



ESTUDIO DE ELEMENTOS MATEMÁTICOS QUE SUBYACEN AL CONCEPTO DE  
FUNCIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE  
GRADO QUINTO DE PRIMARIA

Por

Juan Esteban Calderón Talaga 1358812

Oscar Julián Obando Peña 1358833

Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Licenciatura en Educación Básica, con Énfasis en Matemáticas  
Santander de Quilichao, Cauca  
2019



ESTUDIO DE ELEMENTOS MATEMÁTICOS QUE SUBYACEN AL CONCEPTO DE  
FUNCIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE  
GRADO QUINTO DE PRIMARIA

Por

Juan Esteban Calderón Talaga 1358812

Oscar Julián Obando Peña 1358833

**Trabajo para optar el título de  
Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas**

Director

Mag Ronald Andrés Grueso

Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Licenciatura en Educación Básica, con Énfasis en Matemáticas  
Santander de Quilichao, Cauca

## **AGRADECIMIENTOS**

*Primero que todo darle infinitas gracias a Dios por permitirnos haber llegado hasta este momento de nuestras vidas, a nuestros padres por su apoyo constante e incondicional.*

*A los directivos de la Institución Educativa Liceo Evangélico La Heroica y sus estudiantes de grado quinto de primaria.*

*A los profesores y compañeros del Área de Educación Matemática de la Universidad. Nuestros más sinceros agradecimientos al profesor Ronald Andrés Grueso, quien a pesar de sus múltiples ocupaciones decidió compartir su tiempo, conocimiento y paciencia para acompañarnos y orientarnos en la consolidación de este trabajo.*

*A los profesores Gerardo González y Daniel Andrés Fernández López, quienes aceptaron evaluar el trabajo de grado, quienes con sus comentarios y sugerencias nos permitieron enriquecer nuestro conocimiento. Y a la Universidad del valle por habernos brindado la oportunidad de creer profesionalmente.*

## **TABLA DE CONTENIDO**

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Introducción                                                                        | 2  |
| CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN                                  | 4  |
| 1.1 Antecedentes                                                                    | 4  |
| 1.1.1 Desde el pensamiento variacional.                                             | 4  |
| 1.1.2 Desde el razonamiento covariacional.                                          | 6  |
| 1.1.3 Una síntesis preliminar.                                                      | 8  |
| 1.2 Presentación del Problema                                                       | 10 |
| 1.3 Justificación                                                                   | 13 |
| 1.4 Objetivos                                                                       | 14 |
| 1.4.1 Objetivo general.                                                             | 14 |
| 1.4.2 Objetivos específicos.                                                        | 14 |
| 1.5 Marco Contextual                                                                | 15 |
| CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL                                          | 16 |
| 2.1 Perspectiva Didáctica                                                           | 17 |
| 2.1.1 Razonamiento covariacional.                                                   | 17 |
| 2.1.2 Covariación.                                                                  | 18 |
| 2.1.3 Acciones mentales.                                                            | 19 |
| 2.1.4 Niveles de razonamiento covariacional.                                        | 20 |
| 2.2 Perspectiva Curricular                                                          | 21 |
| 2.2.1 Conocimiento matemático y desarrollo de competencia matemática.               | 22 |
| 2.2.2 Pensamiento variacional.                                                      | 24 |
| 2.3 Perspectiva Matemática                                                          | 29 |
| 2.4 Perspectiva Intermedia: Relación de lo Didáctico, lo Curricular y lo Matemático | 33 |
| CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN                              | 34 |
| 3.1 Tipo de investigación                                                           | 34 |

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2 Población objeto de estudio                                | 37  |
| 3.3 Sobre el diseño de la propuesta de aula                    | 38  |
| 3.3.1 Diseño y descripción de la propuesta de aula.            | 39  |
| 3.4 Técnicas de recolección de datos y protocolo de aplicación | 42  |
| 3.5 Variables de análisis                                      | 44  |
| CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES                          | 44  |
| 4.1 Resultados y Análisis de Resultados                        | 45  |
| 4.1.1 Resultados y análisis de la situación 1.                 | 45  |
| 4.1.2 Resultados y análisis de la situación 2.                 | 77  |
| 4.2 Conclusiones generales                                     | 99  |
| 4.3 Algunas reflexiones finales                                | 103 |
| 4.4 Líneas de continuación                                     | 104 |
| Referencia bibliográfica.                                      | 106 |
| ANEXOS                                                         | 109 |

## INDICE DE TABLAS

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual del razonamiento covariacional..... | 19 |
| Tabla 2. Marco conceptual para los niveles del razonamiento covariacional .....     | 21 |
| Tabla 3. Coherencia vertical de los EBCM para el pensamiento variacional .....      | 27 |
| Tabla 4. Coherencia horizontal de los EBCM para el pensamiento variacional.....     | 28 |
| Tabla 5. Relación del estándar seleccionado y algunas nociones matemáticas          |    |
| Tabla 6. Estructura general de la situación 1.....                                  | 41 |
| Tabla 7. Estructura general de la situación 2 .....                                 | 42 |
| Tabla 8. Categorías y criterios de análisis .....                                   | 44 |
| Tabla 9. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 1 (S1A1P1).....  | 45 |
| Tabla 10. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 2 (S1A1P2)..... | 45 |
| Tabla 11. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 3 (S1A1P3)..... | 47 |
| Tabla 12. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 4 (S1A1P4)..... | 47 |
| Tabla 13. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 5 (S1A1P5)..... | 49 |
| Tabla 14. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 6 (S1A1P6)..... | 49 |
| Tabla 15. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 1 (S1A2P1)..... | 51 |
| Tabla 16. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 2 (S1A2P2)..... | 51 |
| Tabla 17. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 3 (S1A2P3)..... | 52 |
| Tabla 18. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 4 (S1A2P4)..... | 52 |
| Tabla 19. Tipos de respuestas situación 1 actividad 2 pregunta 5 (S1A2P5).....      | 52 |
| Tabla 20. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 1 (S1A3P1).....      | 57 |
| Tabla 21. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 2 (S1A3P2).....      | 58 |
| Tabla 22. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 3 (S1A3P3).....      | 58 |
| Tabla 23. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 4 (S1A3P4).....      | 60 |
| Tabla 24. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 5 (S1A3P5).....      | 60 |
| Tabla 25. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 1 (S1A4P1).....      | 63 |
| Tabla 26. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 2 (S1A4P2).....      | 63 |
| Tabla 27. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 3 (S1A4P3).....      | 63 |
| Tabla 28. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 4 (S1A4P4).....      | 64 |
| Tabla 29. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 5 (S1A4P5).....      | 66 |
| Tabla 30. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 6 (S1A4P6).....      | 66 |
| Tabla 31. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 7 (S1A4P7).....      | 68 |
| Tabla 32. Tipos de respuestas situación 2 actividad 1 pregunta 1a (S2A1P1A) .....   | 78 |
| Tabla 33. Tipos de respuestas situación 2 actividad 1 pregunta 2 (S2A1P2).....      | 78 |
| Tabla 34. Tipos de respuestas situación 2 actividad 1 pregunta 3 (S2A1P3).....      | 78 |
| Tabla 35. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 1 (S2A2P1).....      | 81 |
| Tabla 36. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 2 (S2A2P2).....      | 81 |
| Tabla 37. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 3 (S2A2P3).....      | 81 |
| Tabla 38. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 4 (S2A2P4).....      | 82 |
| Tabla 39. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 1 (S2A3P1).....      | 86 |
| Tabla 40. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 2 (S2A3P2).....      | 87 |
| Tabla 41. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 2.2 (S2A3P2.2) ..... | 87 |
| Tabla 42. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 3 (S2A3P3).....      | 88 |
| Tabla 43. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 4 (S2A3P4).....      | 89 |
| Tabla 44. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 5 (S2A3P5).....      | 90 |

|                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabla 45. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 1 (S2A4P1).....                             | 92 |
| Tabla 46. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 2 (S2A4P2).....                             | 92 |
| Tabla 47. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 3 (S2A4P3).....                             | 92 |
| Tabla 48. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 4.1 y 4.2 (S2A4P.4.1) y (S2A4P4.2)<br>..... | 93 |
| Tabla 49. Tipo de respuesta situación 2 actividad 4 pregunta 5 (S2A4P5) .....                              | 94 |

## INDICE DE ILUSTRACIONES

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ilustración 1. Marco conceptual de la investigación .....                                   | 17 |
| Ilustración 2. Estructura de formulación del estándar. Fuente (MEN, 2006; 77) .....         | 24 |
| Ilustración 3. Red conceptual.....                                                          | 30 |
| Ilustración 4. Uso del Material Tangible para dar Respuesta a las Preguntas Iniciales. .... | 46 |
| Ilustración 5. Producción del Estudiante a la Pregunta 2 de la Actividad 1.....             | 47 |
| Ilustración 6. Producción de un Estudiante a la Pregunta 3 y 4 de la Actividad 1.....       | 48 |
| Ilustración 7. Estudiante que Presentó una Respuesta Esperada. ....                         | 50 |
| Ilustración 8. Estudiante que Presentó una Respuesta no Esperada.....                       | 50 |
| Ilustración 9. Estudiante que Reconoce la Cantidad Invariante .....                         | 50 |
| Ilustración 10. Estudiante que no Reconoce la Cantidad Invariante.....                      | 50 |
| Ilustración 11. Cantidades relacionadas en la situación.....                                | 51 |
| Ilustración 12. Estudiante que Reconoce una Relación Numérica Correcta .....                | 53 |
| Ilustración 13. Reconocimiento de Patrón Aritmético.....                                    | 54 |
| Ilustración 14. Respuesta de un estudiante en S1A2P4. ....                                  | 56 |
| Ilustración 15. Respuesta de un estudiante en S1A2P4. ....                                  | 57 |
| Ilustración 16. Respuesta de un estudiante en S1A3P1. ....                                  | 58 |
| Ilustración 17. Respuesta de un estudiante en S1A3P3. ....                                  | 60 |
| Ilustración 18. Respuesta de un estudiante en S1A3P4. ....                                  | 61 |
| Ilustración 19. Respuesta de un estudiante en S1A3P5. ....                                  | 62 |
| Ilustración 20. Respuesta acertada de un estudiante en S1A4P2. ....                         | 65 |
| Ilustración 21. Respuesta errada de un estudiante en S1A4P2. ....                           | 65 |
| Ilustración 22. Respuesta acertada de un estudiante en S1A4P3. ....                         | 66 |
| Ilustración 23. Respuesta de un estudiante en S1A4P5. ....                                  | 67 |
| Ilustración 24. Respuesta de un estudiante en S1A4P7. ....                                  | 69 |
| Ilustración 25. Reconocimiento de patrones de variación.....                                | 73 |
| Ilustración 26. Respuestas de un estudiante en S1A3P2 y S1A3P3. ....                        | 74 |
| Ilustración 27. Llenado de la tabla por parte de un estudiante. ....                        | 77 |
| Ilustración 28. Uso del Material Tangible por Parte de un Grupo en Particular.....          | 79 |
| Ilustración 29. Estrategia de Conteo Mediante el Señalamiento. ....                         | 79 |
| Ilustración 30. Respuesta de un Estudiante a S2A1P2.....                                    | 80 |
| Ilustración 31. Estrategia de conteo para las preguntas S2A1P2 y S2A1P3.....                | 80 |
| Ilustración 32. Cantidades variantes e invariantes en cada recubrimiento.....               | 82 |
| Ilustración 33. Tres tipos de respuestas a la pregunta (S2A2P1) .....                       | 83 |
| Ilustración 34. Explicación desde un caso particular por un grupo .....                     | 84 |
| Ilustración 35. Estrategia de conteo de las baldosas en la parte superior e inferior. ....  | 85 |
| Ilustración 36. Explicación desde otro caso particular .....                                | 85 |
| Ilustración 37. Uso de material concreto para dar respuesta a la pregunta (S2A3P1).....     | 87 |

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ilustración 38. Uso de representaciones pictóricas para dar respuesta a la pregunta (S2A3P1) ...         | 88 |
| Ilustración 39. Producción del grupo A.....                                                              | 90 |
| Ilustración 40. Producción del grupo B.....                                                              | 91 |
| Ilustración 41. Producción del grupo C.....                                                              | 91 |
| Ilustración 42. Tabla de cantidad de baldosas rojas vs cantidad de baldosas verdes .....                 | 92 |
| Ilustración 43. Producción de un grupo en particular frente a las preguntas (S2A4P1) y (S2A4P2)<br>..... | 93 |
| Ilustración 44. Posibles expresiones simbólico numéricas.....                                            | 94 |
| Ilustración 45. Interacción de un grupo en particular con el medio dinámico.....                         | 95 |



## **Resumen**

En el siguiente trabajo se presenta y desarrolla una propuesta de aula para el estudio de elementos que subyacen al concepto de función a través de situaciones de covariación que tienen como marco teórico el Razonamiento Covariacional propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, Y Hsu (2003). De esta manera, se diseñó una propuesta de aula y posteriormente, se aplicó en 6 estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Liceo Evangélico La Heroica del municipio de Corinto Cauca. Con dicha propuesta, también se buscó potencializar, a través de actividades de covariación, el pensamiento variacional propuesto por el MEN (2006), el cual se caracteriza por estudiar la variación y el cambio en diferentes contextos. Seguidamente de la implementación, se tipificaron y analizaron los comportamientos de los estudiantes según los niveles de covariación de Carlson et al (2003).

Por último, en términos de cada objetivo específico, se plantearon conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas. En cuanto a los resultados obtenidos, se pudo determinar la viabilidad del estudio de elementos que subyacen al concepto de función, a través de situaciones problemas de covariación en estudiantes de grado quinto de básica primaria.

**Palabras claves:** Razonamiento covariacional, covariación, pensamiento variacional, elementos que subyacen al concepto de función, variación.

## Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la *Línea de formación Didáctica de las Matemáticas* del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Esta propuesta surge como resultado de algunas preocupaciones y problemáticas recurrentes en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, en relación con el fortalecimiento del pensamiento algebraico o variacional en primaria, específicamente en lo que compete a la enseñanza y aprendizaje de elementos matemáticos que subyacen al concepto de función lineal desde una perspectiva covariacional. Se enfoca en la búsqueda, diseño e implementación de una propuesta de aula que enriquezca el conocimiento de los estudiantes, en el cual se tiene en cuenta en qué medida ellos muestran en sus respuestas indicios de un acercamiento a nociones como: la relación de dependencia entre variables, variables dependientes, variables independientes, patrones, dominio, rango, razón de cambio, entre otras. Además de ello, se hace un seguimiento de las actuaciones de los estudiantes a través del marco conceptual para el razonamiento covariacional de Carlson et al. (2003) para determinar en qué nivel comprenden la covariación, la cual está presente en cada una de las situaciones.

Diversas investigaciones<sup>1</sup> en Educación Matemática frente al estudio de las funciones en el aula, evidencian que el marco conceptual para el razonamiento covariacional de Carlson es un instrumento que permite clasificar las actuaciones de los estudiantes cuando abordan situaciones de covariación, en otras palabras, las que tienen que ver con una relación funcional. No obstante, esto se ha realizado en gran parte en los grados de educación secundaria y superior, con un grado muy mínimo de su uso en la educación primaria.

Además de lo anterior, otras investigaciones<sup>2</sup> en relación al fortalecimiento del pensamiento variacional en primaria han estado vinculadas al estudio de la generalización de patrones y a las formas de pensamiento algebraico que emergen cuando abordan tales situaciones. Sin embargo, poco se ha estudiado elementos matemáticos asociados al concepto de función lineal desde primaria.

Por tal razón, debido a que es muy precario el seguimiento al razonamiento covariacional en primaria y que poco se estudian elementos asociados a la función. La pregunta que orienta este

---

<sup>1</sup> Investigaciones como la de: Grueso y González (2016), Villa (2011), Carlson et al. (2003)

<sup>2</sup> Investigaciones como la de: Vergel (2014), Merino (2012), Pinto (2016)

trabajo es: *¿De qué manera, situaciones que aborden actividades de covariación, pueden incidir en el desarrollo del pensamiento variacional y la emergencia o aproximación a algunos elementos matemáticos que subyacen al concepto de función en estudiantes de grado quinto de primaria?*

Para efectos de organización, este trabajo de grado se ha estructurado en cuatro capítulos. **En un primer capítulo**, se discuten los aspectos generales de la investigación, los cuales abordan algunos antecedentes, presentación del problema, la justificación, los objetivos y el marco contextual. En este sentido, debido a que el estudio del pensamiento variacional no siempre implica el uso del marco conceptual para el razonamiento covariacional de Carlson, se hace un rastreo de los estudios que lo han tenido en cuenta como de los que han prescindido de él, para finalmente delimitar una problemática específica.

**En el segundo capítulo**, se presenta el marco de referencia conceptual de la investigación, los cuales incluyen los referentes didáctico, curricular y matemático que sirven de sustento para el diseño de la propuesta de aula, como también, el poder realizar un seguimiento de la medida en que los estudiantes se acercan a ciertas nociones matemáticas y clasificar las actuaciones de los mismos. Además de ello, en este apartado se realiza una perspectiva intermedia que permite evidenciar la relación establecida entre cada una de estas perspectivas.

**En el tercer capítulo**, se exponen los aspectos metodológicos de la investigación, enfocada en los elementos de un estudio de casos de tipo descriptivo y la descripción de la población objeto de estudio. Adicionalmente, se presenta el diseño de la propuesta de aula, las técnicas de recolección de datos frente al protocolo de aplicación y las variables de análisis.

Finalmente, **en el cuarto capítulo**, se muestran los resultados y análisis de los resultados durante la puesta en escena de las situaciones implementadas y las respuestas de los estudiantes (escritas y verbales), que se interpretan desde la mirada del marco conceptual del razonamiento covariacional de Carlson, desde los aspectos curriculares, desde la generalización y desde los propósitos planteados en cada una de las actividades. Adicionalmente, se mencionan algunas conclusiones respecto al cumplimiento de objetivos que se derivan de las evidencias del análisis y de lo aprendido en este trabajo, para finalmente plantear algunas recomendaciones o consideraciones finales.

## **CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN**

En este primer capítulo se realiza la presentación de la problemática relacionada con el estudio aproximado a algunos elementos matemáticos presentes en situaciones de covariación y que subyacen al concepto de función desde la educación básica primaria, con el ánimo de potenciar el pensamiento variacional y la comprensión de este concepto a largo plazo, dado que la forma como se aborda en el aula en la actualidad, tal como lo menciona Del Castillo y Montiel (2007), es en relación a una regla de correspondencia que privilegia un carácter estático, algebraico y algorítmico. Para ello, se revisan algunos antecedentes que den viabilidad a la problemática, seguidamente la justificación desde distintos aspectos y la necesidad de abordarla en estudiantes de quinto de primaria. A su vez, se presentan los objetivos que se esperan alcanzar con este trabajo.

### **1.1 Antecedentes**

A continuación, se presenta una revisión bibliográfica en la que se muestran resultados de algunas investigaciones enmarcadas en el estudio del pensamiento variacional y el razonamiento covariacional con estudiantes de educación básica primaria, básica secundaria y educación superior. Dado que hay una diferencia significativa de lo que implica la variación y la covariación; cuestión que será descrita en apartados posteriores, se ha tomado la decisión de hacer un rastreo de manera independiente de los trabajos que se han abordado desde estas dos perspectivas.

#### **1.1.1 Desde el pensamiento variacional.**

Desde una perspectiva curricular en Colombia, el MEN<sup>3</sup> (2006) propone que la variación sea estudiada desde los primeros grados de la Educación básica, como una forma de construir caminos y cimientos para acceder comprensivamente a los conceptos propios del álgebra y del cálculo.

Debido a lo anterior, autores como Posada, (2006), Henao (2007), Castaño, García, Luján, Medina, Ruiz y Trejos (2008), en una interpretación de los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, hacen una reorganización de éstos mediante una estructura conceptual, la cual se encuentra dividida en tres ejes conceptuales: patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones que por supuesto recogen los Estándares para cada grupo de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9 y 10 a 11). De este modo, atendiendo a la clasificación anterior y considerando que el pensamiento variacional está relacionado con múltiples conceptos; los estudios que se sintetizan

---

<sup>3</sup> La sigla MEN dentro del contenido del presente texto hará referencia al Ministerio de Educación Nacional.

a continuación se plantean en un orden que va desde la educación básica primaria hasta la educación secundaria.

En cuanto a la educación primaria, Rivera & Sánchez (2012), realizaron una investigación con estudiantes de grado tercero de primaria (B) de una Institución privada, donde plantean una secuencia de actividades para potencializar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de la generalización de patrones. Para ello, entre sus referentes teóricos se apoyan en las dificultades que se presentan cuando se pasa del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

De acuerdo a lo anterior, entre las respuestas que dieron los estudiantes, se evidencio por parte de ellos la facilidad para reconocer patrones en secuencias numéricas, además se observó la potencialidad que tienen el uso de tablas de registro a la hora de encontrar de manera muy trivial las relaciones existentes entre las cantidades presentadas; no obstante, es de resaltar que fue una cantidad muy limitada de estudiantes que lograron plantear expresiones generales a partir de las variables propuestas.

De otro lado, Mancilla, Sarmiento & Barriosnuevo (2012), plantearon la necesidad de aportar una metodología a los docentes de básica primaria de la Institución Educativa Distrital Octavio Paz, que les propiciará favorecer el desarrollo del pensamiento variacional a los estudiantes de la misma. Además, el foco de atención estuvo puesto en primera instancia sobre algunos docentes para indagar sobre qué tanto conocen sobre los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, especialmente en lo que se refiere al pensamiento variacional y de modo posterior, emplear un sistema de tareas a los cuales se enfrentan los estudiantes de quinto de primaria.

En cuanto a resultados, fue notorio el mejoramiento del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas que impliquen variación y cambio, referidos a deducciones de patrones de variación, interpretación de la variación a través de gráficas, identificación de variables, cálculo de la magnitud y la elaboración de modelos.

Por otro lado, Vergel (2014) trató de identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones.

La investigación se hizo en cinco etapas, en la primera etapa se efectuó una revisión documental sobre el pensamiento algebraico y los procesos de generalización en la didáctica de las matemáticas; en una segunda etapa, el trabajo se fundamentó teniendo en cuenta la idea de la

cultura y su importancia en los procesos de aprendizaje, el concepto de mediación semiótica desde la perspectiva de Vygotsky y la teoría de la objetivación como una aproximación histórico-cultural. En una tercera etapa, se diseñó la investigación, en la cual se escogió un tipo de investigación cualitativa que proponía una serie de tareas sobre secuencias figúrales y numéricas lineales a estudiantes de cuarto y quinto de primaria de un colegio público de la ciudad de Bogotá y en la cuarta y quinta etapa se analizaron e interpretaron los resultados obtenidos de la implementación que se le hizo a los estudiantes de primaria (4° y 5°).

Dentro de los resultados se obtuvo que, los recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consustanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico. De igual manera, también se puso en evidencia que las secuencias figúrales con apoyo tabular hicieron movilizar en los estudiantes formas perceptivas y gestuales que no fueron movilizadas con la misma intensidad cuando los estudiantes enfrentan tareas sobre secuencias numéricas sin apoyo tabular.

En relación a la educación secundaria, Posada y Villa (2006) desarrollaron una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, desde la perspectiva del pensamiento variacional plasmado en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y los Estándares Básicos en Competencias de la misma área, dedicándose a dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Cuál es el papel del concepto de proporción y de variación de magnitudes en la construcción del concepto de función lineal?; ¿Es la modelación una vía adecuada para el desarrollo del pensamiento variacional? y ¿Cuáles son los elementos didácticos que se deben tener en cuenta para el diseño de situaciones orientadas al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la educación básica?

Para responder estas preguntas diseñaron, experimentaron y validaron una propuesta didáctica para los estudiantes de grado noveno, teniendo como marco metodológico la ingeniería didáctica y focalizando la Teoría de las Secuencias Didácticas desarrollada por Guy Brousseau.

Dicho trabajo permitió a los autores concluir que, una buena comprensión del concepto de función implica pensarlo como un modelo matemático de relaciones variacionales, apoyado en los diferentes sistemas semióticos de representación.

### **1.1.2 Desde el razonamiento covariacional.**

Por otra parte, desde la perspectiva del marco conceptual razonamiento covariacional desarrollado por Carlson et al. (2003), se han desarrollado diferentes trabajos en los ámbitos local,

nacional e internacional, que básicamente buscan examinar, indagar, caracterizar, identificar y describir las formas como los estudiantes desarrollan el pensamiento variacional a través de tareas de covariación propuestas. Es de resaltar que dichas investigaciones desde este enfoque se han trabajado en básica primaria y básica secundaria.

En lo que respecta a la educación básica primaria; Henao, Marín, Montoya y Restrepo (2012) realizaron una investigación con estudiantes de quinto grado de la Institución educativa República de Uruguay, en la que plantean una propuesta didáctica encaminada a proporcionar elementos que aporten al desarrollo del pensamiento variacional a partir de los razonamientos de los niños. Para tal propósito, estos se fundamentaron en el marco conceptual que propone Carlson et al. (2003).

De esta manera, Henao et al. (2012), diseña una actividad basada en la covariación de cantidades. La primera situación de dicha actividad se nombra “Las Regletas”, en esta se le presenta al estudiante una tabla de tres columnas en las que tiene que relacionar una serie de figuras geométricas, los volúmenes y las áreas superficiales de las mismas. La segunda situación llamada “Salgamos a la cancha” exhibe a los estudiantes tres tablas que cuentan con las mismas dos columnas cada una (Tiempo y Distancia) para que los estudiantes registren en ellas las distancias recorridas en lapsos de tiempo específicos. Lo particular de esta situación es que cada tabla tiene una condición o como lo llaman los autores un “estado” (Quieto, Ritmo lento, Ritmo rápido) para tomar los registros. En una tercera situación, nombrada “Miremos cómo caminan otros compañeros” se les propone a los estudiantes tres tablas similares a las de la situación dos, con la única diferencia de que estas ya están idealizadas. Finalmente, en la situación cuatro denominada “La rana saltarina” el estudiante debe analizar y describir la tasa de variación implícita en tres recorridos realizados en saltos por dos estudiantes. Una de las conclusiones más relevantes de esta investigación con base en las situaciones implementadas fue el hecho de que se pudo observar que los estudiantes establecieron relaciones funcionales y covariacionales entre cantidades de magnitudes.

De otro lado, para la educación básica secundaria, Grueso y González (2016) desarrollaron una investigación con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta, en la que presenta y desarrolla una propuesta para el estudio de la función a partir de tareas de covariación. Para ello, se diseñó una propuesta de aula que potencialice a través de las actividades de covariación, el desarrollo de pensamiento variacional. Además de ello, también se

intentó estudiar el concepto de función por medio de los diferentes registros de representación. Dicha propuesta de aula consta de tres situaciones. La primera situación es la introducción de la covariación mediante las dimensiones de la plazoleta. La segunda es la covariación en la caracterización de elementos que subyacen al concepto de función y la tercera es observando otras variaciones, dentro de las cuales se encuentra la razón de cambio.

Luego de la implementación de las tres situaciones, los autores caracterizan y analizan las actuaciones de los estudiantes basándose en los niveles de covariación de Carlson et al. (2003), los sistemas matemáticos de signos y los aspectos matemáticos implicados. Finalmente, dentro de las conclusiones más significativas, se menciona que los resultados de los estudiantes, basados en las tareas, y en sus respectivos análisis, pusieron de manifiesto la identificación y caracterización de elementos, rasgos y aspectos asociados al concepto de función; a partir de la resolución de actividades de covariación.

Por otra parte, Villa (2012) en su artículo *Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas*, realizó una investigación con un estudiante de último grado de bachillerato, en la que plantea desarrollar una línea convergente de indagación, la cual se basó en las descripciones que el estudiante elegido hacía a medida que afrontaba situaciones de funciones cuadráticas y por ende, de covariación. El autor diseñó una actividad que constaba de tres momentos. En el primer momento se tuvo como objetivo el reconocimiento y descripción de la variación mediante un acercamiento de tipo cualitativo al contexto dinámico; se buscaba básicamente que el estudiante reconociera las cantidades. El segundo momento se diseñó con el ánimo de que el estudiante estableciera los valores de figuras específicas y a partir de ello conjeturara sobre algunas relaciones entre ellas. El tercer momento se diseñó para que el estudiante diera cuenta de la construcción de una gráfica del movimiento implicado en la situación.

A partir de la puesta en acto de los tres momentos de la situación propuesta, se resaltan las siguientes conclusiones: Las representaciones juegan un papel muy importante en el razonamiento y en la comprensión de los conceptos matemáticos; La pregunta cumplió un papel trascendental para promover la evolución en el razonamiento; y por último, el estudio de la función cuadrática abordado desde una perspectiva variacional puede ir mucho más allá de lo tradicional.

### **1.1.3 Una síntesis preliminar.**

Esta revisión sobre el pensamiento variacional y el razonamiento covariacional muestra un amplio horizonte de estudios e investigaciones que han abordado estos aspectos. Se evidencia, por



ejemplo, que varias de estas investigaciones desde el pensamiento variacional en primaria, se han centrado más en el estudio de los patrones y regularidades desde las secuencias figúrales y numéricas lineales; mientras que en secundaria la función es un tema central de estudio que cuestiona en gran parte la presentación estática de dicho concepto que se ha limitado, en muchas ocasiones, a solo maniobrar su representación simbólica.

Frente al razonamiento covariacional, es claro que desde esta perspectiva poco se estudian conceptos relacionados con la variación y el cambio en primaria, contrario a lo que sucede en secundaria, en el cual esta perspectiva ha sido en gran parte usada en el estudio de conceptos como el de función.

No obstante, es necesario señalar que si bien se dispone de ciertos resultados acerca del estudio del razonamiento covariacional en primaria (e.g., el trabajo de Henao, Marín, Montoya & Restrepo 2012), se conoce muy poco o casi nada acerca del estudio de elementos que subyacen al concepto como el de función en primaria (relaciones y dependencia de variables, por ejemplo), desde esta perspectiva covariacional. Más aún, porque por un lado, estudios como el de Grueso y González (2016), después de los resultados explicitan una serie de hipótesis o preguntas que podrían ser punto de partida de otros estudios, entre los que se encuentra la cuestión de ¿Cómo los estudiantes de primaria pueden acercarse al concepto de función desde una perspectiva covariacional? y por el otro, porque uno de los ejes temáticos de la interpretación de los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas, específicamente en lo que tiene que ver con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, como es el análisis de funciones plantea que la expresión simbólica ya no es un punto de partida para el estudio de funciones, sino que ésta es, en primera instancia, una forma entre otras de expresar la ley general que relaciona las variables del fenómeno que se modela. Es decir, es posible acercarse a la idea de función desde lo tabular, gráfico y verbal.

Es necesario entonces, resaltar que la importancia de este trabajo radica en poder trabajar situaciones que involucren la covariación con estudiantes de quinto de primaria con el propósito de abordar elementos que subyacen o son fundamentales para comprender el concepto de función a largo plazo desde una perspectiva covariacional, en ese orden de ideas, en ninguno de los trabajos que conforman los antecedentes al menos en primaria, se hace alusión al estudio de nociones que fundamentan el concepto de función; por ejemplo, la relación de dependencia entre cantidades, dominio, rango, correlación inversa y directamente proporcional entre magnitudes, entre otros.

## 1.2 Presentación del Problema

Actualmente los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos en Competencias para la misma área (MEN, 2006) establecidos por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia, proponen que se estudie la variación desde la educación básica primaria, con el ánimo de abrir caminos hacia la comprensión de conceptos propios del álgebra, como también del cálculo y de todas aquellas situaciones que tengan que ver con el pensamiento variacional.

Así mismo, una corriente de investigación denominada álgebra temprana plantea la “introducción del pensamiento algebraico en la matemática escolar desde los primeros cursos escolares mediante la observación de patrones, relaciones funcionales y propiedades matemáticas” (Molina, 2009, p.33). Dado que considera que las dificultades que muestran los estudiantes cuando aprenden álgebra son resultado de la forma o el modo en que se han abordado las matemáticas elementales.

