

Espacios de sucesiones de Orlicz ℓ_H y representabilidad finita

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Resumen

Como complemento a la solución del problema de caracterización del ideal maximal normado de operadores asociado a una norma tensorial definida mediante un espacio de sucesiones de Orlicz ℓ_H , resultado obtenido en [13], este artículo presenta ejemplos de espacios finitamente representables en $\ell_1\{\ell_H\}$ y algunos resultados nuevos sobre la estructura y representación de ultrapotencias de espacios de Orlicz y Lebesgue-Bochner. Igualmente, recopila alguna información existente al respecto.

1. Introducción

La teoría local en espacios de Banach es el estudio de algunas propiedades de espacios de Banach mediante subespacios de dimensión finita. En el corazón de la teoría local están dos instrumentos esenciales, la construcción de ultraproductos de espacios de Banach y la representabilidad finita.

La formulación de representabilidad finita fue el resultado de una serie de hechos cuyos hitos fundamentales son las ideas de Grothendieck en sus trabajos de la década de los cincuenta, y la definición final fue dada por R. C. James en [18]. Tomando como referencia la definición de retículo de Banach de [12], la siguiente es la definición de representabilidad finita para el caso de espacios de Banach como en [18] y la correspondiente versión para retículos de Banach como en [7]. Un espacio (retículo) de Banach Y es (*reticularmente*) *finitamente representable* en un espacio (retículo) de Banach X , si todos los subespacios (subretículos) de dimensión finita de Y tienen una copia cuasi-isométrica en X , en el siguiente sentido: para todo $\varepsilon > 0$ y para todo subespacio (subretículo) de dimensión finita Y_0 de Y , existe un subespacio (subretículo) X_0 de X y un isomorfismo (de retículo) T_0 de Y_0 sobre X_0 tal que $\|T_0\|\|T_0^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$.

A raíz de algunos resultados obtenidos en la década de los sesenta se formuló la pregunta ¿Si X contiene a ℓ_p , $1 < p < \infty$, X tendrá copias cuasi-isométricas de ℓ_p ? En la década de los setenta Lindenstrauss y Tzafriri contestaron afirmativamente en el caso en que X sea un espacio de Orlicz, pero hoy sabemos que existen espacios de Banach que dan lugar a una respuesta negativa. Por tanto, es de gran importancia el estudio de los subespacios de un espacio

¹Este trabajo es parte del proyecto COLCIENCIAS-EAFIT código: 1216-05-11456

de Banach, pero no es fácil tratándose de subespacios de dimensión infinita, por lo que es pertinente la indagación sobre la determinación de la estructura de un espacio por sus subespacios de dimensión finita. Dicha estructura puede ser estudiada en muchos casos gracias a la gran relación entre ultraproductos y representabilidad finita, como lo muestra uno de los resultados que es una extensión a retículos de un teorema de Dacunha Castelle - Krivine (probado en [7]), el cual expresa que un retículo de Banach Y es reticularmente finitamente representable en un retículo de Banach X si y sólo si X es isométrico a un subretículo de alguna ultrapotencia de Y .

De otro lado, la teoría local de espacios de Banach es fundamental en varios resultados relacionados con normas tensoriales e ideales de operadores, relación que se manifiesta desde el nacimiento mismo de la teoría con los famosos trabajos de Grothendieck, [14] y [15], que no sólo muestran las enormes posibilidades de la teoría de los productos tensoriales topológicos sino que además, por su modo de enfocar muchos aspectos, permiten considerar a Grothendieck como precursor de la teoría local, ya que Grothendieck fue el primero en darse cuenta de la importancia del comportamiento finito-dimensional de las normas tensoriales definidas por él, todas ellas finitamente generadas. La importancia del uso de la teoría local en resultados recientes se pone de manifiesto en [13], en el cual se caracteriza el ideal maximal normado de operadores asociado a una norma tensorial definida mediante un espacio de sucesiones de Orlicz ℓ_H , siendo H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero. En dicho trabajo se han usado ultraproductos y representabilidad finita, así como la propiedad de representabilidad finita reticular de una ultrapotencia de un retículo de Banach X , $(X)_{\mathcal{U}}$, en X , precisamente en el caso $X = \ell_1\{\ell_H\}$.

Por tanto, es pertinente conocer ejemplos de espacios reticularmente finitamente representables en $X = \ell_1\{\ell_H\}$, lo cual es el objetivo principal del presente artículo. Previamente veremos la estructura y representación de ultraproductos de espacios de Orlicz y de Lebesgue-Bochner.

1.1. Conceptos básicos y notación

Damos a continuación algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios de Orlicz de acuerdo a [11] y [19].

Una *función de Orlicz* H es una función definida para $x \geq 0$, continua, convexa, no decreciente, con $H(0) = 0$ y $H(x) > 0$ para $x > 0$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$. Dada una función de Orlicz H , denotamos por ℓ_H al *espacio de sucesiones de Orlicz*, es decir, al espacio de sucesiones reales (α_i) tales que existe $\rho > 0$ para el cual $\sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{|\alpha_i|}{\rho}) < \infty$, dotado de la norma $\Pi_H((\alpha_i)) := \inf\{\rho > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{|\alpha_i|}{\rho}) \leq 1\}$.

Es de anotar que si $1 < p < \infty$ y particularmente $H(x) = x^p$ para cada $x > 0$, entonces ℓ_H coincide (isométricamente) con el espacio de sucesiones ℓ_p .

Se dice que una función de Orlicz H satisface la *condición Δ_2 en 0* si $\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{H(2x)}{H(x)} < +\infty$. En tal caso la clausura en ℓ_H del espacio generado por los vectores unitarios e_i coincide con ℓ_H . Por ℓ_H^n denotamos al subespacio

de ℓ_H de las sucesiones que tienen a lo sumo n términos no nulos.

