



**Análisis Documental de Algunas Propuestas de Enseñanza de la Derivada en la
Escuela. Potencialidades para la Construcción de Propuestas Curriculares.**

Carlos Daniel Martinez Gonzalez

Nikole Andrea Torres Valdez

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Cali, Colombia

Enero de 2025



**Análisis Documental de Algunas Propuestas de Enseñanza de la Derivada en la
Escuela. Potencialidades para la Construcción de Propuestas Curriculares.**

Carlos Daniel Martinez Gonzalez

Nikole Andrea Torres Valdez

Profesora Ligia Amparo Torres Rengifo

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Directora de Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Cali, 2025

Agradecimientos

Agradecimiento a mi madre, Alix Valdez, por su apoyo incondicional. A mi tutora Ligia Amparo Torres Rengifo por su guía, paciencia y dedicación a lo largo de este proceso.

Nikole

Agradezco a todas las personas que, de manera directa o indirecta, han influido en mi paso por la universidad y en mi desarrollo personal; a mis amigos y compañeros de universidad, quienes me acompañaron en días llenos de alegría y aprendizaje. Agradezco a todos los profesores que, no solo me formaron profesionalmente, sino que, con su actitud y dedicación, se convirtieron en modelos a seguir en este hermoso mundo de la educación. Agradezco también a mi tutora y profesora, Ligia Amparo Torres Rengifo, por sus enseñanzas y correcciones. Gracias a su excelencia académica, el desarrollo de este trabajo ha sido una experiencia enriquecedora y significativa.

Finalmente, agradezco a mi familia por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, en especial a mi madre, la persona más importante en mi vida. Todo lo que soy y todo lo que seré es gracias a ella.

Carlos

Resumen

Este trabajo surge de la preocupación por la falta de estudios que caractericen propuestas didácticas para la enseñanza de la derivada en la educación media y superior en Colombia, lo que limita el diseño de estrategias significativas favoreciendo prácticas tradicionales. Surge entonces el interés de proponer algunos elementos para la construcción de nuevas propuestas de enseñanza que sean alternativas curriculares, desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional, a través de una revisión documental de algunas propuestas para la enseñanza de la derivada en la escuela. Para tales fines se analizaron cuatro propuestas de enseñanza, dos que corresponden a trabajos de pregrado y maestría de origen nacional, y otras dos que corresponden a libros publicados por autores de gran reconocimiento internacional. Se diseñó una matriz de análisis que permite analizar el contenido matemático y didáctico de cada una de las propuestas además de ofrecer elementos para su caracterización. Posteriormente, se identifican y presentan una serie de elementos comunes para la construcción de nuevas propuestas desde una perspectiva curricular.

Los resultados muestran que las propuestas tienden a centrarse en la derivada como razón de cambio y pendiente de la tangente, pero difieren en el grado de consolidación de los significados asociados al concepto puesto que no en todas las propuestas la derivada adquiere un carácter funcional. El trabajo presenta algunas reflexiones curriculares que podrían fortalecer el diseño de actividades didácticas que favorezcan el desarrollo del pensamiento variacional.

Palabras claves: Función derivada, pensamiento variacional, elementos curriculares, análisis documental, enseñanza de la derivada.

Tabla de contenido

Introducción.....	8
Capítulo 1: Aspectos Generales De La Investigación	10
1.1. Problemática.	10
1.2. Objetivos	12
1.2.1. Objetivo General	12
1.2.2. Objetivos Específicos.....	13
1.3. Justificación.....	13
1.4. Antecedentes.....	15
1.4.1 Antecedentes Relacionados Con La Metodología Del Trabajo.	15
1.4.2 Antecedentes Relacionados Con La Descripción De Los Significados Sobre La Derivada En El Contexto De La Enseñanza.	19
1.4.3. Trabajos De Investigación Sobre La Descripción Y Análisis De Los Errores Y Dificultades De Los Estudiantes Con Relación A La Derivada.	20
Capítulo 2: Marco de Referencia Conceptual	23
2.1. Perspectiva Curricular	23
2.1.1. El Pensamiento Variacional Y La Derivada En Los Lineamientos Curriculares. .	25
2.1.2. Pensamiento Variacional Y Derivada En Los Estándares Básicos De Competencias.....	29
2.1.3. Pensamiento Variacional En Actividades De Los Derechos Básicos De Aprendizaje.	33
2.2. Perspectiva Matemática	35
2.2.1. Análisis De Contenido.	35
2.3. Perspectiva Didáctica	49
2.4. Síntesis Del Marco De Referencia Conceptual.....	52
Capítulo 3: Algunas Propuestas De Enseñanza Sobre La Derivada Y Sus Perspectivas Para Propuestas Curriculares.	54
3.1. Selección de las Propuestas de Enseñanza de la Derivada	54
3.2. Matriz Para El Análisis De Las Propuestas	57

3.3. Análisis Documental De Las Propuestas De Enseñanza Sobre La Derivada.	62
3.3.1 Hacia La Derivada por Carmen Azcarate Y Jordi Deulofeu.	62
3.3.2. <i>La Variación Y La Derivada por Crisólogo Dolores Flores</i>	78
3.3.3. <i>Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De La Derivada En El Último Grado De Educación Secundaria por Carlos Eduardo Pineda Ruiz</i>	95
3.3.4. <i>Una Aproximación a la Derivada desde la Variación y el Cambio por John Jairo Gómez M. y Cesar Augusto Martinez G.</i>	124
3.4. Elementos para la Construcción Curricular de la Derivada a partir del Análisis de las Propuestas.....	140
3.4.1. <i>Resultados de Análisis</i>	140
3.4.2. <i>Elementos de Direccionamiento Curricular</i>	147
Capítulo 4: Conclusiones Generales Y Reflexiones Didácticas	155
4.1. Conclusiones Generales.....	155
4.2. Algunas reflexiones didácticas	163
Referencias	167

Índice de Tablas

Tabla 1 EBC que caracterizan la derivada	30
Tabla 2 Coherencia vertical interpretación geométrica de la derivada.....	31
Tabla 3 Coherencia vertical propiedades algebraicas de la derivada.....	32
Tabla 4 Actividades en los DBA.....	33
Tabla 5 Algunas reglas de derivación	39
Tabla 7 Propuestas seleccionadas	<i>¡Error! Marcador no definido.</i>
Tabla 8 Matriz de análisis.....	60
Tabla 9 Comparación de los elementos constitutivos de las propuestas	143

Índice de Figuras

Figura 1 Representación del cociente diferencial	44
Figura 2 Representación de la derivada cuando h tiende a cero	44
Figura 3 Representación de las diferentes pendientes o derivadas en una curva	45

<i>Figura 4 Articulación de Registros (1)</i>	46
<i>Figura 5 Articulación de Registros (2)</i>	46
<i>Figura 6 Mapa Conceptual sobre la Derivada</i>	48
<i>Figura 7 Actividad 1 Identificación de variables dependientes e independientes.</i>	98
<i>Figura 8 Actividad 2 Identificación de variables dependientes e independientes.</i>	99
<i>Figura 9 Actividad 1 Funciones y sus gráficas.</i>	100
<i>Figura 10 Actividad 2 Funciones y sus gráficas.</i>	101
<i>Figura 11 Actividad 1 Función lineal y afín.</i>	102
<i>Figura 12 Actividad 2 Función lineal y afín.</i>	102
<i>Figura 13 Actividad 1 Razones de cambio.</i>	103
<i>Figura 14 Actividad 2 Razón de cambio.</i>	104
<i>Figura 15 Actividad 1 Velocidad promedio e instantánea.</i>	105
<i>Figura 16 Continuación actividad 1 Velocidad promedio e instantánea.</i>	106
<i>Figura 17 Actividad 2 Velocidad promedio e instantánea.</i>	107
<i>Figura 18 Actividad 1 Derivada de una función.</i>	108
<i>Figura 19 Actividad 2 Derivada de una función.</i>	109
<i>Figura 20 Actividad 1 y 2 Recta tangente a una función en un punto dado usando GeoGebra.</i>	110
<i>Figura 21 Actividad 1 y sus consignas. Propuesta 4.</i>	126
<i>Figura 22 Actividad 2 y sus consignas. Propuesta 4.</i>	127
<i>Figura 23 Actividad 3 y sus consignas. Propuesta 4.</i>	128
<i>Figura 24 Actividad 4 y sus consignas. Propuesta 4.</i>	129

Introducción

Este documento se inscribe dentro de la línea de didáctica de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle. Esta investigación parte de la falta de caracterizaciones sobre propuestas de enseñanza de la derivada en la educación media y superior, así como la falta de elementos curriculares que le permitan a los profesores de todo el territorio nacional reflexionar e innovar sus prácticas en el aula de clase. La investigación presenta una recopilación y caracterización de algunas propuestas empleadas en la enseñanza de la derivada mediante una revisión documental. Se ha designado la revisión documental como estrategia de investigación pues permite producir clasificaciones o tipificaciones de las propuestas de trabajo (Camargo, 2021)

En este trabajo, se aportan elementos de análisis a profesores en formación y ejercicio además de facilitar propuestas de enseñanza alternativas sobre la derivada bajo las directrices de documentos oficiales del ministerio como lo son los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) y algunas consideraciones de orden histórico y didáctico como los mencionados por Artigue en ingeniería didáctica (Artigue, 1995).

Desde una perspectiva variacional, y apoyados en las directrices anteriormente mencionadas, se construye una matriz de análisis que permite la caracterización de las propuestas. La selección y caracterización de las propuestas proporciona otro enfoque didáctico a la enseñanza de la derivada en la educación media y les permite a los futuros profesores conocer propuestas alternativas de trabajo sobre la derivada que articulen, de una manera más efectiva, el desarrollo del pensamiento variacional con la carga histórico-epistemológica del objeto matemático.

El documento se presenta en cuatro capítulos. El primer capítulo aborda la formulación del problema, los objetivos y justificación que destacan las dificultades que se presenta en la

comprensión e interpretación de la derivada en estudiantes de educación media, así como la falta de trabajos que propongan tipificaciones o clasificaciones sobre las propuestas que se usan.

En el segundo capítulo, se concentra el marco de referencia conceptual, donde se presentan los elementos teóricos que respaldan la problemática desde una perspectiva curricular, matemática y didáctica.

En el tercer capítulo del documento se desarrolla el cuerpo de la revisión documental que comprende una fase de selección de las propuestas de enseñanza siguiendo unos parámetros previamente establecidos, luego, con la ayuda de los referentes teóricos, se construye una matriz de análisis y se aplica a las propuestas seleccionadas. Esto produce una caracterización de las propuestas que se presenta en la sección 3.3 y finalmente, en la sección 3.4 se presentan los elementos que, fruto del análisis, se consideran para la construcción de propuestas de enseñanza sobre la derivada.

Finalmente, en el cuarto capítulo, aparecen las conclusiones generales en relación con los objetivos del trabajo y las reflexiones didácticas que surgen de los elementos curriculares establecidos.

Capítulo 1: Aspectos Generales De La Investigación

En este capítulo se presentan elementos que enmarcaron la propuesta del trabajo, permitiendo ubicar el problema de investigación para luego dar paso a los objetivos junto con la justificación y la presentación de algunos antecedentes de investigaciones relacionadas con las estrategias didácticas, producto del estudio de la derivada en la escuela, por parte de los investigadores del área de educación matemática a lo largo de los últimos treinta años. Iniciamos presentando la descripción del problema de investigación en torno al concepto de derivada, posteriormente se presentan los objetivos tanto general como específicos, se justifica la importancia de este trabajo en el campo de la educación matemática y finalmente se abordan algunos antecedentes que proporcionan elementos importantes tanto prácticos como teóricos para aclarar el panorama variacional y el papel que se le da a la construcción de la noción de derivada en la escuela.

1.1. Problemática.

Los problemas asociados a la enseñanza de la derivada no son nuevos ni poco documentados. De hecho, las investigaciones en educación matemática han identificado la enseñanza del cálculo como uno de sus ejes centrales, destacando los obstáculos y dificultades que surgen al integrar este tema en la etapa final de la educación media y en los inicios de la educación superior. En este contexto, numerosos estudios han evidenciado que los estudiantes no logran alcanzar una comprensión profunda e integral de conceptos clave como la función derivada, la derivada en un punto, el límite, la razón de cambio o la diferenciabilidad.

Autores como M. Artigue (1995) y Sánchez y Matamoros (2014) han señalado que, aunque la enseñanza universitaria del cálculo tiene ambiciones más amplias, en la práctica tiende a centrarse en métodos memorísticos o en la aplicación de técnicas tradicionales de demostración. Por su parte, en la educación media, un problema recurrente es la tendencia a reducir el estudio

de la derivada a la ejecución de algoritmos y procedimientos algebraicos, lo cual limita significativamente la comprensión conceptual de los estudiantes.

Esta falta de una comprensión sólida de la derivada, especialmente cuando no se fundamenta en el marco del pensamiento variacional, genera dificultades que trascienden el ámbito matemático y afectan el rendimiento académico de los estudiantes en niveles educativos superiores. Estas dificultades no solo obstaculizan el aprendizaje de conceptos más avanzados, sino que también se convierten en uno de los factores que contribuyen a la deserción universitaria en carreras que requieren un dominio sólido del cálculo, como las ciencias y las ingenierías. En este sentido, la enseñanza inadecuada de la derivada no solo impacta el desempeño académico individual, sino que también tiene implicaciones más amplias en la formación de profesionales en áreas estratégicas para el desarrollo de un país.

En Colombia, y en general en América Latina, la deserción universitaria representa uno de los problemas más críticos para el avance social, económico, tecnológico y cultural. Según datos de Sapiencia (ODES, 2017), aproximadamente el 36 % de los estudiantes que abandonan sus estudios de educación superior lo hacen al finalizar el primer año. Autores como Gamboa, Castillo e Hidalgo (2019) han identificado que uno de los factores que contribuyen a este fenómeno es la enseñanza centrada en aspectos procedimentales y memorísticos, lo cual no solo afecta la formación matemática de los estudiantes, sino que también dificulta la construcción de nuevos conocimientos en etapas posteriores. Este enfoque tradicional de la enseñanza, que prioriza la repetición de algoritmos sobre la comprensión conceptual, limita las oportunidades de los estudiantes para desarrollar habilidades matemáticas esenciales.

Una revisión de la literatura sobre el tema revela que gran parte de las investigaciones se han enfocado en caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes y en identificar errores y dificultades asociados al aprendizaje de la derivada. Sin embargo, existe una falta de estudios que se centren en caracterizar propuestas didácticas innovadoras para la enseñanza de

este concepto. Además, estas propuestas, cuando existen, no suelen ser ampliamente conocidas ni aplicadas por los docentes, lo que perpetúa el uso de métodos tradicionales y limita las posibilidades de mejora en la enseñanza de la derivada. También se encuentran trabajos como el de Saraza y Prada (2017) que es en esencia, un estado del arte sobre el concepto de derivada. Este trabajo proporciona una clasificación sobre la naturaleza metodológica de las investigaciones recopiladas entorno al concepto de derivada, sin embargo, no se exhibe una caracterización sistemática de las propuestas orientadas a la proposición de elementos claves para la selección de estrategias por parte de los profesores.

En este contexto, la problemática central de este trabajo radica en la falta de estudios que caractericen propuestas didácticas para la enseñanza de la derivada en la educación media en Colombia. Esta carencia dificulta que los docentes cuenten con herramientas claras y fundamentadas para seleccionar estrategias y elementos curriculares que trasciendan las prácticas tradicionales y promuevan una comprensión más profunda del concepto. Por ello, surge la pregunta que motiva esta investigación: ¿Cómo, a través del estudio documental de algunas propuestas para la enseñanza de la derivada en la escuela, se pueden proponer elementos curriculares que potencien su estudio desde la perspectiva del pensamiento variacional?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Proponer algunos elementos para la construcción de alternativas de trabajo curriculares desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional, a través de una revisión documental de algunas propuestas para la enseñanza de la derivada en la escuela.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Identificar y seleccionar algunas de las propuestas sobre la enseñanza de la derivada, reportadas por la investigación en el campo de la educación matemática.
- Caracterizar las propuestas de enseñanza de la derivada a partir de la determinación de unas categorías de análisis según el marco de referencia conceptual.
- Proponer algunos elementos en la construcción y selección de propuestas curriculares que articulen aspectos fundamentales del pensamiento variacional.

1.3 Justificación

La derivada es uno de los objetos centrales del cálculo diferencial y representa un concepto fundamental en matemáticas. Su importancia radica en que permite estudiar y modelar fenómenos de cambio y variación, lo que la convierte en una herramienta esencial no solo en disciplinas como la física, la ingeniería y la economía, sino también en la formación del pensamiento analítico y crítico de los estudiantes. Comprender la derivada implica dominar ideas clave como la razón de cambio, la pendiente de una curva y la aproximación lineal, conceptos que son la base para el estudio de temas más avanzados en matemáticas y ciencias. Por ello, su enseñanza no solo es crucial para el éxito académico en niveles superiores, sino también para el desarrollo de habilidades que permiten a los estudiantes interpretar y resolver problemas del mundo real.

Sin embargo, la enseñanza de la derivada tradicionalmente se ha centrado en enfoques metodológicos procedimentales y algorítmicos (Artigue 1995), lo que limita la comprensión conceptual de los estudiantes. Es aquí donde radica la importancia de enseñar la derivada desde un enfoque conceptual en lugar de un enfoque procedimental, tal como lo manifiesta la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional. Esta perspectiva busca que los estudiantes comprendan la derivada no como un mero resultado de aplicar reglas, sino como un

concepto dinámico que describe cómo una cantidad cambia en relación con otra. Al enfatizar la comprensión conceptual sobre la memorización de fórmulas, se promueve un aprendizaje más profundo y significativo, que permite a los estudiantes transferir sus conocimientos a nuevos contextos y aplicarlos de manera creativa. Además, este tipo de enfoque fomenta el desarrollo de habilidades de razonamiento y resolución de problemas, que son esenciales para enfrentar los desafíos de la educación superior y el mundo laboral.

Para avanzar hacia una enseñanza de la derivada más efectiva, fue necesario realizar una revisión documental que permita identificar, sistematizar y analizar propuestas didácticas innovadoras (Camargo, 2021). Esta revisión es crucial porque, aunque existen numerosas investigaciones que describen las dificultades de los estudiantes y los problemas asociados a la enseñanza tradicional, son escasos los trabajos que se centran en caracterizar y organizar propuestas de enseñanza alternativas. Una revisión documental rigurosa no solo permite recopilar estas propuestas, sino también analizar sus fundamentos teóricos y metodológicos, lo que sirve como base para proponer elementos curriculares que puedan ser adaptados al contexto colombiano. Además, este proceso contribuye a cerrar la brecha entre la investigación académica y la práctica docente, facilitando que los profesores accedan a herramientas claras y fundamentadas para mejorar sus estrategias de enseñanza.

Finalmente, desde una perspectiva formativa, este trabajo representó una oportunidad invaluable para el desarrollo de habilidades investigativas. La revisión documental, el análisis crítico de propuestas y la construcción de elementos curriculares son actividades que no solo enriquecen la formación académica de los investigadores, sino que también les proporcionan herramientas y experiencias útiles para futuros proyectos. Este proceso de indagación sistemática fortalece la capacidad de los investigadores para abordar problemas complejos en el campo de la educación matemática y proponer soluciones innovadoras que impacten positivamente la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.

En síntesis, esta investigación se justifica desde su potencial para promover una enseñanza más efectiva de la derivada, sistematizar propuestas didácticas innovadoras y contribuir al desarrollo de herramientas prácticas para los docentes. Además, representa una oportunidad para avanzar en la formación investigativa y en la construcción de propuestas que impacten positivamente la educación matemática en Colombia.

1.4. Antecedentes

En esta sección se presentan algunas investigaciones a nivel de pregrado, maestría y artículos que se han desarrollado en el marco de la educación e investigación en matemáticas, en relación con el problema de investigación. En primer lugar, se abordan aquellos trabajos que se alinean con el método empleado en este estudio, es decir, revisiones documentales y análisis de propuestas de aprendizaje relacionadas con la enseñanza de la derivada. Estos antecedentes permiten contextualizar y fundamentar el enfoque metodológico adoptado, destacando estudios previos que han explorado de manera sistemática el análisis de recursos didácticos. En segundo lugar, se abordan trabajos de investigación que han supuesto avances en torno a la comprensión de los significados que los estudiantes construyen sobre la derivada. Finalmente, se destacan investigaciones que han abordado elementos de identificación de errores y dificultades asociadas a la enseñanza de la derivada en Colombia.

1.4.1 Antecedentes Relacionados Con La Metodología Del Trabajo.

Presentamos aquí tres antecedentes relacionados con el análisis documental de literatura sobre la derivada. En primer lugar, el trabajo de Carolina Rojas (2013) quien realizó una revisión documental para describir la relación entre lo que se investiga y lo que se enseña en torno a este concepto. En segundo lugar, la ponencia de Raúl Prado y Dilan Saraza (2017) en la que se describe el estado del arte de la comprensión conceptual de la derivada. Por último, el trabajo de Karol Tapiero (2020) quien analizó una propuesta didáctica sobre la derivada con el

fin de explicar cómo dicha propuesta permite un acercamiento entre las propuestas curriculares del Ministerio de Educación Colombiano.

Rojas (2013) ¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada? Este trabajo de investigación, realizado por Carolina Rojas (2013) para optar por el título de maestra en docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional dirigido por Edgar Guacaneme se centra en describir la relación entre lo que se investiga didácticamente alrededor de la enseñanza de la derivada y lo que en últimas se enseña. Para cumplir con este objetivo, la autora hace una revisión documental de 25 investigaciones sobre la didáctica de la derivada. Esto implica el análisis, categorización de los documentos seleccionados, y la descripción de los diferentes enfoques de enseñanza a los profesores en formación de tres universidades de Colombia.

