id_0 & \downarrow f \\
 & & 0 \xrightarrow{g} 0'
 \end{array}$$

■

En **Set** se utiliza el símbolo 0 para hacer referencia al objeto inicial $\emptyset$. Es importante resaltar que el objeto inicial es único salvo isomorfismo; sin embargo, para el caso particular de **Set**, en efecto $\emptyset$ es el único objeto inicial.

Observación 3.2.3 *Se denomina elemento minimal en la categoría del Pre-orden $(P, \leq)$ a un objeto inicial 0 , tal que $0 \in P$ con $0 \leq p$, $\forall p \in P$. Por otro lado, para el caso de $\mathbb{N}$ el elemento minimal es 0 , puesto que $0 \in \mathbb{N}$ con $0 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Seguidamente, se presenta la definición de objeto final que permite establecer una relación con la definición de objeto inicial, mediante el principio de dualidad.

Definición 3.2.7 (Objeto Final:) Un objeto 1 es *final* en una categoría $\mathcal{C}$ si para todo objeto A existe un único morfismo $f : A \longrightarrow 1$. La notación $! : A \longrightarrow 1$ es utilizada para referirse al único morfismo $f : A \longrightarrow 1$.

En **Set** los conjuntos con un solo elemento $\{a\}$ son considerados como objetos finales, puesto que si se tiene un conjunto A y una regla de asignación $f(x) = a$ se obtiene la función $f : A \longrightarrow \{a\}$. De esta manera la única salida posible de f es a , por lo que f es la única posible función. En consecuencia, **Set** tiene muchos objetos finales, los cuales son isomorfos entre ellos. De manera general, en cualquier categoría los objetos finales son isomorfos.

Definición 3.2.8 (Principio de Dualidad) Dada una categoría $\mathcal{C}$ su dual o categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ se construye del siguiente modo.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{op}$ dos categorías con los mismos objetos. Para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ se establece un morfismo $f^{op} : B \longrightarrow A$ en $\mathcal{C}^{op}$, de manera que estos van hacer todos y solamente los morfismos en $\mathcal{C}^{op}$. Por lo que, si se componen los morfismos

$f^{op} \circ g^{op}$ esta composición va estar definida en $\mathcal{C}^{op}$, si la composición $g \circ f$ esta definida en $\mathcal{C}$, obteniendo así

$$C \begin{array}{c} \xleftarrow{g} \\ \xrightarrow{g^{op}} \end{array} B \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{f^{op}} \end{array} A$$

Observación 3.2.4 Con respecto a la definición anterior, se puede decir que la definición de epimorfismo surge de la definición de monomorfismo, debido a que se invierten los morfismos, de esta manera la noción de epimorfismo es dual a la noción de monomorfismo. De igual modo, la definición de objeto final es dual a la definición de objeto inicial.

Por otro lado, se definirá el producto en categorías. De manera que si en Teoría de Conjuntos se necesitaba de la definición de par ordenado para definir el conjunto producto, en categorías no se hace necesario, debido a que es definido únicamente salvo isomorfismo, de esta manera se debe presentar como un producto de dos objetos A y B , y no como el producto de dos conjuntos, tal como se define a continuación.

Definición 3.2.9 (Productos) Un producto en una categoría $\mathcal{C}$ de dos objetos A y B es un objeto $A \times B$ junto con un par de morfismos: $p_A : A \times B \rightarrow A$ y $p_B : A \times B \rightarrow B$ tal que para cualquier par de morfismos de la forma $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ existe un único morfismo $f \times g : C \rightarrow A \times B$ que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f \swarrow & & \searrow g & \\ A & & f \times g & & B \\ & \nwarrow p_A & \downarrow & \nearrow p_B & \\ & & A \times B & & \end{array}$$

Esto quiere decir que, $p_A \circ f \times g = f$ y $p_B \circ f \times g = g$.

Proposición 3.2.4 Un producto $A \times B$ de dos objetos A y B es único salvo isomorfismo.

Demostración

Sean dos morfismos cualesquiera $f : C \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$, además se satisface la definición 3.2.9 y se considera el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f \swarrow & & \searrow g & \\ A & & f \times g & & B \\ & \nwarrow p_A & \downarrow & \nearrow p_B & \\ & & A \times B & & \\ & \swarrow p_A \times p_B & & \searrow & \\ & & C & & \end{array}$$

Del diagrama se puede observar que tanto $f \times g$ como $p_A \times p_B$ son morfismos producto de A y B ; en el que $f \times g$ es el único morfismo producto de f y g con respecto a un producto $A \times B$ y, $p_A \times p_B$ es el único morfismo producto de p_A y p_B con respecto a un producto C . De manera que el producto C solo puede tener un único morfismo $h : C \rightarrow C$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & \downarrow h & \searrow g \\ A & \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

permita que este diagrama conmute, luego $h = id_C$ es el morfismo identidad en C . Aunque también se puede lograr que este diagrama conmute presentando $h = p_A \times p_B \circ f \times g$ como la composición de estos dos morfismos productos, de la cual se obtiene como resultado el morfismo identidad en C debido a la unicidad de h . Por consiguiente, $p_A \times p_B \circ f \times g = id_C$.

Por otro lado, si se invierten los morfismos como se puede observar en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & A \times B & & \\ & p_A \swarrow & \downarrow p_A \times p_B & \searrow p_B & \\ A & \xleftarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & B \\ & p_A \swarrow & \downarrow f \times g & \searrow p_B & \\ & & A \times B & & \end{array}$$

Se obtiene que la composición de los morfismos productos $f \times g \circ p_A \times p_B = id_{A \times B}$. Por lo tanto, $f \times g : C \cong A \times B$. En otras palabras, C es isomorfo a $A \times B$; en efecto, $A \times B$ es único salvo isomorfismo. ■

En **Set** el producto de A y B representa el producto cartesiano $A \times B$ en conjuntos.

Por otra parte, en la categoría de pre-orden $(P, \leq)$ un producto de a y b cuando existe es definido por las propiedades:

(i) $a \times b \leq a$, $a \times b \leq b$, es decir, $a \times b$ es una cota inferior de a y b .

(ii) Si $c \leq a$ y $c \leq b$, luego $c \leq a \times b$. En otras palabras, $a \times b$ es más grande que cualquier cota inferior de a y b . En consecuencia, $a \times b$ al ser la más grande de las cotas inferiores, representa al **ínfimo** de a y b .

Se considerará ahora, la definición de co-producto, o suma amalgamada la cual es necesaria para la representación del objeto Número Natural en la siguiente sección.

Definición 3.2.10 (Co-Producto o Suma Amalgamada) En una categoría $\mathcal{C}$, una suma amalgamada de dos objetos A y B es un objeto $A + B$ junto con un par de inyecciones: $i_A : A \rightarrow A + B$ y $i_B : B \rightarrow A + B$ tal que para cualquier par de morfismos de la forma $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ existe un único morfismo $f + g : A + B \rightarrow C$ que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & A + B & \xleftarrow{i_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow f+g & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

De modo que, $(f + g) \circ i_A = f$ y $(f + g) \circ i_B = g$, en el que $f + g$ es el morfismo suma en f y g con respecto a las inyecciones i_A, i_B .

En **Set**, la suma amalgamada de A y B representa su unión disjunta, $A + B$. Esta es la unión de dos conjuntos A y B que no tienen elementos en común. Así, por ejemplo:

$$A' = \{\langle a, 0 \rangle : a \in A\} = A \times \{0\} \text{ y } B' = \{\langle b, 1 \rangle : b \in B\} = B \times \{1\}.$$

De manera que, $A' \cap B' = \emptyset$. Luego, se define como $A + B = A' \cup B'$ junto con un par de inyecciones $i_A : A \rightarrow A + B$ y $i_B : B \rightarrow A + B$, las cuales están dadas por las reglas $i_A(a) = \langle a, 0 \rangle$ y $i_B(b) = \langle b, 1 \rangle$ respectivamente.

Por otra parte, en la categoría de pre-orden $(P, \leq)$, la suma amalgamada $a + b$ es definida por las propiedades:

(i) $a \leq a + b$, $b \leq a + b$, es decir, $a + b$ es una cota superior de a y b .