Dada una función de Orlicz H , existe otra función de Orlicz H^* , definida para cada $y \geq 0$ por $H^*(y) = \sup\{xy - H(x) : x \geq 0\}$, denominada *función complementaria* de H . A partir de esta función de Orlicz, se puede dotar a ℓ_H de otra norma $\|\cdot\|_H$, usualmente llamada norma de Orlicz, que se define para cada (α_i) en ℓ_H por $\|(\alpha_i)\|_H = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(|\beta_i|) \leq 1\}$.

Si Γ es un conjunto, denotamos por $\ell_H(\Gamma)$ al espacio de los elementos $a = (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $a_\gamma \in \mathbb{R} \forall \gamma \in \Gamma$, tales que existe una sucesión $S = \{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ en Γ con $a_\gamma = 0$ si $\gamma \notin S$ y en él definimos $\Pi_H((a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) := \Pi_H((a_{\gamma_n}))$.

El funcional $\Pi_H((a_{\gamma_n}))$ define una norma en $\ell_H(\Gamma)$ y su dual es isomorfo a $\ell_{H^*}(\Gamma)$. Para que exista una isometría es necesario tomar en el espacio dual la norma de Orlicz $\|(\cdot)\|_{H^*}$.

Si el conjunto Γ es finito con cardinal n , el espacio $\ell_H(\Gamma)$ es de dimensión n . Lo denotaremos ℓ_H^n en lugar de $\ell_H(\Gamma)$.

También en el caso de los espacios de Orlicz, podemos considerar espacios de sucesiones vectoriales. Si $\{X_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de espacios de Banach, denotamos $\ell_H\{((X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})\}$ el espacio de Bochner de elementos $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $x_\gamma \in X_\gamma$, $\forall \gamma \in \Gamma$, tal que $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in \ell_H(\Gamma)$, con la norma $\Pi_H((\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma})$.

Si $X_\gamma = X \forall \gamma \in \Gamma$, escribimos $\ell_H\{\Gamma, X\}$ en lugar de $\ell_H\{((X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})\}$. Si $\Gamma = \mathbb{N}$, escribimos $\ell_H\{(X_i)\}$ y $\ell_H\{X\}$ en vez de $\ell_H\{(X_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ y $\ell_H\{\mathbb{N}, X\}$, respectivamente.

De igual manera que los espacios de funciones $L_p(\mu)$ son una extensión de los espacios de sucesiones ℓ_p , los espacios $L_H(\mu)$ son la extensión natural de los ℓ_H . Sea H una función de Orlicz y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se denota por $L_H(\mu, \Omega, \Sigma)$ o de forma abreviada $L_H(\mu)$, si no hay lugar a confusión, al conjunto de funciones medibles $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tales que existe $\rho > 0$ tal que $\int_\Omega H(\frac{|f|}{\rho}) d\mu < \infty$. En $L_H(\Omega, \Sigma, \mu)$ se define la norma $N_H(f) := \inf\{\rho : \int_\Omega H(\frac{|f|}{\rho}) d\mu \leq 1\}$.

Denotamos por $M_H(\mu)$ a la clausura de la envoltura lineal del espacio generado por las funciones simples con soporte de medida finita.

De otro lado, la definición de ultraproductos de espacios de Banach es de Dacunha-Castelle y J.L. Krivine [2]. A continuación damos algunos conceptos básicos y notación. Para tener una referencia más completa acerca de este tema remitimos a [8] y [2].

Sea D un conjunto. Un *filtro* $\mathcal{F}$ en D es una familia no vacía de subconjuntos de D tal que $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $(A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F})$ y $(A \in \mathcal{F} \text{ y } A \subset B \implies B \in \mathcal{F})$. Sobre la clase de los filtros definidos sobre un conjunto D establecemos una relación de orden de la siguiente forma. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos filtros en D . Se dice que $\mathcal{F}_1$ *domina* a $\mathcal{F}_2$, o que $\mathcal{F}_2$ es dominado por $\mathcal{F}_1$, si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Sea D un conjunto. A un filtro maximal $\mathcal{U}$, según la relación de orden establecida en la clase de filtros definidos sobre D , se le llama un *ultrafiltro*. Se dice que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de un conjunto D es *trivial* si existe $d_0 \in D$ tal que $A \in \mathcal{U} \iff d_0 \in A$. Como consecuencia del lema de Zorn, cada filtro en D es dominado por algún ultrafiltro sobre D .

Sea $\{A_d, d \in D\}$ una familia arbitraria de conjuntos, y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de subconjuntos del conjunto de índices D . En el producto cartesiano $\prod_{d \in D} A_d$, definimos la siguiente relación $\mathcal{R}$ de equivalencia

$$(x_d)_{d \in D} \mathcal{R} (y_d)_{d \in D} \Leftrightarrow \{d \in D : x_d = y_d\} \in \mathcal{U}.$$

Al correspondiente conjunto cociente $\prod_{d \in D} A_d / \mathcal{R}$ se le denomina *ultraproducto* de la familia de conjuntos $\{A_d : d \in D\}$ respecto del ultrafiltro $\mathcal{U}$, y suele denotarse $(\prod_{d \in D} A_d)_{\mathcal{U}}$, o simplemente $(A_d)_{\mathcal{U}}$. Cuando todos los A_d son iguales a un conjunto A , entonces su ultraproducto $(A_d)_{\mathcal{U}}$ se denomina la *ultrapotencia* de A con respecto a $\mathcal{U}$. Si $A_d \subset B_d$ para cada $d \in D$ entonces, $(A_d)_{\mathcal{U}} \leq (B_d)_{\mathcal{U}}$.

Sea X un espacio topológico y $(x_d)_{d \in D}$ una familia de elementos de X . Diremos que (x_d) converge a $x \in X$ según $\mathcal{U}$ y escribimos $\lim_{\mathcal{U}} x_d = x$ si para toda vecindad N de x , el conjunto $\{d \in D : x_d \in N\} \in \mathcal{U}$. Particularmente si X es un espacio de Hausdorff y si el límite según $\mathcal{U}$ de una familia (x_d) existe, este límite es único.

Es fácil ver que si X es de Hausdorff y compacto, entonces para toda familia $(x_d)_{d \in D} \subset X$ existe un único elemento $x \in X$ tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_d = x$. También, si X es un espacio de Banach y $f : D \rightarrow X$ es acotada, entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_d = x$ existe.