De este modo, al contemplar las sugerencias y propuestas de corte curricular y de la corriente de investigación nombrada anteriormente, es evidente que plantean una afirmación contraria a posponer el estudio del álgebra y proponen integrarlo en el currículo de primaria.

No obstante, parece ser que promover el pensamiento algebraico desde la primaria es un asunto complejo que obedece a muchas causas, entre las que se destaca el hecho de que en los currículos de primaria han dejado de forma explícita el estudio del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico a los cursos finales de la educación secundaria (Zapatera, 2016).

Además, porque Kaput (2002) citado en Posada (2016), expresa que a pesar de que los profesores de los primeros grados de escolaridad son los responsables de generar cambios en el currículo de primaria, el trabajo con el álgebra es muy limitado, tal es el caso que su enseñanza es reflejada de la experiencia que tuvieron como estudiantes, y por lo tanto, en algunos casos el álgebra la ven como una colección de técnicas para factorizar, simplificar expresiones, solucionar ecuaciones y así sucesivamente. Debido a que la probabilidad de que ellos hayan explorado el sentido y el significado de tales expresiones es muy bajo, entonces, se considera que ahí radica en gran parte por qué no pueden proponer a sus estudiantes formas diferentes de acercarse al álgebra.

Ahora bien, si por algunas de las razones anteriormente nombradas, el pensamiento algebraico en primaria se ve algo limitado desde un punto de vista general, entonces cuestiones como la comprensión de relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones, el

trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización, del mismo modo se verían relegados de ese nivel de escolaridad. Obedeciendo a las concepciones erradas que tienen los docentes frente al álgebra escolar y a ignorar este pensamiento en la planificación curricular.

Cuando lo que se esperaría es que los docentes de matemáticas en la actualidad, asimilen la idea de que el pensamiento algebraico se construye en estrecha relación con lo numérico y que tal como lo expresa Mason (1985) no se debe pensar que álgebra inicia una vez hayan terminado la lista de contenidos “aritméticos”, dado que el conocimiento algebraico está inmerso en todo el conocimiento matemático.

En este sentido, es de suma importancia atender a una recomendación que hace Posada (2006), al señalar que la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar debería estructurarse desde el estudio de la variación y el cambio desde los primeros grados de escolaridad. Planteamiento al cual se suman otros investigadores como Henao et al. (2012), Asegurando que abordar situaciones de variación desde los primeros grados de escolaridad ayuda a crear cimientos en la comprensión de elementos y conceptos matemáticos de la educación media y universitaria, que tienen que ver con las funciones (pendiente, constante, variable, la idea del límite y la derivada, entre otros); los cuales para ser entendidos, implican pensar dinámicamente en lugar de una manera estática<sup>4</sup>.

Sin embargo, parece ser que poco se atiende a la sugerencia de estudiar la variación y el cambio desde la primaria, debido a que la comprensión que hacen los estudiantes de contenidos específicos (ya nombrados) en la secundaria, no van más allá de maniobrar las representaciones simbólicas y de responder a procesos algorítmicos.

Por tal razón, una consecuencia de no estudiar la variación y el cambio desde primaria ha hecho que conceptos específicos como el de función se halla limitado más a lo estático que a lo dinámico, tal como lo ha señalado Grueso & González, (2016, al señalar que el concepto de función desde la enseñanza se viene trabajando en el aula de clases de una forma estática, es decir, mostrando un conocimiento acabado que conlleva por una parte, a la memorización de definiciones, y por otra a la mecanización de procedimientos. Se ha centrado la atención en la idea

---

<sup>4</sup> Cuando se habla de pensar dinámicamente en lugar de manera estática se hace referencia a reconocer que el desarrollo del pensamiento variacional y el trabajo con algunos conceptos mencionados, requiere poder identificar y reconocer que hay ciertas magnitudes que guardan relaciones de dependencia y no solo una relación de correspondencia.

de función como una mera acción de correspondencia entre variables y no se ha fijado en todo el carácter variacional que tiene el mismo concepto.

En ese orden de ideas, en virtud de fortalecer la comprensión de dicho concepto en secundaria a largo plazo, es necesario que desde la primaria se puedan estudiar aspectos en los cuales se fundamenta este concepto<sup>5</sup>. Aprovechando las propuestas que hace el MEN (1998,2006) y el álgebra temprana de promover el estudio del álgebra desde los primeros grados de escolaridad y porque el carácter estático con el que se está abordando en gran parte la idea de función en los grados correspondientes de grado octavo y noveno se ha convertido en una fuerte crítica que evidencia que los estudiantes no comprenden muy bien dicho concepto.

Es así como se propone, que para que exista una comprensión de aspectos previos al concepto de función, la escuela debe promover situaciones que involucren situaciones de variación y cambio, en que el sustrato de ellas no sea el concepto desde su formalidad, sino la covariación como un proceso que permita analizar los cambios de una magnitud que varía con respecto a los cambios en otra.

Precisamente porque, así como está relacionado el concepto de función con el pensamiento variacional, de la misma manera los están los elementos que subyacen al mismo. Atendiendo a la idea del MEN (2002,2006), que coinciden al plantear que la variación implica la covariación, haciendo referencia a la importancia de correlacionar las cantidades de magnitudes presentes en cualquier fenómeno; es decir, en el estudio de una situación que corresponda a cualquier contexto (vida cotidiana, otras ciencias y la matemática misma).

Finalmente, teniendo en cuenta la problemática descrita, acerca de la poca consideración del comportamiento de los cambios en el estudio de elementos que subyacen al concepto de función, y la propuesta de promover situaciones de variación y cambio, en este trabajo se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: ***¿De qué manera, situaciones que aborden actividades de covariación, pueden incidir en el desarrollo del pensamiento variacional y la emergencia o aproximación a algunos elementos matemáticos que subyacen al concepto de función en estudiantes de grado quinto de primaria?***

---

<sup>5</sup> Cuando se habla de aspectos en los que se fundamenta el concepto de función es hacer énfasis en elementos matemáticos que tienen que ver con relaciones de dependencia, correlación inversa y directa, patrones de regularidad, entre otros.

### 1.3 Justificación

De acuerdo con el primer documento que incluye el tratamiento algebraico en la educación primaria, denominado el *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM,200), plantea que el pensamiento algebraico no solo es un asunto exclusivo de la educación secundaria, por el contrario, debe movilizarse desde los primeros grados de escolaridad en un ámbito donde se trascienda más allá de la manipulación simbólica, debido a que los estudiantes necesitan “comprender sus conceptos, las estructuras y los principios que rigen la manipulación de los símbolos, y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones” (p.39). En este sentido, se espera que los estudiantes tengan la capacidad de comprender patrones, relaciones y funciones; además de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas, utilizando símbolos y modelos matemáticos para comprender relaciones cuantitativas.

Por las consideraciones anteriores, Colombia en la misma dirección plantea en los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), que el desarrollo del pensamiento algebraico, conocido acá como pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, también debe abordarse desde el primer grado hasta el último grado undécimo y no solamente en los grados octavo y noveno. Todo esto, con el ánimo de construir una base que fortalezca a largo plazo la comprensión de conceptos que deben promoverse de una manera más completa en secundaria, entre los que se encuentra la idea de función; la cual está presente en situaciones que implican pensar variacionalmente.

En este sentido, el concepto de función más allá de estar implicado con el pensamiento variacional, es considerado uno de los contenidos principales en el desarrollo del mismo. Por tal razón, mediante las consideraciones descritas con anterioridad, es factible abordar algunas nociones matemáticas que subyacen o están asociadas al concepto de función (patrones de regularidad, relaciones de dependencia, dominio, rango, correlación directa, correlación inversa, razón de cambio y generalización), no como se abordan en los grados de octavo y noveno, sino acercarse a estas nociones desde un enfoque diferente en el que se aproveche el potencial que tienen estos.

Ahora bien, dado el respaldo que tiene esta propuesta desde lo curricular en un contexto nacional e internacional, lo mismo sucede desde lo investigativo, principalmente porque la propuesta de abordar situaciones en los que estén relacionados las diferentes nociones matemáticas

que subyacen al concepto de función en la fase de puesta en acto, hace hincapié en las actuaciones de los estudiantes cuando se involucran con ellas. Es ahí donde se hace necesario, el uso del marco conceptual del razonamiento covariacional de Carlson et al (2003), para clasificar dichas actuaciones, que pese a no ser muy utilizado en investigaciones cuyo foco de atención es la educación primaria, el uso en este trabajo se respalda desde una postura mucho más global que consiste en el Early Algebra, la cual busca que los estudiantes desarrollen habilidades de explorar, modelar, realizar predicciones, discutir, entre otras.

Es evidente entonces, que poner la mirada en lo que lo que pasa por la cabeza de los estudiantes, específicamente del grado quinto de primaria, cuando abordan situaciones implicadas por las nociones ya descritas anteriormente y que por supuesto está presente la covariación. Es una manera de promover el desarrollo del pensamiento variacional en primaria y de alguna manera estar a la par con uno de los múltiples aspectos que plantea una de investigación como el Early Algebra. Además, porque dentro de los puntos que Carlson, et al. (2003) ponen en discusión se encuentran los siguientes:

- La investigación ha revelado que la idea básica de covariación es accesible a los niños desde los niveles elementales y medio.
- Los resultados subrayan la necesidad de que los estudiantes tengan oportunidades de pensar sobre la naturaleza covariacional de las funciones en eventos dinámicos de la vida real.

Dos aspectos que permiten fundamentar la idea de acercar a estudiantes de quinto de primaria al estudio de eventos dinámicos en los que estén inmersos elementos que subyacen al concepto de función, dado que la covariación es una idea a la que los niños de grados inferiores también pueden acceder.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general.**

Caracterizar la manera en que inciden las actividades de covariación en el desarrollo del pensamiento variacional y la emergencia o aproximación a algunos elementos matemáticos que subyacen al concepto de función en grado quinto de primaria.

### **1.4.2 Objetivos específicos.**

- ❖ Documentar la problemática desde una perspectiva didáctica, curricular y matemática para el diseño y puesta en acto de actividades de covariación.

- ❖ Articular los elementos teóricos en una propuesta de aula que involucre actividades de covariación con un grupo de estudiantes de quinto de primaria.
- ❖ Analizar las actuaciones de los estudiantes desde el Marco conceptual del Razonamiento Covariacional para identificar algunos rasgos y elementos matemáticos que subyacen al concepto de función según el trabajo con situaciones de covariación.
- ❖ Aportar reflexiones de carácter teórico y metodológico a la enseñanza de elementos matemáticos preliminares al concepto de función desde la covariación.

### **1.5 Marco Contextual**

La Institución Educativa Liceo Evangélico La Heroica está ubicada en la vereda la Heroica – Rionegro - Corinto Cauca, se encuentra a una altitud de 1400 metros sobre el nivel del mar. Dista a 8 km del casco urbano de Corinto con un recorrido de 20 a 30 minutos en carro.

La institución es de carácter privado y tiene una trayectoria de 88 años. Inició sus labores en el año de 1930, y en 1985 obtuvo el reconocimiento oficial de la Secretaría de Educación Departamental para prestar su servicio en la educación básica primaria según la resolución # 8432. Actualmente tiene una población estudiantil de 140 educandos y presta sus servicios como institución educativa hasta el grado séptimo bajo la resolución # 01486 del 2018, que le da el reconocimiento para funcionar hasta el grado noveno.

La Heroica está ubicada en una región de relieve montañoso, con pendientes de entre el 15% hasta el 50%, presenta pequeñas planicies a orillas de los ríos Güengüé y Rionegro, mesetas, colinas con una altura promedio de 1000 a 2000 msnm y una temperatura que va desde los 15 a los 28°C. Además de ello, la vereda está cercada por las colinas de la cordillera central y las veredas: El Crucero, al Noreste, corregimiento de Quebraditas al Este, vereda el paraíso al Sureste y el corregimiento de Media naranja al Sur. Cabe resaltar, que sus vías de acceso, incluyendo la principal que va desde el municipio de Corinto, no están pavimentadas actualmente.

El Liceo Evangélico La Heroica solo cuenta con su sede principal, esta adopta un modelo pedagógico constructivista, con formación en preescolar, básica primaria y básica secundaria hasta grado séptimo. Para la formación de sus estudiantes, la Institución se apoya en 5 principios institucionales: Espiritualidad, convivencia, paz, conocimiento y trascendencia. Asimismo, fomenta en sus estudiantes el evangelio, como herramienta para la formación integral de personas de bien. Por otra parte, en cuanto a su visión, la Institución busca que en el año 2020 pueda ofrecer formación en los niveles de preescolar a la educación media con integración técnica, siendo un

excelente modelo en la enseñanza teórico - práctica de valores y conocimientos, preparando a la persona para asumir liderazgo en los diferentes contextos donde se encuentre.

En cuanto a los profesores de matemáticas, la Institución cuenta con tres docentes: Para preescolar se encuentra una profesora con título de Lic. en pedagogía infantil de la universidad Minuto de Dios; de segundo a tercer grado se encuentra un profesor que actualmente está cursando octavo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad San Martín; y de cuarto a séptimo grado se encuentra un profesor que actualmente es estudiante de Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas en la Universidad del Valle, dicho profesor se encuentra en proceso de terminación de trabajo de grado.

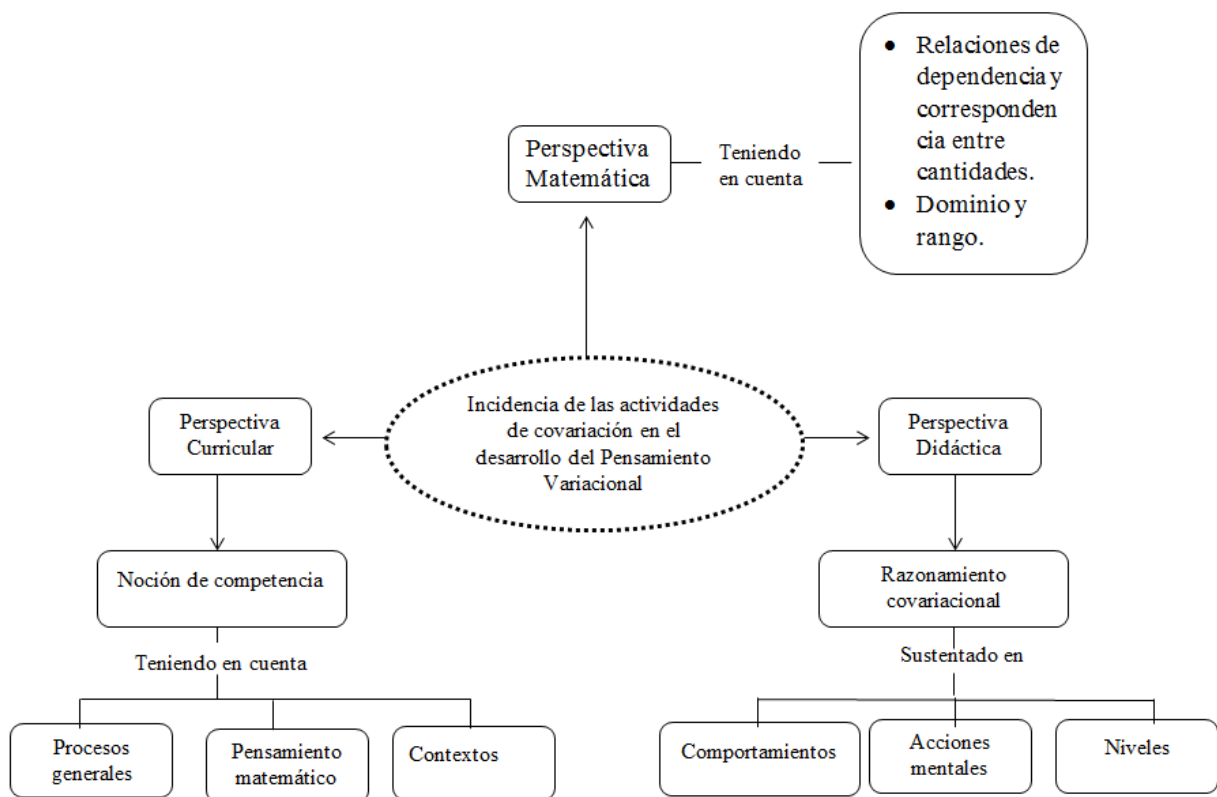
En el presente año 2019, a nivel institucional se empezaron a actualizar todos los planes de área con el objetivo de unificar los contenidos curriculares de cada una de las asignaturas que la conforman, teniendo como referencia los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos en Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje establecidos por el Ministerio de Educación Nacional. Es de resaltar que dicha renovación de los planes de área se hizo a través de la propuesta de los directivos de reunirse 5 veces en el año.

## **CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL**

En este apartado se presentan y desarrollan los elementos conceptuales que son de referencia, tanto para la fundamentación de la problemática, como para el desarrollo del presente trabajo. Esta fundamentación, se organiza en tres perspectivas: la perspectiva didáctica, la perspectiva curricular y la perspectiva matemática, que son las que pueden orientar el diseño o rediseño de una propuesta de aula, puesta en acto y análisis de las actuaciones de los estudiantes. La cual estará enfocada en elementos que subyacen al concepto de función, como una forma de fortalecer el pensamiento variacional.

Finalmente, a modo de síntesis se incluye una cuarta perspectiva intermedia: relación entre lo Didáctico, Curricular y lo Matemático; que sirve de apoyo para poner en juego aspectos en común entre las tres perspectivas anteriores a la hora de diseñar y/o rediseñar las situaciones de covariación y el posterior análisis de los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrenten a ellas. La ilustración 1 resume el encuadre conceptual de este trabajo.





*Ilustración 1. Marco conceptual de la investigación*

## 2.1 Perspectiva Didáctica

En concordancia con los propósitos de la presente investigación mencionados anteriormente, esta busca identificar características del razonamiento covariacional en un grupo de estudiantes de grado quinto de primaria, cuando abordan tareas de covariación, como una forma de propiciar elementos o factores al desarrollo del pensamiento variacional. De esta manera, es de vital importancia analizar y reflexionar sobre la forma en que los estudiantes aprenden y obtienen nuevos conocimientos matemáticos.

Así pues, se precisa contar con un marco conceptual que permita clasificar las acciones que realicen los estudiantes en torno a las tareas de covariación. Por tal motivo, esta investigación toma como referencia el Razonamiento Covariacional propuesto por Carlson et al. (2003).

### 2.1.1 Razonamiento covariacional.

El razonamiento covariacional es definido por Carlson et al. (2003) de la siguiente forma: “Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 130).

Este marco conceptual reflexiona sobre la importancia de que los estudiantes analicen situaciones dinámicas en diferentes contextos, para que estos comprendan los fenómenos en los que está implícito el concepto de variación.

En relación, Carlson et al. (2003) realizó una investigación con estudiantes universitarios sobresalientes de un curso de cálculo en torno a la covariación. En el momento de analizar los datos obtenidos, los autores hacen uso de una rejilla de análisis en la que se podía clasificar a los estudiantes, a partir de su nivel de comprensión y abstracción.

Por ello, dichos autores desarrollan un marco conceptual conformado por cinco acciones mentales con sus pertinentes comportamientos y cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional; proporcionando así, un instrumento bien estructurado que permite evaluar, describir y clasificar, las destrezas generales de razonamiento covariacional de un estudiante en el momento que aborda situaciones o tareas de covariación.

### **2.1.2 Covariación.**

Saldanha y Thompson (citado por Carlson et al. 2003) describen la covariación como “mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)” (p.123). Dicho de otra forma, es estar en la capacidad de coordinar los cambios de una cantidad de magnitud en función de otra y además, crear una sola imagen donde dichos valores persisten en el tiempo.

Desde este punto de vista, es de notar la gran relevancia que tiene el concepto de imagen en el momento de concebir una idea de covariación, a partir de una estructura dinámica, a través de la cual se hacen perceptibles las operaciones mentales que efectúa un sujeto.

Con respecto a la noción de imagen, Thompson (citado por Carlson et al. 2003) la puntualiza como: “dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales” (p.124).

Por otra parte, Vinner y Dreyfus (citado por Carlson et al. 2003) afirman que el concepto de imagen tiene que ver con todas las representaciones visuales, cuadros mentales, experiencias, propiedades e impresiones que un individuo en un contexto dado asocia con el nombre de un concepto.

De acuerdo a las dos definiciones dadas del concepto de imagen, esta se puede comprender como la representación de los procesos mentales que se dan lugar en la cognición de un individuo,

es decir, que manifiesta los razonamientos y pensamientos de un sujeto en torno a una situación en particular.

### 2.1.3 Acciones mentales.

Son aquellas imágenes de covariación que proporcionan un recurso para clasificar los comportamientos que se pueden evidenciar, cuando un individuo realiza tareas que impliquen la covariación. En consecuencia, un estudiante que presenta un comportamiento característico, debe sustentarlo de una acción específica, que demuestre la comprensión necesaria para ejercer tal comportamiento. En la siguiente tabla se puede apreciar la descripción de cada una de las acciones mentales del razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados respectivamente.

*Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual del razonamiento covariacional*

| Acción Mental | Descripción de la acción mental                                                                                                                         | Comportamientos                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| AM1           | Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.                                                                                      | Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de dos variables.                                                                                                                                               |
| AM2           | Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable                                                             | Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.                                              |
| AM3           | Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.                                                              | Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada                                    |
| AM4           | Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.                           | Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.                           |
| AM5           | Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. | Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos de la razón de cambio en la razón de cambio para todo el dominio de la función. |

*Nota:* tomado de Carlson et al. (2003).

Las acciones mentales van desde la Acción Mental uno (AM1) hasta la Acción Mental cinco (AM5). La primera es la más simple, esta corresponde al reconocimiento de lo que está

cambiando, haciendo uso del lenguaje verbal. La segunda atiende a la dirección del cambio, en otras palabras, consiste en identificar si lo que cambia aumenta, disminuye o se mantiene igual. La tercera corresponde a la concientización de las medidas, dicha concienciación se desarrolla a partir de la necesidad de medir y coordinar la cuantificación de las variaciones identificadas. La cuarta corresponde a la realización de bosquejos de una posible respuesta, por lo tanto, se infiere sobre la coordinación de la razón de cambio promedio de una función, en correlación con los incrementos de la variable independiente. Finalmente, en la quinta acción mental se desea que el estudiante posea una imagen madura, refinamiento y apropiación de todas las cualidades y propiedades de temas relacionados con la coordinación de la razón de cambio instantánea, en otras palabras, que el individuo esté en la capacidad de reconocer los cambios instantáneos de la razón de cambio con todas sus implicaciones, como concavidades y puntos de inflexión.

#### **2.1.4 Niveles de razonamiento covariacional.**

Los niveles de razonamiento covariacional posibilitan la clasificación de los estudiantes en un nivel específico, con base en la imagen global que aparenta sustentar varias acciones mentales que estos manifiestan en el contexto de un problema o tarea. Por lo tanto, para clasificar un estudiante en un determinado nivel, este debe dar cuenta de las acciones mentales implicadas en dicho nivel y las acciones mentales de los otros niveles que lo anteceden.

El marco conceptual para la covariación detalla cinco niveles de desarrollo de las imágenes de covariación, tales imágenes se exhiben en términos de acciones mentales fundamentadas por cada imagen. A continuación, se explicitan los niveles de desarrollo de razonamiento covariacional:

*Tabla 2. Marco conceptual para los niveles del razonamiento covariacional*

| Niveles                              | Características                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nivel 1<br>Coordinación              | Las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Nivel 2<br>Dirección                 | Imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Nivel 3<br>Coordinación Cuantitativa | Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 Y AM3).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Nivel 4<br>Razón Promedio            | Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. (AM1 hasta AM4).                                                                                                                                                                                                           |
| Nivel 5<br>Razón Instantánea         | Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5. |

*Nota:* tomado de Carlson et al. (2003).

## 2.2 Perspectiva Curricular

Para el análisis de los elementos curriculares que tienen relación con la problemática en general, como con los elementos que subyacen al concepto de función, se toman de referencia los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

(MEN, 2006), como aquellos documentos rectores que dan pautas para determinar el currículo actual de matemáticas en Colombia.

Por otro lado, en virtud de que el pensamiento variacional es un aspecto determinante en el transcurso del trabajo, se hace un énfasis en su caracterización, partiendo desde los documentos del MEN (1998,2006) y el concepto de pensamiento variacional desarrollado por Vasco para la reforma curricular de Colombia a finales de los años noventa.

A continuación, se presenta una mirada global de lo que implica el conocimiento matemático y el desarrollo de competencia en la misma área, es decir, que se detallaran aspectos que toda propuesta de aula debe tener en cuenta en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas. Esto con el fin, de desencadenar en una mirada particular de lo que trata el pensamiento variacional, debido a que la propuesta de aula a desarrollar se enfoca en el desarrollo del mismo.

### **2.2.1 Conocimiento matemático y desarrollo de competencia matemática.**

Los Lineamientos Curriculares expresan que: “El conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan la colectividad, que sirven de argumento y de justificación” (MEN, 1998; p.12). Desde esta mirada las matemáticas son una construcción humana, mediante la cual, se dan cabida a los cuestionamientos que al resolverse transforman el entorno y la sociedad.

Por tal razón, en una dirección opuesta a ver las matemáticas como un cuerpo de conocimiento acabado y abstracto, en palabras del MEN (2006):

Se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de la matemática no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. (p.47)

De este modo, ir tras ese objetivo de enseñar para la vida, el MEN (2006) propone que la comprensión lógica de la matemática se fundamenta desde una idea de competencia que implica considerar los diferentes contextos en los cuales están inmersos los estudiantes. Para lo cual en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se define la competencia “como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y

psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006,p. 49).

Por lo tanto, mediante esta idea de competencia se han estructurado tres dimensiones que articulan la enseñanza de la matemática:

- ❖ Los conocimientos básicos, que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, el aleatorio y variacional), y con sistemas propios de las matemáticas (sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos).
- ❖ Los cinco procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- ❖ El Contexto, último elemento del currículo, que está relacionado con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende.

La interacción de estos tres aspectos debe generar una dinámica dentro del currículo de matemáticas, para actuar en forma directa en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Desde este panorama se busca darle un sentido de orientación al trabajo con cada uno de los pensamientos dentro de la educación matemática, partiendo desde la educación básica, en el que los contenidos matemáticos no se enseñan de manera fragmentada.

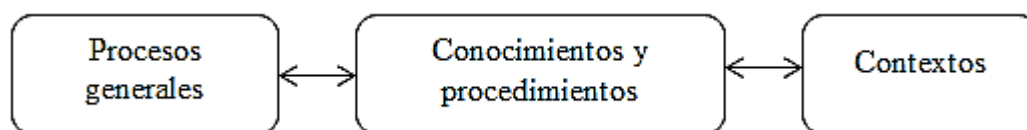
Con referencia a lo anterior, los contenidos que sean abordados en el aula desde la planeación curricular deben orientarse desde los pensamientos matemáticos y sus sistemas, encaminados al desarrollo de los procesos generales y a la inclusión de los diferentes contextos, como aquellos ejes fundamentales que regulan el aprendizaje desde la idea de un ser competente.

En relación a lo anterior, el MEN propone los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los cuales concibe como niveles de avance en procesos graduales. Estos establecen una estructura basada en los cinco pensamientos y sistemas correspondientes, los cuales se presentan en columna y son cruzados por los estándares que enfatizan uno o dos de los cinco procesos generales ya mencionados, sin dejar a un lado los otros procesos susceptibles de practicarse en diferentes contextos de tal modo que se contribuya a superar el nivel del estándar.

Los estándares están distribuidos en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno, y décimo a undécimo) con la intención de dar

flexibilidad a la distribución de las actividades en el tiempo, apoyar la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativas y comprensivas. (2006, p. 76)

En este sentido, el MEN (2006) expresa: “Los Estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de la matemática y entre el conocimiento conceptual y el procedimental” (pp. 77-78). En la siguiente ilustración se especifica la estructura que tiene cada estándar en su elaboración.



*Ilustración 2. Estructura de formulación del estándar. Fuente (MEN, 2006; 77)*

Se reconoce entonces que, si por un lado se acepta que el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes, también se debe reconocer por otro lado, que ese conocimiento informal debe direccionarse hacia lo formal mediante la construcción de contextos y situaciones de aprendizaje. De modo que esos contextos y situaciones, son ese medio para el desarrollo de competencias y que los procesos generales constituyen las actividades intelectuales que permitan a los estudiantes alcanzar y superar un nivel suficiente en las competencias.

Finalmente, dada la complejidad del aprendizaje de las matemáticas, se requiere en los Estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La primera, reconoce que el aprendizaje de las matemáticas es gradual y que debería partir desde lo más simple hasta los más complejos, propone entonces, una relación de un estándar con los demás Estándares desde el mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda, reconoce que el conocimiento que hace alusión a lo numérico, variacional, métrico, aleatorio y espacial no son asuntos independientes, por el contrario, guardan relación, proponiendo entonces, la relación que tiene un estándar determinado con los Estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

### **2.2.2 Pensamiento variacional.**

Cuando se empieza a realizar un rastreo del pensamiento variacional desde los Lineamientos Curriculares en matemáticas, se pueden encontrar asuntos muy generales, entre los que se destaca la relación que tiene este pensamiento con los demás (numérico métrico, entre otros) y porque se propone fundamentalmente: “Analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propias



matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas”(MEN, 1998,p.72). Sin embargo, no es muy claro que se debe entender por pensamiento variacional.

Por otra parte, en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas MEN (2006), se describe el pensamiento variacional como el que:

[...] tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales, sociales y las matemáticas mismas. (p.66)

Desde este punto de vista, el desarrollo del pensamiento variacional está ligado a las maneras de reconocimiento, percepción e identificación de las formas en que se caracteriza el cambio y la variación, sin menospreciar las diferentes formas de representar. Además, se resalta la idea de desarrollar estrategias desde los primeros grados de escolaridad, de tal manera que estén dirigidas a potenciar dicho pensamiento con antelación, en pro de aportar a la comprensión de conceptos tanto del álgebra como también del cálculo; teniendo como foco de atención el estudio de la variación en diferentes contextos.

De modo particular, la variación implica covariación y correlación de magnitudes, que pese a no darse una descripción detallada de lo que significa este término, el MEN (2006) menciona lo siguiente:

El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a la otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines, las polinómicas y las exponenciales, así como las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones. (p.67)

Aunque propiamente no se mencione covariación, se puede inferir que el MEN (2006), empieza a dar señales de este proceso al considerar que en las relaciones funcionales se permiten coordinar cambios de una magnitud  $x$  con cambios de una magnitud  $y$ . Además, porque el MEN (2002) señala que:

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 138)

Puede verse entonces, que en esta definición sobre el pensamiento variacional se apunta a lo que es la captación mental de relaciones y patrones que presentan las variables que covarían entre sí. De la misma manera, la implicación que tiene la variación con la covariación se hace explícita, cuando el MEN (2002) plantea que: “El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad” (p. 68).

Se puede entonces afirmar de acuerdo a las apreciaciones anteriormente hechas, que para el MEN (2002), el pensamiento variacional no excluye la covariación, pero si precisa lo siguiente: una cosa es una cantidad variable con el tiempo; otra cosa es una cantidad que varía si varía otra (sería mejor llamarlas “covariantes”, o mejor todavía “variables covariantes”). En esta distinción, sólo se puede hablar de variación cuando se presentan cambios de una magnitud cualquiera sin atender a otra magnitud de la cual pueda depender a medida que transcurre el tiempo, en otras palabras, no hay una comparación con otra cantidad que varía. Contrario a lo que sí sucede cuando se habla de covariación, pues en este caso se analizan los cambios de una magnitud que varía con respecto a los cambios en otra.

En tal sentido, se observa que tanto la idea de Vasco dada desde el MEN (2002), como la del MEN (2006), frente al pensamiento variacional está centrada en la covariación, haciendo referencia a la importancia de correlacionar las cantidades de magnitudes presentes en cualquier fenómeno; es decir, que en el estudio de una situación que corresponda a cualquier contexto (vida cotidiana, otras ciencias y las matemáticas misma), en el que estén presentes diferentes cantidades de magnitudes, los estudiantes puedan analizar las variaciones de una de ellas con respecto a las

variaciones de la otra, con el propósito de comprender y tener una perspectiva dinámica del fenómeno mismo.