(ii) Si $a \leq c$ y $b \leq c$, luego $a + b \leq c$. En otras palabras, $a + b$ es la más pequeña que cualquier cota superior de a y b . En consecuencia, $a + b$ al ser la más pequeña de las cotas superiores, representa el **supremo de** a y b .

Observación 3.2.5 En la suma se consideran los dominios de los morfismos, mientras que en el producto se consideran los codominios, tal como se puede observar en los diagramas. Lo que significa que la suma sea dual al producto por el principio de dualidad.

3.3. Objeto Número Natural N.N.O

De manera análoga a como se definieron los números naturales en el capítulo 2 bajo un marco conjuntista, a través del axioma del infinito, el cual permite justificar la existencia de conjuntos inductivos, en esta sección el interés se centra en la existencia de objetos infinitos, particularmente se presenta el fundamento de los números naturales dentro del marco de la Teoría de Categorías, definiendo a $\mathbb{N}$ como objeto inicial de una categoría $\mathcal{C}$ de objetos con estructura $\mathbf{X} = \langle X, \sigma, s \rangle$, con X como objeto de la categoría, el morfismo $\sigma : 1 \rightarrow X$ que distingue un elemento 0 y el endomorfismo $s : X \rightarrow X$. A esta categoría comúnmente se le conoce como, la *categoría²² de las álgebras tipo 0-1*.

Por otro lado, en el capítulo 2 se hizo uso de la definición de sucesor el cual se puede representar mediante el siguiente morfismo, $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es decir que a cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \mapsto s(n) = n \cup \{n\} = n + 1$, esto significa que s es una relación unaria. Además, el elemento inicial 0 de $\mathbb{N}$ se puede expresar mediante el morfismo $\sigma : 1 \rightarrow \mathbb{N}$, dado que 1 es el conjunto que esta formado por vacío, luego el morfismo σ manda a $\emptyset$ en 0, por lo cual σ representa una relación cero-aria. En otras palabras, $\emptyset \mapsto 0$. Usando la definición de suma amalgamada, se tiene que los morfismos σ y s se pueden integrar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{i_1} & 1 + \mathbb{N} & \xleftarrow{i_2} & \mathbb{N} \\ & \searrow \sigma & \downarrow \sigma+s & \swarrow s & \\ & & \mathbb{N} & & \end{array}$$

Por consiguiente, es posible reducir este diagrama de la siguiente forma:

$$1 + \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma+s} \mathbb{N}$$

Ahora, para un objeto X se definen los siguientes morfismos: $s' : X \rightarrow X$ y $\sigma' : 1 \rightarrow X$, tal que $\sigma'(\emptyset) = x_0 \in X$. De forma analoga, los morfismos σ' y s' se pueden representar en el siguiente diagrama:

$$1 + X \xrightarrow{\sigma'+s'} X$$

Por ende, se da lugar al siguiente axioma.

²²Una descripción más detallada de esta categoría, se encuentra en [?].

Axioma 3.3.1 (N.N.O) *Existe un objeto número natural, es decir, un objeto $\mathbb{N}$ tal que para cualquier objeto X del mismo tipo, existe exactamente un único morfismo $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ para el cual el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \\ \text{\scriptsize id_1+h} \downarrow \text{\scriptsize $\vdots$} & & \downarrow \text{\scriptsize h} \\ \mathbf{1} + X & \xrightarrow{\sigma'+s'} & X \end{array}$$

En consecuencia, este diagrama es la síntesis de otros dos diagramas. En este sentido, afirmar que este diagrama conmuta significa que se debe verificar:

1. Por un lado, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\ \text{\scriptsize id_1} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize h} \\ \emptyset & \xrightarrow{\sigma'} & x_0 \end{array}$$

Si se considera el morfismo $id_1 : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$, es decir que manda a vacío en vacío. Luego el morfismo $\sigma' : \mathbf{1} \rightarrow X$ asigna a vacío un elemento x_0 , de manera que, $\sigma'(\emptyset) = x_0$. Por tanto, $(\sigma' \circ id_1) = x_0$. Así mismo, el morfismo $\sigma : \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{N}$ asigna a vacío un elemento 0 , en otras palabras, $\sigma(\emptyset) = 0$. En consecuencia el morfismo $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ debe relacionar a 0 con x_0 de tal forma que, $(\sigma' \circ id_1) = (h \circ \sigma)$, lo que implica que $h(0) = x_0$ y a su vez el diagrama conmuta.

2. Por otro lado, el siguiente diagrama también debe conmutar:

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{s} & s(n) \\ \text{\scriptsize h} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize h} \\ h(n) & \xrightarrow{s'} & s'(h(n)) \end{array}$$

En este caso, el elemento n bajo el morfismo h es igual a $h(n)$ y este a través del morfismo s' es igual a $s'(h(n))$. Además, el morfismo s asigna a n un elemento sucesor $s(n)$, a su vez el morfismo h asigna a $s(n)$ un elemento $h(s(n))$. Por consiguiente, para que el diagrama anterior conmute se debe cumplir que $h(s(n)) = s'(h(n))$.

En resumen, que el diagrama reducido conmute significa que se cumple las siguientes condiciones:

$$(i) \ h(0) = x_0$$

$$(ii) \ h(s(n)) = s'(h(n)).$$

Observación 3.3.1 *La caracterización de N.N.O determina a $\mathbb{N}$ únicamente salvo isomorfismos. Puesto que, la forma en que es presentado en el axioma anterior implica por definición que $\mathbb{N}$ es un objeto inicial, además si existe otro objeto inicial $\mathbb{N}'$ éste debe ser isomorfo a él, según la proposición 3.2.3. En consecuencia, $\mathbb{N}$ es único salvo isomorfismos.*

La siguiente proposición permite mostrar que si se tiene un único morfismo $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es la identidad; éste resultado será de utilidad para la demostración de los axiomas 3 y 5 de Peano en la sección 3.6.

Proposición 3.3.1 *Sea un morfismo $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ para el cual el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \\ \text{\scriptsize id_1+h} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize h} \\ \mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \end{array}$$

Luego, $h = id_{\mathbb{N}}$

Demostración

Por el axioma *N.N.O* para que este diagrama conmute el morfismo h debe cumplir las siguientes condiciones: $h(0) = 0$ y $h(s(n)) = s(h(n))$. Además, el morfismo h es único. Sin embargo, el morfismo $id_{\mathbb{N}}$ cumple las siguientes condiciones: $id_{\mathbb{N}}(0) = 0$ y $id_{\mathbb{N}}(s(n)) = s(id_{\mathbb{N}}(n))$. En consecuencia, el siguiente diagrama también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \\ \text{\scriptsize $id_1+id_{\mathbb{N}}$} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize $id_{\mathbb{N}}$} \\ \mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \end{array}$$

De manera que por el axioma *N.N.O* se tiene que $h = id_{\mathbb{N}}$ ■

Hay que mencionar, además que se puede considerar a el objeto número natural como un conjunto $\mathbb{N}$ dotado de una estructura, es decir, como un objeto de un álgebra del tipo $\mathbf{X} = \langle X, 0, s \rangle$. Más aún, *N.N.O* conserva la estructura de los números naturales, puesto que se puede demostrar el Principio de Inducción y el Principio de Recursión.

3.4. Principio de Inducción

En esta sección se tiene como propósito presentar el Principio de Inducción en los números naturales, de tal manera de que si se tiene un objeto X con un morfismo $\sigma : 1 \rightarrow X$ tal que $\emptyset \xrightarrow{\sigma} 0$ y un morfismo $s : X \rightarrow X$ tal que $n \xrightarrow{s} s(n)$, luego este objeto X se dice que es igual a $\mathbb{N}$.

Teorema 3.4.1 *Para un objeto X con los morfismos σ y s , si se tiene que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} 1 + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \\ \text{\scriptsize id_1+h} \downarrow \text{\scriptsize h} & & \downarrow \\ 1 + X & \xrightarrow{\sigma+s} & X \end{array}$$

implica que $X = \mathbb{N}$.

Demostración

El diagrama de arriba se puede ver como la simplificación de dos diagramas, por lo que si éste diagrama conmuta, significa que también conmutan los siguientes dos diagramas.