Si $\{B_d : d \in D\}$ es una familia de espacios de Banach, el ultraproducto de conjuntos no es en general un espacio de Banach. Para preservar la estructura de espacio de Banach bajo ultraproducto, debemos acudir a la modificación hecha por Dacunha-Castelle y Krivine [2], llegando al concepto de ultraproducto de espacios de Banach.

Sea $(B_d)_{d \in D}$ una familia de espacios de Banach y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de subconjuntos de D . En el espacio de Banach $\ell_{\infty}(B_d, D)$, el cual consiste de todas las familias $(x_d)_{d \in D}$ tales que $\|(x_d)\| := \sup_{d \in D} \|x_d\| < \infty$, consideremos la siguiente relación $\mathcal{R}_B$ de equivalencia $(x_d)_{d \in D} \mathcal{R}_B (y_d)_{d \in D} \Leftrightarrow \lim_{\mathcal{U}} \|x_d - y_d\|_{B_d} = 0$. Llamamos *ultraproducto de la familia de espacios de Banach* $(B_d)_{d \in D}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$, al espacio cociente $\ell_{\infty}(B_d, D) / \mathcal{R}_B$, dotado con la topología de la norma canónica en el cociente.

Para simplificar la notación, a este espacio que resulta ser de Banach, se le denota también por $(B_d)_{\mathcal{U}}$, o por $(B)_{\mathcal{U}}$ si $B_d = B$ para todo $d \in D$; a sus elementos (las clases) los denotamos por $(x_d)_{\mathcal{U}}$; y además la norma de cada elemento se puede calcular mediante la fórmula $\|(x_d)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_d\|_{B_d}$.

2. Representación de ultraproductos de espacios de Orlicz y de Lebesgue-Bochner.

Wnuk [21] a mediados de los años ochenta presentó resultados sobre la estructura y representación de ultraproductos de espacios de Orlicz. Respecto a la estructura y representación de los espacios de Lebesgue-Bochner se dispone de buena información, gracias al trabajo de Haydon, Levy y Raynaud en su monografía “Randomly normed spaces”, [7], de comienzo de los noventa, y a otros trabajos que citamos en su momento.

2.1. Representación de ultraproductos de espacios de Orlicz.

El problema de la estructura de los ultraproductos de los espacios de Orlicz fue estudiado por vez primera por D. Dacunha-Castelle y J. L. Krivine [2], y entre los resultados obtenidos por ellos destacamos el siguiente.

Teorema 1. *Sean $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de conjuntos y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I . Sea H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero. Entonces, $\ell_H\{(\Gamma_i)_{\mathcal{U}}\}$ es reticularmente isométrico a un subretículo complementado (en el sentido de [12]) de $(\ell_H(\Gamma_i))_{\mathcal{U}}$ con proyección positiva P de norma menor o igual que 1.*

Posteriormente mediante la introducción de los retículos de Orlicz fue posible dar una representación de estos ultraproductos. De esto nos ocupamos en este apartado.

Como generalización de los espacios de Orlicz, Drewnowski y Orlicz en [5] introdujeron los espacios de Musielak-Orlicz, que permiten dar una representación de los retículos de Orlicz definidos en términos de ciertos modulares. Dicha representación es la que utilizó Wnuk para describir los ultraproductos de espacios de Orlicz.

Definición 2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medida. Una función de Musielak - Orlicz en (Ω, Σ, μ) es una función $\Phi : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow [0, \infty[$ tal que*

1. $\Phi(t, \cdot)$ es medible para cada t ,
2. $\Phi(\cdot, \omega)$ es una función de Orlicz para cada ω .

Dada una función de Musielak-Orlicz Φ , se define el funcional $F_\Phi : L_0(\mu) \rightarrow [0, \infty]$ tal que $F_\Phi(f) := \int_\Omega \Phi(|f(\omega)|, \omega) d\mu$.

Definición 3. *Dada una función de Musielak-Orlicz Φ , el espacio de Musielak-Orlicz $L_\Phi(\mu)$ asociado a Φ es $L_\Phi(\mu) = \{f \in L_0(\mu) \mid \exists \rho > 0 : F_\Phi(f/\rho) < \infty\}$ dotado con la topología de la norma*

$$\|f\|_\Phi = \inf\{\rho > 0 : F_\Phi(f/\rho) \leq 1\}$$

Definición 4. *Para cada función de Musielak-Orlicz Φ , el espacio de Musielak-Orlicz $M_\Phi(\mu)$ asociado a Φ es el subespacio topológico cerrado de $L_\Phi(\mu)$ tal que $M_\Phi(\mu) := \{f \in L_0(\mu) : F_\Phi(\rho f) < \infty, \forall \rho > 0\}$*

El espacio $M_\Phi(\mu)$ coincide con la clausura en $L_\Phi(\mu)$ del espacio de las funciones simples con soporte de medida finita, y es orden continuo, mientras que $L_\Phi(\mu)$ es acotadamente completo. Además $M_\Phi(\mu)$ coincide con $L_\Phi(\mu)$ si y sólo si $L_\Phi(\mu)$ es orden continuo, si y sólo si $M_\Phi(\mu)$ es acotadamente completo. Para más información ver [9] y [10].

Una versión más abstracta de los espacios de Musielak-Orlicz, la de retículo de Orlicz, fue introducida por Orlicz y Drewnowski y estudiada por Zaanen [22], Wnuk [21] y Musielak [16]. La siguiente definición es necesaria para establecer el concepto de retículo de Orlicz.

Definición 5. *Un modular convexo y disjuntamente aditivo en un retículo vectorial E es una aplicación $\sigma : E \rightarrow [0, \infty[$ tal que para todo $x, y \in E$ y $0 \leq \alpha \leq 1$,*

1. $\sigma(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$
2. Si $|x| \leq |y|$, $\sigma(x) \leq \sigma(y)$
3. $\sigma(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\sigma(x) + (1 - \alpha)\sigma(y)$
4. Si $|x| \wedge |y| = 0$, entonces $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$.

