Vol. XIX, Nº 2, Diciembre (2011)
Educación e Historia: 107–116

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Explorando las sombras: una bonita relación entre matemáticas y astronomía

Lyda C. Mora M.
Universidad Pedagógica Nacional

Deysi L. Roldán H.
Universidad Pedagógica Nacional

Claudia M. Vargas M.
Universidad Pedagógica Nacional

Recibido Nov. 24, 2010 Aceptado Abr, 14. 2011

Abstract

To continue to describe a relationship within one element is extremely useful in Astronomy: the shadow, and others for the theory of mathematics: the gnomon. In the beginning, they branch off from initiative ideas which before are tried and generalized with a base in the easy physical experiment which allows us to present some characteristics of the shadow, like it's importance in measuring big distances, displaying the method invented by Eratostenes: it's been twentytwo centuries to measure the circumference of Earth. Finally you show some mathematical results in the relationship with gnomons, obtaining a part of the process like the visualization and the generalization of the regularities.

Keywords: mathematics, astronomy, shadow, gnomon, circumference of the Earth, detection of talents, juvenile clubs, talent, visualization, generalization, origin, manipulated material.

Resumen

A continuación se describe una relación entre un elemento muy útil en Astronomía: la sombra, y otro de interés para las Matemáticas: el gnomon. Inicialmente, se parte de ideas intuitivas que posteriormente son comprobadas y generalizadas con base en un sencillo experimento físico, que permiten presentar algunas características de la sombra, así como su importancia en la medición de distancias relativamente grandes, ejemplificando el método empleado por Eratóstenes hace 22 siglos para medir la circunferencia de la Tierra. Para finalizar, se muestran algunos resultados matemáticos en relación con los gnómones, obtenidos a partir de procesos como la visualización y la generalización de regularidades.

Palabras y frases claves: Matemáticas, astronomía, sombra, gnomon, circunferencia de la Tierra, detección de talentos, club juvenil, talento, visualización, generalización, originalidad, material manipulable.

1 Introducción

El documento que se presenta a continuación es producto del trabajo llevado a cabo en el espacio académico de práctica educativa en Contextos Educativos Amplios del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas desarrollada en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional durante el primer semestre de 2010. El Club de Matemáticas ha sido, desde 2005 - II, un espacio de enriquecimiento, que ha atendido a jóvenes entre 12 y 17 años provenientes de distintos colegios distritales o municipales, la mayoría de ellos, estudiantes que pertenecen a instituciones educativas que tienen o tuvieron convenio con el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, a través de la Práctica Educativa del mismo Departamento (CAMPOS, GONZÁLEZ Y MORA, 2007). Para el semestre mencionado, uno de los cursos propuestos para el Club fue Matematícas y Astronomía, curso en el cual se obtuvieron algunas de las ideas aquí consignadas, de parte de los participantes del Club.

2 Concepciones iniciales

Diariamente se pueden ver [1] las sombras que producen los objetos. Dentro de las más simples y comunes que se encuentran es la que produce el cuerpo humano sobre el suelo, observable al caminar de día o de noche, muchas veces sin darle la mayor importancia pues se desconocen sus utilidades, los elementos necesarios para que se produzca, la dependencia en la variación de la longitud, entre otras cuestiones. Inicialmente y antes de caracterizarla, se consideró en el curso Matemáticas y Astronomía lo que se entendía por sombra, es decir su definición.

Definiendo sombra como una región de oscuridad donde la luz es obstaculizada por un objeto opaco [2], para que se produzca una sombra, además de una fuente luminosa y un objeto no traslúcido, debe existir una superficie de proyección. Dada esta definición y los elementos necesarios para que una sombra se produzca, se propuso a los estudiantes dar respuesta a los siguientes interrogantes con base en sus experiencias y creencias personales, sin recurrir a ninguna consulta ni experimento:

1. ¿Cómo es la sombra en forma, longitud y dirección de un objeto Q que se encuentra a x distancia de un foco luminoso sobre la horizontal de la base del mismo objeto?