Por un lado, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\ \text{\scriptsize id_1} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize h} \\ \emptyset & \xrightarrow{\sigma} & 0 \end{array}$$

significa que el morfismo identidad en 1, manda a vacío en vacío, luego el morfismo $\sigma : 1 \rightarrow X$ asigna a vacío el elemento 0. De igual modo sucede para $\sigma : 1 \rightarrow \mathbb{N}$, donde se envía vacío a el elemento 0. En consecuencia, el morfismo $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ manda 0 en 0, de modo que se tiene $h(0) = 0$.

Por otro lado, dado que el siguiente diagrama también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{s} & s(n) \\ \text{\scriptsize h} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize h} \\ h(n) & \xrightarrow{s} & s(h(n)) \end{array}$$

Entonces el elemento n bajo el morfismo h es igual a $h(n)$ y éste a través del morfismo s es igual a $s(h(n))$. Así mismo, el morfismo s asigna a n un elemento sucesor

$s(n)$, a su vez el morfismo h asigna a $s(n)$ un elemento $h(s(n))$, lo que significa que $h(s(n)) = s(h(n))$.

En resumen, de la conmutatividad del diagrama se obtienen las siguientes condiciones:

$$(i) \ h(0) = 0$$

$$(ii) \ h(s(n)) = s(h(n))$$

Estas condiciones permiten deducir que:

- Para $n = 1$ se tiene que $h(1) = h(s(0)) = s(h(0)) = s(0) = 1$; es decir, $h(1) = 1$.
- Para $n = 2$ evaluada en h se obtiene que $h(2) = h(s(1)) = s(h(1)) = s(1) = 2$, así $h(2) = 2$.

De lo que se infiere de manera general,

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(1) &= 1 \\ h(2) &= 2 \\ &\vdots \\ h(n) &= n \end{aligned}$$

Por consiguiente, se tiene que $h = 1d_{\mathbb{N}}$; por lo tanto, $X = \mathbb{N}$ ■

3.5. Principio de Recursión

Al igual que en el capítulo 2, esta sección tiene como fin presentar el teorema de recursión simple con la intención de reconocer la suma como una operación de los números naturales bien definida. Esto se hace con el objetivo de evitar problemas al definir las operaciones, tal como le sucedió a Landau. Para ello, se definirá para los objetos $\mathbb{N}$ y A los siguientes morfismos:

Sea $f : 1 \longrightarrow A$ y $g : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$. Luego, por suma amalgamada $f + g : 1 + A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Ahora, Sea $\sigma : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : A \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Así mismo, por suma amalgamada $\sigma + g : 1 + A \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

De lo anterior se tiene los siguientes morfismos, $f + g : 1 + A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ y

$\sigma + g : 1 + A \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Luego, haciendo uso del producto se tiene que:
 $(f + g) \times (\sigma + g) : 1 + A \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times \mathbb{N}$.

Esto permite presentar el Principio de Recursión bajo el marco de la Teoría de Categorías, de la siguiente manera:

Teorema 3.5.1 *Dados $f : 1 \rightarrow A$ y $g : A \times N \rightarrow A$, entonces existe un único morfismo $h : N \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} 1 + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma + s} & \mathbb{N} \\ \text{\scriptsize } id_1 + (h \times id_{\mathbb{N}}) \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize } h \times id_{\mathbb{N}} \\ 1 + A \times \mathbb{N} & \xrightarrow{(f + g) \times (\sigma + g)} & A \times \mathbb{N} \end{array}$$

Demostración

La unicidad del morfismo h está justificada por el hecho de que $\mathbb{N}$ es *N.N.O.*, esto quiere decir que solo existe un morfismo $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ ■

Por otro lado, para que el diagrama anterior conmute se debe mostrar que los siguientes dos diagramas también conmutan, debido a que el diagrama de arriba es una representación de la reducción de dos diagramas.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\ id_1 \downarrow & & \downarrow h \\ \emptyset & \xrightarrow{f + g} & a_0 \end{array}$$

De esta manera, el morfismo identidad en 1 manda a $\emptyset$ en $\emptyset$. Luego el morfismo $f + g : 1 + A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ asigna a $\emptyset$ un elemento a_0 , esto se da porque se toma el producto por izquierda, además se toma el morfismo f , puesto que va de $\emptyset$ a un elemento a_0 . Por lo que, $f(\emptyset) = a_0$ y a su vez, $(f + g) \circ id_1 = a_0$. Así mismo, el morfismo $\sigma : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$ asigna a $\emptyset$ un elemento 0, en otras palabras, $\sigma(\emptyset) = 0$. En consecuencia el morfismo $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ debe relacionar a 0 con un elemento a_0 de tal forma que, $(f + g) \circ id_1 = h \circ \sigma$, lo que implica que $h(0) = a_0$ y en consecuencia el diagrama conmuta.

De manera similar, el siguiente diagrama también debe conmutar

$$\begin{array}{ccc}
 n & \xrightarrow{s} & s(n) \\
 \downarrow h \times id_N & & \downarrow h \\
 (h(n), n) & \xrightarrow{\sigma+g} & g(h(n), n)
 \end{array}$$

En este caso, para $n \in 1 + \mathbb{N}$, en particular $n \in \mathbb{N}$, el morfismo producto $h \times id_{\mathbb{N}}$ envía n a la pareja ordenada $(h(n), n)$, luego el morfismo $\sigma + g : 1 + A \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ asigna a $(h(n), n)$ un elemento $g(h(n), n)$, esto se da porque se toma el producto por derecha, además se toma el morfismo g , puesto que va de $(h(n), n) \in A \times \mathbb{N}$ a un elemento $g(h(n), n) \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(\sigma + g) \circ (h \times id_N)(n) = g(h(n), n)$. Por otro lado, el morfismo s asigna a n un sucesor $s(n)$ y este a su vez es asignado a un elemento $h(s(n))$ bajo el morfismo h , de esta manera $h \circ s(n) = h(s(n))$. Por consiguiente, se debe cumplir que $h(s(n)) = g(h(n), n)$ para que el diagrama conmute.

En síntesis, para que el diagrama reducido conmute debe cumplir las siguientes condiciones:

- (i) $h(0) = a_0$
- (ii) $h(s(n)) = g(h(n), n)$

Observación 3.5.1 Las condiciones (i) y (ii) derivadas del diagrama utilizado para introducir el Principio de Recursión en Teoría de Categorías, son idénticas a las condiciones que debe cumplir la función h en el Principio de Recursión, presentado en el marco de la Teoría de Conjuntos.

Por otro lado, se aprecia la similitud con la suma, pues si $+_n : N \rightarrow N$ define la operación suma tal que

- (a) $+_n(0) = n$ y,
- (b) $+_n[s(m)] = s[+_n(m)]$.

Entonces (a) es una instanciación de (i) y (b) de (ii).

De esta manera, se puede definir la suma, de manera análoga a como se realizó en Teoría de Conjuntos, puesto que el Principio de Recursión permite reconocer que la suma está *bien definida*.

3.6. Axiomas de Peano

En esta sección se mostrará que los axiomas de Peano presentados al final del capítulo 2 se deducen directamente del axioma *N.N.O*, en ese sentido los axiomas *P1* y *P2* se infieren de la estructura del objeto número natural, debido a que se tienen los morfismos $\sigma : \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{N}$ y $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en los cuales se encuentra definido el número natural 0 mediante el morfismo σ , y a su vez el morfismo s le asigna a cada número natural n un sucesor $s(n)$. Por otro lado, los demás axiomas se pueden expresar en el lenguaje de Teoría de Categorías de la siguiente forma:

P3: (Principio de Inducción) Si X es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que satisface:

(i) $0 \in X$

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que si $n \in X$, entonces $S(n) \in X$, por tanto, $X = \mathbb{N}$.

P4: 0 no es el sucesor de ningún número natural ($\forall n \in \mathbb{N}, 0 \neq S(n)$).

P5: s es un monomorfismo.

Teorema 3.6.1 *Para cualquier objeto número natural*

$$\mathbf{1} + \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma+s} \mathbb{N}$$

se satisface los axiomas P3, P4 y P5.

Demostración

P3: Sea

$$\mathbf{1} + \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma+s} \mathbb{N}$$

y los morfismos

$$\mathbf{1} + X \xrightarrow{\sigma'+s'} X$$

tal que $\forall x \in X$ se cumple que $s'(x) = s(x)$ y $0 \in \mathbf{1} + X$.