Rojas proporciona un panorama amplio de las diferentes metodologías y enfoques utilizados para enseñar este concepto matemático. Describe el enfoque cognitivo, sistémico y semiótico como los enfoques de mayor interés, concluyendo, entre otras cosas que, en los cursos de Cálculo no se evidencia que las propuestas vinculen suficientemente los resultados de investigación en didáctica con la formación de profesores en estos cursos, sin embargo la autora también logra reconocer en su investigación que dentro de estos cursos se adoptan otras estrategias que también buscan dotar de herramientas al futuro profesor de matemáticas.

El análisis de Rojas no solo destaca las discrepancias entre los hallazgos de la investigación didáctica y las prácticas educativas en las universidades colombianas, sino que también subraya la necesidad de alinear la formación docente con las recomendaciones de la investigación.

Como ya se ha descrito en la problemática y justificación del actual trabajo, en esta investigación, la necesidad que describe Rojas sobre la alineación en la formación se aborda a través de la caracterización de las propuestas de aprendizaje sobre la derivada, con el propósito de identificar los elementos matemáticos y didácticos que puedan ser útiles desde una

perspectiva curricular. Este análisis busca explorar cómo las propuestas existentes integran conceptos clave, procesos matemáticos y contextos significativos para la enseñanza de la derivada, y de qué manera estas características pueden informar la formación de profesores y el diseño de cursos de cálculo más conectados con las recomendaciones de la investigación en didáctica. Así, este trabajo se enfoca en cerrar la brecha entre teoría e implementación, proponiendo criterios que fortalezcan la coherencia entre lo que se enseña y lo que se investiga en este campo.

Prado & Saraza (2017), *Estado del Arte alrededor de la Comprensión Conceptual de la Derivada*. Este trabajo está publicado en las memorias del Congreso Internacional de Matemática Educativa (2017) sus autores son Raúl Prado y Dilan Saraza, docentes formados en la Universidad Francisco de Paula Santander en Cúcuta Colombia. En esta ponencia los autores realizan una revisión documental de 30 investigaciones realizadas en las últimas dos décadas para clasificarlas de acuerdo con el tipo de enfoque metodológico, población de estudio y propuesta metodológica. Parte de los resultados de esta clasificación se describen a continuación:

De los principales hallazgos se resalta que se encontró que existe pocas investigaciones que utilizaron un enfoque cualitativo en el momento de realizar su investigación y a su vez más investigaciones que toman un enfoque cuantitativo en la determinación de las dificultades de los estudiantes, existe un predominio de investigaciones que se enfocaron en la construcción del concepto de derivada en los estudiantes, pocas que se enfocan a la práctica y los conocimientos de los profesores. También se determinó deficiencia que poseen los estudiantes en el momento de comprender el tema de la derivada y su relación con la gráfica de una función derivada.

(Prado & Saraza, 2017, pág. 122)

En este sentido, el trabajo de Prado y Saraza (2017) resalta aspectos clave que se consideran en el actual trabajo, ya que su revisión documental proporciona un marco relevante para identificar vacíos y tendencias en las propuestas de aprendizaje. Esto conecta directamente

con el interés de caracterizar las propuestas de aprendizaje para identificar elementos matemáticos útiles desde una perspectiva curricular, ya que esta investigación busca no solo analizar cómo se construye el concepto de derivada, sino también entender cómo estas propuestas integran aspectos que podrían fortalecer la formación docente y su alineación con los lineamientos curriculares.

Tapiero (2020) Análisis de una Propuesta para el Aprendizaje del Concepto de Derivada a través de la Razón de Cambio. Este trabajo fue realizado por Karol Tapiero (2020), quien fue estudiante del programa de maestría con énfasis en educación matemática de la Universidad del Valle. En su trabajo, titulado *Análisis De Una Propuesta Para El Aprendizaje Del Concepto De Derivada A Través De La Razón De Cambio* analizó la propuesta de Dolores (2012) *La Variación y la Derivada*.

Este análisis se hizo con base en las categorías de análisis de Godino, Batanero y Font (2007) descrita en la Teoría de Significados Sistémicos. En este sentido, la autora hace una identificación y descripción de la propuesta de Dolores, con base a categorías como, problemas y tareas, lenguaje matemático, conceptos y definiciones, entre otras. Esto para dar respuesta a sus objetivos de investigación que eran explicar cómo esta propuesta permite un acercamiento a las propuestas curriculares del MEN. Dado este análisis, la autora concluye que, las situaciones problema presentadas en el libro “La variación y la derivada” (Dolores, 2012) pueden ubicarse, según el MEN (2006), como situaciones de aprendizaje significativo. Además, en lo que concierne al pensamiento variacional, se puede observar que las situaciones planteadas en la propuesta de Dolores (2012), se enfatizan en el estudio y análisis de fenómenos de covariación ubicados en un contexto de la física, posibilitando así, el desarrollo de este tipo de pensamiento.

1.4.2 Antecedentes Relacionados Con La Descripción De Los Significados Sobre La Derivada En El Contexto De La Enseñanza.

A nivel nacional, la investigación de Parra Naranjo, J. (2020) *Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios*, aporta una descripción sobre estos significados con base a las dificultades manifestadas cuando resuelven problemas de cálculo en que interviene la derivada. La investigación tomó los datos de 20 estudiantes de carreras de ingeniería y ciencias de la economía a partir de un cuestionario. Se evidencia así, que las acciones de los estudiantes para responder a las preguntas fueron principalmente emplear la expresión del límite del cociente incremental y usar de forma algorítmica memorística algunas de las reglas de derivación como por ejemplo la regla de la cadena. Así pues, la tesis de Naranjo permite evidenciar cómo los estudiantes no pueden desarrollar de forma ostensiva definiciones, teoremas y diferentes representaciones sobre la derivada pues se aprecian procedimientos algorítmicos basados en objetos matemáticos no ostensivos como propiedades y conceptos en cada configuración presentada de una de las ocho tareas.

Por otro lado, Solano, S. (2017) en su tesis de maestría titulada, *Las Concepciones del Concepto de Derivada: Dos Estudios de Caso sobre un Matemático y un Licenciado en Matemáticas*, revisó, analizó y caracterizó desde un punto de vista didáctico las concepciones de dichos profesores de matemáticas con respecto al conocimiento didáctico de la derivada expresado en sus creencias y concepciones a través de unas entrevistas estructuradas y semiestructuradas, teniendo en cuenta unas categorías de análisis determinadas por tres organizadores del currículo a saber, la estructura conceptual, los sistemas de representación y los fenómenos que intervienen en el contenido matemático escogido.

Esta investigación tuvo como propósito general analizar desde un punto de vista didáctico las concepciones de la derivada que tienen dos profesores de matemáticas de

educación superior, con el fin de determinar si estas concepciones son influenciadas por sus modelos de formación y sus prácticas de enseñanza en sus contextos universitarios.

Bajo la metodología de la propuesta de análisis didáctico que se ha desarrollado en el marco de los trabajos del grupo PNA de la Universidad de Granada, se determinó, por ejemplo, qué, el profesor mate mático de profesión se preocupa más por la interpretación de la derivada, en tanto que el profesor licenciado en matemáticas se preocupa más por la práctica algorítmica de las reglas de derivación. Sin embargo, ambos profesores coinciden en evaluar a sus estudiantes la definición analítica de la derivada. Así mismo, los dos profesores evalúan el límite del cociente diferencial, y también ambos evalúan la derivada en el sentido geométrico de la pendiente de la recta tangente. Probablemente, las diferencias que tienen los dos profesores en cuanto a la interpretación de la derivada y la práctica algorítmica de la derivada esté influenciada por sus formaciones profesionales, sin embargo, considero que esto puede ser de nuevo otro tema de investigación posterior sobre las decisiones que toma el profesor de matemáticas a la hora de evaluar a sus estudiantes.

1.4.3. Trabajos De Investigación Sobre La Descripción Y Análisis De Los Errores Y Dificultades De Los Estudiantes Con Relación A La Derivada.

A nivel local, Pinto, A. (2018) en su investigación de pregrado titulada, *Errores que presentan Estudiantes Universitarios en relación con el Concepto de la Derivada*, describe el razonamiento que tuvieron los estudiantes de la muestra en el momento de contestar una prueba de 9 ítems, entre preguntas y consignas en relación con la derivada. Luego, esta descripción es analizada para la identificación de los errores y la clasificación de estos según la taxonomía de errores de Radatz (1979). Como resultado de este análisis se identificó una frecuencia de 155 errores cometidos por los estudiantes, en donde se observó que el tipo de error más frecuente en la prueba de evaluación fue errores debidos al aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Los resultados de Pinto destacan la importancia de considerar cómo estas propuestas abordan las deficiencias en el aprendizaje previo de los estudiantes. La identificación y clasificación de errores también puede aportar criterios útiles para analizar cómo las propuestas integran estrategias para prevenir o superar estos errores, fortaleciendo así la enseñanza y el aprendizaje de la derivada dentro del contexto curricular.

Por otro lado, Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, y Ariza Nieves (2017) en su artículo, *Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica*, hacen una caracterización de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de la derivada de una función de variable real, en los programas de Ingeniería en la Universidad Militar Nueva Granada. Evidenciaron que, el 30% de los estudiantes realizaron procedimientos deficientes en el cálculo de las derivadas y el 40% no realizó ningún proceso. Asimismo, en las evaluaciones se observa que el 77% de los estudiantes presentan un manejo semiótico deficiente del concepto de límite y solo el 5% comprenden las diferentes representaciones simbólicas del límite.

En síntesis, los antecedentes presentados destacan la relevancia de investigar el concepto de derivada desde diversos enfoques como las dificultades de aprendizaje, la formación docente, enfoques metodológicos, entre otros. Estos trabajos ofrecen un panorama amplio sobre los retos y oportunidades en torno a la comprensión y enseñanza de este concepto. Además, proporcionan un valioso punto de partida para esta investigación pues proporcionan orientaciones metodológicas acerca de cómo realizar investigaciones de naturaleza cualitativa en el campo de la educación matemática. Es importante también señalar la falta de trabajos cuyo enfoque metodológico sea la caracterización de propuestas y la construcción de elementos curriculares, es aquí precisamente que surge la importancia de llevar a cabo la investigación sugerida en este documento pues le permite a los profesores en formación y en ejercicio tomar como referente otro tipo de investigaciones diferentes a las ya mencionadas.

Desde este marco, el trabajo actual está orientado a la caracterización de propuestas de aprendizaje con el propósito de identificar elementos matemáticos y curriculares que permita la alineación de las practicas educativas y los lineamientos curriculares de Colombia.

Capítulo 2: Marco de Referencia Conceptual

En este apartado se presentan los referentes teóricos que fundamentan y proporcionan criterios para el análisis de las propuestas de trabajo, relacionando aspectos matemáticos, curriculares y didácticos. Con este fin, se ha dividido el apartado en tres componentes que brindan una descomposición de la derivada y que permiten analizar su contenido desde diferentes marcos de referencia.

Así pues, se ha determinado que los componentes de referencia del contenido sean de orden curricular en donde se aborda la relación de la derivada con los parámetros establecidos desde el Ministerio de Educación Nacional de Colombia; orden matemático donde se hace un breve análisis de contenido y, finalmente, didáctico donde se abordan los factores más determinantes que condicionan la enseñanza de la derivada en la escuela.

2.1. Perspectiva Curricular

Se trata aquí de situar, desde una perspectiva curricular, todo lo relacionado a la aparición del pensamiento variacional y especialmente de la derivada en un contexto escolar; caracterizando así, todas las orientaciones y reflexiones propuestas desde el Ministerio de Educación Nacional en torno al concepto de derivada de una función, sus usos y aplicaciones; pero también se busca caracterizar las competencias que se espera un estudiante de bachillerato pueda dominar y, además, algunas de las actividades que se proponen para lograr la consecución de dichas competencias.

Se inicia por considerar que la perspectiva curricular en Colombia está determinada por el Ministerio de Educación Nacional a través de tres documentos importantes; Los lineamientos curriculares (1998), los estándares básicos de competencias (2006) y los derechos básicos de aprendizaje (2016). Estos documentos en conjunto brindan las orientaciones, competencias y consideraciones prácticas necesarias para la construcción de los currículos de matemáticas en

Colombia. Un cuarto documento llamado *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales* (MEN, 2004) se toma también para ofrecer algunas características del pensamiento variacional, dicho documento pertenece al proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia.

En cumplimiento del artículo 78 de la ley 115 de 1994 el ministerio entrega a los educadores y a las comunidades educativas del país la serie de documentos que lleva por nombre “lineamientos curriculares”. Los lineamientos constituyen puntos de apoyo y de orientación general frente al postulado de la ley que nos invita a entender el currículo como “un conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y la construcción de identidad cultural nacional, regional y local”. Con esta reforma, los sistemas matemáticos son herramientas que ayudan a desarrollar y refinar cada tipo de pensamiento y no el eje central del currículo de matemáticas (MEN, 1998).

En cuanto a los referentes de los lineamientos es importante resaltar que, en la formación matemática básica, el énfasis estaría en potenciar el pensamiento matemático mediante la apropiación de contenidos que tienen que ver con ciertos sistemas matemáticos. Tales contenidos se constituyen en herramientas para desarrollar, entre otros, el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional que, por supuesto, incluye al funcional (MEN, 1998).

Los lineamientos curriculares propenden la articulación de tres grandes aspectos en el quehacer matemático para la organización del currículo en un todo armonioso, ellos son: Los procesos generales de pensamiento, los conocimientos básicos y, por último, el contexto. En los procesos generales encontramos: La resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Por su parte, los conocimientos básicos se clasifican en: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, pensamiento variacional y

sistemas algebraicos y analíticos. Por último, el contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende.

Algunos modelos que interpretan las relaciones entre estos grandes aspectos se pueden representar como las dimensiones de un cubo o los ejes de un espacio tridimensional donde sus componentes se relacionan entre sí.

Ahora bien, centrando nuestra atención en la derivada podemos identificar qué se dice sobre este objeto desde los lineamientos curriculares en Colombia.

2.1.1. El Pensamiento Variacional Y La Derivada En Los Lineamientos Curriculares.

El desarrollo del pensamiento variacional, tal y como se propone en los lineamientos curriculares (MEN, 1998) presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas en diferentes contextos. Es así como la visión de variación se amplía en un intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes.

Como se mencionó anteriormente, es el resultado de coordinar conocimientos básicos, procesos y contextos lo que en realidad permite la construcción del pensamiento matemático, en particular del pensamiento variacional; en este sentido los procesos generales juegan un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional en tanto que proporcionan formas de entender y replicar la actividad matemática. Así, los procesos generales podrían ser interpretados tal y como se sigue:

- Modelación: Construcción de sistemas figurativos mentales, gráficos o tridimensionales con el fin de reproducir o representar la realidad de forma esquemática para hacerla más comprensible. En una situación problema, la modelación permite decidir qué

variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, obtener resultados y verificar qué tan razonable son estos respecto a las condiciones iniciales.

- **Razonamiento:** El razonamiento lo entenderemos como un desarrollo de pensamiento lógico que permite percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.
- **Formulación, tratamiento y resolución de problemas:** Las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se abordan estén ligadas a experiencias cotidianas. Este proceso permite desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolver, encontrar resultados y verificar lo razonable de los problemas suscitados por una situación.
- **Comunicación:** La comunicación debe entender como aquel proceso que posibilite expresar, comunicar preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos de tal forma que sea una dimensión constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Las matemáticas por sí mismas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de lenguajes con los que se expresan y representan.
- **Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos:** Implica comprometer al estudiante en la construcción y ejecución de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados “algoritmos” sin que su ejecución comprometa la comprensión de su carácter de herramienta. Deben considerarse los mecanismos cognitivos involucrados en la ejecución de los algoritmos con el fin de analizar su contribución.

Un breve análisis que desde los lineamientos se hace a la evolución histórica de la variación permite encontrar interrelaciones entre algunos núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación tales como:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico.
- Modelos matemáticos de tipos de variación.

Según los lineamientos, la variación aparece en contextos de la vida práctica y en los científicos cuando hay una dependencia entre variables o en situaciones donde una misma cantidad varía. Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático. Además, se entiende que el desarrollo del pensamiento variacional ocurre de manera progresiva, es decir, que las estructuras conceptuales que le definen son aprendidas y mejoradas a través del tiempo, y que enfrentarse a nuevas situaciones problemas exige que el estudiante use de manera consciente habilidades previamente adquiridas.

Ahora bien, respecto del surgimiento y tratamiento de la derivada no se tiene información precisa más que un par de anotaciones donde se precisa que en el contexto del estudio matemático del movimiento se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que según los lineamientos configura el cálculo. Sobre el estudio de la función se tiene que la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando así la noción de función como dependencia, sobre esto último encontramos elementos que permiten darle un sentido a la noción de función:

- La función emerge como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio.

- La introducción de la función en los contextos descritos prepara al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre ellos.
- Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica.
- A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, priorizando en estos el estudio de los patrones que los caracterizan (creciente, decreciente).

Hemos hecho una síntesis de los elementos más importantes presentes en los lineamientos curriculares referente a la construcción del pensamiento variacional y a la noción de variación, sin embargo no hemos podido identificar los elementos necesarios ni suficientes que definen la noción de derivada local y global, a continuación se exploran los elementos más importantes presentes en los estándares básicos de competencias que exponen las competencias que un estudiante debe desarrollar con relación al estudio de la derivada en la educación media.

- **Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales**

En este documento del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004) que pertenece al *proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia* encontramos algunas características importantes sobre el pensamiento variacional que están fundamentadas en los lineamientos curriculares. La ventaja de este documento es que, al ser parte de un proyecto específico sobre incorporación de tecnología al currículo de matemáticas, ofrece una lectura limpia sobre algunas características del pensamiento variacional que desde el ministerio se consideran vitales en los procesos de fortalecimiento de la formación docente.

Acerca del desarrollo del pensamiento variacional encontramos que las situaciones de variación y cambio de la vida diaria, que son aquellos que en su mayoría involucran de manera explícita la consideración del tiempo, son aquellas en las que mejor se puede identificar el cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y moldearlo. Además, en las situaciones de cambio que involucran el tiempo, se distinguen tanto la variación continua como la variación discreta, así como los conjuntos numéricos propios de la representación de cada una.

En las formas de representación de esas situaciones de variación, encontramos que ellas pueden ser representadas tanto cualitativa como cuantitativamente. En la representación cualitativa encontramos la escrita y la pictórica, así como los modelos construidos en maquetas con movimiento. Por otro lado, en la representación cuantitativa, encontramos la representación geométrica, la representación tabular, la representación algebraica y la representación gráfica (plano cartesiano).

2.1.2. Pensamiento Variacional Y Derivada En Los Estándares Básicos De Competencias.

Centramos ahora nuestra atención en examinar qué se direcciona desde los estándares básicos de competencias en relación con el desarrollo del pensamiento variacional y especialmente en el desarrollo de la noción de derivada. Se quiere examinar qué se dice sobre la derivada, qué contextos presentan en los estándares que potencian la conceptualización de la derivada en los estudiantes y que competencias espera el Ministerio de Educación Nacional que un estudiante domine en relación con la noción de derivada desde una perspectiva de desarrollo del pensamiento variacional.

Los estándares vienen dados por paquetes de grados y deben entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias, no deben entenderse como metas que los estudiantes deban alcanzar obligatoriamente sino como indicadores del nivel de avance progresivo en el desarrollo del pensamiento matemático. Estos estándares, que son compatibles

conceptualmente con lo estipulado en los lineamientos, guardan una coherencia vertical en cuanto al desarrollo progresivo a través de los grados de escolaridad y una coherencia horizontal entre los cinco tipos de pensamiento situados en un mismo grado de escolaridad.

Analizando el conjunto de estándares en los paquetes de grado es posible identificar algunos estándares que son de particular interés puesto que intentan caracterizar y proporcionar un nivel conceptual ideal respecto del desarrollo de la noción de derivada, es decir, de todo el conjunto de estándares son de especial interés aquellos que están directamente relacionados con la derivada, no solo desde el pensamiento variacional, sino también desde otros tipos de pensamiento puesto que como se mencionó anteriormente los estándares guardan coherencia entre los diferentes tipos de pensamiento.

Los estándares presentados a continuación en el paquete de grados de DECIMO a UNDÉCIMO son los que logran caracterizar la noción de derivada que se espera construir en los estudiantes durante su etapa de escolaridad.

Tabla 1

EBC que caracterizan la derivada

Grado	Estándar	Tipo De Pensamiento
Decimo a Once	A) Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	A) Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
	B) Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.	B) Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
	C) Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	C) Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Vemos cómo en los EBC se propenden dos interpretaciones esenciales para la noción de derivada, la primera como razón de cambio y la segunda como el valor de la pendiente de la tangente a una curva. Además, se enfatiza la importancia de la relación entre diferentes tipos de representación de una función al promover el análisis de las relaciones que guarda la representación gráfica de una función con su representación algebraica. Es posible pues, hacer un seguimiento a la evolución progresiva de la noción de derivada a través de los estándares proporcionados por paquetes de grado, particularmente presentamos a continuación el desarrollo de la interpretación geométrica de la derivada en los estándares relativos al pensamiento variacional.

Tabla 2

Coherencia vertical interpretación geométrica de la derivada.

Coherencia Vertical De La Interpretación Geométrica De La Derivada	
Cuarto a Quinto	Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
Sexto a Séptimo	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
Octavo a Noveno	Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
Décimo a Undécimo	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Se evidencia la coherencia vertical en los estándares seleccionados para caracterizar progresivamente esa interpretación geométrica de la derivada como valor de la pendiente de la recta tangente a la curva, sin embargo, es importante señalar que existe también una coherencia horizontal con otros tipos de pensamiento matemático, especialmente con el pensamiento espacial y sistemas geométricos. Las competencias centrales las encontramos en grado undécimo, para el pensamiento variacional la competencia establece “Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y

desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos” y para el pensamiento espacial “Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y otras ciencias” así vemos que para interpretar la derivada como razón de cambio es necesario usar argumentos geométricos para formular y justificar la relación entre las variables y los cambios que se producen en la gráfica de la función.