**Estándares por ciclos de grados.** El pensamiento variacional que en cuestiones anteriores se ha discutido no excluye la covariación, además de estar relacionado con el desarrollo de competencias mediante la determinación de los Estándares por ciclos de grados, requiere un proceso lento e integral, que en términos del MEN (2006), ha denominado la coherencia vertical y horizontal, de la cual se dará cuenta a continuación:

**Coherencia vertical.** Dada la complejidad que tiene la comprensión de la covariación, se pueden delimitar algunos Estándares por ciclos de grados en el mismo pensamiento variacional, que evidencian el creciente nivel de complejidad para los estudiantes a medida que se avanzan en el proceso educativo de primaria hasta la secundaria. Algunos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas que evidencian lo anterior son:

*Tabla 3. Coherencia vertical de los EBCM para el pensamiento variacional*

| Conjuntos de grados | Estándar                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Primero a tercero.  | Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.                                                                                                                         |
| Cuarto a quinto.    | Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.                                                            |
| Sexto a séptimo.    | Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, la variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.                                     |
| Octavo a noveno.    | Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.                                                                                                                                                                              |
| Décimo a once.      | Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo de métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. |

NOTA: Tomado del MEN (2006).

**Coherencia horizontal.** Desde una mirada integral situarse en el Estándar de cuarto a quinto en el que la covariación está de manera implícita en el pensamiento variacional, permite evidenciar que hay otros Estándares en el mismo ciclo de grados que también lo consideran.

*Tabla 4. Coherencia horizontal de los EBCM para el pensamiento variacional*

| Tipo de pensamiento matemático                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos:</b><br>Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.                                                                                     |
| <b>Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas:</b><br>Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.                                                              |
| <b>Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos:</b><br>Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y los comparó con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos. |

De esta manera, también se puede establecer una relación del estándar de cuarto a quinto con los diferentes elementos matemáticos que subyacen al concepto de función, principalmente porque la covariación está presente en las situaciones que le apuntan a ese estándar. Así mismo, se plantea la coherencia que tiene el estándar con los derechos básicos de aprendizaje<sup>6</sup>. El enunciado que hace referencia a describir e interpretar variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de graficas; cuyo aprendizaje se evidencia cuando:

- ❖ El estudiante proponga patrones de comportamientos numéricos y patrones de comportamientos gráficos.
- ❖ Realice cálculos numéricos, organice la información en tablas, elabore representaciones gráficas y las interprete.

*Tabla 5. Relación del estándar seleccionado y algunas nociones matemáticas*

| Conjuntos de grados                                                                                                                                                          | Estándar                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales. | Relaciones de dependencia, dominio, rango, patrones y regularidades, correlación inversa y directamente proporcional, razón de cambio, generalización. |

<sup>6</sup> Son lo que se manera conjunta explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área en particular.

## 2.3 Perspectiva Matemática

Este apartado tiene como fin presentar información suficiente a modo de darle cuenta al lector sobre la manera en que se definen los elementos matemáticos que están asociados al concepto de función, los cuales se convierten en ese insumo de gran importancia en el diseño de la propuesta de aula, promovidos mediante las situaciones de variación y cambio.

Es menester entonces, dejar claro que, aunque aquí se presenten en un ámbito formal, no implica que de esa manera se vayan a promover en la propuesta de aula, al contrario, se convierte en un reto buscar la manera de que los estudiantes de quinto de primaria aborden estos elementos mediante situaciones contextualizadas de una manera asequible.

Inicialmente desde una revisión de la literatura, se destaca la siguiente definición de función: “una función de un conjunto  $D$  a un conjunto  $Y$  es una regla que asigna un elemento único  $f(x) \in Y$  a cada elemento  $x \in D$ ”. (Thomas, 2006, p.19)

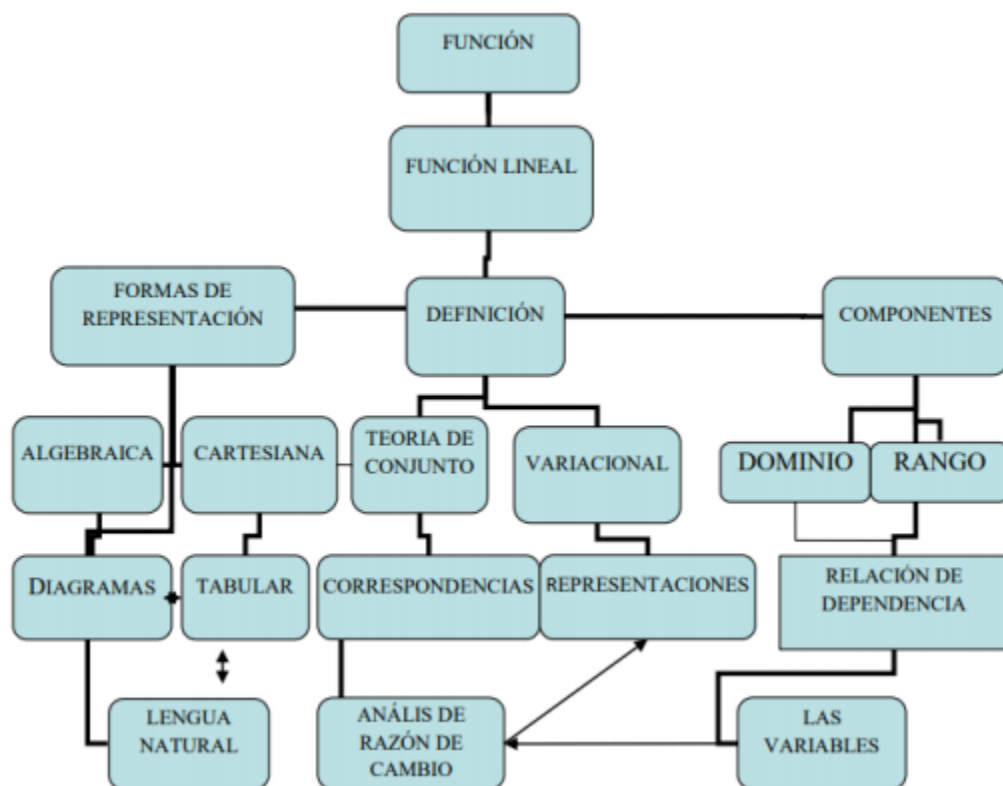
La anterior definición abarca todas las diversas tipas de funciones, entre las que se encuentran las que establece Thomas (2006): (a) funciones de potencia; (b) funciones polinómicas; (c) funciones racionales; (d) funciones algebraicas; (e) funciones trigonométricas; (f) funciones exponenciales; (g) funciones logarítmicas; y (h) funciones trascendentes. Dentro de las funciones polinómicas se encuentran la función lineal, en la cual Swokowski (1983) expresa que: “ $f$  es una Función Lineal si  $f(x) = mx + b$ , donde  $m$  es un número real y  $m \neq 0$ . A  $m$  se le denomina pendiente de la función y a  $b$  como el punto de intercepto en el eje  $y$ ”. Los elementos matemáticos que se estudian en este trabajo son los que están relacionados con este tipo función, teniendo en cuenta que el:

“... el concepto de Función Lineal es un subconjunto de lo que se entiende por función y que su naturaleza está estrechamente ligada con cantidades directamente proporcionales y cantidades covariacionales”. (Angulo, J, Mina. S y Valencia, J, 2011, p. 23)

Dada la consideración anterior, los elementos que conforman la función son muy extensos, inclusive abordarlo implica considerar los tipos de funciones que existen y que se han nombrado con anterioridad. Por tal razón, en la siguiente red conceptual<sup>7</sup> se muestra como esta permite comprender la estructura matemática de la función lineal.

---

<sup>7</sup> Imagen recuperada del documento de Angulo, Mina y Valencia (2011)



*Ilustración 3. Red conceptual*

No obstante, es menester dejar claro que mediante este trabajo no se pretende abordar la función lineal, tal cual se hace en los grados octavo y noveno; sino que se tiene la finalidad de promover elementos que están relacionados con dicho concepto. De este modo, en la red conceptual se muestran algunos elementos que no son objeto de estudio en este trabajo, entre ellos, por ejemplo: el dominio de lo simbólico-algebraico y el plano cartesiano. Así mismo, hay elementos que no están explícitos, pero que se detallan a continuación junto a los que si están en la red conceptual:

**Dominio y rango.** Las funciones lineales son continuas en todo el conjunto de los números reales, es decir que el dominio y el rango están definidos en los números reales.

**Monotonía (creciente o decreciente).** Dado que la expresión algebraica de la función lineal es  $f(x) = ax + b$  donde  $a$  y  $b$  son números reales, con  $a \neq 0$ . Su grafica siempre es una línea recta (no vertical ni horizontal), en el cual su comportamiento está dado por los valores que tomen los coeficientes  $a$  y  $b$ , de tal manera que:

Si  $a > 0$ , entonces  $f(x)$  es creciente en todo su dominio, en este caso cuando  $x$  aumenta el valor de  $f(x)$  también aumenta.

Si  $a < 0$ , entonces  $f(x)$  es decreciente en todo su dominio, en este caso cuando  $x$  aumenta el valor de  $f(x)$  disminuye.

**Variable, variable dependiente, variable independiente.** La Real Academia Española (2018), ofrece la siguiente definición de variable que se puede tener en cuenta en este estudio: “Magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto”. Así mismo, la definición plantea que una variable dependiente:

“Es aquella cuyo valor depende del valor numérico que adopta la variable independiente en la función. Una magnitud, de este modo, es función de otra cuando el valor de la primera magnitud depende de forma exclusiva del valor que evidencia la segunda magnitud” (2018). Además, también define la variable independiente:

“Cuando el valor de una magnitud depende exclusivamente del valor de otra magnitud, se establece una función matemática. Esta segunda magnitud, que determina el valor de la primera, recibe el nombre de variable independiente” (2018).

**Pendiente desde una razón de cambio.** La pendiente  $m$  de una recta no vertical que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con  $x_1 \neq x_2$

La pendiente de una recta puede verse bien como una razón de cambio si los  $x$  e  $y$  tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una tasa o ritmo de cambio.

**Patrones y Generalización.** Castro, Cañadas & Molina (2010) definen el patrón como “lo comuna, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (p.57).

Para Stacey (1989) & Castro (1995), en relación a las diferentes aplicaciones y utilidades que tienen los patrones, se puede destacar que se conciben como:

- a) Una importante estrategia para resolver problemas.
- b) Una herramienta que facilita la comprensión de los fenómenos que ocurren en el entorno.
- c) Una ayuda para comprender expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios matemáticos posteriores.

Como complemento a lo anterior, Cañadas y Castro (2007) apuntan a que los patrones matemáticos, no solo están relacionados con casos particulares, sino que además están relacionados con una regla general. Por lo tanto, al establecerse generalizaciones a través del reconocimiento de patrones, se contribuye a la capacidad de proponer modelos matemáticos y establecer los cimientos para el desarrollo de habilidades matemáticas. En este sentido, Kaput (1999) se refiere a la idea de generalización del siguiente modo:

Extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 136).

**Tipos de representaciones.** Las representaciones tienen una gran importancia en las investigaciones en Educación matemática por el papel determinante que juegan en la construcción del conocimiento matemático. Tanto que sería demasiado extenso detallar este aspecto desde las diferentes posturas que tienen varios investigadores. Por lo cual en este trabajo se asume la definición de Castro & Castro (1997), al señalar que los sistemas de representación:

“son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto” (p. 102).

Por otra parte, Rico (2009) plantea que una característica distintiva de los conceptos y estructuras matemáticas es que para poder captarlos en su complejidad es necesario emplear diversas representaciones.

En este sentido, para efectos de este trabajo se definen algunas representaciones<sup>8</sup> que se pretende que los estudiantes empleen en el desarrollo de la propuesta de aula:

- ❖ Verbal: Se sirven del lenguaje natural para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2007).

---

<sup>8</sup> Para este trabajo no se considera la representación de lo simbólico-algebraico, debido a que en el grado escogido los estudiantes aun no tienen dominio de ello.



- ❖ Pictórica: Se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueras, 2007).
- ❖ Simbólico numérico: Se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo.
- ❖ Tabular: La RAE (2018), define tabla como un “cuadro o catálogo de números de especie determinada, dispuestos en forma adecuada para facilitar los cálculos”.

## **2.4 Perspectiva Intermedia: Relación de lo Didáctico, lo Curricular y lo Matemático**

Hasta el momento se han abordado desde una perspectiva teórica cuestiones de carácter global y específico que constituyen el presente trabajo, enmarcados en aspectos que tienen que ver con lo curricular, lo didáctico y matemático.

En este sentido, se hace necesario buscar una perspectiva intermedia que dé cuenta de una relación que integre los diferentes aspectos que conforman el marco teórico, con el fin de explicitar elementos determinantes en la elaboración de una propuesta de aula, puesta en acto de la misma y análisis de las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrenten a ella.

Entonces, resulta pertinente explicitar aspectos de común acuerdo entre lo que plantea el Ministerio de Educación Nacional (2002,2006)<sup>9</sup>, el marco conceptual del razonamiento covariacional desarrollado por Carlson et al, (2003) y los elementos matemáticos que subyacen al concepto de función.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, se considera que los elementos matemáticos preliminares al concepto de función por su carácter dinámico guardan una relación con el pensamiento variacional. El cual se ha conceptualizado desde diferentes miradas de acuerdo a ciertos elementos, la forma como se genera y se desarrolla

Por tal razón, en una primera mirada en relación a aspectos similares entre lo que se entiende por pensamiento variacional desde el MEN (2002,2006) y el razonamiento covariacional et al (2003), coinciden en que es algo que se da en la mente, solo que desde el razonamiento covariacional se han denominado “acciones cognitivas” y desde el pensamiento variacional bajo las interpretaciones de Cabezas & Mendoza (2016) como “procesos mentales”.

---

<sup>9</sup> No se tienen en cuenta lo que plantean los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, debido a que no se presenta de manera clara lo que se debe entender por pensamiento variacional.

En ese orden de ideas, el pensamiento variacional implica la captación de patrones en dirección de la creación de un modelo mental que después se exterioriza a través de las representaciones semióticas. Según Cabezas & Mendoza (2016):

Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

A este mismo respecto, Carlson et al, (2002), emplean otra terminología y se refieren a razonamiento covariacional, definiendo éste como una actividad cognitiva que considera la coordinación del cambio conjunto entre dos variables, cuantificando lo que sucede en una variable si la otra cambia.

### **CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo se presentan los aspectos que describen la metodología de investigación. Inicialmente se describe el tipo de investigación, los sujetos participantes, el protocolo de recolección de información y las categorías de análisis.

#### **3.1 Tipo de investigación**

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo cualitativo de naturaleza descriptiva y exploratoria, ya que propone observar e identificar las actividades de covariación que tienen mayor incidencia en el desarrollo del pensamiento variacional y además, también se busca describir y analizar las acciones de los estudiantes del grado quinto de primaria cuando abordan actividades covariacionales, haciendo uso del marco conceptual del razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2003).

En relación a lo anterior, teniendo en cuenta que esta indagación pretende aproximar a los estudiantes de básica primaria al estudio de la variación, a través de actividades de covariación; se hace necesario contemplar de manera crítica la forma como los estudiantes razonan y actúan en torno a actividades que permiten establecer relaciones entre cantidades de magnitudes. Es decir, observar las características del razonamiento covariacional en estudiantes de grado quinto.

En consecuencia, el enfoque cualitativo es el que responde de mejor manera a los propósitos de la investigación, pues tal como lo afirma Hernández, Fernández y Baptista (2006) “La

investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas”. (p.21).

Por otra parte, los mismos autores definen el enfoque, como:

[...] un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista (porque estudia a los objetos y seres vivos en sus contextos y ambientes naturales) e interpretativo (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en términos de los significados que las personas les otorguen). (p.9).

De esta manera, es menester esclarecer, que esta investigación requerirá de un proceso de observación, interrelación entre los actores que hacen parte del acto educativo, y de la descripción y el análisis (enmarcados en los referentes teóricos del trabajo) de las observaciones y datos obtenidos a partir de la puesta en acto del presente estudio.

De otro lado, es pertinente dilucidar que el estudio de casos es el método que más se ajusta a las necesidades y exigencias de la investigación, pues, como ya se ha mencionado anteriormente, esta investigación pretende identificar la forma como los estudiantes razonan variacional mente en el momento de abordar tareas relacionadas con la variación, haciendo uso de un proceso de observación, descripción, interpretación y análisis.

Ahora bien, teniendo en cuenta que este trabajo se llevará a cabo en una institución educativa con un grupo de individuos de quinto grado de primaria, el método mencionado a utilizar se hace el más conveniente, pues, Salkind (1999) define el estudio de casos como el “método empleado para estudiar a un individuo o una institución en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible”. (p.211).

En esta misma línea, Stake (2007) define el estudio de casos como “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes”. (p.11)

Es evidente en las definiciones dadas por Salkind (1999) y Stake (2007), que se hace referencia a la importancia de un caso en particular, a lo distintivo de este en cuanto a los demás, y a la necesidad de que sea abordado y entendido por individuos cercanos a él.

De igual manera, el estudio de casos se hace también oportuno, porque en la realización de la propuesta es necesaria la participación activa de los investigadores en el campo, con el propósito de poder efectuar un estudio minucioso basados en la observación, descripción e interpretación de

cada uno de los datos recolectados (Formas de razonar, procedimientos realizados, etc.) de cada uno de los estudiantes.

En tal sentido, Stake (2007) afirma:

[...] destacamos la presencia de un intérprete en el campo para que observe el desarrollo del caso, alguien que recoja con objetividad todo lo que está ocurriendo, y que a la vez examine su significado y reoriente la observación para precisar o sustanciar esos significados. (p.21)

De este modo, la investigación optó por un estudio de casos, dejando de lado las explicaciones de tipo causa – efecto sobre circunstancias relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje; y centrando su atención en la comprensión de un problema propio de las matemáticas en la escuela, buscando identificar características del Razonamiento covariacional en determinadas instancias. Además de ello, cabe esclarecer que se eligieron seis estudiantes en total, instaurando el razonamiento de cada uno de ellos como una unidad de análisis.

Por otra parte, el diseño de un estudio de casos debe tener un hilo articulador que le de coherencia y pertinencia a la recolección de datos, y, además exprese de forma explícita las interpretaciones derivadas de los análisis de cada uno de los casos. Así, Stake (2007) plantea:

El diseño de toda investigación requiere una organización conceptual, ideas que expresen la comprensión que se necesita, puentes conceptuales que arranquen de lo que ya se conoce, estructuras cognitivas que guíen la recogida de datos, y esquemas para presentar las interpretaciones a otras personas. (p.25).

En este orden de ideas, la investigación está guiada por una metodología que es consecuencia de la organización de varios elementos en el marco teórico, los cuales se clasifican en las siguientes fases<sup>10</sup>:

**Fase I: Documentación de la problemática.** En esta fase se hizo un estado del arte relacionado con los propósitos de la presente investigación, de igual manera se delimitó apropiadamente la problemática con una pregunta que le proporciona dirección, sentido y viabilidad al trabajo. En tal sentido, se justificó la problemática y se planteó una serie de objetivos a alcanzar. Así mismo, se realizó una descripción del marco teórico en tres partes: Perspectiva curricular, perspectiva didáctica y perspectiva matemática.

---

<sup>10</sup> La descripción que se da en estas fases es de manera superficial, debido a que algunos aspectos tratados en ellas, ya se han detallado o más adelante se amplían en otros apartados.

Cabe aclarar, que todos los aspectos mencionados anteriormente, se han abordado en esta sección de manera muy general, pues estos se ya se han desarrollado detalladamente en los capítulos 1 y 2 del presente trabajo.

**Fase II: Población objeto de estudio y diseño de la propuesta de aula.** El grupo de estudiantes se seleccionó teniendo en cuenta el interés que estos tuvieran por participar de las actividades y que presentaran un desempeño escolar promedio en el área de matemáticas. De igual forma, se tuvo en cuenta que los estudiantes dominaran algunos saberes previos específicos para una mejor comprensión de las situaciones.

Ahora bien, en concordancia con todos los elementos desarrollados en el marco teórico, se identificaron y seleccionaron ciertos factores determinantes para tenerlos en cuenta a la hora del diseño, es decir, que este deberá estar relacionado considerablemente con los aspectos que ya se han citado con anterioridad en el capítulo 2 de esta investigación.

**Fase III: Implementación de la propuesta de aula.** En esta fase se efectuó la puesta en acto de la propuesta de aula desarrollada con base en cada uno de los elementos del marco teórico, y en la caracterización de la población y las condiciones de su contexto. Dentro de esta parte, se tuvo en cuenta además un protocolo de aplicación que implica un trabajo grupal e individual; el uso de plenarias para cada actividad realizada y la validación de la misma. Además, en la recolección de información se tuvo en cuenta: la producción escrita y registros audiovisuales.

**Fase IV: Resultados y conclusiones.** Posterior a la implementación de la propuesta de aula, de acuerdo con el marco teórico, se seleccionaron unos criterios de indagación para realizar el análisis de los datos obtenidos en la fase III, y a partir de dicho análisis, lograr inferir algunas conclusiones en términos de los objetivos planteados en la investigación.

### **3.2 Población objeto de estudio**

En la aplicación de las actividades diseñadas, participaron 6 estudiantes del grado quinto de primaria, con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, Liceo Evangélico la Heroica del municipio de Corinto Cauca. Este centro educativo abarca solo las etapas de educación infantil, educación primaria y en la educación secundaria se llega hasta la educación básica.

Además de lo anterior, la mayor parte de los estudiantes que integran el centro educativo provienen de familias con un nivel socioeconómico bajo, en el cual la mayoría se dedica a la actividad agropecuaria, como también por estar ubicado en una parte rural, en este caso en particular el acceso a las tecnologías es muy limitado.

Para el proceso de selección de los estudiantes, se hizo una indagación sobre el nivel académico que presentaba cada uno de los estudiantes que conformaban el curso, frente a esto, los 6 estudiantes que se escogieron, se hicieron bajo el criterio del profesor al manifestar que estos eran los que más se destacaban en su rendimiento escolar.

De este modo, se favorecieron estos estudiantes, debido a que se buscaba realizar una experiencia de aula, de tal manera que los conllevara a aproximarse a nociones matemáticas que subyacen al concepto de función, desde una perspectiva dinámica, vislumbrando algunos niveles del razonamiento covariacional que se pretendía evidenciaran desde cada una de las situaciones.

Es necesario mencionar que, para poder medir el impacto de la propuesta de aula en los estudiantes, se debe garantizar que estos tengan los prerrequisitos previos, pues de lo contrario, alguna falta de estos podría traducirse en un falso fracaso de lo que se pretende con la propuesta de aula.

### **3.3 Sobre el diseño de la propuesta de aula**

Con el fin de promover las reflexiones y desarrollos teóricos de orden matemático, didáctico y curricular en el presente trabajo se diseñaron ocho actividades organizadas en dos situaciones diferentes de acuerdo con los contextos y problemas que éstas movilizan. El diseño de las situaciones e implementación en el aula pretenden un acercamiento a nociones como dependencia entre cantidades de magnitudes, correlación inversa y directamente proporcional, dominio y rango, entre otras. Dado que estas son nociones que se trabajan en la educación secundaria, no se trata de adelantar de curso estos contenidos en sus aspectos más formales, sino de darles un enfoque diferente que faciliten la aproximación de los estudiantes al álgebra, específicamente al desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional.

El diseño pone en consideración la importancia de incorporar las nociones matemáticas nombradas anteriormente a través de varias situaciones y a la vez por diversos contextos, en una dirección opuesta a lo que sucede en Colombia, donde mayoritariamente los contextos geométricos y numéricos son trabajados como áreas de aprendizaje distintas que promueven conceptos y procedimientos propios<sup>11</sup>. Por tal razón, en las situaciones de la investigación se ponen en juego ambos contextos de tal manera que mediante las propiedades de uno se reconozcan y logren trabajar las del otro contexto y que con las contribuciones de cada uno aporten en el logro de cada tarea.

---

<sup>11</sup> Investigaciones como las de Arce, Torres, Ramírez, Valoyes, Malagón & Arboleda (2004).

Por otro lado, más allá de relacionar cada situación a un propósito general, también cada tarea que compone cada una de las situaciones está relacionada con algunos niveles del razonamiento covariacional. Todo esto con el ánimo de describir la manera en que piensan los estudiantes cuando se enfrentan a estas situaciones, debido a que las imágenes de covariación que cada uno de los estudiantes sustenta es relativo. Así mismo, al ser diferente cada uno de los razonamientos, se pueden caracterizar en un nivel determinado que a la vez está relacionado con unas acciones mentales y unos comportamientos específicos.

En otros aspectos, se considera la comunicación como un aspecto determinante en relación a los comportamientos que exhiben los estudiantes en procesos verbales, de escritura y lo gestual. Se desprenden entonces consideraciones en el diseño las representaciones pictóricas, tabulares y verbales.

Finalmente, por el carácter dinámico que presentan las nociones matemáticas previas concepto de función nombradas con anterioridad, el uso del lápiz y papel no es suficientemente potentes a la hora de abordar las situaciones, por lo que se hace necesario el uso de material concreto y un software dinámico como Geogebra para que los estudiantes sean testigos de la covariación como un aspecto fundamental en cada situación.

### **3.3.1 Diseño y descripción de la propuesta de aula.**

La propuesta está dirigida a estudiantes de Quinto de Primaria, con el fin de caracterizar la manera en que inciden las actividades de covariación en el desarrollo del pensamiento variacional. Al mismo tiempo, desde la misma se pretende movilizar nociones preliminares al concepto de función desde un enfoque diferente al que se realiza cuando estas nociones se abordan con más formalidad en la secundaria.

A continuación, se describen aspectos que se tuvieron en cuenta durante el diseño o rediseño de la propuesta de aula, incluyendo los relacionados a su estructura.

Para el diseño de la propuesta, se parte del marco conceptual presentado en el capítulo 2, teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas para los grados cuarto y quinto, los elementos matemáticos o nociones matemáticas preliminares al concepto de función y el marco conceptual de Carlson.

Desde los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas para los grados cuarto y quinto, en particular, del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se le apuntó al trabajo de los siguientes estándares:

- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

En ese mismo orden de ideas, desde los elementos matemáticos asociados al concepto de función se tienen en cuenta nociones como: Relación de dependencia, Dominio y rango de una función, Variable dependiente e independiente, Magnitudes invariantes (constantes), Razón de Cambio, Generalización, Correlación directa e inversamente proporcional entre magnitudes y algunas representaciones (tabular y el lenguaje natural).

Cada uno de los elementos mencionados anteriormente, se aborda teniendo en consideración los grados de complejidad propuestos por Carlson en cada nivel del razonamiento covariacional. En este mismo orden, para lograr comportamientos cercanos a los asociados a cada acción mental (AM1 hasta AM4)<sup>12</sup>, en el diseño de las preguntas, además de las que están direccionadas a las nociones matemáticas descritas anteriormente, son imprescindibles cuestiones como las siguientes: ¿qué cambia y qué no cambia?, ¿qué hace que cambie?, ¿cómo cambia? y ¿a qué razón cambia? Estas preguntas orientadas dentro de un contexto específico y dadas en un lenguaje asequible a los estudiantes, permiten obtener de ellos un discurso presentado en algunos casos de modo verbal o escrito, el cual servirá de insumo para caracterizar el modo en que los estudiantes piensan cuando se involucran con situaciones de covariación.

A continuación (Ver tabla 6 y 7) se presenta la estructura que sintetiza las situaciones<sup>13</sup> integradas por diferentes actividades de covariación dentro de una propuesta de enseñanza. En esta estructura, para cada actividad se detalla la cantidad de preguntas, los propósitos, las nociones matemáticas preliminares al concepto de función y las acciones mentales correspondientes.

Cabe agregar, que las nociones matemáticas y las acciones mentales establecidas se convierten en un punto de referencia para contrastarlos con las respuestas de los estudiantes, por un lado, se espera que esas respuestas puedan estar o no relacionados con las nociones especificadas y por el otro lado, que las mismas respuestas puedan relacionarse a unos comportamientos que a la vez estén implicados por las acciones mentales.

---

<sup>12</sup> Dado que es complejo que los estudiantes lleguen a un Nivel 5, en el trabajo solo se apunta a los primeros cuatro niveles.

<sup>13</sup> El concepto de situación se entiende en este trabajo como un conjunto de actividades que posibilitan la conceptualización de saberes matemáticos, articulados en un determinado contexto.



Tabla 6. Estructura general de la situación 1

| <b>Situación:</b> La covariación desde el cumpleaños de Lupe.                                                                                                                                                                                                                         |                  |                                                                                                                       |                                                                                                                                                        |                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| <b>Propósito general:</b> Movilizar algunas nociones matemáticas que subyacen al concepto de función lineal en relación las acciones mentales como aquel medio que permita clasificar los comportamientos que los estudiantes evidencien cuando aborden una situación de covariación. |                  |                                                                                                                       |                                                                                                                                                        |                   |
| Actividad                                                                                                                                                                                                                                                                             | N.º de preguntas | Propósito                                                                                                             | Nociones matemáticas                                                                                                                                   | Acciones Mentales |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 6                | Comprende la situación, reconocer la relación de dependencia entre cantidades de magnitudes y su dirección de cambio. | Relaciones de dependencia (reconocimiento de variables), Correlación directamente proporcional entre magnitudes y Magnitudes invariantes (constantes). | AM1-AM2           |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 4                | Analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación lineal.                                          | Razón de cambio, Generalización y representación tabular                                                                                               | AM1-AM3.          |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 5                | Cuantificar los cambios a partir del dominio y rango de variación.                                                    | Dominio y Rango de variación                                                                                                                           | AM1-AM4           |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 8                | Identificar la correlación inversa entre dos cantidades de magnitudes y la dirección del cambio.                      | Dominio, rango y correlación inversa.                                                                                                                  | AM1-AM2           |

**Nota.** Se tomó como principal referente la situación donde se estudia el comportamiento de una cantidad de niños que se pueden sentar frente a unas mesas que se configuran una seguida de la otra. Esta misma situación fue usada por Merino Cortés (2012) en un trabajo de investigación donde estudian los patrones y representaciones a través de una tarea de generalización.

Tabla 7. Estructura general de la situación 2

| <b>Situación:</b> La covariación desde el problema de las baldosas                                                                                                                                                                                                                    |                  |                                                                                               |                                                                                                                                                        |                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| <b>Propósito general:</b> Movilizar algunas nociones matemáticas que subyacen al concepto de función lineal en relación las acciones mentales como aquel medio que permita clasificar los comportamientos que los estudiantes evidencien cuando aborden una situación de covariación. |                  |                                                                                               |                                                                                                                                                        |                   |
| Actividad                                                                                                                                                                                                                                                                             | N.º de preguntas | Propósito                                                                                     | Nociones matemáticas                                                                                                                                   | Acciones Mentales |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 3                | Comprender la situación.                                                                      | Dominio y Rango de variación                                                                                                                           | No aplica.        |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 4                | Reconocer la relación de dependencia entre cantidades de magnitudes y su dirección de cambio. | Relaciones de dependencia (reconocimiento de variables), Correlación directamente proporcional entre magnitudes y Magnitudes invariantes (constantes). | AM1-AM2.          |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 5                | Cuantificar los cambios a partir del dominio y rango de variación.                            | Dominio de variación, Rango de variación, Relaciones de dependencia y Patrones de variación,                                                           | AM3-AM4           |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 5                | Analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación lineal.                  | Razón de cambio, Variación de cambio. Cuantificación del cambio de una variable en relación a otra y la generalización.                                | AM4               |

**Nota.** El problema de las baldosas ha sido empleado en diferentes investigaciones para abordar aspectos asociados al aprendizaje del álgebra. En este caso, aunque Pintó (2016) emplea esta misma situación teniendo como foco de atención las diferentes representaciones que logran emerger de la comprensión que hacen los estudiantes de dicho problema, para finalidades de este estudio, se toma el mismo contexto, pero se le da un matiz diferente que consiste en diseñar actividades que atiendan a la covariación en el que se cuestione sobre las diferentes nociones matemáticas preliminares al concepto de función.