Además, se define el morfismo $j : X \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $j(n) = n$. Por consiguiente, $j(s'(n)) = j(s(n)) = s(n) = s(j(n))$. Luego, por el axioma *N.N.O* existe un único morfismo h para el cual el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N} \\
\downarrow id_1+h & & \downarrow h \\
\mathbf{1} + X & \xrightarrow{\sigma'+s'} & X \\
\downarrow id_1+j & & \downarrow j \\
\mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma+s} & \mathbb{N}
\end{array}$$

De manera que $h(0) = 0$ y $h(s(n)) = s'(h(n))$.

Por otro lado, se tiene que $j(h(0)) = j(0) = 0$, $j(h(s(n))) = j(s'(h(n)))$ y $j(s'(h(n))) = s(j(h(n)))$ es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{s} & \mathbb{N} \\
\downarrow id_1+(j \circ h) & & \downarrow (j \circ h) \\
\mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{s} & \mathbb{N}
\end{array}$$

En consecuencia, por la proposición 3.3.1 se tiene que $j \circ h = id_{\mathbb{N}}$. Por ende, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $h(n) \in \mathbb{N}$ tal que $j(h(n)) = id_{\mathbb{N}}(n) = n$, es decir, el morfismo $j: X \rightarrow \mathbb{N}$ es sobreyectivo o un epimorfismo. Por tanto, $X = \mathbb{N}$.

P4: Sea

$$\mathbf{1} + \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma+s} \mathbb{N}$$

y los morfismos

$$\mathbf{1} + X \xrightarrow{\sigma'+s'} x$$

tal que $\forall x \in X$ se cumple que $s'(x) \neq x_0$ para algún $x_0 \in X$. Luego por el axioma *N.N.O* existe un morfismo h para el cual los siguientes diagrama conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
\emptyset & \xrightarrow{\sigma} & 0 \\
id_1 \downarrow & & \downarrow h \\
\emptyset & \xrightarrow{\sigma'} & x_0
\end{array}$$

De este diagrama se infiere que $h(0) = x_0$.

Ahora, en el siguiente diagrama se considera $s(n) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{s} & s(n) = 0 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ h(n) & \xrightarrow{s'} & s'(h(n)) \end{array}$$

En consecuencia, para que este último diagrama conmute se debe cumplir que $h(s(n)) = s'(h(n))$, dado que $s(n) = 0$ entonces $h(0) = s'(h(n))$. Por consiguiente, $s'(h(n)) = x_0$, lo cual contradice la hipótesis inicial que $s'(x) \neq x_0$ para algún $x_0 \in X$. Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \neq s(n)$.

P5: Sea el morfismo $s' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido como $(m, n) \rightarrow s'(m, n)$ para el cual $s'(m, n) = (n, s(m))$ talque $n = s(m)$, y sea el elemento $\langle 0, 0 \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De modo que, por el axioma *N.N.O.*, existe un único morfismo $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el cual hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} + \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma + s} & \mathbb{N} \\ \downarrow id_1 + h & & \downarrow h \\ \mathbf{1} + \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\sigma' + s'} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

En consecuencia, este diagrama es la síntesis de otros dos diagramas. Para la demostración de este punto del teorema se tomará en particular uno de los diagramas que lo componen, por lo que si este diagrama conmute significa que el siguiente diagrama también conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{s} & \mathbb{N} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{s'} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{array}$$

De tal forma que cumpla con las siguientes propiedades, $h(0) = \langle 0, 0 \rangle$ y $h \circ s = s' \circ h$. Para ello, se debe tener en cuenta que el morfismo h tiene dos componentes, es decir, $h(n) = (g(n), j(n))$ con morfismos $g, j : \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$.

Debido a que h cumplen con las propiedades mencionadas anteriormente, se tiene:

En primer lugar, $h(0) = \langle 0, 0 \rangle = (g(0), j(0))$, luego $g(0) = 0$ y $j(0) = 0$.

En segundo lugar, $(h \circ s)(n) = h(s(n)) = (g(s(n)), j(s(n))) = ((g \circ s)(n), (j \circ s)(n))$ y $(s' \circ h)(n) = s'(h(n)) = s'(g(n), j(n)) = (j(n), s(j(n))) = (j(n), (s \circ j)(n))$. Cabe decir que, $s'(g(n), j(n)) = (j(n), s(j(n)))$ por la forma en como está definido el morfismo s' . Hecha esta salvedad, se tiene entonces que:

$(g \circ s)(n) = j(n)$ y $(j \circ s)(n) = (s \circ j)(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, $(g \circ s) = j$ y $(j \circ s) = (s \circ j)$.

Por consiguiente, se ha llegado a que $j = id_{\mathbb{N}}$ por la proposición 3.3.1, puesto que $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y satisface $j(0) = 0$ y $(j \circ s) = (s \circ j)$. Luego, $(g \circ s) = id_{\mathbb{N}}$ y por esto se concluye que s es inyectiva, ya que $s(n) = s(m)$ implica que $g \circ s(n) = g \circ s(m)$, lo que a su vez es $id_{\mathbb{N}}(n) = id_{\mathbb{N}}(m)$ de donde $n = m$. Por tanto, como s es una función inyectiva, cumple con la propiedad cancelativa por izquierda lo que significa que s es un monomorfismo en una categoría $\mathcal{C}$ ■

En resumen, en este capítulo se expuso la definición de categorías y los conceptos básicos necesarios para presentar los números naturales dentro de la Teoría de Categorías. En ese sentido, fue importante introducir la categoría $\mathbf{1}$, así como algunos ejemplos de categorías, lo cual permitió considerar la colección infinita de todos los números naturales como una categoría de preorden. Más adelante, se expone la definición de objeto inicial y terminal, de manera que se presenta el axioma *N.N.O* a través de un diagrama, el cual postula la existencia de un objeto $\mathbb{N}$ que es inicial en una categoría $\mathcal{C}$ de objetos que tienen una estructura tipo $\mathbf{X} = \langle X, 0, S \rangle$. Además, de la misma forma en como se probó que $\mathbb{N}$ es un objeto inicial, de manera dual se puede demostrar que $\mathbb{R}$ es un objeto final.

Seguidamente, se introduce el Principio de Inducción y recursión por medio del mismo diagrama utilizado para presentar el axioma *N.N.O*. De tal manera, que para presentar el Principio de Inducción se considera otro objeto X con los mismos morfismos s y σ de $\mathbb{N}$, con el fin de probar que X es igual a $\mathbb{N}$, esto quiere decir, que se mantiene el hecho de que $\mathbb{N}$ es el objeto inicial de este tipo de categorías. En este orden de ideas, si se formará la categoría de todos los conjuntos inductivos, $\mathbb{N}$ es el conjunto inicial, es decir el más pequeño. Por otro lado, en el Principio de Recursión la existencia y unicidad del morfismo h está dado por el axioma *N.N.O*, lo cual garantiza la buena definición de las operaciones en $\mathbb{N}$.

Para concluir, se probó que del axioma *N.N.O* se infieren los axiomas de Peano, lo cual permite constatar efectivamente que el objeto $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Finalmente, con la Teoría de Categorías se pueden estudiar propiedades de estructuras más generales tales como, $\mathbb{R}$, espacios topológicos, entre otros; sin embargo, estas cuestiones no están dentro del alcance del presente trabajo.

Capítulo 4

Reflexiones y Conclusiones

Este trabajo tiene como objetivo central identificar algunos de los distintos y novedosos acercamientos a $\mathbb{N}$ que ofrece la Teoría de Categorías como marco conceptual para definir los números naturales. De modo que, en este capítulo se harán algunas reflexiones y conclusiones sobre los aportes de esta investigación a la educación matemática, especialmente se enfatizará en torno a lo matemático, histórico-epistemológico y educativo. Para tal efecto, se analizará más precisamente cómo estas dos teorías matemáticas se complementan a partir del estudio de los números naturales, cuál puede ser el aporte de considerar a $\mathbb{N}$ desde la Teoría de Categorías en la formación de los futuros docentes de matemáticas, y la importancia de los números naturales en las matemáticas, la historia y la educación.

En este sentido, la relación entre Teoría de Conjuntos y Teoría de Categorías se encuentran en investigaciones como [?] y [?] que sirven como sustento teórico para las reflexiones que se realizarán a continuación.