En lo referente a las propiedades algebraicas de la derivada y los cambios que se presentan en las curvas es posible establecer también una coherencia vertical respecto al desarrollo progresivo en el pensamiento matemático del estudiante.

Tabla 3

Coherencia vertical propiedades algebraicas de la derivada

Coherencia Vertical En El Reconocimiento De Las Propiedades Algebraicas De La Derivada	
Sexto a séptimo	Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
Octavo a noveno	- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. - Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
Décimo a undécimo	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Es así como se evidencia una de las características fundamentales en la construcción del concepto derivada y es el carácter progresivo que este presenta en los estudiantes, vemos como las habilidades que debe ir adquiriendo el estudiante presentan una evolución a medida que se avanza en los paquetes de grado para ir madurando la comprensión que se tiene sobre algunas de las propiedades de la derivada.

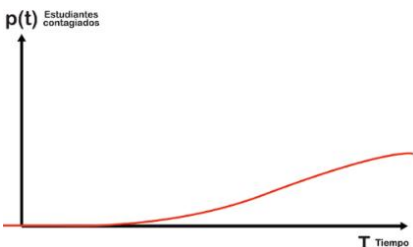
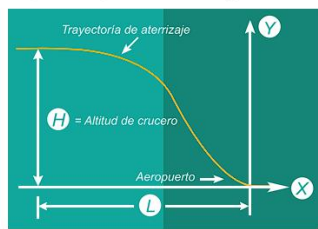
2.1.3. Pensamiento Variacional En Actividades De Los Derechos Básicos De Aprendizaje.

Los DBA (Derechos básicos de aprendizaje, 2015) es un documento oficial del Ministerio de Educación Nacional que, en su conjunto, explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular. Además, los DBA se han construido guardando coherencia con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias. Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados (DBA, 2016).

De manera práctica, los DBA plantean actividades concretas que permiten generar una ruta de estímulo en el estudiante para alcanzar las competencias señaladas por los estándares básicos de competencia. Es de especial interés observar aquellas actividades que se presentan en los últimos grados de escolaridad pues es donde se recoge gran parte del conocimiento sobre la variación y el cambio que se ha gestado durante la etapa escolar y se presentan los elementos necesarios para caracterizar el concepto de derivada. A continuación, se presenta los enunciados, evidencias de aprendizaje y los ejemplos de actividades planteadas en los DBA en los últimos grados de escolaridad que tienen como objetivo esclarecer los contenidos que los estudiantes deben dominar al finalizar la educación media.

Tabla 4

Actividades en los DBA.

Grado	Enunciado	Evidencia De Aprendizaje	Actividad Planteada
Décimo	Comprende y usa el concepto de razón de cambio para estudiar el cambio promedio y el cambio alrededor de un punto y lo reconoce en representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.	Utiliza representaciones gráficas o numéricas para tomar decisiones, frente a la solución de problemas prácticos. Determina la tendencia numérica en relación con problemas prácticos como predicción del comportamiento futuro. Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesivo.	Determina cuándo se presenta la máxima tasa de difusión del sarampión e indica cuál es esa tasa. Nota: Se pide la "máxima tasa" de variación que es diferente al valor máximo para $P(t)$. Una estimación geométrica es posible.  $P(t) = \frac{200}{1 + e^{-(5-t)}}$ donde t representa el número de días desde la aparición del sarampión, y $P(t)$ representa el número total de estudiantes que se han contagiado hasta la fecha. Estima tanto el número inicial de estudiantes infectados como el número de estudiantes que se contagiarán. Difusión del sarampión. La difusión del sarampión en cierta escuela está dada por la expresión,
Undécimo o	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	Relaciona la noción de derivada con características numéricas, geométricas y métricas. Utiliza la derivada para estudiar la covariación entre dos magnitudes y relaciona características de la derivada con características de la función. Halla la derivada de algunas funciones empleando métodos gráficos y numéricos.	Representa la distancia recorrida por el atleta en metros cuando lleva t segundos. Averigua la distancia que ha recorrido cuando alcanza la mayor velocidad. Usa la derivada para construir un argumento. Cuando un atleta recorre cierta distancia se puede suponer que su velocidad no es constante, que a partir del momento en que sale empieza a aumentar su velocidad hasta un pico máximo y que disminuye progresivamente hasta el final. Si se admite que la ecuación $F(t) = 0.00192t(250 - t)$ 
Undécimo o	Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.	Utiliza la derivada para estudiar la variación y relaciona características de la derivada con características de la función. Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva. Calcula derivadas de funciones.	Un avión vuela a una altitud H cuando comienza su descenso a una pista de aeropuerto que está a una distancia L del avión, con respecto al suelo, como se muestra en la figura. Asume que la trayectoria de aterrizaje se representa con la gráfica de una función polinomial cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $y(-L) = H$, $y(0) = 0$. Encuentra el valor de $\frac{dy}{dx}$ en $x=0$ y el valor de $\frac{dy}{dx}$ en $x=-L$? Utiliza los valores de $\frac{dy}{dx}$ en $x=0$ y en $x=-L$ junto con $y(0)=0$ y $y(-L)=H$ para mostrar que $y(x) = H \left[\frac{2x^3}{L} + \frac{3x^2}{L} \right]$ ^[1] Tomado de Cálculo de una variable. Finney, Demana, Waits y Kennedy. Prentice Hall Segunda Edición. 2000. 

Se ha caracterizado, desde una perspectiva curricular, el significado u orientaciones sobre la derivada desde los documentos oficiales del MEN en relación con su tratamiento en la educación básica y media, se puede identificar el carácter progresivo que se le otorga a la noción de derivada en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, así como sus principales interpretaciones, como razón de cambio y como valor de la pendiente tangente a la curva. Se hace un direccionamiento desde los lineamientos al tratamiento funcional y en los DBA se establecen modelos de actividades con unas evidencias de aprendizaje claras, sin embargo, en las escuelas del país se le sigue dando un tratamiento netamente algoritmo y memorístico a la derivada lo cual no corresponde a lo esperado por el ministerio.

No son claras ni explícitas las estrategias que se deben considerar al momento de trabajar la derivada en la escuela y tampoco se tienen en cuenta algunos de los reportes más recientes presentados por la investigación en educación matemática.

2.2. Perspectiva Matemática

En esta sección se desarrollará la perspectiva matemática de la derivada. Aquí se exhiben los elementos conceptuales que dan forma a la comprensión actual que tenemos sobre el objeto derivada, sin embargo, con el propósito de proporcionar un mejor entendimiento sobre los núcleos conceptuales que se coordinan en situaciones de derivación se hace un pequeño recorrido histórico-epistemológico que se agrega en el anexo A. Estos elementos proporcionarán una base teórica sólida para el análisis de las propuestas seleccionadas y caracterizadas en la sección de análisis de propuestas y perspectivas curriculares de este trabajo documental.

2.2.1. Análisis De Contenido.

Siguiendo las ideas de Luis Rico, Luis Lupiáñez, Antonio Marín y Pedro Gómez (2008), se considera en este trabajo el análisis de contenido como una herramienta técnica diseñada para identificar y examinar la variedad de significados en la derivada como contenido de las

matemáticas escolares. A través de este análisis, se podrá dar cuenta de los aspectos matemáticos a los que nos referimos cuando hablamos de la derivada de una función. Así pues, es importante definir una red conceptual que permita identificar y clasificar aquellas nociones teóricas que permiten determinar si una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto derivada respeta y recoge todo el significado matemático del objeto mismo.

La red conceptual de la derivada que aquí se propone está delimitada por tres aspectos, la estructura conceptual de la derivada, los sistemas de representación y la fenomenología del concepto. Por un lado, la estructura conceptual da cuentas de las relaciones entre, el concepto en su definición, los procedimientos y los conceptos asociados a la derivada. Mientras que el análisis de las representaciones da cuentas de esos sistemas de signos que designan la derivada, las relaciones entre ellos y como es que, de un sistema de representación, se obtiene otro, da cuentas de lo que serían reglas de tratamiento y conversión en Duval (2006). Finalmente, el análisis fenomenológico de la derivada, se identificarán los fenómenos a través de los cuales la derivada tiene sentido.

I. Estructura Conceptual De La Derivada

Para el diseño del análisis conceptual de la derivada, se construye la estructura conceptual de la misma. Esta, abarca el dominio conceptual y el dominio procedimental para así dar cuentas sobre las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los conceptos que caracterizan a la derivada?, ¿Qué procedimientos están implicados en el tema?, ¿Cómo se relacionan esos conceptos entre sí?, ¿Cómo se relacionan esos procedimientos entre sí?

Como se vio en el apartado de desarrollo histórico, la derivada se caracteriza por varios conceptos fundamentales que le definen y contextualizan en el cálculo y el análisis matemático. El primer concepto que identificamos en este trabajo es el concepto de **límite** pues en su propia definición la derivada se muestra como el límite de un cociente, pues si existen P y Q que pertenecen a la curva o función, entonces cuando P tiende a Q se podrá obtener una recta tangente.

Esto nos da paso al siguiente concepto asociado a la derivada: *pendiente de la recta tangente*. Este es uno de los primeros conceptos a los cuales la derivada se asocia históricamente, mucho antes que el concepto de límite pues como ya se ha relatado, la derivada surge a partir del problema de hallar la recta tangente a curvas.

Una de las primeras curvas fue la circunferencia, por lo que esta recta tangente se construía como una recta perpendicular al radio, o si la pendiente del radio de esta circunferencia en un punto a , se denota como m_1 , entonces esta recta tangente con pendiente m_2 se debía de cumplir que $m_1 * m_2 = -1$. Por lo que la idea de pendiente es una de las principales en el concepto de derivada. Por otro lado, la idea de pendiente de la recta tangente caracteriza a la derivada desde una perspectiva variacional pues el valor de la pendiente de la recta que se quiera trazar necesariamente depende del valor en unidades cartesianas del punto en la curva.

Otro concepto relacionado con la derivada es el de *tasa de cambio*., pues la derivada mide cómo cambia el valor de una función en relación con un cambio infinitesimal en la variable independiente. Matemáticos como Galileo Galilei asociaron la derivada (desde la comprensión que se tenía de este objeto para este momento) con la idea de velocidad concluyendo que, en modelos cuadráticos del movimiento, modelos de distancia en función del tiempo, la velocidad (derivada de la función) es un modelo lineal, y así se aproxima a la idea de velocidad instantánea o tasa de cambio instantánea. También, Newton, sentó las bases para entender cómo se mueven los cuerpos bajo la influencia de fuerzas pues describió estas tasas de cambio usando su notación de fluxiones, que es una forma temprana de la derivada.

Por último, un concepto no menos importante asociado al de la derivada es el concepto de *función*. Una función, desde la perspectiva variacional, puede verse como una relación entre variables " x " y " y " que se pasan a llamar variable independiente x y variable dependiente y de tal forma que para cada valor posible de x se obtiene un valor de y . así pues, es válido afirmar que $g(x) = 2x$ es la función derivada de $f(x) = x^2 + c$. Por otro lado, una función como correspondencia describe una relación entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer

conjunto (dominio) se le asigna un único elemento del segundo conjunto (codominio). Desde esta perspectiva la derivada no pasa a ser más que una correspondencia de valores, lo cual tiene un tratamiento didáctico y cognitivo importante pues no es una definición que de paso a explorar otros significados de la derivada para generalizar su comprensión.

Ahora bien, si exploramos las relaciones entre conceptos observamos el concepto de *aproximación lineal*, este concepto describa las relaciones entre, limite, función, pendiente de la recta tangente y tasa de cambio pues en su definición:

Si una función $f(x)$ es diferenciable en un numero a , entonces $y = L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ representa la ecuación de la recta tangente a la grafica de $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Entonces la recta tangente es muy próxima a f en cercanías del punto de tangencia por lo que x es cercana al valor de a entonces $f(x)$ es cercana a $L(x)$. Así los valores de $L(x)$ se pueden *aproximar* los valores de $f(x)$.

Por otro lado, está idea de *velocidad*. Esta idea relaciona los conceptos de tasa de cambio y función pues la velocidad es la tasa de cambio de la posición con respecto al tiempo, lo que se representa matemáticamente como la derivada de la función de posición respecto al tiempo. Si tenemos una función $s(t)$ que describe la posición de un objeto en función del tiempo t , la velocidad $v(t)$ se define como la derivada de $s(t)$ con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (1)$$

Dentro de los procedimientos implicados en la derivada destacamos los siguientes:

- Calcular la derivada de una función en un punto por medio de la definición:

Sea $f(x) = \sin(x)$ entonces,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad (2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \sin(h) \cos(x) - \sin(x)}{h} \quad (3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \sin(h) \cos(x)}{h} \quad (4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h) \cos(x)}{h} \quad (5)$$

$$\text{sen}(x) * \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} + \cos(x) * \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \quad (6)$$

$$\text{sen}(x) * (0) + \cos(x) (1) \quad (7)$$

$$= \cos(x) \quad (8)$$

- Aplicar las reglas de derivación descritas en teoremas:

Tabla 5

Algunas reglas de derivación

Teorema 1 Derivada de una constante

Si $f(x) = c$ para toda x , entonces $f'(x) = 0$ para toda x . Es decir,

$$\frac{dc}{dx} = Dc = 0$$

Teorema 2 Regla de la potencia para n entero positivo

Si n es un entero positivo y $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Teorema 3 Derivación de una combinación lineal

Si f y g son funciones derivables con a, b números reales fijos, entonces:

$$D[af(x) + bg(x)] = aDf(x) + bDg(x)$$

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ entonces,

$$\frac{d(au + bv)}{dx} = a * \frac{du}{dx} + b * \frac{dv}{dx}$$

Criterio de la Primera Derivada

Si la función f es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene el número c , y suponga que f' *existe* en todos los puntos de (a, b) , excepto posiblemente en c :

- Si $f' > 0 \forall x$ en algún intervalo abierto que contenga c como su extremo derecho, y si $f' < 0$ en algún intervalo abierto que contenga c como su extremo izquierdo, entonces, f tiene un valor máximo relativo en c
- Si $f'(x) < 0 \forall x$ en algún intervalo abierto que contenga c como su extremo derecho, y si, y si $f' > 0$ en algún intervalo abierto que

contenga c como su extremo izquierdo, entonces, f tiene un valor mínimo relativo en c

Criterio de la Segunda Derivada

Sea c un número crítico de una función f en el que $f'(c) = 0$ y suponga que f'' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto que contiene a c , entonces:

- Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(x, f(x))$
- Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(x, f(x))$
- Determinar puntos máximos, mínimos y de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad para una función dada.

Sea la función $f(x) = x^2 + 4x - 21$ entonces, los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento se obtienen a partir de la primera derivada de la función.

$$f(x) = x^2 + 4x - 21$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

Cuando $f'(x) = 0$ se obtiene la coordenada en x del punto crítico y evaluando este en la función se obtiene que el punto crítico es $P(-2, -25)$ lo que es un mínimo local de la función ya que el signo de la segunda derivada de $f(x)$ es mayor a cero. Entonces, $f(x)$ crece en $(-2, \infty)$, decrece en $(-\infty, -2)$, la función es convexa en todo su dominio y no tiene puntos de inflexión.

La relación entre estos procedimientos está dada en términos de dependencia puesto que las reglas de derivación surgen a partir de evaluar en la definición de derivada diferentes tipos de funciones en forma canónica, un ejemplo de esto es:

Sea la función $m(x) = f(x)g(x)$ entonces:

$$m'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h}$$

$$m'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$m'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$m'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$\text{Dado que } \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = f'(x), \text{ entonces:}$$

$$m'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (g(x) f'(x)) + \lim_{h \rightarrow 0} (f(x) g'(x))$$

$$m'(x) = g(x) f'(x) + f(x) g'(x)$$

Obteniendo así la conocida regla del producto.

II. Sistemas De Representación De La Derivada

Dentro del análisis de contenido de la derivada, la determinación de los sistemas de representación permite dar cuentas sobre las representaciones asociadas a la derivada y las relaciones que se establecen entre estas. El concepto de sistemas de representación tiene sentido dentro de la Teoría de Registros de Representación semiótica, desarrollada en 1995 por Raymond Duval. En esta teoría el autor establece que la forma de acceder a los objetos matemáticos es por medio de los sistemas de representaciones semióticas, sin embargo, hay que diferenciar siempre el objeto matemático de su representación, es decir, se conoce el objeto cuando se han explorado sus diferentes representaciones semióticas.

Un sistema de representación es una construcción de signos que permiten identificar el objeto matemático. Entre estos están, el lenguaje natural, sistema algebraico y sistema gráfico. Las relaciones entre estos sistemas de representación están dadas por lo que Duval (2019) llama, actividades cognitivas fundamentales de la representación vinculadas a la semiosis. La semiosis es la actividad ligada producción de una representación. En este sentido, cuando se producen representaciones, se atraviesan tres actividades cognitivas, estas son, la formación, el tratamiento y la conversión.

La actividad cognitiva de la formación hace alusión a la acción de evocar el objeto que está dado desde una representación mental, usando una estructura de signos y caracteres guiándose en lo que se quiere representar. Por otro lado, el tratamiento, es una actividad

cognitiva que se da con relación al mismo registro de representación, es decir, si el objeto está representado desde un sistema de representación, “tratar” el objeto sería movilizarse desde el mismo registro. Mientras que, la conversión es la actividad que transforma el objeto matemático dado en un registro para representarlo en otro.

Pasaremos entonces a determinar los sistemas de representación en los cuales transita la derivada y cómo se relacionan estos sistemas a través del tratamiento y la conversión de representaciones.

Determinaremos como sistema de representación simbólico a las representaciones algebraicas y numéricas, sistema de representación gráfico a las representaciones geométricas, pictóricas o manipulativas además del sistema de la lengua natural que comprende tanto lo verbal como lo escrito.

Desde el *lenguaje natural*, la derivada se caracteriza como:

[1] *La derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente.*

[2] *La derivada de una función en un punto, es la función que determina la pendiente de la recta tangente en ese punto.*

[3] *La derivada de una función se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño.*

Desde el *sistema simbólico* se tiene:

[4] Notación de Leibniz

$$\frac{dy}{dx}$$

[5] Notación de Isaac Newton

$$\dot{y}$$

[6] Notación de LaGrange

$$f'(x)$$

[7] Notación de Euler

$$Df(x) \quad o \quad D_x f(x)$$

[8]

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

[9]

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

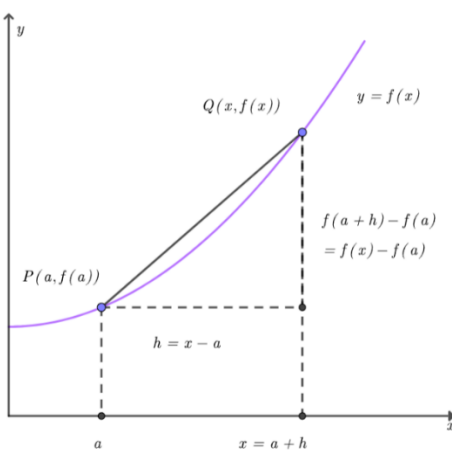
[10]

$$m = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

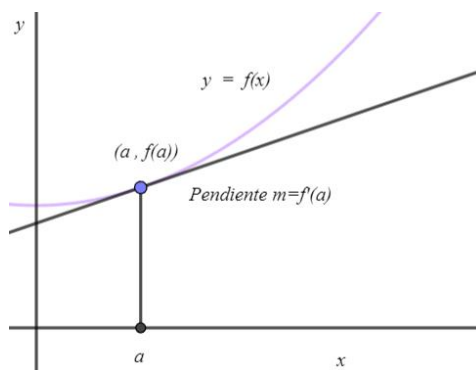
Las notaciones [4], [5], [6] y [7] son sinónimas por lo que no hay tratamiento entre estas, mientras que la representación [8] es la definición de función derivada ya mostrada, y la representación [9] es la representación simbólica de la pendiente de una recta. Estas dos últimas representaciones se relacionan desde la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente que pasa por un punto dado de la curva. El tratamiento entre las representaciones [8] y [9] involucra un cambio en el paradigma de la derivada, pues como se vio en el desarrollo histórico, la conceptualización del límite se dio mucho después del uso de la derivada para resolver o conceptualizar problemas. Esto implica, en términos de Duval (2019) una expansión discursiva con base en un conocimiento adicional sobre el significado del objeto matemático.

Desde el *sistema grafico*:

[11]

Figura 1*Representación del cociente diferencial*

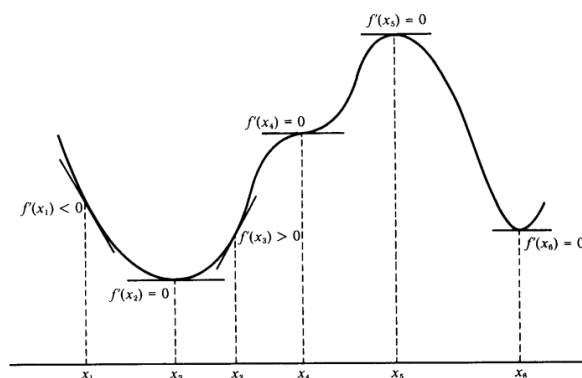
[12]

Figura 2*Representación de la derivada cuando h tiende a cero*

[13]

Figura 3

Representación de las diferentes pendientes o derivadas en una curva

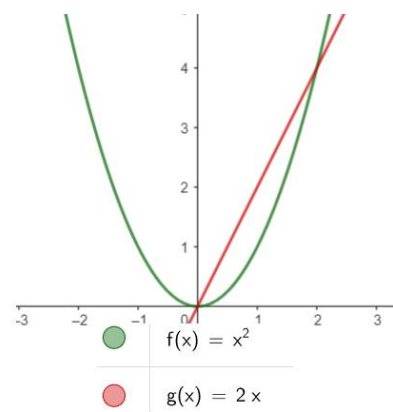


Nota, tomado de *Cálculus Vol.2, Tom Apóstol*.

