

**CARACTERIZACIÓN MECÁNICA Y PROPUESTA DE MEJORA DE UN
DISPOSITIVO ROBÓTICO COOPERATIVO DEL LABORATORIO DE
ROBÓTICA INDUSTRIAL DE LA ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE**

ROBINSON GONZÁLEZ

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2017**

**CARACTERIZACIÓN MECÁNICA Y PROPUESTA DE MEJORA DE UN
DISPOSITIVO ROBÓTICO COOPERATIVO DEL LABORATORIO DE
ROBÓTICA INDUSTRIAL DE LA ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE**

ROBINSON GONZÁLEZ

**Proyecto de grado para optar al título de
Ingeniero Mecánico**

**Director
M.Sc JOSÉ TOMAS BUITRAGO MOLINA**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2017**

Nota de aceptación:

Firma del Director

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Santiago de Cali, 22 de Agosto de 2017

A Dios por su enorme amor, por darme el milagro de la vida, por entregar a su Hijo, para la Salvación de mi alma.

A la Virgen María, por los favores recibidos gracias a su intercepción ante Dios Todopoderoso.

A mi madre Myriam González Q. por su amor incondicional, su confianza total y por transmitirme sus grandes valores, su Fé y por inculcarme desde niño el valor de la educación.

A mis abuelos Teodoro Aguiño G. y Luz S. Quintero (QEPD), por su gran amor, sus enseñanzas, por ser mis segundos padres y por todos los momentos gratos que pasé con ellos.

A mi padre Luis G. Martínez, por ser un gran padre putativo y enseñarme con el ejemplo a ser un hombre honesto y responsable.

A mis hermanos Christian y Valeria Martínez G, por su gran cariño, su apoyo incondicional y por enseñarme a confiar en mí mismo.

A mis demás familiares y a mis grandes amigos por estar siempre presentes brindándome su apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi más profundo y sincero agradecimiento:

A la Universidad del Valle, a la Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica y a la Escuela de Ingeniería Mecánica, de la cual me siento orgulloso de pertenecer.

Al director de este proyecto M.Sc José Tomas Buitrago Molina, por su orientación y supervisión constante y por la confianza depositada en mí para realizar este proyecto.

A los profesores de EIME por haberme formado como un profesional de alta calidad, especialmente al profesor Gerardo Cabrera (QEPD), por su dedicación y pasión por los estudiantes y la investigación.

Al personal de apoyo de EIEE y de EIME Eisenover Cabal, Freiner Piedrahita Vladimir Boada, Ernesto Acosta y Omaira Ramírez por facilitarme espacios, equipos y herramientas, para llevar a buen término los objetivos planteados.

A mis evaluadores Edna Avella y Mario Pérez, por su buena disponibilidad en revisar este proyecto, por sus sugerencias y correcciones y por sus críticas constructivas.

A mis compañeros Antonio Gesama, Mauricio Santacruz, William Rosero, Rafael Leal por su colaboración en la parte empírica y a Faryth Daza por su asesoría en la parte teórica.

A mis padres, hermanos y demás familiares por su amor, paciencia, apoyo y por la confianza en que lograría cumplir con esta meta.

A mis grandes amigos, Julián Herrera, Leonela Belalcazar, Francisco Marmolejo, Angie Quilindo, Jhon E. Sanchez y Jhon Javier Tello por siempre brindarme su apoyo incondicional y su ayuda desinteresada.

Finalmente, pero no menos importante, agradezco al Creador del Universo, por iluminarme y por las oportunidades que me ha dado cuando más las necesitaba.

CONTENIDO

RESUMEN	12
INTRODUCCIÓN	13
1. OBJETIVOS	15
1.1 OBJETIVO GENERAL	15
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
2. CARACTERÍSTICAS GENERALES Y MORFOLÓGICAS DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO.....	16
2.1 CLASIFICACIÓN DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO	16
2.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO	17
2.2.1 VOLUMEN DE TRABAJO.	17
2.2.2 VELOCIDAD.	18
2.2.3 CAPACIDAD DE CARGA.	18
2.3 CARACTERÍSTICAS MORFOLÓGICAS DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO.....	18
2.3.1 ESTRUCTURA MECÁNICA.	19
3. MODELOS CINEMÁTICOS DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO	24
3.1 CINEMÁTICA DIRECTA.....	24
3.1.1 MÉTODO 1 EVALUACIÓN MODELO CINEMÁTICO.	27
3.1.2 MÉTODO 2 EVALUACIÓN MODELO CINEMÁTICO	29
3.1.3 MÉTODO DE EVALUACIÓN POR MEDIO DEL TOOLBOX DE ROBÓTICA.	30
3.2 CINEMÁTICA INVERSA	32
4. MODELO DINÁMICO DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO.....	36
5. CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LOS ACTUADORES	38
5.1 PRUEBA EN VACÍO	39
5.1.1 CARACTERIZACIÓN MOTOR 1.....	41
5.1.2 CARACTERIZACIÓN MOTOR 2.....	42
5.2 PRUEBA CON CARGA.....	44
5.2.1 CARACTERIZACIÓN MOTOR 1.....	48

5.2.2	CARACTERIZACIÓN MOTOR 2	50
5.3	MODELO DINÁMICO DE LOS ACTUADORES	51
5.3.1	OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS DE MOTORES DC.....	54
5.3.2	SIMULACION DEL MODELO DE LOS MOTORES DC.....	60
6.	ANÁLISIS MECÁNICO DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO	69
6.1	ANÁLISIS ESTÁTICO MEDIANTE MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	69
6.1.1	DECISIONES PRELIMINARES	70
6.1.2	PRE-PROCESAMIENTO.....	71
6.1.3	POST-PROCESAMIENTO	75
6.2	ANÁLISIS DE VIBRACIONES.....	81
7.	PROPUESTA DE MEJORA DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO	83
7.1	PROPUESTA DE MEJORA	83
7.1.1	REEMPLAZO DE MATERIAL EN DISCO RANURADO Y BASE FIJA.	83
7.1.2	SISTEMA DE TRANSMISIÓN.....	84
8.	CONCLUSIONES.....	89
9.	RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS	91
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92
	ANEXOS.....	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Mesa giratoria de dos grados de libertad.	17
Figura 2. Elementos que conforman el dispositivo robótico.	19
Figura 3. Estructura mecánica.	20
Figura 4. Elemento articular 1.	20
Figura 5. Elemento articular 2.	21
Figura 6. Motor DC.	22
Figura 7. Sistemas de transmisión, A. Por cadena. B. directo acople flexible	22
Figura 8. Encoder incremental.	23
Figura 9. Disco ranurado.	23
Figura 10. Sistemas de referencia para la mesa giratoria.	25
Figura 11. Transformación homogénea obtenida por medio de MATLAB	28
Figura 12. Evaluación del código MATLAB <i>McdMesa</i> .	29
Figura 13. Evaluación del código MATLAB <i>MesaInput</i>	30
Figura 14. Resultados de la función Serial Link.	31
Figura 15. Evaluación de los parámetros 1 y 2 por medio de la función <i>fkine</i> del toolbox robótica.	31
Figura 16. Propiedades físicas e inerciales del elemento articular 1.	36
Figura 17. Propiedades físicas e inerciales del elemento articular 2.	37
Figura 18. Componentes de motor DC tipo imán permanentes	38
Figura 19. Test motores DC sin carga. [18]	39
Figura 20. Montaje de la prueba en vacío.	40
Figura 21. Reparación de motores.	40
Figura 22. Corriente y velocidad vs voltaje. Giro anti-horario	41
Figura 23. Corriente y velocidad vs voltaje. Giro anti- horario.	43
Figura 24. Test motores DC con carga. [18]	44
Figura 25. Tipos de configuración de freno Prony. [24] [23] [20] [25]	45
Figura 26. Modelo del dinamómetro.	45
Figura 27. Montaje del dinamómetro	46
Figura 28. Curva característica de un motor DC imán permanente. [18]	46
Figura 29. Curvas de potencia de salida y eficiencia [26]	47
Figura 30. Corriente y velocidad vs par	48
Figura 31. Potencia de salida y eficiencia	49
Figura 32. Corriente y velocidad vs par	50
Figura 33. Potencia de salida y eficiencia	51
Figura 34. Esquema motor DC imán permanente. [28]	52
Figura 35. Determinación constante B_m actuador 1	58
Figura 36. Determinación constante B_m actuador 2	58
Figura 37. Diagrama de bloques en <i>Simulink</i>	60
Figura 38. Entradas y salidas de motor CD	60
Figura 39. Respuesta de la velocidad motor uno al escalón unitario	62
Figura 40. Respuesta de la posición motor uno frente al escalón unitario	62
Figura 41. Respuesta de la velocidad del motor uno al escalón unitario	63
Figura 42. Respuesta de la posición del motor dos al escalón unitario	63
Figura 43. Diagrama de control de una planta.	64
Figura 44. Configuración controlador PID para velocidad	65
Figura 45. Configuración controlador PID para posición	66
Figura 46. Respuesta control de velocidad ante escalón unitario motor uno	67
Figura 47. Respuesta control de velocidad ante escalón unitario motor uno	67
Figura 48. Respuesta control de velocidad ante escalón unitario motor dos	68
Figura 49. Respuesta control de posición ante escalón unitario motor dos	68
Figura 50. Flujo de trabajo MEF en Inventor®	70

Figura 51. Diagrama esfuerzo-deformación para materiales dúctiles.	71
Figura 52. Simplificación del modelo para la simulación	71
Figura 53. Fuerzas y condiciones de borde del modelo	73
Figura 54. Enmallado del modelo	74
Figura 55. Curva de convergencia	75
Figura 56. Esfuerzo máximo Von Mises	76
Figura 57. Esfuerzos en el elemento articular dos	77
Figura 58. Esfuerzos en el elemento articular uno	77
Figura 59. Desplazamiento en el dispositivo	78
Figura 60. Desplazamientos en el disco ranurado	79
Figura 61. Desplazamientos en el elemento articular uno	79
Figura 62. Desplazamientos en el elemento articular dos	79
Figura 63. Factor de seguridad en la estructura	80
Figura 64. Modos de vibración del dispositivo	81
Figura 65. Transmisión por cadena en los elementos articulares	84
Figura 66. Banda sincrónica estándar. [46]	85
Figura 67. Selección de paso para transmisiones sincrónicas [46]	86

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Grados de libertad	18
Tabla 2. Parámetros Denavit-Hartenberg mesa giratoria.	24
Tabla 3. Mediciones de resistencia motor uno	55
Tabla 4. Mediciones de resistencia motor dos	55
Tabla 5. Calculo de inductancia motor uno	56
Tabla 6. Calculo de inductancia motor dos	56
Tabla 7. Parámetros del motor uno	61
Tabla 8. Parámetros del motor dos	61
Tabla 9. Parámetros del PID para control de velocidad y posición	66
Tabla 10. Propiedades físicas del modelo	72
Tabla 11. Determinación de materiales el modelo	72
Tabla 12. Cargas aplicadas	73
Tabla 13. Mallado de geometría	74
Tabla 14. Fuerza y pares de reacción en restricciones	75
Tabla 15. Velocidades y frecuencias máximas actuadores	82
Tabla 16. Parámetros de selección	85
Tabla 17. Selección de transmisiones estándar. [46]	87
Tabla 18. Selección ancho de correa [46]	88
Tabla 19. Dimensiones de las correas y las poleas seleccionadas [46]	88

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Planos del dispositivo	94
Anexo B. Características de componentes comerciales	105
Anexo C. Cinemática directa	109
Anexo D. Cinemática inversa	113
Anexo E. Algoritmo computacional de LaGrange- Euler	114
Anexo F. Equipos e instrumentos para pruebas de motores	122
Anexo G. Pruebas preliminares de diagnóstico	124
Anexo H. Prueba en vacío de motores	125
Anexo I. Prueba con carga motores	126
Anexo J. Plano del dinamómetro	127

RESUMEN

Un dispositivo robótico es un mecanismo que cumple con las características de un robot, tales como soportar cargas en una trayectoria dirigida, no son considerados robots, ya que carecen de grado de autonomía y /o número de ejes programables. Una mesa giratoria es un sistema robótico que lleva los movimientos de rotación deseada con alta precisión[1].

En este proyecto se realizó una caracterización, división de subsistemas, inspección visual y levantamiento de planos a un dispositivo robótico cooperativo (mesa giratoria de dos grados de libertad). Se obtuvieron los modelos cinemático y dinámico del dispositivo. El modelo cinemático se obtuvo bajo el procedimiento de Denavit-Hartenberg y el modelo dinámico bajo el método de LaGrange-Euler.

Se realizaron actividades de reparación, con el fin de recuperar dos actuadores, los cuales transmiten la potencia al dispositivo, lo cual permite su movimiento. Se obtuvieron las curvas características, tanto al vacío como con carga. Se encontraron los parámetros característicos del motor, de forma experimental, se halló el modelo dinámico de los actuadores y se realizó la simulación en Simulink.

Finalmente se realizó un análisis mecánico con el fin de validar que el dispositivo soporte las cargas aplicadas y que el factor de seguridad resultante garantice que este no fallará. Se realiza un análisis modal para comprobar que no hallan problemas debido a resonancia. Con base a los resultados del análisis se proponen cambios o mejoras en el dispositivo, con el fin de optimizar su funcionamiento o rediseñar completamente el dispositivo, para asegurar que la estructura mecánica y demás elementos no fallen.

Este dispositivo permitirá realizar prácticas de laboratorio sobre modelos de movimiento, orientación y posicionamiento, también podrá cooperar con el robot SCARA del laboratorio, brindándole dos grados de libertad adicionales así como cooperar con personas para facilitar actividades; además en un futuro se realizarán prácticas para tareas de manufactura así como medición de parámetros físicos y caracterización de sensores para medición de fenómenos físicos.

Palabras clave: Dispositivo robótico cooperativo, mesa giratoria, plataforma de dos grados de libertad, diseño mecánico, cinemática y dinámica de robots.

INTRODUCCIÓN

En el laboratorio de Robótica Industrial, el cual se encuentra ubicado en la Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad del Valle, se cuenta con un dispositivo cooperativo para robots, este dispositivo es una mesa giratoria de dos grados de libertad con la electrónica correspondiente. El dispositivo se construyó en el proyecto de grado titulado “Control digital programable para una mesa con dos grados de libertad”[2], pero en ese proyecto de grado carece de un diseño mecánico soportado bajo los conceptos de ingeniería mecánica, por lo tanto, el problema de este proyecto se formula como:

“La carencia de un diseño mecánico válido en ingeniería del dispositivo cooperativo robótico del laboratorio de Robótica industrial de la Universidad del Valle.”

Este proyecto hace parte de la investigación “Conformación de un ambiente para la experimentación en robótica industrial, de apoyo para la educación remota en ingeniería” la cual se encuentra en la línea de investigación de estudios de ingeniería, del Grupo de Investigación de Control Industrial (GICI).

La solución del problema planteado en este proyecto es de gran importancia para el laboratorio de robótica, ya que en los laboratorios de ingeniería, se desarrollan capacidades para el buen entendimiento de tecnologías, fenómenos, procesos y aplicaciones [3]. Este proyecto permitirá que el dispositivo pueda cumplir con la función de proporcionar dos grados de libertad adicionales al robot Scara UV-Cerma, así como la realización de prácticas sobre posicionamiento y orientación para los estudiantes de pregrado y posgrado de ingeniería eléctrica, electrónica, sistemas y mecánica, además se obtendrá propuestas de mejora, para que que cumpla con los requerimientos funcionales y operacionales [4].

El desarrollo del proyecto, también podría permitir el desarrollo de nuevos proyectos de investigación, como lo son las celdas de manufactura flexible, procesos industriales de poca complejidad, control remoto, programación e integración con robots, medición de parámetros físicos y caracterización de sensores.

Este proyecto está estructurado en 9 capítulos, los cuales se describen brevemente:

En el capítulo 1 se enumera el objetivo general y los objetivos específicos. Se pretende caracterizar y analizar un dispositivo robótico cooperativo de la EIEE.

El capítulo 2, está dedicado a la descripción de las características del dispositivo robótico, donde se realiza una clasificación del dispositivo; características

generales, como volumen de trabajo, velocidad y capacidad de carga; finalmente se realiza un levantamiento de planos, descripción de componentes morfológicos e inspección visual de los mismos

La obtención de los modelos cinemático y dinámico se encuentran presentados en el capítulo 3 y capítulo 4, respectivamente. La cinemática estudia la posición, orientación, velocidad y aceleración del elemento terminal. La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre el dispositivo y el movimiento que en éste se origina.

En el capítulo 5 se obtiene por medio de métodos experimentales, las características con carga y sin carga de los actuadores, se hallan los parámetros físicos de estos, se realiza el modelado dinámico y finalmente la simulación.

El análisis mecánico mediante el método de elementos finitos, se desarrolla en el capítulo 6. Los resultados del análisis estático y modal validan o invalidan el diseño del dispositivo. Con base a los resultados del análisis, se propone mejoras o un rediseño del dispositivo, esto con el fin de optimizar su funcionamiento o evitar que ocurra una falla. Las mejoras se sugieren en el capítulo 7.

Finalmente el capítulo 8 y 9, se sintetiza los resultados del proyecto en las conclusiones, recomendaciones y trabajos futuros, respectivamente.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar una caracterización y análisis mecánico de un dispositivo robótico cooperativo para proponer una mejora al dispositivo.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar las características generales y morfológicas del dispositivo robótico.
2. Obtener los modelos de movimiento del dispositivo, tanto cinemático, como dinámico.
3. Caracterizar dinámicamente los actuadores que posee el dispositivo.
4. Calcular los esfuerzos estáticos y dinámicos que puede soportar la estructura y los elementos de maquinaria que conforman el dispositivo cooperativo para robot.
5. Proponer mejoras al diseño mecánico del dispositivo bajo el criterio de fallas estáticas y dinámicas.

2. CARACTERÍSTICAS GENERALES Y MORFOLÓGICAS DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO.

Según la norma ISO 8373:2012, un dispositivo robótico es un mecanismo que cumple con las características de un robot industrial o un robot de servicio, pero que carecen ya sea el número de ejes programables o el grado de autonomía accionado [1]. Los dispositivos robóticos manipulan objetos en colaboración física directa con un robot industrial o un humano. Estos dispositivos limitan trayectorias o soportan cargas, mientras hay un movimiento dirigido [5].

Una mesa giratoria es sistema robótico que lleva los movimientos de rotación deseada con alta precisión [6]. Este dispositivo ayuda a hacer un escenario de movimiento con el fin de probar los sistemas de guiado y navegación de vehículos en movimiento [7]. En el ámbito académico, dispositivos de este tipo permiten realizar prácticas de posicionamiento y orientación. En el ámbito industrial este permite programar tareas de procesos de manufactura, integración de robots, actividades de fabricación; tales como soldadura, pintura, empaçado, etc.

Se muestra la clasificación del dispositivo, tanto funcionales como sus tareas operativas, también se mencionan sus características principales. Además se realizó una clasificación de sus sistemas, para conocer su morfología. El despiece del dispositivo permitió revisar y diagnosticar los componentes de los sistemas de la mesa giratoria. Finalmente se muestran los planos del dispositivo en Anexo A.

2.1 CLASIFICACIÓN DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

Un robot se puede clasificar bajo varios criterios o características, se describirán las características principales del dispositivo robótico, tales como su función, número de ejes, tipo de actuadores y otras que son propias del dispositivo. Esta máquina se encuentra en la clasificación de dispositivos robóticos, como se mencionó anteriormente [1].

Este dispositivo permite realizar tareas de apoyo a robots industriales en las siguientes áreas de aplicación según la Federación Internacional de Robótica (IFR) estaría clasificado bajo el código 240, es decir, formación, enseñanza e investigación, en el ámbito industrial este dispositivo se usa principalmente en tareas de soldadura y mecanización, bajo los códigos 170 y 180, respectivamente del IFR-04 [5].

Según la norma ISO 9946:1999 [5], el dispositivo se clasifica como un robot de tipo estacionario, pertenece a la primera generación de robots, por lo que este dispositivo puede repetir una tarea programada secuencialmente, no detecta posibles alteraciones de su entorno y su uso más frecuente es para manipulación y servicio para máquinas [8]. Este dispositivo es de tipo eléctrico, ya que es

accionado por medio de actuadores eléctricos; en cuanto al número de ejes, el dispositivo cuenta con dos ejes rotacionales, no alcanzando los 3 ejes que son el mínimo número de ejes para ser clasificado como robot. El control es un sistema de control monoarticular, pero el rediseño e implementación de este, así como del sistema de frenado, serán abordados en trabajos futuros, por lo cual no será estudiado ni se realizará una descripción detallada en este proyecto de estos sistemas. En la Figura 1, se muestra el dispositivo robótico de dos grados de libertad.

Figura 1. Mesa giratoria de dos grados de libertad.



Fuente: <http://gici.univalle.edu.co/LaboratorioRoboticaInd.html>

2.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

2.2.1 Volumen de trabajo.

El volumen de trabajo es el término que se refiere al espacio dentro del cual el robot puede manipular el extremo de su elemento terminal, haciendo alusión al último eslabón de la cadena cinemática. En otras palabras, “es el volumen que abarca las posibilidades de movimiento del brazo del robot sin incluir el efector final del mismo” [9].

El convenio de utilizar el extremo del elemento terminal para definir el volumen de trabajo del robot se adopta para evitar la complicación de diferentes tamaños de efectores finales.

El volumen de trabajo viene determinado por las siguientes características del robot:

- La configuración física del robot.
- Los tamaños de los componentes del cuerpo, brazo y de la muñeca.
- Los límites de movimientos de las articulaciones del robot.

En el dispositivo robótico, el elemento terminal es el disco ranurado, el cual posee dos grados de libertad, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Grados de libertad

Articulación	Rango de rotación
1	(-90°) – (90°)
2	(-360°) – (360°)

2.2.2 Velocidad.

Se refiere a la velocidad máxima media, que se logra por el punto central de la herramienta. Este número no es exacto en la mayoría de los robots, y varía el espacio de trabajo conforme la geometría del robot (y de los efectos dinámicos). El número reflejará a menudo la velocidad máxima posible dentro del rango seguro [10]. La velocidad final del disco ranurado es de 35 rpm, este valor es el registrado por las pruebas que realizó en el proyecto de López [2], el valor obtenido en el capítulo 5 es de 44,2 rpm.

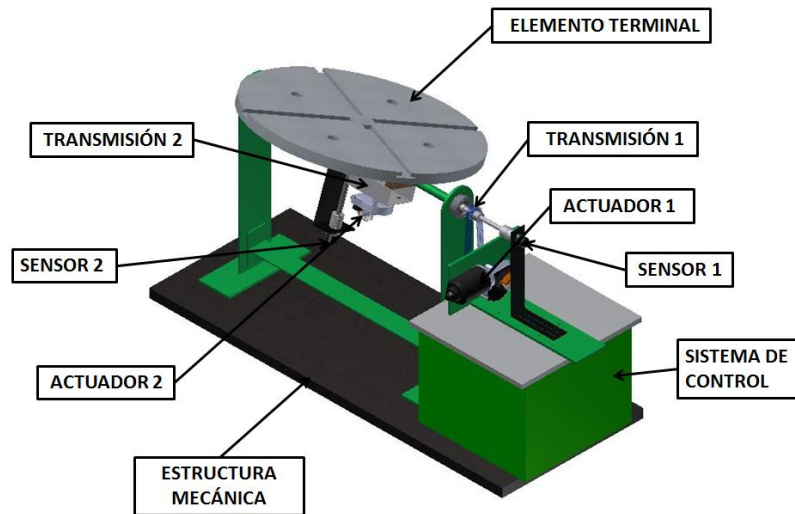
2.2.3 Capacidad de carga.

El peso en kilogramos, que puede transportar la herramienta del manipulador. Esta capacidad es una de las características que más se tienen en cuenta en la selección de un robot, según la tarea a la que se destine, en el trabajo desarrollado se plantea un valor de 5 Kg, según el trabajo previo obtiene un valor de 20Kg [2].

2.3 CARACTERÍSTICAS MORFOLÓGICAS DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

En esta sección se realiza una breve descripción de los componentes que conforman el dispositivo robótico, a lo largo de este subcapítulo se realiza una descripción detallada de cada uno de los componentes y elementos que conforman el dispositivo. Los elementos del dispositivo robótico cooperativo, se pueden observar en la Figura 2. Los modelos 3D y planos se realizaron en Autodesk® Inventor® 2014 versión estudiante.

Figura 2. Elementos que conforman el dispositivo robótico.



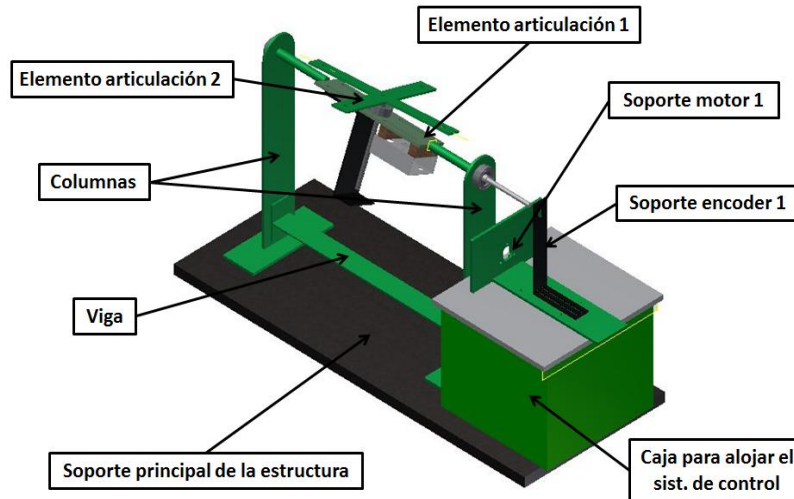
2.3.1 Estructura Mecánica.

Un robot está formado por una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten un movimiento relativo, cada movimiento independiente que realiza cada articulación con respecto a la anterior se denomina grado de libertad, este dispositivo cuenta pues con dos grados de libertad, un grado de libertad es rotatorio (actuador 2) y el otro es de basculamiento ó inclinación (actuador 1). La estructura de este dispositivo se puede dividir en tres partes: la estructura base o soporte, la estructura del elemento uno y del elemento dos.

La estructura base es la encargada de sostener los elementos uno y dos, así como la carga, además de alojar a la caja para el sistema de control y esta a su vez aloja el actuador para el eje del elemento uno. La estructura está construida en platina de acero estructural ASTM A36 a excepción del soporte principal que está construido en madera triplex. Se puede ver la estructura en la Figura 3.

En la inspección general que se hizo a la estructura mecánica se encontró que se debería cambiar el soporte principal, cuyo material es madera, por una placa de acero estructural. Esto se comprobará al realizar los cálculos de cargas y esfuerzos.

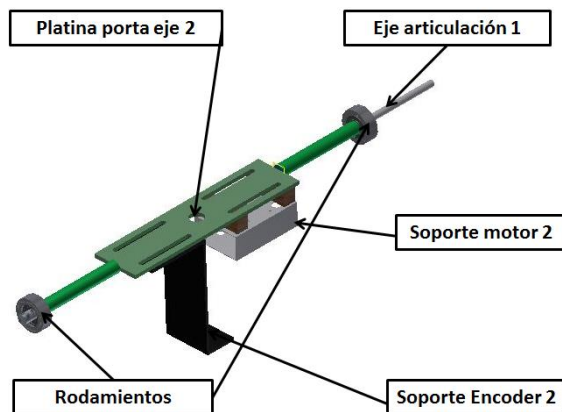
Figura 3. Estructura mecánica.



2.3.1.1 Elemento articular 1.

El elemento de la articulación uno está conformado por una platina soldada en su extremos por dos ejes, esta platina aloja al eje del elemento articular 2, además esta platina posee 4 ranuras, las cuales por medio de tornillos se ensambla al soporte del actuador y soporte del encoder, pertenecientes al elemento articular 2 (GDL rotatorio), estos soportes están fabricados en aluminio. Los ejes soldados a la platina, forman el eje de articulación 1, cuyo grado de libertad corresponde al movimiento de basculamiento o inclinación, este grado de libertad va en un rango de -90° a 90° . Este elemento está alojado en la estructura mecánica por medio de dos rodamientos de bolas rígidas 6202 ZZ. Véase Figura 4.

Figura 4. Elemento articular 1.

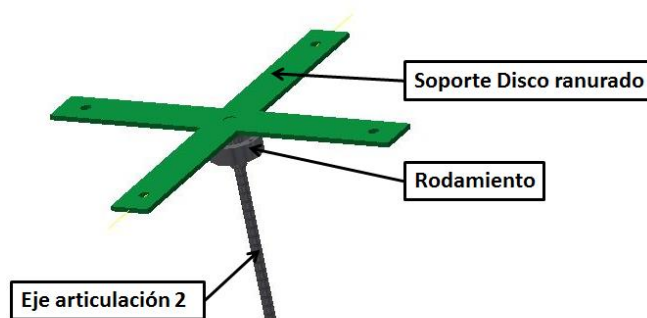


Al revisar el estado del elemento anteriormente descrito, se observa que el soporte del motor está alojado en dos bloques de madera, el cual no es material adecuado para el montaje. Los rodamientos que soportan el eje del elemento se encuentran en buenas condiciones, se realiza rectificado en la pista de los ejes, para brindar un mejor ajuste.

2.3.1.2 Elemento articular 2.

El elemento de la articulación 2 es el encargado de brindar el segundo grado de libertad, cuyo movimiento es rotatorio, en este elemento se encuentra ensamblado el disco ranurado. Este elemento articular 2, posee una platina en forma de cruz, que se acopla por medio de tornillos a la superficie inferior del disco ranurado, la platina en forma de cruz esta soldada con un eje, que se acopla al actuador 2, por medio de una cadena. El movimiento no está restringido, puede moverse hacia la derecha o hacia la izquierda. Su rango de movimiento va de -360° a 360° . El eje de este elemento se acopla por medio de un rodamiento 6202 ZZ a la platina del elemento articular 1. Véase Figura 5.

Figura 5. Elemento articular 2.



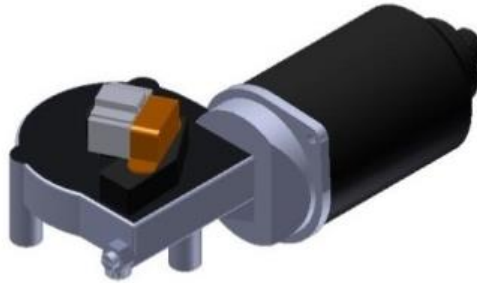
2.3.1.3 Actuadores.

Los actuadores tienen como función generar el movimiento de los elementos del dispositivo, existen actuadores hidráulicos, neumáticos y eléctricos, estos últimos los más usados en la industria de la robótica. Los actuadores en el dispositivo son dos motores DC tipo imán permanente. Maneja velocidades bajas, un par elevado y un buen control de posición, lo cual es requerido para el buen funcionamiento de la mesa giratoria.

El actuador 1 y el actuador 2, transmiten potencia al elemento articular uno y al elemento-articular dos respectivamente. El actuador uno se encuentra alojado en el soporte 1, el cual se encuentra en la superficie superior de la caja de control. El actuador 2 se encuentra alojado en el soporte 2, el cual está en la platina del

elemento articular 1, generando una carga adicional para el elemento articular 1. Véase en la Figura 6.

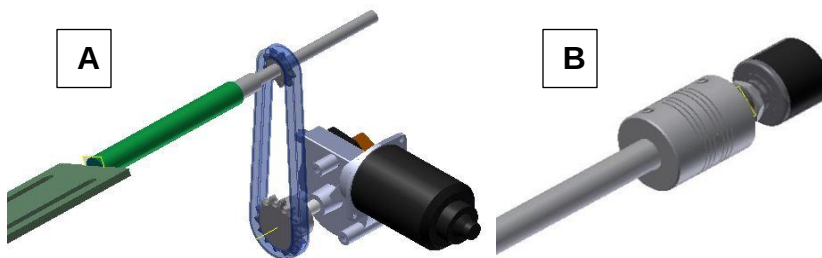
Figura 6. Motor DC.



2.3.1.4 Transmisiones.

Las transmisiones son los elementos encargados de transmitir el movimiento desde los actuadores hasta las articulaciones, en la mesa giratoria se usa un tipo de transmisión por cadena, el sistema de transmisión tiene una relación de 1:1, es decir que no hay amplificación ni reducción de la velocidad. Tanto el actuador 1 como el 2, poseen este sistema de transmisión. El cual tiene el inconveniente de producir vibración a la estructura mecánica, debido al salto que tiene la cadena en los dientes de los piñones y al juego mecánico que produce al arrancar y frenar. Por otra parte, se acoplan a los extremos de los ejes de los elementos articulares a encoders, por medio de un acople flexible, véase la Figura 7.

Figura 7. Sistemas de transmisión, A. Por cadena. B. directo acople flexible



2.3.1.5 Sensores

Los sensores permiten que un robot funcione con la precisión y velocidad adecuada, así como también pueda detectar la presencia de un objeto dentro de su volumen de trabajo. La mesa giratoria, posee un sensor, tipo encoder

incremental de posición rotacional para cada articulación, acoplado a los ejes por medio de un acople flexible. El inconveniente de este encoder, es que restringe el número de vueltas del disco ranurado.

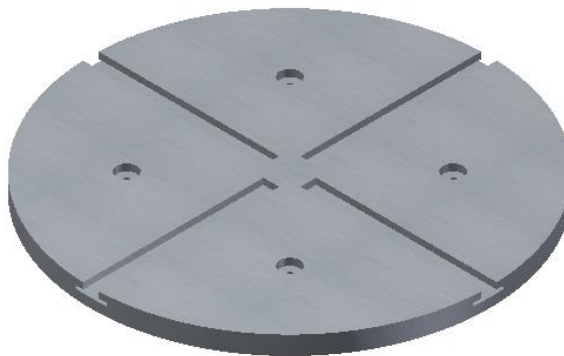
Figura 8. Encoder incremental.



2.3.1.6 Elemento terminal.

Los elementos terminales son los encargados de interactuar con el entorno del robot. En el disco ranurado se pueden montar elementos de aprehensión como prensas o mordazas, sobre estas se colocan los objetos que van a interactuar con el robot. El disco ranurado se encuentra alojado sobre el elemento articular 2 (platina en cruz), como se mencionó anteriormente. El material de fabricación son dos láminas de triplex, una encima de la otra, de 120 mm de espesor. Se debe acoplar sobre las ranuras un elemento de sujeción. Véase la Figura 9.

Figura 9. Disco ranurado.



Los componentes comerciales, con el que cuenta el dispositivo actualmente, tales como rodamientos, piñones, cadenas, etc, se muestran en Anexo B.

3. MODELOS CINEMÁTICOS DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

La cinemática es la ciencia que trata el movimiento sin considerar las fuerzas que lo ocasionan. Dentro de la cinemática se estudia la posición, velocidad, aceleración y todas las derivadas de mayor orden de las variables de posición (respecto al tiempo o a cualquier otra variable). Por ende, el estudio de la cinemática de los manipuladores se refiere a todas las propiedades del movimiento, las geométricas y las basadas en el tiempo [11],[12].

3.1 CINEMÁTICA DIRECTA

Un problema básico en el estudio de la manipulación mecánica se conoce como cinemática directa, que es el problema geométrico estático de calcular la posición y orientación del efector final del manipulador. Específicamente, dado un conjunto de ángulos y distancias articulares, el problema de la cinemática directa es calcular la posición y orientación de la trama de la herramienta relativa a la trama base [12].