### 3.4 Técnicas de recolección de datos y protocolo de aplicación

En este apartado se presentan las técnicas que permitieron recoger la información de la presente investigación. Se incluyen entre estos: la producción escrita y los registros audio visuales.

#### Producción escrita

A cada uno de los estudiantes se le suministro actividades impresas en hojas con algunas preguntas, en las cuales los estudiantes dieron respuesta de modo escrito.

#### Registros audiovisuales

Los estudiantes después de responder a las preguntas en las hojas impresas, pasaron a hacer parte de una plenaria, en la cual los estudiantes básicamente debatieron entre ellos sobre las respuestas que otorgaron con anterioridad, y teniendo en cuenta, que los sujetos de la población que se seleccionó fueron de niños entre 10 y 11 años de edad, se preveía con antelación que estos podrían expresarse mejor de una manera verbal, en comparación con la producción escrita. Por tanto, se hizo necesario tomar registro audiovisual, tanto de los discursos como también de los gestos y movimientos que estos realizaron. Cabe aclarar que, para los casos especiales, cuando se identificó un estudiante con una argumentación importante (Correcta o errónea), se hizo una entrevista con dicho sujeto con el fin de poder comprender más a fondo los factores que movilizaban tales inferencias.

Por otro lado, se tuvo en cuenta un protocolo de aplicación, que implicó trabajo grupal e individual; el uso de plenarias para cada actividad realizada y la validación de la misma.

### **Trabajo grupal e individual**

De las dos situaciones planteadas, la primera, los estudiantes la abordaron de manera individual y la segunda se hizo en parejas; cabe aclarar que en esta fase los estudiantes no interactuaban con los demás para validar respuestas.

### **Plenaria**

Al finalizar la puesta en acto de cada situación propuesta, se hizo necesario un espacio donde los estudiantes pudieran expresar lo que habían comprendido de cada una de las actividades, y de igual manera, logaran debatir con sus compañeros sobre sus posturas frente al trabajo desarrollado.

### **Validación**

Después de haber realizado la plenaria al terminar cada situación, también se llevó a cabo una puesta en común de los estudiantes con los observadores sobre las actividades desarrolladas, en la cual, dichos observadores planteaban las respuestas que se esperaban por parte de los estudiantes, con el ánimo de que los estudiantes evidenciaran posibles errores y de igual forma resolvieran interrogantes que emergieron en la realización de la situación. Todo esto con el fin, de que los estudiantes que alcanzaran un nivel específico de covariación, no suspendieran su desarrollo evolutivo a través de todos los niveles.

### 3.5 Variables de análisis

En esta parte se presentan y describen los criterios que se tienen en cuenta para realizar el análisis y la interpretación de los resultados de las actuaciones de los estudiantes. De esta manera, tales criterios fueron escogidos con base en aquellos elementos asociados con los aspectos mencionados en el capítulo 2 de la presente investigación. Así pues, dichos criterios se enmarcaron dentro de las siguientes categorías: Los aspectos matemáticos involucrados, los niveles del razonamiento covariacional (desde la perspectiva de Carlson et al 2003), el concepto de generalización, y lo curricular.

A continuación, se presenta una tabla donde se sintetizan de manera explícita las categorías y criterios de análisis para la clasificación de los resultados de los estudiantes.

*Tabla 8. Categorías y criterios de análisis*

| Numero | Categoría                                       | Criterios                                                                                                                                                                                                        |
|--------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Aspectos matemáticos involucrados               | Elementos matemáticos que subyacen al concepto de función                                                                                                                                                        |
| 2      | Razonamiento Covariacional (Carlson et al 2003) | 1. Comportamientos asociados a una acción mental específica<br>2. Acciones mentales<br>3. Niveles de Razonamiento Covariacional<br>4. Existencia de comportamientos Pseudo – analíticos.                         |
| 3      | Generalización                                  | Reconocer a través de las respuestas de los resultados algunos indicios que permitan relacionarse al proceso de generalización.                                                                                  |
| 3      | Aspectos curriculares                           | Comparación de los resultados obtenidos en la puesta en acto de las tareas, en contraste con lo estipulado en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas y los Lineamientos Curriculares de matemáticas. |
| 4.     | Propósitos de las actividades                   | Con base en las respuestas proporcionadas por los estudiantes analizar el acercamiento a los propósitos pre – establecidos de cada tarea.                                                                        |

## CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan los resultados y el análisis de los mismos, mediante una tipificación de las respuestas con el ánimo de obtener unas conclusiones generales y algunas reflexiones en torno al trabajo.

#### 4.1 Resultados y Análisis de Resultados

En esta parte, se caracterizan los resultados obtenidos en relación a los comportamientos manifestados por los estudiantes en el momento de afrontar las actividades de covariación propuestas. Dichos resultados, fueron obtenidos a través de técnicas de recolección de datos, las cuales constaban en su mayoría de producción escrita, y en algunos casos se utilizó como apoyo la videograbación para esclarecer hechos que no tuvieron contundencia en primera instancia.

Las respuestas de los estudiantes se tipificaron con base al grado de acierto o desacierto de alguna respuesta esperada. De esta manera, las preguntas de cada actividad y situación se clasificaron como R1, R2, R3...; dentro de las cuales se categorizan los porcentajes de los estudiantes que tienen respuestas con algo en común. Además de la codificación de las preguntas, también se plantearon códigos para identificar y referirse de manera sencilla a las situaciones (S1, S2, S3) y a las actividades (A1, A2, A3, A4). Es de resaltar, que esta codificación de los resultados se organizó en tablas de tres columnas donde se especificó, para cada pregunta, el tipo de respuesta, la descripción de la respuesta y la frecuencia porcentual.

##### 4.1.1 Resultados y análisis de la situación 1.

(S1) **Situación 1:** Estudio de la covariación a través de la relación de personas y mesas.

(A1) **Actividad 1:** Comprendiendo la situación

*Tabla 9. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 1 (S1A1P1)*

| (P1) <b>Pregunta 1:</b> ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 5 mesas? |                                                                                                                             |                       |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                            | Descripción de la respuesta                                                                                                 | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                           | Menciona de forma correcta qué si se juntan 5 mesas, se pueden sentar a comer 12 niños, pero no da un argumento por escrito | 100%                  |

*Tabla 10. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 2 (S1A1P2)*

| (P2) Pregunta 2: Y si tenemos 10 mesas, ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer? Explica como lo has averiguado. |                                                                                                                                 |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                               | Descripción de la respuesta                                                                                                     | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                              | Menciona que pueden sentarse 14 niños dando argumentos poco entendibles o incompletos. “Porque en los otros dos lados no caben” | 16,6%                 |
| R2                                                                                                              | De forma correcta manifiesta que se pueden sentar 22 personas, pero no dan explicación por escrito.                             | 66,6%                 |

|    |                                                                                                                                               |       |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| R3 | De forma correcta menciona que pueden sentarse 22 personas, y argumenta que a través de dibujos de la situación pudo establecer la respuesta. | 16,6% |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

---

Teniendo en cuenta la respuesta a S1A1P1 expuesta en la tabla 9, se puede observar que el 100% de los estudiantes responde de manera correcta que para 5 mesas ubicadas una seguida de la otra, se pueden sentar 12 niños. Aunque ninguno argumentó por escrito la manera en que llegó a esa respuesta, lo que también se logró observar es que el material manipulativo les fue de mucha ayuda para encontrar la respuesta como se muestra en la ilustración 4. Esto se reafirma en la plenaria, donde sus argumentos se basaban en el uso del material y el respectivo conteo de las tapitas que representaban a las personas.



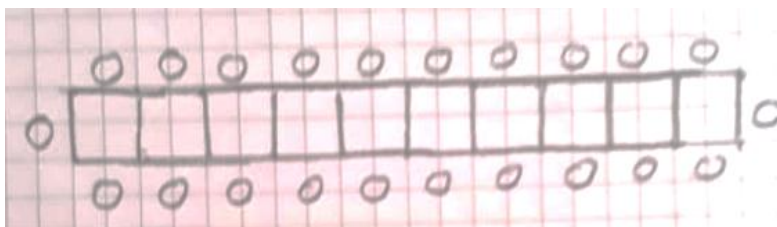
*Ilustración 4. Uso del Material Tangible para dar Respuesta a las Preguntas Iniciales.*

En relación con las respuestas S1A1P2, se observa en la tabla 10 que el 83,2% de los estudiantes responde de modo correcto, expresando de manera escrita que en 10 mesas se pueden sentar 22 niños. La diferencia entre las respuestas correctas está matizada por la forma en que expresaron el modo de llegar a la respuesta, si bien es cierto el 16,6% manifestó de forma escrita que hizo representaciones pictóricas para dar solución, el otro 66,6% aunque no lo manifestó de modo escrito, en el plenaria expresó de modo verbal que también utilizó la misma estrategia.

Los resultados anteriores, permiten afirmar que mayoría de los estudiantes comprenden el enunciado general de la situación, debido a que responden de acuerdo a lo

esperado en la interpretación de las condiciones que debían cumplir cada una de las disposiciones según la cantidad de mesas planteadas.

En el momento de la plenaria, en el cual los estudiantes validan la información y llegan a algunas conclusiones, para el estudiante que tuvo dificultades para responder a la pregunta 2, ese momento fue crucial para que en el discurso de los que mostraron las respuestas esperadas, este estudiante lograra ponerse a la par de ellos. De modo que se buscó la forma que este estudiante mostrara indicios de que sí había entendido, más específicamente, se invitó a que evidenciara de modo escrito o verbal el cómo razonaba frente a esa pregunta. Se muestra a continuación la producción del estudiante de modo escrito, en tanto a una representación pictórica que evidenció.



*Ilustración 5. Producción del Estudiante a la Pregunta 2 de la Actividad 1*

*Tabla 11. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 3 (S1A1P3)*

| (P3) Pregunta 3: Si se duplica el número de mesas, ¿Se duplica el número total de personas? Explica. |                                                                                                                                                                                                                                               |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                    | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                                                                                   | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                   | Menciona de forma incorrecta que, si se duplica el número de mesas, se duplica el número total de personas, dando argumentos poco entendibles.                                                                                                | 50%                   |
| R2                                                                                                   | De forma incorrecta manifiesta que sí se duplica el número total de personas, dando argumentos de forma errada.                                                                                                                               | 16,6%                 |
| R3                                                                                                   | De forma correcta menciona que no se duplica el número total de personas, dando como argumento que los niños que estaban sentados en los extremos, no se pueden contar al duplicar el número de mesas, pues estos deben ocupar otra posición. | 33,3%                 |

*Tabla 12. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 4 (S1A1P4)*

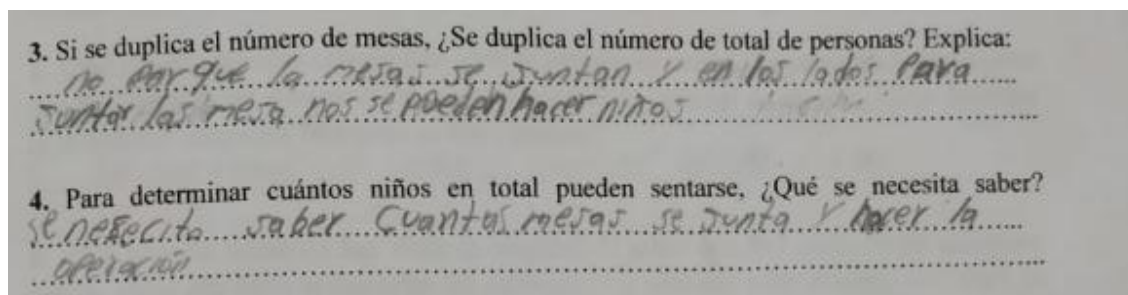
| (P4) Pregunta 4: Para determinar cuántos niños en total pueden sentarse, ¿Qué se necesita saber? |                                                                                                                                                                   |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                | Descripción de la respuesta                                                                                                                                       | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                               | Responde de forma incorrecta dando argumentos poco coherentes. "Se pueden sentarse muchos niños en las mesas"                                                     | 16,6%                 |
| R2                                                                                               | Manifiesta de forma correcta que para saber el número de niños que se pueden sentar, se necesita conocer el número de mesas, pero no da un argumento por escrito. | 83,3%                 |

De acuerdo con las tablas 11 y 12, en relación con las respuestas S1A1P3 y S1A1P4, en el primer caso el 33,3% de los estudiantes logró reconocer la variación e invariación de dos cantidades de magnitudes involucradas (número de mesas vs número de niños). Específicamente, fue necesario lo anterior para determinar si en realidad al duplicar la cantidad de mesas, también se duplicaría la cantidad de niños. No obstante, el 66,6% de los estudiantes menciona de manera escrita que, si se duplica el número de mesas, también se duplica el número de niños. La diferencia notable en estas respuestas es que el 50%, a pesar de que da explicaciones erradas, se toman como poco coherentes. Mientras que el otro 16,6% que tampoco logra acertar con sus respuestas, en sus explicaciones se hacen entender.

La respuesta esperada de S1A1P4 tiene que ver con la consideración de los cambios que se dan en la cantidad de mesas y la cantidad de niños. Esta consideración brinda la posibilidad para que los estudiantes además de reconocer esos cambios, también logren identificar la relación de dependencia que hay entre estas dos cantidades de magnitudes y de esta manera, al identificar esto, aquellos estudiantes puedan clasificarse dentro de los que respondieron de manera correcta.

En concordancia con lo anterior, según los tipos de respuestas a la pregunta S1A1P4, en la tabla 12, se puede afirmar que el 83,3% de los estudiantes vislumbra elementos básicos de la respuesta esperada, contrario a lo que sucede con el 16,6% que responden de manera incorrecta dando argumentos poco coherentes.

De acuerdo con las respuestas de S1A1P3 y S1A1P4, podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes considera cambios que se dan en la cantidad de mesas y la cantidad de niños. Se muestra a continuación la producción de un estudiante en particular, en tanto a lo que logro evidenciar de modo escrito.



*Ilustración 6. Producción de un Estudiante a la Pregunta 3 y 4 de la Actividad 1*



Los estudiantes lograron identificar el cambio de magnitudes en cada una de las disposiciones de la cantidad de mesas vs cantidad de personas; todo esto mientras observaban la variación de la cantidad de niños cada vez que adicionaban una mesa más. La exploración con el material concreto o tangible permitió que con la facilidad de manipular las piezas elaboradas (mesas), se pudiera hacer mayor seguimiento a las magnitudes que variaban, esto se hizo evidente en la socialización de la tarea. Aunque los estudiantes en su mayoría logran reconocer esa relación de dependencia entre las magnitudes involucradas, tal reconocimiento no es tan profundo, pues, la mayoría no logra sustentar de manera que correcta que el hecho de duplicar el número de mesas, no necesariamente implica que se duplique la cantidad de personas. Sin embargo, en la plenaria se buscó que los estudiantes que si habían presentado una respuesta acertada, les explicaran a sus demás compañeros el porqué de sus respuestas.

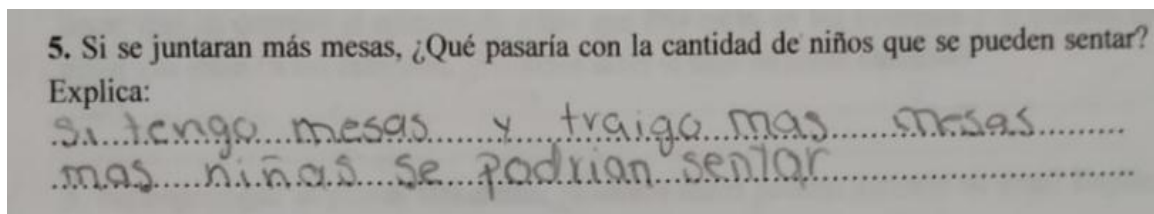
*Tabla 13. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 5 (S1A1P5)*

| (P5) Pregunta 5: Si se juntaran más mesas, ¿Qué pasaría con la cantidad de niños que se pueden sentar? Explica. |                                                                                         |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                               | Descripción de la respuesta                                                             | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                              | Da una respuesta incorrecta con argumentos poco entendibles.                            | 16,6%                 |
| R2                                                                                                              | Da una respuesta un poco acertada, con argumentos poco entendibles.                     | 16,6%                 |
| R3                                                                                                              | Manifiesta de forma correcta que si se juntan más mesas, el número de niños aumentaría. | 66,6%                 |

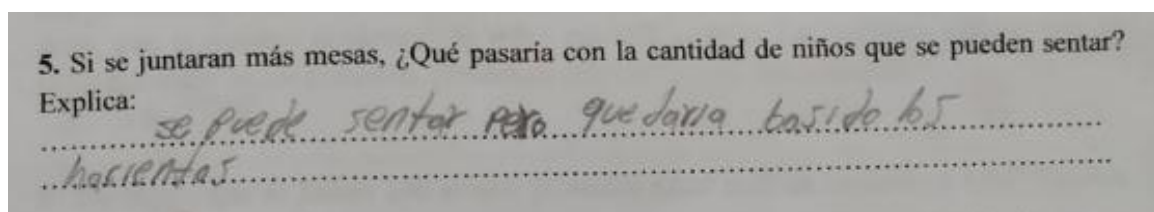
*Tabla 14. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 1 pregunta 6 (S1A1P6)*

| (P6) Pregunta 6: ¿Qué sucede con el número de niños que se sientan en los extremos de la fila de mesas, cada que se juntan más de estas? Explica. |                                                                                                                                                      |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                 | Descripción de la respuesta                                                                                                                          | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                | Manifiesta una respuesta incorrecta, dando argumentos muy poco entendibles.                                                                          | 33,3%                 |
| R2                                                                                                                                                | Responde de forma incorrecta dando como argumento, que, al aumentar el número de mesas, el número de niños que están a los extremos también aumenta. | 16,6%                 |
| R3                                                                                                                                                | Da una respuesta correcta, manifestando que la cantidad de niños en los extremos no varía, son 2, sin importar cuantas mesas se junten.              | 50%                   |

De acuerdo con la tabla 13, el 83,2 % de los estudiantes, describen correctamente lo que pasaría con la cantidad de niños si se juntaran más mesas. Entre tanto, el 16,6% responden de manera incorrecta. En las siguientes ilustraciones se muestra un ejemplo para los que respondieron del modo esperado y otro en el caso contrario.

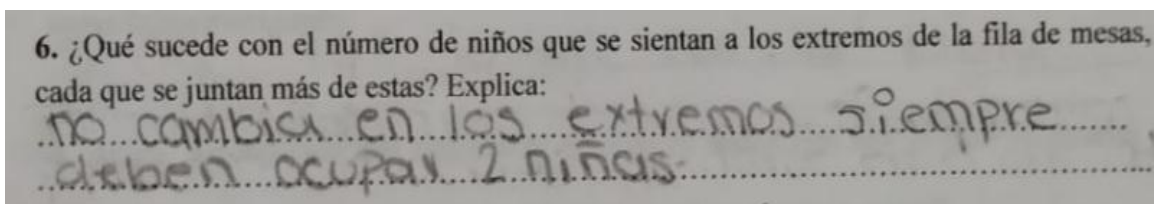


*Ilustración 7. Estudiante que Presentó una Respuesta Esperada.*

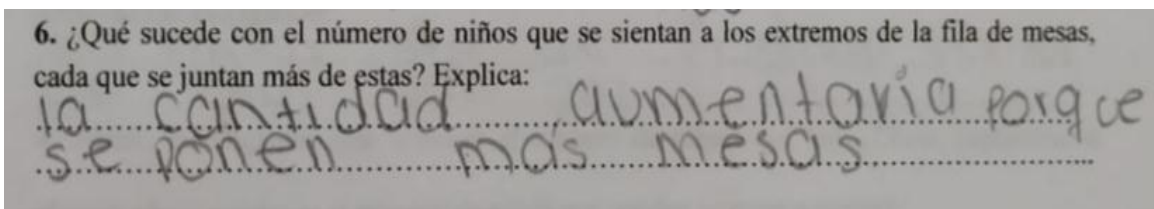


*Ilustración 8. Estudiante que Presentó una Respuesta no Esperada.*

Observando la tabla 14, sólo el 50,0 % respondió de forma correcta, en otras palabras, reconoció la naturaleza constante de la cantidad de niños que se sientan en los extremos de la fila de mesas respecto al cambio que se da en el número de mesas a medida que se adicionaba una más. Mientras la otra parte de estudiantes (50%) no reconocieron que la cantidad de niños que se sientan en los extremos permanece invariante sin importar el cambio de la totalidad de las mesas. En las siguientes ilustraciones se muestran dos ejemplos, uno para los que respondieron de modo correcto y otro para el caso contrario.



*Ilustración 9. Estudiante que Reconoce la Cantidad Invariante*



*Ilustración 10. Estudiante que no Reconoce la Cantidad Invariante*

Conforme a las últimas dos tablas, que dan cuenta de las preguntas 5 y 6 de la actividad 1, se puede afirmar que para la pregunta 5 la mayoría de los estudiantes no tuvo dificultad para reconocer la dirección de cambio que se da entre las dos cantidades de magnitudes involucradas, precisamente porque mencionan que al “traer más mesas, más niños se pueden sentar”. Sin embargo, para la pregunta 6 que en lo escrito supuso gran dificultad para la mayoría, fue crucial la plenaria para que estos tuvieran un acercamiento a lo esperado, es decir, reconocieran que así la cantidad de mesas aumentarían o disminuirían, la cantidad de niños en los extremos se mantendría en un único valor numérico.

(S1) **Situación 1:** Estudio de la covariación a través de la relación de personas y mesas.

(A2) **Actividad 2:** Reconocer dependencia entre variables y generalización.

*Tabla 15. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 1 (S1A2P1)*

| (P1) Pregunta 1: De acuerdo a las imágenes presentadas con anterioridad completa la siguiente tabla (ver ilustración 10). |                                                                                          |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                         | Descripción de la respuesta                                                              | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                        | Completa la tabla en su totalidad, de forma correcta en cada una de las columnas.        | 66,6%                 |
| R2                                                                                                                        | Completa la tabla en su totalidad, pero ingresa algunos datos en ésta de manera errónea. | 33,3%                 |

| Número de mesas juntadas | Cantidad de niños que NO están en los extremos | Número de niños sentados a los extremos. | Total de niños sentados |
|--------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------|
| 1                        |                                                |                                          | 4                       |
|                          | 4                                              | 2                                        | 6                       |

*Ilustración 11. Cantidades relacionadas en la situación*

*Tabla 16. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 2 (S1A2P2)*

| P2) Pregunta 2: ¿Qué relación numérica encuentras entre el número de mesas y la cantidad de estudiantes que NO están en los extremos? Es decir, si conoces la cantidad de mesas, ¿Cómo hallarías la cantidad de niños que NO están en los extremos? |                                                                                                                               |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                                   | Descripción de la respuesta                                                                                                   | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                                                  | Manifiesta de manera correcta, que la cantidad de niños que no están en los extremos, equivalen al doble del número de mesas. | 83,3%                 |
| R2                                                                                                                                                                                                                                                  | Responde de manera incorrecta, presentando argumentos poco entendibles.                                                       | 16,6%                 |

*Tabla 17. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 3 (S1A2P3)*

| (P3) Pregunta 3: ¿Qué relación numérica hay entre la cantidad de niños que <b>NO</b> están en los extremos, con los niños que están sentados en los extremos y la cantidad total de niños sentados? Es decir, que, si conoces el número de niños que <b>NO</b> están en los extremos y el número de niños que están en los extremos, ¿Podemos saber el total de niños sentados? |                                                            |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Descripción de la respuesta                                | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Responde de manera incorrecta, con escritos algo confusos. | 100%                  |

*Tabla 18. Tipos de respuestas a la situación 1 actividad 2 pregunta 4 (S1A2P4)*

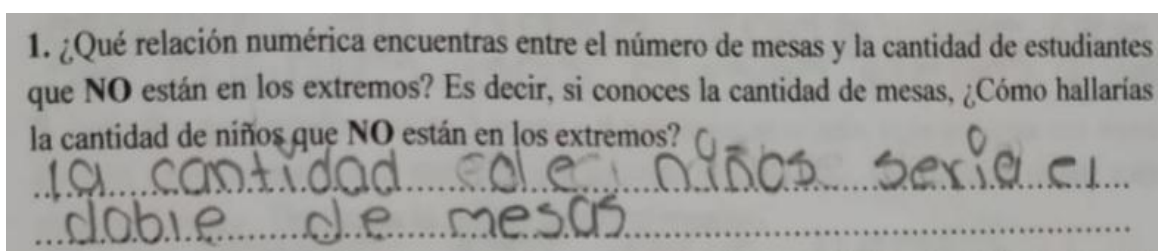
| (P4) Pregunta 4: Supóngase que se juntan 100 mesas, ¿Cuántos niños podrían sentarse en total? Explica como lo has averiguado: |                                                                                                                                                                                               |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                             | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                                   | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                            | Responde de manera correcta, que se pueden sentar 202 niños, argumentando su respuesta mediante un conteo a partir de visualizaciones o representaciones en términos de la cantidad de mesas. | 50%                   |
| R2                                                                                                                            | Da una respuesta correcta, diciendo que se pueden sentar 202 niños, pero no lo argumenta de manera escrita.                                                                                   | 50%                   |

*Tabla 19. Tipos de respuestas situación 1 actividad 2 pregunta 5 (S1A2P5)*

| (P5) Pregunta 5: Ahora, supongamos que conoces el número de mesas que hay ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de niños que pueden sentarse a comer? |                                                                                              |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                    | Descripción de la respuesta                                                                  | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                   | Da una respuesta incorrecta, argumentando la misma de una manera poco coherente.             | 66,6%                 |
| R2                                                                                                                                                                   | Manifiesta de manera correcta, expresando algunas estrategias que no se toman como absurdas. | 33,3%                 |

De acuerdo con la tabla 15, se puede afirmar que el 100% de los estudiantes logró completar la tabla. De este grupo, sólo el 66,6% de los estudiantes la completó de manera correcta. Contrario a lo que sucedió con el 33,3% que, pese al hecho de haberla llenado, presentaba unos pocos datos que no guardaban coherencia; por ejemplo, hubo un estudiante en el que su error predominó en la columna numero 2 (cantidad de niños que NO están en los extremos), tal pareciera que reconoció que esa magnitud tenía cambios a medida que cambiaba el número de mesas juntadas, pero en la cuantificación presentó los errores. Otro estudiante tuvo un error similar, sólo que este se presentó en la primera columna (número de mesas juntadas), lo que ocasionó que las otras magnitudes que dependían de ella las presentara en la tabla de modo errado.

Conforme a la tabla 16, se puede decir que el 83,3% de los estudiantes reconoce que hay un cambio en la cantidad de niños que no se ubicaban en los extremos cuando la cantidad de las mesas juntas variaba, además de ello, describen de manera cuantitativa la relación entre esas dos cantidades, en otras palabras, que la cantidad de niños que no estaban en los extremos equivalen al doble del número de mesas. Mientras que el otro estudiante que representa el 16,6%, menciona de modo escrito una respuesta que no se toma como correcta, dado que pareciera ser que las dos magnitudes las estuviera comparando con otra. A continuación, se muestra una ilustración que alude a un tipo de respuesta que se considera correcta.



*Ilustración 12. Estudiante que Reconoce una Relación Numérica Correcta*

De acuerdo a lo anterior, al ser la tabla un insumo para que los estudiantes pudieran dar respuesta a S1A2P2, se observó que la mayoría de los estudiantes presentaron comportamientos que daban indicios de estar comprometidos en un razonamiento covariacional. Esto es, llenaron la tabla del número de mesas juntadas y de la cantidad de niños que NO estaban sentados en los extremos y con esto dieron la impresión de haber establecido algunas relaciones de tipo covariacional entre estas magnitudes.

La indagación posterior en la plenaria, permitió ratificar lo que se había observado, debido a que en las respuestas expresaban una opinión acerca de la relación de dependencia que tenía la segunda columna frente a la primera (cada dato numérico que colocaban en la segunda columna era el doble del dato numérico que se encontraba en la primera columna); tal como se puede evidenciar en el siguiente dialogo:

**Profesor:** [...] ¿Cómo hiciste para hallar la cantidad de niños que NO estaban sentados en los extremos?

**Estudiante:** Yo vi que la cantidad de niños cada vez era el doble de mesas.

**Profesor:** ¿Qué pasaba con la cantidad de niños que NO estaban sentados en los extremos cuando el número de mesas aumentaba?

**Estudiante:** Profe también aumentaba.

La anterior justificación brindada por el estudiante, da cuenta de cómo en un primer momento observó la relación de dependencia que había entre la magnitud de la segunda columna con la magnitud de la primera columna, hasta el punto de expresar que los datos en segunda columna eran el doble de los datos que estaban en la primera.

Se pudo percibir entonces, que el estudiante al observar las dos magnitudes, las asumió de manera conjunta. Inicialmente, al comparar las dos magnitudes, identificó que los datos que deberían ir en la segunda columna eran el doble de los datos que iban en la primera columna, lo que le permite terminar la tabla. De esta manera, el estudiante establece relaciones entre ambas magnitudes.

Lo anterior, da cuenta de cómo los estudiantes hicieron un reconocimiento de un patrón aritmético estableciendo una asociación entre las dos magnitudes, lo que los llevó a identificar cambios en cada columna, advirtiendo una relación entre estas magnitudes, sin tomarlas como cuestiones aisladas.

En la presente ilustración se muestra la manera de razonar descrita anteriormente con el fin de dar mayor claridad:

**ACTIVIDAD 2: Reconocer dependencia entre variables y generalización**

1. De acuerdo a las imágenes presentadas con anterioridad completa la siguiente tabla:

| Número de mesas juntas | Cantidad de niños que NO están en los extremos | Número de niños sentados a los extremos. | Total de niños sentados |
|------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------|
| 1                      | 2                                              | 2                                        | 4                       |
| 2                      | 4                                              | 2                                        | 6                       |
| 3                      | 6                                              | 2                                        | 8                       |
| 4                      | 8                                              | 2                                        | 10                      |
| 5                      | 10                                             | 2                                        | 12                      |
| 6                      | 12                                             | 2                                        | 14                      |
| 7                      | 14                                             | 2                                        | 16                      |

*Ilustración 13. Reconocimiento de Patrón Aritmético.*

De la tabla 17, se puede decir que el 100% de los estudiantes no manifiesta de manera escrita respuestas en las que se logre evidenciar que comprenden que la cantidad total de los

niños se puede obtener al sumar la cantidad de niños que **NO** están en los extremos (cantidad que varía) y la cantidad de niños que **SÍ** lo están (cantidad que permanece constante). Esto precisamente, porque el enunciado de la pregunta se presentó de manera extensa y de un modo redundante, de tal manera que en la plenaria con ánimo de contrarrestar la complejidad que presentó la pregunta en su modo escrito, se dio un escenario de interacción entre el profesor y los estudiantes a través de preguntas auxiliares ; teniendo como foco de atención la tabla que habían llenado y que explicaran cómo habían llenado la última columna, para efectos de hacerles caer en cuenta que eso era lo que se había querido preguntar. Esto se puede evidenciar en el siguiente dialogo:

**Profesor:** [...] Ahora miremos la pregunta número tres [señala la pregunta en imagen proyectada y dirige la mirada a los niños], quiero que me cuenten ¿qué fue lo que respondieron?

**Estudiantes:** [La mayoría responde] profe esa pregunta yo no la entendí.

**Profesor:** Veamos entonces que fue lo que no entendieron. Estudiante A, cuéntanos ¿Qué fue lo que no entendiste?

**Estudiante:** [Responde mirando al profesor] eso está muy largo.

**Profesor:** [Se dirige a todos], hay alguien ¿que no haya entendido por otra razón?

**Estudiantes:** [Se quedan todos en silencio]

**Profesor:** Bueno, para dar respuesta a esta pregunta vamos a ver qué nos quería decir [se dirige a todos]. Vamos a la tabla anterior y veamos ¿cuántas columnas tiene?