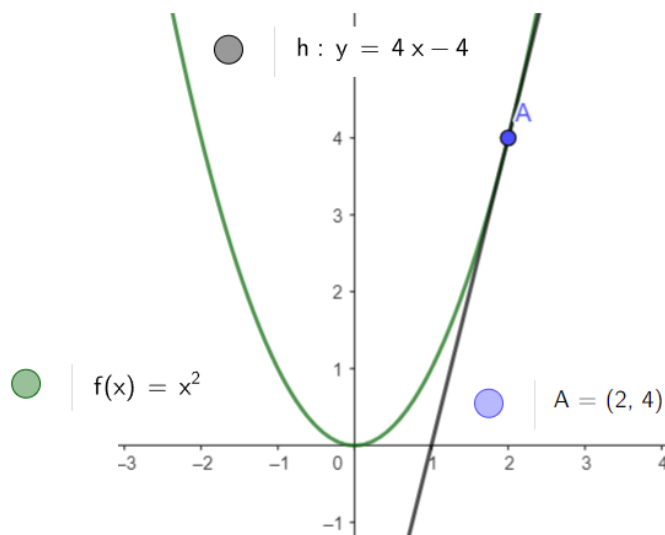
La representación [11] está ligada a la representación [8] pues se da con relación a la pendiente de la recta secante a la curva, cuando los puntos de la recta secante se acercan entonces se evoca la idea de límite lo que relaciona las representaciones [12] y [9]. La representación [13] es una articulación entre los sistemas simbólicos y gráficos en donde muestra gráficamente las diferentes pendientes que se pueden obtener de una función al evaluar la derivada en diferentes puntos.

Para considerar la actividad cognitiva de la conversión entre el registro simbólico al gráfico presentamos el siguiente ejemplo:

Sea $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x$ (Tratamiento en el registro simbólico por medio del cálculo de un límite o el uso de la regla de la potencia) Como $f'(x)$ representa la función de la pendiente de $f(x)$ entonces para un valor x_1 en x se tiene que $f'(x_1) = 2x_1$ Entonces, por medio del registro tabular (Un registro que Duval clasifica como registro intermedio entre el simbólico y el gráfico) se pueden obtener las coordenadas de la función $f(x)$ y $f'(x)$. Para $f(x)$, $P(-2, 4), P_1(0, 0), P_2(2, 4)$, para $f'(x)$ $Q(-2, -4), Q_1(0, 0), Q_2(2, 4)$. Con lo cual se obtendrían las siguientes representaciones de la figura 15.

Figura 4*Articulación de Registros (1)*

Si se quiere la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ entonces, dada $f'(x) = 2x$ al remplazar $f'(2) = 2(2) = 4$ lo que significa que la pendiente de la recta tangente de $f(x)$ en $x = 2$ es 4. Al remplazar 4 en la ecuación de la recta $y = m(x - x_1) + y_1$ (con $(x_1, y_1) = (2, 4)$) se obtiene que la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ tiene por ecuación (representación simbólica) $y = 4x - 4$ [ver figura 16]

Figura 5*Articulación de Registros (2)*

III. Fenómenos En Donde La Derivada Tiene Sentido

Para la descripción de los fenómenos que dan sentido a la derivada, consideramos un fenómeno como un hecho, situación que ocurre en según contexto. Así pues, describimos los fenómenos desde los tres contextos descritos por MEN en los lineamientos Curriculares (1998): contexto de la vida real, contexto de las propias matemáticas, contexto de otras ciencias. Estos fenómenos a menudo se presentan como problemas dentro de cada contexto por lo que destacaremos algunos fenómenos a través de un ejemplo del uso de la derivada para resolver el problema dado.

Fenómenos de las propias matemáticas:

- *Optimización:* Un globo esférico con un radio inicial $r = 5$ pulgadas comienza a desinflarse en el instante $t = 0$ y su radio t segundos más tarde es $r = \frac{60-t}{12}$ pulgadas. ¿A qué razón sale el aire del globo cuando $t = 30$?
- *Análisis de curvas y superficies:* Encuentra los puntos críticos y determina la concavidad de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

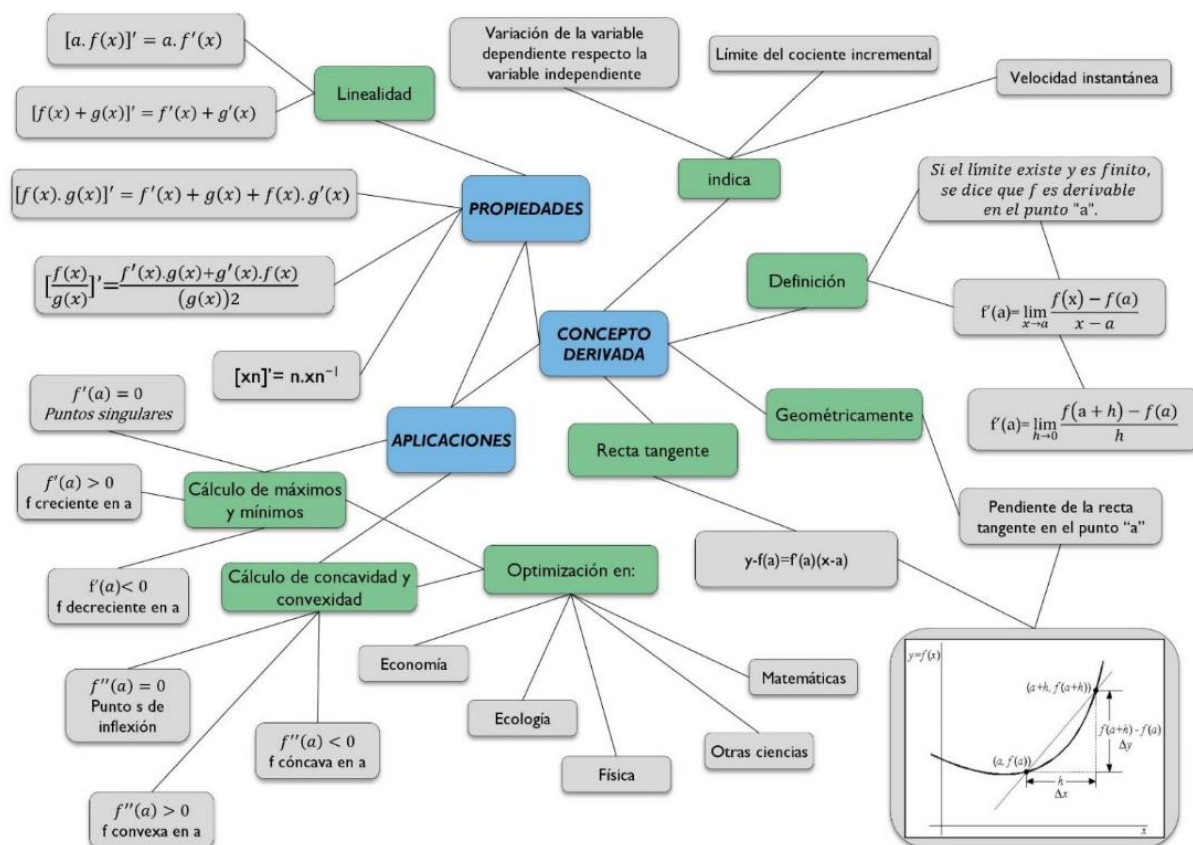
Fenómenos de otras ciencias y de la vida cotidiana en los cuales se usa la derivada:

- *Cálculo de Velocidades y Aceleraciones:* Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta y su posición $s(t)$ en metros en función del tiempo t en segundos está dada por $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t$. Encuentra la velocidad y la aceleración del objeto en $t = 2$ segundos.
- *Modelado de Crecimiento y Decrecimiento:* La población de una ciudad crece según la función $P(t) = 5000e^{0,3t}$, donde $P(t)$ es la población en el año t . Determina la tasa de crecimiento de la población en el año 10.
- *Economía y finanzas:* El costo marginal de producir x unidades de un producto está dado por $C(x) = 20 - \frac{1}{2}x$. Encuentra el número de unidades que deben producirse para minimizar el costo marginal.

Para finalizar este análisis de contenido, presentamos un mapa conceptual en donde se plasman las ideas que hemos resaltado ya como los conceptos asociados a la derivada, las representaciones y los fenómenos o aplicaciones de este concepto.

Figura 6

Mapa Conceptual sobre la Derivada



Elaborado por Pascual León, C., & Rico Romero, L. (2015-2016). Unidad Didáctica: Derivadas y Cálculo Diferencial. Producido para el Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad en Matemáticas. Universidad de Granada. [Unidad Didáctica](#)

2.3. Perspectiva Didáctica

A nivel didáctico, la construcción del concepto derivada en la escuela ha seguido diferentes vertientes o enfoques que buscan introducir al estudiante en el estudio formal y práctico de la derivada global de una función y la derivada en un punto. Diferentes investigaciones han reportado dificultades asociadas a la comprensión del concepto derivada, muchas de estas dificultades están asociadas al tratamiento que se le da al objeto matemático en sí mismo ya sea como una aplicación del concepto de límite de una función o como una primera aproximación al concepto de límite. Con el fin de caracterizar, desde un ámbito didáctico, qué elementos proporcionan condiciones para la valoración o construcción de propuestas alternativas de trabajo, se presenta a continuación una aproximación a las dificultades y obstáculos más representativos según una de las autoras más conocidas en el campo de la educación matemática: Michelle Artigue.

- **La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.**

Este artículo elaborado por Michelle Artigue en el marco del desarrollo del libro Ingeniería Didáctica en Educación Matemática en el segundo simposio Internacional de Educación matemática, proporciona elementos teóricos valiosos sobre la determinación y caracterización de los principales focos de interés respecto a la enseñanza del cálculo, y por supuesto, de la derivada.

La evidencia de los problemas encontrados a la luz de las investigaciones ha generado dos efectos notorios en el panorama de la educación matemática: por un lado, se han convertido en un motor potente para el desarrollo de nuevas investigaciones y, por el otro, han motivado números proyectos de innovación. (Artigue, 1995).

Ahora bien, respecto de los problemas reportados en el aprendizaje del cálculo nos encontramos con tres categorías bien definidas: Dificultades asociadas con la complejidad de los

objetos básicos del cálculo, dificultades asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, dificultades vinculadas a las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos.

I. Dificultades asociadas con los objetos básicos del cálculo

Aunque los estudiantes no desconocen del todo los objetos a los que se enfrentan cuando inician un estudio del cálculo, es importante resaltar que estos son considerados objetos en construcción y que no pueden tomarse como “inertes” pues es justamente el aprendizaje del cálculo lo que se convertirá en uno de los motores de la conceptualización (Artigue, 1995)

Encontramos pues dos objetos centrales en la caracterización de dificultades asociadas a los objetos básicos: los números reales y las funciones.

Sobre los números reales, las investigaciones muestran que, para los estudiantes, las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números que se encuentran en el curso de las extensiones sucesivas empíricas distan de ser claras, es decir, si para los estudiantes el conjunto de los números reales comprende categorías diferentes de números (enteros, racionales, decimales, irracionales) todas estas categorías tienden a confundirse. Las calculadoras refuerzan este tipo de imprecisiones e incluso la recta numérica llega a ser objeto de confusión pues la representación que los estudiantes hacen de ella no se corresponde con la visión que tenemos del continuo numérico.

Sobre las funciones, las investigaciones señalan diferentes elementos que causan dificultades sobre este objeto: El concepto de función, la flexibilidad proceso-concepto, las articulaciones de los registros simbólicos, el estatus de herramienta y los cambios de cuadro.

En el caso del concepto de función, encontramos que la dificultad se presenta en la identificación de lo que es función y lo que no, ya que los estudiantes tienen por un lado una definición, pero por otro usan criterios diferentes para identificar funciones, estos criterios corresponden más a la identificación de prototipos comunes más que a la definición misma. En la flexibilidad proceso-concepto la dificultad se presentan en la incapacidad para moverse entre

la función como un proceso y la función como una entidad conceptual. La articulación de los registros simbólicos presenta también otra dificultad en tanto que movilizan procesos cognitivos complejos cuando se presentan cambios de representaciones simbólicas de las expresiones de función. Finalmente, el estatus de herramienta y los cambios de cuadro caracterizan otra dificultad debido a la complejidad de considerar las funciones como herramientas verdaderas del trabajo matemático y luego para traducir el cuadro de las funciones problema a otros cuadros matemáticos como el numérico, el geométrico o sus aplicaciones.

II. Dificultades asociadas con la conceptualización de la noción de límite

El concepto de límite tiene un lugar esencial en el estudio del cálculo y ello provoca que de él surjan dificultades notorias. Entre las dificultades más comunes aparecen: El sentido común que evoca el termino límite, el límite como proceso algebraico, las concepciones dependientes de una geometría de la forma, el estatus operacional y estructural del concepto.

Sobre el sentido común se considera la concepción de límite como una barrera intraspasable y no alcanzable, como una marca o como el ultimo termino de un proceso que tiende al mismo tiempo a reforzar concepciones monótonas estrictas sobre la convergencia.

Referente al límite como proceso algebraico finito, consiste en transferir al límite las propiedades comunes de los elementos del proceso, y de forma más global, en no estar pendiente de aquello que diferencia esta operación particular de las operaciones algébricas comunes.

Las concepciones dependientes de una geometría de la forma no obligan a identificar con claridad sobre cuales objetos con exactitud se lleva a cabo el proceso del límite. Esto lleva a concepciones erróneas como que si geométricamente un objeto “tiende a otro” entonces todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes del objeto límite.

Finalmente, referente al estatus operacional y estructural del concepto, se traduce en la dificultad para separarse de una visión del límite en simples términos de proceso para disociar

con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo, para dotarlo de una identidad propia, por ejemplo, cuando comparamos el número $0,99999$ y 1 .

III. Dificultades asociadas a la ruptura álgebra/cálculo

Esta dificultad establece que si bien el cálculo es un dominio donde la actividad matemática se apoya bastante en las competencias algebraicas, es necesario romper con ciertas concepciones algebraicas en el tratamiento de objetos del cálculo, por ejemplo, la igualdad. En álgebra, la igualdad entre dos expresiones se entiende de tal manera que una demostración de la igualdad quedará dada en términos de la equivalencia de las expresiones después de una serie de transformaciones; por el contrario, en el cálculo es necesario romper con esta forma de entender la igualdad ya que en este dominio las igualdades entre objetos estarán dadas de tal forma que no es posible establecer la equivalencia directa, bastará con dar un rodeo y encontrar una vecindad alrededor de un punto que satisfaga las condiciones necesarias para establecer igualdades como en la demostración formal de límite.

2.4. Síntesis Del Marco De Referencia Conceptual

A continuación, se presenta una breve síntesis acerca de los elementos más significativos del marco teórico que fundamenta el análisis documental. Estos elementos permiten la designación de las categorías que se presentan en la matriz de análisis de la sección 3.2.

Tabla 6 Síntesis del marco de referencia conceptual.

Marco	Elementos significativos
Marco curricular	- La enseñanza del pensamiento variacional busca superar la fragmentación de contenidos y ubicarse en un campo conceptual. - El estudio matemático del movimiento construye la noción de variación y configura el cálculo. - La derivada se interpreta como razón de cambio y como pendiente de la tangente a una curva. - La modelación es clave para interpretar relaciones algebraicas y gráficas. - Las interpretaciones de la derivada se desarrollan progresivamente a través de los grados escolares (coherencia vertical). - Se utilizan representaciones gráficas o numéricas para resolver problemas prácticos. - La derivada se caracteriza como un objeto matemático que estudia la variación y covariación entre magnitudes, y se relaciona con propiedades geométricas, algebraicas y numéricas.
Marco matemático	- Las primeras apariciones de la derivada están relacionadas con la determinación de tangentes a curvas como la circunferencia. - Fermat fue uno de los primeros en hallar derivadas como cocientes incrementales. - En el siglo XVII, la derivada se asoció con el movimiento, la velocidad y la aceleración. - Cauchy introdujo la definición rigurosa de la derivada, enfocándola desde una perspectiva variacional. - La representación de la derivada varía según el contexto (límite, función o pendiente de la recta tangente). - La derivada ha evolucionado históricamente, siendo fundamental en el desarrollo del cálculo y en la comprensión del cambio y la variación. Matemáticos como Descartes, Fermat, Leibniz y Newton contribuyeron al cálculo infinitesimal, destacando la derivada como herramienta esencial en física, ingeniería, economía y biología.
Marco didáctico	- Los objetos básicos del cálculo generan dificultades debido a concepciones epistémicas o procesos cognitivos. - El límite es un objeto central en las dificultades, ya que representa una barrera epistemológica para los estudiantes. - La disrupción entre el pensamiento algebraico y el cálculo es otra área de dificultad, ya que requiere un cambio metodológico en la forma de operar los objetos. - La derivada ha causado dificultades de comprensión en los estudiantes debido a su complejidad y al tratamiento escolar, lo que lleva a interpretaciones parciales e inconexas. Sin embargo, existen alternativas didácticas que proponen soluciones desde situaciones concretas y la modelación de fenómenos.

Capítulo 3: Algunas Propuestas De Enseñanza Sobre La Derivada Y Sus Perspectivas Para Propuestas Curriculares.

Este capítulo está dedicado a la descripción y análisis de cuatro propuestas relacionadas con la enseñanza de la derivada, integrando elementos matemáticos, curriculares y didácticos como se señaló en el marco teórico de referencia. A lo largo del capítulo, se presentan implícitamente las fases del análisis documental adoptado. Dado que la apuesta metodológica de este trabajo es la revisión documental, se ha tomado como base la propuesta y definición de Camargo (2021), quien afirma que la revisión documental distingue una estructura específica. Una vez identificados el objetivo del estudio, en este caso “Proponer algunos elementos para la construcción de alternativas de trabajo curriculares desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional, a través de una revisión documental de algunas propuestas para la enseñanza de la derivada en la escuela” se determinan criterios para la selección del material a analizar. Posteriormente, la selección de las propuestas y la construcción de una matriz de análisis se presentan en la sección 3.1 y 3.2 respectivamente, luego el análisis de estas propuestas y finalmente la obtención de resultados se presentan en las secciones 3.3 y 3.4. De acuerdo con esto, se presenta a continuación la descripción de estas fases y sus resultados.

3.1. Selección de las Propuestas de Enseñanza de la Derivada

Con la intención de dar cumplimiento al objetivo general de este trabajo, se ha realizado una búsqueda de documentos que estuvieran relacionados con la derivada, limite, variación u otros conceptos. Esta búsqueda dio como resultado una tabla con 49 documentos (ver el anexo B) en esta tabla se ha identificado dentro de cada documento su origen de publicación, fecha, autor, una observación y la referencia o enlace respectivo. Luego, se ha realizado una clasificación de estos documentos. Para esta clasificación se tomó como primer criterio el lugar de publicación, es decir, se distinguió entre documentos, locales (Valle del Cauca), nacionales e

internacionales. Un segundo criterio de clasificación fue si el documento tenía que ver o no con la enseñanza o aprendizaje de la derivada, los documentos que no cumplieron este criterio no fueron considerados. El tercer criterio de clasificación fue en realidad un criterio de exclusión, aquellos documentos en donde se proponía el uso de tecnologías digitales para la enseñanza de la derivada no fueron tomados en cuenta, ya que, desde el punto de vista de los investigadores, estas propuestas giran, aparentemente, en torno a la potencialidad o idoneidad del uso de recursos en el aula y no al enfoque metodológico del diseño de la propuesta de enseñanza, lo cual desvía el centro de atención de la investigación y requiere un nuevo enfoque teórico que se sale de los propósitos de esta revisión documental. Como resultado de esta clasificación se tienen tres tablas, una con documentos locales, otra con nacionales y por último internacionales (ver el anexo C).

Una vez clasificados los documentos se procede a la selección de las propuestas de enseñanza que se consideran analizar. Antes de definir los criterios de selección, se estableció que el estudio incluiría tanto propuestas nacionales como internacionales, con el propósito de garantizar una visión más amplia y evitar cualquier parcialización en el estudio.

El primer criterio de selección para las propuestas está relacionado con el enfoque metodológico de las mismas, es decir, se seleccionaron únicamente aquellos documentos que presentaran una propuesta de enseñanza bien definida, estructurada y justificada teóricamente; no se consideraron documentos en donde aparecieran secuencias didácticas o bancos de preguntas que no mostraran una estructura u orden aparente.

El segundo criterio de selección, aplicado a las propuestas internacionales, fue que los autores de estas propuestas fueran investigadores reconocidos en el campo de la educación matemática en particular en la didáctica del cálculo a nivel internacional, ya que así se garantiza que las propuestas seleccionadas bajo este criterio sean las de mayor impacto. En este criterio encaja la propuesta de Crisólogo Dolores, *La Variación y la Derivada* (2012), y la propuesta de Carmen Ascarate y Jordi Deulofeu en su libro *Funciones y Graficas*, capítulo quinto, *Variación*

de una Función: Hacia el Estudio de la Derivada (1999). Por un lado, Carmen Azcárate tiene adjunto más de 47 publicaciones entre 1981 y 2015 en las cuales se destacan obras colectivas, tesis dirigidas, libros y artículos. En general ha sido una docente e investigadora involucrada profundamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje en relación con áreas como el álgebra y el cálculo. Por otro lado, Crisólogo Dolores Flores, es un investigador y didacta mexicano quien en el periodo de 2002 a 2022 ha hecho más de 28 publicaciones entre artículos y libros.

El criterio para la selección de las propuestas nacionales fue por ubicación geográfica. Aquí se revisaron propuestas de carácter local (Cali, regional (Región pacífica) y de carácter nacional (Colombia). Se seleccionaron propuestas que cumplieran el primer criterio y se intentó seleccionar al menos una local, una regional y una nacional. Debido a las características de estas solamente se seleccionaron dos nacionales, ya que las regionales y locales no cumplían los requerimientos. Así pues, se seleccionaron las propuestas de Carlos Pineda, (2013) (Universidad Nacional de Colombia) y la propuesta de John Gómez y Cesar Martínez (2015) (Universidad Pedagógica Nacional).