La obtención de la cinemática directa, fue mediante el algoritmo Denavit-Hartenberg, el cual permite que la solución quede en términos de matrices de transformación homogéneas, por medio de unos parámetros geométricos, que son ángulos y longitudes. Con los ejes coordenados, los cuales se muestran en la Figura 10.

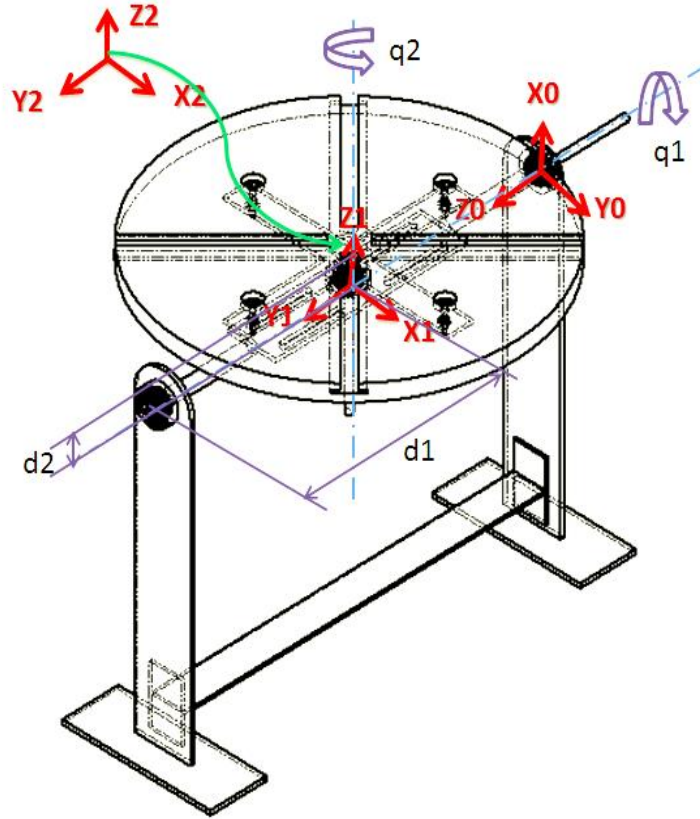
En la Tabla 2, se puede observar que hay dos variables θ_i , debido a que las dos articulaciones son de revolución, se muestra que d_i son dos constantes, debido a que la mesa giratoria no posee articulaciones prismáticas.

Tabla 2. Parámetros Denavit-Hartenberg mesa giratoria.

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q1	d1	0	90°
2	q2	d2	0	0°

Los valores de **d_1** y **d_2** son 287 mm y 60.30 mm respectivamente.

Figura 10. Sistemas de referencia para la mesa giratoria.



La matriz de transformación homogénea y a partir del método D-H se define la matriz de las articulaciones:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \sin \theta_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1})$$

Se realiza una simplificación de términos donde:

$$\cos \theta_i = C \theta_i$$

$$\sin \theta_i = S \theta_i$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i S\theta_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 2})$$

Se obtienen las matrices de transformación de cada sistema coordinado con relación al anterior y se simplifica nuevamente la nomenclatura, reemplazando los valores de la Tabla 2 en la ecuación (Ec. 2), queda entonces:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & 0 & -Cq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3})$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 & 0 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4})$$

Al multiplicar estas matrices, se obtiene la matriz de transformación homogénea (Ec. 5) del elemento terminal sistema coordinado (S_2) respecto al sistema coordinado fijo (S_0).

$$T = {}^0A_2 = {}^0A_1 \times {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & S_1 d_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & -C_1 d_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 5})$$

Se tiene que:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 6})$$

Donde $\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}$ es una terna ortonormal que representa la orientación y $\vec{p}$ es un vector que representa la posición. Se desarrollan los términos de la matriz T. [5]

El vector **n** es conocido como el vector normal de la herramienta.

$$\begin{cases} n_x &= & C_1 C_2 \\ n_y &= & S_1 S_2 \\ n_z &= & S_2 \end{cases}$$

El vector **o** es conocido como el vector deslizamiento de la herramienta.

$$\begin{cases} o_x &= & -C_1 S_2 \\ o_y &= & -S_1 S_2 \\ o_z &= & C_2 \end{cases}$$

El vector **a** es conocido como el vector de aproximación de la herramienta.

$$\begin{cases} a_x &= & S_1 \\ a_y &= & -C_1 \\ a_z &= & 0 \end{cases}$$

Finalmente la posición de la herramienta está dada por:

$$\begin{cases} p_x &= & S_1 d_2 \\ p_y &= & -C_1 d_2 \\ p_z &= & d_1 \end{cases}$$

Donde:

$$C_1 = \cos(q_1)$$

$$S_1 = \sin(q_1)$$

$$C_2 = \cos(q_2)$$

$$S_2 = \sin(q_2)$$

3.1.1 Método 1 evaluación modelo cinemático.

Se escribe en MATLAB®, la función *MDH*, la cual a través de los scripts *MESAMDH* y *MESAMDH2*, arroja las matrices de transformación homogénea asociada a los correspondientes parámetros (ángulos articulares), las cuales son iguales a las matrices calculadas anteriormente (Ec. 3), (Ec. 4) y (Ec. 5), esta evaluación se muestra en la Figura 11.

Figura 11. Transformación homogénea obtenida por medio de MATLAB

```
>> MESAMDH
```

```
A01 =
```

```
[ cos(q1), 0, sin(q1), 0]
[ sin(q1), 0, -cos(q1), 0]
[      0, 1,      0, d1]
[      0, 0,      0, 1]
```

```
A12 =
```

```
[ cos(q2), -sin(q2), 0, 0]
[ sin(q2),  cos(q2), 0, 0]
[      0,      0, 1, d2]
[      0,      0, 0, 1]
```

```
T =
```

```
[ cos(q1)*cos(q2), -cos(q1)*sin(q2), sin(q1), d2*sin(q1)]
[ cos(q2)*sin(q1), -sin(q1)*sin(q2), -cos(q1), -d2*cos(q1)]
[      sin(q2),      cos(q2),      0,      d1]
[      0,      0,      0,      1]
```

```
>> MesaMDH2
```

```
A01 =
```

```
[ cos(q1), 0, sin(q1), 0]
[ sin(q1), 0, -cos(q1), 0]
[      0, 1,      0, 287]
[      0, 0,      0, 1]
```

```
A12 =
```

```
[ cos(q2), -sin(q2), 0, 0]
[ sin(q2),  cos(q2), 0, 0]
[      0,      0, 1, 603/10]
[      0,      0, 0, 1]
```

```
T =
```

```
[ cos(q1)*cos(q2), -cos(q1)*sin(q2), sin(q1), (603*sin(q1))/10]
[ cos(q2)*sin(q1), -sin(q1)*sin(q2), -cos(q1), -(603*cos(q1))/10]
[      sin(q2),      cos(q2),      0,      287]
[      0,      0,      0,      1]
```

Se escribe la función *mcdMesa* la cual hará uso de la función *MDH* para calcular las matrices anteriores. Esta función se emplea en el código *mcdmesaCORRER*, el cual evalúa las matrices dados unos valores de q_1 y a q_2 . Estos resultados se muestran en la Figura 12.

Figura 12. Evaluación del código MATLAB *McdMesa*.

Parámetros 1: $q_1=0^\circ$ y $q_2=0^\circ$ **Parámetros 2:** $q_1=90^\circ$ y $q_2=180^\circ$

<code>>> mcdmesaCORRER</code>					<code>>> mcdmesaCORRER</code>				
T =					T =				
1.0000	0	0	0		-0.0000	0.0000	1.0000	60.3000	
0	0.0000	-1.0000	-60.3000		-1.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	
0	1.0000	0.0000	287.0000		0.0000	-1.0000	0.0000	287.0000	
0	0	0	1.0000		0	0	0	1.0000	

3.1.2 Método 2 evaluación modelo cinemático

Se realiza una segunda evaluación en Matlab llamado *MesaInput*, los resultados se muestran en la Figura 13. La evaluación teórica 2 hace referencia a otra implementación que se desarrolló para confrontar el desarrollo matemático realizado para el método 1 evaluación modelo cinemático.

Los resultados de la evaluación 1 y 2 demuestran la igualdad de resultados que se presenta para el desarrollo del modelo cinemático directo. Siendo de más utilidad el código de evaluación 2, debido a la interfaz con el usuario en el momento de ingresar los parámetros.

Figura 13. Evaluación del código MATLAB *MesaInput*

Ingrese el valor de q1 (grados) :0	Ingrese el valor de q1 (grados) :90
Ingrese el valor de q2 (grados) :0	Ingrese el valor de q2 (grados) :180
A01 =	A01 =
1 0 0 0	0.0000 0 1.0000 0
0 0 -1 0	1.0000 0 -0.0000 0
0 1 0 287	0 1.0000 0 287.0000
0 0 0 1	0 0 0 1.0000
A12 =	A12 =
1.0000 0 0 0	-1.0000 -0.0000 0 0
0 1.0000 0 0	0.0000 -1.0000 0 0
0 0 1.0000 60.3000	0 0 1.0000 60.3000
0 0 0 1.0000	0 0 0 1.0000
T =	T =
1.0000 0 0 0	-0.0000 -0.0000 1.0000 60.3000
0 0 -1.0000 -60.3000	-1.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000
0 1.0000 0 287.0000	0.0000 -1.0000 0 287.0000
0 0 0 1.0000	0 0 0 1.0000

3.1.3 Método de evaluación por medio del Toolbox de Robótica.

Se realiza también una simulación en la herramienta de Toolbox de Robótica de Peter Corke, el cual funciona en Matlab [5], el programa hace uso de la función **Link**, para la definición de las características cinemáticas y dinámicas y la función **SerialLink** para la concatenación de las mismas para formar el robot [13]. Se observa en la Figura 14. Una vez definido el robot, se usa la función **fkine** que resuelve el modelo cinemático directo [13]. Se observan en la Figura 15, los resultados de la evaluación, se usan los parámetros 1 y 2 que son los ángulos articulares que se dieron anteriormente.

Figura 14. Resultados de la función Serial Link.

```
>> startup_rvc
Robotics, Vision & Control: (c) Peter Corke 1992-2011 http://www.petercorke.com
- Robotics Toolbox for Matlab (release 9.8)
>> MESA

Mesa_dosgd1 =

Mesa Posicionadora (2 axis, RR, stdDH)

+-----+-----+-----+-----+-----+
| j |      theta |      d |      a |      alpha |
+-----+-----+-----+-----+-----+
| 1 |      q1 |      287 |      0 |      1.571 |
| 2 |      q2 |      60.3 |      0 |      0 |
+-----+-----+-----+-----+-----+

grav =      0 base = 1 0 0 0 tool = 1 0 0 0
          0      0 1 0 0          0 1 0 0
        9.81      0 0 1 0          0 0 1 0
              0 0 0 1          0 0 0 1
```

Figura 15. Evaluación de los parámetros 1 y 2 por medio de la función fkine del toolbox robótica.

Parámetros 1: $q1=0^\circ$ y $q2=0^\circ$ **Parámetros 2:** $q1=90^\circ$ y $q2=180^\circ$

```
ans =

-0.0000    0.0000    1.0000    60.3000
-1.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
 0.0000   -1.0000    0.0000   287.0000
      0          0          0    1.0000

ans =

1.0000    0    0    0
0    0.0000   -1.0000  -60.3000
0    1.0000    0.0000  287.0000
0    0    0    1.0000
```

Se comprueba la utilidad y veracidad del toolbox en la cinemática del dispositivo, por lo tanto se usará esta herramienta para la solución de los demás modelos de movimiento, en este proyecto. Los códigos en Matlab de estos tres métodos se pueden apreciar en el Anexo C.

3.2 CINEMÁTICA INVERSA

El problema de la cinemática inversa se plantea de la siguiente manera: dada la posición y orientación del efector final del manipulador, calcule todos los conjuntos posibles de ángulos articulares que podrían utilizarse para obtener esta posición y orientación dadas. Éste es un problema fundamental en el uso práctico de los manipuladores[11].

La cinemática inversa se calcula con el objetivo de encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares de la mesa giratoria, **q1** y **q2** para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial ($\vec{p}$, $[\vec{n}, \vec{o}, \vec{a}]$). Este problema se solucionó a partir de la manipulación de las matrices de transformación homogénea del modelo dinámico directo, obteniendo así relaciones inversas.

Se tienen las siguientes relaciones de matrices homogéneas para resolver la cinemática inversa:

$$T = {}^0A_1 \cdot A_2 \quad (\text{Ec. 7})$$

$$({}^0A_1)^{-1} \cdot T = {}^1A_2 \quad (\text{Ec. 8})$$

$$({}^1A_2)^{-1} \cdot T = {}^0A_1 \quad (\text{Ec. 9})$$

$$({}^0A_1)^{-1}({}^1A_2)^{-1} \cdot T = I \quad (\text{Ec. 10})$$

Al hacer la inversa de las matrices homogéneas 0A_1 y 1A_2 se obtiene:

$$({}^0A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 11})$$

$$({}^1A_2)^{-1} = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 12})$$

Para encontrar el valor de **q1**, se reemplaza y se resuelve la ecuación (Ec. 8)

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 n_x + S_1 n_y & C_1 o_x + S_1 o_y & C_1 a_x + S_1 a_y & C_1 p_x + S_1 p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z - d_1 \\ S_1 n_x - C_1 n_y & S_1 o_x - C_1 o_y & S_1 a_x - C_1 a_y & S_1 p_x - C_1 p_y \\ 0 & 0 & d_1 a o_z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 13})$$

Al tomar el elemento (4,1) se obtiene **q1**:

$$\begin{aligned} C_1 p_x + S_1 p_y &= 0 \\ C_1 p_x &= -S_1 p_y = 0 \\ \frac{p_x}{-p_y} &= T_1 \\ -\frac{p_x}{p_y} &= \tan \theta_1 \\ q_1 &= \tan^{-1} \left(-\frac{p_x}{p_y} \right) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 14})$$

Ahora se reemplaza y resuelve la ecuación (Ec. 10)

$$\begin{bmatrix} C_2 C_1 & C_2 S_1 & S_2 & -S_2 d_1 \\ -S_2 C_1 & -S_1 S_2 & C_2 & -C_2 d_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2 C_1 n_x + C_2 S_1 n_y + S_2 n_z & C_2 C_1 o_x + C_2 S_1 o_y + S_2 o_z & C_2 C_1 a_x + C_2 S_1 a_y + S_2 a_z & C_2 S_1 p_x + C_2 S_1 p_y + S_2 p_z - S_2 d_1 \\ -S_2 C_1 n_x - S_1 S_2 n_y + C_2 n_z & -S_2 C_1 o_x - S_1 S_2 o_y + C_2 o_z & -S_2 C_1 a_x - S_1 S_2 a_y + C_2 a_z & -S_2 C_1 p_x - S_1 S_2 p_y + C_2 p_z - C_2 d_1 \\ S_1 n_x - C_1 n_y & S_1 o_x - C_1 o_y & S_1 a_x - C_1 a_y & S_1 p_x - C_1 p_y - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 15})$$

Se toma el elemento (2,1) de la matriz y se obtiene **q2**:

$$\begin{aligned}
-S_2 C_1 n_x - S_1 S_2 n_y + C_2 n_z &= 0 \\
(-S_2)(C_1 n_x + S_1 n_y) + C_2 n_z &= 0 \\
\frac{S_2}{C_2} &= \frac{n_z}{C_1 n_x + S_1 n_y} \\
\tan \theta_2 &= \frac{n_z}{C_1 n_x + S_1 n_y} \\
\theta_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{n_z}{C_1 n_x + S_1 n_y}\right) \quad (\text{Ec. 16})
\end{aligned}$$

Se tiene del elemento (3,1) que:

$$\begin{aligned}
S_1 n_x - C_1 n_y &= 0 \\
S_1^2 n_x^2 - 2C_1 S_1 n_y n_x + C_1^2 n_y^2 &= 0 \\
S_1^2 n_x^2 + C_1^2 n_y^2 - 2C_1 S_1 n_y n_x &= 0 \quad (\text{Ec. 17})
\end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$S_1^2 + C_1^2 = 1 \quad (\text{Ec. 18})$$

Se obtienen:

$$\begin{aligned}
S_1^2 &= 1 - C_1^2 \\
C_1^2 &= 1 - S_1^2 \quad (\text{Ec. 19})
\end{aligned}$$

Se reemplazan las ecuaciones (Ec. 19) en la ecuación (Ec. 17) resulta pues:

$$\begin{aligned}
(1 - C_1^2) n_x^2 + (1 - S_1^2) n_y^2 - 2C_1 S_1 n_y n_x &= 0 \\
n_x^2 - C_1^2 n_x^2 + n_y^2 - S_1^2 n_y^2 - 2C_1 S_1 n_y n_x &= 0 \\
n_x^2 + n_y^2 = C_1^2 n_x^2 + 2C_1 S_1 n_y n_x + S_1^2 n_y^2 \\
n_x^2 + n_y^2 &= (C_1 n_x + S_1 n_y)^2 \\
\pm \sqrt{n_x^2 + n_y^2} &= C_1 n_x + S_1 n_y \quad (\text{Ec. 20})
\end{aligned}$$

Finalmente se reemplaza la ecuación (Ec. 20) en la ecuación (Ec. 16) y se tiene:

$$q_2 = \tan^{-1}\left(\frac{n_z}{\pm \sqrt{n_x^2 + n_y^2}}\right) \quad (\text{Ec. 21})$$

Las ecuaciones (Ec. 14) y (Ec. 21) corresponden a la solución del problema cinemático inverso para la mesa giratoria.

$$q_1 = \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) \quad (\text{Ec. 22})$$

$$q_2 = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{n_z}{\pm\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}\right) \quad (\text{Ec. 23})$$

Cabe recordar que el problema de la cinemática inversa tiene múltiples soluciones, el Anexo D muestra otra solución por medio del Toolbox de Robótica de Peter Corke.

4. MODELO DINÁMICO DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

Conociendo los parámetros físicos de cualquier robot, se pueden resolver problemas relacionados con su dinámica, la dinámica inversa y la dinámica directa. El problema de la dinámica inversa es encontrar los pares de torsión y/o las fuerzas de actuadores que son necesarios para generar la trayectoria deseada del robot. Esta formulación de la dinámica es útil para el problema del control del robot. El segundo problema, la dinámica directa, es encontrar la respuesta de un brazo de robot respecto a algunos pares de torsión o fuerzas en las articulaciones. Por lo tanto, el modelo dinámico de un robot, tiene por objeto conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo [12], [14], [15].

El modelo dinámico de la mesa de dos grados de libertad puede hallarse por métodos convencionales como las formulaciones de LaGrange- Euler (L-E) y Newton- Euler (N-E). Se escogió la formulación de LaGrange- Euler (L-E) porque se puede utilizar para analizar y diseñar estrategias de control avanzadas en el espacio de las variables de la articulación[2], el diseño de estrategias de control, se realizará en trabajos futuros, además el método LaGrange-Euler es simple y sistemático y aunque este modelo consume más tiempo de procesamiento computacional debido a sus operaciones matemáticas[14], esta desventaja se ve compensada por la baja cantidad de articulaciones que tiene el dispositivo.

Figura 16. Propiedades físicas e inerciales del elemento articular 1.

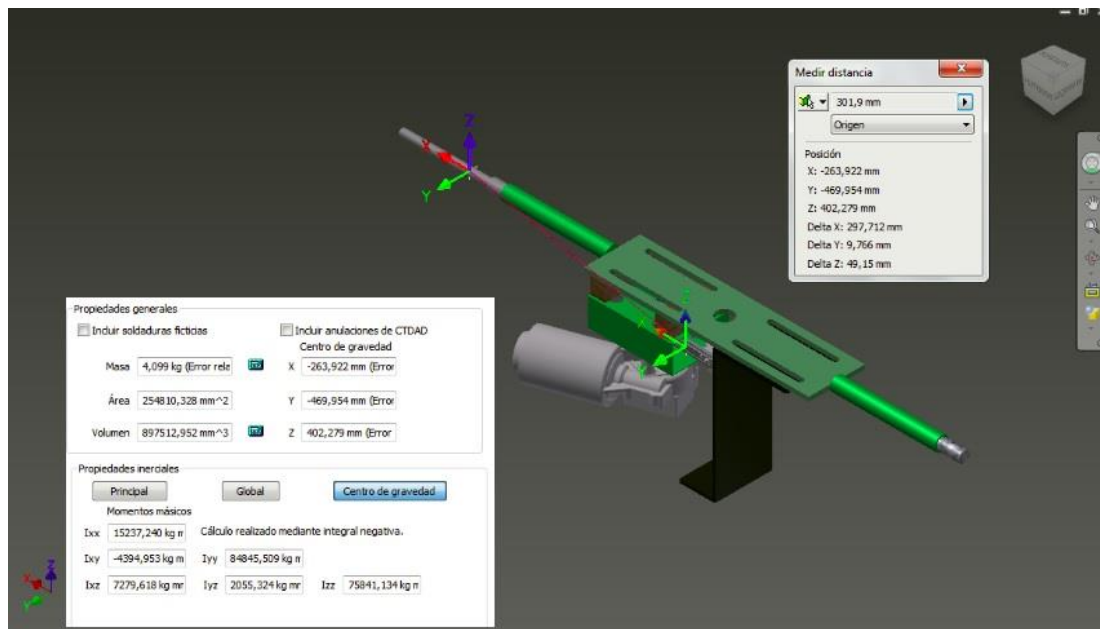
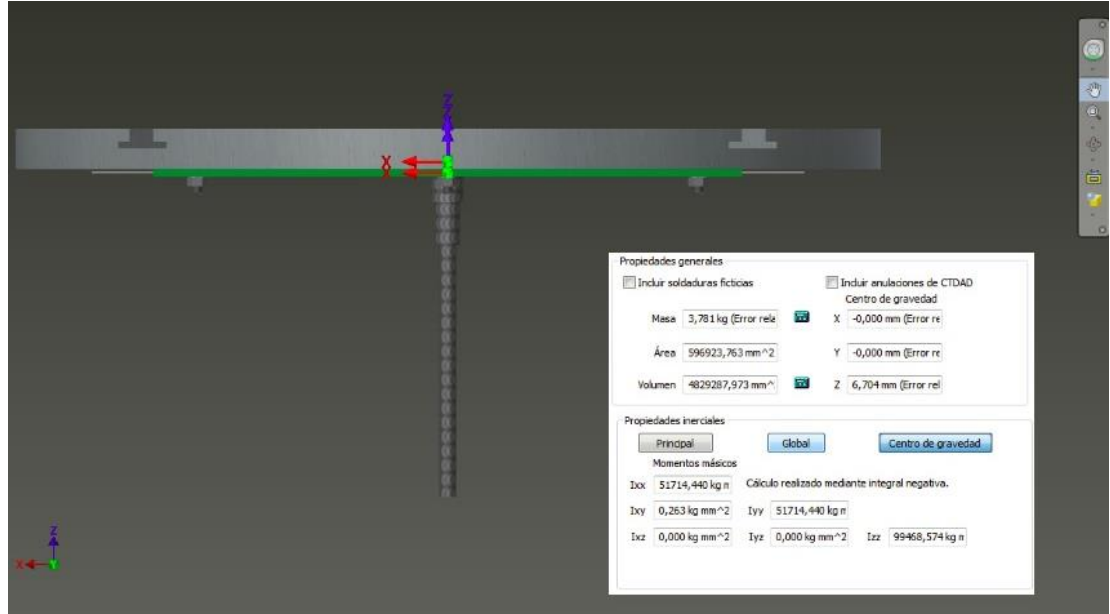


Figura 17. Propiedades físicas e inerciales del elemento articular 2.



En Las figuras Figura 16 y

Figura 17, se pueden ver las propiedades inerciales, las cuales sirven para determinar las matrices de pseudoinercias que son importantes para lograr desarrollar el método de LaGrange-Euler.

Se desarrolla el algoritmo computacional de LaGrange- Euler (L-E), desarrollado por Uicker, para la obtención del modelo dinámico de la mesa de dos grados de libertad, véase el desarrollo en el Anexo E.

$$T_1 = (c_2^2 J_{2x} + s_2^2 J_{2y} + J_{2z} - 2d_2 L_1 m_2 + d_2^2 m_2) \ddot{\theta}_1 + (-2s_2 s_2 J_{2x} + 2c_2 s_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - c_1 m_2 g L_1 + c_1 d_2 m_2 g \quad (\text{Ec. 24})$$

$$T_2 = (J_{2x} + J_{2y}) \ddot{\theta}_2 + (c_2 s_2 J_{2x} - 2s_2 c_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{Ec. 25})$$

Dónde:

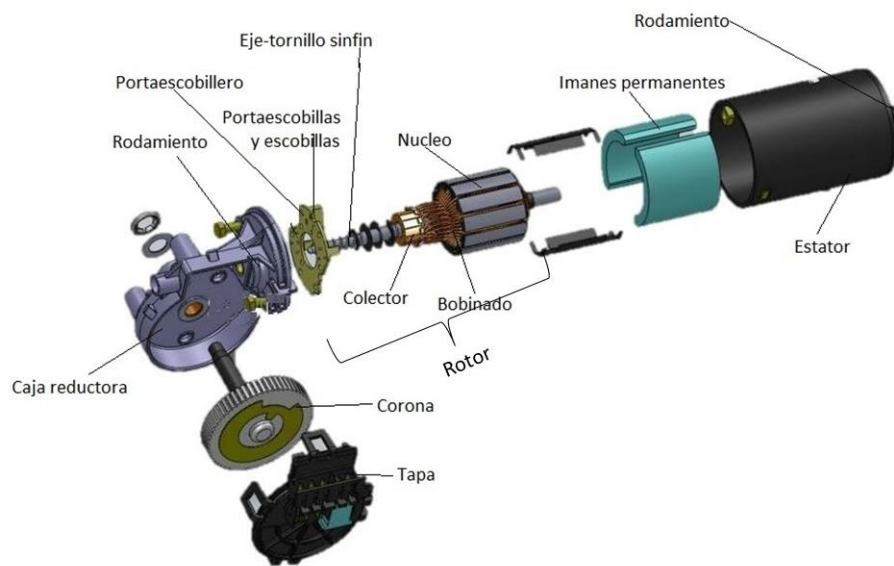
T_1 es el par motor efectivo que actúa sobre la articulación 1, el cual presenta una componente inercial, una componente de coriolis y un componente gravitacional.

T_2 es el par motor efectivo que actúa sobre la articulación 2, el cual presenta una componente inercial y una componente centrífuga.

5. CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LOS ACTUADORES

Los actuadores generan el movimiento de los elementos del robot, estos son motores de corriente continua, tipo imán permanente, tienen una caja reductora poseen un mecanismo de corona tornillo-sinfín, véase Figura 18. Como se mencionó en el capítulo 2, el dispositivo cuenta con dos motores, que hacen posible que haya un grado de libertad rotatorio y otro de basculamiento.

Figura 18. Componentes de motor DC tipo imán permanentes



En este capítulo se muestra la caracterización dinámica de los actuadores del dispositivo robótico. Algunas características en los motores de corriente continua son las de velocidad-corriente y las de par-velocidad. Para hallar estas características existen dos pruebas, una con el motor en vacío (sin carga) y la otra con carga [16]. Estas pruebas se rigen metodológicamente bajo la norma IEEE: “*Procedimientos de ensayo para máquinas DC*” [17] y se encuentra recopilados en el manual “*DC motors, speed controls, servo systems*” [18]. Finalmente se obtienen los parámetros de ambos motores y se realiza el modelo dinámico de los motores.

5.1 PRUEBA EN VACÍO

La prueba consiste en medir corriente y velocidad, variando el voltaje de entrada, tal como se muestra en la Figura 19. [18]. Las pruebas se realizaron con escalones de tensión de 0.5V, desde 0 a 12 V (datos ascendentes), se miden y se registran valores de corriente y velocidad en cada escalón de tensión. Con el motor en funcionamiento a 12 V, se disminuyó el voltaje en escalones de 0.5 V, hasta llegar a 0V (datos descendentes), se miden y se registran valores de corriente y velocidad en cada escalón de tensión. En la

Figura 20 se puede ver el montaje realizado de los motores sin carga.

Se identifican los puntos de corriente de arranque I_a y tensión de arranque V_a , la cual es la mínima corriente y el mínimo voltaje para superar el par causado por la fricción estática y donde el movimiento del eje inicia. Aun sin carga, los motores DC generan una pequeña corriente, la cual se denomina corriente sin carga I_o . La fricción estática, conocido como par de fricción, se calcula por medio de la siguiente ecuación.

$$T_f = K_t I_a \quad (\text{Ec. 26})$$

Dónde:

T_f	=	Par de fricción	[N.m] ó [oz-in]
K_t	=	Constante de par del motor	[Nm/W] ó [oz-in/A]
I_a	=	Corriente de arranque	[A]

Figura 19. Test motores DC sin carga. [18]

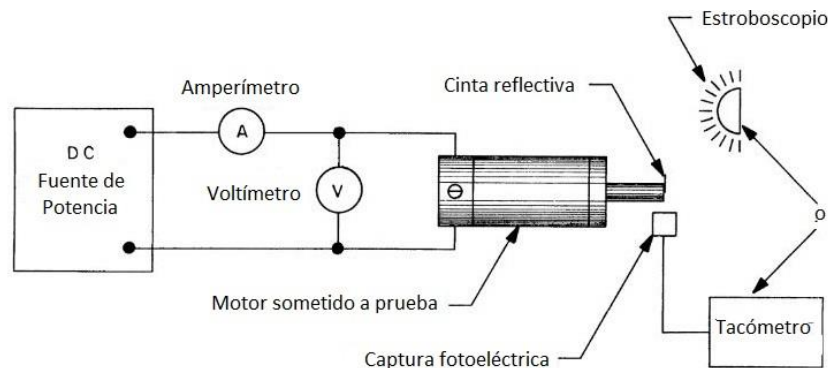
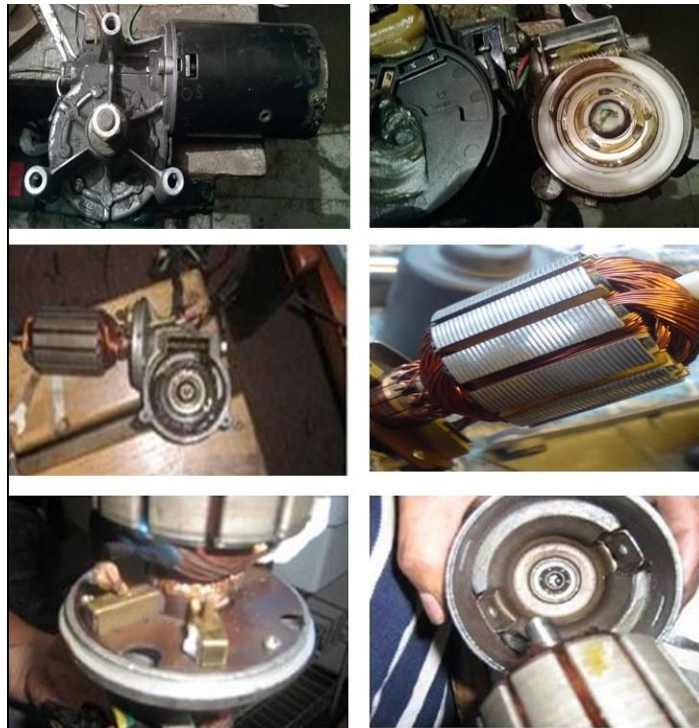


Figura 20. Montaje de la prueba en vacío.



Estos motores fueron modificados en el proyecto realizado en [2], además en el desarrollo del actual proyecto se realiza la reparación de estos, véase Figura 21, debido a que en la prueba al vacío, los motores tuvieron un mal comportamiento, teniendo un alto consumo de corriente y por consiguiente una elevada temperatura en el estator.

Figura 21. Reparación de motores.



Para reparar los motores se realizaron las siguientes actividades:

- Limpieza y rectificado de colector.
- Cambio de escobillas.
- Cambio de bobinado.
- Soldadura de terminales del bobinado en el colector.
- Reconexión de cables a los terminales correctos.
- Configuración para alta velocidad.
- Lubricación de la caja reductora.
- Cambio de rodamientos.

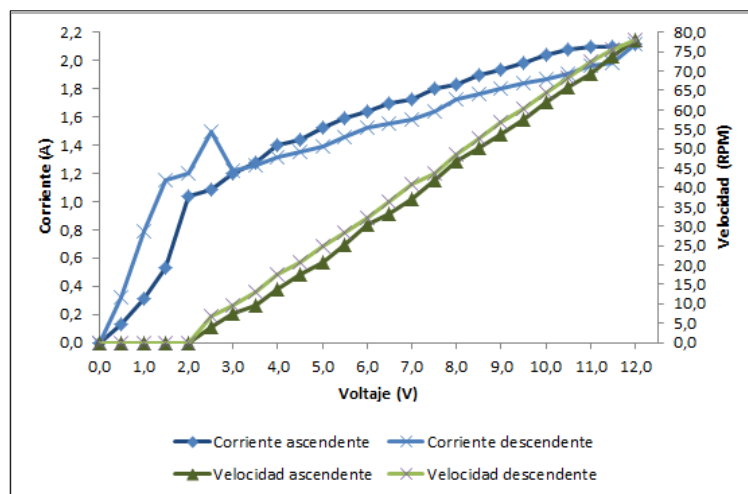
Con las actividades de reparación mencionadas, se produce una alteración en las características de fábrica del motor, por lo que se requiere obtener las nuevas características y los nuevos parámetros de los motores.

5.1.1 Caracterización motor 1

El consumo de corriente antes de la reparación fue 4A, alimentando con una tensión máxima de 12 V, sin carga. Los resultados de estas pruebas iniciales, se muestran en el Anexo G. Luego de realizar la reparación de los motores, se repitieron las pruebas al motor 1. En los datos se observan un buen funcionamiento de los motores, los datos de estas pruebas se encuentran en el Anexo H.

La Figura 22 muestra los valores obtenidos en la prueba, se observan los datos ascendentes y descendentes, esto con el fin de cualificar las pérdidas por histéresis de los motores; para fines prácticos, se tienen en cuenta los datos ascendentes, para la obtención de los parámetros del motor.

Figura 22. Corriente y velocidad vs voltaje. Giro anti-horario



En la Figura 22, se muestra una etapa inicial, en la cual el eje del motor se mantiene sin giro, esta etapa es denominada zona muerta, se observa un alto

consumo de corriente, esto debido a la fricción estática. El movimiento empieza a iniciar en el escalón de tensión de 2.5 V. La velocidad entonces, comienza a variar linealmente respecto a la tensión aplicada, mostrando el comportamiento del motor. La corriente también posee una tendencia lineal, consumiendo inicialmente una gran tasa de corriente, esto debido, a que debe vencer la fricción estática.

Los puntos de corriente y velocidad de arranque son:

$I_a = 1.09 \text{ A}$ Corriente de arranque

$V_a = 2.5 \text{ V}$ Tensión de arranque

Usando la ecuación (Ec. 26), se calcula el par de fricción T_f , el valor de K_t , se obtuvo en el subcapítulo 5.2, donde se calculó esa constante.

$$T_f = 94.34(1.1 \text{ A}) = 102.83 \text{ Oz} - \text{in}$$

En la gráfica se identifica la corriente sin carga I_o , así como la velocidad sin carga N_o , a una tensión nominal de 12 V.