La definición de retículo de Orlicz dada por Orlicz y Drewnowski [5] es la siguiente:

Definición 6. *Un retículo de Banach E es un retículo de Orlicz si existe un modular convexo y disjuntamente aditivo σ tal que para todo $x \in E$, $\|x\| = \inf\{\rho > 0 : \sigma(x/\rho) \leq 1\}$.*

La relación entre los retículos de Orlicz y los espacios de Musielak-Orlicz se manifiesta mediante el siguiente teorema de representación, ver [7] teorema 3.17, que es una extensión del teorema de representación de los espacios abstractos L^p como espacios de funciones $L_p(\mu)$.

Teorema 7. *Sea (E, σ) un retículo de Orlicz. Entonces existen un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y una función de Musielak-Orlicz Φ_σ tales que E es isométricamente isomorfo a $M_{\Phi_\sigma}(\mu)$.*

Además por construcción esta isometría es positiva. Para nosotros el interés de este teorema de representación es que mediante él se puede dar una descripción de los ultraproductos de espacios de Orlicz (en nuestro caso de espacios de Orlicz de sucesiones), en términos de espacios de Musielak-Orlicz. Vamos a hacer una breve descripción del procedimiento mediante el que se llega a esta descripción

Sea $E := (\ell_{H^d})_{\mathcal{D}}$ un ultraproducto de la familia de espacios de sucesiones de Orlicz orden continuos $\{\ell_{H^d}, d \in D\}$.

Para cada $d \in D$, sea el funcional $F_{H^d} : \ell_{H^d} \rightarrow [0, \infty[$ tal que para todo $x \in \ell_{H^d}$, $x = (x_i)$, $F_{H^d}(x) := \sum_{i=1}^{\infty} H^d(|x_i|) < \infty$.

Se define el funcional $F_{(H^d)_{\mathcal{D}}} : E \rightarrow [0, \infty[$ tal que para todo $x \in E$, $x = (x^d)_{\mathcal{D}}$,

$$F_{(H^d)_{\mathcal{D}}}(x) := \lim_{\mathcal{D}} F_{H^d}(x^d)$$

Observación 8. *Por [21] $F_{(H^d)_{\mathcal{D}}}$ es un modular convexo y disjuntamente aditivo en E . Luego por el teorema de representación, ver teorema 7, E es reticularmente isométrico a un cierto espacio de Musielak-Orlicz $M_{\Psi}(\nu)$.*

De idéntica forma sucede con un ultraproducto de una familia de espacios orden continuos de Orlicz de funciones $\{M_{H^d}(\mu) : d \in D\}$. Es decir, para cada $d \in D$ consideremos el funcional $F_{H^d} : M_{H^d} \rightarrow [0, \infty[$ tal que, para todo $f \in M_{H^d}(\mu)$, $F_{H^d}(f) := \int_{\Omega} H^d(|f|) d\mu < \infty$.

Si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro en D , se define el funcional $F_{(H^d)_{\mathcal{D}}} : (M_{H^d})_{\mathcal{D}} \rightarrow [0, \infty[$ tal que si $f \in (M_{H^d})_{\mathcal{D}}$, $f = (f^d)_{\mathcal{D}}$, $F_{(H^d)_{\mathcal{D}}}(f) := \lim_{\mathcal{D}} F_{H^d}(f^d)$.

Como antes, $F_{(H^d)_{\mathcal{D}}}$ es un modular convexo y disjuntamente aditivo en $(M_{H^d})_{\mathcal{D}}$ y por el teorema 7, $(M_{H^d})_{\mathcal{D}}$ es reticularmente isométrico a un algún espacio de Musielak-Orlicz $M_{\Psi}(\nu)$.

2.2. Estructura de ultraproductos de espacios de Lebesgue-Bochner.

Nos interesamos ahora por la estructura de ultraproductos de espacios de Bochner $\ell_1\{X\}$ y en este sentido tenemos los resultados siguientes.

Lema 9. *Sea $\{X^d, d \in D\}$ una familia de espacios (retículos) de Banach y sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro en el conjunto de índices D . Sea $\Phi : \ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\} \rightarrow \ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\}$ tal que si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\}$ con $x_n = (x_n^d)_{\mathcal{D}}$, entonces*

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ((0, 0, \dots, x_n^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}}.$$

La aplicación Φ está bien definida, es lineal, continua, inyectiva (y positiva) con $\|\Phi\| \leq 1$.

Demostración. Claramente $((0, 0, \dots, x_n^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}} \in (\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}$ para $n \in \mathbb{N}$, con

$$\begin{aligned} \|((0, 0, \dots, x_n^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}}\|_{(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}} &= \lim_{\mathcal{D}} \|(0, 0, \dots, x_n^d, 0, \dots)\|_{\ell_1\{X^d\}} \\ &= \lim_{\mathcal{D}} \|x_n^d\| = \|x_n\|_{(X^d)_{\mathcal{D}}} \end{aligned}$$

Además para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n ((0, 0, \dots, x_i^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}} \right\|_{(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}} &\leq \sum_{i=1}^n \|((0, 0, \dots, x_i^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}}\|_{(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}} \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{(X^d)_{\mathcal{D}}} \leq \|x\|_{\ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\}} \end{aligned}$$

De tal forma que $\sum_{n=1}^{\infty} ((0, 0, \dots, x_n^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}} \in (\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}$, y consecuentemente Φ es lineal y continua con $\|\Phi\| \leq 1$.