Blass en [?] afirma que la Teoría de Categorías permite expresar las propiedades estructurales más importantes de los objetos matemáticos en términos de su propio lenguaje; particularmente, se pueden presentar las propiedades universales de los números naturales. Más aún, estas descripciones universales son útiles al menos en dos momentos. En un primer momento, el hecho de expresar las propiedades más importantes de cada estructura matemática, permite dejar de lado algunas características de los objetos matemáticos que no son tan relevantes. De esta manera, este hecho se puede evidenciar en este trabajo, dado que en Teoría de Categorías se define a $\mathbb{N}$ con una propiedad universal, la cual esta expresada por el axioma *N.N.O.* Sin embargo, no se menciona cuáles son los elementos que contiene $\mathbb{N}$ sino que se considera la relación y el comportamiento de estos con los elementos de otro conjunto X con las mismas propiedades.

Blass también menciona un segundo momento en el que esas descripciones universales en categorías pueden explicar ciertas similitudes estructurales entre objetos de diferentes áreas de las matemáticas. Además, la interacción entre la Teoría de Conjuntos y Teoría de Categorías se hace más notable en la teoría de topos. No obstante, estas características no hacen parte de los objetivos de este trabajo.

4.1. Conclusiones y Reflexiones sobre $\mathbb{N}$

Desde la Teoría de Conjuntos es necesario empezar con la presentación de los axiomas que permiten expresar las propiedades de los conjuntos, dado que usualmente un conjunto se caracteriza según la propiedad particular que cumplen sus elementos. Los axiomas de existencia, separación, pares, unión, del infinito, conjunto potencia y reemplazo justifican la existencia y las propiedades del conjunto de los números naturales. Por otro lado, en categorías no se parte de unos axiomas, sino de la definición formal de lo que es una categoría, mediante la cual un objeto puede ser caracterizado por una propiedad universal dada, a través de los morfismos que lo relacionan con otros objetos y donde un objeto se dice que es único salvo isomorfismo, en concordancia con [?].

Cabe resaltar, que no existe una definición formal de lo que es un conjunto, a pesar de que en Teoría de Conjuntos esta noción es importante para las construcciones matemáticas dentro de esta teoría, a diferencia en Teoría de Categorías donde si es posible definir el concepto de categoría, en relación con [?].

En Teoría de Conjuntos para presentar el axioma del infinito es necesario, primero introducir la definición de sucesor y posteriormente definir conjunto inductivo, este último es indispensable en la definición de $\mathbb{N}$. Sin embargo, lo que garantiza la existencia de $\mathbb{N}$ es el axioma del infinito, más no lo caracteriza. De esta manera, se debe definir a $\mathbb{N}$ explícitamente como la intersección de todos los conjuntos inductivos, lo que tiene como consecuencia que esté dentro de todos ellos y por tanto sea el conjunto inductivo más pequeño.

Desde la Teoría de Categorías no es indispensable presentar la definición de conjunto inductivo para definir a $\mathbb{N}$ como lo hace la Teoría de Conjuntos. Sin embargo, si es fundamental introducir un axioma que permite garantizar su existencia y al mismo tiempo definirlo, el cual se ha llamado axioma *N.N.O* (Ver sección 3.3). Además de este axioma se deduce directamente que $\mathbb{N}$ es un objeto inicial para un tipo especial de categorías. Luego, $\mathbb{N}$ es el conjunto minimal de todos los conjuntos que presentan su estructura, es decir, $\mathbb{N}$ se puede considerar como el objeto inicial en la categoría de las álgebras tipo 0-1.

De los párrafos anteriores se puede concluir que en ambas teorías la existencia de $\mathbb{N}$ se fundamenta a partir de un axioma, en conjuntos a partir del axioma del infinito y en categorías del axioma *N.N.O*, de los cuales se infiere que $\mathbb{N}$ es el conjunto inductivo más pequeño. Es importante mencionar que al referirse a *N.N.O* no solo se considera a $\mathbb{N}$, sino a cualquier otro objeto que tenga la misma estructura, es decir que sea isomorfo a él. Sin embargo, debido al análisis que se está haciendo se tomará a continuación, el caso particular de $\mathbb{N}$.

Nuevamente desde el punto de vista conjuntista, se presenta el axioma de existencia para determinar que existe el conjunto vacío, luego fue importante demostrar la unicidad de éste conjunto para definir el cero como el conjunto vacío, es decir, $0 = \emptyset$. Lo que implica que solo existe esta forma única de definirlo. En consecuencia, la definición de sucesor permite introducir los otros números naturales, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s(n) &= n \cup \{n\} \\ 1 &= s(0) = \emptyset \cup \{0\} = \{0\} \\ 2 &= s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &= s(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mientras que, de forma paralela en categorías se define el cero mediante el morfismo:

$$\begin{aligned} \sigma : 1 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \sigma(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

Para este caso en particular, la categoría **1** es aquella cuyo único objeto es $\emptyset$. Además, se define el morfismo sucesor $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que $n \mapsto s(n)$. Luego, con la estructura de *N.N.O*

$$\mathbf{1} + \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma+s} \mathbb{N}$$

Se definen todos los números naturales. De modo que, una vez que se tiene el elemento distinguido 0 mediante el morfismo σ , se pueden obtener los demás números naturales a través del morfismo s de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s(0) &= 1, 0 \mapsto 1 \\ s(1) &= 2, 1 \mapsto 2 \\ s(2) &= 3, 2 \mapsto 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nuevamente, se puede decir que en conjuntos se muestra con mayor detalle las características de cada uno de los elementos de $\mathbb{N}$, a diferencia que en categorías la estructura

$$\mathbf{1} + \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma+s} \mathbb{N}$$

expresa de manera inmediata a $\mathbb{N}$ mediante el morfismo suma, sin necesidad de particularizar sobre cada uno de sus elementos.

Por otra parte, en Teoría de Conjuntos, el Principio de Inducción se deduce directamente de la definición de número natural, para ello se toma un conjunto inductivo X que cumple una propiedad $P(x)$, luego se llega a que $X = \mathbb{N}$, en otras palabras, $\mathbb{N}$ cumple el Principio de Inducción.

Así mismo, este principio se puede ver reflejado en Teoría de Categorías por medio del diagrama presentado para el axioma *N.N.O.*, dado que se toma un objeto X con los morfismos $\sigma : \mathbf{1} \rightarrow X$ tal que $\emptyset \xrightarrow{\sigma} 0$ y $h : X \rightarrow X$ tal que $n \xrightarrow{s} s(n)$, mediante los cuales se demuestra que en efecto $X = \mathbb{N}$. Es decir, se mantiene el hecho de que $\mathbb{N}$ es el objeto inicial de este tipo de categorías, ya que si se considera cualquier otro objeto con los mismos morfismos s y σ de $\mathbb{N}$, luego este objeto será igual a $\mathbb{N}$.

Por consiguiente, se puede establecer la relación entre la presentación del Principio de Inducción en Teoría de Categorías y en Teoría de Conjuntos, puesto que ambos expresan la minimalidad de $\mathbb{N}$, sin embargo la diferencia radica en la forma en qué es presentado.

En ambas teorías se evidencia el orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$. En Teoría de Conjuntos se describen con detalle las propiedades de orden en $\mathbb{N}$, mientras que, en categorías la pareja $(\mathbb{N}, \leq)$ se puede ver como un objeto de la categoría **Poset**, donde $\mathbb{N}$ es un conjunto y $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N}$, el cual cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un punto importante es ver el principio de recursión el cual es presentado en ambas teorías de manera equivalente, con el fin de establecer la buena definición de las operaciones. Sin embargo, la diferencia radica en la forma de presentarlo y demostrarlo. Por un lado, en Teoría de Categorías, este se infiere de inmediato del diagrama presentado para el axioma *N.N.O.*, además la unicidad del morfismo h está dado por el mismo axioma. Por otro lado, en Teoría de Conjuntos el Principio de Recursión no se infiere de forma tan inmediata de la definición de $\mathbb{N}$, de igual forma la unicidad de la función h no es tan evidente, por lo que se debe construir una prueba más extensa que determine este hecho. Es de resaltar que la función h en conjuntos está dada en términos de dos condiciones las cuales se pueden inferir del diagrama presentado en

Teoría de Categorías, puesto que, estas condiciones hacen que el diagrama conmute.