$I_o = 2.1 \text{ A}$ Corriente sin carga

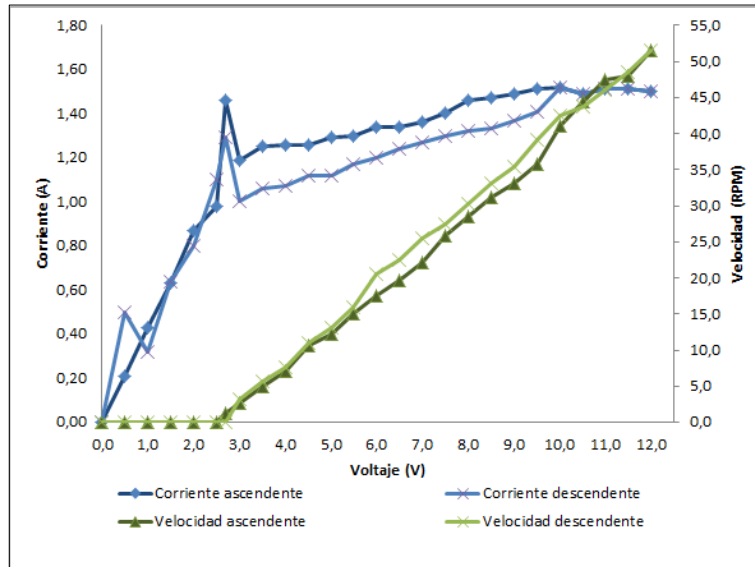
$N_o = 78 \text{ RPM}$ Velocidad sin carga

5.1.2 Caracterización motor 2

El motor 2 en si prueba inicial presento un consumo de 3.5 A, alimentando con una tensión máxima de 12 V, sin carga. Los resultados de estas pruebas iniciales se muestran en Anexo G. Luego de haber realizado la reparación de los motores, se repitieron las pruebas al motor 2. Los datos de estas muestran un buen comportamiento de los motores, y se muestran en el Anexo H.

Así como en el motor 1, se obtienen de los datos ascendentes y descendentes de velocidad y corriente, la Figura 23, el cual muestra la histéresis de los motores. Se usan datos ascendentes para los cálculos.

Figura 23. Corriente y velocidad vs voltaje. Giro anti- horario.



En la Figura 23, se muestra una etapa inicial, en la que el eje se mantiene estático, lo cual es denominado zona muerta, se observa un alto consumo de corriente, esto debido a la fricción estática. El movimiento empieza a iniciar en el escalón de tensión de 2.7 V. La velocidad entonces, comienza a variar linealmente respecto a la tensión aplicada, mostrando un buen comportamiento del motor. La corriente también posee una tendencia lineal, consumiendo inicialmente una gran tasa de corriente, esto debido, a que debe vencer la fricción estática.

Se identifican los puntos de corriente de arranque y tensión de arranque

$I_a = 1.46 \text{ A}$ Corriente de arranque
 $V_a = 2.70 \text{ V}$ Tensión de arranque

Usando la ecuación (Ec. 26), se calcula el par de fricción T_f , el valor de K_t , se obtuvo en el subcapítulo 5.2, donde se calculó esa constante.

$$T_f = 156.25(1.46 \text{ A}) = 228,125 \text{ Oz} - in$$

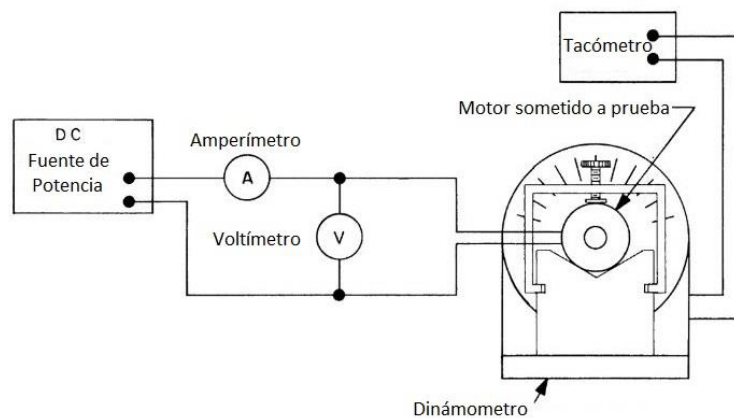
Aun sin carga, los motores DC generan una pequeña corriente, la cual se denomina corriente sin carga I_o , En la Figura 23, se identifica la corriente sin carga I_o , así como la velocidad sin carga N_o , a una tensión nominal de 12 V.

$I_o = 1,5 \text{ A}$ Corriente sin carga
 $N_o = 51.5 \text{ RPM}$ Velocidad sin carga

5.2 PRUEBA CON CARGA

La prueba con carga consiste en obtener las curvas características corriente y velocidad en función del par, con el fin de conocer sus especificaciones y estado actual. El motor está conectado en el aparato de prueba como se muestra en la Figura 24. Se alimenta el motor con una tensión constante, en este caso 12V, se varía el par aplicado, hasta llegar al par de frenado, se miden velocidad n , y el consumo de corriente I , para cada valor de par.

Figura 24. Test motores DC con carga. [18]



Debido a que el laboratorio de robótica no cuenta con un dinamómetro, se debe diseñar y construir un banco de pruebas, con dispositivos de medición capaces de registrar la velocidad de giro y el par del motor. Una alternativa de dinamómetro muy usada es el freno Prony. Véase Figura 25. Este freno permite realizar una adecuada caracterización, tanto de motores eléctricos como de combustión interna, además de su simplicidad funcional como constructiva[19]–[22].

El freno Prony está formado por dos mordazas con superficie cilíndrica, en la cual se ajusta una polea acoplada al eje del motor, se varía la carga por medio de tornillos o por pesas en el extremo de una palanca que hace parte de una de las mordazas. De acuerdo con esto se realiza diseño por medio del software Inventor®. Este modelo se muestra en la Figura 26.

Los materiales y componentes con los que se construyó el freno Prony son de fácil adquisición y el montaje es sencillo. El brazo-mordaza, es de madera nogal, debido a su alto par de fricción y alta resistencia al desgaste en regímenes cortos o intermitentes, la desventaja más notable es el aumento de temperatura a velocidades bajas[23]. Se usan dos tornillos con tuerca mariposa para ajustar la carga en la mordaza. La mordaza, aprieta un buje de bronce, el cual se acopla al eje del motor. El medidor de torque, inicialmente era una báscula de resorte, la

cual se cambió por una digital, ya que esta última cuenta con mayor exactitud, precisión y resolución. Se usa un tacómetro para medir la velocidad. Como banco de prueba se usa el soporte del motor 1, el cual se asegura por medio de dos prensas en C, en una de las mesas del laboratorio. El montaje se muestra en la Figura 27.

Figura 25. Tipos de configuración de freno Prony. [24] [23] [20] [25]

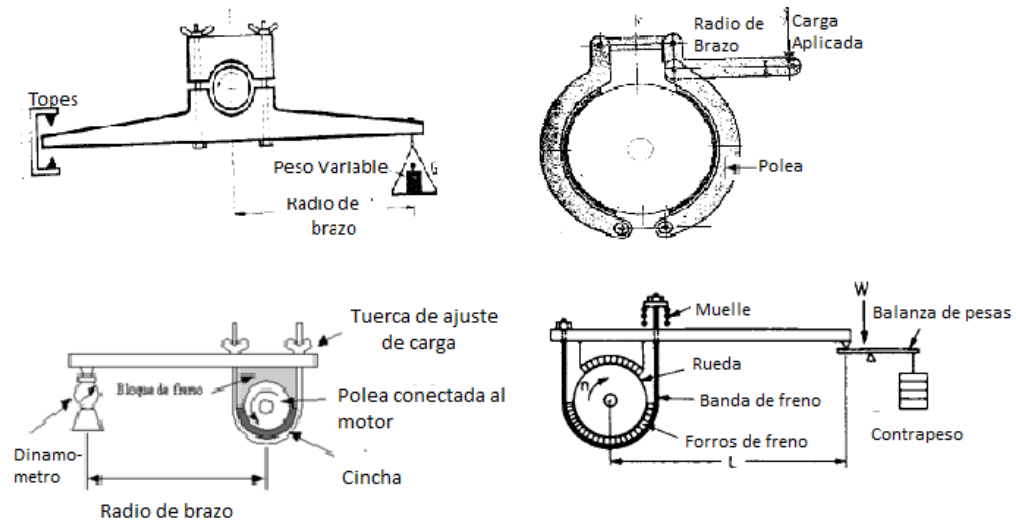


Figura 26. Modelo del dinamómetro.

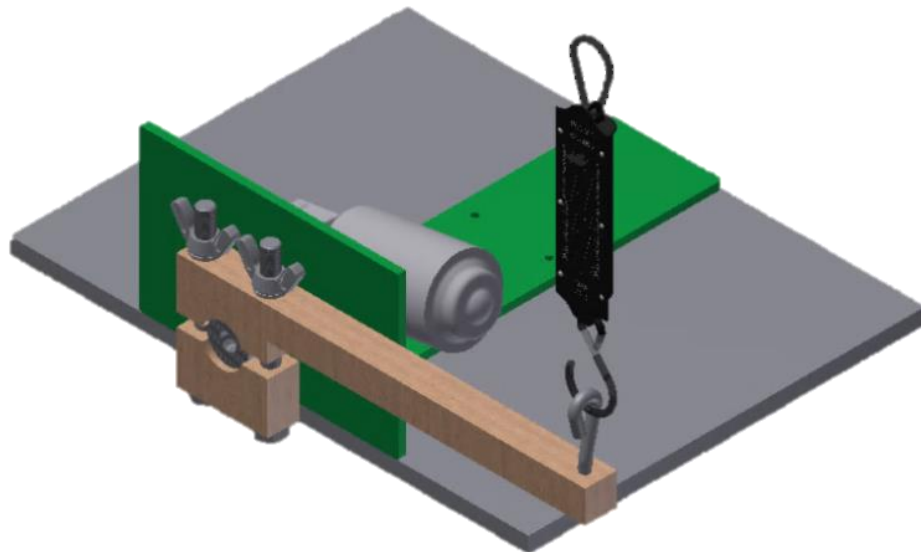
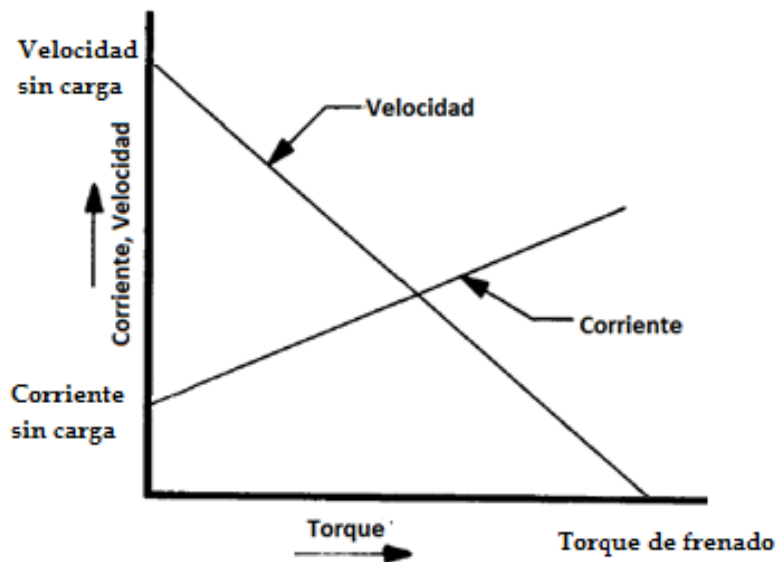


Figura 27. Montaje del dinamómetro



En los motores DC de imán permanente la curvas velocidad y corriente en función del par son lineales, como se muestra en la Figura 28 [26].

Figura 28. Curva característica de un motor DC imán permanente. [18]



Las curvas típicas de potencia P_{sal} de salida y eficiencia η son como se muestra en la Figura 29.

Los datos para la curva de eficiencia respecto al torque se calcula por medio de:

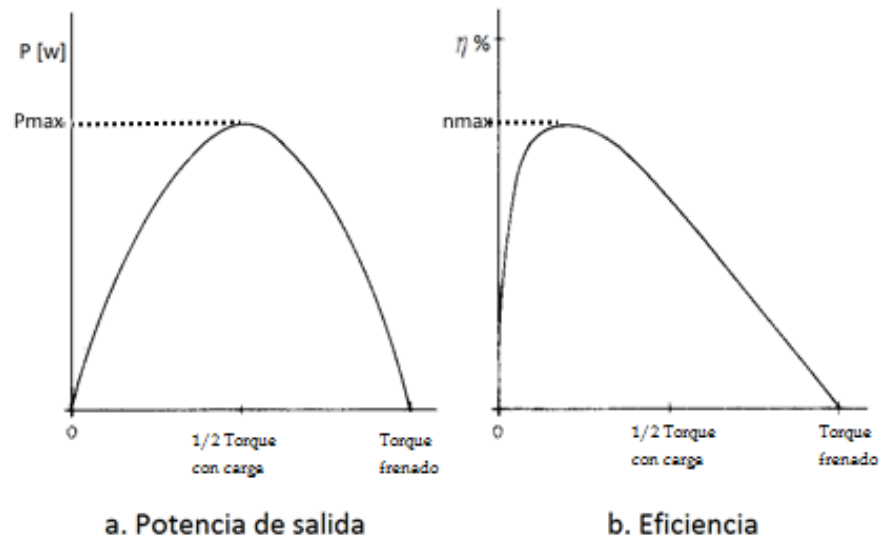
$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} * 100 = \frac{\left(\frac{2\pi.T.n}{60} \right)}{(V.I)} * 100 \quad (\text{Ec. 27})$$

Dónde:

η	=	Eficiencia	[%]
P_{sal}	=	Potencia de salida	[W]
P_{ent}	=	Potencia de entrada	[W]
T	=	Par mecánico	[oz-in]
V	=	Voltaje	[V]
I	=	Corriente	[A]

Figura 29. Curvas de potencia de salida y eficiencia [26]

Fuente: “Servo Motor Application Notes” [26]



La parada se produce cuando el motor está intentando girar o moverse contra una fuerza que excede la cantidad de par que puede generar internamente, y en cualquier momento el motor se pone en marcha desde una posición de reposo y en cualquier momento el motor invierte la dirección. Este es un punto importante: el par de torsión y la corriente de parada ocurre cada vez que el motor arranca desde un tope o invierte la dirección [27].

En la prueba se realiza el procedimiento, que se describió anteriormente. Los datos y resultados se tabulan, los valores se observan en el Anexo I.

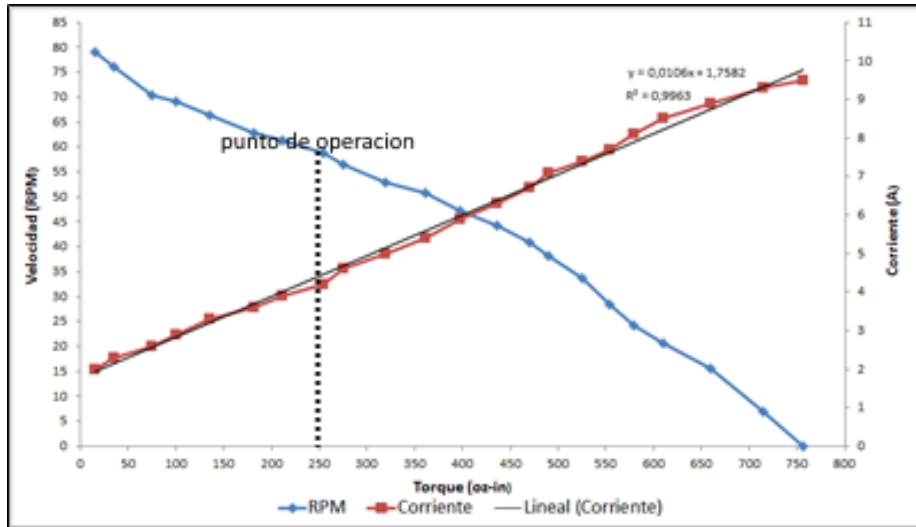
Además de obtener las curvas características bajo carga, se obtiene la constante de torque, K_t , parámetro necesario para modelar dinámicamente los motores. La constante de torque K_t , se obtiene hallando la pendiente de la curva corriente vs par.

$$K_t = \frac{\Delta T}{\Delta I} \quad (\text{Ec. 28})$$

5.2.1 Caracterización Motor 1

Se muestran en las Figura 30 y Figura 31, las curvas características del motor uno y se realiza análisis a dichas gráficas.

Figura 30. Corriente y velocidad vs par



Se realiza una regresión lineal, se calcula la pendiente, $m = \frac{\Delta I}{\Delta T}$, 0.0106 A/ oz-in, con la ecuación (Ec. 28) se halla constante de torque

$$K_t = \frac{1}{m} = \frac{1}{0.0106 \frac{A}{oz-in}} = 94.34 \frac{oz-in}{A}$$

En la figura se muestra un punto de operación, el cual está ubicado a un tercio del valor de frenado, este punto está definido por el tipo de servicio, el cual es intermitente, se definen los valores de funcionamiento nominal, como lo son: la corriente nominal, la velocidad nominal y el torque nominal.

$$\begin{aligned}
 I_{nom} &= 4.2 \text{ A} \\
 n_{nom} &= 58.8 \text{ rpm} \\
 T_{nom} &= 254.5 \text{ oz-in}
 \end{aligned}$$

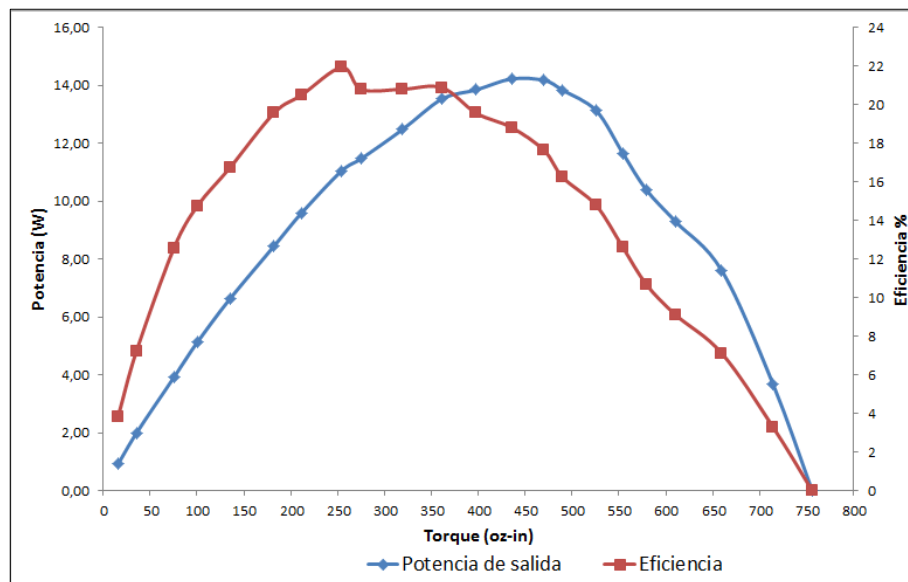
La corriente y el torque de frenado, es decir cuando la velocidad es cero, son:

$$\begin{aligned}
 I_{fren} &= 9.5 \text{ A} \\
 T_{fren} &= 756.1 \text{ oz-in}
 \end{aligned}$$

La velocidad máxima ocurre cuando no se aplica carga ($T = 0 \text{ oz-in}$)

$$V_{m\acute{a}x} = 78 \text{ rpm}$$

Figura 31. Potencia de salida y eficiencia



De acuerdo al punto de torque nominal, señalado anteriormente, la potencia y eficiencia nominal son:

$$\begin{aligned}
 P_{nom} &= 11.1 \text{ W} \\
 \eta_{nom} &= 18.8 \%
 \end{aligned}$$

Los valores máximos de potencia y eficiencia son:

$$P_{\max} = 14.2 \text{ W}$$

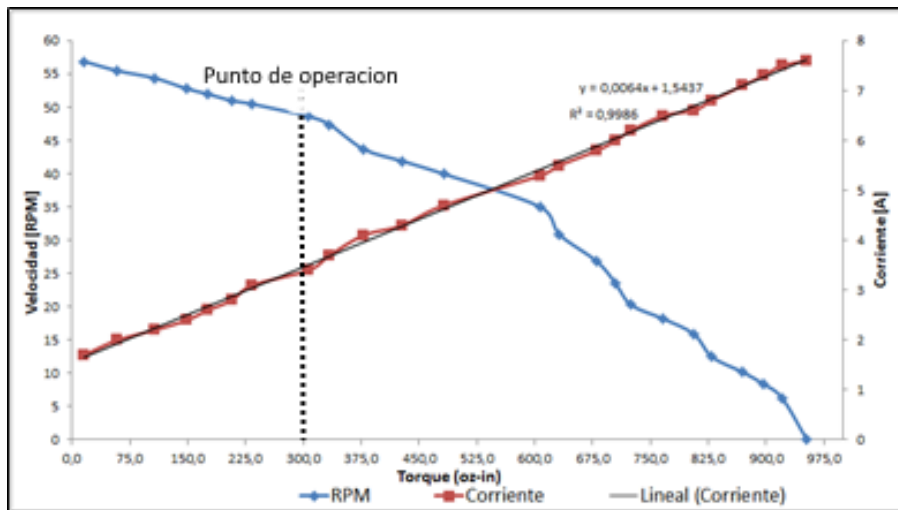
$$\eta_{\max} = 21.9 \%$$

5.2.2 Caracterización Motor 2

Se muestran en la Figura 32 y

Figura 33, las curvas características del motor dos y se realiza análisis a dichas gráficas.

Figura 32. Corriente y velocidad vs par



Se realiza una regresión lineal, se obtiene la pendiente, $m = \frac{\Delta I}{\Delta T}$, 0.0064 A/ oz-in, con la ecuación (Ec. 28) se halla la constante de torque

$$K_t = \frac{1}{m} = \frac{1}{0.0064 \frac{\text{A}}{\text{oz-in}}} = 156.25 \frac{\text{oz-in}}{\text{A}}$$

se muestran los valores de funcionamiento nominal:

$$I_{nom} = 3.4 \text{ A}$$

$$n_{nom} = 48.6 \text{ rpm}$$

$$T_{nom} = 306.8 \text{ oz-in}$$

Los valores de frenado son:

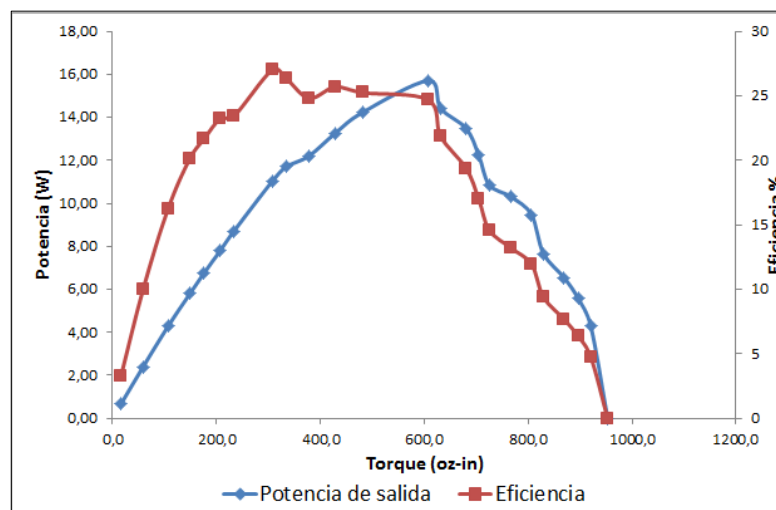
$$I_{fren} = 7.6A$$

$$T_{fren} = 953 \text{ oz-in}$$

La velocidad máxima ocurre cuando no se aplica carga ($T = 0 \text{ oz-in}$)

$$V_{m\acute{a}x} = 56.9 \text{ rpm}$$

Figura 33. Potencia de salida y eficiencia



De acuerdo al punto de torque nominal, señalado anteriormente, la potencia y eficiencia nominal son:

$$P_{nom} = 11.0 \text{ W}$$

$$\eta_{nom} = 27.0 \%$$

Los valores máximos de potencia y eficiencia son:

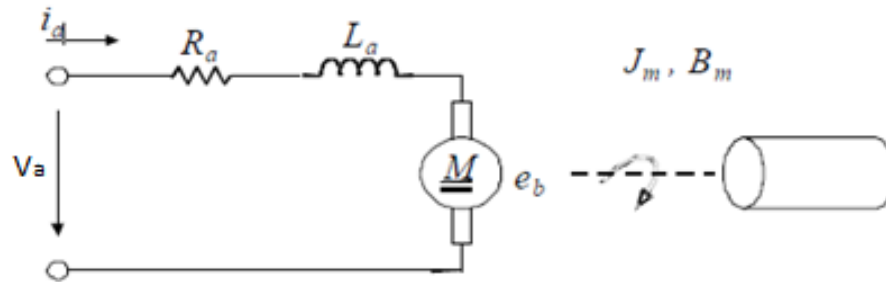
$$P_{max} = 15.7 \text{ W}$$

$$\eta_{max} = 27.0 \%$$

5.3 MODELO DINÁMICO DE LOS ACTUADORES

Se desarrollo el modelo matematico de los actuadores, usando ecuaciones diferenciales y se planteo este modelo en términos de las variables físicas que se tiene en el motor.

Figura 34. Esquema motor DC imán permanente. [28]



Los parámetros físicos de la función de transferencia son:

L_a	=	Inductancia de armadura	H
R_a	=	Resistencia de armadura	Ω
n	=	Velocidad	RPM
w	=	Velocidad angular	rad
e_b	=	Fuerza contra-electromotriz	V
J_m	=	Momento de inercia rotacional	oz-in.s ²
B	=	Coeficiente de fricción viscosa	oz-in.s
K_e	=	Constante eléctrica	V/(rad/s)
K_t	=	Constante mecánica	oz-in/A
V_a	=	Voltaje aplicado	V

Para obtener la función de transferencia de este sistema electro-mecánico, se plantean las ecuaciones que rigen el comportamiento de un motor DC. La descripción de las ecuaciones del motor empieza con la relación entre variables eléctricas y mecánicas

Ecuación eléctrica:

$$V_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t) \quad (\text{Ec. 29})$$

$$e_b(t) = K_e W(t) \text{ (Ec. 30).}$$

Se reemplaza (Ec. 30). en la (Ec. 29), dando como resultado la ecuación eléctrica del motor:

$$V_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_e W(t) \text{ (Ec. 31)}$$

Ecuación mecánica:

$$T(t) = K_t i_a(t) \text{ (Ec. 32)}$$

$$T(t) = J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + B_m W(t) = K_t i_a(t) \text{ (Ec. 33)}$$

Aplicando Transformada de Laplace en (Ec. 31) y (Ec. 33) Se considera condiciones iniciales nulas, se obtiene:

$$V_a(s) = R_a i_a(s) + L_a i_a(s)S + K_e W(s) = i_a(s)(R_a + L_a S) + K_e W(s) \text{ (Ec. 34)}$$

$$T(s) = J_m S W(s) + B_m W(s) \text{ (Ec. 35)}$$

$$i_a(s) = \frac{J_m S W(s) + B_m W(s)}{K_t}$$

Reemplazo (Ec. 35) en la (Ec. 34) y se obtiene la relación entre las variables mecánicas y eléctricas.

$$V_a(s) = \frac{W(s)((J_m S + B_m)(R_a + L_a S) + K_e K_t)}{K_t} \text{ (Ec. 36)}$$

En la (Ec. 37) la entrada es el voltaje y la salida es la velocidad rotacional y se obtiene así la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{W(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{(R_a + L_a s)(B_m + J_m s) + K_e K_t} \text{ (Ec. 37)}$$

5.3.1 Obtención de los parámetros de motores DC

A continuación se obtienen los parámetros del motor de manera experimental, ver el Anexo F.

5.3.1.1 Determinación de la constante de torque (K_t)

La constante de torque K_t , se obtiene hallando la pendiente de la curva Corriente vs Par. [18], [29]

$$K_t = \frac{\Delta T}{\Delta I} \text{ (Ec. 28)}$$

En la sección 5.2.1 se encontró la constante de torque K_t , por medio de las gráficas 5 y 7, el valor de las constantes es:

Actuador 1

$$K_t = 94,34 \frac{\text{oz-in}}{\text{A}}$$

Actuador 2

$$K_t = 156,25 \frac{\text{oz-in}}{\text{A}}$$

5.3.1.2 Determinación de constante eléctrica (K_e)

La constante par de par K_t y la constante de la fuerza contraelectromotriz K_e son dos parámetros separados, pero sus valores están estrechamente relacionados.

Se utiliza la técnica llamada paramétrico dimensional que no recurre a la prueba experimental, pero se reconoce como útil y confiable para los motores DC, se basa en utilizar expresiones que guardan una relación paramétrica dimensional directa entre K_t con la constante de voltaje K_e y cuya comprobación empírica ha sido sustentada [18], [29].

Dichas relaciones paramétricas son:

$$K_t = K_e \text{ [Nm/A; V/rad.s}^{-1}\text{]} \quad \text{(Ec. 38)}$$

$$K_t = 9,5493 \times 10^{-3} \cdot K_e \text{ [Nm/A; V/krpm]} \quad \text{(Ec. 39)}$$

$$K_t = 1,3524 \times 10 K_e \text{ [Oz-in/A; V/krpm]} \quad \text{(Ec. 40)}$$

Se halla el valor de K_e , usando la ecuación (Ec. 40).

Actuador 1

$$K_t = 1,3524 K_e$$

$$K_e = \frac{K_t}{1,3524} = \frac{94,34}{1,3524} = 69,76 \frac{\text{V}}{\text{Krpm}} = 0,67 \frac{\text{V}}{\frac{\text{rad}}{\text{seg}}}$$

Actuador 2

$$K_t = 1,3524 K_e$$

$$K_e = \frac{K_t}{1,3524} = \frac{156,25}{1,3524} = 115,54 \frac{\text{V}}{\text{Krpm}} = 1,10 \frac{\text{V}}{\frac{\text{rad}}{\text{seg}}}$$

5.3.1.3 Determinación de resistencia en la armadura R_a

R_a es el valor de la resistencia al paso de corriente de la carcasa del motor. Para determinar el valor de R_a , se debe medir con un multímetro la resistencia entre las terminales del motor, éste debe estar sin alimentar y girando un poco el rotor. [30] Se toman 5 valores de resistencia y se calcula el promedio, el cual será el valor de la resistencia de armadura.

Actuador 1

Tabla 3. Mediciones de resistencia motor uno

Medición	$R_a [\Omega]$
1	2,83
2	1,92
3	1,87
4	1,78
5	1,87
Promedio	2.05

$$R_a = 2,05 \Omega$$

Motor dos

Tabla 4. Mediciones de resistencia motor dos

Medición	$R_a [\Omega]$
1	2,38
2	2,30
3	2,08
4	1,26
5	1,59
Promedio	1.92

$$R_a = 1,92 \Omega$$

5.3.1.4 Determinación Inductancia de Armadura (L_a)

La inductancia de armadura, así como la resistencia de armadura, se puede determinar directamente de las terminales del motor, por medio de un medidor de inductancia LCR.

Debido a que no se cuenta con dicho equipo, se recurre a un método alternativo. Se alimenta el motor con una fuente de voltaje alterno de frecuencia conocida, f , se aplica una tensión por debajo del 50% de la tensión nominal, V_a , se mide la corriente de armadura, I_a . Se sustituyen estos valores en la siguiente ecuación [29]:

$$L_a = \sqrt{\frac{V_a^2}{I_a^2} - R_a^2} \quad (\text{Ec. 41})$$

En las Tabla 5 y Tabla 6, se muestran los datos usados y el valor obtenido por medio de la ecuación (Ec. 42), para el motor1 y 2 respectivamente.

Actuador 1

Tabla 5. Calculo de inductancia motor uno

V_a	I_a	L_a
4,0	1,4	0,007
4,5	1,4	0,008
5,0	1,5	0,009
5,5	1,6	0,010
6,0	1,6	0,011
Promedio		0,009

$$L_a = 0,009 \text{ H}$$

Actuador 2

Tabla 6. Calculo de inductancia motor dos

V_a	I_a	L_a
4,0	1,26	0,008
4,5	1,26	0,009
5,0	1,29	0,010
5,5	1,30	0,012
6,0	1,34	0,013
Promedio		0,010

$$L_a = 0,010 \text{ H}$$

El valor es muy cercano a cero, debido a que no hay campo variable en los devanados de la armadura e interpolo ya que se aplica un voltaje DC constante. Los valores calculados son muy cercanos al valor que consideran muchos autores, para el desarrollo de simulaciones en Matlab que es de 0.010 Henrios [31].

5.3.1.5 Determinación del momento de inercia (Jm)

Se consideró el rotor, de ambos motores, como un cuerpo netamente cilíndrico[31], se calcula entonces el momento de inercia Jm, con la siguiente ecuación:

$$J_m = \frac{1}{2} m r^2 \quad (\text{Ec. 42})$$

Se mide la masa y el radio de los rotores y se calcula la inercia, por medio de la ecuación (Ec. 42). Se realiza conversión a unidades inglesas.

Actuador 1

$$m = 750 \text{ gr}$$

$$r = 2.6 \text{ cm}$$

$$Jm = 2535 \text{ g-cm}^2$$

$$Jm = 0.0358 \text{ oz-in s}^2$$

Actuador 2

$$m = 780 \text{ gr}$$

$$r = 2.8 \text{ cm}$$

$$Jm = 3057.6 \text{ g-cm}^2$$

$$Jm = 0.0432 \text{ oz-in s}^2$$

5.3.1.6 Determinación de la constante de fricción viscosa (Bm)

La constante B_m se determina fácilmente cuando los motores alcanzan velocidad constante, en este momento la aceleración es cero, se obtiene la siguiente relación:

$$T = J_m \frac{dw}{dt} + B_m w + T_f \quad (\text{Ec. 43})$$

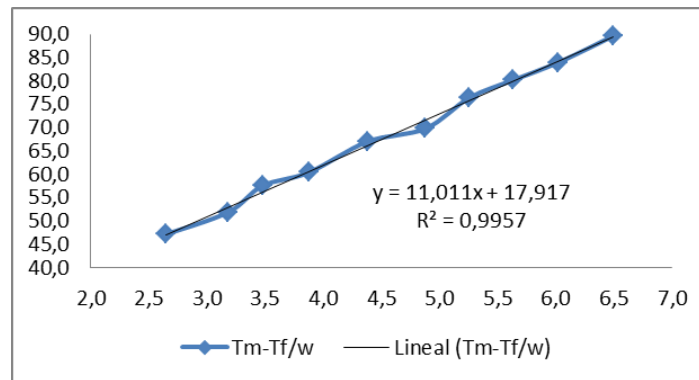
$$\frac{T - T_f}{w} = B_m$$

Con los valores T_f y los datos experimentales de la prueba en vacío que fueron hallados y obtenidos en el subcapítulo 5.1, se grafica la curva de la diferencia de

torque mecánico y torque de fricción respecto a la velocidad angular, al realizar regresión lineal se obtiene la ecuación de la recta, la pendiente de esta será el valor constante B.