Por definición, si todos los X^d son retículos, Φ es positiva. Además si $x \neq 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \neq 0$, por lo que $((0, 0, \dots, x_{n_0}^d, 0, \dots))_{\mathcal{D}} \neq 0$ y así $\Phi(x) \neq 0$. En consecuencia Φ es inyectiva. $\square$

Lema 10. *Sea $\{X^d, d \in D\}$ una familia de espacios (retículos) de Banach y sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro en el conjunto de índices D . Consideremos $\Psi : (\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}} \rightarrow \ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\}$ tal que si $y = (y^d)_{\mathcal{D}} \in (\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}$, con $y^d = (y_n^d)_{n=1}^{\infty}$, se verifica que $\Psi(y) = ((y_n^d)_{\mathcal{D}})_{n=1}^{\infty}$. Entonces Ψ está bien definida, es lineal, continua, sobreyectiva (y positiva) con $\|\Psi\| \leq 1$.*

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^k \lim_{\mathcal{D}} \|y_n^d\|_{X^d} = \lim_{\mathcal{D}} \sum_{n=1}^k \|y_n^d\|_{X^d} \leq \|y\|_{(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}}$$

Por tanto $((y_n^d)_{\mathcal{D}})_{n=1}^{\infty} \in \ell_1((X^d)_{\mathcal{D}})$, con $\|((y_n^d)_{\mathcal{D}})_{n=1}^{\infty}\| \leq \|y\|_{(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}}$, de manera que Ψ es lineal y continua con $\|\Psi\| \leq 1$.

Por definición está claro que, si todos los X^d son retículos, Ψ es positiva. Además dado $x = (x_n) \in \ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\}$, si $y = \Phi(x) \in (\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}$, se verifica que $\Psi(y) = x$, y en consecuencia Ψ es sobreyectiva. $\square$

En los dos resultados siguientes, que se obtienen de 9 y 10, se muestra la siguiente propiedad de los ultraproductos de espacios de Bochner $\ell_1(X)$.

Corolario 11. *El espacio (retículo) $\ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\}$ es isomorfo (isomorfo como retículo) a un subespacio (subretículo) complementado del espacio (retículo) $(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}}$ mediante una isometría (positiva).*

Por tanto $(\ell_1\{X^d\})_{\mathcal{D}} = \ell_1\{(X^d)_{\mathcal{D}}\} \oplus \ker(\Psi)$. En el caso en que para todo $d \in D$, $X^d = \ell_H(\Gamma^d)$ para alguna función de Orlicz H con la propiedad Δ_2 en cero, y algún conjunto Γ^d , hemos visto que existe un conjunto Γ ($\Gamma = (\Gamma^d)_{\mathcal{U}}$) tal que $\ell_H(\Gamma)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $(\ell_H(\Gamma^d))_{\mathcal{D}}$ mediante una isometría positiva, y la correspondiente proyección $P : (\ell_H(\Gamma^d))_{\mathcal{D}} \rightarrow \ell_H(\Gamma)$ es positiva con norma menor o igual que uno, ver [8]. Sea Φ la función de Musielak-Orlicz tal que $M_F(\mu) = (\ell_H(\Gamma^d))_{\mathcal{D}}$, para algún espacio de medida (Ω, Σ, μ) . Entonces se verifica

Corolario 12.

$$(\ell_H(\Gamma^d))_{\mathcal{D}} = M_F(\mu) = \ell_H(\Gamma) \oplus \ker(P)$$

$$(\ell_1\{\ell_H(\Gamma^d)\})_{\mathcal{D}} = \ell_1\{M_F(\mu)\} \oplus \ker(\Psi) = \ell_1\{\ell_H(\Gamma)\} \oplus \ell_1\{\ker(P)\} \oplus \ker(\Psi)$$

Respecto a la estructura de los ultraproductos de espacios (retículos) de Lebesgue-Bochner, $(L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 13. *Sean $\{X^d, d \in D\}$ una familia de espacios (retículos) de Banach, $\{L_1(\mu^d), d \in D\}$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no trivial en el conjunto de índices D . Denotemos $X := (X^d)_{\mathcal{U}}$ y $L_1(\mu) := (L_1(\mu^d))_{\mathcal{U}}$. Entonces $L_1(\mu, X)$ es isométricamente isomorfo a un subespacio (subretículo) complementado de $(L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Sea S el subespacio de funciones simples de $L_1(\mu, X)$ y definamos la aplicación $\Phi : S \rightarrow (L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$ tal que si $f \in S$ con $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i$ donde los conjuntos A_i , $i = 1, \dots, n$ son disjuntos dos a dos, $\chi_{A_i} = (f_i)_{\mathcal{U}}$ y $x_i = (x_i^d)_{\mathcal{U}}$, entonces $\Phi(f) = (\sum_{i=1}^n f_i^d x_i^d)_{\mathcal{U}}$.

Como $\chi_{A_i} \geq 0$, entonces $(f_i^d)_{\mathcal{U}} \geq 0$, o bien, $f_i^d \geq 0$ para todo $d \in D$. Ahora como los A_i , para $i = 1, \dots, n$, son disjuntos dos a dos, $\chi_{A_i} \wedge \chi_{A_j} = 0$ para $i \neq j$ y así $(f_i^d)_{\mathcal{U}} \wedge (f_j^d)_{\mathcal{U}} = 0$ para $i \neq j$.

Por [8], se puede considerar que para todo $d \in D$, $\{f_i^d, i = 1, \dots, n\}$ son disjuntos dos a dos y por tanto

$$\|f\| = \sum_{i=1}^n \|\chi_{a_i}\| \|x_i\| = \sum_{i=1}^n \lim_{\mathcal{U}} \|f_i^d\| \|x_i^d\| = \lim_{\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^n f_i^d x_i^d \right\| = \|\Phi(f)\|$$

Así que Φ es una isometría y como S es denso en $L_1(\mu, X)$, la extensión de S a $L_1(\mu, X)$ es una isometría. En consecuencia, $L_1(\mu, X)$ es isométrico a un subespacio de $(L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$.