**Estudiantes:** [responde la mayoría] tiene 4 profe.

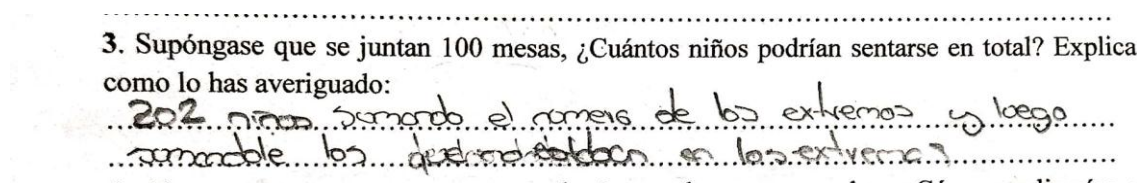
**Profesor:** Listo, miremos solo la última, la que dice total de niños sentados, ¿Cómo hicieron para llenarla?

**Estudiante A:** [Responde el estudiante A] profe ahí colocamos el resultado de lo que daba en la segunda columna y en la tercera.

Se considera que en este contacto de intercambio de discursos entre el profesor y los estudiantes, la mayoría logra comprender lo que se pretendía. En ese caso específico, es bastante notable la importancia del discurso, debido a que se logra inferir que ellos no habían dado las respuestas escritas que se esperaban, porque la pregunta refleja inconvenientes de orden sintáctico que se traducen en el exceso de palabras que lo hacen extenso.

De acuerdo con los tipos de respuesta a la pregunta S1A2P4 expuestos en la tabla 18, se puede evidenciar cómo el 100% de los estudiantes logró dar la respuesta correcta, expresando de modo escrito que al juntarse 100 mesas se pueden sentar 202 niños. La diferencia radica en la forma en que presentaron la respuesta, debido a que el 50% manifestó que usó estrategias como el uso de suma y multiplicación, el otro 50% aunque no lo evidenció de modo escrito, en la plenaria manifestaron el uso de la misma estrategia.

Frente a esta pregunta (S1A2P4), el 100% de los estudiantes, a partir de su respuesta, indica que su razonamiento al comparar las dos magnitudes (cantidad de mesas vs cantidad de niños), es mediante una relación de correspondencia. En otras palabras, ellos hallan una regla que les permite asociar a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente. La siguiente ilustración da cuenta de la predominancia de la relación de correspondencia.



*Ilustración 14. Respuesta de un estudiante en S1A2P4.*

En la ilustración 14 el estudiante considera que debe sumar el número de niños que están en los extremos, es decir, la cantidad que por el lado izquierdo es 1 y por el lado derecho es también 1. Seguidamente, a ese resultado le suma el otro que se obtiene de los niños que no están en los extremos, es decir 100 por la parte inferior y los otros 100 por la parte superior, para un total de 202.

Junto con las respuestas escritas en la hoja de trabajo del estudiante, en la plenaria fuera de la estrategia descrita anteriormente, otros estudiantes manifiestan haberse ayudado con la tabla, precisamente porque ya habían encontrado una regla que les permitía hallar la respuesta y que se podía verificar mediante la tabla.

La tabla 19 expone los tipos de respuesta para la pregunta S1A2P5, y de acuerdo a lo expuesto, se puede observar cómo el 66,6% de los estudiantes da una respuesta incorrecta. Esto implica que el 33,3% de ellos, plantea estrategias que se toman como correctas, pero no son las esperadas. Debido a que se pretendía que ellos expresaran de modo escrito una regla



que generalizara la situación; en la siguiente ilustración se muestra la respuesta que dio un estudiante en particular.

4. Ahora, supongamos que conoces el número de mesas que hay ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de niños que pueden sentarse a comer?

le explicaría con dibujos o con fichas

Ilustración 15. Respuesta de un estudiante en S1A2P4.

Si bien es cierto, en las respuestas escritas ninguna muestra una generalización correcta de la situación planteada. En la plenaria, fue de suma importancia retomar la pregunta y reformularla en otras palabras para que se entendiera mejor por los estudiantes, debido a que no se entendía por qué no habían respondido del modo esperado, cuando en la pregunta S1A2P3, a pesar de que se les preguntaba por un caso particular, mostraban indicios de estar comprometidos con el hecho de descubrir una regla que generalizara la situación. Tanto, que al darse cuenta de lo que se les preguntaba, en el dialogo los estudiantes justificaron sus respuestas con expresiones como:

“El número de mesas las multiplico por dos y a lo que me dé le sumo dos”

“Para saber el número de niños, sumo los que se hacen arriba y abajo y a lo que me dé le sumo los dos de los lados”

(S1) **Situación 1:** Estudio de la covariación a través de la relación de personas y mesas.

(A3) **Actividad 3:** Razón de cambio

Tabla 20. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 1 (S1A3P1)

| P1) Pregunta 1: Dadas las condiciones de la situación, y si estas se mantienen, ¿es posible que haya 7 personas sin que sobre o quede algún asiento vacío? |                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                          | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                                                                                                                                          | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                         | Presentan una respuesta parcialmente correcta, mencionando por un lado que si es posible, olvidándose de una de las condiciones iniciales (no puede quedar un asiento vacío). Por el otro lado, admiten que mediante esta cantidad sobraría un asiento, como un aspecto que se esperaba que notaran. | 50%                   |
| R2                                                                                                                                                         | Mencionan de forma correcta que con una cantidad de 7 personas no es posible que se ocupen todos los asientos, pues en este caso quedaría un asiento vacío.                                                                                                                                          | 50%                   |

*Tabla 21. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 2 (S1A3P2)*

| (P2) Pregunta 2: ¿Cuántas mesas crees que se podrían juntar en total? |                                                                                          |                       |
|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                     | Descripción de la respuesta                                                              | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                    | Responde de manera correcta, dando a entender que el número de mesas puede ser infinito. | 16,6%                 |
| R2                                                                    | Menciona de forma correcta que el número de mesas son “muchas”, mas no lo argumenta.     | 33,3%                 |
| R3                                                                    | Especifica una respuesta incorrecta fuera del contexto de la pregunta.                   | 50%                   |

*Tabla 22. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 3 (S1A3P3)*

| (P3) Pregunta 3: Suponiendo que se ha juntado un número muy grande de mesas, ¿Cuántos niños crees que se podrían sentar? |                                                                                                                        |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                        | Descripción de la respuesta                                                                                            | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                       | Menciona de manera correcta que, podrían sentarse muchos niños, teniendo en cuenta su relación con el número de mesas. | 33,3%                 |
| R2                                                                                                                       | Da una respuesta acertada, diciendo que pueden sentarse muchos niños, pero no argumenta su respuesta por escrito.      | 66,6%                 |

De acuerdo con la tabla 20, en relación a las respuestas a la pregunta S1A3P1, el 50% de los estudiantes logró reconocer de manera implícita el rango de la función que modela a S1, al inferir que, si se sientan 7 personas, queda un asiento vacío en las mesas y por ende no se cumplen las condiciones de la situación. Por otra parte, el otro 50% de los estudiantes reconoce que al sentarse solo 7 niños en las mesas quedaría un asiento vacío, más no identifica la importancia de esta implicación de acuerdo con las condiciones de la situación.

1. Dadas las condiciones de la situación, y si estas se mantienen, ¿es posible que haya 7 personas sin que sobre o quede algún asiento vacío?  
 No porque en una mesa caben 7  
 4 y en los 6 y 3 mesa cabe 7 y sobra 1

*Ilustración 16. Respuesta de un estudiante en S1A3P1.*

La anterior ilustración, es un tipo de respuesta correcta que pertenece al 50% de los estudiantes que argumentaron de manera escrita. En este caso se puede apreciar que el estudiante expone las cantidades de la variable independiente y de la variable dependiente, hasta llegar al número de mesas en el que se pueden sentar los 7 niños y hace evidente el hecho de que queda un asiento vacío. En relación con esto, dentro de la plenaria se obtuvieron

los siguientes protocolos que ratifican la comprensión de los estudiantes frente a dicha pregunta:

**Profesor:** [...] *¿Cómo llegaste a esta respuesta?*

**Estudiante A:** *Profe, es que con las fichas miré que en 1 mesa caben 4 niños, en 2 mesas caben 6, en 3 caben 8 niños, o sea que me sobra un asiento, pero esto no puede pasar porque todos los puestos tienen que ser ocupados.*

Por otra parte, la respuesta esperada en S1A3P2 implica la consideración de una cantidad indefinida en relación al número de mesas que se pueden juntar en total. Esta consideración abre la posibilidad para que los estudiantes tengan un acercamiento implícito más aproximado a lo que sería las nociones de dominio y rango de una de una función.

En concordancia con lo anterior, según los tipos de respuestas a la pregunta S1A3P2, en la tabla 21, se puede afirmar que el 50% de los estudiantes contempla los elementos básicos de la respuesta esperada, de los cuales el 16,6% argumenta de manera escrita su respuesta, mientras que el 33,3% solo da una respuesta que hace referencia a “muchas mesas”. De otro lado, el otro 50% de los estudiantes respondieron de una manera poco entendible, dando respuestas inconclusas.

En correspondencia a S1A3P2, dentro de la realización de la plenaria los estudiantes que hacen parte del 33,3% que no argumenta su respuesta de manera escrita, estos lo hacen de forma oral en su totalidad, a continuación, se puede evidenciar un caso donde un estudiante argumenta de esta forma:

**Profesor:** [...] *Niños, ¿cuándo ustedes dicen “bastantes mesas” a que se refieren?*

**Estudiante E:** *Profe pues a que se podrían juntar muchas mesas en total*

**Profesor:** *¿Y cuántas son “muchas mesas”?*

**Estudiante E:** *No se sabría profe, porque no nos dicen en la pregunta un número*

**Profesor:** *¿En algún momento pararíamos de juntar mesas?*

**Estudiante E:** *No profe, yo creo que son infinitas*

Ahora bien, en las respuestas de S1A3P3 expuestas en la tabla 22, se puede apreciar que el 33,3% de los estudiantes reconoce la relación de dependencia que hay entre la cantidad de mesas y la cantidad de niños que asisten a la fiesta y, por ende, infieren que, si hay muchas mesas, también habría muchos niños para sentarse. A continuación, se puede apreciar algunas respuestas pertenecientes a este 33,3% de estudiantes:

3. Suponiendo que se ha juntado un número muy grande de mesas, ¿Cuántos niños crees que se podrían sentar?

no se subría la cantidad pero podrían sentar muchos

*Ilustración 17. Respuesta de un estudiante en S1A3P3.*

De otro lado, el otro 66,6% de los estudiantes dieron una respuesta acertada en la que se asume el hecho de que reconocen el cambio que hay en la cantidad los niños, sin embargo, estos dan una respuesta sin argumentos de manera escrita, por lo que la plenaria fue determinante para entender un poco las respuestas de ellos. Dentro del proceso de la plenaria, el 100% de los estudiantes argumentaron de manera oral sus respuestas, dando como que resultado que en su totalidad todos reconocían los cambios teniendo en cuenta la relación de dependencia entre el número de mesas y el número de niños.

Los resultados anteriores, permiten afirmar que la mayoría de los estudiantes reconoce de manera implícita las propiedades de la función que modela a S1, dando indicios aproximados de reconocimiento del dominio y rango, además de también reconocer de manera tácita la noción de infinito en relación a estos dos conceptos. Es de resaltar, que la gran mayoría de los estudiantes también tuvo la capacidad de reconocer los cambios en las dos cantidades de magnitudes y la relación de dependencia que estas mantienen.

*Tabla 23. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 4 (S1A3P4)*

| (P4) Pregunta 4: Cada que se junta una mesa a la fila, ¿Cuántos niños más se pueden sentar? ¿Sucede lo mismo cada que se junta una mesa de más? |                                                                                                                                                                          |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                               | Descripción de la respuesta                                                                                                                                              | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                              | Menciona y argumenta de manera correcta que, cada que se junta una mesa a la fila, se pueden sentar 2 niños más.                                                         | 16,6%                 |
| R2                                                                                                                                              | Da una respuesta en la que reconoce el aumento de la cantidad de niños al juntar una mesa, mas no cuantifica el cambio.                                                  | 33,3%                 |
| R3                                                                                                                                              | Da una respuesta incorrecta en la cual, aunque reconoce el aumento en la cantidad de niños cada que se junta una mesa, se equivoca al decir que aumenta en 3 individuos. | 50%                   |

*Tabla 24. Tipos de respuestas situación 1 actividad 3 pregunta 5 (S1A3P5)*

| (P5) Pregunta 5: Juan dice que cuando se tiene 3 mesas y 9 mesas por otro lado, si se aumenta una mesa en cada caso, la cantidad de personas que aumenta en cada caso, será distinta, siendo más en la de 9 mesas. Determina la validez de esta afirmación. |                             |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                                           | Descripción de la respuesta | Frecuencia porcentual |

|    |                                                                                                                                              |       |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| R1 | Determina que la respuesta es falsa, argumentando que si se junta una mesa más, el número de niños en cada caso aumenta en 3 individuos.     | 66,6% |
| R2 | Menciona que la afirmación es falsa, argumentando que si se junta una mesa más, la cantidad de niños aumenta en 2 individuos para cada caso. | 16,6% |
| R3 | Menciona de manera incorrecta que la cantidad de niños se mantiene constante para ambos casos, si se junta una mesa más.                     | 16,6% |

Teniendo en cuenta la tabla 23, se puede observar que en S1A3P4 el 100% de los estudiantes reconoce que cada que se junta una mesa a la fila de mesas, hay un aumento en la cantidad de niños que se pueden sentar, pero solo el 16,6% de los estudiantes reconoce el cambio y, además, lo cuantifica de forma correcta diciendo que por cada mesa que se junta aumentan 2 niños:

4. Cada que se junta una mesa a la fila, ¿Cuántos niños más se pueden sentar? ¿Sucede lo mismo cada que se junta una mesa de más?

en dos mesas caben 6 y si ponen otra mesa me caben 8 niños y me aumentan 2 niños

*Ilustración 18. Respuesta de un estudiante en S1A3P4.*

El otro 50% de los estudiantes, dieron una respuesta en la que reconocen que hay un cambio, más no argumentan de manera escrita como son dichos cambios. Y finalmente, el 33,3% restante de los estudiantes reconocen el cambio, pero lo cuantifican de forma errada, dando como respuesta que cada que se aumenta una mesa, aumentan 3 niños.

Cabe aclarar que dentro de la plenaria los estudiantes que no habían precisado o argumentado su respuesta en términos de la cuantificación de los cambios (33,3% de los educandos) proporcionaron un discurso en el que dan a entender que cada que se junta una mesa, aumentan dos niños. Por otro lado, los estudiantes que cuantificaron los cambios de forma errada de forma errada (50%), no reconocieron su error sino hasta la validación donde los investigadores explicaron S1A3P4.

Observando las respuestas de S1A3P5 en la tabla 24, se puede inferir que el 16,6% de los educandos logró reconocer que los cambios serán iguales cada que se junte una mesa sin importar la cantidad de mesas que ya estén en fila, dichos estudiantes argumentaron que para cada caso se podrían sentar 2 niños más. Por otra parte, el 66,6% de los estudiantes reconoció que en ambos casos la cantidad de niños que aumentaría sería igual, sin embargo, este porcentaje de estudiantes cuantifico de manera errada los cambios, diciendo que

aumentarían en 3 niños para cada fila de mesas respectivamente, tal como se puede apreciar en la siguiente imagen:

5. Juan dice que cuando se tiene 3 mesas y 9 mesas por otro lado, si se aumenta una mesa en cada caso, la cantidad de personas que aumenta en cada caso, será distinta, siendo más en la de 9 mesas. Determina la validez de esta afirmación.  
*es falso porque llegan 3 y si sea menor o mayor  
si aumentamos una mesa*

*Ilustración 19. Respuesta de un estudiante en S1A3P5.*

Y finalmente, el otro 16,6% de los estudiantes no reconoce que haya un cambio al juntar una mesa más, y por ende al no reconocer un cambio, tampoco lo cuantifica.

Los resultados expuestos anteriormente de S1A3P4 y S1A3P5, permiten afirmar que la gran mayoría de los estudiantes lograron reconocer los cambios en las variables, y de igual forma también estuvieron en la capacidad de cuantificar los cambios de manera correcta para cada caso. También es de gran importancia reconocer que un gran porcentaje de los estudiantes pudieron hallar de manera implícita la razón de cambio de la función que modela a S1, en el momento que son capaces de distinguir que cada que aumenta en 1 el número de mesas, el número de estudiantes aumentara en 2.

Ahora bien, en la plenaria de S1A3P5, del 66,6% de los estudiantes que reconocieron los cambios en las dos variables, más no cuantificaron bien dichos cambios; solo el 16,6% de esta población se dio cuenta de su error, tal como se puede ver a continuación:

**Profesor:** ¿Por qué dices que la cantidad de niños que aumenta son 3?

**Estudiante A:** Porque en una mesa se pueden sentar 4 niños, y si tenemos 2 mesas se pueden sentar 7 con el que se sienta en el extremo.

**Profesor:** Toma las fichas y realiza lo que me acabas de explicar. ¿Cuántos se pueden sentar en una mesa?

**Estudiante A:** 4 profe

**Profesor:** Ahora, junta una mesa más y dime cuantos se pueden sentar en 2 mesas.

**Estudiante A:** 6 profe

**Profesor:** Entonces, ¿Por qué decías que eran 7 niños?

**Estudiante A:** No profe, sino que yo estaba contando el del extremo, pero no es posible que en medio de las mesas se sienta alguien.

Por otra parte, el 100% de la población de los estudiantes no respondió la segunda pregunta que se presentaba en S1A3P4 (¿Sucedo lo mismo cada que se junta una mesa de más?), pero en la plenaria, el 83,3% de los estudiantes coincidieron en que cada que se junta una mesa hay una variación en la cantidad de niños que se pueden sentar. De los cuales, el 33,3% de los estudiantes reconoció correctamente que aumentarían 2 niños cada que se juntaran mesas, mientras que el otro 50% concluyo que los cambios serian de 3 niños. El 16,6% restante de la población total de los estudiantes se centró en su respuesta de que las cantidades se mantenían constantes.

(S1) **Situación 1:** Estudio de la covariación a través de la relación de personas y mesas.

(A4) **Actividad 4:** Correlación inversa y dependencia de variables.

*Tabla 25. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 1 (S1A4P1)*

| (P1) Pregunta 1: Completa los datos que faltan en la tabla. |                                                                                     |                       |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                           | Descripción de la respuesta                                                         | Frecuencia porcentual |
| R1                                                          | Completa la tabla en su totalidad, de forma correcta en cada una de las columnas.   | 50%                   |
| R2                                                          | Completa la tabla en su totalidad, pero presentan algunos errores al diligenciarla. | 33,3%                 |
| R3                                                          | No completa la tabla en su totalidad.                                               | 16,6%                 |

*Tabla 26. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 2 (S1A4P2)*

| (P2) Pregunta 2: Describe ¿cómo varían o cambian las cantidades de la columna <b>Número de mesas ocupadas</b> ? |                                                                                                   |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                               | Descripción de la respuesta                                                                       | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                              | Manifiesta de forma correcta que las cantidades de dicha columna aumentan de 1 en 1.              | 50%                   |
| R2                                                                                                              | Menciona de manera correcta que la cantidad aumenta, pero no describe el cambio de forma escrita. | 16,6%                 |
| R3                                                                                                              | Proporciona una respuesta incorrecta, con un argumento poco comprensible.                         | 33,3%                 |

*Tabla 27. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 3 (S1A4P3)*

| (P3) Pregunta 3: Ahora describe ¿cómo cambian las cantidades de la columna “ <b>Número de mesas desocupadas</b> ”? |                                                                                                                |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                  | Descripción de la respuesta                                                                                    | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                 | Menciona de forma correcta que la cantidad de mesas disminuye de forma constante de 1 en 1.                    | 33,3%                 |
| R2                                                                                                                 | Responde de manera acertada que la cantidad de mesas disminuyen, pero no describen el cambio de forma escrita. | 33,3%                 |

|    |                                                                  |       |
|----|------------------------------------------------------------------|-------|
|    | Manifiesta de forma incorrecta que la cantidad de mesas aumenta. | 16,6% |
| R3 | No proporciona una respuesta.                                    | 16,6% |

*Tabla 28. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 4 (S1A4P4)*

| (P4) Pregunta 4: ¿Cómo cambian las cantidades de la columna “Número de niños que llegan”? |                                                                                              |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                         | Descripción de la respuesta                                                                  | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                        | Proporciona una respuesta donde reconoce que hay un cambio, pero su argumento es incorrecto. | 33,3%                 |
| R2                                                                                        | Manifiesta que las cantidades varían aumentando de 2 en 2                                    | 66,6%                 |
| R3                                                                                        | Menciona que las cantidades varían de 2 en 2, pero su argumento es incorrecto.               | 16,6%                 |

De acuerdo con la tabla 25, en relación con las respuestas a la pregunta S1A4P1, el 50% de los estudiantes pudo completar la tabla de forma satisfactoria, relacionando cada una de las columnas de las tablas para poner los valores acertados y teniendo clara la forma en como variaba cada columna. Mientras que el 33,3% de los estudiantes, aunque completaron la tabla en su totalidad, tuvieron dificultades en el momento de observar cómo variaban las cantidades de magnitudes en las columnas y por ende colocaron valores errados. De igual forma, el 16,6% de los educandos tuvieron problemas para reconocer los cambios de las cantidades de magnitudes en las columnas y de esta manera, no completaron la tabla en su totalidad.

En relación a S1A4P1, en el momento de realizar la plenaria, el 33,3% de los estudiantes que completaron la tabla en su totalidad, pero que tuvieron errores, argumentaron que habían completado primeramente las columnas “Numero de mesas ocupadas” y “Numero de mesas desocupadas” cuyos cambios iban de 1 en 1, y así, en el momento de completar la columna “Número de niños que llegan”, cuyos cambios iban de 2 en 2, tendieron a confundirse con los valores de las otras columnas ya culminando la tabla y por ende, habrían introducido valores de manera errónea. De otro lado, el 16,6% de los estudiantes que no completaron la tabla en su totalidad, argumentaron de manera similar a la anterior, diciendo que se había confundido en la última parte de la tabla completando la columna “Numero de niños que llegan” y al no estar seguro de una respuesta, prefiero dejar el espacio en blanco.

Teniendo en cuenta la tabla 26, en relación a las respuestas a la pregunta S1A4P2, el 66,6% de los estudiantes logró identificar que las cantidades de magnitudes aumentaban en



la columna “número de mesas ocupadas”. Sin embargo, de este porcentaje, el 50% de los educandos identificó el cambio y además logró argumentar que los cambios iban de 1 en 1; mientras que el otro 16,6% solo identificó el cambio más no lo cuantificó. A continuación, se puede observar un ejemplo de respuesta de los estudiantes en el cual cuantificaron ese cambio:

2. Describe ¿cómo varían o cambian las cantidades de la columna **Número de mesas ocupadas**?

varían que cada que llegan  
niños se va aumentando de uno  
en uno

3. Ahora describe ¿cómo cambian las cantidades de la columna **“Número de mesas**

*Ilustración 20. Respuesta acertada de un estudiante en S1A4P2.*

De otro lado, el 33,3% restante de los estudiantes identifica que existe un cambio, pero en el momento de proporcionar un argumento, lo hace de una forma poco coherente relacionando otros aspectos ajenos a lo que se pide en la pregunta, a continuación, un ejemplo de este tipo de respuesta:

2. Describe ¿cómo varían o cambian las cantidades de la columna **Número de mesas ocupadas**?

aumentan la cantidad de columnas  
por que cada número va aumentando

*Ilustración 21. Respuesta errada de un estudiante en S1A4P2.*

Cabe aclarar, que en el momento de hacer la plenaria el 16,6% de los estudiantes que no habían argumentado su respuesta, logro a través de un discurso, dar a entender la cuantificación del cambio de la columna “Numero de mesas ocupadas”. Mientras que el 33,3% de los estudiantes que había dado una respuesta con argumentos poco coherentes, logró de manera oral exponer su postura frente a la pregunta de una manera correcta, dejando claro que solo se trataba de un problema de redacción.

Observando la tabla 27, en relación con las respuestas a la pregunta S1A4P3, el 33,3% de los estudiantes identifica que las cantidades de magnitudes disminuyen y además cuantifica los cambios infiriendo que las cantidades disminuyen de 1 en 1. De igual forma, el 33,3% de los estudiantes reconoce que la cantidad de magnitud varía, pero no argumenta de manera escrita como son los cambios; a continuación, se pueden apreciar una respuesta en la que los estudiantes cuantificaron tal cambio:

3. Ahora describe ¿cómo cambian las cantidades de la columna “Número de mesas desocupadas”?

van en 1 en 1 disminuyendo.

*Ilustración 22. Respuesta acertada de un estudiante en S1A4P3.*

Por otra parte, el 16,6% de los educandos, aunque reconoce que algo varía, responde de manera errada al afirmar que la cantidad de magnitud de dicha columna aumenta. Mientras que el 16,6% restante de los estudiantes no responde la pregunta dejando el espacio en blanco.

Cabe resaltar que en la plenaria realizada para este ítem, los estudiantes pertenecientes al 33,3% que no había argumentado su respuesta de manera escrita, lo pudo resolver a través del discurso; diciendo que los cambios iban de 1 en 1, solo que no sabían que había que escribirlo. Por otro lado, 33,3% correspondiente a los estudiantes que respondieron mal y no respondieron la pregunta, solo cambiaron su respuesta hasta el momento de la validación con los investigadores, dando a entender la no comprensión de la pregunta.

*Tabla 29. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 5 (S1A4P5)*

| (P5) Pregunta 5: A medida que llegan los niños, describe lo que sucede con el número de mesas desocupadas. |                                                                                                                                                          |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                          | Descripción de la respuesta                                                                                                                              | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                         | Proporciona una respuesta donde reconoce la correlación inversa que hay, entre la cantidad de niños que llegan y el número de mesas que hay desocupadas. | 66,6%                 |
| R2                                                                                                         | Da una respuesta poco entendible que no da lugar a la pregunta establecida.                                                                              | 33,3%                 |

*Tabla 30. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 6 (S1A4P6)*

| (P6) Pregunta 6: A medida que aumenta el número de mesas ocupadas, describe lo que ocurre con el número de mesas desocupadas. |                                                                                                                                                                        |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                             | Descripción de la respuesta                                                                                                                                            | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                            | Menciona de manera correcta que, cada a medida que aumenta el número de mesas ocupadas, el número de mesas desocupadas va disminuyendo.                                | 66,6%                 |
| R2                                                                                                                            | Manifiesta de manera correcta que, el número de mesas desocupadas va disminuyendo, pero en su argumentación relaciona esta cantidad con el número de niños que llegan. | 33,3%                 |

De acuerdo con la tabla 29, en relación a S1A4P5, el 66,6% de los estudiantes reconoce la correlación inversa que presentan las cantidades de magnitudes “Número de

niños que llegan” y “Número de mesas desocupadas”, argumentando que a medida que la primera cantidad empieza a aumentar, la segunda empieza a disminuir. A continuación, se presenta un ejemplo de una respuesta correspondiente a este porcentaje.

5. A medida que llegan los niños, describe lo que sucede con el número de mesas desocupadas

disminuye por que cada niño  
que va llegando las mesas van  
disminuyendo

*Ilustración 23. Respuesta de un estudiante en S1A4P5.*

De otro lado, el 33,3% restante de la cantidad total de estudiantes dieron respuestas que no estaban relacionadas con la respuesta esperada para esta pregunta. Es de resaltar que, de este porcentaje, el 16,6% en sus argumentos deja clara la idea de que identifica el cambio en una de las cantidades de magnitudes, y además en el momento de la plenaria llega a la respuesta correcta tal como se puede apreciar:

**Profesor:** ¿Cuál fue tu respuesta a la pregunta 5?

**Estudiante A:** “El número de niños aumenta porque llegan más”

**Profesor:** Eso es correcto, pero te están preguntando es que pasa con el número de mesas desocupadas cuando llegan los niños.

**Estudiante A:** Ahhhh pues empieza a mermar porque los niños se tienen que sentar.

De otro lado, el otro 16,6% restante de los estudiantes que dieron una respuesta fuera de los intereses de la pregunta, solo comprendieron la misma hasta el momento de la validación.

Teniendo en cuenta la tabla 30, en relación con S1A4P6, el 100% de los estudiantes reconoce que los cambios en la cantidad de magnitud “Número de mesas desocupadas” son de manera descendente, es decir, que la cantidad va disminuyendo; pero de este porcentaje, el 66,6% además de identificar como son los cambios en la columna mencionada anteriormente, también dejan claro en sus argumentos la relación de dependencia entre que existe entre las cantidades de magnitudes “Número de mesas desocupadas” y “Número de mesas ocupadas”.

Por otra parte, 33,3% restante de la cantidad total de estudiantes, a pesar de haber reconocido como eran los cambios en la columna “Número de mesas desocupadas”, estos relacionaron dichos cambios con la columna “Número de niños que llegan”, cosa que está

bien porque esos individuos son los que ocupan las mesas, pero en la respuesta se esperaba que ellos plantearan una relación de dependencia entre el “Número de mesas desocupadas” y el “Número de mesas ocupadas”.

Cabe aclarar, que en el proceso de la plenaria los estudiantes pertenecientes a este porcentaje, lograron de forma oral plantear de una manera más clara la relación de dependencia esperada.

Los resultados mostrados anteriormente de S1A4P5 y S1A4P6, permiten inferir que el 100% de los estudiantes lograron identificar los cambios en la columna “Número de mesas desocupadas”, además de ello, también pudieron establecer (en distintos momentos) la relación de dependencia que había entre la columna mencionada anteriormente y la columna “Número de mesas ocupadas”. De esta manera, se puede afirmar que la totalidad de estudiantes estuvieron en la capacidad de reconocer la correlación inversa que presentaban las dos cantidades de magnitudes implicadas.

*Tabla 31. Tipos de respuestas situación 1 actividad 4 pregunta 7 (S1A4P7)*

| (P7) Pregunta 7: Dado el caso que a la fiesta llegaran 60 niños, ¿es posible que todos se puedan sentar en 20 mesas? Explica. |                                                                                                                                    |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                             | Descripción de la respuesta                                                                                                        | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                            | Indica de manera correcta que, no es posible que en las 20 mesas que posee la mamá de Lupe, se sienten 60 niños.                   | 66,6%                 |
| R2                                                                                                                            | Menciona de manera correcta que no es posible que se sienten los 60 niños, pero en su argumento plantea aspectos poco entendibles. | 16,6%                 |
| R3                                                                                                                            | Señala de forma incorrecta que, sí es posible que en las 20 mesas se sienten los 60 invitados.                                     | 16,6%                 |

Observando la tabla 30, en relación a las respuestas dadas a S1A4P7, se puede inferir que el 83,3% de los estudiantes lograron reconocer de manera implícita que, si el dominio de la función que modela la situación se acotaba a 20 mesas, era imposible que la correspondencia de dicho valor en el rango fuera 60. De este porcentaje, el 66,6% de los estudiantes argumentaron su respuesta diciendo que “Faltarían mesas” o en algunos casos dijeron que no era posible dado que en “20 mesas solo se pueden sentar 42 niños”. Por otra parte, el 16,6% restante dio un argumento en su respuesta fuera de lugar, en el que básicamente se contradice, tal como se muestra continuación:

7. Dado el caso que a la fiesta llegaran 60 niños, ¿es posible que todos se puedan sentar en una mesa? Explica

no por que quedaria sobrando  
mesas

*Ilustración 24. Respuesta de un estudiante en S1A4P7.*

Con base en esta respuesta, se recurrió en la plenaria a averiguar el porqué de la misma; pero el estudiante simplemente se quedó en silencio, dando a entender directamente la no comprensión de S1A4P7.

Por otro lado, el 16,6% del total de los estudiantes, dio una respuesta considerada como incorrecta, pues argumenta que en 20 mesas si se pueden sentar 60 estudiantes.

De esta manera, en la plenaria se preguntó cómo había llegado a dicha respuesta y el resultado fue el siguiente:

**Profesor:** [...] ¿Cómo llegaste a esa respuesta?

**Estudiante A:** Profe, lo que pasa es que no es sino juntar mesas hasta que se puedan sentar los 60 niños, son 29.

**Profesor:** Pero mira que en la pregunta te están diciendo que solo hay 20 mesas disponibles.

**Estudiante A:** Ahhh es que yo no leí bien...

**Profesor:** Entonces, ¿En esas 20 mesas se pueden sentar los 60 niños?

**Estudiante A:** Pues no profe, porque yo ya había calculado, y para 60 niños son 29 mesas. Para 20 mesas serian [...] 42 mesas profe.