Actuador 1

Figura 35. Determinación constante B_m actuador 1

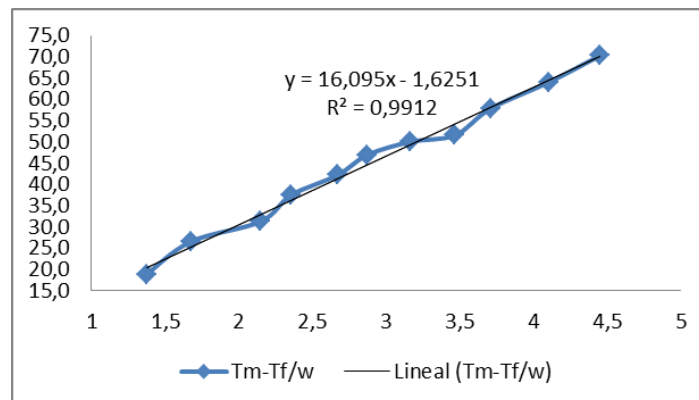


De acuerdo a la Figura 35, la pendiente de la ecuación es 11,011 por lo tanto:

$$B_m = 11,011 \text{ Oz} - \text{in.} \cdot \text{s}$$

Actuador 2

Figura 36. Determinación constante B_m actuador 2



De acuerdo a la Figura 36, la constante de fricción viscosa es:

$$B_m = 16,095 \text{ Oz} - \text{in.} \cdot \text{s}$$

5.3.1.7 Determinación de la constante de tiempo eléctrica (t_e)

Con los valores de R_a y L_a , se calcula la constante de tiempo eléctrica (t_e) [29].[32]

$$t_e = \frac{L_a}{R_a} \quad (\text{Ec. 44})$$

Actuador 1

$$t_e = \frac{0.009H}{2.05\Omega}$$

$$te = 4.39 \text{ mS.}$$

Actuador 2

$$te = \frac{0.010H}{1.92\Omega}$$

$$te = 5.21 \text{ mS.}$$

5.3.1.8 Determinación de la constante de tiempo mecánica (t_m)

Este parámetro se determina a partir del 63.2% del valor final del tiempo, cuando se aplica un escalón de voltaje, para condiciones de carga fija.

Un método de obtener este parámetro, es aplicar un escalón de voltaje y de la gráfica obtenida en un osciloscopio, medio el tiempo requerido, para que la señal de salida alcance el 63,2 % de su valor final.

Otro método es calcular por medio de parámetros que son conocidos, tales como, la constante de torque, K_t , la constante eléctrica, K_e , la resistencia de armadura y finalmente el valor de la inercia del rotor, J_m [18], [33]. Se tiene la siguiente relación:

$$t_m = \frac{J_m R_a}{K_t K_e} \quad (\text{Ec. 45})$$

Reemplazando los valores de los parámetros en la ecuación (Ec. 45), se tiene:

Actuador 1

$$tm = 1.161ms$$

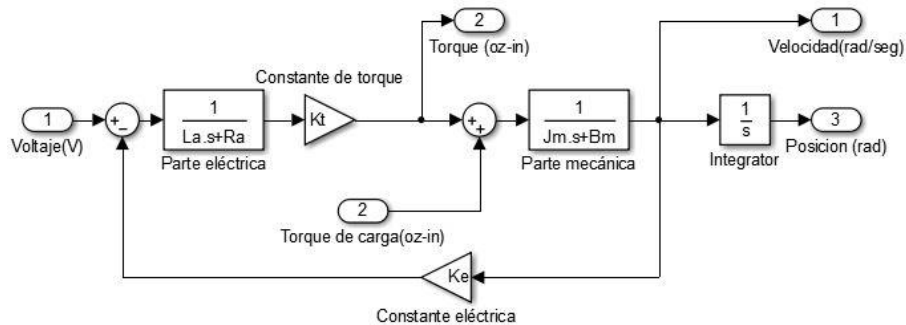
Actuador 2

$$tm = 0.482 \text{ ms}$$

5.3.2 Simulación del modelo de los motores DC

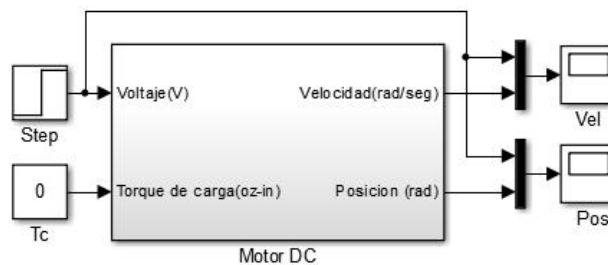
Se realiza la simulación de los motores por medio de *Simulink*®, el cual es una plataforma de Matlab®, que permite analizar, modelar y simular la dinámica de sistemas. En la Figura 37, se muestra el diagrama de bloques de un motor DC en *Simulink*, donde se muestran los parámetros físicos del motor.

Figura 37. Diagrama de bloques en *Simulink*



Se convierte el diagrama anteriormente en un subsistema llamado “Motor DC”, se muestra en la Figura 38 este diagrama. Las entradas son voltaje y torque de carga y las salidas son la velocidad y la posición.

Figura 38. Entradas y salidas de motor CD



La simulación se realiza reemplazando los valores de los parámetros físicos por los mostrados en las Tabla 7 y

Tabla 8, para el motor uno y dos respectivamente. En el bloque Step, se coloca un escalón unitario, en el bloque Tc, se asigna un valor de carga igual a cero, ya que se desea simular el comportamiento de los motores sin carga.

Tabla 7. Parámetros del motor uno

Parámetros motor 1	Símbolo	Unidad	
		Inglesa	Sistema Internacional
Constante de torque	K_t	94,340 <i>Oz-in/A</i>	0,670 N-m/A
Constante eléctrica	K_e	0,670 <i>V/(rad/s)</i>	0,670 <i>V/(rad/s)</i>
Resistencia de armadura	R_a	2,050 Ω	2,050 Ω
Inductancia de armadura	L_a	0,009 <i>H</i>	0,009 H
Inercia de la armadura	J_m	0.0358 <i>Oz-in*s²</i>	0,0002528 <i>Kg-m²</i>
Constante fricción viscosa	B_m	11,011 <i>Oz-in*s</i>	0,0777 <i>N-m*s</i>
Constante tiempo eléctrico	t_e	4,390 <i>ms</i>	4,390 <i>ms</i>
Constante tiempo mecánico	t_m	1,161 <i>ms</i>	1,161 <i>ms</i>

Tabla 8. Parámetros del motor dos

Parámetros motor 2	Símbolo	Unidad	
		Inglesa	Sistema Internacional
Constante de torque	K_t	156,25 <i>Oz-in/A</i>	1,100 N-m/A
Constante eléctrica	K_e	1,100 <i>V/(rad/s)</i>	1.100 <i>V/(rad/s)</i>
Resistencia de armadura	R_a	1,920 Ω	1.920 Ω
Inductancia de armadura	L_a	0,010 <i>H</i>	0,010
Inercia de la armadura	J_m	0.0432 <i>Oz-in*s²</i>	0,0003050 <i>Kg-m²</i>
Constante fricción viscosa	B_m	16,095 <i>Oz-in*s</i>	0,116 <i>N-m*s</i>
Constante tiempo eléctrico	t_e	5,210 <i>ms</i>	5,210 <i>ms</i>
Constante tiempo mecánico	t_m	0,482 <i>ms</i>	0,482 <i>ms</i>

Los resultados de la velocidad y posición del motor uno, se muestran en la Figura 39 y en la Figura 40 respectivamente. Para el motor dos se muestran estas respuestas en la Figura 41 y Figura 42 respectivamente.

Figura 39. Respuesta de la velocidad motor uno al escalón unitario

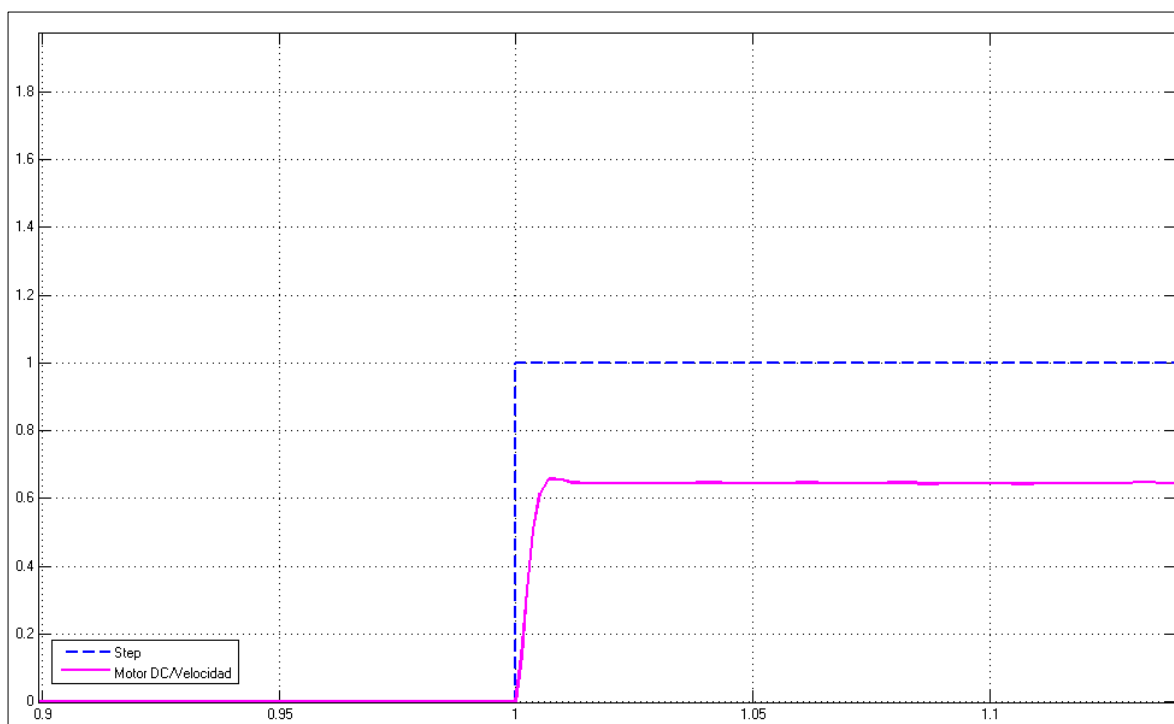


Figura 40. Respuesta de la posición motor uno frente al escalón unitario

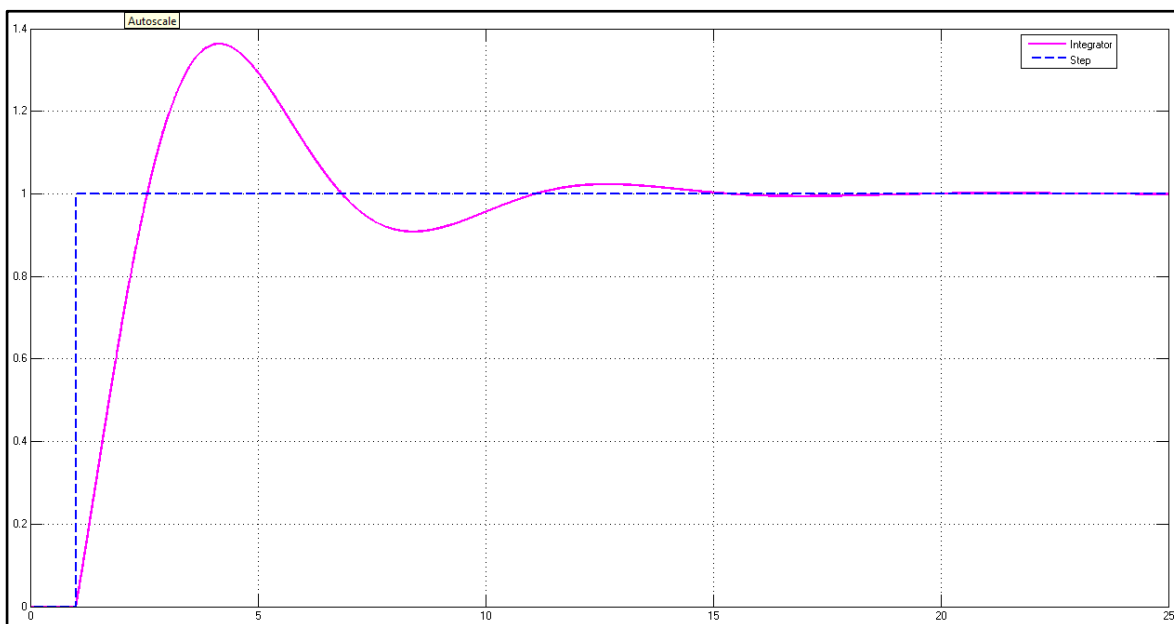


Figura 41. Respuesta de la velocidad del motor uno al escalón unitario

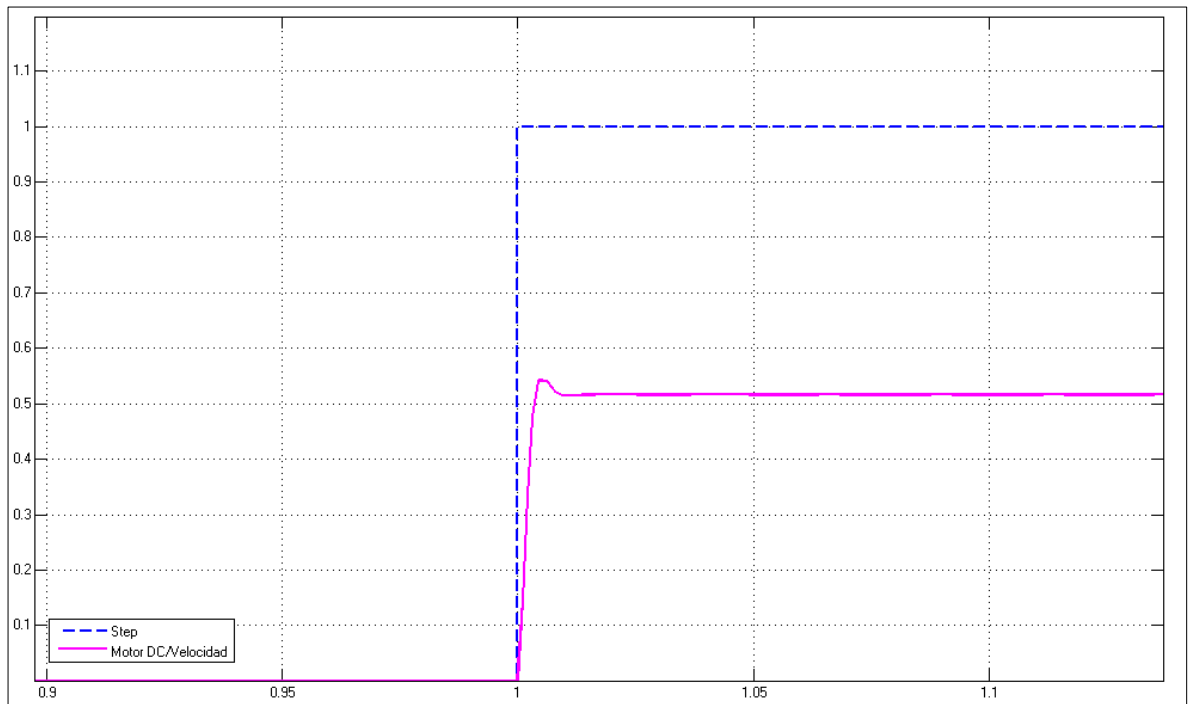
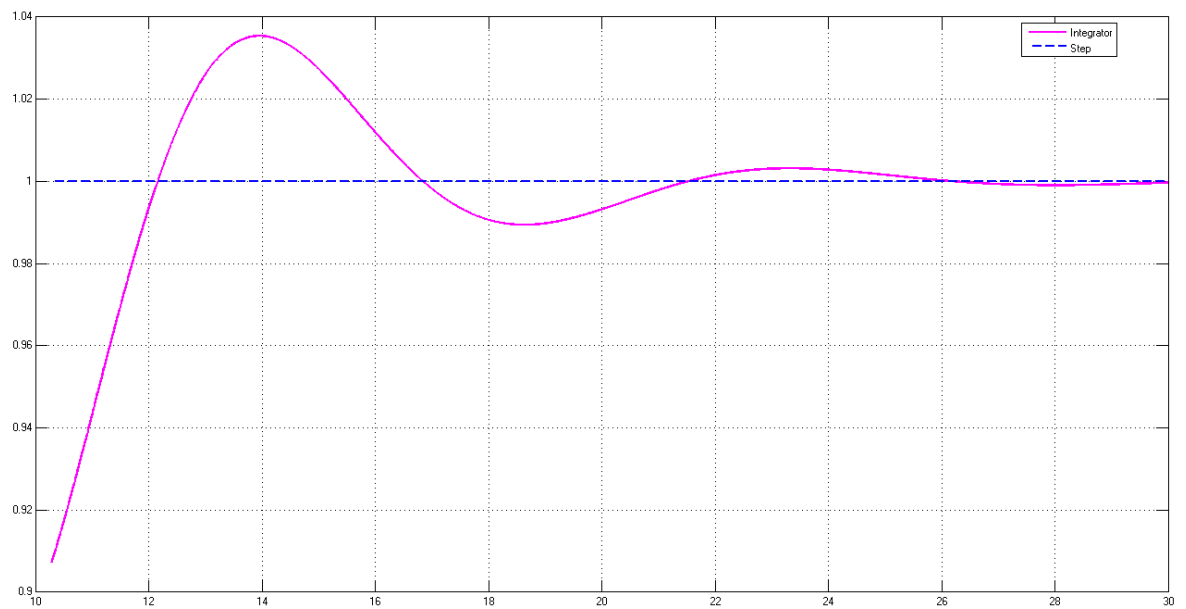
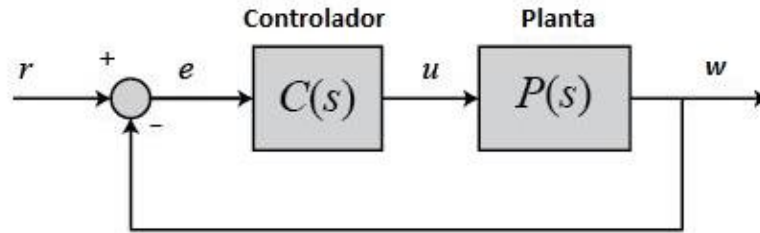


Figura 42. Respuesta de la posición del motor dos al escalón unitario



Para ambos motores la respuesta de velocidad, no es la esperada, respecto al escalon unitario (1rad/seg), por lo tanto se debe modelar y diseñar un controlador PID, que permita que la señal de salida, se acerque al escalon unitario. De igual manera la respuesta de posición no se acerca a la esperada (1 rad). La Figura 43 muestra la estructura de un controlador.

Figura 43. Diagrama de control de una planta.



Fuente: Introduction: PID Controller Design [34]

La salida de un controlador PID, igual a la entrada de control a la planta, en el dominio del tiempo es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) + K_d \frac{de}{dt} \quad (\text{Ec. 46})$$

Un controlador PID funciona en un sistema de circuito cerrado. En la Figura 43 la variable e representa el error de seguimiento, que es la diferencia entre el valor de entrada deseada r y la salida real w . Esta señal de error e es enviada al controlador PID, el controlador calcula tanto la derivada como la integral de esta señal de error. La señal de control u a la planta es igual a la ganancia proporcional K_p veces la magnitud del error, más la ganancia integral K_i veces la integral del error, más la ganancia derivativa K_d por la derivada del error. Esta señal de control u se envía a la planta, y la nueva salida w se obtiene. La nueva salida (w), entonces se realimenta y se compara con la referencia para encontrar la nueva señal de error (e). El controlador realiza esta nueva señal de error y calcula su derivada y su integral de nuevo [34].

La función de transferencia de un controlador PID se encuentra tomando la transformada de Laplace de la (Ec. 46):

$$K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (\text{Ec. 47})$$

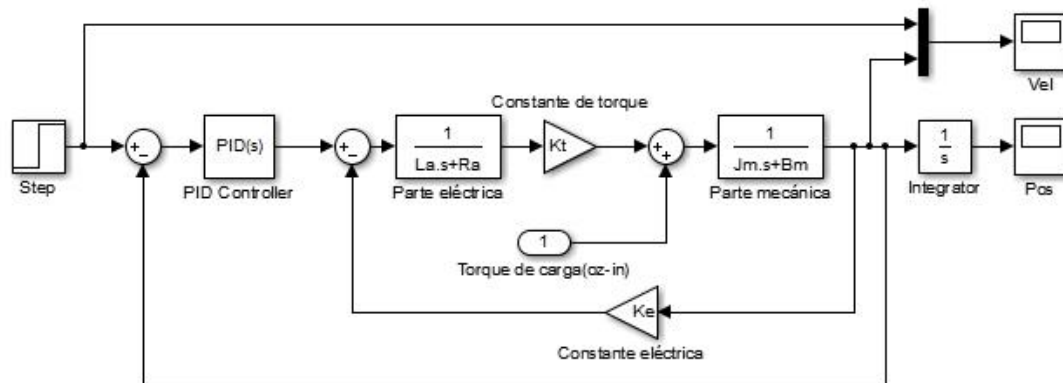
K_p	=	Ganancia proporcional
K_i	=	Ganancia integral
K_d	=	Ganancia derivada

Para que la velocidad del motor se acerque a la velocidad de referencia, la salida del sistema de control debe cumplir con los siguientes requisitos [35].

- Tiempo de establecimiento menor que 2 segundos
- Overshoot menos de 5%
- Error de estado estacionario de menos de 1%

Se realiza el diagrama de bloques de los motores con el control PID, véase Figura 44. Se usa la herramienta de sintonización PID de Simulink, para obtener los valores de las ganancias del controlador.

Figura 44. Configuración controlador PID para velocidad

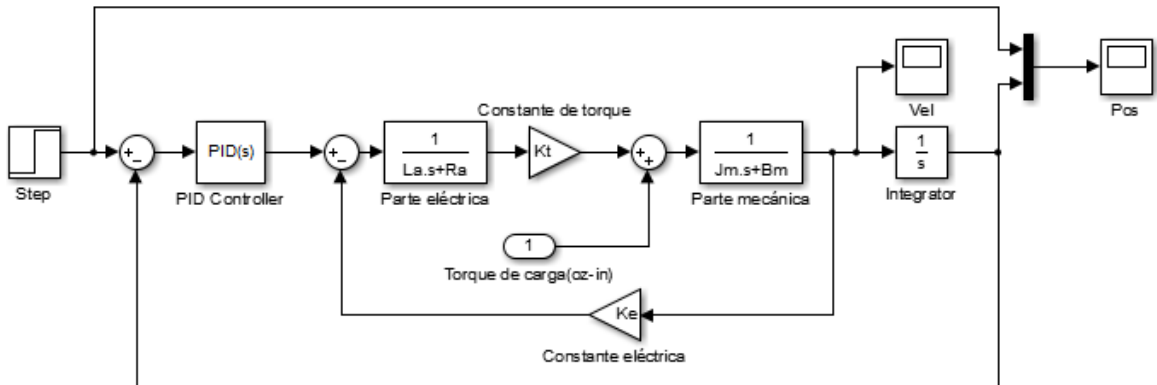


Para que la posición de los motores sea cercano al valor deseado, se debe cumplir con los siguientes requisitos [36].

- Tiempo de establecimiento menor que 0.40 segundos
- Overshoot menos de 16%
- Sin error de estado estacionario, incluso en la presencia de una perturbación.
-

Se realiza el diagrama de bloques de los motores con el control PID para posición. Se usa la herramienta de sintonización PID de Simulink, para obtener los valores de las ganancias del controlador bajo los requisitos mencionados anteriormente.

Figura 45. Configuración controlador PID para posición



En la Tabla 9, se muestran los valores de ganancia del controlador PID, que se diseño y modelo por medio de MATLAB. La (Ec. 48) es la ecuación de compensacion que usa Matlab, con los parametros diseñados del controlador.

Tabla 9. Parámetros del PID para control de velocidad y posición

Motor	Velocidad				Posición			
	Kp	Ki	Kd	N	Kp	Ki	Kd	N
Uno	0	413.4	0	100	219.26	268.89	0.0137	16015.8
Dos	1	413.4	0	100	287.97	465.12	0.149	1937.89

$$K_P + K_i \frac{1}{s} + K_d \cdot \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \quad (\text{Ec. 48})$$

Las figuras 46 y 47, muestran la señal de velocidad y posición con el controlador diseñado, para el motor uno. De igual manera las figuras 48 y 49, muestran estas señales para el motor dos. Se observa un comportamiento cercano a la señal de referencia.

Figura 46. Respuesta control de velocidad ante escalón unitario motor uno

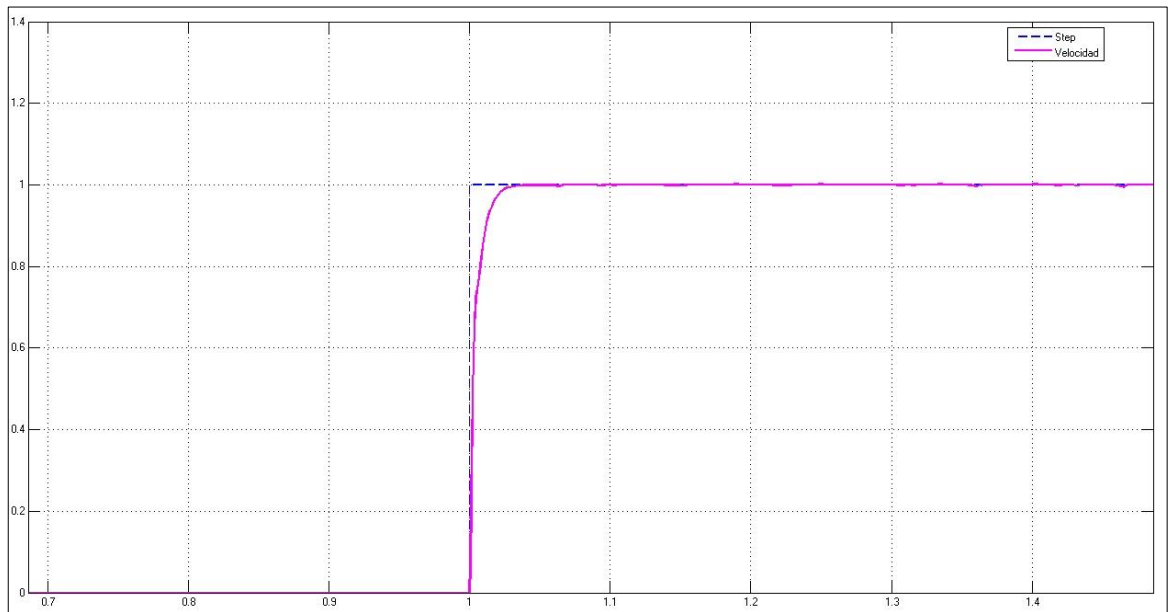


Figura 47. Respuesta control de velocidad ante escalón unitario motor uno

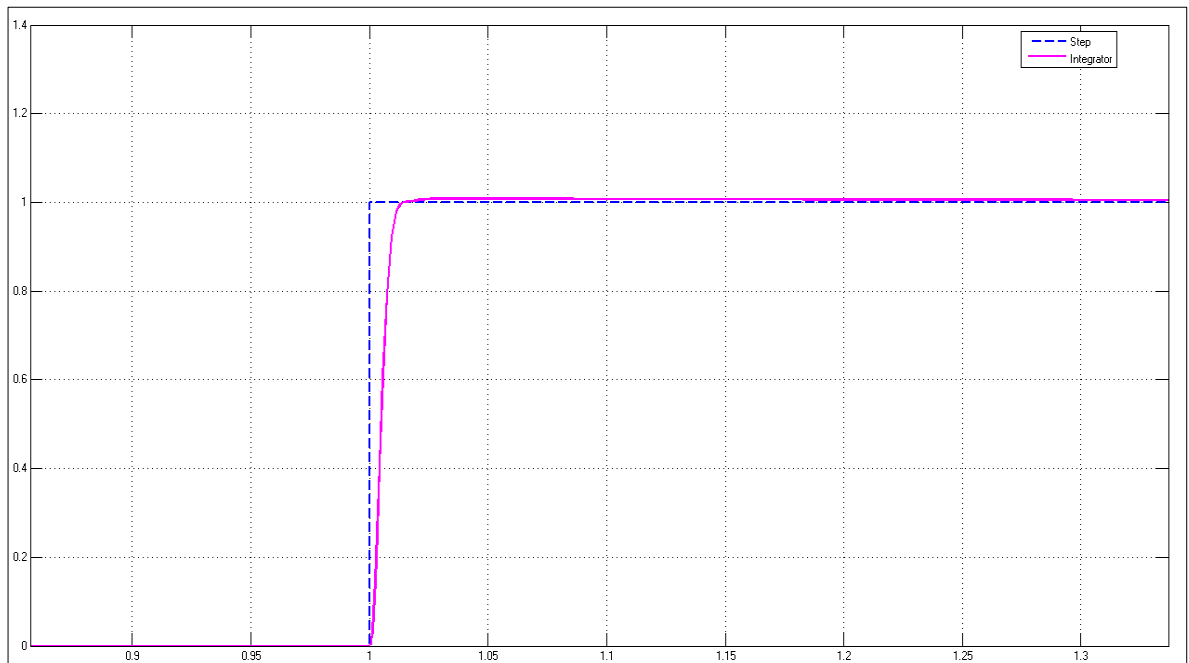


Figura 48. Respuesta control de velocidad ante escalón unitario motor dos

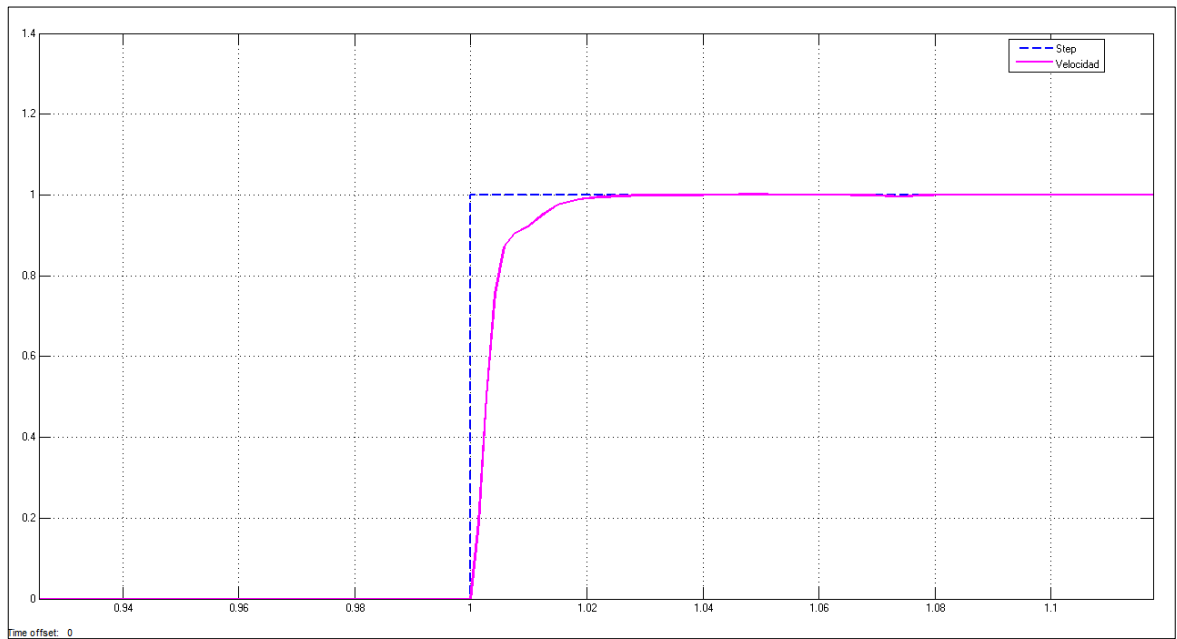
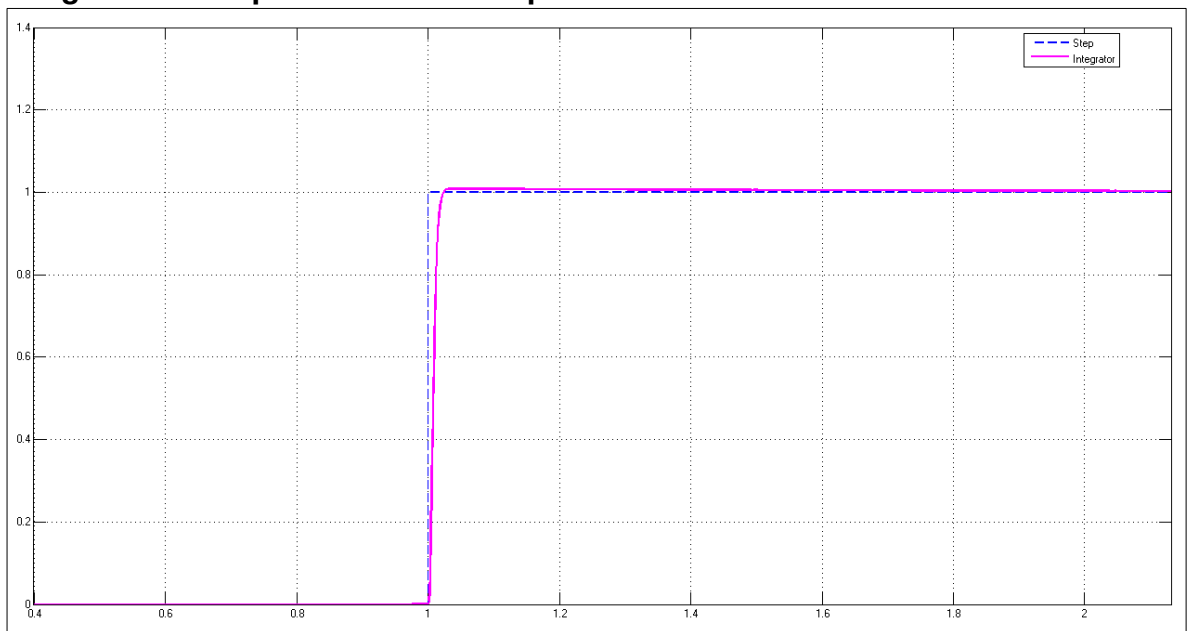


Figura 49. Respuesta control de posición ante escalón unitario motor dos



6. ANÁLISIS MECÁNICO DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

El análisis mecánico en este proyecto es de gran importancia, debido a que el dispositivo robótico carece de un diseño mecánico. En el proyecto anterior no se realizó el diseño del dispositivo, debido a que el objetivo de ese proyecto fue el diseño, la evaluación y construcción de un control digital programable [2]. Este capítulo se centra en realizar el análisis al dispositivo y determinar su comportamiento debido a cargas estáticas y dinámicas, así como su funcionalidad.