2. ¿Qué sucede con la longitud de la sombra si la distancia x varía (más cerca, más lejos)?

3. ¿Qué sucede con la sombra, si la posición del foco varía manteniendo fija la distancia x?

4. Teniendo en cuenta la figura 1, en la que cada circunferencia representa siete posibles posiciones de un foco luminoso, donde y es la altura de un trozo de madera ubicado en posición vertical, y x es la distancia entre la base del trozo de madera y el foco luminoso, dibujar cómo es la sombra en forma, longitud y dirección, en cada uno de los diferentes momentos determinados por las siete posiciones del foco.

[1] Los verbos observar, ver, mirar y contemplar no significan lo mismo. La observación es el proceso más completo pues lo preceden el contemplar, el ver y el mirar, en ese orden. Es así como para los astrónomos observar significa medir, es decir traducir en números los fenómenos naturales objeto de estudio

[2] Consultar el significado de *sombra* en el diccionario en línea DRAE de la Real Academia Española

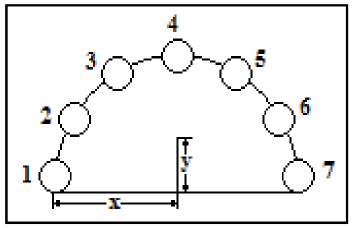


Figura 1: Posiciones del foco luminoso

Después de proponer tales preguntas a los estudiantes y de haber sido dadas sus respuestas, se pasó a comprobar tales imaginarios.

3 Comprobando las concepciones

Para la corroboración de tales imaginarios, se sugirió realizar el siguiente experimento: tomar una caja con siete orificios (figura 2) que simulen las posiciones del foco luminoso dadas en la figura 1, colocar un objeto dentro de la caja y observar qué pasa en cada uno de los momentos, dibujando cómo es la sombra en cuanto a longitud, forma y dirección, variando las posiciones del objeto.

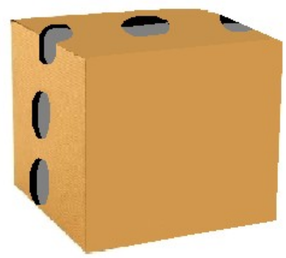


Figura 2. Caja con orificios

Las preguntas anteriores junto con el experimento, permitieron a los estudiantes, caracterizar las sombras en cuanto a su forma, longitud y dirección, siendo indistinta tanto la intensidad como el tamaño de la fuente luminosa, pero de relevancia la superficie sobre la que ésta es proyectada, debiendo ser plana y horizontal. En la siguiente tabla se consignan algunos resultados obtenidos de la experiencia:

Característica	**Si el foco luminoso se encuentra sobre el plano que contiene la base del objeto**	**Si el foco luminoso se encuentra en cualquier punto del espacio**
Respecto a la forma de la sombra	• Es más ancha y más larga que el objeto. • Vista superiormente, es un triángulo, con vértice en el punto de contacto entre el objeto y una superficie sobre la que éste se encuentra; es decir, la sombra no conserva la forma del objeto.	Conserva la silueta del objeto que obstaculiza la luz.
Respecto a la longitud de la sombra	• Aumenta/disminuye si la distancia entre el objeto y el foco disminuye/aumenta. • Siempre es mayor que la longitud del objeto.	A medida que el foco asciende en el espacio, la longitud de la sombra disminuye, hasta ser casi nula cuando el foco es perpendicular al objeto; es decir, cuando se encuentra encima de éste. Y, mientras el foco desciende, la longitud de la sombra aumenta.
Respecto a la dirección de la sombra	• Si el foco está a la derecha/izquierda del objeto, la sombra se proyecta a la izquierda/derecha del mismo. • Va en la misma dirección de los rayos de luz.	Si el foco está a la derecha/izquierda del objeto, la sombra se proyecta a la izquierda/derecha del mismo.