Definamos ahora la aplicación $\Psi : (L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}} \rightarrow L_1(\mu, X)$ tal que

$$\Psi\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^d x_i^d\right)_{\mathcal{U}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{f_i^d}{\|f_i^d\|}\right)_{\mathcal{U}} (\|f_i^d\| x_i^d)_{\mathcal{U}}.$$

Si $\lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\| < \infty$, entonces

$$\sum_{i=1}^m \lim_{\mathcal{U}} \|f_i^d\| \|x_i^d\| = \lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^m \|f_i^d\| \|x_i^d\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\| < \infty$$

y tomando límite cuando $m \rightarrow \infty$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\mathcal{U}} \|f_i^d\| \|x_i^d\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\| < \infty.$$

Luego $(\|f_i^d\| x_i^d)_{\mathcal{U}} \in X$, $(\frac{f_i^d}{\|f_i^d\|})_{\mathcal{U}} \in (L_1(\mu^d))_{\mathcal{U}}$ y además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| \left(\frac{f_i^d}{\|f_i^d\|}\right)_{\mathcal{U}} \right\| \|(\|f_i^d\| x_i^d)_{\mathcal{U}}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\|.$$

Veamos que para todo z en $(L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$ se verifica $\|\Psi(z)\| \leq \|z\|$.

Sea $z = (z^d)_{\mathcal{U}}$ en $(L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no trivial, consideremos un $(\varepsilon^d)_{\mathcal{U}}$ dado, con $(\varepsilon^d)_{\mathcal{U}} \in (\mathbb{R})_{\mathcal{U}}$, tal que $\varepsilon^d > 0$ para todo $d \in D$, con $\lim_{\mathcal{U}} \varepsilon^d = 0$.

Utilizando la representación tensorial de los espacios de Lebesgue-Bochner $L_1(\mu^d, X^d) = L_1(\mu^d) \hat{\otimes}_{\pi} X^d$, para todo $d \in D$, existen $\{f_i^d\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{x_i^d\}_{i=1}^{\infty}$ con $z^d = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^d x_i^d$ tales que $\|z^d\|_{L_1(\mu^d, X^d)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\| < \|z^d\|_{L_1(\mu^d, X^d)} + \varepsilon^d$ y como $\|z\| = \lim_{\mathcal{U}} \|z^d\|_{L_1(\mu^d, X^d)}$, tenemos $\|z\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\| \leq \|z\|$, es decir, $\|z\| = \lim_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i^d\| \|x_i^d\|$. Con lo cual

$$\|\Psi(z)\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{f_i^d}{\|f_i^d\|}\right)_{\mathcal{U}} \|f_i^d\| x_i^d \right\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\mathcal{U}} \|f_i^d\| \|x_i^d\| = \|z\|$$

de manera que $\|\Psi\| \leq 1$.

Ahora, para todo $f \in S$ con $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i = \sum_{i=1}^n (f_i^d)_{\mathcal{U}} (x_i^d)_{\mathcal{U}}$ se tiene que $\Phi(f) = (\sum_{i=1}^n f_i^d x_i^d)_{\mathcal{U}}$ y $\Psi\Phi(f) = \sum_{i=1}^n (f_i^d)_{\mathcal{U}} (x_i^d)_{\mathcal{U}} = f$, y en consecuencia para todo $f \in L_1(\mu, X)$, $\Psi\Phi(f) = f$.

De tal forma $L_1(\mu, X)$ es isométricamente isomorfo a un subespacio complementado de $(L_1(\mu^d, X^d))_{\mathcal{U}}$. Además por construcción si para todo $d \in D$, X^d es retículo de Banach, dicha isometría es positiva. $\square$

2.3. Representación de ultrapotencias de espacios (retículos) de Lebesgue-Bochner.

El estudio de la representación de ultraproductos de espacios (retículos) de Lebesgue-Bochner, constituye el principal de los temas tratados por Haydon, Levy y Raynaud en [7]. El objetivo último fue dar respuesta a la siguiente conjetura de Pisier: si Y es un espacio de Banach que es finitamente representable en $L_p(\mu, X)$, ¿será posible que Y fuera subespacio isométrico de algún $L_p(\nu, Z)$, donde Z sea finitamente representable en X ? Para contestar a esta pregunta los autores desarrollaron una teoría que condujo a una descripción, tan buena como fue posible, de las ultrapotencias de espacios (retículos) de Lebesgue-Bochner $L_p(\nu, X)$, $1 \leq p < \infty$. Con ella dieron respuesta negativa a la cuestión de Pisier exhibiendo contraejemplos al respecto, y dando respuesta parcial positiva en algunos casos, por ejemplo si $X = L_q(\nu)$, $1 \leq q < \infty$.

La representación de las ultrapotencias de espacios $L_p(\nu, X)$ se hace, en [7], mediante un tipo especial de espacios normados aleatoriamente llamados p -integrales directas, que son una especie de espacios de Bochner $L_p(\mu, X)$ con X “variable”. Es decir que si se quiere pasar de un resultado local a otro global, es necesario sustituir el espacio de Lebesgue-Bochner por otro más general.

3. Ejemplos de espacios reticularmente finitamente representables en $\ell_1\{\ell_H\}$

Un primer ejemplo de espacio reticularmente finitamente representable en ℓ_H se sigue de la observación 8. En ésta, si $H^d = H$ para todo $d \in D$, al espacio de Musielak-Orlicz que se obtiene lo denotaremos $M_{\Phi_H}(\nu)$. Obviamente, de acuerdo con la observación, el espacio $M_{\Phi_H}(\nu)$ es reticularmente finitamente representable en ℓ_H . Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 14. *Sea H una función de Orlicz. Un espacio (retículo) de Banach X es (reticularmente) finitamente representable en ℓ_H si y sólo si X es isométrico a un subespacio (subretículo) de un espacio de Musielak-Orlicz $M_{\Phi}(\nu)$ que es (reticularmente) finitamente representable en ℓ_H .*

El bidual de un espacio $M_{\Phi}(\nu)$ que sea (reticularmente) finitamente representable en ℓ_H es también (reticularmente) finitamente representable en ℓ_H , y por tanto es isométrico a un subespacio (subretículo) de alguna ultrapotencia de espacios ℓ_H . Esa ultrapotencia, por el teorema de representación, es reticularmente isométrica a algún otro espacio $M_{\Psi}(\nu^*)$ de Musielak-Orlicz, y este $M_{\Psi}(\nu^*)$ también es (reticularmente) finitamente representable en ℓ_H .