El diseño mecánico tiene como objeto determinar las propiedades, tales como tamaño, formas y materiales, por medio del cálculo y definición de fuerzas, movimientos, esfuerzos y energía, para que estructuras o componentes de máquina, puedan soportar cargas y realicen las funciones previstas. [37] [38]

Se realizó el análisis del comportamiento mecánico del dispositivo robótico, el cual por definición es una máquina-herramienta, por lo tanto se asumió las bases de estas para el desarrollo de este. El análisis por lo tanto debe validar las condiciones estáticas, donde se debe garantizar alta rigidez y bajo peso. La rigidez se refiere a la capacidad de la estructura a resistir cambios, tales como alargamiento, flexión y torsión; el aumento de peso afecta el comportamiento del dispositivo. [37]

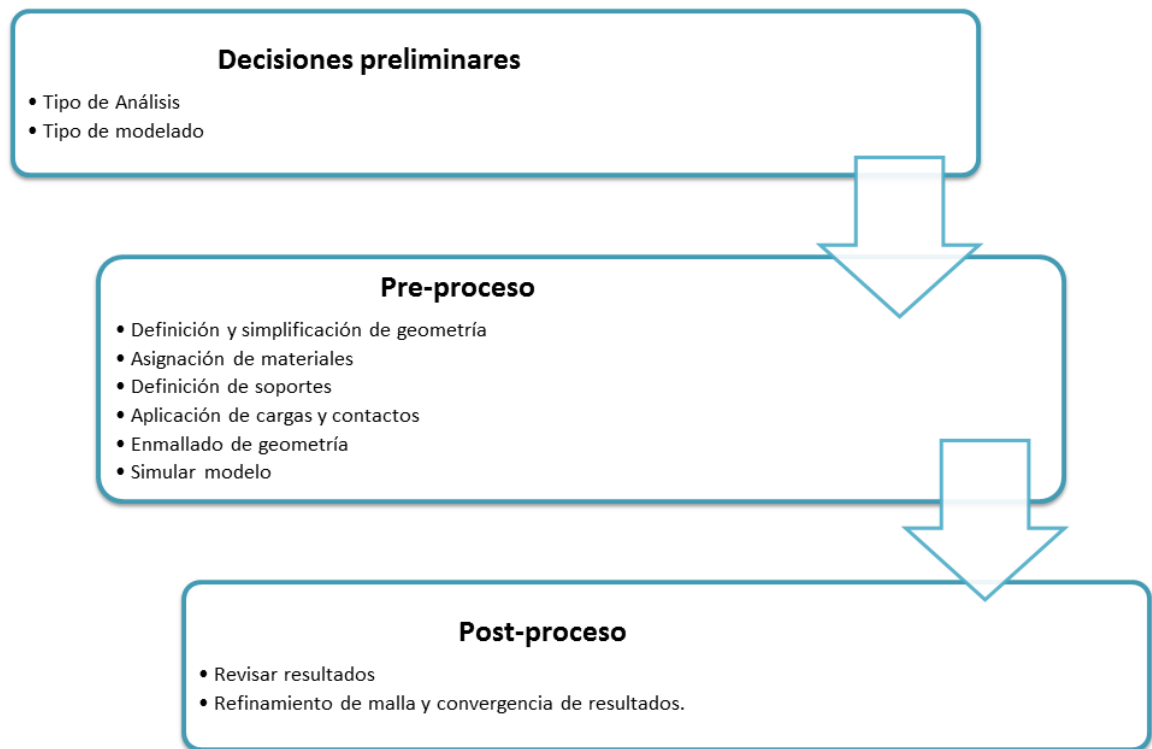
6.1 ANÁLISIS ESTÁTICO MEDIANTE MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Se realizó un análisis estructural por método de elementos finitos (MEF), donde se determinó el campo de esfuerzos y deformaciones del ensamblaje, para ello se utilizó la herramienta de “Análisis de Tensión” del software de Autodesk Inventor® 2014.

Se identificó el estado de esfuerzo máximo en el ensamblaje y se determinó si existe una posible falla en las zonas críticas, se obtiene el factor de seguridad mínimo, con el cual se comprueba el diseño en la geometría y en sus espesores.

Para el desarrollo mediante el análisis de elementos finitos (FEA), se sigue el flujo de trabajo que se muestra en la Figura 50.

Figura 50. Flujo de trabajo MEF en Inventor®

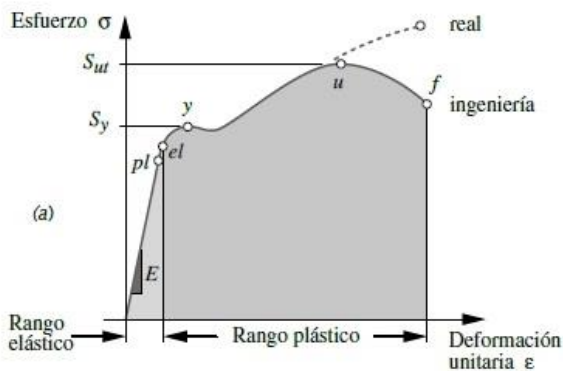


6.1.1 Decisiones Preliminares

Se realizó un análisis al ensamblaje, este es de tipo estructural estático lineal, se debe definir bien los tipos de contactos, para que la solución arroje resultados cercanos a la realidad. El análisis se basa entonces bajo las siguientes condiciones:

- Los materiales son lineales (Elástico).
- No hay deformación permanente. Véase Figura 51.
- Las cargas producen pequeñas deformaciones o rotaciones.
- Los cambios de dirección en las cargas debido a las deformaciones pueden ser despreciados.
- Las condiciones de borde no cambian.

Figura 51. Diagrama esfuerzo-deformación para materiales dúctiles.



Fuente: Diseño de máquinas [38]

6.1.2 Pre-procesamiento

6.1.2.1 Definición de la geometría

Se realizaron las simplificaciones en la geometría y se excluyeron de la simulación componentes que no afectan significativamente los resultados esperados, esto con el fin de disminuir el consumo de recursos computacionales. En la Figura 52 se muestra el modelo simplificado, de igual manera en la tabla se muestran las propiedades físicas del modelo

Figura 52. Simplificación del modelo para la simulación

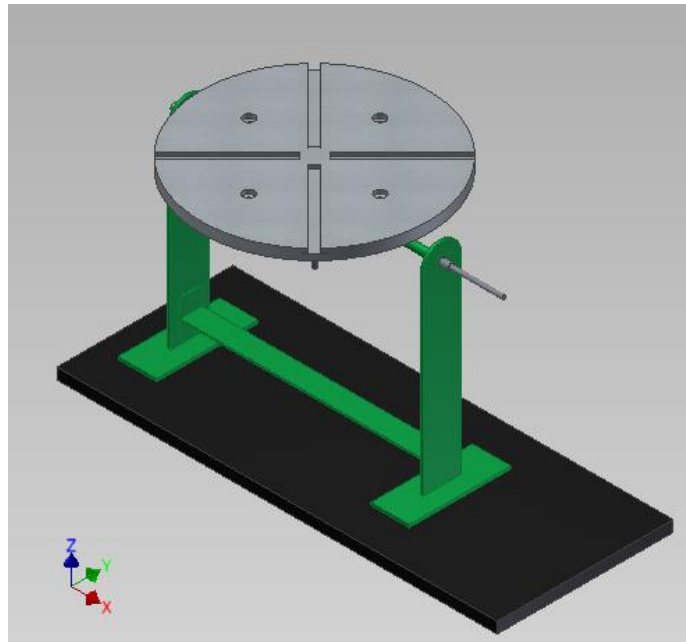


Tabla 10. Propiedades físicas del modelo

Magnitud	Valor
Masa	16,2301 kg
Área	1876720 mm ²
Volumen	15920400 mm ³
Centro de gravedad	x=-224,617 mm y=4,12713 mm z=153,642 mm

6.1.2.2 Asignación de materiales

Se definen los materiales del modelo, los cuales son de importancia, debido a que estos tienen propiedades mecánicas, que son las usadas en el modelo, los materiales deben de ser elásticos. En el dispositivo real, las partes y componentes están fabricados en acero estructural a excepción del disco ranurado y la base, las cuales están construidas en madera. En la Tabla 11 se muestran las propiedades de los materiales.

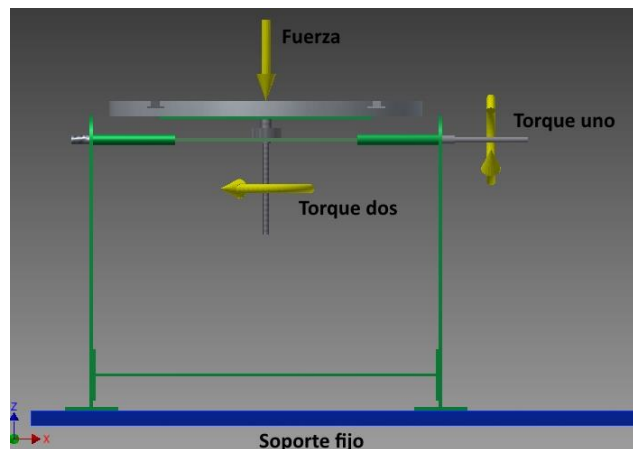
Tabla 11. Determinación de materiales el modelo

MATERIAL	ACERO	
General	Densidad de masa	7,85 g/cm ³
	Límite de elasticidad	207 MPa
	Resistencia máxima a tracción	345 MPa
Tensión	Módulo de Young	210 GPa
	Coeficiente de Poisson	0,3 su
	Módulo cortante	80,7692 GPa
Nombre(s) de pieza	Paral vertical Base.ipt Paral horizontal Base.ipt Paral vertical Base.ipt Platina elemento 1.ipt Eje 1 elemento1.ipt Eje 2 elemento 1.ipt cruz.ipt eje principal.ipt SOPORTE 6202 2Z.ipt	
MATERIAL	MADERA (ABEDUL)	
General	Densidad de masa	0,55 g/cm ³
	Límite de elasticidad	56,3 MPa
	Resistencia máxima a tracción	6,3 MPa
Tensión	Módulo de Young	10,3 GPa
	Coeficiente de Poisson	0,426 su
	Módulo cortante	3,6115 GPa
Nombre(s) de pieza	disco ranurado.ipt Base principal.ipt	

6.1.2.3 Aplicación de cargas y definición de condiciones de borde

En la Figura 53, se muestran las ubicaciones de la aplicación de cargas, así como las condiciones de borde, en este problema se aplica una restricción fija en la base. La restricción fija, es la condición que garantiza que se resuelva el problema planteado, la definición errada de esta restricción hace que el software resuelva un problema diferente al planteado.

Figura 53. Fuerzas y condiciones de borde del modelo



En la Tabla 12, se muestran las magnitudes de las cargas que se aplicaron, los torques aplicados se tomaron como los torques a condiciones de funcionamiento máximo de los motores, esto con el fin de ser conservativos en los resultados, se aplicó una fuerza de 50 N, esto con el fin de validar la carga estimada en el proyecto anterior.

Tabla 12. Cargas aplicadas

Tipo de carga	Torque uno
Magnitud	5300,000 N mm
Vector X	-5300,000 N mm
Vector Y	0,000 N mm
Tipo de carga	Torque dos
Magnitud	6700,000 N mm
Vector X	0,000 N mm
Vector Y	-0,000 N mm
Tipo de carga	Fuerza
Magnitud	50,000 N
Vector X	0,000 N
Vector Y	0,000 N
Vector Z	-50,000 N

6.1.2.4 Enmallado de la geometría

El conjunto de nodos y elementos constituye lo que se conoce como malla de elementos finitos, sobre la malla se realizan los cálculos [39]. En la Figura 54 se observa el tipo de malla, cuyos elementos son de forma tetraédrica. En la Tabla 13, se muestra las características de la malla.

Figura 54. Enmallado del modelo

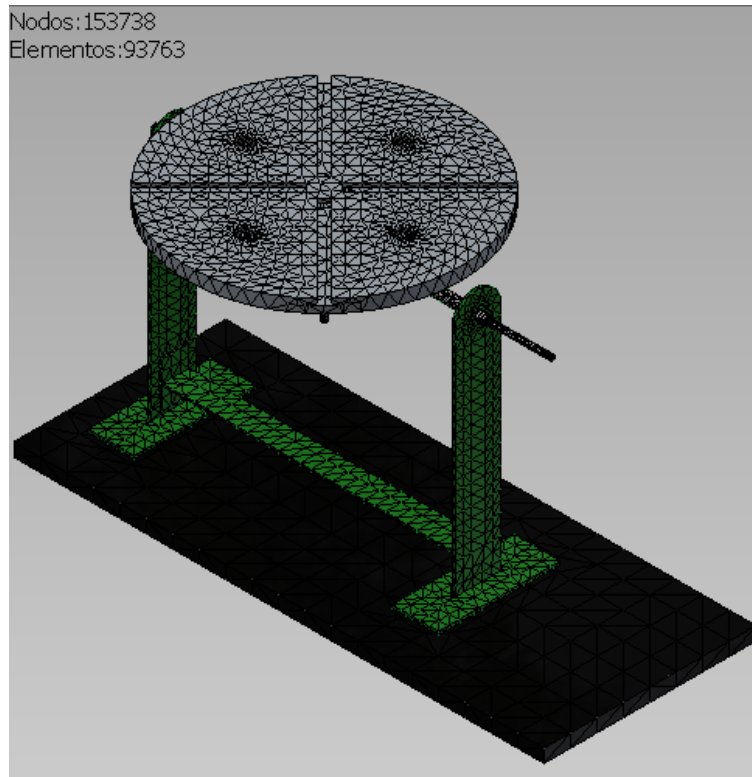


Tabla 13. Mallado de geometría

Características de la malla	
Tamaño medio de elemento (fracción del diámetro del modelo)	0,05
Tamaño mínimo de elemento (fracción del tamaño medio)	0,15
Factor de modificación	1,5
Ángulo máximo de giro	45 gr
Crear elementos de malla curva	Sí
Usar medida basada en pieza para la malla del ensamblaje	Sí

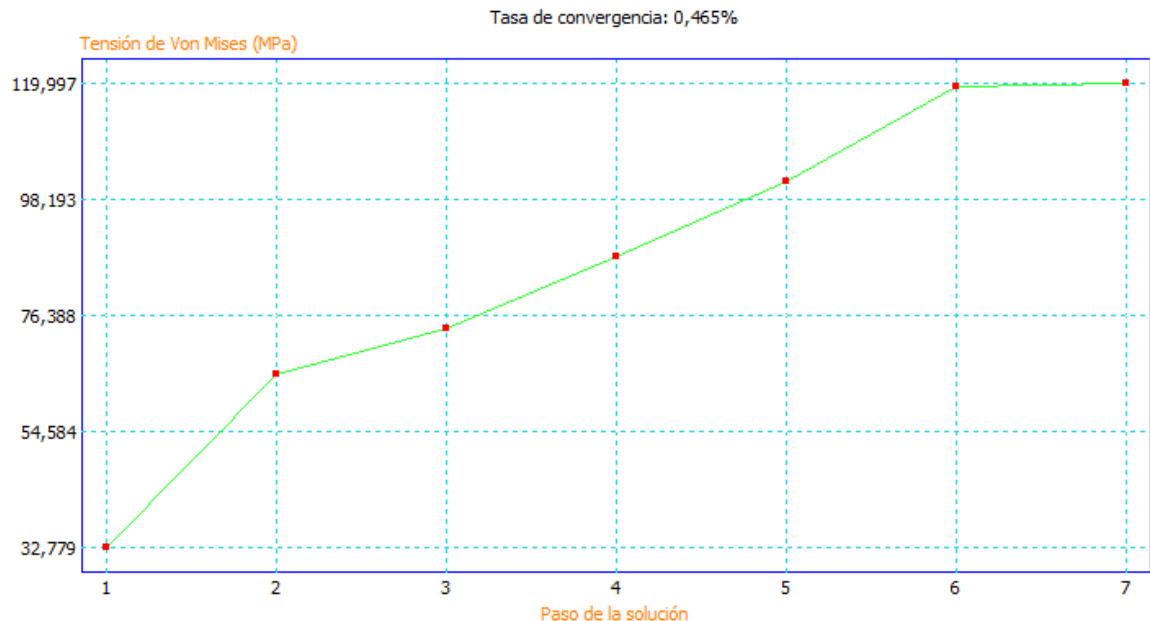
Con los pasos del pre-proceso definidos, se simuló el modelo, el software usa el método de elementos finitos para encontrar una aproximación de soluciones a las ecuaciones diferenciales del problema estático lineal.

6.1.3 Post-procesamiento

6.1.3.1 Refinamiento de la malla y convergencia

Se realiza un refinado de la malla, donde se subdividen los elementos, en elementos más pequeños, obteniendo una malla más fina, esta clase de refinamiento se denomina refinamiento h , obteniendo de esa manera resultados más cercanos a la realidad. En la Figura 55 se muestra la curva de convergencia del modelo, se observa como varia el esfuerzo de Von Mises máximo a medida que se realiza un refinamiento de la malla. El esfuerzo se estabilizó en 120 MPa y la tasa de convergencia es menor de 0.5%, esta tasa de convergencia garantiza la precisión de los resultados.

Figura 55. Curva de convergencia



6.1.3.2 Resultados

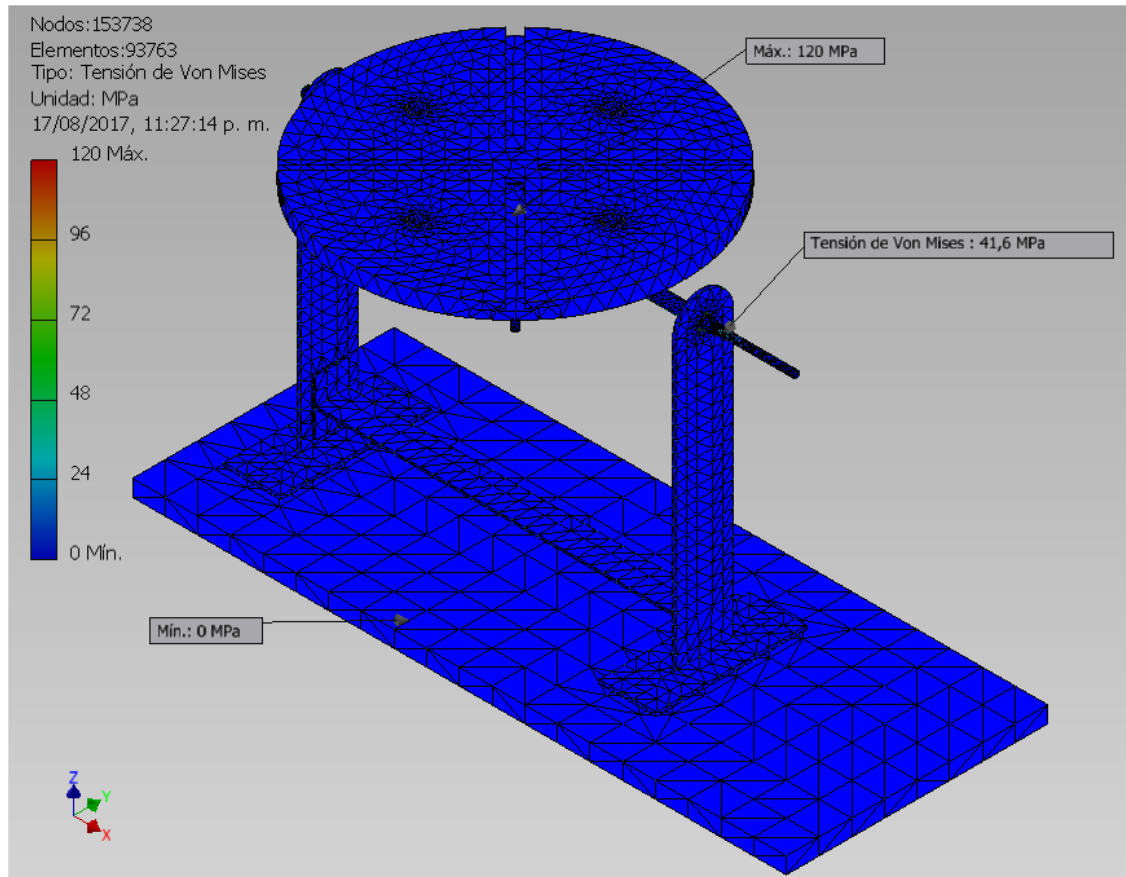
Las reacciones que se obtuvieron en el soporte, se muestran en la Tabla 14.

Tabla 14. Fuerza y pares de reacción en restricciones

Restricción	Fuerza de reacción		Pares de reacción	
	Magnitud	Componente (X, Y, Z)	Magnitud	Componente (X, Y, Z)
Soporte fijo	50,0889 N	0 N	12,49 N m	5,48 N m
		0 N		4,85 N m
		50,09 N		-10,1 N m

Se obtuvo como resultado de la simulación que el esfuerzo máximo es de 120 MPa, que comparado con el límite elástico del material (207 MPa), refleja que la estructura soporta el estado de carga estática aplicado. La mayor parte de la estructura presenta un esfuerzo de von mises cercano a cero. En la Figura 56 se muestra los resultados del campo de esfuerzos en la estructura.

Figura 56. Esfuerzo máximo Von Mises



En la Figura 57, se muestra la pieza donde se genera el mayor esfuerzo, el cual ocurre en la pieza denominada, elemento articular dos, el esfuerzo máximo se genera debido a que existe un cambio de sección brusco en el eje de esta pieza.

De la misma manera en la Figura 58 se analiza la pieza denominada elemento articular uno, el esfuerzo máximo en este componente ocurre en la zona donde se aplica el momento, este esfuerzo tiene una magnitud de 63.59 Mpa, el cual es bajo con respecto al límite elástico del acero.

Figura 57. Esfuerzos en el elemento articular dos

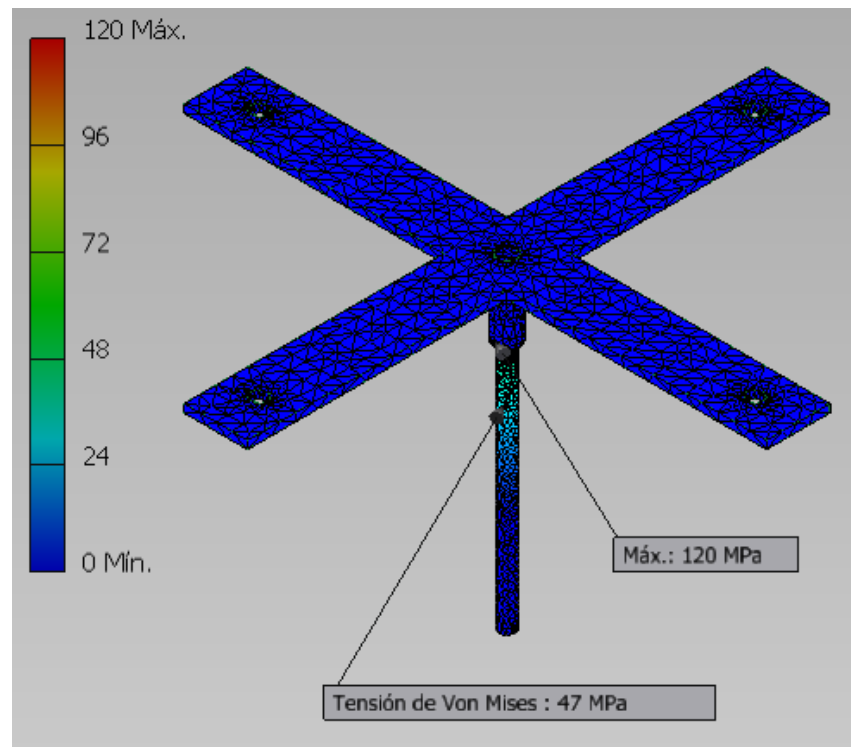
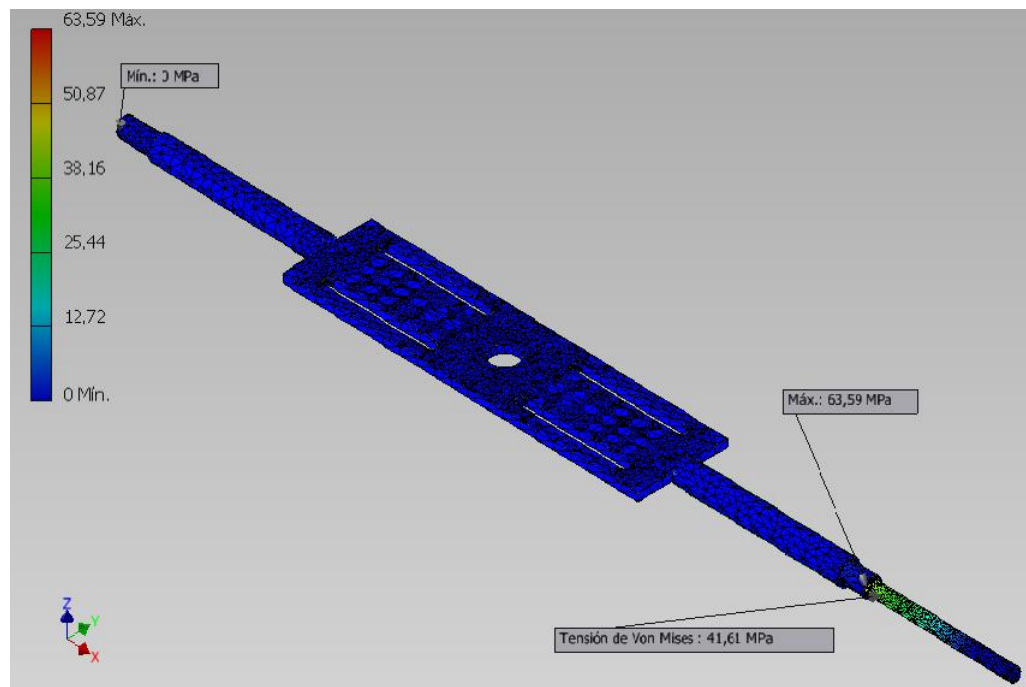
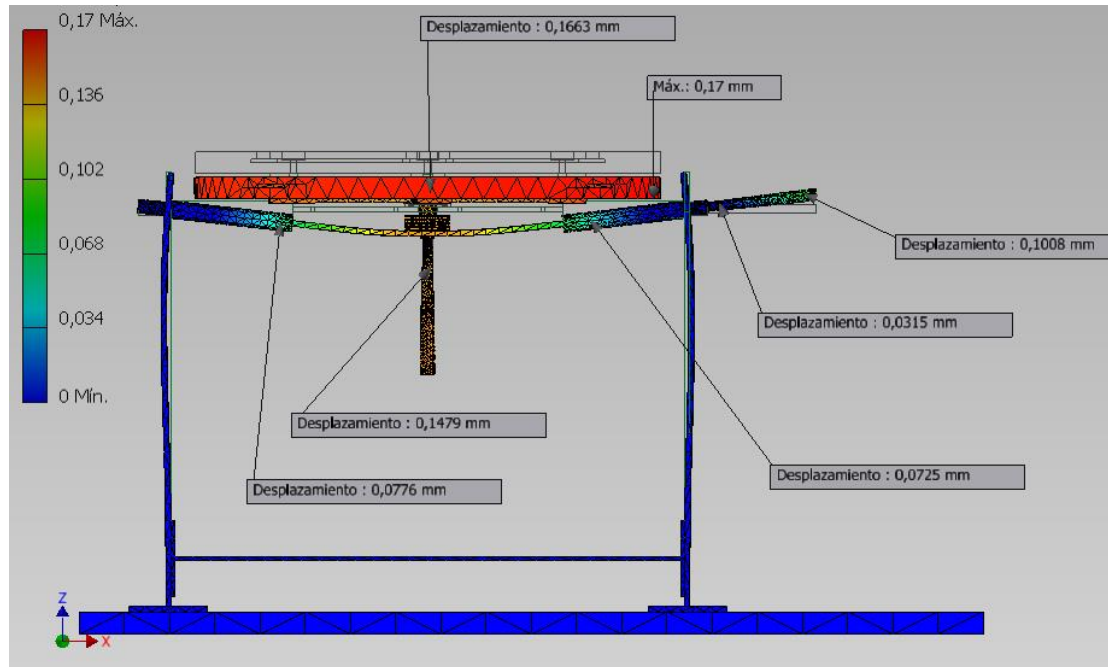


Figura 58. Esfuerzos en el elemento articular uno



Los desplazamientos del dispositivo ante el estado de carga son muy pequeños para ser representativos, el máximo es de 0.17 mm, estos desplazamientos no causan ningún tipo de inconveniente en el funcionamiento del dispositivo. En la Figura 59, se muestra los desplazamientos del dispositivo, estos se muestran a una escala mayor de la real, para comodidad en la visualización de esos resultados.

Figura 59. Desplazamiento en el dispositivo



La Figura 60 muestra el desplazamiento en el disco ranurado, el desplazamiento máximo es de 0.17 mm, el cual ocurre ante la carga de 50 N. En la Figura 61 y en la Figura 62, se muestran los desplazamiento de los elementos articulares uno y dos, respectivamente.

El desplazamiento más grande del elemento articular uno es de 0.1475 mm y ocurre en la zona central de este elemento, el cual soporta la carga aplicada y el peso del disco ranurado. Se observa desplazamientos en el extremo donde se aplica el momento uno y en las zonas de soldadura.

En el elemento articular dos, sufre desplazamiento en los extremos de la platina en forma de cruz, debido a que en esos puntos va fijado el disco ranurado. El desplazamiento más grande es de 0.1599 mm, el cual no es significativo durante el funcionamiento del dispositivo.

Figura 60. Desplazamientos en el disco ranurado

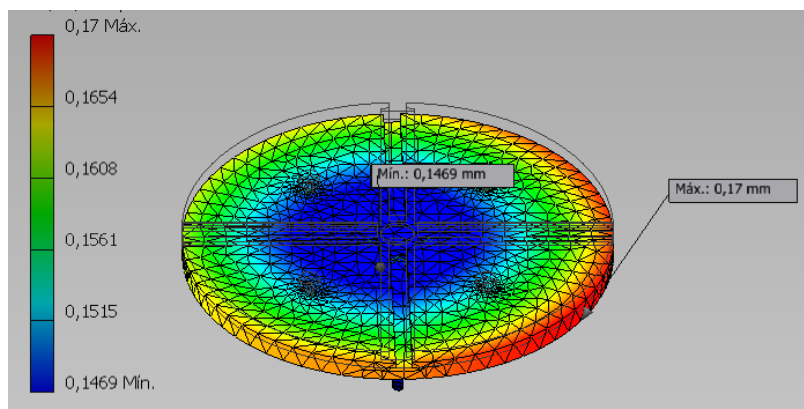


Figura 61. Desplazamientos en el elemento articular uno

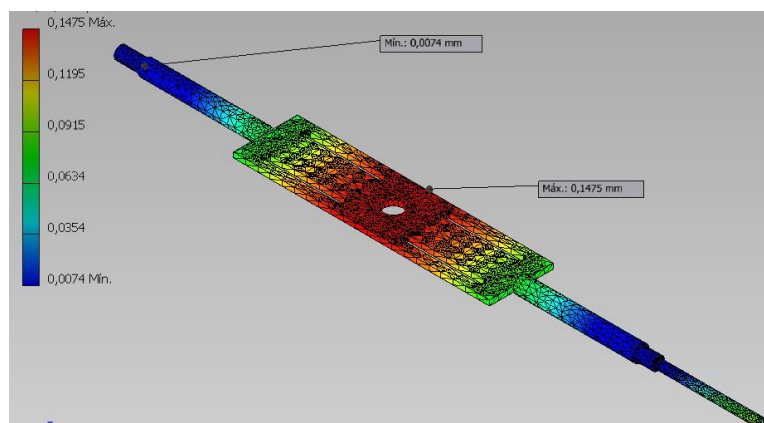
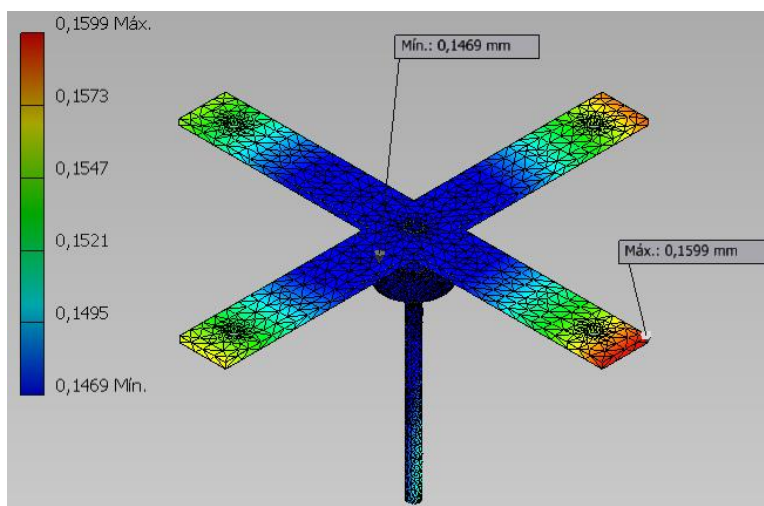
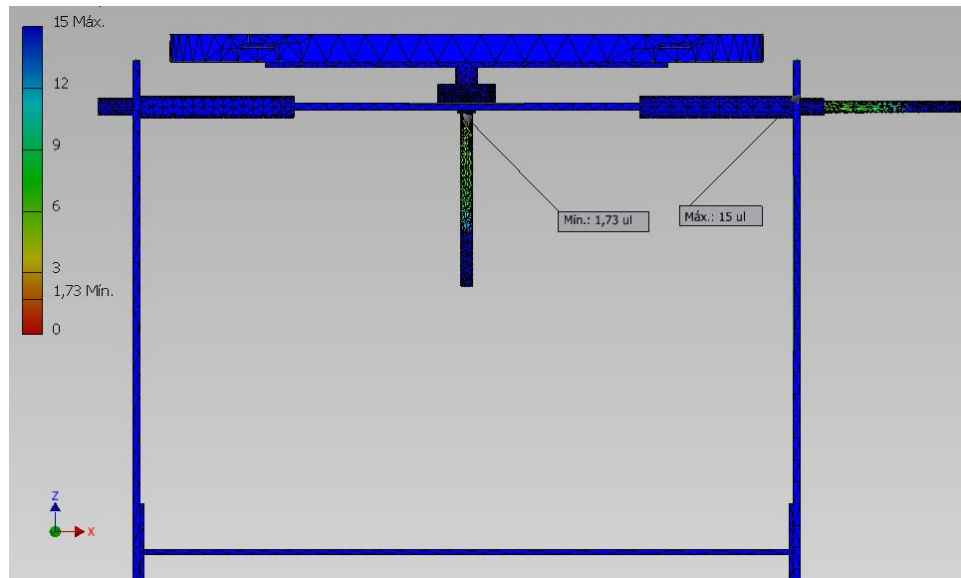


Figura 62. Desplazamientos en el elemento articular dos



En la Figura 63 se muestran los resultados del factor de seguridad, siendo en la mayoría de la estructura de 15. El punto crítico es en el cambio de sección del eje del elemento articular dos, en ese punto el factor de seguridad es de 1,73, este valor es suficiente para que la pieza no falle ante las cargas aplicadas.

Figura 63. Factor de seguridad en la estructura



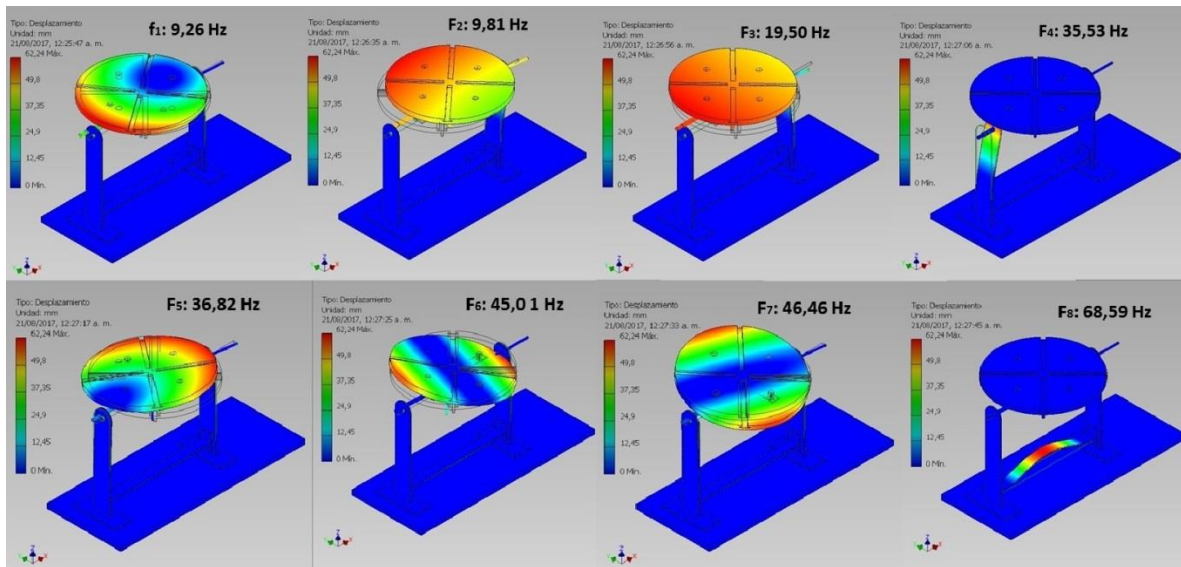
Finalmente se realiza una iteración variando la fuerza aplicada, hasta llegar a un factor de seguridad igual a uno, el valor de esa fuerza, es entonces la carga que hace que falle la estructura, ese valor es 196 N, la capacidad máxima de carga es entonces 20 Kg, mayor a la carga estimada en el proyecto anterior.