En la siguiente tabla (Tabla 6) se presentan las propuestas seleccionadas:

Tabla 7 *Propuestas Seleccionadas*

	Título	Autor	Año	Observación
1	Variación de una Función: Hacia el Estudio de la Derivada	Carmen Azcárate Giménez y Jordi Deulofeu	1999	Libro
2	La Variación y la Derivada	Crisólogo Dolores Florez	2012	Libro
3	Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de la Derivada en el Último Grado de educación Secundaria	Carlos Eduardo Pineda Ruiz	2013	Trabajo de Grado de Maestría
4	Una Aproximación a la Derivada desde la Variación y el Cambio	John Jairo Gómez Morales y Cesar Augusto Martínez Gómez	2015	Trabajo de Grado de Especialización en Educación Matemática

3.2. Matriz Para El Análisis De Las Propuestas

Una vez seleccionadas las propuestas se procedió al diseño de una matriz de análisis que permitiera generar criterios para analizar las propuestas y determinar en estas aquellos elementos curriculares, matemáticos y didácticos de forma que se pudiera estructurar la información encontrada de una manera sistemática. Estos criterios de análisis vienen directamente del marco teórico de referencia. Este marco teórico está seccionado en tres partes, marco curricular, marco matemático y marco didáctico. Sin embargo, para efectos de análisis, el marco curricular y el marco matemático se configuraron como una perspectiva de análisis unificada, esto debido a que el desarrollo del pensamiento matemático se genera en conjunto a través de unos conocimientos básicos, unos procesos generales de pensamiento y unos contextos (MEN, 1998).

Es así como se tienen dos categorías de análisis, la categoría Aspectos Matemático-Curriculares y la categoría Aspectos Didácticos.

La categoría Aspectos Matemático-Curriculares tiene tres subcategorías, Conocimientos Básicos, Procesos Generales, y Contextos. La Subcategoría Conocimientos Básicos, contiene, en primer lugar el elemento de análisis de contenido en donde se describe en rasgos muy generales que se tomara como criterio de análisis las acotaciones matemáticas de la derivada, es decir, se tomaran en cuenta no solo los elementos de la propuesta que se identifiquen como la derivada directamente sino también todos aquellos conceptos y elementos matemáticos que permiten construir esta noción, como por ejemplo el concepto de recta tangente, tasa de cambio. De acuerdo con esto, se describe y analiza en las propuestas cómo estas presentan estos conceptos, qué conceptos toman, bajo qué representaciones, qué propiedades se hacen explícitas y cuáles no, qué definiciones se presentan, y otros elementos de análisis.

Luego, la Subcategoría de *Conocimientos básicos* contiene el aspecto Histórico. Aquí, se explora la asociación histórica que puede o no tener la propuesta con los aspectos que se han dado

históricamente, es decir, si hay o no una relación con el desarrollo histórico de la derivada, o si se presentan los conceptos de forma que se haga alusión a este desarrollo histórico. En tercer lugar, están las Características del Pensamiento Variacional. Aquí se hace alusión a aquellos elementos que permiten definir y dar sentido dentro de toda actividad matemática al pensamiento variacional, aquel que se encarga del estudio de la relación entre variables, los cambios, las funciones y, en general, el comportamiento de los fenómenos de cambio y variación.

La subcategoría *procesos generales* está dividida en los 5 procesos generales, descritos en el marco teórico de referencia. Estos son procesos que según el MEN (2006) están involucrados en toda actividad matemática y son una de las bases para el desarrollo del pensamiento variacional. Por tanto, se pretende describir y analizar en cada propuesta que procesos se desarrollan según las consignas y preguntas dadas, y de acuerdo con esto cómo se puede observar el proceso de tratamiento y conversión, descritos por Duval (2006), es decir si estos cinco procesos son procesos que la propuesta permite, promueven o exige.

La subcategoría *Contextos* se refiere a las situaciones o escenarios que se le presentan al estudiante y que son las que dan sentido a la realidad matemática.

Sobre la categoría *Aspectos Didácticos*, se toma en cuenta la subcategoría Dificultades asociadas al estudio del cálculo presentada por Artigue (1995). Esta subcategoría contiene los siguientes aspectos: objetos básicos del cálculo, conceptualización de la noción de límite y ruptura en los modos de pensamiento. Aquí se espera identificar qué aspectos relativos a la configuración de obstáculos didácticos toman partido en las propuestas bien sea de forma implícita o explícita.

Cabe resaltar que el diseño de la matriz pasó por ocho versiones antes de alcanzar su configuración definitiva. Algunas de las versiones preliminares, junto con los ajustes realizados en cada etapa, se presentan en los anexos (Ver anexo D) para documentar el proceso de refinamiento y validación. A continuación, la matriz de análisis (Ver tabla 8)

Tabla 8

Matriz de Análisis de

Categoría	Sub-Categorías	Sub-Sub-Categorías	Descripción de la Categoría
Aspectos Matemático - Curriculares	Conocimientos Básicos	Análisis de Contenido	Esta categoría analiza la interpretación de la derivada tanto de manera local, como tasa de cambio instantánea y herramienta para identificar máximos, mínimos y puntos críticos, como global, asociada a conceptos de crecimiento, decrecimiento y concavidad. También se examinan las diversas representaciones de la derivada (natural, simbólica y gráfica) y su aplicación en fenómenos de optimización, análisis de curvas, dinámica de movimientos y contextos económicos o financieros.
		Histórico	Esta categoría explora cómo se introduce y utiliza el concepto de derivada, analizando su asociación con la tangente a través de representaciones geométricas y simbólicas. Se incluye su interpretación como tasa de cambio instantánea, vinculada al límite como idea de cercanía entre puntos, y su aplicación para comprender variaciones en funciones respecto a cambios infinitesimales en la variable independiente.
		Características del Pensamiento Variacional	Esta categoría se centra en la comprensión y representación de la variación como base del pensamiento variacional, abordando cambios en variables bajo condiciones continuas o discretas. Se analiza el uso de conceptos como variación, cambio, variable y función, junto con representaciones cualitativas (textuales y pictóricas) y cuantitativas (geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas). Además, se examina cómo el pensamiento variacional integra perspectivas numéricas, geométricas, algebraicas, métricas y estadísticas para modelar situaciones de cambio y variación.
	Procesos Generales	Resolución y Planteamiento de Problemas	Esta categoría determina si en las propuestas se favorece la construcción de sistemas figurativos mentales, gráficos o tridimensionales con el fin de reproducir o representar la realidad de forma esquemática para hacerla comprensible.
		Razonamiento	El razonamiento lo entenderemos como un desarrollo de pensamiento lógico que permite percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.
		Comunicación	Esta categoría promueve la comunicación matemática y el pensamiento crítico mediante consignas que exigen interpretación, demostración, y planteamiento de conjeturas sobre la derivada. Además, fomenta el desarrollo, aplicación, y justificación de estrategias para resolver problemas, identificando patrones, generalizando soluciones y creando un ambiente que estimule la exploración y comprobación de ideas.
		Modelación	Esta categoría consiste en analizar cómo las actividades y recursos propuestos fomentan el desarrollo del pensamiento variacional a través de la modelación, entendiendo este como la capacidad de modelar situaciones del mundo real mediante funciones matemáticas. En este sentido, se examina si las actividades permiten simplificar, idealizar y estructurar situaciones problema, trasladarlas al lenguaje matemático para crear modelos funcionales, y validar dichos modelos mediante la identificación de discrepancias que puedan llevar a su ajuste o reemplazo. También se incluye el uso de representaciones

Aspectos Didácticos	Contextos		concretas, como maquetas en movimiento, para facilitar la comprensión de relaciones entre variables y magnitudes en contextos dinámicos.
		Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.	Esta categoría examina cómo las propuestas comprometen al estudiante en la construcción y ejecución de procedimiento mecánicos también llamados algoritmos, sin que su ejecución comprometa la comprensión de su carácter de herramienta.
		De la Vida Real, De las Matemáticas y De otras Ciencias	Esta categoría destaca el uso de contextos matemáticos, cotidianos y científicos para dar significado al aprendizaje de la variación y las funciones, incentivando el análisis de relaciones entre variables. Se promueve la exposición a funciones no regulares, el diseño de problemas que involucren afectividad y aprendizaje, y el uso de múltiples representaciones para profundizar la comprensión, permitiendo la interpretación y traducción entre diferentes formas de representación.
	Dificultades y Perspectivas de Tratamiento	Objetos	Esta categoría analiza las dificultades conceptuales y representacionales en torno a los números reales y las funciones. Aborda la falta de claridad en la asociación de los números reales con el continuo numérico y las concepciones limitadas de función, enfocadas en prototipos o fórmulas. También examina la rigidez en la visión de la función como proceso o entidad conceptual y los retos en la articulación de registros simbólicos, con una predominancia del enfoque algebraico sobre los gráficos. Examina si la propuesta aborda estos obstáculos mediante una construcción progresiva del concepto o se limita a un enfoque procedimental sin articular diferentes registros de representación.
		Limite	Esta categoría explora los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de "límite". Incluye dificultades derivadas del sentido común, que lo ve como una barrera inalcanzable, su tratamiento como un proceso algebraico "finito", y concepciones geométricas incorrectas que generan errores sobre las magnitudes asociadas al límite. También se aborda la falta de conexión entre el uso operacional del límite y su estructura como objeto matemático. Evalúa si la propuesta favorece una transición del límite como proceso dinámico a objeto matemático, o si se introduce sin atender estas dificultades.
		Modos de Pensamiento	Esta categoría aborda las implicaciones didácticas del tratamiento de la igualdad y el cambio en el razonamiento. Diferencia la igualdad en su interpretación estática, donde se consideran valores idénticos, de la igualdad dinámica o condicional, promoviendo un cambio en el razonamiento desde un enfoque procedimental a uno conceptual o condicional. Examina si la propuesta promueve un pensamiento variacional y conceptual o se basa en reglas y procedimientos sin explorar sus significados.

3.3. Análisis Documental De Las Propuestas De Enseñanza Sobre La Derivada.

A continuación, se presenta el análisis de las cuatro propuestas de enseñanza sobre el concepto derivada que se han seleccionado del banco de propuestas presentadas en la *sección 3.1*. Con el fin de presentar una breve conceptualización sobre la propuesta y así facilitar su comprensión, se ha establecido una estructura general para la presentación de cada una de ellas. Así, la estructura general comprende: I Descripción general de la propuesta, II Análisis matemático – curricular, III Análisis didáctico y IV Conclusiones.

3.3.1 Hacia La Derivada por Carmen Azcarate Y Jordi Deulofeu.

Para la visualización, parcial o completa, del capítulo 5 del libro *funciones y gráficas*, en donde se ubica esta propuesta, refiérase al anexo E o directamente a la biblioteca oficial de la editorial *síntesis*.

I.Descripción General.

La propuesta de aprendizaje seleccionada para este análisis se encuentra en el libro *Funciones y gráficas*, escrito por Carmen Azcárate Giménez junto a Jordi Deulofeu Piquet y publicado en 1999. Esta obra forma parte de la serie *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje* (entrega número 26), editada por la editorial Síntesis. La serie se distingue por abordar de manera exhaustiva diversos aspectos didácticos y metodológicos relacionados con la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria y universitaria, proporcionando a los docentes un conjunto de herramientas y estrategias efectivas para facilitar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos.

En *Funciones y gráficas*, los autores proponen un análisis detallado de los problemas didácticos asociados a la enseñanza del concepto de función y su representación gráfica. El libro se estructura en dos partes principales.

La primera parte, titulada “Acerca del concepto de función” comprende los capítulos 1 y 2. Aquí, los autores ofrecen una visión teórica e histórica del desarrollo del concepto de función, explorando cómo este ha evolucionado desde sus orígenes hasta su formalización en la matemática moderna. Esta primera parte enfatiza la importancia de comprender la función como un elemento clave en la interpretación de fenómenos reales y su modelación matemática.

La segunda parte, titulada “Acerca de la enseñanza-aprendizaje del concepto de función”, abarca los capítulos 3 a 6 del libro y se centra en los aspectos didácticos y metodológicos relacionados con la enseñanza de las funciones en la educación secundaria. En estos capítulos, los autores analizan cómo introducir y desarrollar el concepto de función a partir de distintas representaciones como gráficos cartesianos, tablas, fórmulas y modelos algebraicos. Un aspecto destacado es la dedicación de un capítulo completo a la enseñanza de la derivada, la cual se presenta a través del estudio de la variación de las funciones y el análisis de la pendiente de la recta tangente, facilitando así la comprensión de este concepto a partir de su interpretación gráfica y algebraica.

Es en el capítulo 5 en donde centraremos la atención, pues en este capítulo, titulado “Variación de una función: Hacia el estudio de las derivadas” (pág. 105), Azcarate hace una descripción sobre los contenidos matemáticos que guían el aprendizaje de la derivada a lo que describiremos como “La propuesta de Azcarate para la enseñanza de la derivada”. La propuesta se concentra en el capítulo 5 y se divide en dos apartados: 5.1 llamado “introducción al concepto de límite” y 5.2 “Aspectos locales” (pág. 117). Parte del contexto de esta propuesta de enseñanza de la derivada es que la derivada como objeto matemático es tratada como un tipo particular de función y una herramienta para describir la variación de una función, por lo que antes de presentar la propuesta, se hace un recorrido desde ¿Qué es una función? (pág. 17) hasta “Otras funciones cuya grafica es una curva” (pág. 103).

Para facilitar la descripción y el posterior análisis de la propuesta describiremos de forma global los apartados 5.1 y 5.2 y, una vez tengamos la descripción general, apostaremos por

un análisis más detallado de los aspectos curriculares, matemáticos y didácticos presentes y que fueron descritos previamente en la matriz de análisis propuesta.

5.1 Introducción: El concepto de límite. En este apartado encontramos una descripción por parte de Azcarate de los dos enfoques didácticos más comunes que se le puede otorgar a la derivada y que involucra el concepto de límite, para la profesora Azcarate el concepto de límite constituye la dificultad fundamental del concepto derivada. En el apartado también encontramos algunas ideas acerca de la introducción de límites en contextos geométricos y numéricos.

Partamos pues de los enfoques que se nos describe en la propuesta respecto al tratamiento de la derivada, por un lado, tenemos a la derivada como una aplicación del concepto de límite de una función y por otro tenemos a la derivada como una primera introducción al concepto de límite de una función.

El primer enfoque es lógico desde el punto de vista teórico y matemático, pero hace depender la definición de derivada de la definición y del cálculo de límites, esto arrastra consigo todos los obstáculos epistemológicos del concepto de límite con lo cual Azcarate lo descarta.

El segundo enfoque tiene una correspondencia más fiel con el desarrollo histórico pues parte del método utilizado por Newton en el cálculo de velocidades instantáneas, pero Azcarate advierte que este enfoque parte de una situación de cálculo de límites especialmente difícil, sin embargo, si se deja el tratamiento formal y riguroso de lado se pueden explorar situaciones geométricas y numéricas que permiten un primer contacto con los límites en relación con el tema de la variación de una función. Así pues, surge la propuesta de la profesora Azcarate que contempla cinco aspectos dentro de una secuencia:

- Casos diversos de límites en el campo numérico y geométrico.
- Un caso concreto: las cuerdas y tangentes.
- Tasa media de variación y velocidad media.
- Tasa instantánea de variación y velocidad instantánea.

- Funciones derivadas.

Se inicia así la propuesta tomando algunos ejemplos concretos de dominio numérico y geométrico para la introducción del concepto de límite.

- a) Cálculo de raíces
- b) Cálculo de la expresión decimal de una fracción.
- c) Suma de términos de una progresión geométrica de razón $r < 1$.
- d) Representación geométrica de la progresión de razón $r < 1$.
- e) Problema clásico de Aquiles y la tortuga.

En todos los ejemplos dados por Azcarate, tenemos situaciones en la que el estudiante hace cálculos de aproximaciones muy cercanas a un valor desconocido pero definido, las aproximaciones por exceso y por defecto juegan un papel crucial en la determinación de los valores numéricos y la idea de convergencia aparece en los ejemplos geométricos.

5.2 Aspectos locales. Para la siguiente fase de la propuesta relacionada a los aspectos locales, la profesora Azcarate nos presenta los aspectos de la variación de funciones que se estudiarán en la sección y qué herramienta se usa para su medición. En esencia, la variación de una función se puede estudiar en un intervalo y en un punto y para su medición se usa la tasa media de variación y la tasa instantánea de variación.

Ahora bien, cuando se estudian los cambios en los valores de una función en un determinado intervalo aparecen nociones importantes acerca de cómo caracterizar el cambio. Tenemos en esencia dos formas de caracterizar el cambio de una función, cualitativo y cuantitativo. Para el caso de la variación de una función en un intervalo, la profesora Azcarate sugiere mostrar situaciones donde se evidencien variaciones positivas y negativas y situaciones donde se muestre que la igualdad de dos variaciones no presupone la igualdad de los valores de la función. Se parte así de situaciones de variación en intervalos grandes y se concatena la noción primitiva de límite que se tenía para ir hacia el estudio de la variación en intervalos cada vez más pequeños.

Aparece aquí otro de los conceptos más importantes en el estudio de la variación de una función y es la relación que tiene la tasa de variación (bien sea media o instantánea) con la pendiente de la recta secante (si se estudia la variación en un intervalo) o tangente (si se estudia la variación en un punto). Lo que se quiere en este momento de la propuesta es construir un significado geométrico de las cuerdas y tangentes que se articule y tome sentido con el significado numérico de la tasa de variación media e instantánea. Tanto la tasa de variación como la pendiente de la recta que pasa por las abscisas son herramientas que permiten dar cuenta de la variación de la función de forma local. Así, la tangente adquiere el significado de la posición límite de las secantes que pasan en la cercanía de un punto A.

El caso de la velocidad media y la velocidad instantánea son simplemente casos de variación media y variación instantánea en donde se usan funciones espacio-tiempo.

Una vez se presentan los elementos necesarios para la construcción del significado geométrico y numérico de la tasa de variación media e instantánea y de su relación con la pendiente de la recta tangente a la función, la propuesta de la profesora Azcarate se dedica ahora sí a la presentación de la definición de la función derivada en el capítulo 6. Sin embargo, consideramos que la propuesta de enseñanza está condensada en la segunda mitad del capítulo 5 y parte del capítulo 6, con lo cual para efectos de análisis consideraremos solo las secciones 5.2 y 6.1.

II. Análisis del Contenido desde el Marco Matemático.

La sección 5.2. Aspectos Locales contiene los siguientes apartados, 5.2.1. Tasa Media de Variación en donde se encuentran subapartados, Variación de una Función, Tasa Media de Variación, Velocidad Media, Tasa Media de Variación y Pendiente de una Recta. Luego están los apartados 5.2.2. Cuerdas y Tangentes, 5.2.3. Tasa Instantánea de Variación. En este último se encuentran los subapartados Velocidad Instantánea, Tasa Instantánea de Variación o Número Derivada de una Función en un Punto. Luego está el capítulo 6. Estudio General de una función

en donde se encuentra la sección 6.1. Función Derivada de una Función con el apartado 6.1.1.

Definición de la Función Derivada.

- **Análisis de la sección: Tasa Media De Variación Y Velocidad Media**

En esta sección, en el subapartado *variación de una función de la sección 5.2 aspectos locales*, la autora empieza presentando tres ejemplos en donde se aborda la idea de variación de una función. Dos de estos ejemplos están dados en representaciones gráficas y el restante en una representación tabular, cada ejemplo está acompañado de un conjunto de preguntas asociadas. Estas preguntas tienen la intencionalidad de guiar al estudiante a identificar aspectos específicos de la variación como lo es el cambio, las variables y el cambio en las magnitudes con relación a otras, lo cual configura uno de los elementos esenciales del pensamiento variacional; destacando la importancia del orden del cálculo.

En uno de los ejemplos, se muestra una gráfica de presión versus tiempo (véase gráfica 5.6, Anexo E) y se hacen las siguientes preguntas: ¿Cuál ha sido la variación de presión entre las 6h y las 18h del jueves? ¿Y entre las 12h y las 24h del sábado? ¿Cómo interpretas que los dos valores absolutos sean los mismos?

En primer lugar, se reconoce que la operación estándar para medir el cambio es la diferencia entre un estado final y un estado inicial. Además, esta operación debe de tener en cuenta una magnitud que va a ser restada, magnitud que de inmediato hay que identificar como un $f(x_1)$, es decir, es un valor que depende de la forma en la que se relacionan las variables en la función. En segundo lugar, se destaca que la igualdad entre dos o más variaciones no implica necesariamente la igualdad de los valores de la función, esto significa que el cambio de una función, en un primer momento, se caracteriza mediante dos valores que delimitan un rango de la función, lo cual permite definir la variación de esta. Por esto, se puede decir que en esta sección la propuesta propende la interpretación de la variación de una función en términos locales como la tasa de cambio en un intervalo. Finalmente, y, en consecuencia, la sección permite que el estudiante distinga entre dos tipos de variación según el resultado de la

operación: variación negativa y variación positiva, dependiendo de las magnitudes restadas, lo que en términos del pensamiento variacional podríamos asociar con la identificación de correlación de las variables.

Una vez establecido el cómo medir la variación de una función se profundiza en aquellas variaciones bruscas y cómo es que estas se interpretan diferente según un intervalo pequeño de tiempo o intervalo grande. Esto para establecer la importancia de medir la variación en intervalos cada vez más pequeños y establecer a la vez el concepto de tasa media de variación, distinguiendo este del concepto de media aritmética. En este punto, aparece la representación simbólica del cociente de diferencias que se asocia a la tasa media de variación de la función entre dos abscisas, proporcionando una base para entender el comportamiento y cambio de la función en diferentes intervalos y desarrollar métodos algebraicos para calcularlos. Una de las consignas más interesantes es la de construir la fórmula para hallar la tasa media de variación de una función y así el signo del resultado de la operación indicaría si hay crecimiento o decrecimiento.