En cuanto a las operaciones se debe decir que en ambas teorías se definen de la misma manera, y a su vez se hace necesario presentar el Principio de Recursión para justificar su buena definición. Por lo que, en conjuntos la existencia y unicidad de la función para la suma $+_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esta dada por el Principio de Recursión, de esta misma forma se puede definir la suma en categorías y su buena definición está garantizada por el axioma *N.N.O.*

Otro resultado importante de este trabajo es mostrar que desde la axiomática ZFC y la axiomática de Lawvere se infiere los axiomas de Peano. De modo que, en Teoría de Conjuntos los axiomas 1 y 2 de Peano se inferen de la definición de $\mathbb{N}$. Estos axiomas en Teoría de Categorías se deducen directamente de la estructura de $\mathbb{N}$, debido a que se tienen los morfismos σ mediante el cual se obtiene el número natural 0, y s que le asigna a un número natural n su sucesor $s(n)$.

Seguidamente, el axioma 3 de Peano en conjuntos se deduce a partir de la definición de $\mathbb{N}$; mientras que, en categorías se deriva del axioma *N.N.O.*, pero se debe definir otro morfismo j para su demostración. En la prueba de este axioma en ambas teorías se llega a la misma conclusión que $X = \mathbb{N}$.

Luego, el axioma 4 de Peano se infiere en conjuntos mediante el uso de las propiedades del orden; por el contrario, en categorías las propiedades del orden no son necesarias para su demostración, puesto que ésta se deduce del diagrama presentado para el axioma *N.N.O.*

Con respecto a el axioma 5 de Peano en conjuntos se infiere de la definición dada para el sucesor; no obstante, en categorías la prueba se deriva del diagrama para *N.N.O.* y de la proposición 3.3.1, haciendo especial énfasis en el morfismo s para mostrar que éste es un monomorfismo.

En resumen, el axioma *N.N.O.* permite justificar la existencia de $\mathbb{N}$, definirlo como un objeto inicial; además deducir los principios de inducción, recursión y los axiomas de Peano.

A partir de la realización del análisis de la presentación de los números naturales en Teoría de Conjuntos y Teoría de Categorías, en grandes palabras se obtuvo el resultado de que, el modo en como se presenta a $\mathbb{N}$ desde la Teoría de Conjuntos permite estudiar en detalle sus elementos y todo lo que lo compone, mientras que la Teoría de Categorías permite realizar un estudio más general de su estructura y su comportamiento con respecto a otras estructuras. De esta manera, un estudio como

el que se ha realizado en este trabajo proporciona un acercamiento a $\mathbb{N}$ desde dos perspectivas diferentes, lo cual posibilita complementar y comprender mejor los conocimientos que se tienen sobre éste. Esto justifica el hecho, de que para tener una buena base y además una visión amplia de los números naturales es importante considerar también a la Teoría de Categorías.

A continuación se harán algunas conclusiones sobre el recorrido histórico de $\mathbb{N}$. Con el fin de mostrar algunos resultados importantes que se encontraron a partir del estudio histórico-epistemológico de los números naturales.

4.2. Conclusiones Históricas

Se parte desde Dedekind debido a que se puede describir como uno de los grandes matemáticos de la historia. En su intento de fundamentar la aritmética, proporcionó avances en el álgebra y el estructuralismo, por éste último Ferreirós en [?] manifiesta que no sería raro pensar que los Bourbaki lo consideraran su ancestro. Además Dedekind aportó una visión futurista en muchas de las áreas de las matemáticas incluida la Teoría de Categorías, puesto que su definición de número natural está dada desde una visión categórica como lo expresa en su teorema de categoricidad.

En este sentido, Dedekind en su interés por recopilar toda la matemática de su tiempo publicó el libro *¿Qué son y para qué sirven los números?*, en el cual trata de dar un fundamento a la aritmética a través de la noción de conjunto. En este libro, se destaca el apartado 10 dentro del cual establece y demuestra el teorema de categoricidad mediante la definición de los números naturales como un conjunto que cumple ciertas condiciones específicas, y además se verifica que si otro conjunto cumple con las mismas condiciones, éste debe ser isomorfo a $\mathbb{N}$.

También se dice que Dedekind era uno de los pocos matemáticos que disfrutaba enseñando, tal vez esto se pueda atribuir como causa de la preocupación por la enseñanza de la aritmética en la escuela y en la universidad que manifestaba en su correspondencia con Weber. De modo que, al morir Dedekind, matemáticos de Francia e Inglaterra guardaron un solemne luto, porque eran conscientes de que se había perdido la última conexión directa con el gran Gauss, de acuerdo con [?].

Se debe mencionar además, que en [?] se plantea que es posible construir todo el sistema numérico sobre la única base de los números naturales, por lo que se puede observar la importancia de $\mathbb{N}$, él crea una teoría en la cual introduce, define y desarrolla los números naturales, el principio de inducción y sus operaciones. Más aún, Pi Calleja en [?] y Ferreirós en [?] manifiestan que Dedekind define las operaciones de

manera recurrente haciendo uso del concepto de orden definido previamente. Además, se mencionan los problemas que tuvo Landau en la definición de las operaciones de *suma* y *producto*, por lo que a partir de ello se muestra la importancia de la introducción del Principio de Recursión para definir estas operaciones.

Adicionalmente, se presentó el desarrollo de la Teoría de Conjuntos, partiendo de los primeros trabajos realizados por Cantor y Frege. Particularmente, se exponen las problemáticas que surgieron en los trabajos de Frege en relación a su principio de comprensión.

Por otra parte, fue Zermelo quien propuso la primera lista de axiomas en la Teoría de Conjuntos de Cantor. Luego su sistema axiomático de 1930 junto con los 3 axiomas que excluyó, el del infinito, las uniones y el de elección constituiría el piso axiomático fundacional para la Teoría de Conjuntos. Cabe resaltar además, que se ha presentado la definición de los números naturales, el Principio de Inducción y recursión, el orden, las operaciones y los axiomas de Peano en este sistema axiomático dado a la gran relevancia que tiene incluso hoy en día. Además, se presenta cómo la axiomática ZFC y NBG tratan de escapar a paradojas clásicas, pero que dejan por fuera algunos objetos de gran tamaño. En relación con lo anterior, se muestra que problemas similares surgieron en el grupo Bourbaki al intentar fundamentar la Teoría de Categorías desde bases conjuntistas.

En este sentido, el grupo Bourbaki en su propósito de fundamentar las matemáticas, lo hacen por medio de la noción de estructura, por lo cual trataron de estructurar todas las matemáticas que habían hasta su tiempo y dejar eso plasmado en su obra *Éléments de Mathématique* en honor a la obra de Euclides *Los Elementos*.

Para esos mismos años nació la Teoría de Categorías en 1945 con Eilenberg y Mac Lane. De modo que, el grupo Bourbaki pensó en la posible inclusión de esta teoría en sus trabajos y aunque decidieron no considerarla, se puede decir que la insistencia de Grothendieck en introducir la Teoría de Categorías en los trabajos del grupo Bourbaki, de acuerdo con Blass en [?] se debió tal vez a que como ellos estaban planteando unas matemáticas estructurales (basados en la estructura), y precisamente lo que hace la Teoría de Categorías es mirar la relación entre objetos, estudiando su estructura sin importar que lo componen, (noción de objeto isomorfo).

Es importante mencionar, además que Eilenberg, quien pertenecía al grupo Bourbaki, en conjunto con Mac Lane, decidieron incorporar conceptos categóricos en sus trabajos. De esta manera, en 1945 se introduce una definición abstracta de categoría y funtor. No obstante, una de las principales dificultades de los trabajos publicados por Mac Lane y Eilenberg se debe a la necesidad de considerar colecciones de objetos

muy grandes cuando se define una categoría. Esta fue una cuestión que se dejó abierta y fue abordada por Lawvere en la década de 1960.

En este sentido, los trabajos de Lawvere estaban orientados a desarrollar una axiomática de la categoría de todos los conjuntos, con el fin de dar un fundamento categórico a las matemáticas, particularmente se destaca la *teoría elemental de la categoría de conjuntos* (ETCS). Esta teoría estaba compuesta por 8 axiomas, entre los cuales se enfatiza en el axioma 3 que garantiza la existencia de $\mathbb{N}$ dentro de la Teoría de Categorías.