Este porcentaje que en principio había dado una respuesta incorrecta, en la plenaria pudo a través del discurso dar una respuesta correcta; ya que, inicialmente este no había comprendido bien la pregunta porque no hizo una apropiada lectura del ítem.

En relación a las respuestas dadas para S1A4P7, se puede afirmar que el 83,3% de los estudiantes logro reconocer de manera implícita la incidencia del dominio en el rango. Por otra parte, el otro 16,6% no entendió la finalidad de lo que se le preguntaba.

#### **4.2.2.1 Análisis general de la situación 1.**

La actividad 1 (A1), tiene como objetivo que el estudiante comprenda la situación, es decir, que este estuviera en la capacidad de reconocer, validar y explicar casos en los que las condiciones de la situación variaban. De esta manera, se puede afirmar que el propósito de la actividad 1 se llevó a cabo con éxito, pues, gran porcentaje de los estudiantes logró dar cuenta de la comprensión de las condiciones iniciales de la situación, tanto desde la manipulación del material concreto, como desde el cálculo mental realizado para dar respuestas a las preguntas propuestas. Cabe resaltar, que los estudiantes en un primer momento, en el trabajo realizado individualmente, lograron en su mayoría dar respuestas correctas; mientras que el resto de los educandos, lograron acercamientos importantes a respuestas correctas solo en la etapa de plenaria. Por otra parte, en relación con los resultados esperados y los propósitos preestablecidos para esta actividad, se esperaba que los estudiantes proporcionaran comportamientos asociados a la acción mental 1 (AM1) y a la acción mental 2 (AM2); es decir, que los estudiantes estuvieran en la capacidad de reconocer las cantidades de magnitudes implicadas en la variación, y de igual manera reconocieran la dirección del cambio de dichas cantidades de magnitudes. Al respecto, se puede sostener que la gran mayoría de los estudiantes, en las preguntas 4 y 5 de la actividad, lograron manifestar comportamientos que dan cuenta de las acciones mentales que sustentan el Nivel 1 y el Nivel 2 del razonamiento covariacional. Esto dado que, los estudiantes identificaron la relación de dependencia entre dos cantidades y, además, reconocieron la dirección del cambio de una cantidad con respecto a la otra.

En concordancia con S1A1P4, los estudiantes que respondieron de manera correcta, proporcionaron respuestas en las que, de manera implícita, relacionan los cambios de una cantidad con los cambios de la otra (*ver ilustración 6*). Así pues, los estudiantes establecen que para saber cuántos niños en total se pueden sentar, es necesario determinar cuántas mesas están disponibles, esbozando así, de manera aproximada, una relación de dependencia entre dos valores (Número de mesas y Número de niños que se sientan). Es de resaltar que este tipo de comportamientos manifestados por los estudiantes, dan cuenta de AM1, que a su vez sustenta el nivel 1 del razonamiento covariacional, entendiendo en este que “*las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios de la otra variable*” (Carlson et al., 2003).

De otro lado, en cuanto a S1A1P5, los estudiantes que responden de manera correcta, otorgan respuestas en las que, de manera aproximada, coordinan la dirección del cambio de una variable, con respecto a los cambios de la otra; esto debido a que los estudiantes afirman que, si la cantidad de mesas aumenta, la cantidad de niños que se pueden sentar también aumentara, es decir, que coordinan los aumentos de una cantidad de magnitud con los aumentos de la otra. En relación, se puede decir que los estudiantes están manifestando comportamientos que dan cuenta de AM1-AM2, y por tanto sustentan el nivel 2 del razonamiento covariacional. Cabe aclarar, que en dicho nivel *“las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra”* (Carlson et al., 2003). Este hecho se puede sustentar en la *Ilustración 5* proporcionada anteriormente en la tipificación de las respuestas.

Ahora bien, hablando en términos de los elementos matemáticos involucrados, los educandos pudieron reconocer de manera implícita una relación de dependencia entre dos cantidades de magnitudes (Mesas y Número de niños). Esto dado que, los estudiantes además de argumentarlo de manera escrita, también lo expresaron a través del discurso en la etapa de plenaria de la siguiente manera:

**Profesor:** *¿Qué respondiste en la pregunta 4?*

**Estudiante:** *Yo respondí que “se necesita saber cuántas mesas tienes”*

**Profesor:** *¿Y qué tienen que ver las mesas con el número de niños?*

**Estudiante:** *Profe, pues los niños que se pueden sentar dependen de las mesas que haya, si no hay mesas, no se puede saber cuántos niños hay.*

**Profesor:** *¿Cómo es eso de que la cantidad de niños dependen del número de mesas?*

**Estudiante:** *¡Claro profe!, por ejemplo: Si tenemos 1 mesa, se pueden sentar 4 niños; si tenemos 2 mesas, se pueden sentar 6, y así profe.*

En correspondencia con el discurso expuesto del estudiante, se puede afirmar que este claramente, de manera implícita, está identificando que existen dos valores, de los cuales, para saber a cuanto equivale uno, es necesario conocer el otro valor, hasta el punto de utilizar la palabra *“Depende”* la cual es clave en su argumento, puesto que, tal como su nombre lo indica, la noción de Relación de Dependencia básicamente trata sobre una cantidad que depende de otra para subsistir.

Por otro lado, en cuanto a la actividad 2, de acuerdo con el propósito de esta que es *analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación lineal*, se puede afirmar que una gran parte del porcentaje total de los estudiantes logró cuantificar los cambios que había entre dos cantidades de magnitudes. En la etapa de la plenaria los estudiantes manifestaron que a medida que se presentaban aumentos de 1 en 1 en una cantidad de magnitud (Número de mesas), la otra cantidad de magnitud (Cantidad de niños que no están en los extremos) sería igual al doble respecto a la primera; entendiéndose esto como indicios de los comportamientos que dan cuenta de las acciones mentales que sustentan el nivel 3 del razonamiento covariacional. Es de resaltar que en dicho nivel *“las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra”* (Carlson et al. 2003). Esto, puesto que los estudiantes reconocen que si una cantidad aumenta en 1 unidad, la otra cantidad también aumentará siendo igual al doble de la primera cantidad. A continuación, se presenta un dialogo que se sostuvo con uno de los estudiantes que proporciono un tipo de respuesta correcta, donde se ve reflejado todo lo mencionado anteriormente:

**Profesor:** *¿Cuál fue tu respuesta en la pregunta 2?*

**Estudiante:** *Profe, yo respondí que la cantidad de niños sería el doble de las mesas*

**Profesor:** *¿Cuándo dices “el doble” a que te refieres?*

**Estudiante:** *Pues a que va a ser 2 veces el número de mesas*

**Profesor:** *¿Podrías plantear un ejemplo de eso?*

**Estudiante:** *Si profe, es que cuando hay 1 mesa, el número de niños que no están en los extremos son 2; cuando hay 2 mesas, el número de niños serian 4, y cuando hay 3 mesas, el número de niños serian 6, y así sucesivamente.*

De otro lado, en cuanto a la relación con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, se puede aseverar que los resultados obtenidos del trabajo de los estudiantes, revela el desarrollo del siguiente estándar: *Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales*. Los educandos con base en la tabla propuesta en el primer ítem de esta actividad, lograron identificar patrones de variación entre las columnas de la misma, lo cual conllevó solo a una pequeña parte del porcentaje total de los estudiantes a generalizar de forma correcta la situación mediante un algoritmo que fue expuesto de manera oral en el proceso de la plenaria.



## ACTIVIDAD 2: Reconocer dependencia entre variables y generalización

1. De acuerdo a las imágenes presentadas con anterioridad completa la siguiente tabla:

| Número de mesas juntas | Cantidad de niños que NO están en los extremos | Número de niños sentados a los extremos. | Total de niños sentados |
|------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------|
| 1                      | 2                                              | 2                                        | 4                       |
| 2                      | 4                                              | 2                                        | 6                       |
| 3                      | 6                                              | 2                                        | 8                       |
| 4                      | 8                                              | 2                                        | 10                      |
| 5                      | 10                                             | 2                                        | 12                      |
| 6                      | 12                                             | 2                                        | 14                      |
| 7                      | 14                                             | 2                                        | 16                      |

*Ilustración 25. Reconocimiento de patrones de variación*

Al observar la ilustración 25, el estudiante que pudo generalizar de forma correcta la situación, logró encontrar patrones de variación claves entre las columnas, los cuales lo conllevaron a hallar un algoritmo modelador. Uno de estos consistía en que la cantidad de la primera columna (Número de mesas juntas), siempre iba a ser el doble en la segunda columna (Cantidad de niños que NO están en los extremos), con esto el estudiante ya había encontrado una gran parte del total de niños sentados. Posteriormente, el educando notó que las cantidades en la tercera columna (Número de niños sentados a los extremos) se mantenían constantes, y que peculiarmente si sumaba dicha cantidad a la que anteriormente había encontrado, obtendría el número total de niños sentados. Es de esta manera, que el estudiante en el proceso de la plenaria, pudo explicar su generalización a través del discurso:

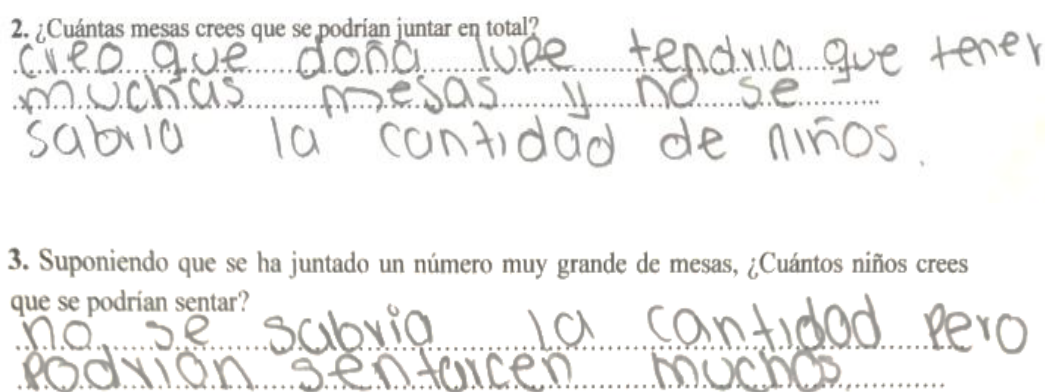
**Estudiante:** Profe, para hallar el número total de niños que se pueden sentar, yo multiplico por 2 el número de mesas que me dan y luego le sumo los niños que están en los extremos.

En otro orden de ideas, la actividad 3 tenía como propósito *cuantificar los cambios a partir del dominio y rango de la variación*; esto implicaba que los estudiantes estuvieran en la capacidad de poder identificar de manera aproximada el dominio, rango y razón de cambio de la función que modela la situación. En primera instancia, hablando en términos de los elementos matemáticos que subyacen al concepto de función involucrados, se puede decir

que los estudiantes reconocieron de manera exitosa e implícitamente algunas propiedades del dominio (Número de mesas) y el rango (Número de niños que se sientan) de la función que modela la situación 1; esbozando ideas cómo, el recorrido de  $y$  dependiendo de  $x$ , y la relación de infinitud que mantenían el dominio y el rango.

En primera instancia, los estudiantes lograron identificar de manera aproximada, el comportamiento de los valores de salida (Rango) de dicha función que modela la presente situación. Al lograr sostener en S1A3P1, que ningún asiento de las mesas puede quedar vacío, pues no se cumplirían las condiciones de la actividad (*ver ilustración 16*); de igual manera proporcionan ejemplos de los valores que puede tomar el rango, en donde todos estos son pares. De esta manera, se puede inferir que los estudiantes de una manera u otra están acotando, de manera implícita, los valores de  $f(x)$ . A continuación, se presenta uno de estos tipos de respuesta:

En segunda instancia, en S1A3P2 y S1A3P3, la gran mayoría de los estudiantes proporcionaron respuestas que se pueden ligar al valor de infinito que tienen el dominio y el rango de la función modeladora de la situación 1. En dichas respuestas, los educandos no las hacen en términos de números específicos, sino que por el contrario, hacen referencia a una cantidad “Muy grande”, e inclusive añaden que si no se conoce la cantidad de mesas, el número de niños tampoco se sabría; tal como se puede apreciar en las siguientes ilustraciones:



*Ilustración 26. Respuestas de un estudiante en S1A3P2 y S1A3P3.*

Por otra parte, gran porcentaje de los educandos también logró establecer de manera aproximada, la razón de cambio de la función, pues, estos dieron indicios de esto en el momento que concluyen que, “siempre que se junte una mesa, se podrán sentar 2 niños más”, tal como se puede observar en la ilustración 16 de la tipificación de las respuestas. De otro

lado, en el momento de la plenaria, los estudiantes argumentaron su respuesta a través del discurso de la siguiente manera:

**Profesor:** *¿Qué nos puedes decir sobre la pregunta 4?*

**Estudiante:** *Profe, que cada que hay una mesa más, se pueden sentar dos niños nuevos.*

**Profesor:** *Pero, ¿eso sucede siempre que se junte una mesa?*

**Estudiante:** *Mmm... sí profe. Mire que si hay una mesa, se sientan 4; si hay 2 mesas, se sientan 6, y si hay 3 mesas, se sientan 8; siempre va a aumentar de 2 en 2.*

En concordancia al diálogo que se sostuvo con el estudiante, se puede observar que de manera subyacente, este y los demás que respondieron de forma correcta, identifican la medida en la cual una variable (Número de niños) se modifica con relación a los cambios de la otra (Número de mesas).

Ahora bien, hablando en términos del marco conceptual, se esperaba que los estudiantes reportaran comportamientos asociados a las acciones mentales AM1-AM4. En correspondencia, algunos educandos pudieron identificar la relación de dependencia entre las dos cantidades involucradas (AM1), reconocieron que los cambios de las dos cantidades de magnitudes eran de forma ascendente (AM2), cuantificaron los cambios que había en una variable con respecto a los cambios de la otra (AM3), y finalmente esbozaron de manera verbal lo que sería la razón de cambio de la función, que para este caso era 2. Sin embargo, aunque los estudiantes verbalizaron la aproximación de la razón de cambio, estos solo hacen alusión a uno del total de los comportamientos asociados a AM4. De esta manera, el porcentaje de estudiantes que bosquejó de manera tácita la razón de cambio, y además de ello sustentó las acciones mentales AM1-AM3, se estarían clasificando en el Nivel 3 del razonamiento covariacional; puesto que, aunque los educandos manifiestan comportamientos asociados a AM1, AM2 y AM3; en AM4 no lo sustentan en su totalidad, por lo cual, estos no se pueden clasificar en el Nivel 4 del marco conceptual.

Cabe aclarar en esta parte, que otro porcentaje del total de los estudiantes logró sustentar comportamientos asociados a las acciones mentales AM1- AM2, y aunque develaron comportamientos asociados a AM3 y AM4, estos lo hicieron de manera errónea, pues, en el momento de cuantificar los cambios, llegaron a una respuesta incorrecta.

Ahora, en cuanto a la actividad 4, como el propósito de esta es *identificar la correlación inversa entre dos cantidades de magnitudes y la dirección del cambio*, se puede decir que la gran mayoría de los estudiantes, logró completar de manera correcta toda la tabla propuesta para el primer ítem de esta actividad. Además, la mayoría del porcentaje total de los estudiantes, logró identificar a través de dicha tabla diferentes relaciones de dependencia entre cantidades de magnitudes, especificando en la etapa de la plenaria, como eran los cambios de cada cantidad de manera individual, y también determinando cómo eran los cambios de una variable cuando otra cambiaba. Los estudiantes pudieron determinar fácilmente las cantidades de magnitudes que variaban, que en este caso eran cada una de las columnas de la tabla. De igual forma, también estuvieron en la capacidad de establecer si las cantidades aumentaban o disminuían para cada caso, y finalmente lograron establecer como eran los cambios de una cantidad (Número de niños que llegan) con los cambios de otra (Número de mesas desocupadas).

De otro lado, en relación a lo tratado en cada una de las preguntas de la actividad 4, se puede aseverar que los estudiantes evidencian comportamientos que dan cuenta de las acciones mentales que sustentan el nivel 1 y nivel 2 del razonamiento covariacional; pues, los educandos estuvieron en la capacidad de reconocer dependencia entre variables, y además de ello, advertir cual es la dirección del cambio de una variable cuando hay cambios en la otra; tal como se puede apreciar en las ilustraciones proporcionadas para la tipificación de las preguntas S1A4P2 – S1A4P4. Ahora bien, refiriéndose a los elementos matemáticos involucrados, de manera general, los estudiantes reconocieron de manera implícita cantidades que hacían alusión al dominio y rango de la función, y además la relación de dependencia que hay entre estos. En esta parte, se les hizo una pregunta a los educandos (S1A4P7) en la que se les presentaba un dominio acotado (Número de mesas) a una cantidad de 20, y en relación estos debían de identificar de manera implícita, si era posible que el rango (Número de niños que se sientan) fuera igual a 60. En este orden de ideas, los estudiantes que respondieron de manera correcta, encontraron de manera tácita que  $f(20)$  era igual 42, es decir, que en 20 mesas solo se pueden sentar 42 invitados, lo cual, aunque no se hace de una manera formal, refleja la identificación de propiedades del dominio y el rango de una función de una forma subyacente.

De manera similar, la gran mayoría de los estudiantes pudo reconocer de manera implícita la correlación inversa que presentaban dos cantidades de magnitudes específicas. Puesto que, al observar el comportamiento de dichas cantidades en la tabla de S1A4P1, asumieron que cuando una de las cantidades de magnitud aumentaba, la otra disminuía. A continuación, se presentan uno de los pares de cantidades de magnitudes que los estudiantes analizaron en la tabla para determinar la correlación inversa, y además se proporciona un tipo de respuesta correcta:

| Número de mesas ocupadas | Número de mesas desocupadas |
|--------------------------|-----------------------------|
| 0                        | 20                          |
| 1                        | 19                          |
| 2                        | 18                          |
| 3                        | 17                          |
| 4                        | 16                          |
| 5                        | 15                          |
| 6                        | 14                          |
| 7                        | 13                          |
| 8                        | 12                          |
| 9                        | 11                          |
| 10                       | 10                          |
| 11                       | 9                           |

*Ilustración 27. Llenado de la tabla por parte de un estudiante.*

Cabe resaltar de manera global en esta situación que, en relación a los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, en todas las 4 actividades de S1 había inmersas preguntas que, según los resultados obtenidos por parte de los estudiantes, evidenciaron el desarrollo del siguiente estándar: *Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales*. Dado que, la relación de dependencia fue una noción que estuvo presente en todas las actividades, pues, siempre había dos cantidades que variaba una con respecto a la otra.

#### **4.1.2 Resultados y análisis de la situación 2.**

(S2) **Situación 2:** Estudio de la covariación a través del recubrimiento con baldosas.

(A1) **Actividad 1:** Comprendiendo la situación.

*Tabla 32. Tipos de respuestas situación 2 actividad 1 pregunta 1a (S2A1P1A)*

| (P1a) Pregunta 1a: A partir de lo anterior, haciendo uso del material dado averigua ¿cuántas baldosas verdes necesitas para rodear 4 y 5 baldosas rojas? |                                                                                                                                |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                        | Descripción de la respuesta                                                                                                    | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                       | Mencionan de forma correcta que para rodear 4 y 5 baldosas rojas se necesitan 14 y 16 baldosas verdes de modo correspondiente. | 100%                  |

*Tabla 33. Tipos de respuestas situación 2 actividad 1 pregunta 2 (S2A1P2)*

| (P2) Pregunta 2: Natalia afirma que para un pasillo de 6 baldosas rojas se requieren para rodearlas 16,5 baldosas verdes y que para un pasillo con 7 baldosas rojas se necesitan 21 baldosas verdes. Comprueba a través del material si esto es posible y verifica si Natalia está en lo correcto. |                                                                                                                                                                                   |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                       | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Aciertan al afirmar que Natalia se equivoca, debido a que en realidad se necesitan para 6 y 7 baldosas rojas las cantidades de 18 y 20 baldosas verdes de manera correspondiente. | 100%                  |

*Tabla 34. Tipos de respuestas situación 2 actividad 1 pregunta 3 (S2A1P3)*

| (P3) Pregunta 3: Explora y averigua si es posible que cualquier cantidad de baldosas rojas sean rodeadas en algún caso por una cantidad impar de baldosas verdes. Explica tu respuesta. |                                                                                                                                                                  |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                       | Descripción de la respuesta                                                                                                                                      | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                      | Manifiestan que no es posible, sin embargo, no dan una explicación más detallada.                                                                                | 33,3%                 |
| R2                                                                                                                                                                                      | Mencionan que no es posible y, además, que en ningún caso da impar porque a medida que se pone una baldosa roja, las baldosas verdes se dan en una cantidad par. | 66,7%                 |

Con respecto a la tabla 33, que alude a las respuestas a la pregunta S2A1P1A, el 100% de los estudiantes responde de manera correcta que para que 4 y 5 baldosa rojas sean rodeadas se necesitan 14 y 16 baldosas rojas respectivamente. Es de notar, que al igual que la anterior situación, por ser una actividad inicial, el material concreto sirvió de mucha ayuda para que comprendieran la situación, tal cual se muestra en la siguiente ilustración:



*Ilustración 28. Uso del Material Tangible por Parte de un Grupo en Particular.*

En esa misma pregunta, cuya intención es obtener dos respuestas acertadas por parte de cada uno de los tres grupos conformados en pareja mediante la interacción con el material, es de resaltar, que más allá del uso de este, los gestos fueron muy notorios en el proceso de conteo como una estrategia para dar la respuesta correcta. Esto que se observó, al mismo tiempo se pudo corroborar con lo que ellos mencionaron en la plenaria, acerca de cómo habían dado respuesta a esta pregunta. A continuación, se muestra como es utilizado el gesto del señalamiento para el conteo de las baldosas verdes.



*Ilustración 29. Estrategia de Conteo Mediante el Señalamiento.*

De acuerdo a la tabla 34, el 100% de los estudiantes se contraponen a la afirmación de Natalia, al darse cuenta que para 6 y 7 baldosas rojas se necesitan 18 y 20 baldosas verdes.



Al igual que la pregunta S2A1P1A, más allá de apreciar la variación conjunta que se da entre la cantidad de baldosas rojas y la cantidad de baldosas verdes, empiezan a darse cuenta que tanto el dominio y el rango de la relación entre estas dos magnitudes, están dadas en el conjunto de los números naturales. En la ilustración que sigue se muestra la respuesta de un estudiante en cuyo discurso da cuenta lo anteriormente descrito.

2. Natalia afirma que para un pasillo de 6 baldosas rojas se requieren para rodearlas 16,5 baldosas verdes y que para un pasillo con 7 baldosas rojas se necesitan 21 baldosas verdes. Comprueba a través del material si esto es posible y verifica si Natalia está en lo correcto.  
 Para 6 se necesita 18 baldosas y para 7 se necesita 20 baldosas Natalia no está en lo correcto

*Ilustración 30. Respuesta de un Estudiante a S2A1P2.*

En cuanto a los resultados de la tabla 34, el 33,3% que representa un grupo de estudiantes manifiestan sin dar explicaciones que no es posible obtener una cantidad impar en las baldosas verdes (variable dependiente). Por otro lado, el 66,6% que representa los otros dos grupos, menciona lo mismo, agregando que a medida que se pone una baldosa roja, las baldosas verdes se dan en una cantidad par.

Con referencia a lo anterior, lo que se observó en común frente a las preguntas S2A1P2 y S2A1P3, es que al igual que la pregunta S2A1P1A hicieron uso de la misma estrategia de conteo. Tal como se puede observar en la siguiente ilustración.



*Ilustración 31. Estrategia de conteo para las preguntas S2A1P2 y S2A1P3*



Finalmente, en la plenaria se ratificó lo observado cuando manifestaron que la estrategia usada fue ayudarse con el material y realizar conteos; además frente a la pregunta S2A1P2 afirmaron que las baldosas (rojas y verdes) siempre cambian de uno en uno y en la pregunta S2A1P3, expresaron que exploraron con varios casos y observaron que siempre les daba una cantidad par.

(S2) **Situación 2:** Estudio de la covariación a través del recubrimiento con baldosas.

(A2) **Actividad 2:** Reconocer la dependencia entre variables.

*Tabla 35. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 1 (S2A2P1)*

| (P1) Pregunta 1: Utilicen el material dado y describan lo que sucede con estas cantidades cada vez que se realicen diferentes recubrimientos. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                             | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                            | Estudiantes que reconocieron la dirección del cambio e hicieron la cuantificación del mismo, para finalmente reconocer una constante y expresarla como un número. Argumentando que:<br>-Baldosas en la parte superior aumentan de uno en uno.<br>-baldosas en la parte inferior aumentan igual de uno en uno.<br>-baldosas en el extremo izquierdo siguen igual, ósea de tres<br>-baldosas en el extremo derecho siguen igual, ósea de tres. | 33,3%                 |
| R2                                                                                                                                            | Estudiantes que reconocieron la dirección del cambio e hicieron la cuantificación del mismo, para finalmente reconocer una constante, sin embargo, no la expresaron como un número.                                                                                                                                                                                                                                                          | 33,3%                 |
| R3                                                                                                                                            | Estudiantes que reconocieron la dirección del cambio y cantidades que se mantienen constantes, no obstante, su discurso escrito es más cualitativo, en otras palabras, no hacen una cuantificación de esos cambios                                                                                                                                                                                                                           | 33,3%                 |

*Tabla 36. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 2 (S2A2P2)*

| (P2) Pregunta 2: A medida que cambia la cantidad de baldosas rojas, escribe lo que sucede con la cantidad de baldosas verdes en los extremos izquierdo y derecho. |                                                              |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                 | Descripción de la respuesta                                  | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                | Estudiantes que manifiestan que las cantidades se mantienen. | 100%                  |

*Tabla 37. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 3 (S2A2P3).*

| (P3) Pregunta 3: A medida que cambia la cantidad de baldosas rojas, escribe lo que sucede con la cantidad de baldosas verdes en la parte superior e inferior. |                                                                                                              |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                             | Descripción de la respuesta                                                                                  | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                            | Estudiantes que reconocen la dirección del cambio y expresan una cuantificación del mismo                    | 66,7%                 |
| R2                                                                                                                                                            | Estudiantes que reconocen la dirección del cambio, sin embargo, no expresan una cantidad numérica del mismo. | 33,3%                 |

Tabla 38. Tipos de respuestas situación 2 actividad 2 pregunta 4 (S2A2P4)

| (P4) Pregunta 4: ¿De qué depende la cantidad total de baldosas verdes en cada recubrimiento? Explica tu respuesta |                                                                                                                                                                                    |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                 | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                        | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                | Estudiantes que reconocen la dependencia de una cantidad respecto de la otra. Expresando que:<br>-Cada vez que van aumentado las baldosas verdes van aumentado las baldosas rojas. | 100%                  |

Conforme a la tabla 36, frente a las respuestas a la pregunta S2A2P1, el 33,3% que representa un grupo de estudiantes reconoce la dirección de cambios de cada una de las cantidades presentadas en la siguiente ilustración.

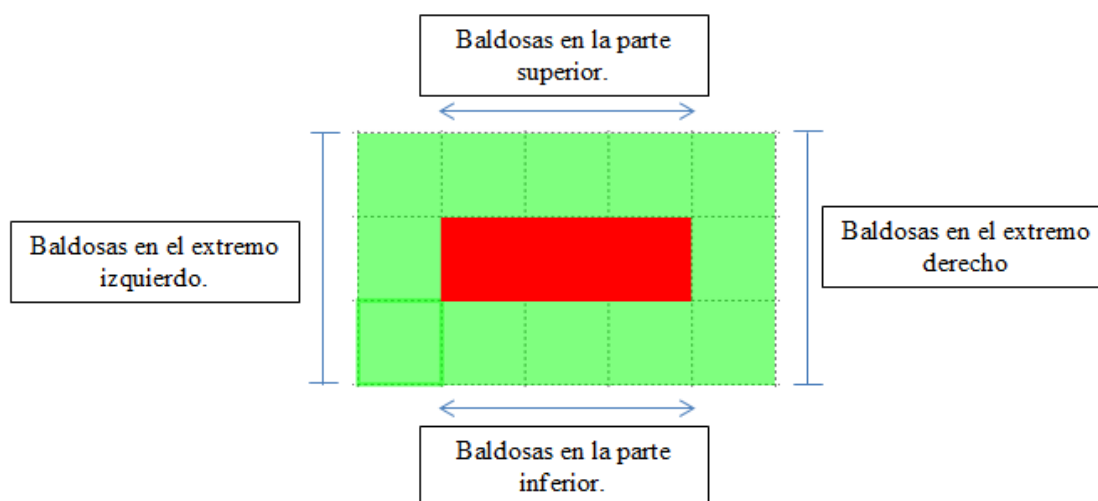


Ilustración 32. Cantidades variantes e invariantes en cada recubrimiento.

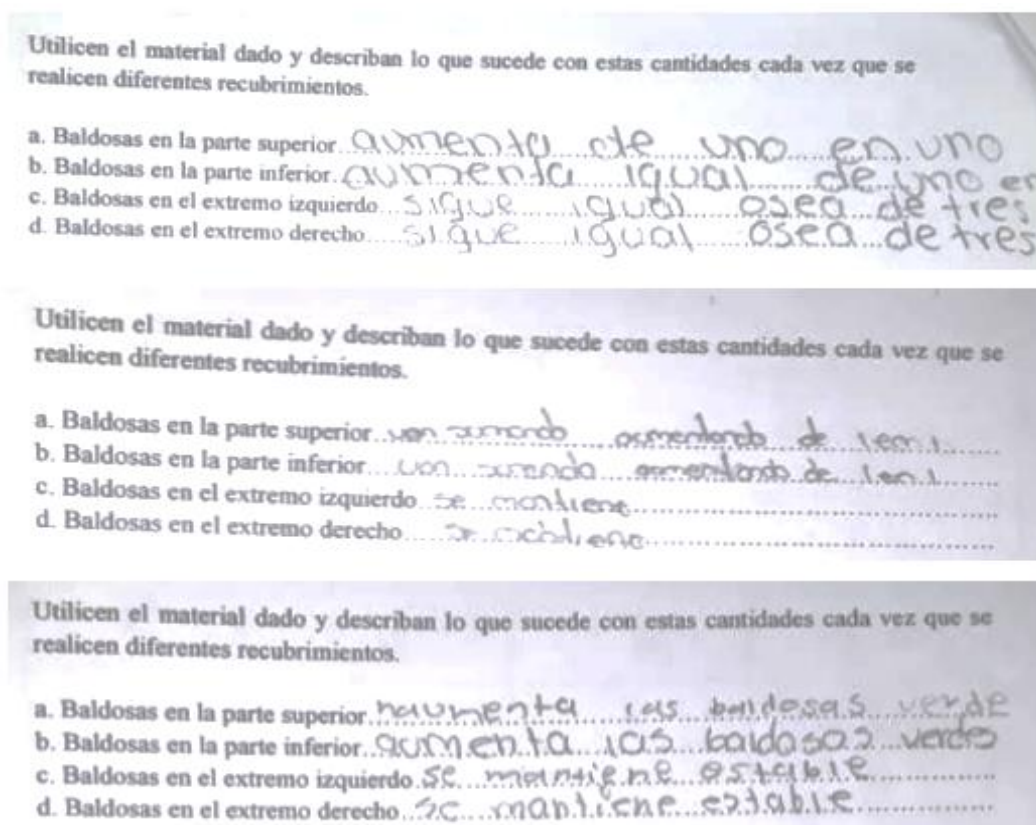
Sobre la base de la consideración anterior, ese mismo porcentaje reconoce que las baldosas en la parte superior e inferior aumentan de uno en uno. Además, también se dan cuenta que las baldosas en la parte del extremo izquierdo y extremo derecho, se mantienen invariantes en una cantidad de tres para cada una.

Por otra parte, el otro 33,3% que representa otro grupo de estudiantes, en comparación con el anterior, solo difiere en cuanto al hecho de expresar que las baldosas en los extremos izquierdo y derecho se mantienen en un solo valor, pero no dicen qué cantidad.