Mas adelante, la propuesta presenta un caso particular de la tasa media de variación llamado *Velocidad media* que representa una situación problema clásica en donde las variables son la distancia y el tiempo, este ejemplo concreto es útil para el estudiante pues es muy fácil mostrar la dependencia de las variables en este tipo de situaciones; intuitivamente el tiempo se percibe como una variable continua que determina la posición de una partícula, con lo cual es un caso particular que siempre funciona para determinar la variable independiente. Además, su potencialidad no se reduce únicamente a la determinación de dependencia de variables; la velocidad constituye el primer caso próximo a la vida del estudiante en el que el cálculo de velocidades medias no es suficiente para determinar el comportamiento real de un fenómeno y por tanto se hace necesario el calcular la velocidad instantánea.

El contexto de velocidad es presentado con un modelo lineal en donde se establece una relación de igualdad entre la velocidad y la pendiente de la función distancia vs tiempo (véase

gráfica 5.10, Anexo E), aparecen aquí muchos elementos del pensamiento variacional que parecen indicar que este caso concreto es ideal a la hora de relacionar el espectro numérico de la tasa de variación con el espectro geométrico.

Posteriormente, en la propuesta se introduce un segundo ejemplo de comparación entre dos modelos lineales de velocidad, donde es posible observar y comparar ambas pendientes.

A su vez, se presenta un ejercicio adicional en el que aparece una gráfica compuesta por una función a trozos, con secciones lineales y cuadráticas (véase gráfica 5.11, Anexo E). En esta parte, se plantean preguntas sobre la velocidad media en cada tramo, lo que permite realizar comparaciones entre ellos. Este análisis permite al estudiante observar que, en los segmentos de función cuadrática, no se encuentra una pendiente constante en cada punto de la función, por lo que la velocidad cambia en cada instante, a diferencia de los tramos lineales, donde la pendiente es constante en distintos puntos. Así, se guía al estudiante hacia la necesidad de construir el concepto de velocidad instantánea.

Seguido de esto, en la sección Tasa media de variación y pendiente de una recta, se establece formalmente que, para los casos de los modelos no lineales, la tasa media de variación entre dos abscisas de la función coincide con la pendiente de la recta secante entre esas abscisas cuya representación está en la figura 5.15 (véase anexo E). Es importante señalar, de esta sección, que la función cumple un rol flexible, permitiendo así modelar situaciones que exhiben comportamientos con propiedades que cambian a través del tiempo. Es justamente esta flexibilidad en la modelación de fenómenos lineales y no lineales que permite establecer la diferencia entre las variaciones de dichos modelos.

- **Análisis de la sección: Cuerdas y Tangentes**

En la propuesta de Azcárate, el tránsito desde el concepto de tasa media de variación de una función hacia la tasa instantánea de variación, es decir, una aproximación más precisa a lo que representa la derivada, se aborda con un análisis detallado del concepto de secante. Este concepto, previamente utilizado para expresar que la pendiente de la secante coincide con la

tasa media de variación de una función, se explora en profundidad, permitiendo que los estudiantes entiendan cómo la pendiente de una curva en un punto puede aproximarse tanto como se quiera a la tasa de variación de la función en ese punto mediante una sucesión de secantes. La autora establece que, al acercarse progresivamente los puntos A_i al punto A de interés, (véase gráfica 5.18, Anexo E) se logra construir una tangente en dicho punto, ofreciendo así una interpretación geométrica de la pendiente en términos de una aproximación secuencial.

Esta forma de calcular la pendiente de la cuerda límite tiene su origen histórico en el método de Newton para calcular velocidades instantáneas. Desde un punto de vista curricular, los estudiantes deben describir e interpretar variaciones representadas en gráficos, más aún, deben interpretar la derivada geoméricamente como la pendiente de la tangente a la curva y desarrollar métodos para su cálculo. Es por esto que se valora el esfuerzo en esta propuesta por rescatar una aproximación valiosa a esta noción que se había perdido con el rigor del cálculo, pues son estos pequeños esfuerzos por superar costumbres poco conscientes sobre el desarrollo de los conceptos lo que permiten desarrollar en el estudiante pensamiento matemático más que conocimientos fragmentados sobre objetos.

Además de esta construcción geométrica, Azcárate sugiere una construcción simbólica mediante tablas que muestran la aproximación numérica de las pendientes de las secantes en torno al punto A. Este recurso permite a los estudiantes visualizar cómo las pendientes de las secantes se aproximan a un valor límite, que finalmente se establece como la pendiente de la tangente y, por ende, la mejor representación de la tasa de variación de la función en ese punto. Con este fundamento, la autora introduce el concepto de tasa instantánea de variación, acercando al estudiante a la noción de derivada como un límite de tasas de variación y como la pendiente de la recta que mejor se ajusta a la gráfica de la función en los alrededores de un punto.

- **Análisis de la sección: Tasa Instantánea de Variación**

En la propuesta de Azcárate, el concepto de tasa instantánea de variación se introduce de forma intuitiva en el subapartado *Velocidad Instantánea*. Las situaciones problema son el punto de partida de la modelación y la resolución de problemas, en esta propuesta se considera el escenario particular de la velocidad puesto que ¿qué significa realmente variación instantánea en una función genérica $f(x)$? Así lo consideran los autores y, dado que su propuesta está mediada por el estudio de las funciones, qué mejor camino por tomar que el de la función como objeto matemático que permite modelar una situación del mundo real.

En este contexto, se presenta una función que describe el movimiento de un cuerpo y se guía al estudiante para construir una tabla de valores de la función de posición como se muestra en la gráfica 5.2.2 (véase Anexo E) de tal forma que tanto la construcción de la tabla como la gráfica permitan ver una regularidad en el comportamiento del movimiento de la partícula. Así mismo, los pasos que se plantean para la solución del problema: Construcción de la tabla de valores, representación gráfica de la función $a(t)$, determinación de la fórmula que expresa la velocidad media entre un instante cualquiera próximo a $t = 3$ y el instante $t = 3$, estimación del valor de la velocidad para $t = 3$, representación gráfica de la velocidad media como la pendiente de la secante AB , discusión del valor obtenido; permiten desglosar el problema en una secuencia de pasos que utilizan todos los conceptos previamente construidos en las secciones anteriores, esto refuerza la idea de que los autores intentan desarrollar elementos del pensamiento variacional que permitan ver las correlaciones positivas y negativas entre las variables con el fin de darle relación al signo numérico que acompaña la tasa instantánea de variación con la inclinación de la pendiente de la recta que mejor se ajusta a la gráfica en las inmediaciones del punto.

A través de esta construcción, los estudiantes pueden observar cómo estas aproximaciones tienden a un valor específico conforme t se acerca a 3. Seguido de esto, la propuesta introduce aquí una expresión algebraica especial que encapsula o recoge el cálculo sucesivo de valores de la velocidad cercanos a un punto como el límite de la velocidad $v(t)$

cuando t se acerca a ese punto, presentando por primera vez la notación simbólica del límite. Este desarrollo permite comprender la tasa instantánea de variación en términos de velocidad, facilitando la transición a otras funciones y contextos. Así, este límite se convierte en el "número derivada" en un punto, con su correspondiente interpretación gráfica como la pendiente de la tangente en dicho punto.

En el análisis de la propuesta de Azcárate, se observa que la introducción de la notación de la derivada $f'(a)$ (véase gráfica 5.23, Anexo E), se presenta como una nomenclatura después de una serie de desarrollos entorno al significado del número derivada como la interpretación de la pendiente de la tangente como una tasa instantánea de variación y la introducción del concepto de límite.

- **Análisis de la Sección: Función Derivada**

Luego de los desarrollos previos, la autora menciona la importancia de hacer precisiones sobre la notación utilizada anteriormente y la notación estándar común en los libros de texto, aunque estas consideraciones didácticas se sitúan fuera del interés específico de este análisis, es relevante aquí mencionar que, en este punto de la propuesta, la autora da por construida la noción de "número derivada" para una función en un punto, enfatizando que este número corresponde siempre a la pendiente de la recta tangente que se puede trazar en ese punto de la función. Al mismo tiempo, a través del tratamiento del límite se establece ese número derivada para cualquier punto y es así como se presenta la definición de función derivada de una función. En un primer momento se presenta esta definición $f'(x)$ para $x = a$ es decir $f'(a)$ como se muestra en la gráfica 6.1 (Anexo E).

A partir de esta construcción en casos específicos, la autora introduce la posibilidad de generalizar el concepto: si en lugar de buscar únicamente la pendiente en un punto particular " a ", es decir, $f'(a)$, se extiende esta búsqueda a cualquier punto " x ", se construye una expresión general $f'(x)$ que representa la tasa de cambio instantánea para toda " x " en el dominio de la función. Así, se llega a la noción de una "función derivada" de la función original, donde cada

valor de “ x ” se asocia con la pendiente de la tangente en ese punto. Así se deja explícito el proceso de tratamiento de la representación algebraica de la derivada en un punto $f'(a)$ hacia la representación algebraica de la función derivada $f'(x)$.

Este paso representa una generalización clave, ya que transforma el concepto de derivada en un número específico a un concepto funcional que describe cómo varía la pendiente en todo el dominio de la función. Esta función derivada, $f'(x)$, proporciona una herramienta generalizada para medir la variación de la función en cualquier punto de su dominio, completando la transición desde la noción de tasa instantánea de variación a una función que modela dicha variación en toda su extensión.

Al final de esta sección, se subraya la importancia de contrastar las representaciones geométricas de una función con las de su derivada (gráfica 6.2 y 6.3, Anexo 1). Desde una perspectiva matemática, este contraste tiene un fundamento conceptual profundo en el análisis de cómo varía una función en relación con su tasa de cambio. Matemáticamente, la derivada de una función en un punto específico proporciona la pendiente de la tangente en dicho punto, lo cual describe la velocidad de cambio instantáneo de la función en ese lugar. Este contraste visual entre la gráfica de la función y la de su derivada permite a los estudiantes entender cómo los intervalos donde la función es creciente o decreciente se corresponden con los signos de la derivada (positiva o negativa), y cómo los máximos y mínimos locales en la gráfica de la función se reflejan en los ceros de la función derivada. Estos conceptos son cruciales en el análisis de funciones, y un contraste explícito ayuda a vincular visualmente estas ideas con sus fundamentos algebraicos.

Además, el uso de ejemplos que muestran la relación entre la función y su derivada permite a los estudiantes identificar cómo la concavidad de la función original se relaciona con el comportamiento de su derivada. Si la derivada de una función es creciente (es decir, su derivada segunda es positiva), esto indica que la función original es cóncava hacia arriba en ese intervalo; si es decreciente (derivada segunda negativa), la función es cóncava hacia abajo. Este

contraste también puede ayudar a introducir conceptos más avanzados, como el análisis de puntos de inflexión, donde la concavidad de la función cambia, que son fundamentales en el cálculo y en el estudio de optimización y modelado. Al destacar estos elementos geométricos, se ofrece una base visual que refuerza la comprensión de estos patrones de comportamiento en el análisis de funciones.

III. Análisis desde el Marco Didáctico

En la propuesta de Carmen Azcárate se pueden identificar varias dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite, así como de las funciones y los números reales. Desde una perspectiva didáctica, la autora pone especial énfasis en los obstáculos epistemológicos asociados al límite, lo que implica que su enfoque se centra en dificultades inherentes al propio desarrollo histórico y conceptual de este objeto matemático. Sin embargo, dado que su propuesta está contenida en un libro dedicado al estudio de funciones, también se abordan implícitamente algunas de las dificultades propias de la enseñanza de las funciones en la escuela.

En primer lugar, la propuesta introduce el concepto de límite a través de contextos numéricos, empleando aproximaciones por exceso y por defecto en situaciones que involucran el cálculo de raíces y la exploración de expresiones decimales. Este enfoque permite que los estudiantes desarrollen una idea intuitiva del límite antes de enfrentarse a su definición formal. No obstante, surge aquí un primer obstáculo relacionado con la comprensión del continuo numérico. Los estudiantes pueden tener dificultades para aceptar la existencia de números irracionales como límites de sucesiones de números racionales o para comprender que entre dos números reales siempre hay infinitos valores intermedios. La propuesta de Azcárate no se detiene explícitamente en la superación de estos prerrequisitos conceptuales, y tampoco es posible determinar si en capítulos anteriores del libro se han abordado estrategias para enfrentar estas dificultades.

En la sección 5.2 del libro, titulada "Aspectos locales", la función es utilizada como una herramienta para representar situaciones de variación y calcular tasas de cambio en intervalos amplios. Aquí se presentan dificultades asociadas al objeto matemático "función", especialmente en lo que respecta a su comprensión más allá de su uso procedimental. Aunque en otros análisis de este trabajo se han identificado dificultades específicas en la enseñanza de funciones, no se puede establecer con certeza si la propuesta de Azcárate las aborda de manera intencionada. Sin embargo, lo que sí se evidencia es que la propuesta evita reducir el estudio de funciones a una mera manipulación algebraica de fórmulas o a la identificación de prototipos comunes. En lugar de ello, se promueve un uso más consciente de las funciones, lo que permite que los estudiantes las conciban no solo como reglas operativas, sino también como objetos matemáticos con propiedades y significados propios. Esta aproximación se refleja en la formulación de preguntas que buscan desarrollar el razonamiento del estudiante más allá de la simple aplicación de procedimientos mecánicos.

Un aspecto destacable en la propuesta de Azcárate es la progresión en la dificultad de las preguntas y en los procesos de pensamiento que se espera de los estudiantes. En las primeras etapas, se emplea la función como una herramienta para visualizar correspondencias entre variables, enfatizando su carácter operacional. Más adelante, en la sección 6.1 titulada "Función derivada", la función deja de ser un simple medio de cálculo y pasa a ser un objeto de análisis que permite extraer conclusiones sobre la variación del fenómeno representado. Esta transición es clave para el desarrollo de una comprensión más profunda del concepto de derivada y se alinea con un enfoque que privilegia la construcción conceptual sobre la mera manipulación simbólica.

En cuanto al tratamiento específico del concepto de límite, la propuesta de Azcárate atiende varios de los obstáculos fundamentales relacionados con su enseñanza, pero deja de lado un aspecto crucial: la inoperancia entre su estatus operacional y su estructura como objeto matemático. En otras palabras, la propuesta permite a los estudiantes trabajar con el límite en

contextos numéricos y funcionales, pero no llega a formalizar el concepto ni a presentar el límite como un objeto matemático en sí mismo. Esto se debe a que la intención de la autora es introducir la noción de función sin recurrir a una construcción rigurosa del límite, lo que implica que no se establecen las bases teóricas necesarias para una comprensión completa del concepto. Además, la propuesta evita el uso del lenguaje formal propio del análisis matemático, lo que puede limitar la transición de los estudiantes hacia un tratamiento más abstracto del límite en niveles avanzados de educación matemática.

IV. Algunas Consideraciones

Desde la perspectiva matemática, la propuesta para abordar la derivada en la escuela descrita en el libro *Funciones y Graficas* (1999) aborda el concepto de derivada como una herramienta para analizar el comportamiento local y global de las funciones. Su propuesta se centra en la representación gráfica, el uso de la derivada para identificar tendencias de crecimiento y decrecimiento, y la relación entre la derivada y el cambio de una función.

Desde una mirada curricular se han detectado elementos importantes que se destacan en la propuesta en sintonía con la construcción de pensamiento variacional y los procesos de modelación y resolución de problemas. Primero vemos que se destacan en cuanto a la modelación de situaciones problemas aspectos relacionados con la variación continua y la variación discreta, esto lo podemos observar en los tipos de problema que usa en las diferentes secciones para construir modelos que sean familiares al estudiante.

Segundo, vemos como la comprensión que se pretende otorgar sobre la variación de una función contiene elementos clave del pensamiento variacional como lo es el cambio, las variables y el cambio en las magnitudes con relación a otras. Un poco más adelante, en los aspectos locales vemos cómo la modelación de situaciones es el eje central en la comprensión de la variación de la función, primero tenemos que para la variación de una función en un intervalo se usa la tasa media de variación por medio de gráficas, tablas y se precisa la variación como el cambio promedio en la función en un determinado intervalo. Respecto de los principios de la

modelación, vemos que se parte de situaciones problema concretas como el cambio en la presión atmosférica (Grafica 5.6, Anexo E) o el aumento del calor con relación al aumento de la temperatura en diferentes sustancias. Recordemos que, desde los lineamientos, el pensamiento variacional se concibe de tal forma que fomenta la capacidad de modelar situaciones reales mediante funciones matemáticas, lo que permite a los estudiantes aplicar sus conocimientos en contextos prácticos.

A pesar del esfuerzo de la profesora Azcarate por presentar situaciones muy cercanas a los estudiantes, los contextos empleados parecen responder más a los contextos matemáticos o de las otras ciencias, no tanto así contextos de la vida diaria cercanos a las experiencias cotidianas de los estudiantes.

Una vez descrita la variación de la función en un intervalo, se exhibe la fortaleza de modelar la situación matemáticamente pues permite también identificar la variación de la función en un punto usando la tasa instantánea de variación. Nuevamente aparecen aquí situaciones que buscan acercar al estudiante con la resolución de problemas físicos como lo es la velocidad media e instantánea (caso particular de tasas de variación media e instantánea en situaciones donde la función contiene las variables de espacio y tiempo).

Para el tratamiento geométrico del fenómeno se modela de nuevo la situación mediante graficas de funciones que pueden exhibir regularidades y se presenta el cálculo de pendientes de rectas secantes que cortan la curva en dos puntos. La concepción previamente creada respecto de la idea de límite se concatena con la aproximación a la curva por medio de cuerdas secantes que unen dos puntos cada vez más y más cercanos, aparece entonces la idea de la tangente como la posición límite de las secantes a la gráfica en la cercanía de un punto.

La situación problema en el cálculo de tasas de variación instantáneas se convierte así en el problema de calcular la pendiente de las rectas secantes que se aproximan de mejor manera a la curva en un punto (Grafica 5.23, Anexo E) cuando esta se interpreta como la velocidad instantánea de la partícula, esto articula elementos del pensamiento variacional en los

que las formas de representación cuantitativa de la variación son principalmente la geométrica, tabular, algebraica y la gráfica.

Finalmente se consolida la interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto como la derivada de la función en ese punto. La propuesta articula las situaciones problema a través de la modelación y el uso de contextos matemáticos y de la vida diaria para consolidar una de las interpretaciones de la derivada que se propende desde los lineamientos curriculares, la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva.

Respecto de los elementos didácticos, la propuesta busca eludir la introducción formal del concepto de límite priorizando así el estudio de las funciones, este camino conduce eventualmente a desarrollar buenas nociones sobre cambio, variación, variables, correlación entre otras. Es justamente el enfoque funcional de la propuesta lo que permite que en ella misma se consolide la derivada como un tipo de función especial que caracteriza la variación en todo punto de la gráfica y no se limite a la consolidación de métodos algebraicos para calcular derivadas a partir de funciones conocidas.

3.3.2. La Variación Y La Derivada por Crisólogo Dolores Flores

Para una mejor comprensión del análisis presentado a continuación, véase el anexo F en la página (191) donde se presentan las imágenes y tablas aquí referenciadas tomadas del libro *la variación y la derivada* segunda edición del 2012.

I. Descripción.

La segunda propuesta que se considera relevante para el estudio es la del profesor Crisólogo Dolores Flores de la Universidad Autónoma de Guerrero quien ha centrado su atención en la formación de profesores y la comprensión que los estudiantes tienen de los conceptos matemáticos fundamentales. La propuesta aparece en su libro “la variación y la derivada” publicado en el año 2012 por la editorial Ediciones Diaz de Santos. La intención del profesor con la publicación de este libro es presentar al profesor y al estudiante una guía para

ser utilizada en bachillerato sobre todo por estudiantes que tienen sus primeros contactos con el cálculo diferencial, aportando elementos didácticos que propicien una mejor comprensión de las ideas y conceptos del cálculo especialmente aquellos estrechamente relacionados con la derivada.

Inicialmente el libro se presenta en dos grandes capítulos, el primero titulado “las variables y las funciones, elementos básicos para el estudio de la variación” y el segundo titulado “la variación y la derivada”. A grandes rasgos podría decirse que el primer capítulo aborda la definición y conceptualización de los elementos fundamentales que hacen parte del estudio de la variación y el cambio en las funciones, es decir, crear las condiciones previas para el estudio del cambio como por ejemplo la comprensión de las variables y las funciones como herramientas elementales en el estudio de la variación en problemas matemáticos y de la vida diaria; las funciones representan las relaciones entre las variables que pueden ser analizadas y visualizadas a través de fórmulas y gráficas.

Centraremos por tanto nuestra atención en el segundo capítulo que es donde consideramos aparece una propuesta para el estudio de la derivada. Este capítulo se aborda a través de doce secciones en donde se encuentra una caracterización del cambio, la notación para cuantificar esas mediciones, su comportamiento, así como nociones relacionadas a la rapidez y los cambios infinitamente pequeños; construyendo así nociones que permiten interpretar la derivada y descifrar reglas de uso, así como sus aplicaciones.

Las secciones que aparecen en el segundo capítulo se muestran a continuación, nuestra intención es proporcionar una pequeña muestra del libro para poder mostrar la propuesta que consideramos dentro del mismo.

- La medición del cambio.
- Una notación operativa para cuantificar los cambios.
- ¿Cómo se comportan los cambios?
- Cambios relativos: La rapidez media de la variación.

- ¿Cómo cambia la rapidez (o la velocidad) media?
- Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea.
- Interpretación geométrica de la velocidad instantánea.
- Cálculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos.
- Cálculo de diferencias infinitamente pequeñas.
- Otras reglas y fórmulas para calcular diferenciales.
- Uso de las diferenciales.
- La función derivada.
- Problemas de máximos y mínimos.

Sí tomáramos el contenido del segundo capítulo o unidad del libro y tratáramos de esbozar una propuesta coincidiríamos en que la propuesta abarca todo el contenido del libro, sin embargo, es posible identificar unos aspectos primarios o fundamentales desde una mirada metodológica. Así, presentamos lo que a nuestro criterio son los aspectos fundamentales de la propuesta:

- Medición del cambio por medio de diferencias.
- Cambios relativos (rapidez media e instantánea).
- Razones de diferencias y diferenciales.
- Función derivada y aplicaciones.