Zalamea en [?] expresa que fue Lawvere quien definió el objeto número natural, en su teoría elemental de la categoría de conjuntos, el cual es introducido en el axioma 3. Además en esta teoría también se encuentra el Principio de Inducción y de Recursión simple.

Por último, Lawvere manifiesta que la Teoría de Categorías lleva al razonamiento sintético, lo que hace que la organización de conceptos en la mente de los estudiantes sea más natural, simple, y obvio que con Teoría de Conjuntos. Además, la Teoría de Categorías, por un lado tiene un fondo conceptual, y por otro lado sus diagramas expresan los conceptos matemáticos y las relaciones entre estos conceptos. Por lo que, estudiar Teoría de Categorías permite una formación que le posibilita tener otras estrategias. Más aún, permite tener una visión amplia y fortalece la capacidad de razonar de manera sintética. Cabe aclarar que, de todos modos el objetivo de este trabajo no es decir cual es mejor, sino verlas como un complemento.

En la siguiente sección se presentarán algunas reflexiones sobre cómo puede aportar este trabajo a la educación.

4.3. Algunas Reflexiones Educativas

El siglo XX fue un periodo de la historia en el que se hicieron grandes aportes al desarrollo de las matemáticas, particularmente, fue un período en el que nacieron nuevas teorías matemáticas como posible fundamento de éstas: una de ellas es la Teoría de Categorías, la cual apareció por primera vez en 1945, a partir de los trabajos de Eilenberg y Mac Lane. No obstante, hoy en día la Teoría de Categorías no se toma como referente principal en la formación de los futuros profesores de matemáticas; sino que es la Teoría de Conjuntos la que predomina en la formación de éstos, como lo menciona Gavalas en [?], en las escuelas griegas de educación básica y media no se enseña de forma explícita y formal la Teoría de Conjuntos; sin embargo, implícitamente esta ha formado la base y los contenidos básicos de las matemáticas, incluso

desde nuestra experiencia como estudiantes, éste hecho se ha podido evidenciar en nuestra formación escolar y universitaria.

Ahora bien, de acuerdo con [?] la Teoría de Conjuntos presenta algunas dificultades, en particular, la forma fragmentada en qué es presentado su contenido en la enseñanza de las matemáticas, lleva a que los estudiantes no sean conscientes de la existencia de los principios que rigen el marco matemático bajo el cual aprenden, de manera que se puede optar por otras teorías para la formación matemática universitaria, entre las cuales la Teoría de Categorías se mantiene como una teoría complementaria.

En este sentido, es importante para el campo de la Educación Matemática empezar a discutir los aportes que ofrecen algunas de las teorías matemáticas que se han desarrollado en el siglo XX. De manera particular, vale la pena empezar a considerar la Teoría de Categorías; y estudiar algunos de los aportes que ofrece a la formación universitaria de los futuros docentes de matemáticas. Desde un primer momento, tal como se ha analizado a lo largo de este trabajo, se reconoce que la Teoría de Categorías permite apreciar muy bien las diversas clases de estructuras matemáticas y la manera en que se relacionan unas con otras. En consecuencia, surge la necesidad de abordarla, no sólo para comprender en un sentido más amplio el quehacer matemático contemporáneo sino para tratar de complementar la formación matemática de los jóvenes, a nivel de la educación media y universitaria.

Uno de los principales aportes que puede brindar la Teoría de Categorías en la enseñanza de las matemáticas es su generalización y la manera en que son presentados los conceptos, puesto que permite definir los objetos a través de propiedades universales, en otras palabras, como un objeto de una categoría en particular.

En investigaciones como las de Magnan & Reyes en [?] se destaca que la teoría de categoría tiene ventajas en la conceptualización y análisis de algunas habilidades básicas de la mente humana, como por ejemplo, el proceso de contar. Además, se afirma que la Teoría de Conjuntos puede ser desarrollada dentro de la Teoría de Categorías como un caso especial de ella, de manera que la Teoría de Categorías evita el exceso de algunos detalles que son propios de la Teoría de Conjuntos.

La Teoría de Categorías surge de la necesidad de entender algunos aspectos de las matemáticas con el fin de ponerlos en su contexto apropiado, para ello desarrolla su propio lenguaje. Es así como muchos de los conceptos elementales de la Teoría de Conjuntos pueden ser generalizados en otras áreas de las matemáticas a través de la Teoría de Categorías. Por ejemplo:

Teoría de Categorías	Teoría de Conjuntos
Objeto	Conjunto
Morfismo	Función
Monomorfismo	Función inyectiva
Epimorfismo	Función sobreyectiva
Isomorfismo	Función biyectiva
Producto	Producto cartesiano
Co-producto	Unión disjunta

Tabla 4.1. *Términos en el lenguaje de categorías y de conjuntos.*

Los diagramas en categorías representan de manera sintética los objetos, los morfismos y permiten visualizar cómo esos objetos se relacionan con otros mediante morfismos, trayendo todo ese procedimiento a la vista.

De modo que, el diagrama presentado para introducir el axioma *N.N.O* permite visualizar las propiedades más importantes de los números naturales. Tal como se mostró en el capítulo 3, de este diagrama es posible inferir directamente los principios de inducción y recursión, además demostrar los axiomas de Peano.

Por otro lado, la introducción de estos diagramas en Teoría de Categorías cambia la forma en que son demostradas las propiedades; puesto que, en Teoría de Conjuntos la mayoría de las demostraciones están justificadas por la existencia de conjuntos que cumple unas ciertas propiedades particulares, a diferencia de la Teoría de Categorías que se apoya en las relaciones que existen entre los objetos, en términos de morfismos, de esta manera es posible demostrar los principios de inducción y recursión a través de la conmutación de los diagramas.

Para ilustrar lo anterior, se puede considerar el caso del Principio de Recursión para el cual se debía demostrar la unicidad de la función h . Por un lado, para demostrar este principio en Teoría de Conjuntos fue necesario mostrar la existencia de un conjunto h con unas condiciones particulares y cuya unicidad fue justificada por ser h el conjunto más pequeño de una colección $\mathcal{H}$. Por otro lado, esta demostración en Teoría de Categorías se realizó con base en el diagrama presentado para el axioma *N.N.O*, el cual conmuta para unas condiciones particulares. Además éste diagrama permite visualizar la relación que existe entre $\mathbb{N}$ y otro objeto A con su misma estructura. Es así como los diagramas sirven como un medio para la presentación de la Teoría de Categorías.

El conjunto de los Números Naturales es un concepto fundamental en la formación matemática de los futuros docentes de este área. Dado que a partir de los números naturales se pueden construir los números enteros a través de clases de equivalencia

sobre el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de forma análoga se puede definir los números racionales a partir de $\mathbb{Z}$, y de $\mathbb{Q}$ se puede construir los reales $\mathbb{R}$, ya sea mediante cortaduras de Dedekind ($\mathbb{R}_d$) o los reales de Cantor mediante las sucesiones de Cauchy ($\mathbb{R}_c$), que son las construcciones de los reales más conocidas. A su vez, los números naturales también son importantes para introducir los números ordinales.

En lo anterior radica la importancia de considerar las dos formas de presentar a $\mathbb{N}$ abordadas en este trabajo; puesto que, la Teoría de Categorías permite complementar dicho conocimiento adquirido desde un punto de vista conjuntista. Pues bien, el acercamiento desde la Teoría de Conjuntos proporciona una visión más detallada de este conjunto numérico, en términos de propiedades de conjuntos; mientras que, una aproximación desde la Teoría de Categorías posibilita una visión más global de la estructura de los números naturales.

En consecuencia, esta visión categórica de los números naturales se puede considerar un aporte para el conocimiento matemático de los docentes en formación, dado que la visión desde la Teoría de Categorías es una nueva forma de entender los números naturales, dado que sintetiza sus propiedades más relevantes, mediante el uso de diagramas. Es importante mencionar que para entender la definición de los números naturales en la Teoría de Categorías se deben tener algunos conocimientos bases sobre Teoría de Conjuntos, por lo cual se considera la Teoría de Categorías como un complemento a la visión conjuntista.