Ejemplos de espacios de Musielak-Orlicz $M_{\Psi}(\nu^*)$ que son reticularmente finitamente representables en ℓ_H son los espacios de Orlicz $M_H(\mu)$, teniendo en cuenta que una función de Orlicz H puede considerarse como una función de Musielak-Orlicz Ψ_H tal que $\Psi_H(., \omega) = H(.)$ para todo $\omega \in \Omega$, y que por [7] $M_H(\mu)$ es reticularmente finitamente representable en $\{\ell_H^n, n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto en ℓ_H . Como en general $M_{\phi}(\mu)$ es reticularmente finitamente representable

en $\{\ell_\Phi^n, n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto en ℓ_Φ ver [7], si ℓ_Φ es reticularmente finitamente representable en ℓ_H , entonces $M_\Phi(\mu)$ es reticularmente finitamente representable en ℓ_H .

Un primer resultado sobre espacios reticularmente finitamente representables en $\ell_1\{\ell_H\}$, se obtiene a partir del corolario 12, donde todos los espacios que aparecen en la primera expresión son reticularmente finitamente representables en ℓ_H , y los que aparecen en la segunda expresión son reticularmente finitamente representables en $\ell_1\{\ell_H\}$. El siguiente resultado proporciona un nuevo ejemplo.

Teorema 15. *Sea H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero, y sean $(\Omega_i, \sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, espacios de medida. Entonces el espacio $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$ es reticularmente finitamente representable en $\ell_1\{\ell_H\}$.*

Demostración. Por [3], $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2)) = L_1(\mu_1) \hat{\otimes}_\pi M_H(\mu_2)$ mediante una isometría positiva.

Como los conjuntos de funciones simples con soporte de medida finita son densos en $L_1(\mu_1)$ y en $M_H(\mu_2)$ respectivamente, entonces es fácil ver que el conjunto $\mathcal{T}$ de funciones simples con soporte de medida finita, $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \chi_{A_i} \otimes \chi_{B_j}$, es denso en $L_1(\mu_1) \hat{\otimes}_\pi M_H(\mu_2)$. Además, si f es positiva puede ser aproximada en $L_1(\mu_1) \hat{\otimes}_\pi M_H(\mu_2)$ por una sucesión de funciones simples positivas.

Sea $\{G_\delta, \delta \in \Lambda\}$ el conjunto de todos los subespacios G_δ de funciones simples generadas por un conjunto finito y disjunto dos a dos de funciones características de $\mathcal{T}$. Para todo $f \in L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$, sea $\{S_{x,n}\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de $\mathcal{T}$ tal que $f = \lim_n S_{x,n}$. Si

$$S_{f,n} = \sum_{i=1}^{k(f,n)} \sum_{j=1}^{s(f,n)} a_{f,n,i,j} \chi_{A_{f,n,i}} \otimes \chi_{B_{f,n,j}}$$

tal que los elementos en los conjuntos $\{A_{x,n,i} : j = 1, \dots, k(x,n)\}$ y $\{B_{f,n,j} : j = 1, \dots, s(f,n)\}$ son disjuntos dos a dos, $G_{\delta_{f,n}}$ denota la envolvente lineal de $\{\chi_{A_{f,n,i}} \otimes \chi_{B_{f,n,j}}, i = 1, \dots, k(f,n), j = 1, \dots, s(f,n)\}$.

Nótese que

$$\|f\|_{L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))} = \lim_n \|S_{f,n}\|_{L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))} = \lim_n \|S_{f,n}\|_{G_{\delta_{f,n}}}$$

Decimos que $\delta_1 \leq \delta_2$ si y sólo si $G_{\delta_1} \subset G_{\delta_2}$. Para $\delta_0 \in D$ fijo, denotemos $R(\delta_0) := \{\delta \in \Lambda : \delta_0 \leq \delta\}$. De tal forma $\mathcal{R} := \{R(\delta), \delta \in \Lambda\}$ es una base de filtro de subconjuntos de Λ . De acuerdo al lema de Zorn, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{R}$.

Definimos $P : \mathcal{T} \rightarrow (G_\delta)_\mathcal{U}$ tal que para todo $f \in \mathcal{T}$, $P(f) = (f_\delta)_\mathcal{U}$ donde $f_\delta = f$ si $f \in G_\delta$, y $f_\delta = 0$ si $f \notin G_\delta$. P es una aplicación isometría positiva, y por tanto puede extenderse a $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$. Entonces $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$ es isométrico a un subretículo de $(G_\delta)_\mathcal{U}$.

Por tanto $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$ es reticularmente finitamente representable en $\{G_\delta : \delta \in \Lambda\}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea ε_1 tal que $1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon_1)^2$.

Si Y es un subretículo de dimensión finita de $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$, existen un G_δ , un subretículo M de G_δ y un isomorfismo de retículos $T : Y \rightarrow M$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon_1$.

Sea $\{\chi_{A_i} \otimes \chi_{B_j} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ una base de G_δ , donde $(A_i)_{i=1}^n$ y $(B_j)_{j=1}^m$ son respectivas familias disjuntas dos a dos, y sea $S \in G_\delta$ tal que $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \chi_{A_i} \otimes \chi_{B_j}$. Llamemos M_1 al subretículo de $L_1(\mu_1)$ generado por $\{\chi_{A_i}\}_{i=1}^n$ y M_2 al subretículo de $M_H(\mu_2)$ generado por $\{\chi_{B_j}\}_{j=1}^m$.

También, S tiene representación $S = \sum_{i=1}^n (\chi_{A_i} \otimes (\sum_{j=1}^m a_{ij} \chi_{B_j}))$ tal que

$$\begin{aligned} \pi(S; L_1(\mu_1 \hat{\otimes}_\pi M_H(\mu_2))) &= \sum_{i=1}^n \|\chi_{A_i}\|_{L_1(\mu_1)} \sum_{j=1}^m a_{ij} \|\chi_{B_j}\|_{M_H(\mu_2)} \\ &= \sum_{i=1}^n \|\chi_{A_i}\|_{M_1} \sum_{j=1}^m a_{ij} \|\chi_{B_j}\|_{M_2} \\ &\geq \pi(S; M_1 \otimes_\pi M_2). \end{aligned}$$

Por tanto $\pi(S; L_1(\mu_1 \hat{\otimes}_\pi M_H(\mu_2))) = \pi(S; M_1 \otimes_\pi M_2)$.