Mientras tanto, el 33,3% restante hace una descripción cualitativa de esos cambios, es decir, solo se queda en decir que las baldosas superior e inferior aumentan, cada vez que

aumenta una baldosa roja, pero no expresa en cuanto cambian. En ese mismo sentido, expresa que las baldosas en la parte izquierda y derecha “se mantienen estables”, sin embargo, no plantea cuál es ese valor.

A continuación, se muestra una ilustración en el que se evidencian los tres tipos de respuestas.



*Ilustración 33. Tres tipos de respuestas a la pregunta (S2A2P1)*

De acuerdo con lo anterior, las respuestas de S2A2P2 y S2A2P3 que hacen referencia a las preguntas 2 y 3, son similares a las respuestas que dieron en S2A2P1. Frente a la pregunta 2, todos los grupos reconocieron que la cantidad de baldosas verdes en los extremos izquierdo y derecho se “mantienen”. Del mismo modo, el 66,7% que representa dos grupos, logra reconocer el cambio y la dirección de la cantidad de baldosas verdes en la parte superior e inferior, hasta el punto que expresan en cuanto cambia cada uno. Por otro lado, el otro grupo restante que representa el 33,3% reconoce también ese cambio y dirección, sólo que no lo cuantifica.

Junto con las respuestas escritas en las hojas de trabajo, en la plenaria los grupos explicaban de manera oral la manera como habían dado tales respuestas. El siguiente extracto es parte del dialogo entre un grupo de estudiantes y el profesor, en el cual se busca la manera de obtener tales respuestas. A continuación, se presenta la explicación de un grupo en particular en relato con imágenes, provenientes de la grabación y que reflejan la explicación brindada por el mismo grupo (ver las ilustraciones 20,21 y 22).

**Profesor:** *¿Cuál es el primer ejemplo que colocan ahí?*

**Estudiantes:** *Lo hacemos con 1 [usan el material concreto y se disponen a hacer un recubrimiento de una baldosa roja]*



*Ilustración 34. Explicación desde un caso particular por un grupo*

**Profesor:** *¿Cuántas utilizaron en la parte superior e inferior?*

**Estudiantes:** *Tendríamos 1 y 1 1 [mediante gestos señalan las baldosas de la parte superior e inferior, realizando por supuesto su conteo]*



*Ilustración 35. Estrategia de conteo de las baldosas en la parte superior e inferior.*

**Profesor:** Listo [se hace una intervención muy breve, debido a que se notó un discurso muy fluido en sus explicaciones y con ánimo de no interrumpirlos, se deja que prosigan]

**Estudiantes:** Luego le sumamos otro [realizan otro recubrimiento añadiendo otra baldosa roja], y aquí va volver aumentar otra baldosa verde, arriba una y abajo otra [señalan las que aumentan]



*Ilustración 36. Explicación desde otro caso particular*

**Profesor:** Entonces ¿Qué sucede con las baldosas de los extremos?

**Estudiantes:** Se mantienen estables.

En este extracto, es posible analizar la manera en que el grupo realiza una comparación de dos recubrimientos, una con una baldosa roja y otra con dos baldosas rojas (variables independientes). Esto con el ánimo de observar el comportamiento de las cantidades por las cuales se les preguntaba y poder establecer de manera escrita qué cantidades variaban y cuales se mantenían invariantes.

En este caso específico, tales comportamientos dieron la impresión de estar comprometidos en un razonamiento covariacional. Debido a que el grupo al dar una respuesta para el recubrimiento con una sola baldosa roja, al responder haciendo uso de segundo recubrimiento con dos baldosas rojas, utiliza el resultado obtenido en el primer recubrimiento, en el cual exploran mediante el conteo que las cantidades (baldosas en la parte superior e inferior) van cambiando de uno en uno. En este caso, se observa que el grupo se centra en la variación que hay en el número de baldosas rojas (entre 1 y 2, hay un aumento de 1 baldosa) para calcular el número de baldosas verdes, para lo que concluyen que la variación también ha de ser de uno para las baldosas en la parte superior, al igual uno para las baldosas en la parte inferior. Por lo tanto, puesto que se centra en cómo la variación entre dos valores de la variable independiente afecta a la variación que se produce entre dos valores de la variable dependiente (tanto para las baldosas en la parte superior, como para las de la parte inferior).

De la tabla 23, se puede evidenciar que la cantidad total de los grupos (100%) comprende que la cantidad total de baldosas verdes dependen de la cantidad de baldosas rojas. En este sentido, además de reconocer tal dependencia, también reconocen la dirección de cambio, expresando que “Cada vez que van aumentado las baldosas verdes van aumentado las baldosas rojas”.

(S2) **Situación 1:** Estudio de la covariación a través del recubrimiento con baldosas.

(A3) **Actividad 3:** Cuantificando los cambios.

*Tabla 39. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 1 (S2A3P1)*

| (P1) Pregunta 1: Ayúdale a un albañil a saber cuántas baldosas verdes en total necesita para el suelo de un pasillo en el que se colocan: |                                                                                                                                                                                                                                       |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                         | Descripción de la respuesta                                                                                                                                                                                                           | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                        | Todos los estudiantes responden de modo correcto que para 10 baldosas rojas se necesitan 26 baldosas verdes, que para 15 baldosas rojas se necesitan 63 baldosas verdes y que para 20 baldosas rojas se necesitan 46 baldosas verdes. | 100%                  |

*Tabla 40. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 2 (S2A3P2)*

| (P2) Pregunta 2: complete la siguiente tabla: |                                                                                   |                       |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                             | Descripción de la respuesta                                                       | Frecuencia porcentual |
| R1                                            | Completa la tabla en su totalidad, de forma correcta en cada una de las columnas. | 100%                  |

*Tabla 41. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 2.2 (S2A3P2.2)*

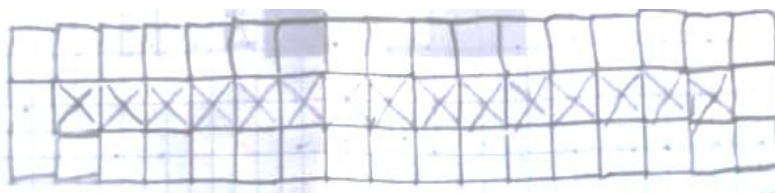
| (P2.2) Pregunta 2.2: De acuerdo a lo que observas en la tabla. Ayuda al albañil a encontrar la relación numérica entre la cantidad de baldosas rojas y la cantidad de baldosas verdes que están en la parte superior e inferior. |                                                                                                                                                 |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                | Descripción de la respuesta                                                                                                                     | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                               | Expresa de manera correcta que la cantidad de las baldosas rojas con la mitad de las baldosas verdes que están en la parte superior e inferior. | 33,3%                 |
| R2                                                                                                                                                                                                                               | Expresa de modo correcto mediante un caso particular que 10 baldosas rojas son la mitad de 20 baldosas verdes.                                  | 33,3%                 |
| R3                                                                                                                                                                                                                               | Expresa de modo incorrecto un argumento que se toma como confuso o ambiguo. “todo es el doble o sea que es la mitad del número”                 | 33,3%                 |

De acuerdo con los tipos de respuesta a la pregunta S2A3P1 expuestos en la tabla 40, se puede evidenciar como el 100% de los estudiantes lograron dar la respuesta correcta, para ello usaron estrategias como el conteo a partir del uso del material concreto y de representaciones pictóricas, tal como se puede observar en las siguientes ilustraciones:



*Ilustración 37. Uso de material concreto para dar respuesta a la pregunta (S2A3P1)*





*Ilustración 38. Uso de representaciones pictóricas para dar respuesta a la pregunta (S2A3P1)*

La tabla 26 solamente expone un tipo de respuesta para la pregunta S2A3P2 y de acuerdo a lo que ahí se expone, se puede observar cómo el 100% de los grupos logra completar la tabla de manera correcta.

En este sentido, de acuerdo a lo observado por lo estudiantes en la tabla llenada, el 66,6% que corresponde a dos grupos, encuentra una regularidad al comparar la cantidad de baldosa rojas con la cantidad de baldosas verdes en la parte superior e inferior. La diferencia radica en que un grupo expresa esta regularidad desde un punto de vista general, es decir, que todos los datos en la primera columna (baldosas rojas) son la mitad de los datos en la segunda columna (baldosas verdes); mientras que el otro grupo, expresa la regularidad desde un caso específico, en otras palabras, plantea un ejemplo en el que afirma que 10 baldosas rojas son la mitad de 20 baldosas verdes que están en la parte superior e inferior. Por otro lado, el grupo faltante plantea una respuesta algo confusa con palabras claves como “doble” y “mitad”.

No obstante, en la plenaria los dos grupos a los cuales se les entendió lo escrito, lo reafirman desde su expresión oral, señalando inclusive datos específicos para comprobar lo que habían expresado. Del mismo modo, el grupo restante cuya respuesta era algo ambigua, se le pidió que explicara lo escrito y mencionan que al momento de escribir “doble” y “mitad”, era porque habían observado que las baldosas verdes eran el doble de las baldosas rojas y que las baldosas rojas eran la mitad de las baldosas verdes. Es de notar entonces, que este grupo en su producción escrita pareciera que estaban en lo incorrecto, sin embargo, en su discurso oral mostraron que no era así.

*Tabla 42. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 3 (S2A3P3)*

| (P3) Pregunta 3 ¿Es posible que si tienes 16 baldosas rojas necesites 33 baldosas verdes para rodearlas? Explica tú respuesta |                                                                                              |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                             | Descripción de la respuesta                                                                  | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                            | Expresa de manera correcta que no es posible porque se necesitan 38 baldosas verdes y no 33. | 100%                  |



Al observar la tabla 43, que hace alusión al tipo de respuesta para la pregunta S2A3P3, se puede observar cómo todos los grupos responden de modo correcto. Es decir, logran descartar del rango un valor específico como el de 33 baldosas verdes para 16 baldosas rojas; en algunos casos haciendo uso del material concreto y en otros mediante representaciones pictóricas según mencionaron. Sin embargo, en la plenaria en el cual se contrastaron estas respuestas, un estudiante que conforma un grupo de estos expresa que se necesitan son 36 baldosas verdes, tal parece que en su grupo la decisión no fue unánime a la hora de llegar a un acuerdo para la respuesta, por lo cual en el siguiente extracto se evidencia un dialogo entre los estudiantes:

**Estudiante F:** [...] Profe se necesitan 36 baldosas verdes [Responde un estudiante que conforma un grupo en particular].

**Profesor:** ¿Alguien puede decir algo diferente?

**Estudiante B:** Profe está mal [Se refiere al estudiante que respondió que 36 baldosas verdes rodeaban 16 baldosas rojas].

**Profesor:** Alguno de ustedes que respondió 38, puede decir ¿por qué están mal?

**Estudiante B:** Porque dieciséis más dieciséis da es treinta y dos; treinta dos más tres de los lados seria treinta y ocho.

Es notable que en esta interacción, además de que un grupo logra corregir al otro, es de gran importancia la explicación que el estudiante B logra dar en cuestiones de la generalización. Precisamente, porque se vislumbra una estrategia que la estudiante utilizó para llegar a la respuesta, que por cierto estuvo muy alejada del hecho de utilizar el material concreto o el uso de las representaciones pictóricas. Pareciera ser que para el estudiante B, dada una cantidad cualquiera de la variable independiente, está la suma dos veces y al resultado le suma las cantidades constantes de los extremos (tres por el lado izquierdo y tres por el lado derecho).

*Tabla 43. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 4 (S2A3P4)*

| (P4) Pregunta 4. Observa qué cantidades se mantienen fijas, es decir, que por más que aumenten la cantidad de baldosas rojas siempre se mantienen en un solo valor. Escribe ¿qué cantidades son y su valor numérico? |                                                                                                |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                    | Descripción de la respuesta                                                                    | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                   | Expresa de manera correcta las cantidades que se mantienen fijas y presenta su valor numérico. | 66,6%                 |

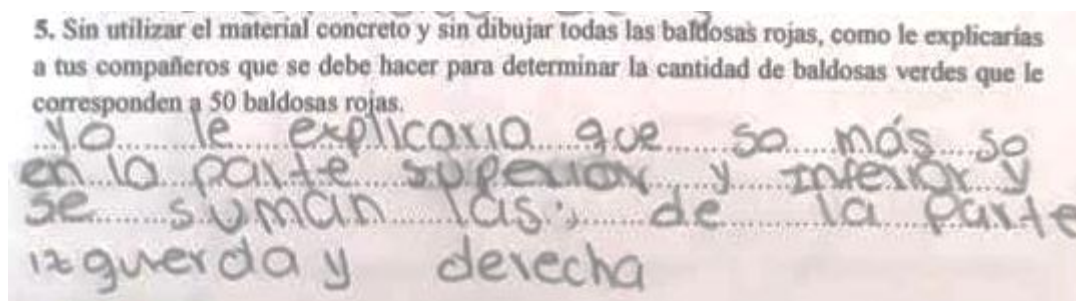
|                                                                                                 |       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Expresa de manera correcta las cantidades que se mantienen fijas, pero no dan el valor numérico | 33,3% |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

Conforme a lo expuesto en la tabla 44, el 100% de los grupos de estudiantes identificaron de manera correcta las cantidades que se mantenían invariantes, la diferencia estuvo en que el 66,6% de los grupos, va mucho más allá de reconocer esas cantidades, pues, además, especifican el valor numérico que siempre se mantiene. Contrario a 33,3% restante que representa el otro grupo, que no expresa ese valor numérico.

*Tabla 44. Tipos de respuestas situación 2 actividad 3 pregunta 5 (S2A3P5)*

| (P5) Pregunta 5. Sin utilizar el material concreto y sin dibujar todas las baldosas rojas, como le explicarías a tus compañeros que se debe hacer para determinar la cantidad de baldosas verdes que les corresponden a 50 baldosas rojas. |                                                 |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                          | Descripción de la respuesta                     | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                                         | Expresa de manera correcta la generalización.   | 33,3%                 |
|                                                                                                                                                                                                                                            | Expresa de manera incorrecta la generalización. | 66,6%                 |

De la tabla 44, que corresponde a la pregunta S2A3P5, se observa que sólo un grupo que representa el 33,3% logra plantear una generalización correcta, mientras que el 66,6% de estudiantes que representan los dos grupos restantes, plantean expresiones escritas que no se toman como generalizaciones correctas. A continuación, se presentan tres ilustraciones (39,40 y 41) como evidencia de las respuestas que proporcionaron los grupos (A, B y C).



*Ilustración 39. Producción del grupo A*

5. Sin utilizar el material concreto y sin dibujar todas las baldosas rojas, como le explicarías a tus compañeros que se debe hacer para determinar la cantidad de baldosas verdes que le corresponden a 50 baldosas rojas.

contando las baldosas rojas de todo los lados  
y así saber cuantos se necesitan y se  
necesitaron los

*Ilustración 40. Producción del grupo B*

5. Sin utilizar el material concreto y sin dibujar todas las baldosas rojas, como le explicarías a tus compañeros que se debe hacer para determinar la cantidad de baldosas verdes que le corresponden a 50 baldosas rojas.

Se necesitarían muchas valido  
sus verdes para

*Ilustración 41. Producción del grupo C*

Dada la intencionalidad de esta pregunta S2A3P5, la cual busca que los estudiantes establezcan la relación general entre variables, a partir del hecho de conocer la variable independiente. La respuesta dada por el grupo A, se considera una respuesta que da indicios de una generalización correcta, específicamente porque en la plenaria, este grupo en particular en su discurso afirma lo siguiente:

*“Nos da ciento seis, porque cincuenta más cincuenta da 100 y los de los extremos, tres más tres da 6, entonces nos daría ciento seis”.*

Por otro lado, en lo escrito por el grupo B, en la forma como escribieron aparenta no dar indicios de una generalización, por lo cual se toma como incorrecta. No obstante, en la plenaria cuando se les pide que expliquen lo escrito, afirman lo siguiente.

*“Sumamos las de los extremos que son seis, las de arriba que son cincuenta y los de abajo que son cincuenta [señala arriba y abajo], nos da ciento seis”.*

En esa breve explicación, es evidente que concuerdan con lo escrito y explicado de manera verbal por el grupo A, sólo que no lo hicieron explícito en sus argumentos escritos, algo que si se logró comprobar en lo que manifestaron de modo verbal.

Finalmente, lo escrito por el grupo C (ver ilustración 27), que se considera como una generalización incorrecta, no se amplía desde lo que manifestaron de modo verbal en la plenaria. En otras palabras, no encuentran una forma de hallar una cantidad total de baldosas

verdes, a partir de una cantidad cualquiera de baldosas rojas, inclusive si eran 50, como se planteó en la pregunta S2A3P5.

(S2) **Situación 1:** Estudio de la covariación a través del recubrimiento con baldosas.

(A3) **Actividad 3:** Cuantificando los cambios.

*Tabla 45. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 1 (S2A4P1)*

| (P1) Pregunta 1. Completa la tabla y escribe dentro de cada figura en cuanto aumenta la cantidad de baldosas rojas y la cantidad de baldosas verdes. |                                                                         |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                    | Descripción de la respuesta                                             | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                   | Estudiantes que llenan de forma correcta la tabla (ver ilustración 29). | 100%                  |

|                                    |    |    |    |    |    |
|------------------------------------|----|----|----|----|----|
|                                    |    |    |    |    |    |
|                                    |    |    |    |    |    |
| Cantidad de baldosas rojas.        | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| Cantidad total de baldosas verdes. | 36 |    | 40 |    | 44 |

*Ilustración 42. Tabla de cantidad de baldosas rojas vs cantidad de baldosas verdes*

*Tabla 46. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 2 (S2A4P2)*

| (P2) Pregunta 2. Según el esquema anterior, cada vez que las baldosas rojas aumentan en una unidad. ¿En cuántas unidades aumentan las baldosas verdes? |                                                                                               |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                      | Descripción de la respuesta                                                                   | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                     | Estudiantes que responden de manera correcta que las “baldosas verdes aumentan de dos en dos” | 100%                  |

*Tabla 47. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 3 (S2A4P3)*

| (P3) Pregunta 3. Se sabe que para 200 baldosas rojas se requieren 406 baldosas verdes. Utilizando esa información, ¿Cómo determinarías la cantidad de baldosas verdes que le corresponden? |                                                                                                               |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                          | Descripción de la respuesta                                                                                   | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                         | Estudiantes que respondieron de modo correcto que a 202 baldosas rojas le corresponden 410 baldosas verdes.   | 66,6%                 |
| R2                                                                                                                                                                                         | Estudiantes que respondieron de modo incorrecto que a 202 baldosas rojas le corresponden 606 baldosas verdes. | 33,3%                 |

De acuerdo con el resultado en la tabla 46, el 100% de los grupos de estudiantes llena de forma correcta la tabla y logra observar en cuanto varían cada una de las cantidades (baldosas rojas y baldosas verdes). Además de ello, el observar el comportamiento de los datos en la tabla, les permitió al 100% de los grupos responder de manera correcta a la pregunta S2A4P2; manifestando de modo escrito que a medida que las baldosas rojas aumentaban en una unidad, las baldosas verdes aumentaban de dos en dos. Seguidamente, se muestra la producción de un grupo en particular, frente a las preguntas S2A4P1 y S2A4P2.

1. Completa la tabla y escribe dentro de cada figura en cuanto aumenta la cantidad de baldosas rojas y la cantidad de baldosas verdes.

|                                    |    |    |    |    |    |
|------------------------------------|----|----|----|----|----|
|                                    |    | 2  | 1  | 1  | 1  |
| Cantidad de baldosas rojas.        | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| Cantidad total de baldosas verdes. | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 |

2. Según el esquema anterior, cada vez que las baldosas rojas aumentan en una unidad ¿en cuántas unidades aumentan las baldosas verdes?

las baldosas verdes aumentan de 2 en 2

Ilustración 43. Producción de un grupo en particular frente a las preguntas (S2A4P1) y (S2A4P2)

Ahora, según la tabla 47, relacionada a los tipos de respuesta a la pregunta S2A4P3, se puede evidenciar que el 66,6% de los grupos de estudiantes lograron dar una respuesta correcta, para ello no usaron la información proporcionada (para 200 baldosas rojas se requieren 406 baldosas verdes), sino que se limitaron a usar una regularidad aritmética que consistía en sumar dos veces la cantidad determinada (202) y al resultado obtenido sumarle la cantidad 6, que para ello representaba la cantidad de baldosas en los extremos que permanecía invariante. Por otro lado, el 33,3% que representa el grupo restante, contrario al anterior, si utiliza la información suministrada, salvo que no la usaron de manera correcta, es decir, pensaron que la respuesta la hallarían si sumaban los datos proporcionados (200 y 406).

Tabla 48. Tipos de respuestas situación 2 actividad 4 pregunta 4.1 y 4.2 (S2A4P.4.1) y (S2A4P4.2)

(P4) Pregunta 4 Camilo un albañil después de muchos intentos logra plantear tres posibles fórmulas que le permitirían saber la cantidad total de baldosas verdes que son necesarias para rodear cualquier número de baldosas rojas. Las cuales se presentan a continuación:

a.  $4x + 10 =$  b.  $2x + 2 =$  c.  $2x + 6 =$

4.1 ¿Cuál de las tres fórmulas que encontró Camilo crees que es la correcta? Explica tú respuesta

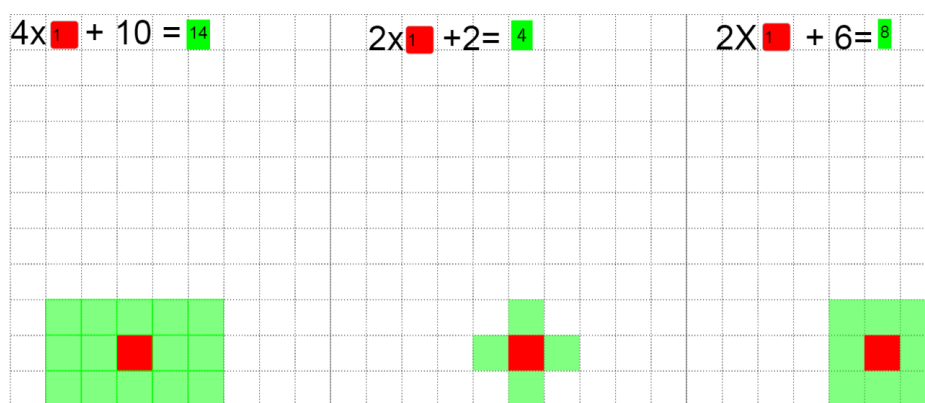
| <b>4.2</b> Para verificar si escogiste la formula correcta abre el siguiente link <a href="https://www.geogebra.org/m/quxyggyt">https://www.geogebra.org/m/quxyggyt</a> y en cada uno de los cuadros rojos remplaza valores numéricos para ver en cuál de las fórmulas se construye el modelo de recubrimiento que se presentó inicialmente. ¿Cuál expresión es la adecuada? |                                                                                                                                             |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Descripción de la respuesta                                                                                                                 | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Estudiantes que respondieron de modo correcto escogiendo la opción C y que reafirmaron mediante el software que esa era la opción correcta. | 100%                  |

*Tabla 49. Tipo de respuesta situación 2 actividad 4 pregunta 5 (S2A4P5)*

| (P5) Pregunta 5. Ahora que ya conoces una posible formula que les permite a los albañiles saber la cantidad de baldosas verdes que se necesitan para rodear una cantidad cualquiera de baldosas rojas, trata de averiguar ¿Cuántas baldosas verdes son necesarias para rodear 150 y 300 baldosas rojas? |                                                                                                                                                |                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Tipo de respuesta                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Descripción de la respuesta                                                                                                                    | Frecuencia porcentual |
| R1                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Estudiantes que respondieron de modo correcto que para 150 y 300 baldosas rojas son necesarias 306 y 606 baldosas verdes correspondientemente. | 100%                  |

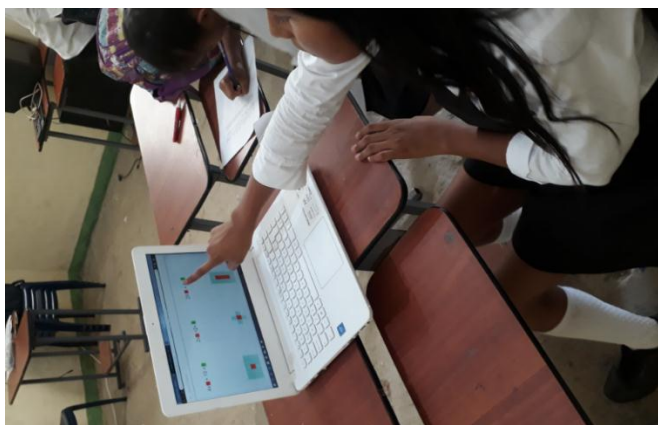
De acuerdo a la tabla 48, el 100% de los estudiantes escoge la opción correcta que alude a una fórmula que permite hallar la cantidad de baldosas verdes en relación a la cantidad de las baldosas rojas, la estrategia usada es mediante el ensayo y error; remplazando valores en cada una de las fórmulas y observar si aquellos datos guardaban coherencia con lo que ya habían encontrado.

Frente a esta pregunta, fue muy notable el hecho de que no genero ninguna complejidad para los estudiantes el asignar valores en las fórmulas y asociarlos con unos valores de salida. Además de esto, la pregunta se complementó mediante una construcción dinámica en Geogebra, en el cual se presentaba una representación simbólico-numérica con su respectiva representación pictórica, tal cual se puede observar en la siguiente ilustración:



*Ilustración 44. Posibles expresiones simbólico numéricas*

Tal medio dinámico, permitió que los estudiantes reafirmaran su respuesta a la pregunta S2A4P4.2, inclusive manifestaban en la plenaria que, al ingresar valores de entrada en las fórmulas, el tamaño cambiaba, sin embargo, la forma se mantenía. A continuación, se observa la interacción que un grupo en particular tuvo con el medio dinámico en Geogebra.



*Ilustración 45. Interacción de un grupo en particular con el medio dinámico.*

Finalmente, la tabla 49 evidencia que el 100% de los estudiantes al conocer una regla que les permite asociar cantidades cualquiera de baldosas rojas (cantidad independiente) a cantidades de baldosas rojas (cantidad dependiente), logran dar una respuesta correcta a la pregunta S2A4P5.

#### **4.2.3.1 Análisis general de la situación 2**

Inicialmente en la actividad 1, se plantea el propósito de que cada grupo conformado en parejas comprendiera la situación, esto implicaba explorar, descartar y argumentar frente a los distintos casos en los cuales se daba una variación conjunta; cuyas cantidades numéricas en el dominio y rango presentaban ciertas particularidades. De acuerdo a esto, se puede afirmar que el propósito en la actividad 1 se cumplió debido a que los estudiantes, de modo general, lograron dar cuenta de las condiciones iniciales de la situación, tanto en el uso del material concreto como en el uso de representaciones pictóricas; para reconocer de modo exploratorio que las cantidades independientes (baldosas rojas) y cantidades dependientes (baldosas verdes), solo tenían sentido en el conjunto de los números naturales, además de que las cantidades dependientes se limitaban a los valores numéricos pares. En esta tarea, de acuerdo a los resultados esperados y al propósito establecido, no se espera que los estudiantes presentes comportamientos asociados a la Acción Mental 1 (AM1), no obstante, los estudiantes tuvieron un acercamiento importante de cómo una variable cambiaba a medida



que la otra también cambiaba, esto se puede inferir de las respuestas de la pregunta 3, en el cual, por medio de la exploración con el material concreto observaban que al aumentar una baldosa roja, la cantidad de baldosas verdes también aumentaba. En forma general y en relación con los elementos matemáticos involucrados, se dio un buen manejo de la información cuantitativa en relación al dominio y rango de variación.

Frente a la actividad 2, como el propósito de esta es *reconocer la relación de dependencia entre cantidades de magnitudes y su dirección de cambio*, se puede ratificar que la mayoría de los estudiantes reconoce la relación de dependencia entre magnitudes, hasta el punto de que en la plenaria, además de reconocer las magnitudes que cambiaban y su relación de dependencia, hubo casos en los cuales se evidenció que a pesar del cambio de la variable independiente, habían cantidades que se mantenían invariantes. Además de ello, mencionaron tanto de modo escrito como verbal, la manera cómo variaba esas magnitudes; acercándose a una noción específica como lo es la correlación directa de magnitudes.

Sobre la base de las consideraciones anteriores y en relación a la actividad 2, se puede manifestar que la mayoría de los estudiantes evidencian comportamientos que dan cuenta de acciones mentales que sustentan el nivel 1 y 2 del razonamiento covariacional. Entendiéndose que en el primer nivel: *“las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable”* y en el segundo nivel: *“las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra”* (Carlson et al., 2003). Esto es porque los estudiantes, primero reconocen la dependencia entre las variables, en otras palabras, advierten cambios en una variable cuando hay cambios en otra y segundo, describen cómo se da tal cambio entre esas variables, es decir, advierten que, si una variable cambia en un sentido, la otra también cambia en el mismo sentido o en el sentido opuesto.

De otro lado, en la actividad 3, además de que los estudiantes reconocen cantidades invariantes y logran cuantificarlas; éstos también logran llenar la tabla que se les sugiere en la pregunta 2. Estableciendo cierta relación numérica entre dos cantidades (cantidad de baldosas rojas y cantidad de baldosas verdes en la parte superior e inferior), es decir, observar que dos conceptos como doble y mitad que están relacionados; los cuales a la vez son inversos, pueden evidenciarse desde las dos columnas que hacen alusión a las cantidades nombradas con anterioridad. Sumado a esto, reconocieron una regla general para expresar la



cantidad de baldosas verdes en términos de la cantidad determinada de baldosas rojas. Esta regla o patrón no lo expresan matemáticamente, sin embargo, en su discurso natural mencionaban que dada una cantidad particular de baldosas rojas, está la sumaban dos veces y al resultado obtenido le adicionaban la cantidad de baldosas verdes que siempre permanece invariante. Lo que sí es claro, es que esto no es una generalización en toda su formalidad, dado que el dominio de lo simbólico algebraico no es algo que compete a ese grado de escolaridad, ni tampoco es condición necesaria para que los estudiantes a partir del reconocimiento de un patrón de variación sean capaces de anticipar o predecir la cantidad de baldosas verdes, conforme se les proponía una cantidad en particular de baldosas rojas. En esta parte de la actividad se puede evidenciar que los estudiantes muestran habilidades en la obtención de valores de salida en correspondencia con unos valores de entrada, a pesar de la ausencia de definiciones al concepto de función. Además, cuando los estudiantes reconocen que para una cantidad determinada de baldosas rojas hay un correspondiente valor asociado para la cantidad de baldosas verdes; se puede afirmar que, desde el punto de vista matemático, los estudiantes están considerando cambios en una variable en correspondencia con los cambios en la otra variable. A ello se suma el hecho de que cuando los estudiantes mencionan que 16 baldosas rojas no se pueden rodear por 33 baldosas verdes; están reconociendo la existencia de ciertas restricciones para el rango de una función, en este caso, para la cantidad de baldosas verdes.

En relación a los niveles de razonamiento covariacional, al igual que en la actividad 2, la mayoría de los estudiantes presento comportamientos relacionados con la identificación cantidades variables o constantes y reconocimiento de cambios en una variable como consecuencia de cambios en otra. Esto se reflejó cuando los estudiantes identificaban cambios en la cantidad de baldosas verdes cada vez que aumentaban una baldosa roja. Lo cual se pueden ver como comportamientos asociados a la Acción Mental 1 (AM1) y que ubica a la mayoría de estudiantes en el nivel del razonamiento covariacional 1 (N1).

Continuando con el desarrollo de la actividad, es evidente cómo la mayoría de estudiantes identifica regularidades aritméticas. Fueron esas mismas regularidades y algunos cálculos aritméticos relacionados el insumo básico para el manejo de un registro tabular, hasta el punto de obtener valores de salida correspondencia con unos valores de entrada. Así mismo, se infiere la atención que le dieron a la dirección de cambio de una variable

dependiente (cantidad de baldosas verdes) respecto al cambio de la independiente (cantidad de baldosas rojas), cuando se puede observar datos numéricos en la misma dirección o sentido en la tabla. El hecho de coordinar la dirección de cambio de una variable con los cambios en otra variable, hace que dicho comportamiento vincule a los estudiantes con la Acción Mental 2 (AM2).