En síntesis, se realizó un análisis con el propósito de identificar los aportes que ofrece la presentación de $\mathbb{N}$ desde cada teoría, en la comprensión de las propiedades esenciales de los números naturales. Particularmente, se reconocieron aquellas características de los naturales que se deducen de manera más explícita desde la Teoría de Categorías, en el que se reconoce a $\mathbb{N}$ como un objeto número natural, pero que además cualquier objeto isomorfo a $\mathbb{N}$ es un *N.N.O* y no necesariamente tiene que ser el conjunto de los números naturales que se conoce en conjuntos. Esto permitió hacer una primera consideración sobre la importancia que tiene para la formación matemática de los futuros docentes de matemáticas, la incorporación de la Teoría de Categorías en el pensum universitario.

Por último, cabe resaltar que elaborar este tipo de investigación respecto a los aportes que se pueden obtener al considerar teorías matemáticas diferentes a la Teoría de Conjuntos, como es el caso de la Teoría de Categorías, motiva a que se publiquen nuevas investigaciones sobre este aspecto, con el propósito de que la enseñanza de las matemáticas responda a los avances en el campo científico de las matemáticas que se han desarrollado en el siglo XX, en concordancia con [?].

4.4. Consideraciones Finales

Esta sección tiene como fin exponer algunos aspectos que están por fuera de los alcances de este trabajo, pero que sería interesante abordar en futuras investigaciones. Además se retoman otras investigaciones, que muestran resultados relevantes dentro de la Teoría de Categorías.

- Se propone de manera análoga a la investigación hecha por Gavalas en [?], considerar la posibilidad de diseñar y aplicar una serie de actividades a dos grupos con las mismas características. De modo que ambos grupos de estudiantes tengan unas bases en Teoría de Conjuntos, en el cual a un grupo se profundice en la definición de $\mathbb{N}$ dentro de la Teoría de Conjuntos, y al otro grupo se le enseñen los conceptos básicos de la Teoría de Categorías para la posterior definición de los Números Naturales. Y para finalizar se realice una misma prueba para ambos grupos que recoja los conceptos abordados en las actividades para el análisis de los resultados obtenidos, lo cual permita complementar algunas ideas expuestas en este trabajo.
- También dentro de la Teoría de Categorías se pueden realizar estudios en física, particularmente, en la teoría cuántica de campos. En concordancia con [?], Zalamea menciona que: “el uso heurístico de los diagramas en física teórica ha sido muy exitoso, abriendo una importante compuerta a la visualidad en el conocimiento teórico”.
- En la Teoría de Categorías se puede estudiar cosas más generales, como es el caso de la teoría de topos, en donde se puede demostrar el hecho de que los reales de Cantor son más pequeños que los reales de Dedekind, lo cual implica que se contradiga la hipótesis del continuo dentro de esta teoría. Este tipo de investigaciones son abordadas en los trabajos de [?] y [?].
- En concordancia con [?] se puede estudiar en Teoría de Categorías la construcción de los números reales como un objeto final, de manera dual a la definición de $\mathbb{N}$ como objeto inicial de un cierto tipo de categorías.

Bibliografía

- [1] ANACONA, M., ARBOLEDA, L.C & PÉREZ-FERNÁNDEZ, F-J., (2014). On Bourbaki's axiomatic system for set theory. *Shyntese: An International journal for epistemology, methodology and philosophy of science*, 191(17), 4069-4098.
- [2] ANACONA, M, (2016). Los axiomas de Zermelo-Fraenkel, base del estructuralismo conjuntista. En: G. Ortiz (Ed), *Los estructuralismos matemáticos en el siglo XX* (en prensa). Cali: Programa editorial, Universidad del Valle.
- [3] BEDOYA, L., (2003). Peano, Lawvere, Peirce: Tres Axiomatizaciones de los Números Naturales (tesis de pregrado). Universidad del Tolima, Colombia.
- [4] BLASS, A., (1984). The interaction between categoric theory and set theory. *Contemporary Mathematics*. (Vol. 30), 1-29.
- [5] BOURBAKI, N., (1949). Foundations of the mathematics for the working mathematician. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(1), 1-8.
- [6] CANTOR, G., (2005). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos: Escritos y correspondencia selecta* (J. Ferreiros & E. Gomez-Caminero, Trad. 2005), Barcelona: Crítica.
- [7] CARTAN, H. & EILENBERG, S., (1956). *Homological Algebra*, USA: Princeton University Press.
- [8] CASTIBLANCO, A. & QUINTERO, J., (2014). La Coinducción Matemática en la Construcción de los Números Reales (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Colombia.
- [9] CORRY, L., (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Berlín: Springer Basel AG.
- [10] DEDEKIND, R., (1888) *¿Qué son y para qué sirven los números?* (J. Ferreiros, Trad. 1998), Madrid: Alianza Editores.
- [11] DUBUC, E., (2014). Categorías. Los 30 primeros años. *La Gaceta*, 17(2), 335-347.

- [12] EILENBERG, S. & MAC LANE, S., (1945). General theory of natural equivalences *Transaction of the American Mathematical Society* 58(2), 231-294.
- [13] EILENBERG, S. & STEENROD, N., (1952). *Foundations of Algebraic Topology*, Nueva Yersey: Princeton University.
- [14] FEFERMAN, S., (2013). Foundations of limited category theory: What remains to be done? *The Review of Symbolic Logic*, 6(1), 6-15.
- [15] GAVALAS, D., (2005). Conceptual mathematics: An application to education. *International Journal Of Mathematical Education In Science & Technology*, 36(5), 497-516.
- [16] GRAY, J. & PARSHALL K., (2007). From Kummer to Zolotarev. *Episodes in the History of Modern Algebra (1800-1950)*, (32), 84.
- [17] GOLDBLATT, R., (1984). *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, Holanda: Elsevier Science Publishers B.V.
- [18] HRBACEK, K. & JECH, T., (1999). *Introduction to set theory*, USA: Taylor & Francis Group.
- [19] KRÖMER, R., (2007). *Tool and Object. A History Philosophy of Category Theory*, Basilea: Birkhäuser Verlag AG.
- [20] KUSALIK, T., (2008). The Continuum Hypothesis in Algebraic Set Theory (tesis de maestría). McGill University, Canadá.
- [21] LANDAU, E., (1929). *Foundations of Analysis* (F. Steinhardt, trad. 1966), USA: Chelsea Publishing Company.
- [22] LAWVERE, F., (1966). The category of categories as a foundation for mathematics. En *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, 1-20. Berlín: Springer.
- [23] LAWVERE, F. & SCHANUEL S., (1991). *Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías* (F. Marmolejo, trad. 2002), México: Siglo XXI Editores.
- [24] LAWVERE, F., (2005). An Elemental Theory of Category of Sets (Long Version) With Commentary. *Reprints in Theory and Applications of Categories*, (11), 1-35.
- [25] MAC LANE, S., (1950). Dualities for groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56(1), 485-516.

- [26] MAGNAN, F. & REYES, G., (1994). Category theory as a conceptual tool in the studies of cognition, In: J. Macnamara and G.E. Reyes (Eds), *The Logical Foundations of Cognition*. Oxford: Oxford University Press, 57-90.
- [27] MALATESTA, L., (2011). Some proposals for the set theoretic foundations of category theory. *Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior*, 2(2), 41-58.
- [28] MARQUIS, J.-P., (2009). *From a geometrical point of view. A study of the history and philosophy of category theory*, Oxford: Springer.
- [29] ODIFREDDI, P., (2000). *La matemática del siglo XX. De los conjuntos a las complejidad* (C. Idiarte, Trad. 2006), Buenos Aires: Katz.
- [30] ORTÍZ, G. & VALENCIA, S., (2010). La categoricidad de los reales en Hilbert. *Revista Brasileira de História da Matemática* 10(19), 39-65.
- [31] ORTÍZ, G., (2016). Borrador de una Propuesta para un curso de Teoría de Conjuntos y Sistemas Numéricos. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- [32] PÉREZ, J., (1984). El programa de investigación de William Lawvere. *Matemática: Enseñanza Universitaria*, (30), 3-10.
- [33] PI CALLEJA, P., (1949). La objeción de Grandjot a la teoría de Peano del número natural. *Mathematicae Notae*, (9), 143-151.
- [34] ZALAMEA, F., (1995). Recursión en Categorías. *Revista Colombiana de Matemáticas*, (29), 127-144.
- [35] ZALAMEA, F., (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.
- [36] ZALAMEA, F., (2011). Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. III. La matemática de las estructuras 1940-1970. *Boletín de Matemáticas*, 18(2), 143-156.