El planteamiento y solución de situaciones elementales de variación ubican la variación como el eje rector del cual se desprenden ideas y conceptos que van dando forma a la propuesta de trabajo, también es importante destacar como las diferencias (y más tarde los diferenciales) son elementos matemáticos centrales en el estudio de la medición del cambio. Un intento por corresponder los apartados del capítulo con la propuesta que hemos identificado da lugar a la siguiente clasificación que permite resumir el documento revelando así la naturaleza intuitiva de esta forma de ver la derivada.

- Medición del cambio por medio de diferencias: La medición del cambio, Una notación operativa para cuantificar los cambios, ¿Cómo se comportan los cambios?
- Cambios relativos: Cambios relativos: la rapidez media de la variación, ¿Cómo cambia la rapidez (o la velocidad) media?, Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea.
- Razones de diferencias y diferenciales: Interpretación geométrica de la velocidad instantánea, cálculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos, cálculo de las diferencias infinitamente pequeñas, otras reglas y fórmulas para calcular diferenciales, uso de las diferenciales.
- Función derivada y aplicaciones: La función derivada, problemas de máximos y mínimos.

Una vez se ha descrito la razón del cambio entre las magnitudes, el profesor Dolores busca extender esa noción de rapidez a la velocidad de movimiento. Para esto se vale de dos casos sencillos de movimiento de cuerpos, uno con un comportamiento rectilíneo uniforme y otro de un comportamiento uniformemente acelerado. En el estudio de los cambios de la rapidez o lo que es lo mismo, la razón del cambio entre las magnitudes aplicadas a los problemas de velocidad surge dos casos para la rapidez: uno en el que es constante y otro en el que presenta cambios en los diferentes intervalos pareciendo que aumenta y disminuye. En este momento el profesor Dolores involucra el estudio de la velocidad y no tanto el de la rapidez pues este último tiene el inconveniente de no poder interpretar los signos de la razón del cambio en las magnitudes con lo cual no se puede modelar el comportamiento del fenómeno real.

II. Análisis del Contenido Matemático.

A continuación, se presenta el análisis del contenido matemático siguiendo las categorías descritas por la matriz de análisis en la sección 3.2. Para una mejor comprensión, de las secciones aquí evaluadas, véase Anexo F.

- **Análisis de la sección: Medición del cambio por medio de diferencias**

Esta sección está compuesta por los apartados La medición del cambio (pág. 65), Una notación operativa para cuantificar los cambios (pág. 77), ¿Cómo se comportan los cambios? (pág. 87). En la primera sección el autor presenta tres ejemplos para establecer las herramientas de variación de diferentes fenómenos, y para esto se busca establecer que, para saber cómo cambia un fenómeno primero debemos conocer cuánto cambia, y para saber el cuánto cambia la herramienta de medición es la diferencia. Dolores establece todo el procedimiento de medir las diferencias para cuantificar la variación progresivamente y de forma detallada, desde hacer procedimientos sencillos como restar, como se puede ver en la tabla 25 y la figura 29 (véase anexos F) que corresponden a los ejemplos 1 y 2.

En el caso del ejemplo 1, Dolores usa una representación tabular para describir los valores en relación con la estatura y las edades de ciertos adolescentes. Mientras que en el caso del ejemplo 2 presenta una situación en prosa acompañada de una representación en gráfico de barras. Estos ejercicios muestran un cambio constante entre años (en el caso del ejemplo 1) y entre los días (en el caso del ejemplo 2). Esto permite definir una tasa de cambio promedio que, en este caso, se calcula simplemente como la diferencia entre valores sucesivos de estatura. Esta idea de cambio constante es útil para introducir a los estudiantes al concepto de tasa de variación promedio y cómo se calcula mediante restas.

Además, el hecho de que el crecimiento de la estatura sea constante año tras año sugiere una relación lineal entre la edad y la estatura promedio en este rango de edades. Esto significa que podríamos describir este crecimiento como una función lineal simple, lo cual introduce la noción de progresión aritmética. Aquí, la estatura sigue una secuencia con un incremento constante, que se podría modelar mediante una ecuación lineal si se deseara describir esta relación de manera algebraica.

Por otro lado, este ejercicio también es un punto de partida para el concepto de derivada como tasa de cambio. Aunque en este caso la tasa de cambio es constante, el ejercicio permite a los estudiantes familiarizarse con la idea de analizar cómo varía una cantidad a lo largo del

tiempo. Esta idea es fundamental en el cálculo diferencial, donde se generaliza para describir el cambio en cualquier punto, incluso cuando no es constante.

Algo importante a anotar es que se muestra la notación que se usará en adelante para representar las diferencias como $S_f - S_i = \Delta S$ esta notación es la propuesta por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). En el ejemplo número tres, nos enfrentamos a una situación clásica de los libros de texto para mostrar la cuantificación del cambio: la caída libre.

Este ejemplo incluye las representaciones verbal, simbólica y gráfica de la función cuadrática que modela la caída libre de un cuerpo en la Luna (véase figura 30, anexo F). A diferencia de los ejemplos anteriores, aquí se presenta una función cuadrática, $s(t) = 0,8t^2$, lo que introduce el concepto de variación no lineal. La descripción inicial explica que $s(t) = 0,8t^2$ representa la distancia recorrida en metros por un cuerpo que cae libremente en la Luna, con t como el tiempo en segundos. Este lenguaje verbal establece el contexto físico del fenómeno, ayudando a los estudiantes a entender el propósito del modelo y su aplicación en la realidad, en este caso, cómo un objeto en caída libre incrementa su distancia de manera acelerada en lugar de constante.

Por otro lado, la función, $s(t) = 0,8t^2$ aparece de manera explícita, proporcionando una fórmula que describe matemáticamente la relación entre el tiempo y la distancia recorrida. Este modelo cuadrático implica que la tasa de cambio de la distancia respecto al tiempo no es constante, lo que introduce a los estudiantes en la idea de que el cambio en la distancia depende del tiempo de manera no lineal. Esta función cuadrática se asocia con la aceleración, un concepto físico importante que se expresa aquí matemáticamente. El gráfico de la función muestra cómo la distancia aumenta de forma creciente en función del tiempo. La curvatura de la gráfica permite visualizar que el cambio en la distancia es cada vez mayor a medida que pasa el tiempo, lo cual refuerza la idea de una tasa de cambio no constante. Esto contrasta con una relación lineal, donde la gráfica sería una línea recta, y permite una interpretación visual del crecimiento cuadrático.

Por último, cabe resaltar que, a diferencia de los ejemplos anteriores con cambios constantes, aquí se destaca que el cálculo del cambio entre los segundos 0 y 1 no es totalmente preciso si se observa solo la gráfica. Esta diferencia se debe a la naturaleza cuadrática de la función, que implica una tasa de cambio que aumenta con el tiempo. La pregunta sobre cómo mejorar la precisión del cálculo introduce el concepto de la aproximación de la tasa de cambio instantánea, que eventualmente conduce al concepto de derivada. Este análisis sugiere la necesidad de métodos más precisos para calcular la velocidad en un instante, ya que aquí al medir la variación se encuentra una proporción, lo que indica que la velocidad no será la misma en cualquier instante del dominio de la función.

Considerando que esta primera sección está dividida en tres partes, tras haber analizado y descrito la primera, se procede a analizar la segunda y tercer parte. En la segunda parte “*Una notación operativa de los cambios*” (pág. 77), el autor brinda la interpretación geométrica de la cuantificación de los cambios de los cuales se hablaban en secciones anteriores. En la figura 36 (véase anexo F) se presenta dicha interpretación haciendo alusión no solo a la función $s(t) = 4,9t^2$ sino también a las diferencias o cambios de Δs , obteniendo así algunos elementos fundamentales de la representación simbólica de la derivada. Luego, en la tabla 33 (véase anexo F), se presenta una generalización de esta interpretación.

Analizar el comportamiento de los cambios implica, de manera inevitable, reflexionar sobre las leyes que los rigen y los describen matemáticamente. En este contexto, Dolores plantea un enfoque progresivo para abordar esta cuestión, comenzando por medir los cambios en pequeños intervalos. Este proceso inicial permite capturar la variación en términos concretos y observables, sentando las bases para un análisis más profundo de los patrones subyacentes.

A partir de esta medición inicial, se introduce la idea de cuantificar *el cambio del cambio* (véase tabla 37, anexo F), un procedimiento que, de manera implícita, conduce al concepto de derivada. Este enfoque no solo permite interpretar la variación de manera más precisa, sino que también establece un puente hacia el cálculo diferencial. Al final de esta sección “Medición del

Cambio por medio de Deferencias”, Dolores propone sintetizar estas ideas utilizando una representación gráfica y simbólica que ilustra cómo medir no solo el cambio inicial, sino también la evolución de este en el tiempo. Esto permite conectar de manera explícita la noción intuitiva de variación con el concepto formal de derivada.

- **Análisis de la sección: Cambios Relativos**

Esta sección está compuesta de los apartados *Cambios relativos: La rapidez media de la variación* (pág. 97), *¿Cómo cambia la rapidez media?* (pág. 107), Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea (pág. 119).

Como ya se ha establecido en la sección anterior, existen unos cambios que se pueden expresar y representar matemáticamente y se pueden medir y saber ciertas características como si es constante o no. También, que el cambio depende de otro cambio y en ese caso se puede medir el cambio del cambio, entre otras ideas; entonces ahora se busca abarcar la idea de rapidez como un cambio relativo para las funciones que dependen del tiempo.

En la primer sección *Cambios relativos: La rapidez media de la variación*, Dolores presenta un ejemplo de caída libre. En este caso una comparación entre la caída de un cuerpo en la Tierra y la caída del mismo cuerpo en la Luna. Este ejemplo toma un fenómeno vinculado principalmente a la física. Sin embargo, el uso de las herramientas matemáticas para modelarlo, para predecir los cambios, toma un papel principal. Aquí Dolores presenta la representación de la rapidez con la que ambos cuerpos se mueven (ver figura 44, anexo F) y se le pregunta al estudiante *¿Cuál de ellos cae con mayor rapidez?*

Para dar respuesta a la anterior cuestión, Dolores propone un análisis a intervalos del movimiento representado y para ese análisis se proponer poner los datos extraídos de la gráfica y de los tratamientos a nivel simbólico que se puedan realizar de las ecuaciones que representan los movimientos, en una tabla. Primero en una tabla en donde los intervalos de tiempo son de 1 segundo y luego en una tabla en donde los intervalos sean de medio segundo. Con esto, se logra no solo determinar que cuerpo cae más rápido, sino también determinar cuan

rápido cae cada cuerpo al mismo tiempo que se establece una herramienta de comparación que permite predecir la rapidez de cada cuerpo en diferentes intervalos de tiempo. Cabe aclarar que, aunque Dolores no lo hace explícito, a lo que se le da tratamiento es a la tasa promedio de cambio, es decir se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños, pero no tan pequeños como para tener una tasa instantánea de cambio (Esto se hará más adelante en las siguientes secciones). Así se establece por un lado que la rapidez es el cociente del cambio de distancia y el cambio del tiempo y también se aclara sobre que, como la rapidez es la magnitud de la velocidad entonces debe de ser una magnitud positiva.

Ahora bien, en la sección ¿Cómo cambia la rapidez (o la velocidad) media? Se agregan elementos a ese contexto previo. Por un lado, si la rapidez es la magnitud de la velocidad, entonces la rapidez promedio también es la velocidad promedio, esto lo deja claro Dolores en el mismo título de la sección. Mas adelante, el autor dice explícitamente que la velocidad tiene cualidades como dirección y sentido, de las cuales la rapidez carece. Esto abre un espacio para pensar sobre otras características de los cambios y es que se puede establecer unos cambios constantes y unos cambios variables. Lo que hace que esta sección se diferencie de la primera sección es que aquí Dolores representa por un lado tres tipos de funciones, una cuadrática, una lineal y una constante y estas funciones son dependientes del tiempo por lo cual también puede representar gráficamente la rapidez de su cambio. Aquí está el punto interesante pues el cambio de cada una de las funciones es diferente. La rapidez de la función cuadrática se representa como una lineal y la rapidez de la lineal como una constante, pero la rapidez de la constante no se representa como una función. Es decir, al analizar cómo cambia algo que ya está creciendo aceleradamente, obtenemos un comportamiento más simple (lineal) porque estamos midiendo un patrón uniforme en el cambio. Pero cuando se habla de una función constante, realmente no hay cambio. Con esto se puede observar el acercamiento y explicación que da Dolores a lo que en términos de la derivada es que es una función que es necesariamente de una “dimensión menor” a la función original. Sin embargo, en el análisis gráfico que se puede hacer sobre la rapidez de

un cuerpo cuyo movimiento está determinado por una función cuadrática como en la figura 51 (véase anexo F) se puede observar que hay tres casos para la rapidez de ese cuerpo. El primero cuando se observa la rapidez en el intervalo $[0,2]$, el segundo caso justamente en el punto 2 y el tercer caso en el intervalo de $(2 \text{ a } 3.5]$. Para introducir la idea de velocidad instantánea, Dolores se centra en el segundo caso, que, a diferencia de los otros dos, medir la rapidez implicaría pararse no en un intervalo sino en un punto en particular en el cual, haciendo alusión a las nociones físicas, no hay rapidez pues el cuerpo alcanza su altura o distancia máxima. Aquí se pasa al desarrollo del apartado *Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea* (pág. 119)

Si se quiere medir la velocidad del cuerpo en el punto X usando la formula establecida para la velocidad o rapidez promedio, se encontrará con una indeterminación, como se muestra a continuación:

$$v = \frac{20(1) - 5(1)^2}{1 - 1} = \frac{15 - 15}{0} = \frac{0}{0} = ?$$

Dolores aclara que esta indeterminación se da porque no es lo mismo medir la indeterminación en un intervalo que en un punto, y para medir la velocidad en ese punto propone el acercamiento a intervalos infinitamente pequeños cuyo calculo se representa en la tabla 54 (véase anexo F)

Con este ejemplo sobre la velocidad instantánea se da el primer acercamiento a la idea de límite. En un principio como la herramienta que acerca al cálculo de una velocidad en un punto por medio de aproximaciones numéricas, para llegar a determinar que la velocidad instantánea es el límite del cociente de diferencias cuando delta t se acerca a 0 (ver ecuación 16, anexo F)

- **Análisis de la sección: Razones de Diferencias y Diferenciales**

Esta sección está compuesta por los apartados: Interpretación geométrica de la velocidad instantánea (pág. 131), Cálculo de velocidades instantáneas por medio algebraicos (pág. 141),

Calculo de diferencias infinitamente pequeñas (pág. 147), Otras reglas y fórmulas para calcular diferencias (pág. 159), Uso de los diferenciales (pág. 171).

En el apartado Interpretación geométrica de la velocidad instantánea aparece por primera vez el termino tangente. El autor construye la noción de la tangente a una curva partiendo de la aproximación numérica y la idea de velocidad instantánea, en este apartado, él construye la interpretación geométrica de la derivada. Para esto, Dolores propone algunas figuras (figura 61 y 62, anexo F) en donde se muestran los catetos del triángulo formado por los puntos P y Q que corresponden a Δs y Δt , es decir, al cambio en la distancia y el cambio en el tiempo. A medida que el intervalo entre P y Q se hace infinitesimalmente pequeño, el triángulo formado se convierte en lo que el autor denomina un triángulo infinitesimal. Esto significa que los catetos pueden hacerse tan pequeños como se quiera.

En este contexto, cuando los puntos P y Q se acercan, la curva empieza a parecerse cada vez más a una recta, lo que implica que, en ese límite, el comportamiento de la curva localmente es lineal. Este fenómeno es lo que se llama tangente a la curva en el punto P , ya que la recta resultante, que se extiende desde el punto de tangencia, es la aproximación lineal del comportamiento de la curva en ese punto.

En este punto, Dolores propone un cambio de notación, es decir, (la velocidad media denotada por v se designa ahora con la letra m ya que esta se asocia a la pendiente de la recta secante), así, la función $s(t) = f(x)$, que representa la posición de la partícula ahora puede ser una función $f(x)$ genérica y los incrementos ahora pueden ser descritos en términos de x , y tal como se sigue a continuación: $\Delta s = \Delta y$, $\Delta t = \Delta x$ con lo cual se obtendría lo representado en las ecuaciones X y Z.

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad m_{secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (9)$$

$$v_{media} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad m_{tangente} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (10)$$

Aquí hay que recordar que Dolores, en el capítulo 1 del libro ya había abordado el estudio de la función en la sección La función: una relación especial entre variables (pág. 35) por lo que no es raro asociar el concepto de velocidad con el de pendiente de la recta de una forma directa.

Por último, en esta sección, Dolores aclara la relación entre la velocidad media con la pendiente de la recta secante y la velocidad instantánea con la tangente a la función en ese punto.

En el apartado siguiente, *Cálculo de velocidades instantáneas por medio algebraicos* (pág. 141), Dolores solo se encarga del tratamiento simbólico de las expresiones que conciernen al límite para el cálculo de algunas velocidades instantáneas de ejemplos o ejercicios nombrados en secciones anteriores. En el apartado *Cálculo de diferencias infinitamente pequeñas* (pág. 147), es donde aparece por primera vez de forma introductoria el concepto de derivada en términos mismos. Es decir, Dolores da de forma explicativa que hallar la velocidad instantánea es hallar la derivada de la función y que la función que puede determinar todos los cambios de velocidades en distintos puntos es la función derivada (pág. 147). Luego de esta declaración, en este apartado y en el siguiente: Otras reglas y fórmulas para calcular diferencias (pág. 159), el autor propone el estudio de reglas básicas para el cálculo de esas derivadas. En este punto es posible determinar cómo, desde un punto de vista curricular, el proceso que se ha privilegiado es el de la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

- **Análisis de la sección: La función Derivada Aplicaciones**

Esta sección está compuesta por los apartados: *La función derivada* (pág. 189), y *Problemas de máximos y mínimos* (pág. 203). Dado que en los apartados anteriores el autor ha definido la función derivada y las reglas de uso, en este apartado se propone estudiar las propiedades de esta función a partir de un ejemplo ya presentado y la exploración de algunos problemas de variación. Para este propósito, se propone la comparación en una misma grafica de la función de desplazamiento, su derivada y el valor absoluto de la derivada (Ver figura 81, anexo F) para afirmar que la representación gráfica de estas funciones están relacionadas pues

al observar una se da cuenta de la otras. Como en el ejemplo propuesto, en el intervalo en que la función de desplazamiento crece, la función derivada es positiva (para valores menores a 2). Seguido de esto, se anotan estos cambios en la una tabla para poder concluir estableciendo algunos patrones de regularidad en la función derivada que, como se mencionó en la sección 2.2 *análisis de contenido*, se conoce como el criterio de la primera derivada.

Finalmente, en el apartado *Problemas de máximos y mínimos* (pág. 203) el autor se encarga de establecer unas estrategias de resolución a problemas de máximos y mínimos tales como la altura máxima a la que sube un proyectil disparado hacia arriba, las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede construir con un perímetro de 10 metros y el rectángulo de área mínima que se obtiene al variar una recta que pasa por un punto y que se interseca con el eje X y con el eje Y. Es importante resaltar cómo en esta sección podemos ver que los procesos de Formulación, tratamiento y resolución de problemas, así como el de Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos toman un papel clave en la consolidación de los saberes previamente construidos en secciones anteriores. La consolidación de la derivada como una *función*, que permite obtener caracterizaciones sobre la variación de la función original en todo punto de su dominio, solo toma sentido en las estructuras cognitivas del estudiante cuando este se enfrenta a problemas y situaciones matemáticas que son susceptibles de resolver o analizar mediante la función derivada tales como problemas de optimización.

III. Análisis desde la Perspectiva Didáctica

La propuesta del profesor Crisólogo Dolores es, a nivel internacional, un referente didáctico importante no solo para profesores e investigadores de la didáctica de las matemáticas sino también para los estudiantes. La construcción que se hace del concepto derivada, a lo largo de todo el libro, está estrechamente relacionada a la construcción de nociones claves del pensamiento variacional y covariacional. Es posible identificar cómo desde los primeros apartados se hace un esfuerzo considerable por superar algunos de los obstáculos epistemológicos más representativos del concepto, y es que, al edificar la propuesta sobre las

situaciones elementales de variación, es posible presentar un tratamiento desde las relaciones más básicas entre las variables y las relaciones más complejas como lo son las funciones.

Este punto de partida es clave pues en los apartados *medición del cambio por medio de diferencias, y cambios relativos* es posible exhibir el comportamiento de este tipo de relaciones especiales (funciones) como un estatus operacional entre las variables y como un objeto matemático constitutivo en sí mismo con unas características fundamentales.

Además, estudiar las situaciones de cambio desde este enfoque variacional permite también identificar el dominio numérico correspondiente a cada tipo de problemas; en los apartados *los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea* se intenta dar una correspondencia entre las representaciones tabulares y las representaciones gráficas.

Ahora bien, es claro que en la primera parte del libro el profesor Crisólogo realiza una introducción a los elementos fundamentales que entran en juego en la construcción del concepto derivada y que, por tanto, es posible afirmar que se han tomado en consideración los objetos primarios que constituyen la puerta de entrada a los obstáculos epistemológicos ligados a la función, el dominio numérico, etc.

Respecto del concepto de límite también se hace una aproximación didáctica que busca disipar las posibles dudas que los estudiantes pueden construir en la manipulación de los intervalos en los que se mide la variación de los fenómenos. Un ejemplo claro de esto lo vemos en el apartado *los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea* (pág. 121) cuando se le presenta al estudiante una posible indeterminación al calcular la velocidad instantánea de un objeto usando la formula del cálculo de velocidad media. Esto supone, por supuesto, que los cambios no ocurren con saltos, sino que ocurren de manera continua y que por tanto se debe hacer un análisis de la situación con intervalos de tiempo muy pequeños, introduciendo así la noción de límite sin llegar a caer en los obstáculos ligados al mismo debido a la complejidad de su definición formal.