6.2 ANÁLISIS DE VIBRACIONES

El estudio de las vibraciones se refiere a los movimientos de los cuerpos y a las fuerzas asociadas con ellos. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad, son capaces de vibrar. Una vibración mecánica es el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio.[40][38] La mayoría de las máquinas y estructuras experimentan vibraciones hasta cierto grado. Basado en lo anterior, se realiza un análisis modal al dispositivo, para determinar las frecuencias de vibración y las formas de modo naturales.

Para realizar el análisis se usó el simulador de elementos finitos de Autodesk® Inventor® en donde se consideró los materiales y restricciones tal como en el análisis estático lineal, el elemento de malla es tetraédrico y se consideró el efecto de la gravedad. En la Figura 64 se muestran los modos de vibración.

Figura 64. Modos de vibración del dispositivo



El dispositivo se encuentra sometido a la excitación debido a los actuadores, por lo cual y para el caso crítico de diseño, se establecieron las velocidades máximas de cada uno, esta información se puede observar en la

Tabla 15, se aprecia que la frecuencia de excitación máxima que alcanza todo el sistema, es decir, de 8.16 Rad/s lo que equivale a 1.29 Hz.

Tabla 15. Velocidades y frecuencias máximas actuadores

Actuador	Velocidad (RPM)	Velocidad (Rad/seg)	Frecuencia (Hz)
Actuador 1	78	8.16	1.29
Actuador 2	56.9	5.96	0.95

Para garantizar que la estructura no entre en resonancia se debe cumplir que la frecuencia natural de la estructura sea como mínimo 3 veces la frecuencia de excitación [41].

$$\frac{F_{nat}}{F_{exc}} = \frac{9.26}{1.29} \approx 7.18 \quad (\text{Ec. 49})$$

La (Ec. 49) indica que la frecuencia natural mínima (F_{nat}) del sistema es 7.18 veces mayor que la frecuencia de excitación máxima (F_{exc}) del sistema. Por lo tanto de los resultados anteriores podemos concluir que la estructura no presentará problemas de rigidez.

7. PROPUESTA DE MEJORA DEL DISPOSITIVO ROBÓTICO

Un problema de diseño en ingeniería conlleva a soluciones múltiples, debido al diseñador, la aplicación, el usuario final, entre otras. Además en el proceso de diseño no hay una solución correcta, solo soluciones discutiblemente mejores o peores unas que otras [38]. Por ello para realizar un proceso de diseño, se debe contar con una gran creatividad, que debe estar soportada por cálculos y análisis ingenieriles.

Se realiza en este capítulo una propuesta de mejora de los componentes del dispositivo robótico y además se propone un diseño básico del mismo.

7.1 PROPUESTA DE MEJORA

De acuerdo al análisis realizado en el capítulo 6, se valida tanto el diseño de la estructura como de los elementos articulares, por lo tanto la propuesta de mejora se realiza en componentes, con el fin de optimizar el funcionamiento del equipo.

7.1.1 Reemplazo de material en disco ranurado y base fija.

Aunque el elemento terminal (disco ranurado) soporta las cargas aplicadas, se sugiere cambiar la madera por aluminio 6061, el cual es dúctil, posee alta resistencia a la tensión, excelente resistencia a la corrosión y es liviano comparado con el acero. Esta sugerencia se debe a que la madera es un material anisótropo, es decir sus propiedades mecánicas son diferentes en cada dirección de sus ejes (radial, tangencial, longitudinal), además la madera sufre mayor deterioro por agentes externos, tales como la humedad, la temperatura, microorganismos, etc [42] .

Debido a la misma razón del cambio de material del elemento terminal, se propone cambiar la base de madera, por una base de acero A36, esta clase de acero, contiene 98 % de hierro, con contenido de carbono menor a 0.26%, y pequeñas cantidades de manganeso [43]. Es muy usada en estructuras metálicas, debido a su gran resistencia a la tensión propiedades mecánicas y a su bajo costo [44] .

Al realizar el análisis estructural en Inventor®, arroja estos mismos resultados que el realizado en el subcapítulo 6.1, esto es porque los esfuerzos críticos se encuentran en los elementos articulares, por ende no afecta ni el disco, ni la base. Se aclara que se propone el cambio de material con el fin de prolongar la vida útil de esos componentes debido a agentes externos, que se mencionaron anteriormente.

7.1.2 Sistema de transmisión

En el subcapítulo 2.3.1, se mostró el sistema de transmisión del dispositivo robótico, el cual es un sistema de transmisión por piñones y cadena de rodillos, en la Figura 65 se muestra este sistema. Esta transmisión presenta marchas irregulares, este movimiento se denomina de “sacudimiento”, el cual provoca oscilaciones y vibraciones, lo que afecta la velocidad de salida, en pocas palabras, no permite una velocidad de salida constante [45]. Debido a que la precisión en la velocidad de salida es un requerimiento del dispositivo se propone una transmisión por banda.

Figura 65. Transmisión por cadena en los elementos articulares



Una transmisión por banda sincrónica, también llamada correa dentada, permite una salida de velocidad constante, ya que evita el deslizamiento, su eficiencia de transmisión es del 98% y es menos costosa que un sistema por cadena o por engranes, también toma importancia la absorción de cargas de impacto, el amortiguamiento y aislamiento de los efectos producidos por las vibraciones, estas características son beneficiosas en la inclusión del diseño, por último es de gran

importancia resaltar que este sistema no requiere lubricación, lo que facilita el mantenimiento del dispositivo. [10], [45] [46].

Figura 66. Banda sincrónica estándar. [46]



En la selección de los elementos de transmisión de potencia, se tiene en cuenta una solución que aumente el rendimiento del dispositivo, además que sea de fácil mantenimiento, se utiliza el catálogo de Intermec S.A, para seleccionar la banda adecuada en cada elemento articular. La Tabla 16, se muestran parámetros para iniciar el diseño de las correas.

Tabla 16. Parámetros de selección

Parámetros	Transmisión uno	Transmisión dos
Potencia máxima	14.2 W // 0.019 HP	15.7 W // 0.021 HP
Velocidad máxima	44.2 rpm	35.0 rpm
Distancia entre centros	88±5 mm	144±5 mm
Relación de transmisión	1	1

Por medio de la (Ec. 50), se calcula la potencia de diseño (P_d) en HP, el factor de servicio (KS) para el dispositivo es 1.6 [46].

$$P_d = P_{m\acute{a}x} \cdot KS \quad (\text{Ec. 50})$$

Transmisión 1

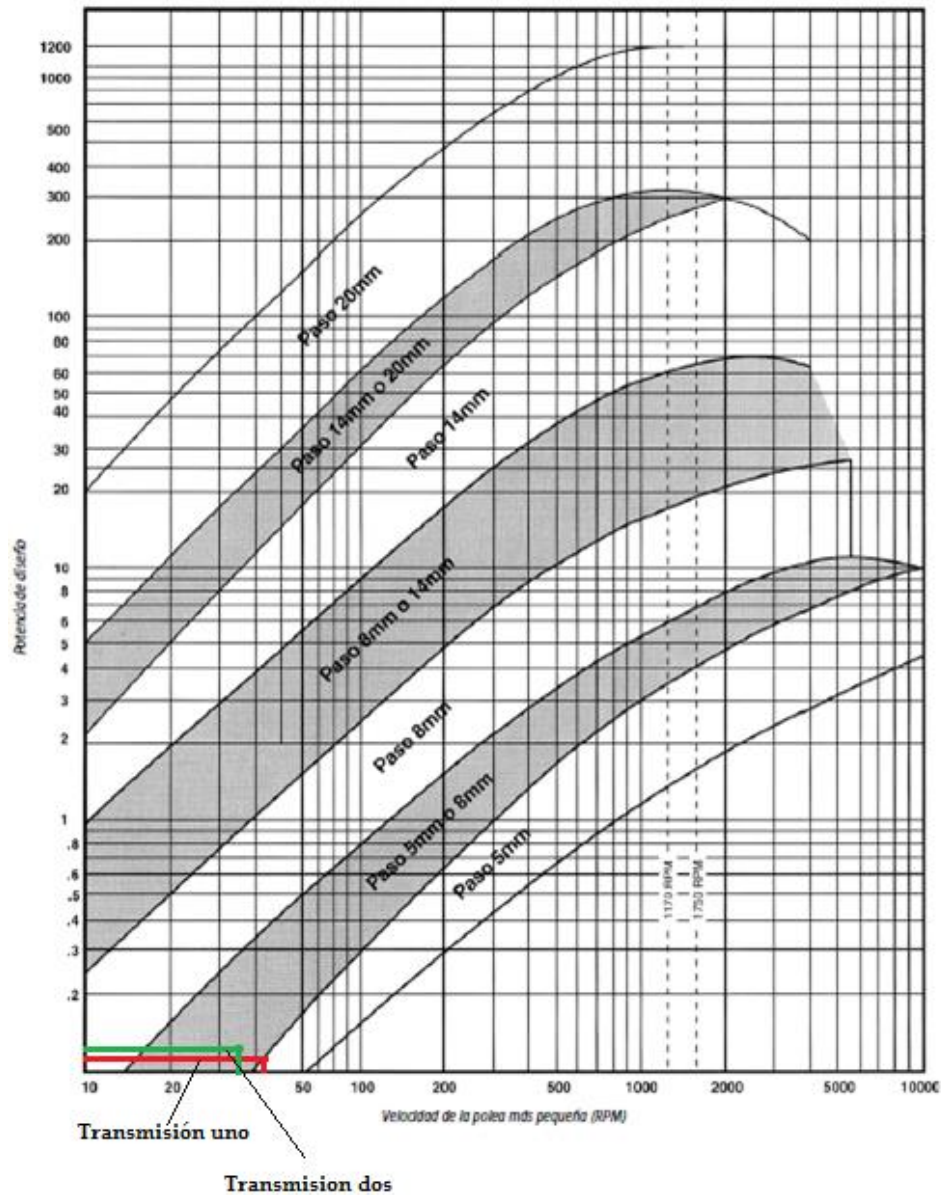
$$P_d = 0.019HP \times 1.6 = 0.0304HP$$

Transmisión 2

$$P_d = 0.021HP \times 1.6 = 0.0336HP$$

Se selecciona en la Figura 67 el paso de la banda por medio de la potencia de diseño y la velocidad máxima

Figura 67. Selección de paso para transmisiones sincrónicas [46]



El paso de la banda para ambas transmisiones es de 5mm, por lo tanto la correa es 5M.

Se procede a encontrar una cadena estándar en la Tabla 17, con base en la velocidad máxima, relación de transmisión y distancia de centros.

Tabla 17. Selección de transmisiones estándar. [46]

			Distancias de centros nominales mm/pulg.							
Combinación de Poleas			Designación de código de la correa mm/pulg.							
Relación de Velocidad	Motriz	Impulsada	350	375	400	425	450	475	500	535
	No. Dientes	No. Dientes	13.78	14.76	15.75	16.73	17.72	18.70	19.69	21.06
1.00	72	72								
	68	68								
	64	64								
	60	60								117.5 4.63
	56	56							110.0	127.5
	52	52					95.0 3.74	107.5 4.23	120.0 4.72	137.5 5.41
	48	48				92.5 3.64	105.0 4.13	117.5 4.63	130.0 5.12	147.5 5.81
	44	44			90.0 3.54	102.5 4.04	115.0 4.53	127.5 5.02	140.0 5.51	157.5 6.2
	40	40	75.0 2.95	87.5 3.44	100.0 3.94	112.5 4.43	125.0 4.92	137.5 5.41	150.0 5.91	167.5 6.59
	38	38	80.0 3.15	92.5 3.64	105.0 4.13	117.5 4.63	130.0 5.12	142.5 5.61	155.0 6.10	172.5 6.79
	36	36	85.0 3.35	97.5 3.84	110.0 4.33	122.5 4.82	135.0 5.31	147.5 5.81	160.0 6.3	177.5 6.99
	34	34	90.0 3.54	102.5 4.04	115.0 4.53	127.5 5.02	140.0 5.51	152.5 6.00	165.0 6.5	182.5 7.19
	32	32	95.0 3.74	107.5 4.23	120.0 4.72	132.5 5.22	145.0 5.71	157.5 6.20	170.0 6.69	187.5 7.38
1.05	38	40	77.5 3.05	90.0 3.54	102.5 4.03	115 4.53	127.5 5.02	140.0 5.51	152.5 6.00	170.0 6.69

Se tiene para la transmisión uno, dos poleas de 34 dientes cada una y una banda con longitud 350 mm, la distancia entre ejes es de 90 mm, esta distancia entre en el rango de la distancia real. Para la transmisión dos se encontraron dos poleas de 32 dientes cada una y una banda con una longitud de 450 mm, la distancia entre ejes es de 145, muy cercana a la distancia real.

Finalmente se halla el ancho de la banda, en el catálogo de Intermec SA, se ha elegido la Tabla 18, con un ancho de correa de 15mm, debido a que esta contiene los números de dientes de las poleas, la velocidad máxima y se encuentra una potencia 0.065 y 0.070 HP, para la transmisión 1 y 2, los cuales están por encima de las potencias de diseño, con lo cual se elige una correa un poco sobredimensionada, pero esto por efectos de la geometría.

Tabla 18. Selección ancho de correa [46]

RANGO DE HP — 15mm (.91 pulg.) ancho de correa (5M-15)					
No. de Dientes	32	34	36	38	40
D.P. mm in.	50.93 2.005	54.11 2.130	57.30 2.256	60.48 2.381	63.66 2.506
RPM DE LA POLEA MENOR	10	0.016	0.018	0.019	0.020
	20	0.032	0.035	0.038	0.041
	40	0.065	0.070	0.076	0.082
	60	0.097	0.105	0.114	0.123
	100	0.162	0.175	0.190	0.204
	200	0.323	0.351	0.379	0.439
	300	0.435	0.472	0.509	0.588
	400	0.538	0.582	0.628	0.723
	500	0.634	0.686	0.739	0.849
	600	0.724	0.783	0.844	0.905
	700	0.811	0.877	0.944	1.012
	800	0.895	0.966	1.040	1.115

En resumen se selecciona para la transmisión uno, una correa dentada **350-5M-15** y dos poleas **34-5M**. Para la transmisión dos, se selecciona una correa dentada **450-5M-15** y dos poleas **32-5M**. En la Tabla 19 se muestran las dimensiones de los componentes seleccionados.

Tabla 19. Dimensiones de las correas y las poleas seleccionadas [46]

CORREA DENTADA				POLEA				
SIGNIFICADO DE LA REFERENCIA				Dientes				
300 - 5M - 9				Diámetro exterior en milímetros				
Longitud en milímetros = 300 Código del paso 5M = 5mm Ancho en la correa = 9mm				5M Paso 5mm	9M Paso 8mm	14M Paso 14m	20M Paso 20m	
CORREAS 5M (PASO 5mm)								
Referencia	No. de Dientes	Longitud (mm)	Pulg.					
350-5M-9	70	350	13.78	15	22,73	36,81		
350-5M-15	70	350	13.78	16	24,32	39,36		
350-5M-25	70	350	13.78	17	25,92	41,91		
375-5M-9	75	375	14,76	18	27,51	44,45	77,56	
375-5M-15	75	375	14,76	19	29,10	47,00	82,00	
375-5M-25	75	375	14,76	20	30,69	49,54	86,47	
400-5M-9	80	400	15,75	21	32,28	52,00	90,93	
400-5M-15	80	400	15,75	22	33,87	54,64	95,37	135,76
400-5M-25	80	400	15,75	23	35,47	57,20	99,83	142,12
425-5M-9	85	425	16,73	24	37,06	59,74	104,29	148,49
425-5M-15	85	425	16,73	25	38,65	62,28	108,75	154,85
425-5M-25	85	425	16,73	26	40,24	64,85	113,20	161,22
450-5M-9	90	450	17,72	27	41,83	67,39	117,66	167,59
450-5M-15	90	450	17,72	28	43,42	70,08	122,12	173,95
450-5M-25	90	450	17,72	29	45,01	72,62	126,57	180,32
475-5M-9	95	475	18,70	30	46,61	75,13	130,99	186,69
475-5M-15	95	475	18,70	31	48,20	77,65	135,46	193,05
475-5M-25	95	475	18,70	32	48,79	80,16	139,88	199,42
500-5M-9	100	500	19,69	33	51,38	82,68	144,35	205,78
				34	52,97	85,22	148,79	212,15

8. CONCLUSIONES

Se definió el tipo de dispositivo robótico, por medio de una exhaustiva búsqueda bibliográfica, se logró clasificar el dispositivo según varios criterios, como su funcionabilidad, el área de aplicación, tipo de actuadores, número de grados de libertad, entre otras.

Se realizó el desarme del dispositivo, con el fin de diagnosticar e inspeccionar el estado de su estructura, subsistemas y componentes, se encontró elementos faltantes, así como elementos en mal estado. Durante el desarme se midió las dimensiones de la estructura y componentes, logrando de esta manera modelar en CAD 3D. Se determinó las especificaciones y características típicas de un robot, tales como su volumen de trabajo, la velocidad máxima de operación que es 44.2 rpm y su capacidad de carga máxima es de 20 Kg.

La solución al modelo cinemático se obtuvo empleando el método Denavit-Hartenberg, se simula esa solución en Matlab y se valida por medio de la herramienta “toolbox de robótica” de Corke, resultando esta herramienta muy útil para obtener los modelos de movimiento del robot.

MATLAB® facilitó obtener el modelo del problema dinámico, resolviendo el método Lagrange-Euler, por medio del algoritmo de Uicker el resultado es esta modelación facilita diseñar el sistema de control del dispositivo, ya que existe una relación entre la posición y velocidad para obtener el torque requerido por los motores

Se diseñó y construyó un dinamómetro para realizar las pruebas con carga a los motores, los resultados de estas pruebas permiten construir las curvas características de los motores, estas curvas concuerdan con las curvas típicas de un motor DC de imanes permanentes. En las curvas características se identifican las magnitudes nominales y máximas de torque, velocidad y potencia.

Con los parámetros de los actuadores obtenidos en las pruebas experimentales fue posible realizar el modelo dinámico de ambos motores. La simulación de estos modelos no fue la esperada, ya que la respuesta de la posición y la velocidad ante el escalón unitario no cumple con los requerimientos planteados. Se diseñó un controlador PID para resolver este problema.

Mediante el método de elementos finitos se logró realizar análisis estructural estático, con el fin de verificar la viabilidad del dispositivo robótico. Los resultados obtenidos aseguran que la estructura y los elementos articulares soportaran las condiciones de carga extremas que se aplicaron en la simulación. El desplazamiento máximo es 0.17 mm este desplazamiento no afecta el funcionamiento, el esfuerzo máximo se estabiliza en 120 MPa, con una tasa de

convergencia menor del 0.5%, el elemento crítico tiene un factor de seguridad de 1.73, el cual garantiza que ese elemento no alcanzará el límite de fluencia del material con el cual está fabricado acero 1020.

La frecuencia natural es 7.18 veces la frecuencia de excitación máxima generada por el motor, por lo cual el dispositivo tiene la suficiente rigidez para evitar una falla por resonancia en la estructura, por lo tanto el análisis de vibraciones valida el diseño del dispositivo.

El disco ranurado y la base principal, están contruidos en madera el cual es un material anisótropo y tiene gran vulnerabilidad ante agentes externos, se propone cambiar ese material por aluminio 6061, el cual tiene mayores propiedades mecánicas, es más liviano y económico comparado al acero. Debido a que se debe mantener una velocidad constante en las articulaciones, se debe cambiar el sistema de transmisión, ya que las poleas y cadenas tienen la limitación de presentar marchas irregulares, lo que genera oscilaciones y vibraciones, se seleccionó una banda sincrónica, la cual soluciona este inconveniente.

9. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se recomienda realizar el análisis de trayectorias, por medio del “Toolbox de robótica” de Peter Corke, ya que demostró ser una herramienta precisa y eficaz a la hora de encontrar soluciones cinemáticas y dinámicas.

Es de gran importancia implementar las mejoras que se propusieron en este trabajo, esto para optimizar el funcionamiento del equipo y tener un control preciso de la velocidad y posición.

Se pueden realizar varios trabajos sobre el dispositivo robótico, en disciplinas como la mecánica, electrónica y sistemas, se mencionan algunos:

- Diseñar e implementar estrategias de control dinámico, tomando como base el modelo dinámico obtenido en este trabajo.
- Diseñar y construir un freno electromagnético accionado por un motor DC.
- Integrar el dispositivo robótico al robot Scara, para que esta le brinde dos grados de libertad adicionales.
- Realizar guías de laboratorio para el dispositivo robótico para el estudio de los modelos de movimiento y de control.
- A largo plazo se puede implementar prácticas sobre celdas de manufactura flexible, así como caracterización de sensores.
- Implementar modificaciones al diseño, que permitan uno o dos grados de libertad adicionales, con un nuevo estudio de movimiento.

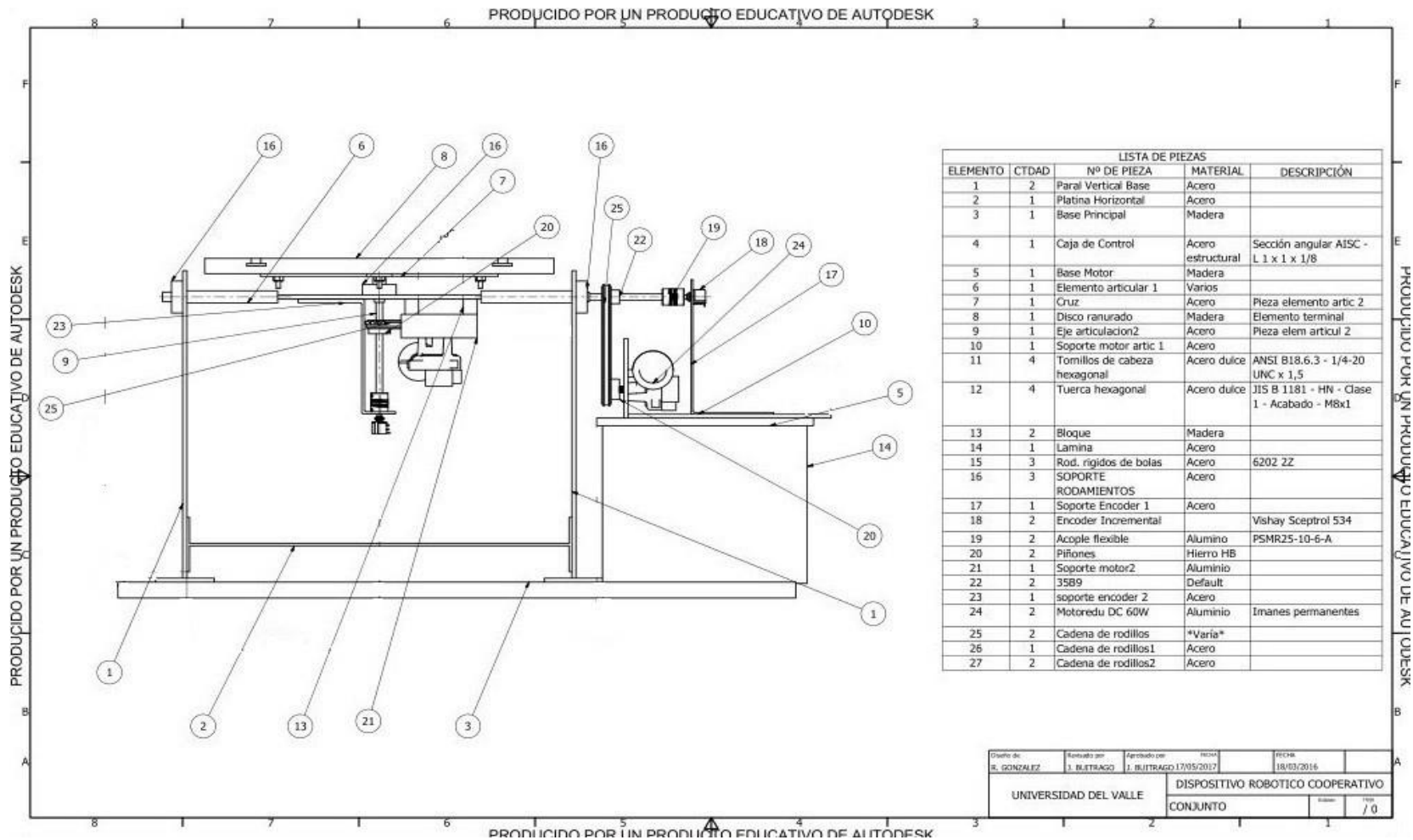
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

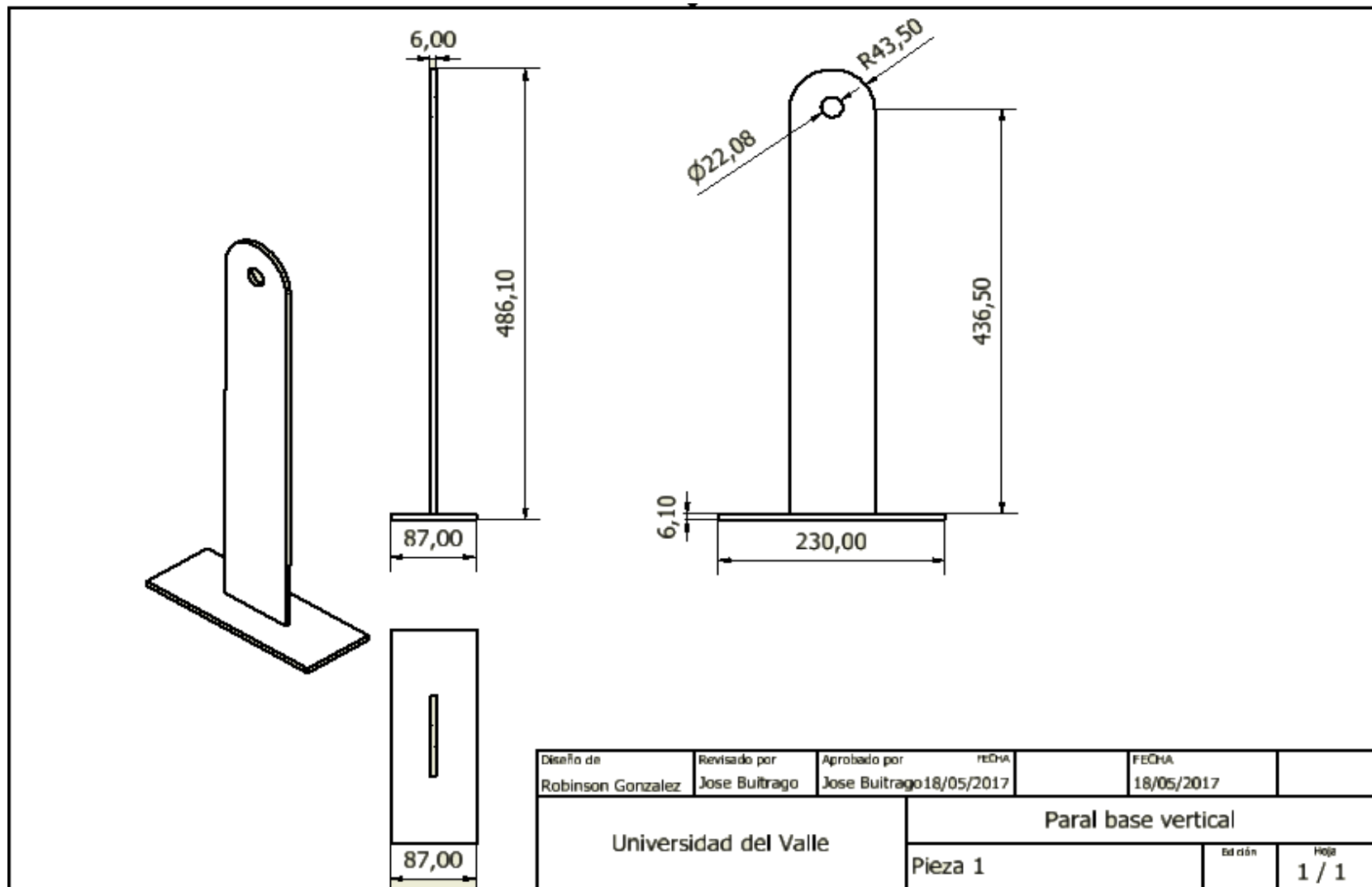
- [1] ISO, “ISO 8373:2012 - Robots and robotic devices -- Vocabulary”. p. 48, 2012.
- [2] S. A. López Rodríguez, “Control digital programable para una mesa con dos grados de libertad”, Universidad del Valle, 2001.
- [3] V. Giurgiutiu, J. Lyons, D. Rocheleau, y W. Liu, “Mechatronics/microcontroller education for mechanical engineering students at the University of South Carolina”, *Mechatronics*, vol. 15, n° 9, pp. 1025–1036, nov. 2005.
- [4] L. Á. Silva, M. M. Coll Sarmiento, y C. A. Jerez Durán, “Control en lazo cerrado de una mesa posicionadora de tres grados de libertad utilizando Labview”, *Rev. PUENTE Científica*, vol. 6, n° 2, jun. 2013.
- [5] A. Barrientos, *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill, 2007.
- [6] W. Mendez, Y. Rodriguez, L. Brady, y S. Tosunoglu, “Design of A Three–Axis Rotary Platform”, en *Florida Conference on Recent Advances in Robotics–FCRAR*, 2010, pp. 20–21.
- [7] M. Dorosti y J. H. Nobari, “Extracting full dynamic equations of 3 degree of freedom rotary table”, *2009 2nd Int. Conf. Comput. Control Commun. IC4 2009*, n° 1, 2009.
- [8] T. M. Knasel, “Mobile robotics - state of the art review.”, *Robotics*, vol. 2, n° 2, pp. 149–155, 1986.
- [9] Groover, *CAD/CAM: Computer-Aided Design and Manufacturing*. Pearson Education, 2006.
- [10] J. E. Henao cabezas, “Diseño mecánico de un robot industrial para uso pedagógico en laboratorio de robótica en la universidad del valle”, Universidad del Valle, 2010.
- [11] J. J. Craig, *Robótica*. Pearson Educación, 2006.
- [12] S. Saha, *Introducción a la robótica*. México: Mc Graw-Hill, 2010.
- [13] P. Corke, *Robotics, Vision and Control*, vol. 73. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [14] J. T. Buitrago Molina, “Propiedades de los modelos dinámicos en robótica clásica”, *Energ. y Comput. Rev. científica y tecnológica*, vol. 6, n° 1, pp. 58–62, oct. .
- [15] J. Ernesto, B. Castillo, J. Carlos, y O. Bravo, “Metodología para la reconstrucción de un robot serie, aplicado a un caso de estudio.”, 2010.
- [16] S. A. Nasar, *Máquinas eléctricas : operación en estado estacionario*. México: Continental, 1993.
- [17] “IEEE Guide: Test Procedures for Direct-Current Machines”, *ANSI/IEEE Std 113-1985*. pp. 1–38, 1984.
- [18] Electro-Craft Corporation., *DC motors, speed controls, servo systems : an engineering handbook*. Pergamon Press, 1977.
- [19] L. Gutiérrez Benítez y C. Andrés Corrales Posada, “Diseño de un freno Prony para la medición de potencia”, Universidad EAFIT, 2008.
- [20] L. Berstein, “Freno de Prony”. [En línea]. Disponible en: <http://www.mdf.fisica.cnba.uba.ar/limbo/index.php?option=content&task=view&id=64>. [Accedido: 25-ene-2017].
- [21] C. A. Á. V, J. P. M. Q., y J. C. G. C., “Caracterización mecánica de un motor eléctrico de corriente alterna utilizando un freno de foucault.”, *Sci. Tech.*, vol. 1, n° 37, pp. 187–192, 2007.
- [22] L. Mónico, M. Bogotá, y C. Casas, “Testing bench design for characterizing internal combustion engines and electric motors”, *Actas Ing.*, vol. 2, pp. 194–202, 2016.
- [23] O. J. de los Rios, “Caracterización de materiales alternativos para frenos de fricción”, *Sci. Tech.*, vol.