Como se ha visto, a partir de la definición y los elementos necesarios para que se produzca una sombra, se dieron sus características (respecto a una superficie plana) y los factores que influyen en su forma, dirección y longitud. La figura 3 recrea cada uno de los momentos de la situación propuesta en la pregunta 4 y resume, a grandes rasgos, las características de la sombra mostrando su dependencia de la fuente luminosa.

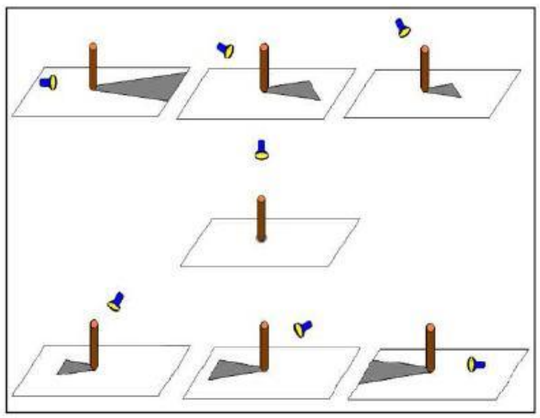


Figura 3: Sombra de un palo vertical

Dentro del desarrollo de la actividad, se hizo necesario indagar sobre utilidades de la sombra a través de la historia, encontrando que antiguamente, estas fueron utillizadas para realizar mediciones astronómicas importantes en las que se hizo uso de los conocimientos y desarrollos matemáticos conocidos hasta la época. De esta manera, civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la griega hicieron uso de la sombra proyectada por un gnomon (palo puesto verticalmente sobre el suelo) para realizar mediciones del tiempo y obtener, entre otras, la medida de la circunferencia de la Tierra. Esta última, fue una técnica desarrollada por Eratóstenes en el siglo II a. de C, técnica que además de ser asombrosamente sencilla, pues requirió solamente de un gnomon y de las sombra que éste proyectaba gracias al Sol, hizo uso de relaciones matemáticas como la congruencia y correspondencia de ángulos, algunas razones trigonométricas y proporcionalidad. Tal medición es admirable por la gran proximidad a los cálculos establecidos hoy en día con la amplia tecnología con la que contamos.

4 La medida de la circunferencia de la Tierra

El método desarrollado por Eratóstenes consistió en colocar al mediodía un gnomon de longitud igual a 1 metro en Alejandría y medir la sombra que éste producía, aproximadamente 12 cm. Sabiendo que ese mismo día (21 de Junio, día más largo del año) a la misma hora en Siena, un gnomon de igual longitud no producía sombra alguna, determinó que el ángulo formado por los rayos del Sol y el gnomon ubicado en Alejandría (en la figura 4) y el ángulo formado por la proyección de los rayos del Sol sobre el gnomon ubicado en Siena y la proyección del gnomon ubicado en Alejandría (en la figura 4), resultan congruentes; esto es, bajo la suposición de que los rayos del Sol inciden paralelamente entre ellos y perpendicularmente sobre la superficie de la Tierra, por ser ángulos alternos internos entre las paralelas, formadas por los rayos del Sol. Luego, debía medir la distancia en estadios [3] entre Alejandría y Siena [4], lo cual le dio un aproximado de 5000 estadios. Finalmente, determinó la medida del haciendo uso de la razón trigonométrica, ya utilizada por los griegos desde la antigüedad. De esta forma dedujo que, de donde obtuvo que. Con esto, pudo concluir que si 800 km correspondían a 7°, entonces los 360° correspondían a la circunferencia total de la Tierra, la cual dio una aproximación de 41.142,85 km [5].

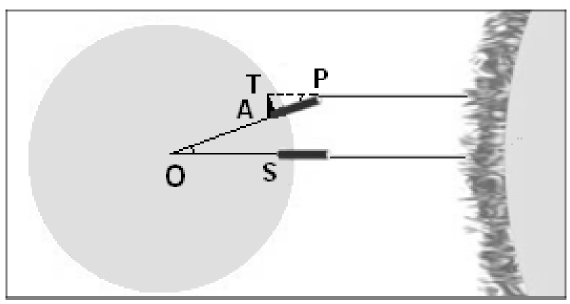


Figura 4. Método de Eratóstenes

5 Más sobre gnómones

Matemáticamente, los pitagóricos emplearon los gnomones en la construcción de números[6], tales como los triangulares, cuadrados, pentagonales, etc., para describir todo lo que añadido a un número o a una figura produce un todo semejante a aquello que ha sido añadido. Es decir, un gnomon (en matemáticas) se define como cantidad (número natural) que es necesario añadir (sumar) a un número para que se convierta en el siguiente de la misma familia (ARENZARA, BUERA Y HERRERO, 2004).