El retículo M_1 es reticularmente isométrico a ℓ_1^n bajo la isometría positiva $Q : M_1 \rightarrow \ell_1^n$ tal que $Q(\sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_1(A_i) e_i$. Por tanto $\pi(S; M_1 \otimes_\pi M_2) = \pi((Q \otimes id_{M_2})(S); \ell_1^n \otimes_\pi M_2)$.

Ahora, como $M_H(\mu_2)$ es reticularmente finitamente representable en $\{\ell_H^s : s \in \mathbb{N}\}$, existen un $r \in \mathbb{N}$, un subretículo N_2 de ℓ_H^r y un isomorfismo de retículos $T_2 : M_2 \rightarrow N_2$ tales que $\|T_2\|\|T_2^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon_1$.

Entonces tenemos que

$$\|id_{\ell_1^n} \otimes T_2 : \ell_1^n \otimes_\pi M_2 \rightarrow \ell_1^n \otimes_\pi N_2\| = \|T_2\| \quad (1)$$

y también

$$\|id_{\ell_1^n} \otimes T_2^{-1} : \ell_1^n \otimes_\pi N_2 \rightarrow \ell_1^n \otimes_\pi M_2\| = \|T_2^{-1}\|. \quad (2)$$

Denotemos $R := (Q \otimes T_2)T$, de manera que tenemos $R : Y \rightarrow (Q \otimes T_2)(M)$. De la ecuación (1) se tiene que $\|R\| \leq \|Q\|\|T_2\|\|T\| \leq \|T_2\|\|T\|$ y de la ecuación (2) que $\|R^{-1}\| \leq \|Q\|\|T_2^{-1}\|\|T^{-1}\| \leq \|T_2^{-1}\|\|T^{-1}\|$ de manera que

$$\|R\|\|R^{-1}\| \leq \|T_2\|\|T_2^{-1}\|\|T\|\|T^{-1}\| \leq (1 + \varepsilon_1)^2 = 1 + \varepsilon.$$

Ahora, $(Q \otimes T_2)(M)$ es subretículo de dimensión finita de $\ell_1^n \hat{\otimes}_\pi \ell_H^r = \ell_1^n \{h_H^r\}$ y este último es reticularmente finitamente representable en $\ell_1\{\ell_H\}$, así que $L_1(\mu_1, M_H(\mu_2))$ es reticularmente finitamente representable en $\ell_1\{h_H\}$. $\square$

Con idéntica demostración se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 16. Sea Φ una función de Musielak-Orlicz, y sean $(\Omega_i, \sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, espacios de medida. Entonces el espacio $L_1(\mu_1, M_\Phi(\mu_2))$ es reticularmente finitamente representable en $\ell_1\{M_\Phi\}$.

Corolario 17. Sean Φ una función de Musielak-Orlicz y H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero tales que h_Φ sea reticularmente finitamente representable en h_H , y sean $(\Omega_i, \sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, espacios de medida. Entonces el espacio $L_1(\mu_1, M_\Phi(\mu_2))$ es reticularmente finitamente representable en $\ell_1\{\ell_H\}$.

Referencias

- [1] Dacunha-Castelle, D. *Ultraproduits d'espaces de Banach. Séminaire Goulaouie-Schwartz*. Exposés IX, X. Paris. 1971-1972.
- [2] Dacunha-Castelle, D., Krivine, J.L. *Applications des ultraproduits a l'etude des espaces et des algèbres de Banach*. Studia. Math. 41 (1972), 315-334.
- [3] Defant, A. and Floret, K. *Tensor norms and operator ideals*. North Holland Math. Studies. Amsterdam. 1993.
- [4] Diestel, J. and Uhl Jr., J. J. *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1977.
- [5] Drewnowski, L. and Orlicz, W. A note on modular spaces X , Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 16 (1968), 809-814.
- [6] Drewnowski, L. *Compact Operators on Musielak - Orlicz spaces*, Comment. Math. 27 (1988), 225-232.
- [7] Haydom, R., Levy, M., Raynaud, Y. *Randomly normed spaces*. Hermann, 1991.
- [8] Heinrich, S. *Ultraproducts in Banach spaces theory*. J. reine angew. Math. 313, 72-104, 1980.
- [9] Kamińska, A. *Convexity and Concavity Properties of Orlicz Spaces and Their Ganeralizations*, Tesis doctoral (1985).
- [10] Kamińska, A. *Some Convexity Properties of Musielak - Orlicz Spaces of Bochner Type*, Suppl. Rendiconti del Circolo Mat. Palermo, Serie II 10 (1985), 63-73.
- [11] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg. 1977.
- [12] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces II*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg. 1979.
- [13] Loaiza, G., López Molina, J.A., Rivera, M.J. *Characterization of the Maximal Ideal of Operators Associated to the Tensor Norm Defined by an Orlicz Function*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (Journal for Analysis and its Applications) 20 (2001) No. 2, 281-293.

- [14] Grothendieck, A. *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Bol. Soc. Mat. Sao Paulo (1956), 1-79.
- [15] Grothendieck, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
- [16] Musielak, J. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math. 1034, Springer - Verlag, 1983.
- [17] Musielak, J. and Orlicz, W. *on Modular Spaces*, Studia Math. 18 (1959), 49-65.
- [18] James, R.C. *Some self-dual properties of normed linear spaces*. Symp. on Infinite Dimensional Topology. Ann. Math. Studies. 69 (1972), 159-175.
- [19] Rao, M. M. y Ren, Z.D. *Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekker Inc. 1991.
- [20] Schaefer, H. H. *Banach lattices and positive operators*. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1974.
- [21] Wnuk, W. *Representation of Orlicz lattices*, Dissertationes Mathematicae, 235 (1984).
- [22] Zaanen, A.C. *Integration*. North Holland. (1967).