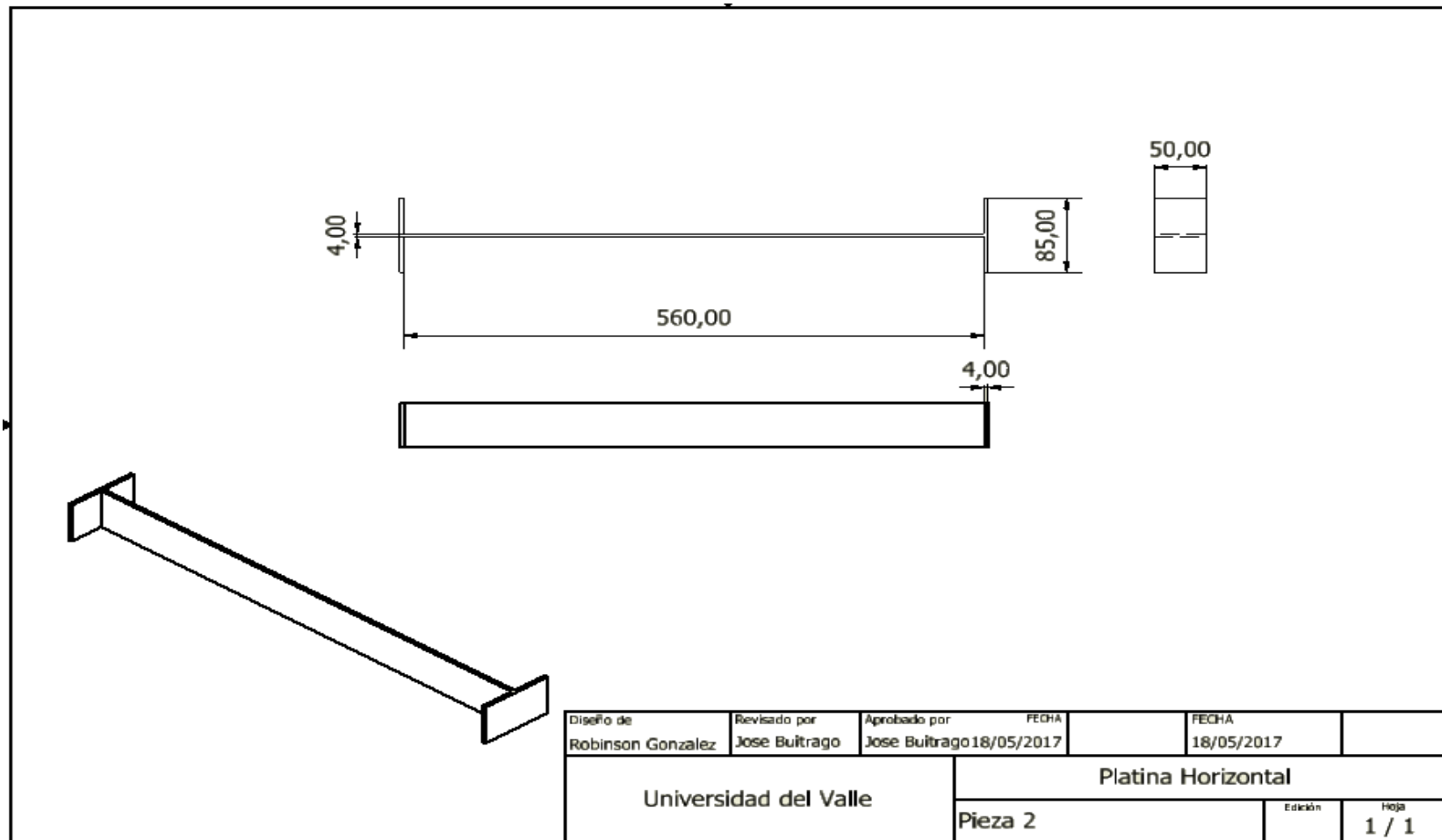
- 1, n° 52, pp. 26–31, 2012.
- [24] T. Filippo, *Pruebas sobre máquinas eléctricas*, 1ª ed. Barcelona, España: Vicens, Vives, 1965.
 - [25] T. Baumeister III y E. A. Avallone, *Marks : manual del Ingeniero mecánico*. McGraw-Hill, 1995.
 - [26] Pittman y METEK, “Servo Motor Application Notes”. Technical Articles and Other Motor Resources, Harleysville, Pennsylvania, USA, p. 10.
 - [27] J. E. Carryer, R. M. Ohline, y T. W. Kenny, “Permanent Magnet DC Motor Characteristics”, en *Introduction to Mechatronic Design*, Prentice Hall, 2011.
 - [28] C. Platero, “Modelado matemático de los sistemas dinámicos”, en *Apuntes de Regulación Automática I*, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España: Dpto de Ingeniería Electrónica Automática UPM, 2008, pp. 73–119.
 - [29] C. G. Hernández Capacho y M. G. Quijano Ortega, “Obtención experimental de los parámetros del motor que se utilizará en el sistema de locomoción de una esfera rodante”, 2013.
 - [30] S. A. S. Silva, “Obtención de Parámetros de un Motor de CD”. .
 - [31] F. J. Meza Weber y P. D. Ramos Morales, “Modelo matemático motor DC conexión independiente.”, 2015.
 - [32] A. Astudillo Vigoya, “Control del péndulo invertido simple-UV en régimen de pequeña señal [recurso electrónico]”, Universidad del Valle, 2016.
 - [33] G. W. Younkin, “ELECTRIC SERVO MOTOR EQUATIONS AND TIME CONSTANTS”.
 - [34] “Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Home”. [En línea]. Disponible en: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>. [Accedido: 21-ago-2017].
 - [35] “Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Motor Speed: Digital Controller Design”. [En línea]. Disponible en: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed§ion=ControlDigital>. [Accedido: 21-ago-2017].
 - [36] “Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Motor Position: Digital Controller Design”. [En línea]. Disponible en: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorPosition§ion=ControlDigital>. [Accedido: 21-ago-2017].
 - [37] E. I. Rivin y E. I., *Mechanical design of robots*. McGraw-Hill, 1988.
 - [38] R. L. Norton, *Diseño de máquinas*. Pearson educación, Prentice Hall, 1999.
 - [39] F. Beltran, “Teoría General del Método de los Elementos Finitos”. Madrid, España, p. 151, 1998.
 - [40] W. F. Riley y L. D. Sturges, *Ingeniería mecánica. Dinámica*. Reverté, 1996.
 - [41] J. M. Biggs, *Introduction to structural dynamics*. McGraw-Hill, 1964.
 - [42] M. I. Fernández Rodríguez, “La técnica del hole_drilling en estructuras de madera existentes para determinación de su estado tensional: calibración mediante análisis por elementos finitos”, 2014.
 - [43] “Lámina Hot Rolled (ASTM A-36)”. [En línea]. Disponible en: <http://www.cga.com.co/productos-y-servicios/productos/a-36>. [Accedido: 22-ago-2017].
 - [44] “ACEROSCOL S. A. S.” [En línea]. Disponible en: <http://www.aceroscol.com/?p=b30501>. [Accedido: 22-ago-2017].
 - [45] R. L. Norton y M. áAngel. Rios Sánchez, *Diseño de maquinaria : síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. McGraw-Hill Interamericana, 2013.
 - [46] “Literatura Intermec”. [En línea]. Disponible en: <http://www.intermec.com.co/literatura.php>. [Accedido: 22-ago-2017].

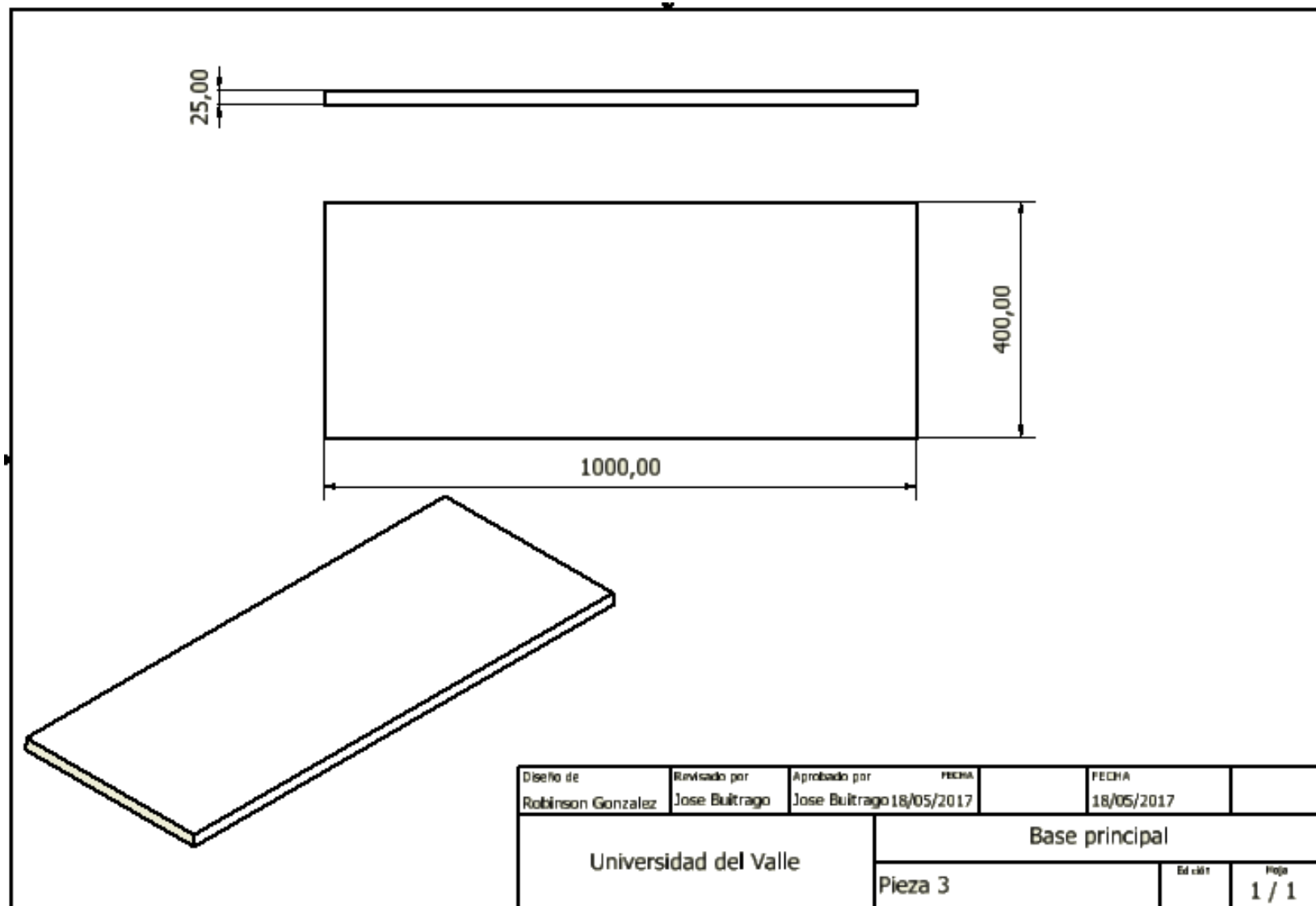
ANEXOS

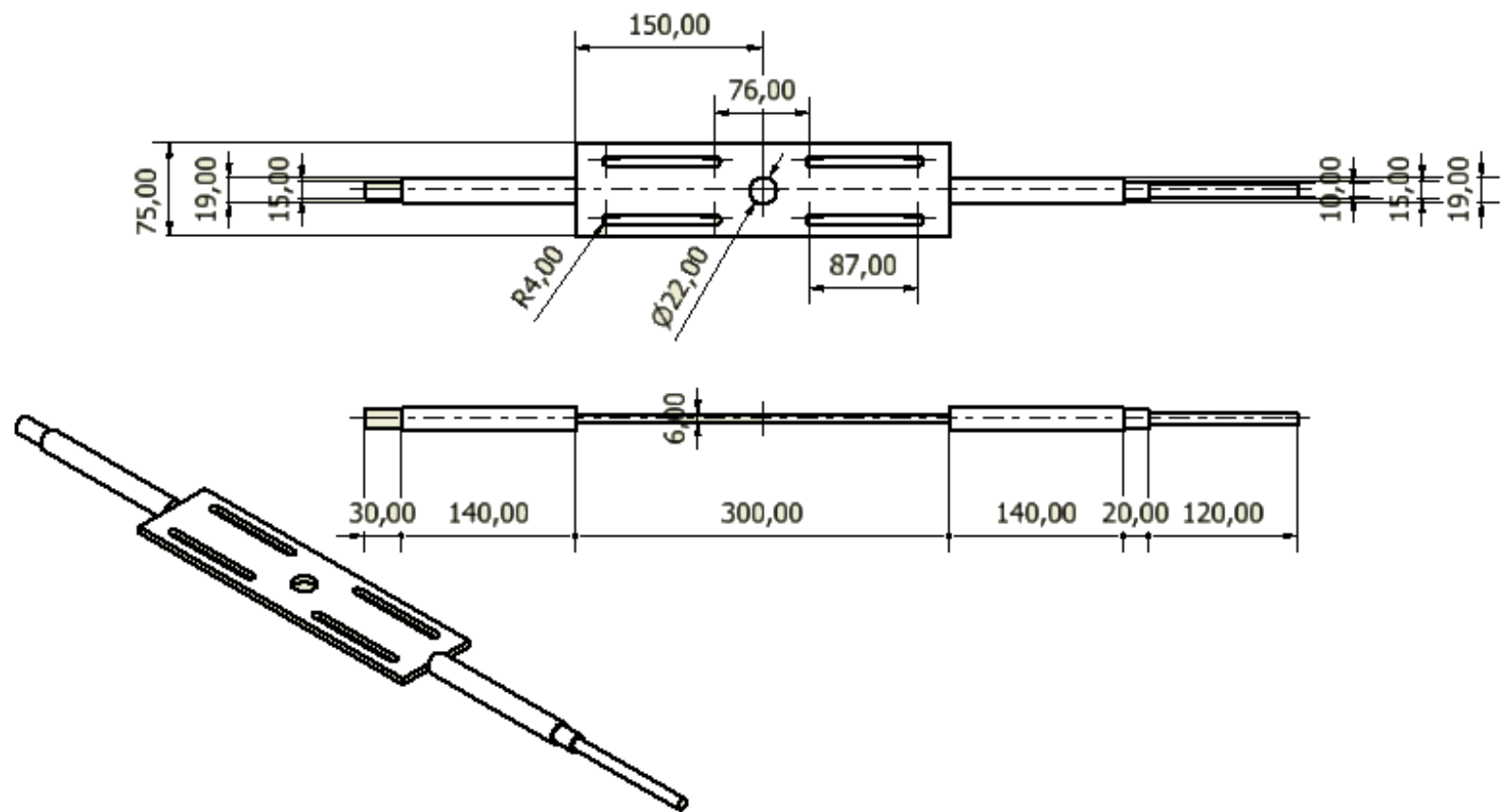
Anexo A. Planos del dispositivo



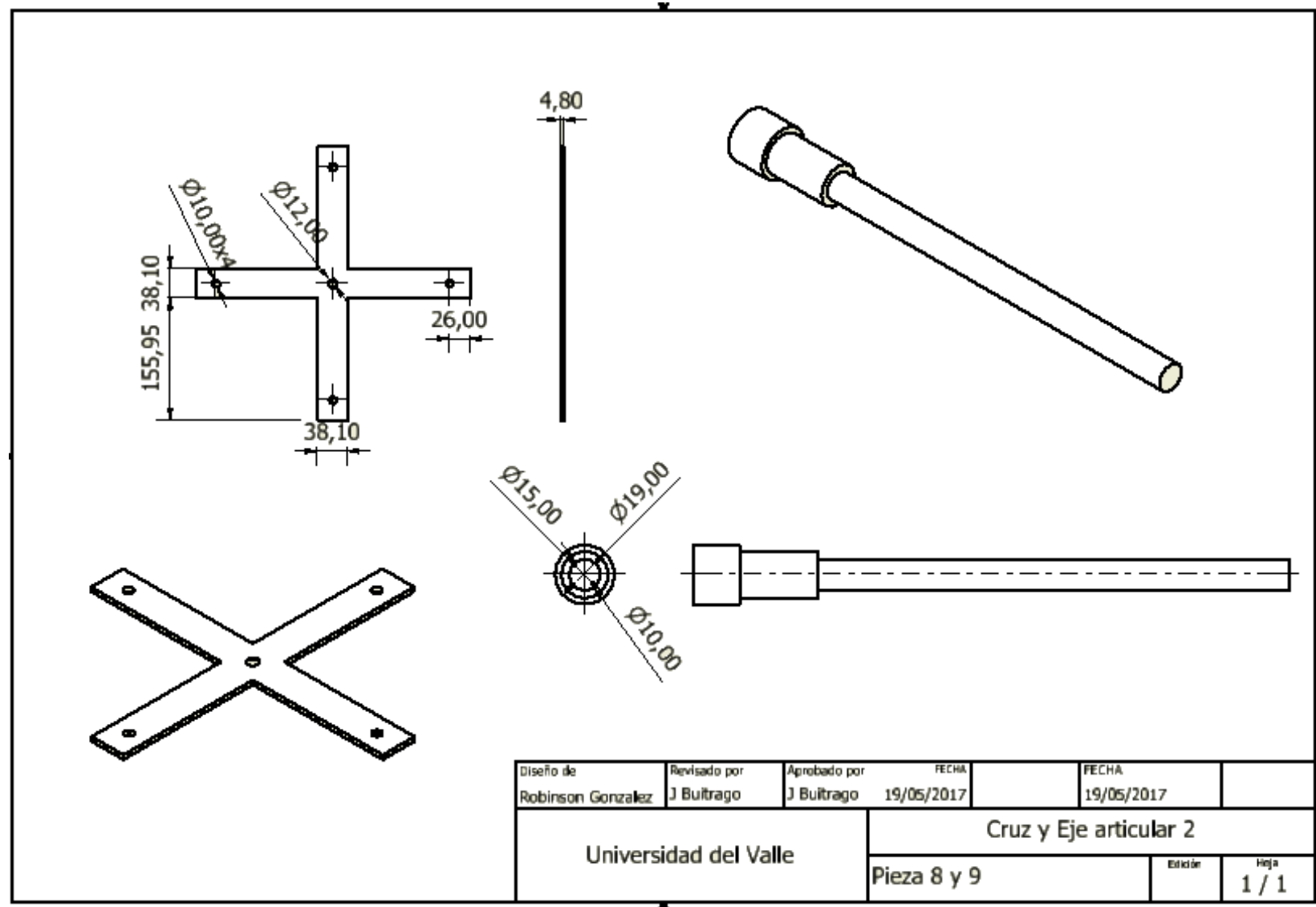


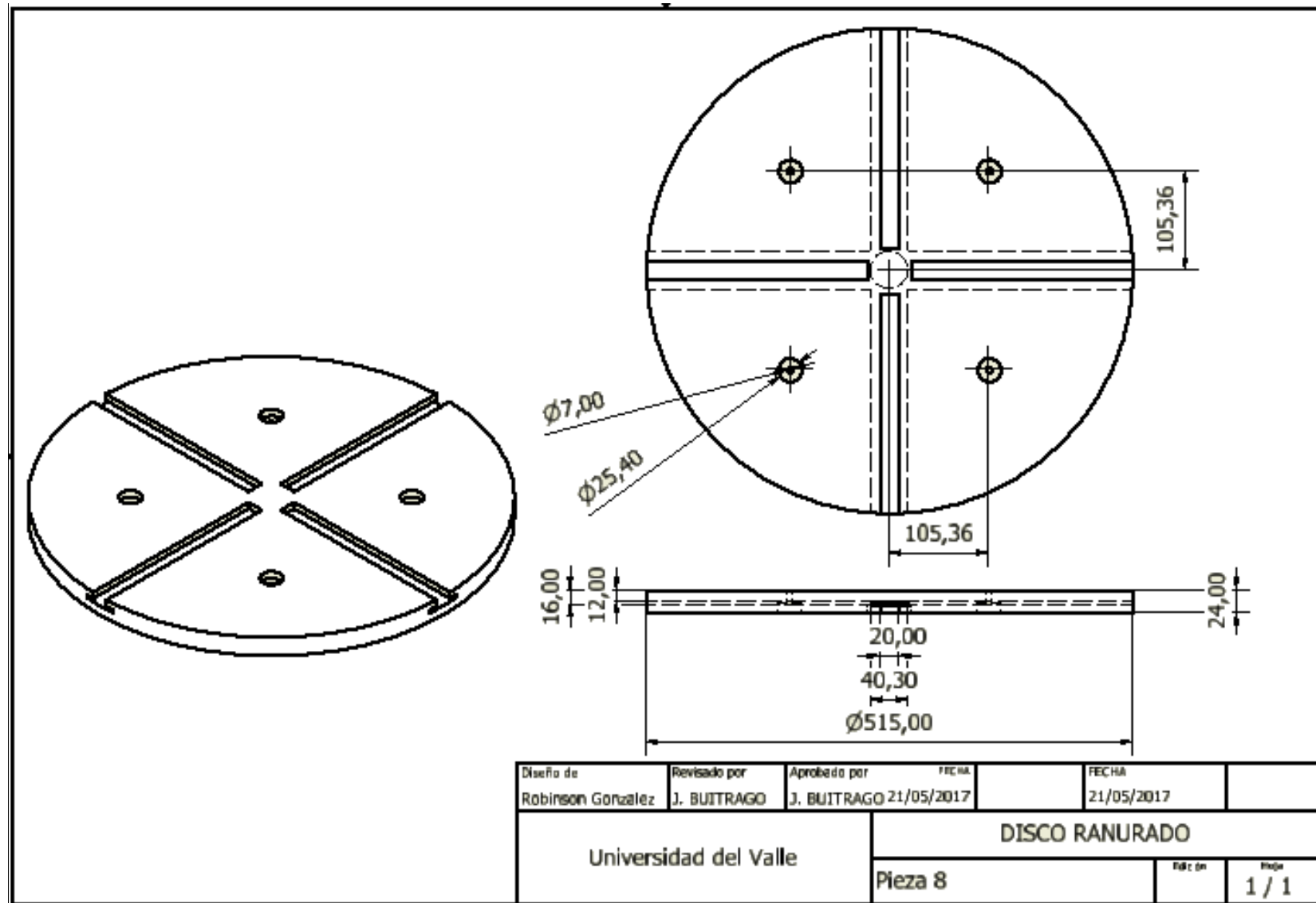


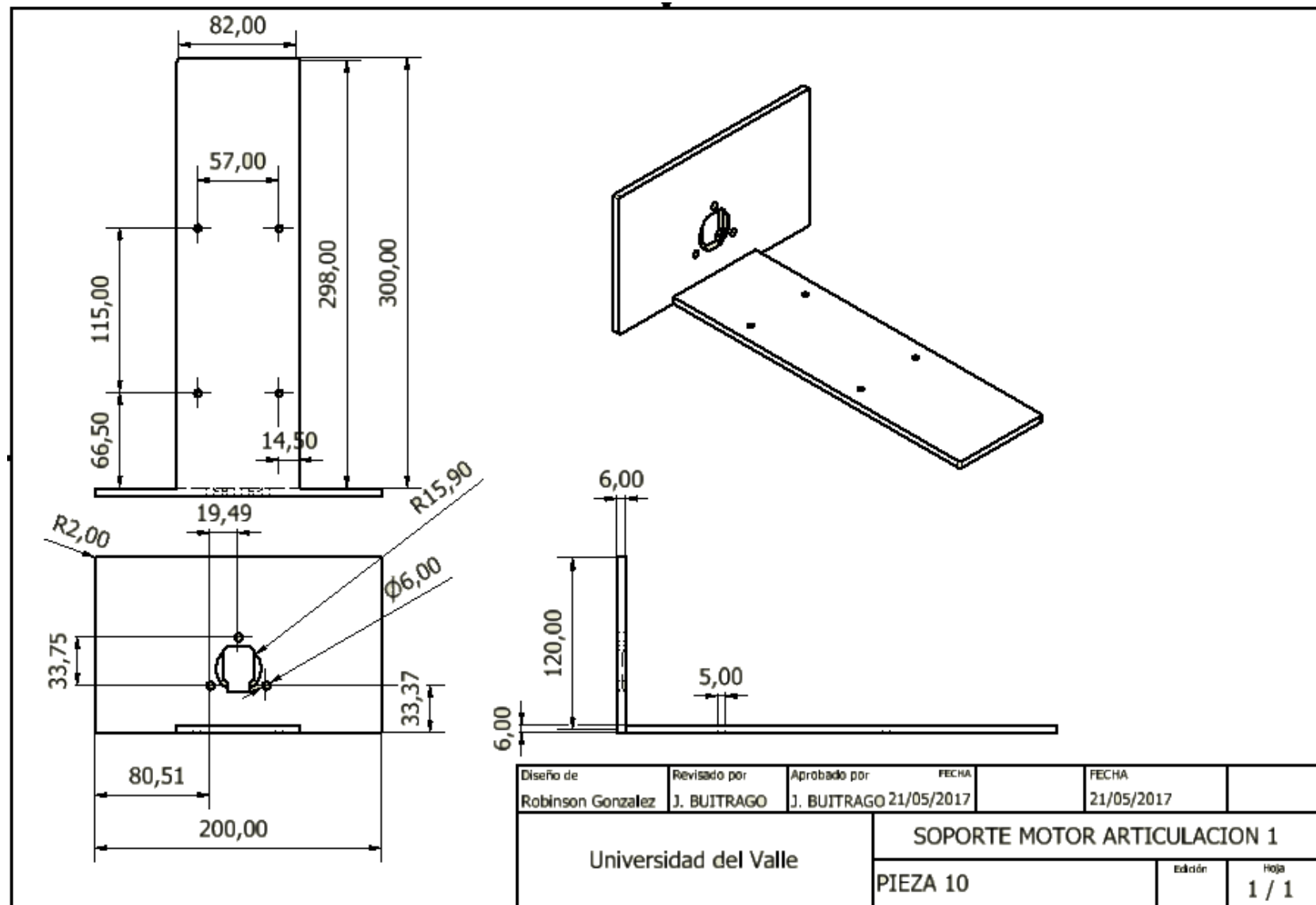


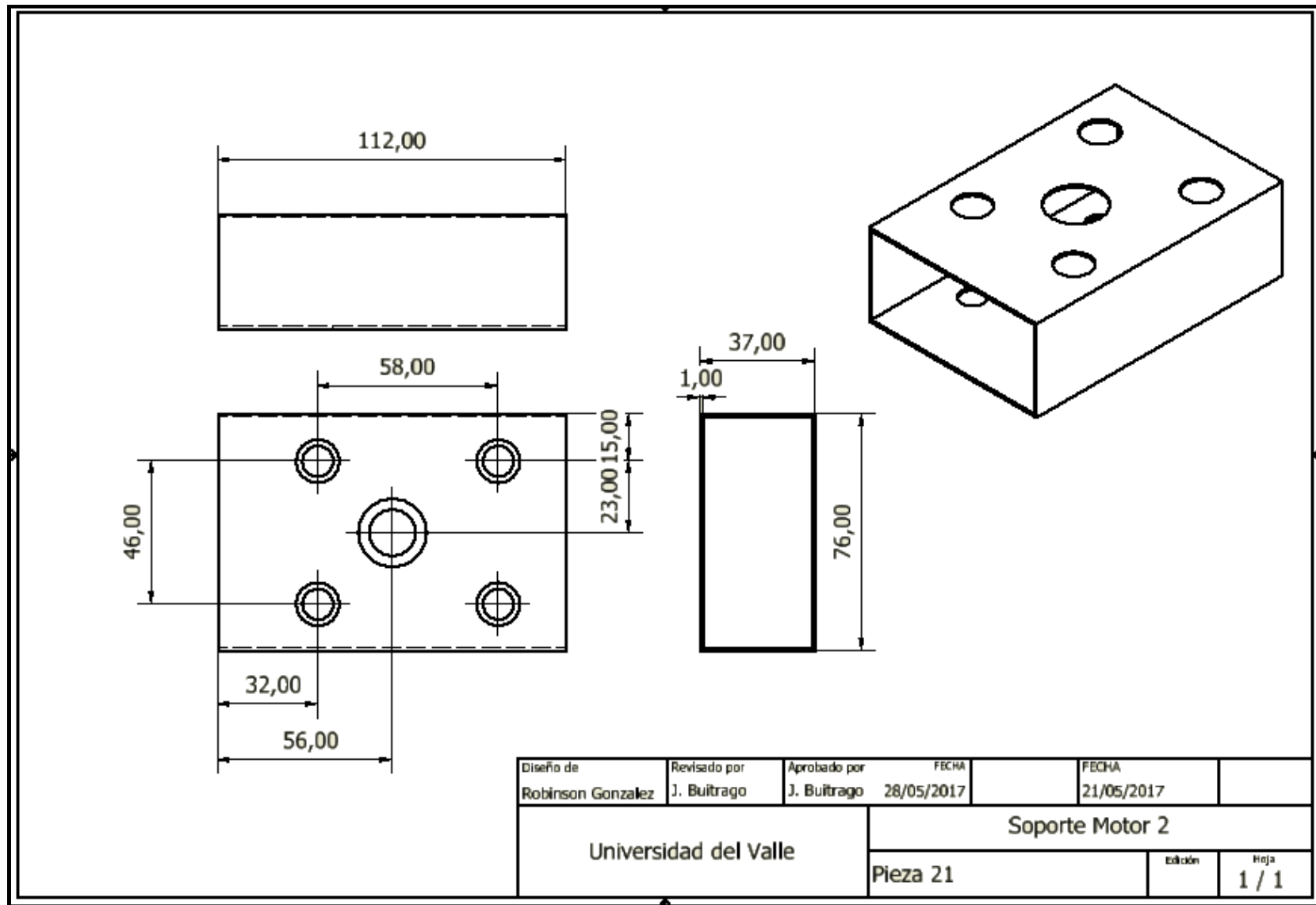


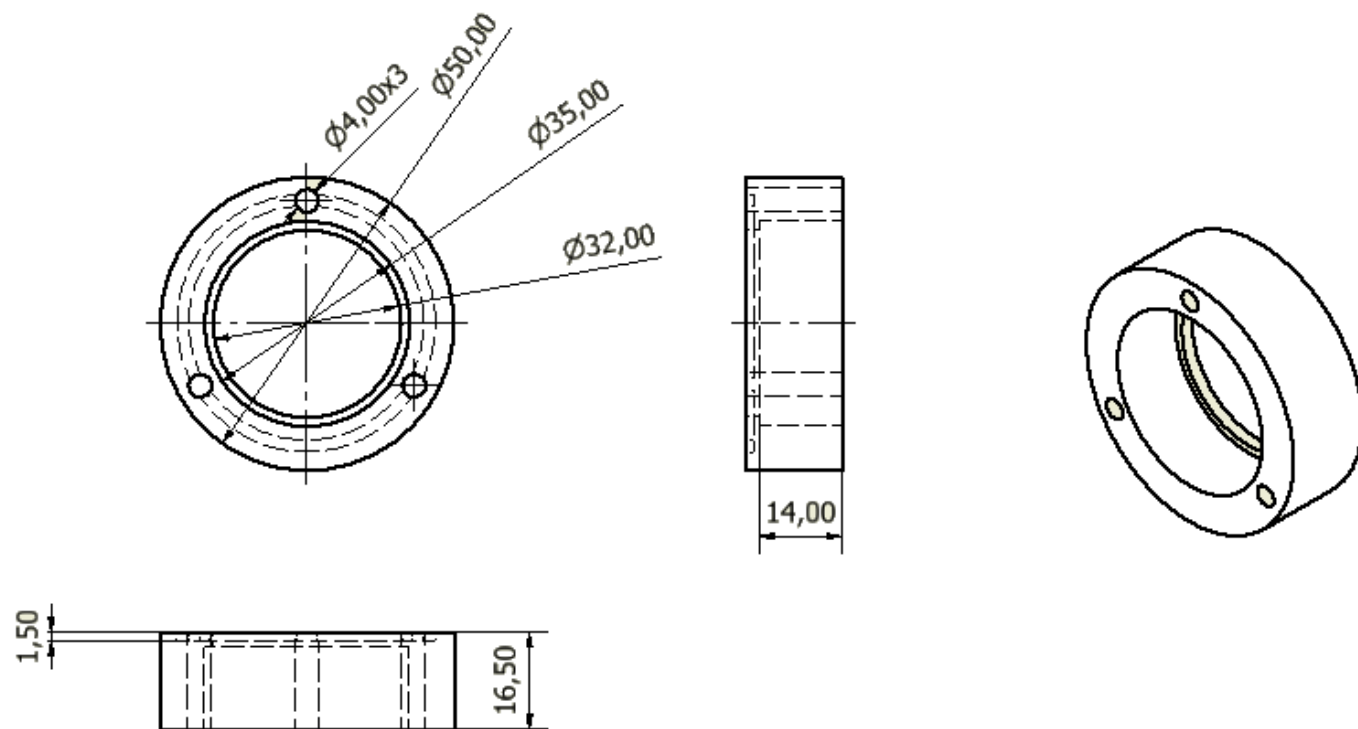
Diseño de Robinson Gonzalez	Revisado por Jose Buitrago	Aprobado por Jose Buitrago	FECHA 19/05/2017	FECHA 18/05/2017	
Universidad del Valle			Elemento articular 1		
			Pieza 6 Ensamblaje elemento 1-1	Hoja 1 / 1	











Diseño de Robinson Gonzalez	Revisado por J. Buitrago	Aprobado por J. Buitrago	FECHA 28/05/2017	FECHA 21/05/2015	
Universidad del Valle			BUJE PORTARODAMIENTOS		
			Pieza 16	Edición	Hoja 1 / 1

Anexo B. Características de componentes comerciales

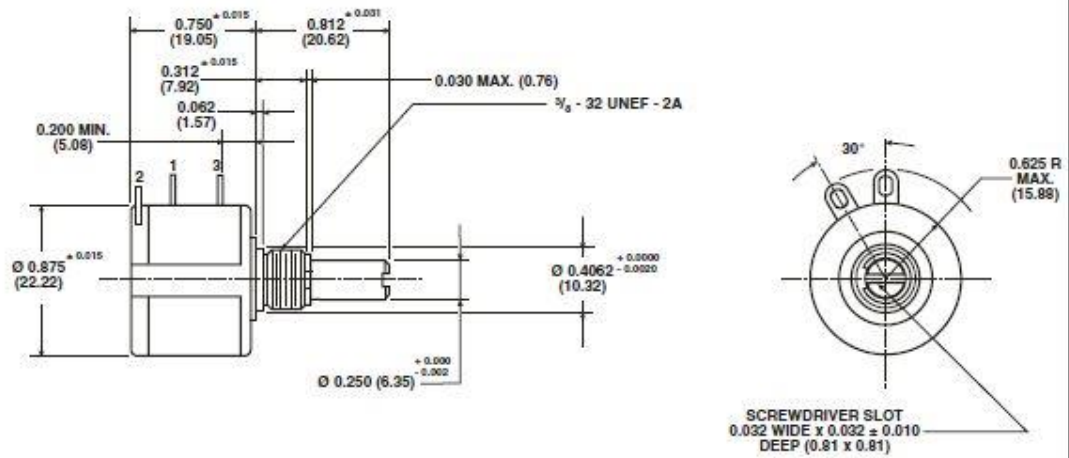
Encoder incremental modelo 536

ELECTRICAL SPECIFICATIONS		
PARAMETER		
Total resistance	Range 100 Ω to 100 kΩ, tolerance ± 5 %	
Linearity (independent)	± 0.25 %	
Noise	100 Ω ENR maximum	
Electrical angle	3600° + 10° - 0°	
Power rating	2.0 W at 70 °C derated to zero at 125 °C	
Insulation resistance	1000 MΩ minimum, 500 V _{DC}	
Dielectric strength	1000 V _{RMS} , 60 Hz	
Absolute minimum resistance	Not to exceed 0.10 % of total resistance or 1 Ω, whichever is greater	
Temperature coefficient	20 ppm/°C (wire only)	
End voltage	0.25 % of total applied voltage maximum	
MECHANICAL SPECIFICATIONS		
PARAMETER		
Rotation	3600° + 10° - 0°	
Torque (maximums)	STARTING 0.5 oz. - in (36.00 g - cm)	RUNNING 0.4 oz. - in (28.80 g - cm)
Mechanical runouts		
Shaft (TIR)	0.005" (0.13 cm)	
Pilot dia. (TIR)	0.003" (0.08 cm)	
Lateral runout (TIR)	0.005" (0.13 cm)	
Shaft end play	0.010" (0.25 cm)	
Shaft radial play	0.005" (0.13 cm)	
Weight (maximum)	0.75 oz. (21.26 g)	
Stop strength	75 oz. - in (static) (5.4 kg - cm)	

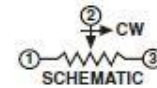
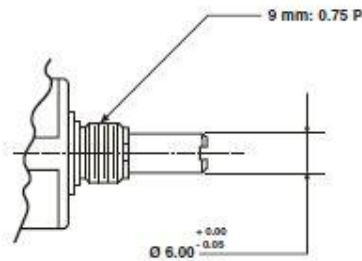
QUICK REFERENCE DATA	
Sensor type	ROTATIONAL, multi turn wirewound
Output type	Output by turrets
Market appliance	Industrial
Dimensions	$\frac{7}{8}$ " (22.2 mm)

DIMENSIONS in inches (millimeters)

BUSHING MOUNT: 536B/536-1



METRIC SHAFT/BUSHING THREAD



TOLERANCES: UNLESS OTHERWISE NOTED.
DECIMALS ± 0.005 ANGLES ± 2°

MATERIAL SPECIFICATIONS

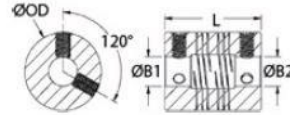
Front lid	Stainless steel and nickel plated brass bushing
Housing	Thermoplastic nylon glass filled
Rear lid	Thermo-glass filled
Shaft	Thermo-glass filled
Terminals	Brass plated for solderability
Mounting hardware	
Lockwasher internal tooth:	Steel nickel plated
Panel nut:	Brass, nickel plated

ENVIRONMENTAL SPECIFICATIONS

Vibration	15 g thru 2000 Hz
Shock	50 g
Rotational life	1 million shaft revolutions
Load life	900 h
Operating temperature range	- 55 °C to + 125 °C

Acoplamiento flexible- PSMR25106A

Clave de producto:	PSMR25-10-6-A
Tipo de producto:	Acoplamiento Flexible
Tipo:	Tornillo de Fijación
Material:	Aluminio 7075
Acabado:	Brillante
País de origen:	Estados Unidos



Medidas

Agujero B1:	10 mm
Agujero B2:	6 mm
Diámetro externo OD:	25,4 mm
Longitud L:	31,8 mm
Penetración del eje:	13,84 mm

Tornillos

Tornillo prisionero:	M4
Material del tornillo:	Acero aleado
Acabado de los tornillos:	Óxido negro
Torque de apretamiento:	2,2 Nm
Llave Allen:	2,0 mm

Transmisión de Par

Par estático:	3,39 Nm
Par dinámico (sin inversión):	1,70 Nm
Par dinámico (movimiento inversible):	0,85 Nm

Misalignment

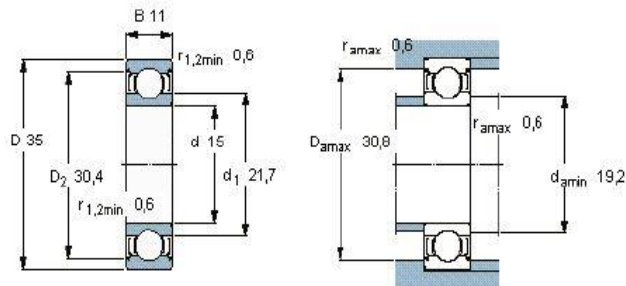
Desalineamiento angular:	3°
Desalineamiento lateral:	0,38 mm
Movimiento axial:	0,25 mm

Información adicional

Rigidez torsional:	1,80 Deg/Nm
Momento de inercia:	$3,394 \times 10^{-6} \text{ kg-m}^2$
Velocidad máxima:	6.000 RPM
Tolerancia del agujero:	+0,025mm / -0,000mm
Rango de temperatura:	-40°F to 225°F -40°C to 107°C
Peso:	0,134 lbs / 0,061 kg
RoHS2:	Compatible
REACH:	Compatible

Rodamiento de bolas rígido 6202-2Z

Dimensiones principales			Capacidades de carga básica		Velocidades nominales	Designación
d	D	B	dinámica C	estática C0	Velocidad de referencia	
mm			kN		rpm	* rodamiento SKF Explorer
15	35	11	8,06	3,75	43000	22000 6202-2Z *



Factores de cálculo

k_r	0,025
f_0	13

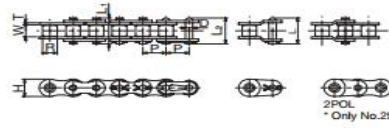
Cadenas y Piñones

KANA Roller Chains

Order No. Example

KANA40-RP 240 Links

10ft
3m



KANA standard roller chains are manufactured with strict management. Cost-performance products.