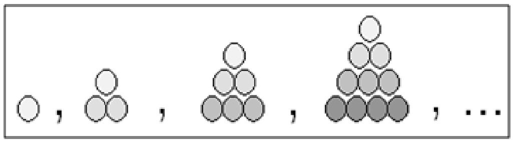
[3] Unidad de longitud griega utilizada en la época antigua, cuyo patrón de longitud era el estadio de Olimpia y equivalía a 174.125 metros. El estadio usado por Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra, está calculado en 158 metros, aproximadamente.

[4] Se cuenta que Eratóstenes pagó a un hombre para que midiera la distancia entre las dos ciudades

[5] Actualmente este cálculo es de aproximadamente 40075 km (en el Ecuador) y 40007 km (en la circunferencia que une los polos)

[6] Cuando resolvieron problemas concernientes al estudio de los números naturales.

Es así como los gnómones correspondientes a los números estudiados por los pitagóricos fueron:

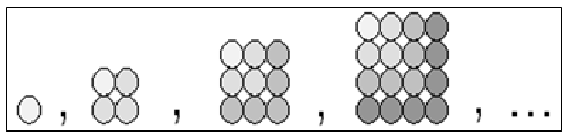


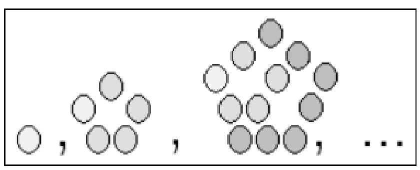
Gnomon: 2, 3, 4, 5,...

Forma del n–ésimo término: $\frac{n(n+1)}{2}$

Gnomon: 3, 5, 7, 9,...

Forma del n–ésimo término: n^2



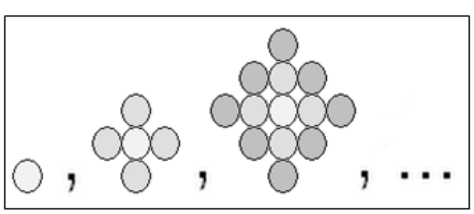


Gnomon: 4, 7, 10,...

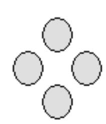
Forma del n–ésimo término: $\frac{n(3n-1)}{2}$

Para desarrollar en los estudiantes el proceso de la visualización y de la generalización a partir del estudio de propiedades matemáticas de los gnómones, se les propuso analizar y encontrar la forma general del n-ésimo término de los números triangulares, cuadrados y pentagonales. Luego de esto, se les planteó el ejercicio opuesto; es decir, dados los gnómones numéricos debían disponer los puntos para formar figuras geométricas que los representaran. Así, surgieron las siguientes disposiciones de puntos que corresponden al gnomon dado; aunque las disposiciones de los puntos son distintas, la forma del n-ésimo término es equivalente en ambos casos:

Gnomon: 4, 8, 12, 16,...

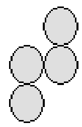


Forma geométrica:

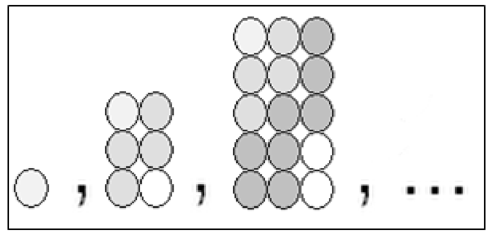


Forma del n–ésimo término: $n^2+(n-1)^2$

Forma geométrica:



Forma del n–ésimo término:
$n(2n-1)-(n-1)$



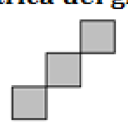
Finalmente, se propusieron dos tablas numéricas distintas para que los estudiantes encontraran algunas regularidades con base en la forma geométrica de los gnómones. Una de las tablas contenía diez columnas y diez filas con los números naturales mayores que cero y menores que 20, como se muestra en la figura a la derecha.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Con respecto a la tabla anterior, los estudiantes dibujaron los gnómones que se presentan a continuación, entre otros, y calcularon la suma de los números que los formaban, así como la forma general del n-ésimo gnomon y la forma general de la suma de los n primeros gnómones:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Forma geométrica del gnomon:

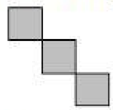


(Diagonal de arriba abajo y de izquierda a derecha)

Forma del n–ésimo gnomon:
n^2

Suma de los n primeros gnómones:
$n^2+(n-1)^2$

Forma geométrica del gnomon:



(Diagonal de arriba a abajo y de derecha a izquierda)

Forma del n–ésimo gnomon:

$10n$

Suma de los n primeros gnómones:

$5n(n+1)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	**13**	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	**15**	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	**17**	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	**19**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	**13**	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	**15**	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	**17**	18	19

Forma geométrica del gnomon:

(Diagonal de abajo a arriba y de izquierda a derecha)

Forma del n–ésimo gnomon:

$10n$

Suma de los n primeros gnómones:

$5n(n+1)$

Forma geométrica del gnomon:

(L invertida 1)

Forma del n–ésimo gnomon:

$3n^2-3n+1$

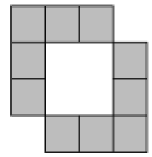
Suma de los n primeros gnómones:

n^3

1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10
2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11
3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12
4	**5**	**6**	**7**	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Forma geométrica del gnomon:



(L invertida simétrica respecto al centro de la tabla)

Forma del n-ésimo gnomon:

$$20(4n-3)$$

Suma de los n primeros gnómones:

$$20n(2n-1)$$

6 Conclusión

Estos resultados son un claro ejemplo de la estrecha, pero poco explorada, relación existente entre las matemáticas y la astronomía. Esperamos sean base de muchas otras actividades relacionadas con el estudio de ambas ciencias. Por último, es claro que aquí sólo hemos tomado algunos ejemplos de gnómones con una muy reducida tabla numérica, por lo que el camino en el estudio y descubrimiento de regularidades es muy amplio.

Referencias

[1] C. Alemany, Descubrir las sombras. Explora el Universo. UNAWE. (2009). `http://sac.csic.es/unawe/actividades_observacion.html`

[2] V. Arenzana, P. Buera and F. Herrero, El triángulo. I. E. S. Félix de Azara, Zaragoza. `www.unizar.es/ttm/2004-05/TRIANGULOS.doc`

[3] Y. Campos, M. González and L. Mora, Informe proyecto de Facultad: El Club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para el estudio de las matemáticas con niños y niñas de colegios distritales entre 10 y 15 años (Proyecto de Facultad 2007). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas (DMA), Universidad Pedagógica Nacional (UPN). (2007).

[4] P. Closas, Medida del radio de la Tierra. Año Internacional de la Astronomía 2009. (2009).

[5] G. Nazareno, La medida del radio terrestre. Trabajo de Investigación para primero de Bachillerato I.E.S.

[6] España, Instituto de Educación Secundaria Gonzalo Nazareno. (s.f.). La medida del radio terrestre. Trabajo de Investigación para primero de Bachillerato. Sevilla. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~41011038/DepMates/Trabajos/radiotierra.pdf

Dirección de los autores
Lyda C. Mora M. — Departamento de matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. - Colombia
e-mail: lcmoram@gmail.com
Deysi L. Roldán H. — Departamento de matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. - Colombia
e-mail: deysi_lorena10@hotmail.com
Claudia M. Vargas M. — Departamento de matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C. - Colombia
e-mail: shimauris@hotmail.com