A lo largo de los planteamientos hechos, se puede afirmar que la mayoría de estudiantes se pueden clasificar en un nivel de razonamiento covariacional N2, dado que sustentan a la Acción Mental 2 (AM2) y a la Acción Mental 1 (AM1) asociada con el nivel de razonamiento covariacional N1.

En cuanto al propósito de la actividad 3, se puede afirmar que se cumplió en gran parte con el propósito fundamental, se pretendía que los estudiantes cuantificaran cambios, que mostraran comportamientos asociados a la Acción Mental 3 (AM3), circunstancia que se vio reflejada cuando los estudiantes, además de coordinar el cambio y la dirección de una variable con los cambios en la otra, coordinaron la cantidad de cambio de una variable con cambios en la otra. Esto último, principalmente cuando advertían en su discurso oral que a medida que la cantidad de baldosas blancas aumentaban de uno en uno, la cantidad de baldosas verdes aumentaba de dos en dos. Razón por la cual, los estudiantes se pudieron clasificar en el nivel de razonamiento covariacional 3, (N3).

Del mismo modo, frente a la actividad 4 que tiene como propósito el analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación lineal. Se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes logra analizar el comportamiento de los cambios en una relación lineal, en la medida en que observaron que, al aumentar las baldosas rojas de uno en uno, las baldosas verdes aumentaban de dos en dos.

Además de lo anterior, los estudiantes logran generalizar esa relación entre esas dos cantidades, no en el sentido de expresar una expresión simbólica algebraica, pero si una expresión en lo que respecta al lenguaje natural. Mencionando lo siguiente:

*“Para saber la cantidad de baldosas verdes, el número de baldosas rojas las sumo dos veces y a lo que me dé le sumo 6”*

Finalmente, al considerar los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, se puede afirmar que los estudiantes presentaron unos resultados que revelan el desarrollo del siguiente estándar: *Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían*

*en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.* Teniendo en cuenta que el problema de las baldosas, más allá de implicar una relación de dependencia, puede ser modelado mediante una relación lineal.

#### **4.2 Conclusiones generales**

Con este trabajo se ha pretendido aportar información útil a un conjunto de estudios que intentan llevar al aula una nueva visión del pensamiento variacional en el currículo de primaria. De ahí que lo innovador de este estudio es que se planteó como objetivo general: *caracterizar la manera en que inciden las actividades de covariación en el desarrollo del pensamiento variacional y la emergencia o aproximación a algunos elementos matemáticos que subyacen al concepto de función en grado quinto de primaria.* En relación con este objetivo, y como consecuencia del análisis realizado, se detallarán aspectos cruciales y concluyentes del presente trabajo. Para esto, se hace una valoración sobre en qué medida se han conseguido los objetivos propuestos para la investigación.

En primer lugar, se *planteó documentar la problemática desde una perspectiva didáctica, curricular y matemática para el diseño y puesta en acto de actividades de covariación.* En relación a ese primer objetivo específico, se puede decir que se ha abordado en su totalidad en los capítulos uno y dos, debido a que en el rastreo hecho mediante los antecedentes, se puede afirmar que en primaria se pueden llevar ciertos procesos en relación con el desarrollo del pensamiento variacional que vayan más allá del manejo de regularidades y patrones de variación, en otras palabras, los estudiantes tienen la capacidad de atender a la covariación que pueden tener ciertas cantidades, reconociendo ciertas relaciones de dependencia y de la forma cómo puede emerger una regla que gobierne sobre esas relaciones.

Frente a lo anterior, desde lo didáctico se pudo conocer un instrumento que sirve para clasificar las acciones de los estudiantes en términos de sus comportamientos en relación al pensamiento variacional, el cual contiene unos criterios que permiten ubicar a un estudiante en un determinado nivel del razonamiento covariacional. Además de ello, se resalta la importancia de poder hacerles un seguimiento a los estudiantes, tal como lo menciona Carlson (et al, 2003), una primera respuesta o indicio que parezca adecuado, no es suficiente, principalmente porque hay razonamientos pseudo analíticos que no necesariamente dan cuenta de un desarrollo pleno del pensamiento variacional.

En cuanto a lo curricular, queda claro que se propone analizar, organizar y modelar situaciones y problemas desde cualquier contexto que se origine desde la variación. Lo cual implica que un individuo reconozca, perciba, identifique y caracterice la variación desde diferentes contextos, sin dejar a un lado su descripción, modelación y representación desde diferentes registros simbólicos.

Ahora bien, desde lo matemático a pesar de que se encontró con unas definiciones algo convencionales que aluden a un saber sabio, en el cual la función está dada en términos de una visión conjuntista, es importante que en la enseñanza de ese concepto y de los elementos que abarca se realice de una manera dinámica, esto quiere decir que se reconozca que la función intenta modelar situaciones de variación y cambio.

Todo lo mencionado hasta el momento, hizo parte del análisis previo de la problemática desde diferentes perspectivas, de ahí que no se consideran cuestiones aisladas, sino que por el contrario se detectaron ciertos aspectos complementarios para la finalidad de la investigación. Al interpretar el concepto de función junto a sus elementos, no solo desde lo formal, sino desde lo dinámico; se reconoce que en algún momento de la historia esas definiciones canónicas emergieron de diferentes contextos. De esta manera, el hecho de no mencionarse el término covariación desde lo curricular, no quiere decir que no lo considere, dado que en el ciclo de cuarto a quinto se propone como meta que los estudiantes analicen y expliquen relaciones dependencia entre cantidades. Es en ese aspecto donde se nota la complementariedad, principalmente porque los niveles del razonamiento covariacional se convierten en ese instrumento que da cuenta de cómo los estudiantes perciben y caracterizan la variación, que no solo atiende al cambio que se da en una sola magnitud, sino cuando el cambio de una magnitud hace que otra también cambie, en ese caso se está hablando de la covariación.

En relación con el segundo objetivo específico, *articular los elementos teóricos en una propuesta de aula que involucre actividades de covariación con un grupo de estudiantes de quinto de primaria*, se considera que también se cumplió. Desde lo didáctico, fue importante prever con antelación desde las preguntas que conformaban las actividades, algunas acciones mentales que podrían reflejar los estudiantes desde sus comportamientos; así mismo desde lo curricular, fue crucial el hecho de seleccionar situaciones donde la covariación fuera sustrato de ellas y frente a lo matemático, un hecho significativo consistió

en reconocer que tales nociones involucradas con la función lineal, debían abordarse desde un enfoque diferente, que tomara una distancia de la manera como se aborda en los grados octavo y noveno donde el dominio de lo simbólico-algebraico es un componente fuerte.

De otro lado, y en términos del tercer objetivo, *analizar las actuaciones de los estudiantes desde el Marco conceptual del Razonamiento Covariacional para identificar algunos rasgos y elementos matemáticos que subyacen al concepto de función según el trabajo con situaciones de covariación*, los resultados de los estudiantes, en torno a las preguntas de las actividades y sus respectivos análisis, pusieron de manifiesto la caracterización de la manera en que inciden las actividades de covariación en el desarrollo del pensamiento variacional y la aproximación a algunos elementos matemáticos que subyacen al concepto de función lineal en el grado quinto de primaria. A continuación, se explicitan algunas conclusiones respecto a ello:

- ❖ El marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) sirvió no solo para categorizar a los estudiantes en unos determinados niveles de razonamiento covariacional para las situaciones presentadas, sino para determinar de manera detallada el avance del razonamiento a medida que afrontaban las situaciones. En dicho razonamiento fue evidente el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función lineal: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de la función (variación directa e inversa) y la pendiente desde la razón de cambio. Esta conclusión se hace mediante los resultados de las actuaciones de los estudiantes en cada una de las actividades que conformaban las situaciones 1 y 2, en el cual las preguntas tenían la intención de observar elementos presentes en el discurso de sus explicaciones con la finalidad de obtener información acerca de la manera en que estaban comprendiendo las situaciones. Así mismo, los comportamientos observados en los estudiantes dan cuenta del porqué se les clasificó en el nivel N3 de razonamiento covariacional del marco conceptual propuesto por Carlson, debido a que los estudiantes, en sus actuaciones describieron el comportamiento del cambio tanto desde cualitativo como de lo cuantitativo.
- ❖ Igualmente, a pesar de que en el marco conceptual de Carlson et al. (2003), el razonamiento covariacional se define en términos de acciones mentales, las cuales

están íntimamente relacionadas a comportamientos y que a su vez éstos están vinculados a gráficos cartesianos. Se puede afirmar que tal razonamiento se define independientemente del uso de gráficos, aunque no se niega que los niveles más altos del marco parecen difíciles de alcanzar sin el apoyo de ellos. Razón por la cual, en las situaciones se limitó la interpretación de la razón de cambio al prescindir de este tipo de representación, por el hecho de que en determinado grado los estudiantes no tenían suficientes bases de conocimiento para el uso del gráfico cartesiano.

- ❖ Las situaciones escogidas fueron un medio potente en cuanto al estudio de la covariación en primaria, dado que en cada una de ellas estuvo presente una relación funcional, es decir, que para el problema de los cumpleaños de Lupe estuvo la función  $f(x) = 2x + 2$  y para el problema de las baldosas la función  $f(x) = 2x + 6$ . Además de ello, fueron situaciones que se lograron movilizar desde el plano concreto, dicho de otra manera, el uso de material manipulativo facilitó la comprensión de cada una de ellas en cuestiones de la exploración.
- ❖ Un asunto notable en la interpretación de las respuestas tanto escritas como orales, tiene que ver con el acercamiento que tuvieron los estudiantes a lo que tenía que ver con el dominio y rango de variación. Un acercamiento que realizaron no en el sentido en que se realiza en octavo y noveno, precisamente porque ellos de manera inconsciente, es decir, sin tener presente el manejo de tales términos, lograron atribuir características al conjunto dominio y al conjunto rango. Por un lado, no les fue complejo expresar que en el dominio las cantidades cambiaban de uno en uno; por otro lado, para el rango no dudaron en expresar que solo admitía valores numéricos pares. Esto permite concluir, que los estudiantes tal vez no usaron un vocabulario al nivel del que lo hace un estudiante de octavo y noveno que ha comprendido lo que implica el dominio y rango de una función, pero sus respuestas se convierten en unos indicios que permiten inferir que un estudiante de quinto de primaria en el análisis de la relación de dependencia de dos cantidades, puede descartar ciertas cantidades o atribuirles ciertas características para el dominio y rango de una función.
- ❖ En cada una de las dos situaciones fue crucial el uso de la representación tabular, en cuestiones del análisis que realizaban los estudiantes al describir el comportamiento de los cambios, dado que mediante las tablas lograron sustentar verbalizaciones

asociadas a la coordinación del cambio, a la dirección y a la coordinación cuantitativa de tales cambios. Tal es el caso que en la situación 2, específicamente en la actividad 2, las preguntas que estaban relacionadas a la dirección de cambio, se diseñaron con la finalidad de que los estudiantes respondieran de manera cualitativa, sin embargo, la mayoría, además de describir esos cambios, también realizaba la cuantificación de los mismos.

- ❖ En relación al protocolo de aplicación de cada una de las situaciones, las plenarias fueron una herramienta muy importante en varios aspectos. Por un lado, permitieron ampliar la información que proporcionaban los estudiantes, no solo con el ánimo de realizar correcciones, sino que también permitía que los estudiantes replantearan sus ideas; por otro lado, mediante la plenaria sus discursos se presentaban más fluidos y acompañados de otros gestos que para la investigación fueron importantes.
- ❖ Otro aspecto de suma importancia tuvo que ver con el uso de material concreto en las dos situaciones, debido a que esto permitió en gran manera que los estudiantes comprendieran mejor las situaciones y para ellos las actividades asignadas fueran más vivenciales. En este sentido, se ratifica la idea de que en primaria los conocimientos matemáticos deben tener una vía que en primera instancia considere lo concreto, después lo pictórico o representaciones y después si lo abstracto; por ejemplo, mediante esta investigación que implico dos situaciones, cuyo trasfondo guardaba relación con ciertas funciones, se vio la importancia de material manipulativo para que los estudiantes fueran testigos de ciertas variaciones.

#### **4.3 Algunas reflexiones finales**

En este apartado hacen explícitas algunas reflexiones didácticas, como consecuencia de los resultados obtenidos de este estudio, dando cuenta del cuarto objetivo específico de este trabajo: Aportar reflexiones de carácter teórico y metodológico a la enseñanza de elementos matemáticos preliminares al concepto de función desde la covariación.

- ❖ Este trabajo permite evidenciar que la idea de covariación es accesible a los niños de un nivel básico de primaria, hasta el punto en que la misma está presente en situaciones de la vida cotidiana, de otras ciencias, de la matemática misma. Donde las relaciones dependencia pueden modelarse desde cualquier tipo de función; es así

como el acercamiento a elementos matemáticos que subyacen a tal concepto, no necesariamente es exclusivo de los grados octavo y noveno.

- ❖ En relación a los aspectos metodológicos implementados en la puesta en acto del diseño, se hace relevante el hecho de que los estudiantes de quinto grado no habían trabajado previamente con algunos elementos matemáticos. De esta manera, los educandos exploraron, a través de procesos heurísticos, algunos elementos que subyacen al concepto de función. Cabe aclarar en esta parte, que los estudiantes trabajaron con dichas nociones asociadas a la función de manera implícita, por lo cual, los estudiantes no reconocían estos conceptos con nombres específicos o definiciones formales. En este orden de ideas, es necesario que la Institución Educativa siga implementando en la práctica de la enseñanza de las matemáticas, actividades o tareas que potencialicen el pensamiento variacional en la escuela, y además de ello, potencialicen de manera aproximada el estudio de la función desde los primeros grados de escolaridad, para así, forjar una base sólida que sea de ayuda en el grado noveno, que es donde se trabaja dicha noción a profundidad.
- ❖ Los resultados que se revelan en este estudio deben mostrarse útiles para que en el currículo de primaria, desde el diseño de actividades o propuestas de aula se pueda considerar el estudio de elementos matemáticos asociados al concepto de función desde una perspectiva covariacional. Dado que el estudio de este concepto, no debería ser exclusivo de algunos grados de secundaria; específicamente porque la relación de dependencia de cantidades es un asunto tratable por los estudiantes desde los niveles más básicos de primaria.

#### **4.4 Líneas de continuación**

Se destaca una primera línea abierta que deja esta investigación, la cual se centra en establecer comparaciones entre elementos que se relacionan con el razonamiento covariacional. Por ejemplo, se puede desarrollar una comparación entre investigaciones que consideren las mismas situaciones para estudiantes de diferentes edades.

Otro aspecto que se considera para futuras investigaciones tiene relación con la formación de profesores, centrado en el fortalecimiento del pensamiento variacional. Se valora el aporte de la información empírica que da cuenta de forma como los estudiantes razonan cuando se involucran con situaciones de covariación, pero se cree que hay un desafío



para que los docentes posean un conjunto de herramientas que les permita hacer un seguimiento de la manera como el pensamiento variacional se va fortaleciendo en los estudiantes, en ese caso el marco conceptual del razonamiento covariacional es una herramienta que permite clasificar las actuaciones de los estudiantes cuando abordan situaciones que implican las relaciones de dependencia entre cantidades.

### **Referencia bibliográfica.**

- Angulo, J, Mina, S y Valencia, J. (2011). Una secuencia didáctica como herramienta pedagógica para introducir el concepto de función lineal en grado 9°. Buenaventura, Colombia.
- Butto, C., & Rojano, T., (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno logo. *Educación Matemática*, 22 (31), 113-148.
- Cabezas, C., & Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria*, 9 (6), 13-25.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.
- Castaño, L., García, J., Luján, M., Medina, C., Ruiz, J., & Trejos, E. (2008). Las situaciones de variación y cambio como herramienta para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático desde los primeros grados de escolaridad. Trabajo de grado. Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.
- Castro, E. (1995). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori
- Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno*, 54, 55-67.
- Del Castillo, A & Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 568-580. México.
- Godino, J. (2003). Razonamiento algebraico para maestros. Recuperado el 7 de septiembre de 2011 de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>.
- Grueso, R., & Gonzáles, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

- Henao, R. D. (2007). Situaciones sobre el pensamiento variacional. Módulo 7. Medellín.
- Henao, M., Marín, W., Montoya, D., & Restrepo, J. (2012). *Razonamiento covariacional en estudiantes de grado quinto*. Universidad de Antioquia, Antioquia, Colombia.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación (Cuarta ed). México, D.F.: McGraw - Hill Interamericana.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa. (1995). Capítulo 17. Investigar y Enseñar. Universidad de los Andes. Una empresa docente. Pp. 1-24.
- Mancilla, E., Sarmiento, G., & Barriosnuevo, S. (2012). Título del artículo: Sistemas de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en quinto grado de educación básica primaria. *Escenarios*, 10 (1), 7-16. Recuperado de [http://ojs.uac.edu.co/index.php/escenarios/article/view/721/pdf\\_17](http://ojs.uac.edu.co/index.php/escenarios/article/view/721/pdf_17).
- Mason, J. (1985). *Rutas hacia el Álgebra y Raíces del álgebra*. (C. Agudelo, Trad.) Tunja, Colombia. Tunja: UPTC.
- Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Universidad de Granada, España.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2002) "Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías". En: Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, evento organizado (Bogotá, D.C., 8 al 10 de mayo de 2002), (pp. 68-77)
- Molina, M., (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento Algebraico en educación primaria. PNA, 3(3), 135-156.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad.

- Castellana, Principios y Estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).
- Pinto, E. (2016). Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria. Universidad de Granada, España.
- Posada, F. (2006). Serie didáctica de las matemáticas: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico (Vol. 2). Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Posada, F & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Universidad de Antioquia, Antioquia, Colombia.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Villa Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), pp. 9-25.
- Zapatera, A. (2016). Cómo desarrollar el pensamiento algebraico. *Revista Uno*. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=2009>.

## ANEXOS

Anexo 1: Contenido de la propuesta de aula

A continuación se presentan las dos situaciones, cada una de ellas se aplicó en 4 sesiones y cada sesión duro aproximadamente 1 hora y 20 minutos. Adicionalmente, se presenta el desarrollo de una situación por un estudiante en particular.



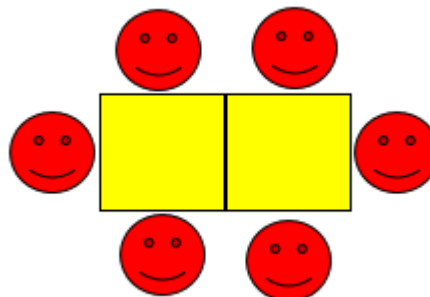
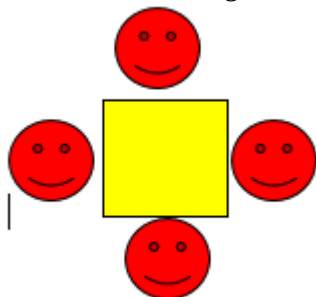
UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE NORTE DEL CAUCA  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
Guía para los estudiantes

**Situación 1:** Estudio de la covariación a través de la relación de personas y mesas.

### ***EL CUMPLEAÑOS DE LUPE*** *Realizar en grupos de 2 estudiantes*



Lupe celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a comer una torta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas en fila, y coloca a los niños sentados como puedes ver en las imágenes.



Las condiciones que se tienen que cumplir son las siguientes:

- Cada niño tiene que ocupar un lado de la mesa.
- Los niños no se pueden sentar en las esquinas de las mesas.
- En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

### **ACTIVIDAD 1: Comprendiendo la situación**

1. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 5 mesas?

.....  
.....

2. Y si tenemos 10 mesas, ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer? Explica cómo lo has averiguado.

.....

3. Si se duplica el número de mesas, ¿Se duplica el número de total de personas? Explica:

.....

4. Para determinar cuántos niños en total pueden sentarse, ¿Qué se necesita saber?

.....

5. Si se juntaran más mesas, ¿Qué pasaría con la cantidad de niños que se pueden sentar? Explica:

.....

6. ¿Qué sucede con el número de niños que se sientan a los extremos de la fila de mesas, cada que se juntan más de estas? Explica:

.....

## ACTIVIDAD 2: Reconocer dependencia entre variables y generalización

1. De acuerdo a las imágenes presentadas con anterioridad completa la siguiente tabla:

| Número de mesas<br>juntadas | Cantidad de niños que NO<br>están en los extremos | Número de niños<br>sentados a los extremos. | Total de niños<br>sentados |
|-----------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------|
| 1                           |                                                   |                                             | 4                          |
|                             | 4                                                 | 2                                           | 6                          |
|                             | 6                                                 |                                             | 8                          |
|                             |                                                   |                                             | 10                         |
|                             | 10                                                | 2                                           |                            |
| 6                           |                                                   |                                             |                            |
| 7                           |                                                   |                                             | 16                         |
|                             |                                                   | 2                                           | 18                         |
| ...                         | ...                                               | ...                                         | ...                        |

Usando la información de la tabla que completaste, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relación numérica encuentras entre el número de mesas y la cantidad de estudiantes que **NO** están en los extremos? Es decir, si conoces la cantidad de mesas, ¿Cómo hallarías la cantidad de niños que **NO** están en los extremos?

.....

2. ¿Qué relación numérica hay entre la cantidad de niños que **NO** están en los extremos, con los niños que están sentados en los extremos y la cantidad total de niños sentados? Es decir, que, si conoces el número de niños que **NO** están en los extremos y el número de niños que están en los extremos, ¿Podemos saber el total de niños sentados?

.....

3. Supóngase que se juntan 100 mesas, ¿Cuántos niños podrían sentarse en total? Explica como lo has averiguado:

.....  
 .....  
 4. Ahora, supongamos que conoces el número de mesas que hay ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de niños que pueden sentarse a comer?  
 .....  
 .....

### ACTIVIDAD 3: Razón de cambio

De acuerdo con la información de la tabla del ítem 2.1 responde lo siguiente:

1. Dadas las condiciones de la situación, y si estas se mantienen, ¿es posible que haya 7 personas sin que sobre o quede algún asiento vacío?  
 .....  
 .....

2. ¿Cuántas mesas crees que se podrían juntar en total?  
 .....  
 .....

3. Suponiendo que se ha juntado un número muy grande de mesas, ¿Cuántos niños crees que se podrían sentar?  
 .....  
 .....

4. Cada que se junta una mesa a la fila, ¿Cuántos niños más se pueden sentar? ¿Sucede lo mismo cada que se junta una mesa de más?  
 .....  
 .....

5. Juan establece que cuando se tiene 3 mesas y 9 mesas por otro lado, si se aumenta una mesa en cada caso, la cantidad de personas que aumenta será en cada caso, será distinta, siendo más en la de 9 mesas. Determina la validez de esta afirmación.  
 .....  
 .....

**ACTIVIDAD 4:** Ahora imagínense que para la fiesta solo están disponibles 20 mesas, en las cuales los niños se sientan según el orden de llegada.

Lupe quiere observar qué sucede con el **número de mesas desocupadas** a medida que los niños van llegando y al mismo tiempo se van ocupando las mesas; para ello elaboró la siguiente tabla:

1. Completa los datos que faltan en la tabla.

| Número de niños que llegan | Número de mesas ocupadas | Número de mesas desocupadas |
|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 0                          | 0                        | 20                          |
| 4                          | 1                        | 19                          |
| 6                          | 2                        |                             |
| 8                          |                          |                             |
|                            |                          | 16                          |

|    |    |    |
|----|----|----|
|    | 5  |    |
|    |    | 14 |
| 16 |    |    |
|    |    | 12 |
|    | 9  |    |
| 22 |    |    |
|    | 11 |    |
|    |    | 8  |

**Nota:** Recuerda que las mesas deben disponerse una seguida de otra, como se presentó inicialmente.

2. Describe ¿cómo varían o cambian las cantidades de la columna **Número de mesas ocupadas**?

.....  
.....

3. Ahora describe ¿cómo cambian las cantidades de la columna “**Número de mesas desocupadas**”?

.....  
.....

4. ¿Cómo cambian las cantidades de la columna “**Número de niños que llegan**”?

.....  
.....

5. A medida que llegan los niños, describe lo que sucede con el número de mesas desocupadas

.....  
.....

6. A medida que aumenta el número de mesas ocupadas, describe lo que ocurre con el número de mesas desocupadas

.....  
.....

7. Dado el caso que a la fiesta llegaran 60 niños, ¿es posible que todos se puedan sentar en una mesa? Explica

.....  
.....



**Situación 2:** Estudio de la covariación a través del recubrimiento con baldosas

**EL PROBLEMA DE LAS BALDOSAS**

*Realizar en grupos de 2 estudiantes*

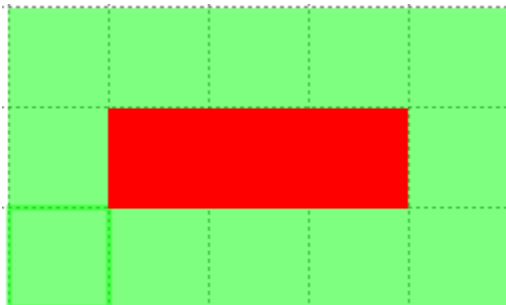
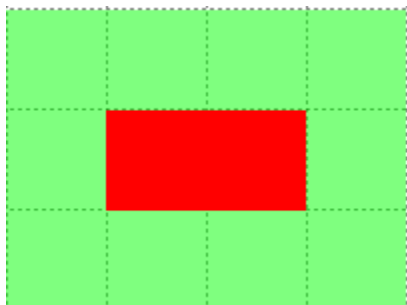
Una escuela quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está muy estropeado, por lo tanto, el equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas rojas y con baldosas verdes. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la siguiente manera:



La escuela contrata a una empresa para que reforme los pasillos. Te pedimos que ayudes a los albañiles a resolver las siguientes inquietudes:

**ACTIVIDAD 1: Comprendiendo la situación**

**1.** A continuación se muestra la cantidad de baldosas verdes que se necesitan para rodear 2 y 3 baldosas rojas:



A partir de lo anterior, haciendo uso del material dado averigua ¿cuántas baldosas verdes necesitas para rodear 4 y 5 baldosas rojas?

.....

2. Natalia afirma que para un pasillo de 6 baldosas rojas se requieren para rodearlas 16,5 baldosas verdes y que para un pasillo con 7 baldosas rojas se necesitan 21 baldosas verdes. Comprueba a través del material si esto es posible y verifica si Natalia está en lo correcto.

.....

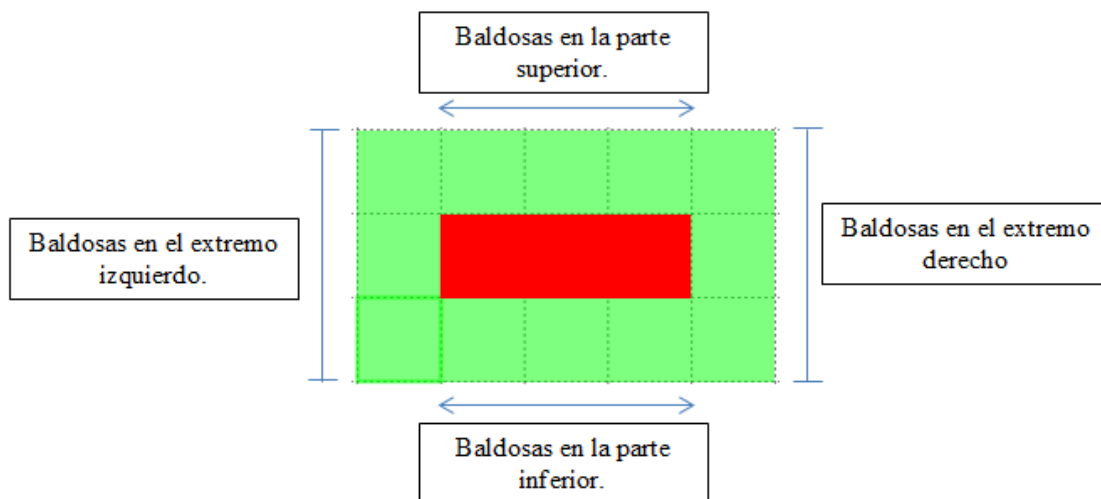
3. Explora y averigua si es posible que cualquier cantidad de baldosas rojas sean rodeadas en algún caso por una cantidad impar de baldosas verdes. Explica tu respuesta.

.....

.....

## ACTIVIDAD 2: Reconocer dependencia entre variables

1. En la siguiente imagen se pueden observar las cantidades que se van dando en cada recubrimiento:



Utilicen el material dado y describan lo que sucede con estas cantidades cada vez que se realicen diferentes recubrimientos.

- a. Baldosas en la parte superior.....
- b. Baldosas en la parte inferior.....
- c. Baldosas en el extremo izquierdo.....
- d. Baldosas en el extremo derecho.....

2. A medida que cambia la cantidad de baldosas rojas, escribe lo que sucede con la cantidad de baldosas verdes en los extremos izquierdo y derecho.

.....

.....

3. A medida que cambia la cantidad de baldosas rojas, escribe lo que sucede con la cantidad de baldosas verdes en la parte superior e inferior.

.....

.....

4. ¿De qué depende la cantidad total de baldosas verdes en cada recubrimiento? Explica tu respuesta.

.....

### ACTIVIDAD 3: Cuantificando los cambios

1. Ayúdale a un albañil a saber cuántas baldosas verdes en total necesita para el suelo de un pasillo en el que se colocan:

a. 10 baldosas rojas      b. 15 baldosas rojas      c. 20 baldosas rojas

2. Complete la siguiente tabla

| Cantidad de baldosas rojas | Cantidad de baldosas verdes que están en la parte superior e inferior | Cantidad de baldosas verdes que están la parte derecha e izquierda. | Cantidad total de baldosas verdes que se necesitan |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 10                         |                                                                       |                                                                     |                                                    |
| 11                         |                                                                       |                                                                     |                                                    |
| 12                         |                                                                       |                                                                     |                                                    |
| 13                         |                                                                       |                                                                     |                                                    |
| 14                         |                                                                       |                                                                     |                                                    |
| 15                         |                                                                       |                                                                     |                                                    |

2.2. De acuerdo a lo que observas en la tabla. Ayuda al albañil a encontrar la relación numérica entre la cantidad de baldosas rojas y la cantidad de baldosas verdes que están en la parte superior e inferior.

.....

.....

3. ¿Es posible que si tienes 16 baldosas rojas necesites 33 baldosas verdes para rodearlas? Explica tu respuesta

5. Sin utilizar el material concreto y sin dibujar todas las baldosas rojas, como le explicarías a tus compañeros que se debe hacer para determinar la cantidad de baldosas verdes que le corresponden a 50 baldosas rojas.

a).



Si cuadruplico la cantidad de baldosas rojas y le adiciono 10, obtendré la cantidad total de baldosas verdes que necesito

$$4x \text{ [red square]} + 10 = \text{ [green square]}$$

b).



Si duplico la cantidad de baldosas rojas y le adiciono 2, obtendré la cantidad total de baldosas verdes que necesito

$$2x \text{ [red square]} + 2 = \text{ [green square]}$$

c).



Si duplico la cantidad de baldosas rojas y le adiciono 6, obtendré la cantidad total de baldosas verdes que necesito

$$2x \text{ [red square]} + 6 = \text{ [green square]}$$

**4.1** ¿Cuál de las tres fórmulas que encontró Camilo crees que es la correcta? Explica tú respuesta

.....  
.....

**4.2** Para verificar si escogiste la formula correcta abre el siguiente link <https://www.geogebra.org/m/quxyggyt> y en cada uno de los cuadros rojos remplaza valores numéricos para ver en cuál de las formulas se construye el modelo de recubrimiento que se presentó inicialmente. ¿Cuál expresión es la adecuada?

.....  
.....

**5.** Ahora que ya conoces una posible formula que le permite a los albañiles saber la cantidad de baldosas verdes que se necesitan para rodear una cantidad cualquiera de baldosas rojas, trata de averiguar ¿Cuántas baldosas verdes son necesarias para rodear 150 y 300 baldosas rojas?

.....  
.....