Chain No.	Pin Type	Pitch P	Roller Outside Diameter R	Inner Link Inner Width W	Link Plate Thickness T	Width H	Diameter D	Pin Length	L1	L2	L
KANA 25	RP	6.35	★3.30	3.10	0.75	5.8	2.31	8.8	8.8	9.35	
KANA 35	RP	9.525	★5.08	4.68	1.15	8.8	3.60	11.7	12.65	13.45	
KANA 40	RP	12.70	7.92	7.85	1.50	11.8	3.98	16.25	17.8	18.70	
KANA 50	RP	15.875	10.16	9.40	2.00	14.7	5.09	20	21.55	22.85	
KANA 60	RP	19.05	11.91	12.57	2.35	17.8	5.96	24.9	26.9	28.10	
KANA 80	RP	25.40	15.88	15.75	3.2	23.8	7.94	32.4	35.8	36.10	
KANA 100	RP	31.75	19.05	18.8	4	29.95	9.54	39.5	43.05	44.50	
KANA 120	CP	38.1	22.22	25.23	4.7	35.5	11.11	53.8	53.8	55.30	

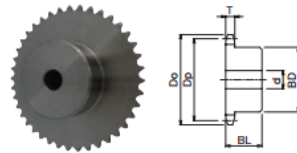
Chain No.	Pin Type	Average Tensile Strength kN (kgf)	Approx. Weight kg/m	No. of Links	Unit	No. in Box (Quantity)	¥	JL & OL	No. in Box (Quantity)
KANA 25	RP	3.9 (400)	0.13	480L	3	1		JL	25
KANA 35	RP	9.8 (1000)	0.35	8,000L	76	1		JL	25
KANA 40	RP	19.1 (1950)	0.62	240L	3	1		JL	25
KANA 50	RP	29.4 (3000)	1.07	2,400L	30	1		JL	25
KANA 60	RP	45.1 (4600)	1.53	1,920L	30	1		JL	25
KANA 80	RP	73.5 (7500)	2.82	1,600L	30	1		JL	25
KANA 100	RP	118.6 (12100)	4.13	1,200L	3	1		JL	10
KANA 120	CP	156.8 (16000)	5.70	80L	3	1		JL	10

K25B

Order No. Example

K25B 16

Type No. of Teeth
Sprocket No.



- Chain No.25
- Chain Pitch (P)6.35mm
- Bushing Link Inner Width (W)3.18mm
- Bushing Outside Diameter (D)3.30mm
- Tooth Width (T)2.8 mm

Carbon Structural Steel

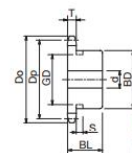
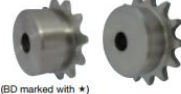
Type	No. of Teeth	Outer Diameter Do	Pitch Diameter Dp	Shaft Hole Diameter d	Boss Diameter BD	Boss Length BL	Shape	Weight g	¥	Semi-F ¥
K25B	10	23	20.55	6	7	8.5	14	15	30	
	11	25	22.54	7	8	8.5	15	15	30	
	12	28	24.53	7	8	9.5	15	15	30	
	13	30	26.53	7	8	10	18	15	50	
	14	32	28.54	7	8	10	20	15	50	
	15	34	30.54	7	8	10	20	15	50	
	16	36	32.55	9	10	12	25	15	60	
	17	38	34.56	9	10	12	25	15	70	
	18	40	36.57	9	10	12	25	15	70	
	19	42	38.58	9	10	16	28	15	80	
	20	44	40.59	9	10	16	28	15	80	
	21	46	42.61	9	10	16	28	15	90	
	22	48	44.62	9	10	16	30	15	100	
	23	50	46.63	9	10	16	30	15	110	
	24	52	48.65	9	10	16	30	15	120	
	25	54	50.66	9	10	20	35	15	140	
	26	56	52.68	9	10	20	35	15	140	
	27	58	54.70	9	10	20	35	15	150	
	28	60	56.71	9	10	20	35	15	150	
	29	62	58.73	9	10	20	35	15	160	

SUS35B

Order No. Example

SUS35B 20

Type No. of Teeth
Sprocket No.



Sprockets with a * symbol for BD have a channel in the boss exterior.

No. of Teeth	S	GD
10	4.4	20
11		23
12	4.4	26
13		29

- Chain No.35
- Chain Pitch (P)9.525mm
- Bushing Link Inner Width (W)4.78 mm
- Bushing Outside Diameter (D)5.08 mm
- Tooth Width (T)4.3 mm

Stainless Steel

Type	No. of Teeth	Outer Diameter Do	Pitch Diameter Dp	Shaft Hole Diameter d	Boss Diameter BD	Boss Length BL	Shape	Weight kg	¥	Semi-F ¥
SUS 35B	10	35	30.82	8	9	12	★24.5	20	0.08	
	11	38	33.81	8	9	14	★27	20	0.09	
	12	41	36.80	9	10	16	★30.5	20	0.12	
	13	44	39.80	9	10	18	★32	20	0.12	
	14	47	42.81	9	10	18	32	20	0.12	
	15	51	45.81	9	10	20	35	20	0.16	
	16	54	48.82	9	10	20	37	20	0.19	
	17	57	51.84	11	12	25	41	20	0.22	
	18	60	54.85	11	12	25	44	20	0.25	
	19	63	57.87	11	12	28	47	20	0.28	
	20	66	60.89	11	12	30	50	20	0.32	
	21	69	63.91	11	12	32	53	20	0.36	
	22	72	66.93	11	12	35	56	20	0.37	
	23	75	69.95	11	12	38	60	20	0.38	
	24	78	72.97	11	12	32	53	22	0.43	
	25	81	76.00	11	12	32	53	22	0.44	
	26	84	79.02	11	12	32	53	22	0.45	
	27	87	82.05	11	12	32	53	22	0.46	
	28	90	85.07	11	12	32	53	22	0.48	
	30	96	91.12	11	12	32	53	22	0.51	
	32	102	97.18	11	12	32	53	22	0.54	
	34	109	103.23	11	12	32	53	22	0.57	
	35	112	106.26	11	12	32	53	22	0.59	

Anexo C. Cinemática directa

Evaluación Teórica 1

```
%Funcion que arroja la matriz D-H, asociada a sus 4 parametros

function dh=MDH(teta,d,a,alfa)
    dh=[cos(teta)    -cos(alfa)*sin(teta)    sin(alfa)*sin(teta)  a*cos(teta)];
        [sin(teta)    cos(alfa)*cos(teta)  -sin(alfa)*cos(teta)    a*sin(teta)];
        [0    sin(alfa)    cos(alfa)    d];
        [0    0    0    1]];

%%Definición de parametros D-H%%
syms q1 q2 d1 d2
pi1=sym(pi);

%%Obtención de las matrices Homogeneas articulares%%
A01=MDH(q1,d1,0,pi1/2)
A12=MDH(q2,d2,0,0)
T=A01*A12

%Se escribe la funcion mcdMesa, la cual muestra el Modelo cinematico directo
%Recibe coordenadas articulares (q1,q2) retorna matriz T
function T=mcdMesa (q1,q2)
    d1=287; %Longitud barra 1
    d2=60.30; %Longitud barra 2
    A01=MDH(q1,d1,0,pi/2);
    A12=MDH(q2,d2,0,0);
    T=A01*A12;

%Se definen variables y constantes

syms q1 q2
d1= 287;
d2= 60.30;
pi1=sym(pi);

% Se calculan las matrices de transformacion homogenea
% por medio de la Funcion MDH

A01=MDH(q1,d1,0,pi1/2)
A12=MDH(q2,d2,0,0)
T=A01*A12
```

```

clear all
clc
q1=input('Ingrese el valor de q1 (grados) :');
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
end
end

q2=input('Ingrese el valor de q2 (grados) :');
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
end
end

%Se define las longitudes d1 y d2
d1=287;
d2=60.30;

%Conversion de unidades
rad1=(q1*pi)/180;
rad2=(q2*pi)/180;

T=mcdMesa (rad1,rad2)

```

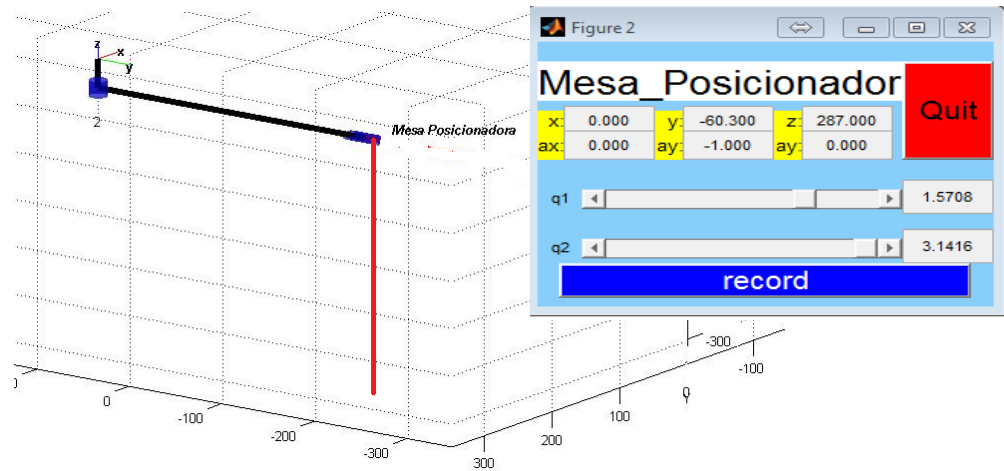
Toolbox Robótica de Corke

```
clear all
clc

%Definicion de los parametros cinematicos D-H con la funcion Link
L(1)= Link([0, 287, 0, (pi/2), 0]);
L(2)= Link([0, 60.30, 0, (0), 0]);
%Ensamble de los enlaces por medio de la funcion SerialLink
%y construccion de la tabla de parametros.
Mesa_dosgdl = SerialLink(L, 'name', 'Mesa_Posicionadora')
q1=input('Ingrese el valor de q1 (grados) :');
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
    while (q1<-90 || q1>90)
        disp('Valor q1 incorrecto');
        q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
    end
end

q2=input('Ingrese el valor de q2 (grados) :');
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
    while (q2<-360 || q2>360)
        disp('Valor q2 incorrecto ');
        q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
    end
end

%Se define las longitudes d1 y d2
d1=287;
d2=60.30;
%Conversion de unidades
rad1=(q1*pi)/180;
rad2=(q2*pi)/180;
%Se usa el metodo fkine para resolver la cinematica directa
fkine(Mesa_dosgdl,[rad1,rad2])
% Se utiliza plot para mostrar representacion gráfica del robot en los
% parametros definidos
Mesa_dosgdl.plot([rad1,rad2])
%Se utiliza teach para variar los parametros q1 y q2 En la grafica%
MesaPosicionadora = Mesa_dosgdl.teach('degrees')
```



Evaluación Teórica 2

```

clear all
clc
%Modelo Teorico Cinematica Directa Mesa
q1=input('Ingrese el valor de q1 (grados) :');
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
end
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
end
end

q2=input('Ingrese el valor de q2 (grados) :');
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
end
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
end
end

%Se define las longitudes d1 y d2
d1=287;
d2=60.30;

%Conversion de unidades
rad1=(q1*pi)/180;
rad2=(q2*pi)/180;

%obtener matrices
A01=[cos(rad1),0,sin(rad1),0; sin(rad1),0,-cos(rad1),0; 0,1,0,d1; 0,0,0,1]
A12=[cos(rad2),-sin(rad2),0,0; sin(rad2),cos(rad2),0,0; 0,0,1,d2; 0,0,0,1]
T=A01*A12

```

Anexo D. Cinemática inversa

Toolbox de Robótica Corke

```
clear all
clc

q1=input('Ingrese el valor de q1 (grados) :');
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
while (q1<-90 || q1>90)
    disp('Valor q1 incorrecto');
    q1=input('Ingrese un NUEVO valor q1 en el rango -90° a 90°:');
end
end

q2=input('Ingrese el valor de q2 (grados) :');
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
while (q2<-360 || q2>360)
    disp('Valor q2 incorrecto ');
    q2=input('Ingrese un NUEVO valor q2 en el rango -360° a 360°:');
end
end

rad1=(q1*pi)/180;
rad2=(q2*pi)/180;
d1 = 287 ;
d2 = 60.30 ;
L(1) = Link([0+pi/2, d1, 0, (pi/2), 0]);
L(2) = Link([0, d2, 0, (0), 0]);
Mesa_dosgd1 = SerialLink(L,'name', 'Mesa_Posicionadora');
NOAP = fkine(Mesa_dosgd1,[rad1,rad2])
Q = Mesa_dosgd1.ikine( NOAP,[0, 0], [1, 1, 0, 0, 0, 0],'ru');
R = Q*(180/pi)
T= fkine(Mesa_dosgd1,[Q])
```

Anexo E. Algoritmo computacional de LaGrange- Euler

L-E1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas D-H.

La asignación de sistemas de referencia y parámetros Denavit-Hartenberg se realizó anteriormente como se muestra en la Figura 10 y en la Tabla 2..

L-E2. Obtener las matrices de transformación 0A_i para cada elemento i .

Las matrices se obtuvieron en la sección anterior, las cuales son:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & 0 & -Cq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 51})$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 & 0 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 52})$$

$$T = {}^0A_2 = {}^0A_1 \times {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & S_1d_2 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 & -C_1d_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 53})$$

L-E3. Obtener las matrices U_{ij} definidas por:

$$U_{ij} = \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \quad (\text{Ec. 54})$$

$$U_{11} = \frac{\partial^0 A_1}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = \frac{\partial^0 A_1}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = \frac{\partial^0 A_2}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -S_1 C_2 & S_1 S_2 & C_1 & C_1 d_2 \\ C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & S_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial^0 A_2}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 & -C_1 C_2 & 0 & 0 \\ -S_1 S_2 & -S_1 C_2 & 0 & 0 \\ C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L-E4. Obtener las matrices $\mathbf{U}_{ijk}$ definidas por:

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k}$$

$$U_{111} = \frac{\partial U_{11}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ -S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{112} = \frac{\partial U_{11}}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{121} = \frac{\partial U_{12}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{122} = \frac{\partial U_{12}}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{211} = \frac{\partial U_{21}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -C_1 C_2 & C_1 S_2 & -S_1 & -S_1 d_2 \\ -S_1 C_2 & S_1 S_2 & C_1 & C_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{212} = \frac{\partial U_{22}}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} S_1 S_2 & S_1 C_2 & 0 & 0 \\ -C_1 S_2 & -C_1 C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = \frac{\partial U_{22}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} S_1 S_2 & S_1 C_2 & 0 & 0 \\ -C_1 S_2 & -C_1 C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{222} = \frac{\partial U_{22}}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -C_1 C_2 & C_1 S_2 & 0 & 0 \\ -S_1 C_2 & -S_1 S_2 & 0 & 0 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L-E5. Obtener las matrices de pseudoinercias **J_i** para cada elemento, que vienen definidas por:

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int z_i x_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 55})$$

Donde las integrales están extendidas al elemento i considerando, y (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del diferencial de masa dm respecto al sistema de coordenadas del elemento.

La matriz **J₁**, del elemento articulación uno, toma la forma:

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_{1xx} & I_{1xy} & I_{1xz} & \Delta x_1 m_1 \\ I_{1yx} & I_{1yy} & I_{1yz} & \Delta y_1 m_1 \\ I_{1zx} & I_{1zy} & I_{1zz} & \Delta z_1 m_1 \\ \Delta x_1 m_1 & \Delta y_1 m_1 & \Delta z_1 m_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

A matriz de pseudoinercias para el elemento 2, puesto que se considera la masa concentrada en el centro de masas y el origen del sistema de coordenadas del elemento 2, se toma en el mismo centro de masas

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_{2xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2zz} & -\Delta z_2 m_2 \\ 0 & 0 & -\Delta z_2 m_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

L-E6. Obtener la matriz de inercias $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ cuyos elementos vienen definidos por:

L-E7.

$$d_{ij} = \sum_{k=(\max i, j)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{kj} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{ki}^T) \quad (\text{Ec. 56})$$

Con $i, j = 1, 2, \dots, n$

n = número de grados de libertad.

$$d_{11} = \sum_{k=(\max 1, 1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T)$$

$$d_{12} = \sum_{k=(\max 2, 1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T)$$

$$d_{21} = \sum_{k=\max(2, 1)}^2 \text{traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

$$d_{22} = \sum_{K=\max(2, 2)}^2 \text{traza}(\mathbf{U}_{k2} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

Entonces:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

L-E8. Obtener los términos h_{ikm} definidos por:

$$h_{ikm} = \sum_{j=(\max i, k, m)}^n \text{Traza}(U_{jkm} J_m U_{ji}^T) \quad (\text{Ec. 57})$$

Con $i, k, m = 1, 2, \dots, n$

$$h_{111} = \sum_{j=\max(1,1,1)}^2 \text{traza}(U_{j11} J_j U_{j1}^T) = \text{Tr}(U_{111} J_1 U_{11}^T) + (U_{211} J_2 U_{21}^T)$$

$$h_{111} = 0$$

$$h_{112} = \sum_{j=\max(1,1,2)}^2 \text{traza}(U_{j12} J_j U_{j1}^T) = \text{Tr}(U_{212} J_2 U_{21}^T)$$

$$h_{112} = -s_2 c_2 J_{2x} + c_2 s_2 J_{2y}$$

$$h_{121} = \sum_{j=\max(1,2,1)}^2 \text{traza}(U_{j21} J_j U_{j1}^T) = \text{Tr}(U_{221} J_2 U_{21}^T)$$

$$h_{121} = -s_2 c_2 J_{2x} + c_2 s_2 J_{2y}$$

$$h_{211} = \sum_{j=\max(2,1,1)}^2 \text{traza}(U_{j11} J_j U_{j2}^T) = \text{Tr}(U_{221} J_2 U_{21}^T)$$

$$h_{211} = c_2 s_2 J_{2x} - s_2 c_2 J_{2y}$$

$$h_{122} = \sum_{j=\max(1,2,2)}^2 \text{traza}(U_{j22} J_j U_{j1}^T) = \text{Tr}(U_{222} J_2 U_{21}^T)$$

$$h_{122} = 0$$

$$h_{212} = \sum_{j=\max(2,1,2)}^2 \text{traza}(U_{j22} J_j U_{j2}^T) = \text{Tr}(U_{212} J_2 U_{22}^T)$$

$$h_{212} = 0$$

$$h_{221} = \sum_{j=\max(2,2,1)}^2 \text{traza}(U_{j21} J_j U_{j2}^T) = \text{Tr}(U_{221} J_2 U_{22}^T)$$

$$h_{221} = 0$$

$$h_{222} = \sum_{j=\max(2,2,2)}^2 \text{traza}(U_{j22} J_j U_{j2}^T) = \text{Tr}(U_{222} J_2 U_{22}^T)$$

$$h_{222} = 0$$

L-E9. Obtener la matriz columna de fuerzas de coriolis y centrípeta H cuyos elementos vienen definidos por:

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad (\text{Ec. 58})$$

$$h_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{1km} \dot{q}_k \dot{q}_m = h_{111} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{121} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{122} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2$$

$$h_1 = (-s_2 s_2 J_{2x} + 2c_2 s_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$h_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{2km} \dot{q}_k \dot{q}_m = h_{211} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{221} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{122} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2$$

$$h_2 = (c_2 s_2 J_{2x} - 2s_2 c_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1^2$$

Entonces:

$$H = \begin{bmatrix} (-2s_2 s_2 J_{2x} + 2c_2 s_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ (c_2 s_2 J_{2x} - 2s_2 c_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

L-E10. Obtener la matriz columna de fuerzas de gravedad $C=[c_i]^T$ cuyos elementos estas definidos por:

$$c_i = \sum_{j=1}^n (-m_j g U_{ji}^j r_j) \quad (\text{Ec. 59})$$

Con $i = 1, 2, \dots, n$

g : Es el vector de gravedad expresado en el sistema de la base $\{S_o\}$ y viene expresado por $(g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}, 0)$

${}^j r_j$: Es el vector de coordenadas homogéneas del centro de masas del elemento j expresado en el sistema de referencia del elemento i.

$$g = [-g \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$${}^1r_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$${}^2r_2 = [0 \quad 0 \quad -L_1 \quad 1]^T$$

Entonces:

$$C_1 = \sum_{j=1}^2 (-m_j g U_{j1}^j r_j) = -m_1 g U_{11}^1 r_1 - m_2 g U_{21}^2 r_2$$

$$C_1 = -c_1 m_2 g L_1 + c_1 d_2 m_2 g$$

$$C_2 = \sum_{j=1}^2 (-m_j g U_{j2}^j r_j) = -m_1 g U_{12}^1 r_1 - m_2 g U_{22}^2 r_2$$

$$C_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$C = [c_i]^T = \begin{bmatrix} -c_1 m_2 g L_1 + c_1 d_2 m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

L-E10. La ecuación dinámica del sistema será:

$$\tau = D\ddot{q} + H + C \text{ (Ec. 60)}$$

Donde τ es el vector de las fuerzas y pares motores efectivos aplicados sobre cada coordenada qi .

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_2^2 J_{2x} + s_2^2 J_{2y} + J_{2z} - 2d_2 L_1 m_2 + d_2^2 m_2) & 0 \\ 0 & (J_{2x} + J_{2y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2s_2 s_2 J_{2x} + 2c_2 s_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ (c_2 s_2 J_{2x} - 2s_2 c_2 J_{2y}) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_1 m_2 g L_1 + c_1 d_2 m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anexo F. Equipos e instrumentos para pruebas de motores

Equipo o instrumento	Marca	Rango medición	Resolución	Precisión
Fuente de potencia DC	HP 64396	0-60 V / 0-15A	2v	
Tacómetro	TM-5000	6,0 - 99999,9 rpm	0,1 rpm	±0,01%
Multímetro	Sunsai	200mV-600V		±0,50%
Multímetro	Keithley	20mv-1000V / 0-10 A	10uV-100mV	±0,03%
Bascula digital	WeiHeng	0-50 Kg	5 g	±0.05%

Tacómetro



Bascula digital



Fuente de potencia DC



Multímetro (Voltímetro)



Multímetro (Amperímetro)



Anexo G. Pruebas preliminares de diagnóstico

MOTOR UNO				
v	DATOS ASCENDENTES		DATOS DESCENDENTES	
	n (rpm)	I (A)	n(rpm)	I (A)
0	0	0	0	0
0,5	0	0	0	0
1	0	0,4	0	0
1,5	0	1,4	0	0,4
2	0	0,9	0	1
2,5	0	2,2	0	1,8
3	6,2	2,5	6,5	1,8
3,5	7,3	2,8	7,5	2
4	8,4	3	12,1	2,1
4,5	13	3,2	17,4	2,4
5	18,7	3,4	23,4	2,5
5,5	22,9	3,4	29,4	2,6
6	29,5	3,4	36,1	2,8
6,5	34,9	3,4	39,5	2,8
7	40,3	3,4	45,3	2,9
7,5	46	3,5	51,7	3
8	52,8	3,5	55,8	3,1
8,5	58,3	3,5	61,6	3,1
9	64,3	3,5	67,6	3,3
9,5	70,1	3,5	73,7	3,4
10	76,5	3,5	80,4	3,4
10,5	80,1	3,6	85,7	3,5
11	87,2	3,5	89,1	3,5
11,5	93,4	3,5	94,7	3,5
12	99,1	3,5	99,2	3,5

MOTOR UNO				
v	DATOS ASCENDENTES		Datos descendentes	
	n (rpm)	I (A)	n(rpm)	I (A)
0	0	0	0	0
0,5	0	0,2	0	0
1	0	0,5	0	0
1,5	0	1,2	0	0
2	0	2	0	0,3
2,5	0	1	0	0,5
3	0	1,2	0	0,8
3,5	0	1,9	0	1,4
4	0	2,2	0	2
4,4	6,64	2,5	6,94	2
4,5	8,3	2,8	8,8	2
5	12,5	3	12,8	2,2
5,5	18,7	3,4	20,5	2,5
6	24,2	3,4	30,5	2,6
6,5	30,4	3,5	37,6	2,6
7	36,6	3,5	43,3	2,8
7,5	44,4	3,5	50,7	2,9
8	51,3	3,5	58,9	3,1
8,5	57,6	3,5	66,8	3,1
9	64,5	4	76,9	3,2
9,5	72,3	4	84	3,4
10	78,5	4	90,9	3,4
10,5	86,5	4,4	95,4	3,6
11	96,7	4,5	103,7	3,8
11,5	102,5	4,5	110,4	3,8
12	110,3	4,5	116,3	4

Anexo H. Prueba en vacío de motores

MOTOR UNO SENTIDO ANTI HORARIO						
V	DATOS ASCENDENTES			DATOS DESCENDENTES		
	I (A)	n (RPM)	P [W]	I (A)	n (RPM)	P [W]
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,5	0,1	0,0	0,1	0,3	0,0	0,2
1,0	0,3	0,0	0,3	0,8	0,0	0,8
1,5	0,5	0,0	0,8	1,2	0,0	1,7
2,0	1,0	0,0	2,1	1,2	0,0	2,4
2,5	1,1	4,0	2,7	1,5	6,9	3,8
3,0	1,2	7,5	3,6	1,2	9,6	3,7
3,5	1,3	9,6	4,5	1,3	13,0	4,4
4,0	1,4	13,8	5,6	1,3	17,5	5,2
4,5	1,4	17,5	6,5	1,4	20,6	6,1
5,0	1,5	20,6	7,6	1,4	24,7	7,0
5,5	1,6	25,3	8,7	1,5	28,3	8,0
6,0	1,6	30,4	9,8	1,5	32,2	9,1
6,5	1,7	33,2	11,1	1,6	36,3	10,1
7,0	1,7	37,0	12,1	1,6	40,8	11,1
7,5	1,8	41,8	13,5	1,6	43,8	12,3
8,0	1,8	46,6	14,6	1,7	48,5	13,8
8,5	1,9	50,2	16,2	1,8	52,8	15,0
9,0	1,9	53,8	17,5	1,8	56,7	16,2
9,5	2,0	57,5	18,8	1,8	60,3	17,5
10,0	2,0	62,0	20,4	1,9	64,3	18,7
10,5	2,1	65,7	21,8	1,9	68,2	20,1
11,0	2,1	69,5	23,1	2,0	72,5	21,6
11,5	2,1	73,7	24,2	2,0	75,6	22,8
12,0	2,1	78,0	25,4	2,1	78,0	25,4

MOTOR DOS SENTIDO ANTI HORARIO						
V	VALORES ASCENDENTES			VALORES DESCENDENTES		
	I (A)	n (RPM)	P [W]	I (A)	n (RPM)	P [W]
0,0	0,00	0,0	0,0	0,00	0,0	0,0
0,5	0,21	0,0	0,1	0,50	0,0	0,0
1,0	0,43	0,0	0,4	0,32	0,0	0,0
1,5	0,63	0,0	0,9	0,64	0,0	0,0
2,0	0,87	0,0	1,7	0,80	0,0	0,0
2,5	0,98	0,0	2,5	1,10	0,0	0,0
2,7	1,46	1,2	3,9	1,29	0,0	0,0
3,0	1,19	2,7	3,6	1,00	3,2	3,2
3,5	1,25	4,9	4,4	1,06	5,6	5,9
4,0	1,26	7,0	5,0	1,07	7,6	8,1
4,5	1,26	10,6	5,7	1,12	11,0	12,3
5,0	1,29	12,2	6,5	1,12	13,1	14,7
5,5	1,30	15,1	7,2	1,17	16,0	18,7
6,0	1,34	17,5	8,0	1,20	20,5	24,6
6,5	1,34	19,6	8,7	1,24	22,5	27,9
7,0	1,36	22,2	9,5	1,27	25,5	32,4
7,5	1,40	25,8	10,5	1,30	27,4	35,6
8,0	1,46	28,5	11,7	1,32	30,2	39,9
8,5	1,47	31,2	12,5	1,33	33,1	44,0
9,0	1,49	33,1	13,4	1,37	35,4	48,5
9,5	1,51	35,8	14,3	1,41	39,2	55,3
10,0	1,52	41,0	15,2	1,52	42,5	64,6
10,5	1,49	44,5	15,6	1,49	43,8	65,3
11,0	1,51	47,5	16,6	1,51	46,0	69,5
11,5	1,51	48,0	17,4	1,51	48,5	73,2
12,0	1,50	51,5	18,0	1,50	51,5	77,3

Anexo I. Prueba con carga motores

PARÁMETROS CONSTANTES								
Tensión(V)	Brazo (cm)	Brazo (m)	Brazo (in)	Factor (Kg/oz)	Grav(m/s^2)	Precarga (oz)	π	const oz in
12	26,6	0,27	10,47	0,03	9,8	1,5	3,14	7,39E-04

12 V MOTOR UNO SENTIDO ANTI-HORARIO							
RPM	A	F (oz)	T (N-m)	T (oz-in)	Pent [W]	PSal [W]	η [%]
79,1	2,0	1,5	0,1	15,7	24,0	0,9	3,8
76,1	2,3	3,4	0,3	35,6	27,6	2,0	7,3
70,4	2,6	7,2	0,5	75,4	31,2	3,9	12,6
69,2	2,9	9,6	0,7	100,5	34,8	5,1	14,8
66,4	3,3	12,9	1,0	135,1	39,6	6,6	16,7
62,8	3,6	17,4	1,3	182,2	43,2	8,5	19,6
61,4	3,9	20,2	1,5	211,5	46,8	9,6	20,5
58,8	4,2	24,3	1,8	254,5	50,4	11,1	21,9
56,4	4,6	26,3	1,9	275,4	55,2	11,5	20,8
52,9	5,0	30,5	2,3	319,4	60,0	12,5	20,8
50,7	5,4	34,5	2,5	361,3	64,8	13,5	20,9
47,1	5,9	38,0	2,8	398,0	70,8	13,9	19,6
44,2	6,3	41,6	3,1	435,7	75,6	14,2	18,8
40,8	6,7	44,9	3,3	470,2	80,4	14,2	17,6
38,2	7,1	46,8	3,5	490,1	85,2	13,8	16,2
33,8	7,4	50,2	3,7	525,7	88,8	13,1	14,8
28,5	7,7	52,9	3,9	554,0	92,4	11,7	12,6
24,3	8,1	55,3	4,1	579,1	97,2	10,4	10,7
20,6	8,5	58,3	4,3	610,5	102,0	9,3	9,1
15,6	8,9	63,0	4,7	659,8	106,8	7,6	7,1
7,0	9,3	68,2	5,0	714,2	111,6	3,7	3,3
0,0	9,5	72,2	5,3	756,1	114,0	0,0	0,0

12 V MOTOR DOS SENTIDO ANTI-HORARIO							
RPM	A	F (oz)	T (N-m)	T (oz-in)	Pent [W]	PSal [W]	η [%]
56,9	1,7	1,5	0,1	15,7	20,4	0,7	3,2
55,5	2,0	5,6	0,4	58,6	24,0	2,4	10,0
54,4	2,2	10,2	0,8	106,8	26,4	4,3	16,3
52,8	2,4	14,2	1,0	148,7	28,8	5,8	20,1
52,0	2,6	16,8	1,2	175,9	31,2	6,8	21,7
51,0	2,8	19,8	1,5	207,4	33,6	7,8	23,3
50,5	3,1	22,3	1,6	233,5	37,2	8,7	23,4
48,6	3,4	29,3	2,2	306,8	40,8	11,0	27,0
47,4	3,7	31,9	2,4	334,1	44,4	11,7	26,4
43,7	4,1	36,1	2,7	378,1	49,2	12,2	24,8
41,9	4,3	40,9	3,0	428,3	51,6	13,3	25,7
40,0	4,7	46,0	3,4	481,7	56,4	14,2	25,2
35,0	5,3	58,0	4,3	607,4	63,6	15,7	24,7
30,9	5,5	60,3	4,5	631,5	66,0	14,4	21,8
26,8	5,8	65,0	4,8	680,7	69,6	13,5	19,4
23,5	6,0	67,3	5,0	704,8	72,0	12,2	17,0
20,3	6,2	69,2	5,1	724,7	74,4	10,9	14,6
18,2	6,5	73,2	5,4	766,6	78,0	10,3	13,2
15,9	6,6	77,0	5,7	806,4	79,2	9,5	12,0
12,5	6,8	79,2	5,9	829,4	81,6	7,7	9,4
10,2	7,1	83,0	6,1	869,2	85,2	6,6	7,7
8,4	7,3	85,6	6,3	896,4	87,6	5,6	6,4
6,3	7,5	87,9	6,5	920,5	90,0	4,3	4,8
0,0	7,6	91,0	6,7	953,0	91,2	0,0	0,0

Anexo J. Plano del dinamómetro