Finalmente, y en consideración del último de los obstáculos epistemológicos aportados por Artigue (1995), en los apartados *cálculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos, otras reglas y fórmulas para calcular diferenciales, y uso de los diferenciales* la propuesta pone en juego el uso de las diferenciales a partir de un acuerdo en cuanto a la toma de su significado, es decir, de manera explícita indica que el uso que se hace de estos objetos depende inequívocamente del significado que se le ha otorgado. Es común en esta etapa de construcción de la derivada, la relativa a sus notaciones, que los estudiantes reemplacen y usen los diferenciales como si fueran cantidades finitas que pueden ser restadas, multiplicadas, divididas y elevadas a cierta potencia; pero aquí la propuesta es clara respecto del cuidado que se debe tener en términos no solo epistemológicos sino también pragmáticos en el manejo de estas cantidades.

IV. Algunas consideraciones

La propuesta de Dolores “la variación y la derivada” centra su atención en las situaciones variacionales elementales y, a través de ejemplos conocidos por el estudiante como el caso de la caída libre de los cuerpos, busca crear condiciones para que la comprensión de la derivada abarque interpretaciones numéricas y geométricas con la noción de variación como directriz. Es importante destacar que los cambios que ocurren en la naturaleza tienen comportamientos distintos, hay situaciones donde el cambio es constante, situaciones donde el cambio exhibe regularidades y situaciones donde el cambio es demasiado caótico. La propuesta centra su atención por tanto en las situaciones de cambios sencillos que permitan acercar al estudiante al concepto derivada con nociones intuitivas de variación y covariación.

Desde una mirada curricular, se hace evidente el interés del profesor Dolores por articular elementos del pensamiento variacional y covariacional junto con características propias del concepto derivada; mientras que las situaciones de covariación se refieren a aquellas situaciones en que dos variables relacionadas cambian simultáneamente, las situaciones de variación contempladas por los lineamientos son aquellas situaciones en las que una variable cambia en

función de otra. No hay que perder de vista la intención de ambos enfoques, sin embargo, ellos no son excluyentes entre sí pues ambos permiten abordar situaciones de cambio a la vez que desarrollan nociones importantes del pensamiento matemático como la variación, la dependencia, la medición, crecimiento, decrecimiento, las tasas de cambio entre otras.

El estudio de la función que modela la situación elemental de variación es también un eje central de la propuesta, pues el mismo autor justifica que las variables siempre están relacionadas de una u otra forma, y la relación más especial en el estudio de la variación es justamente la función.

En un primer momento de la propuesta, la medición del cambio por medio de diferencias, vemos cómo se introduce la idea de diferencia como herramienta propia de las matemáticas que permite medir o cuantificar el cambio que se produce en un fenómeno entre dos momentos. Esta idea de medir el cambio usando la diferencia de un estado final y un estado inicial se corresponde, en gran medida, con las características del pensamiento variacional que encontramos en el currículo de nuestro país puesto que, según las directrices institucionales, la variación se refiere a los cambios que ocurren en una o más variables a lo largo del tiempo y que además se distingue en ella dos formas elementales de modelar situaciones: variación continua y variación discreta.

A medida que avanzamos en los apartados de la propuesta, vemos cómo más elementos del pensamiento variacional aparecen en la medida en que las situaciones de variación se exploran cada vez con más rigor matemático, haciendo así necesario el uso de herramientas cada vez más sofisticadas para la cuantificación del cambio en intervalos reducidos de tiempo como lo es la razón de cambio entre variables, las rectas secantes y tangentes y el uso de los diferenciales (en el caso de las situaciones donde el tiempo es la variable independiente).

Es interesante además resaltar el uso de tablas y gráficos en los ejercicios para caracterizar los cambios que se presentan en las variables a lo largo del tiempo, esto tiene una correspondencia efectiva con la estructura de los lineamientos en la medida en que se estipula que el desarrollo del pensamiento matemático es un proceso continuo que articula los diferentes

tipos de pensamiento matemático como el numérico, geométrico y variacional así como los distintos medios de representación de situaciones del mundo real.

Otro de los elementos fundamentales y diferenciales que podemos encontrar en la propuesta de Dolores es la coordinación entre elementos del pensamiento variacional y los procesos generales de la actividad matemática. La propuesta en reiteradas ocasiones le exige al estudiante no solo comprender conceptos claves del pensamiento variacional sino usarlos en fenómenos físicos con el fin de modelar matemáticamente las situaciones, razonar, plantear y resolver el problema, y finalmente comunicar aquellas ideas matemáticas que logró objetivar.

Respecto de las formas de representación, encontramos también un paso o evolución en las formas de representación de la variación en la propuesta; la técnica de Dolores es emplear tablas y gráficos para hacer más evidente qué es lo que está cambiando en el fenómeno y cómo está cambiando, luego mediante una serie de tratamientos netamente matemáticos, las formas de representación evolucionan hacia la representación algebraica, esto es coherente desde un punto de vista del desarrollo del pensamiento variacional pues las estructuras algebraicas requieren una maduración mayor por parte del estudiante sobre los procesos de variación.

Por último, pero no menos importante, destacamos el uso que la propuesta hace de la caída libre de un cuerpo como situación problema que permite, en todo momento, analizar los cambios y la dependencia de las variables de forma intuitiva. Este fenómeno de la física es susceptible de matematizar de tal forma que la función posición y la función velocidad están en todo momento conectadas lógicamente y matemáticamente, permitiendo que el estudiante interprete la relación entre función y derivada casi que de forma inmediata.

3.3.3. Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De La Derivada En El Último Grado De Educación Secundaria por Carlos Eduardo Pineda Ruiz

Las imágenes referenciadas en el análisis de la propuesta del profesor Carlos Pineda se han agregado en la descripción de la misma, sin embargo, para acceder a la tesis completa refiérase al repositorio de la Universidad Nacional de Colombia.

I. Descripción de la propuesta.

La tercera propuesta que presentamos a continuación hace parte de una tesis de maestría para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales presentada por Carlos Eduardo Pineda Ruiz bajo la dirección de la doctora Clara Helena Sánchez Botero de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá. El interés por esta propuesta surge no solo por su contenido disciplinar y didáctico sino también por su contenido curricular al ser una propuesta de origen nacional pues, aunque no se examina explícitamente el currículo de matemáticas en ella, es posible suponer que el profesor, que ha elaborado la propuesta, ha recibido una formación en currículo y por tanto sus experiencias, así como la concepción que tiene sobre las matemáticas están permeadas por la organización curricular colombiana. La propuesta está dirigida no solo a los estudiantes para que puedan asimilar mejor el concepto de derivada sino también a los profesores que imparten la asignatura de cálculo o quieren impartir cálculo en los últimos grados de la educación secundaria pues esta permite un mejor panorama acerca de los conceptos fundamentales que se ponen en juego al momento de introducir la noción de derivada.

Para entender mejor la propuesta vamos a situarnos en el problema de investigación de esta tesis de maestría pues esta ruta nos revela la naturaleza metodológica de la propuesta, así como sus alcances y reflexiones. El profesor Carlos Pineda parte de un reconocimiento de algunas dificultades que los estudiantes del colegio en donde ejerce su labor docente presentan, sobre todo en el último ciclo o bimestre del grado once cuando se enfrentan al cálculo diferencial. Estas dificultades tienen su origen en diversos factores, pero hay uno diferencial que

constituye el punto de partida para esta propuesta didáctica: la falta de reconocimiento o manejo en los prerrequisitos conceptuales tales como conceptos de variable, función, razón de cambio y límite de una función.

Así pues, la tesis nos presenta primero una aproximación histórica para la construcción del concepto derivada retomando el método de Fermat para hallar máximos y mínimos, el método de las tangentes de Fermat, el método de Descartes para hallar la normal a una curva, el método de Newton para encontrar la cuadratura de una curva, el método de las fluxiones de Newton, las diferenciales de Leibniz, los infinitesimales de Cauchy y el comienzo del rigor en el cálculo.

En el segundo apartado se nos presenta unas reflexiones didácticas sobre los conceptos necesarios o prerrequisitos que debe tener un estudiante para abordar la derivada, son justamente estos prerrequisitos los que constituyen la base teórica y metodológica de la propuesta los cuales comprenden: *La razón de cambio*, *La velocidad media*, *Pendiente de una recta*, *La razón de cambio entre dos puntos de una curva*, *Rectas secantes y tangentes de una función en un punto dado*, *Velocidad instantánea*.

En el tercer apartado se nos presentan los aspectos disciplinares que corresponde a la definición de derivada de una función, así como sus propiedades y la regla de la cadena.

Finalmente, en el apartado cuarto encontramos la propuesta didáctica que, como hemos mencionado anteriormente, sitúan su base teórica y metodológica en las discusiones didácticas que se han establecido en torno a los prerrequisitos conceptuales del concepto de derivada. La propuesta entonces aparece como tal en el cuarto apartado mediante una serie de siete temas en los que se han planteado dos actividades para cada uno y que parten de situaciones concretas que le faciliten al estudiante la asimilación del concepto derivada. Los siete temas que componen la propuesta se presentan a continuación:

- Identificación de variables dependientes e independientes.
- Funciones y sus graficas.

- Función lineal y afín.
- Razones de cambio promedio.
- Velocidad promedio e instantánea.
- Derivada de una función.
- Recta tangente a una función en un punto dado usando GeoGebra.

Se presentará a continuación una breve descripción que el mismo autor proporciona acerca de cada uno de los ítems que componen la propuesta, adicionalmente se presentará solo una o las dos actividades según sea necesario para caracterizar la intencionalidad de las preguntas y la información suministrada, posteriormente se efectúa un análisis matemático-curricular y didáctico.

La estructura general de los diferentes apartados (exceptuando recta tangente a una función en un punto dado) contempla unos objetivos, una definición inicial acerca del elemento central presente en las diferentes actividades, luego aparece la contextualización del problema y presentación de la información. Por último, encontramos las preguntas que generalmente van desde preguntas concisas hacia preguntas donde se requiere una sustentación por parte del estudiante.

- **Identificación de variables dependientes e independientes.**

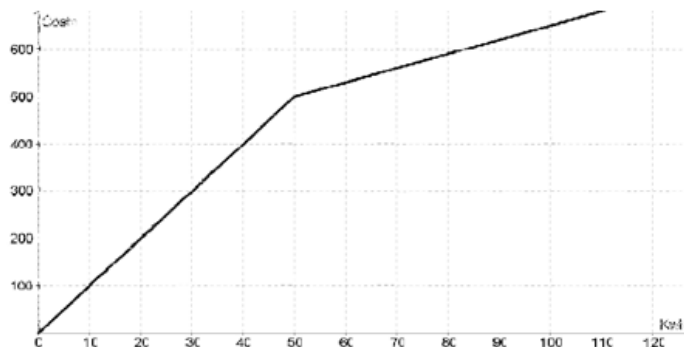
En esta actividad se busca que el estudiante identifique variables dependientes e independientes en una expresión y analice correctamente los datos presentes en una gráfica dada.

Figura 7

Actividad 1 Identificación de variables dependientes e independientes.

Actividad 1

La empresa de energía eléctrica cobra a los consumidores una tarifa de \$10 por kilovatio hora para los primeros 50 kilovatios y \$3 adicionales por kilovatio para consumos superiores a los 50 por kilovatios hora. La gráfica de cobro se muestra a continuación

**Tareas y preguntas**

De acuerdo a la información suministrada conteste las siguientes preguntas:

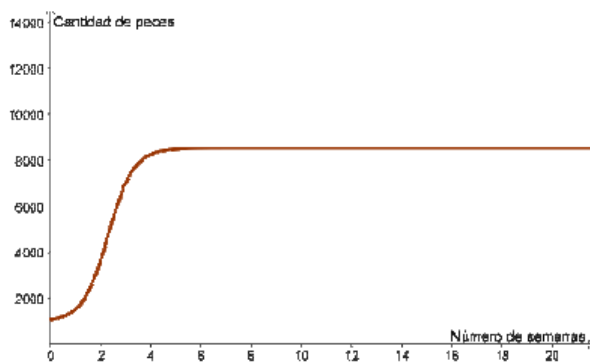
1. ¿Cuáles son las variables que intervienen en el problema?
2. Indique cuál es la variable independiente y la variable dependiente que intervienen en el problema.
3. ¿Cuánto debe cancelar un usuario que consume 30 kwh??
4. ¿Cuánto debe cancelar un usuario que consume 50 kwh??
5. ¿Cuánto debe cancelar un usuario que consume 70 kwh??
6. ¿Cuánto debe cancelar un usuario que consume 250 kwh??
7. Encuentre una ecuación que le permita a la empresa de energía eléctrica relacionar el consumo en kilovatios con el costo.

Figura 8

Actividad 2 Identificación de variables dependientes e independientes.

Actividad 2

Durante dieciocho semanas un ecologista realiza un estudio sobre el número de peces en un lago y los resultados obtenidos se muestran en la siguiente gráfica:



Observe cuidadosamente la gráfica y responda las siguientes preguntas:

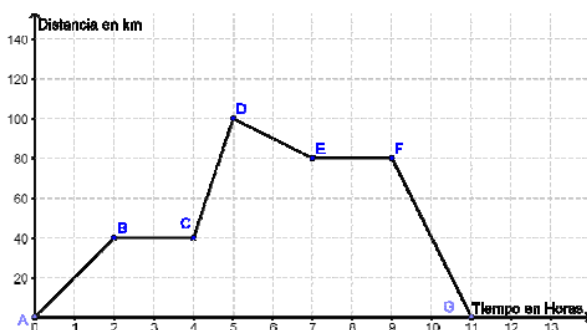
1. ¿Cuáles son las variables del problema? Identifique la variable dependiente y la variable independiente que intervienen en el problema.
2. ¿Cuántos peces aproximadamente había en el lago al inicio del estudio?
3. ¿Cuántos peces aproximadamente había en el lago en la tercera semana?
4. ¿Cuál fue la semana donde se presentó el mayor crecimiento de peces?
5. ¿Cuál fue el comportamiento del número de peces a partir de la semana 4?
6. Haga una conjetura de lo que está ocurriendo en el lago a partir de la semana 4.

- **Funciones y sus gráficas.**

En esta actividad se busca que el alumno reconozca el concepto de función y halle algunos dominios de funciones a través de la interpretación gráfica de ella

Figura 9**Actividad 1 Funciones y sus gráficas.****Actividad 1**

La gráfica muestra la función desplazamiento de un vehículo con en función del tiempo.



Observe cuidadosamente la gráfica y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto tiempo duró el viaje del vehículo?
2. ¿Cuál fue la distancia recorrida por el vehículo durante la primera hora?
3. ¿Cuál fue la distancia recorrida por el vehículo durante las primeras cinco horas?
4. ¿Cuál fue la distancia total recorrida por el vehículo?
5. ¿Cuántos km por hora marca el velocímetro del vehículo en la hora 8? Explique su respuesta.

Figura 10**Actividad 2 Funciones y sus gráficas.****Actividad 2**

La posición de un objeto que se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0 está dada por la función $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ donde $g = 10 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo. Si un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 9,8 \text{ m/s}$, su función posición será $y = 9,8 t - 5t^2$.

1. Construya la gráfica de espacio contra tiempo de la función $y = 9,8 t - 5t^2$.
2. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cuerpo?
3. ¿Cuánto tiempo tarda el cuerpo en alcanzar la altura máxima?
4. Observe la gráfica que construyó y determine para qué valores de t la altura del objeto es nula.
5. Usando la función de espacio contra tiempo $y = 9,8 t - 5t^2$ hallar la altura del cuerpo para los siguientes tiempos: $t = 0,2$, $t = 0,6$, $t = 1$, $t = 1,4$, $t = 1,8$ y $t = 2$.
6. ¿Qué le ocurre al objeto cuando el tiempo es $t > 1$?
7. De acuerdo con la gráfica que construyó, halle el dominio de la función.
8. De acuerdo con la gráfica que construyó, halle el rango de la función.

- **Función lineal y afín.**

Utilizando un problema común sobre el precio de venta de un artículo se quiere que el estudiante construya una tabla de valores donde relacionen las variables dadas y que pueda representar la información en un gráfico.

Figura 11**Actividad 1 Función lineal y afín.****Actividad 1**

Un empresa vende cada uno se los artículos que produce en \$1500.

De acuerdo a la información suministrada conteste las siguientes preguntas:

1. Complete la siguiente tabla de valores

Artículos Vendidos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ingreso									

2. ¿Cuál es el ingreso total por la venta de 45 artículos? ¿Y por la venta de 150 artículos?
3. Usando los datos de la tabla anterior construya una gráfica que relacione las variables que intervienen en el problema.
4. Encuentre una función que relacione el número de artículos vendidos con el ingreso que recibe la empresa.
5. ¿Qué tipo de función describe la gráfica?
6. Halle la constante de proporcionalidad de la función.

Figura 12**Actividad 2 Función lineal y afín.****Actividad 2**

Un fabricante determina que el costo total de producir cierto tipo de artículos es de \$15.000 más \$200 por cada uno de los artículos que produzca. Usando la información dada responda las siguientes preguntas.

1. Complete la siguiente tabla de valores

Artículos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ingreso									

2. ¿Cuál es el costo total por la fabricación de 35 artículos? ¿Y por 150 artículos?
3. Construya una gráfica que relacione las variables que intervienen en el problema.
4. Encuentre una función que relacione el número de artículos producidos con el costo. ¿Qué tipo de función es?
5. Halle el valor de la pendiente m de la función.
6. Halle la ordenada al origen b de la función.

- **Razón de cambio.**

Empleando un ejemplo sobre la temperatura de una persona y sobre la propagación de una enfermedad se busca que el estudiante calcule variaciones promedio y analice los resultados.

Figura 13

Actividad 1 Razones de cambio.

Actividad 1

Suponga que en cierta región surge una enfermedad contagiosa en la cual se presentan inicialmente 100 personas enfermas. Los casos se registran semanalmente y los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Casos	100	244	356	436	484	500	461	392	266	160	80	40

Usando la información dada responda las siguientes preguntas.

1. ¿En promedio cuantos enfermos se presentaron en las primeras seis semanas?
2. Construya una tabla en la cual se relacione el cambio de enfermos semanalmente.

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Casos											
Nuevos											

2. ¿En promedio cuántos enfermos nuevos se presentaron en las primeras cinco semanas? Compare su respuesta con la obtenida en la pregunta número 1.
3. Usando la información de la tabla anterior realice un gráfico en el cual se relacionen las variables del problema.
4. ¿Qué indica una diferencia positiva en el cambio del número de enfermos?
5. ¿Qué indica una diferencia negativa en el cambio del número de enfermos?
6. ¿En cuál semana el número de enfermos es más cercano a cero?

Figura 14**Actividad 2 Razón de cambio.****Actividad 2**

Se hace seguimiento a la temperatura de una persona entre las 15 y las 23 horas, los datos son registrados en la siguiente tabla:

Horas	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Temp.	37	37.5	38	38,5	39	40	40	38	37

Usando la información dada responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 16 y las 19 horas?
2. ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 20 horas y las 23 horas?
3. Realice un gráfico de la temperatura en función del tiempo.
4. Calcule las razones de cambio entre las 15 y las 23 horas para intervalos de una hora.
5. Realice el gráfico de las razones de cambio obtenidas en el punto 4.
6. Complete la siguiente tabla utilizando los resultados del punto 3 y el punto 5.

Temperatura	Gráfica	Razón de cambio
Sube	Sube	Positiva
Queda igual		
Baja		

7. Explique los resultados obtenidos en el punto anterior.

- **Velocidad promedio e instantánea.**

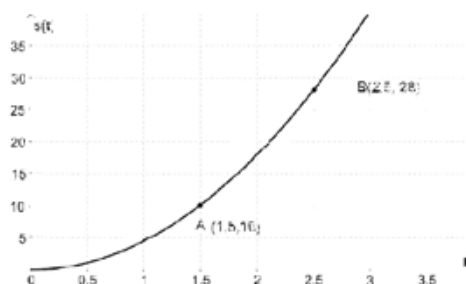
A través de un ejemplo de caída libre de un cuerpo, se busca que el estudiante relacione las velocidades promedio con pendientes de rectas y pueda intuir que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente en un punto dado y que esta es la velocidad instantánea en dicho punto.

Figura 15

Actividad 1 Velocidad promedio e instantánea.

Actividad 1

En un experimento de caída libre se deja caer un objeto. La siguiente figura representa la distancia recorrida por el objeto en función del tiempo entre 0 y 3 segundos.



1. Calcule la velocidad promedio entre los siguientes pares de puntos:

Punto	Velocidad
A(1.5, 10) y B ₁ (2.5, 28)	
A(1.5, 10) y B ₂ (2.4, 26)	
A(1.5, 10) y B ₃ (2, 18)	
A(1.5, 10) y B ₄ (1.8, 15)	
A(1.5, 10) y B ₅ (1.57, 11)	
A(1.5, 10) y B ₆ (1.501, 10.001)	

2. ¿A medida que t se aproxima a 1.5 a qué valor se aproxima la velocidad promedio?
3. Dibuje las rectas secantes a la grafica en los puntos A y B en cada una de las graficas dadas a continuación.

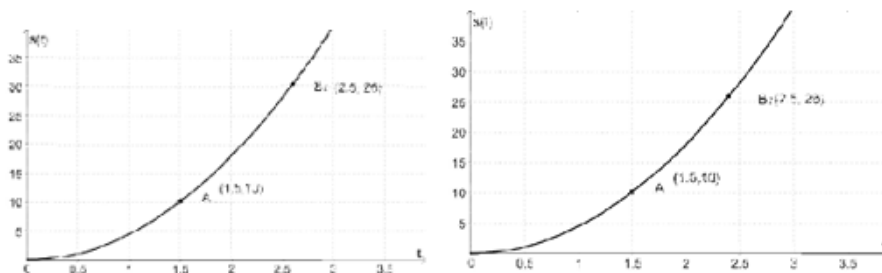
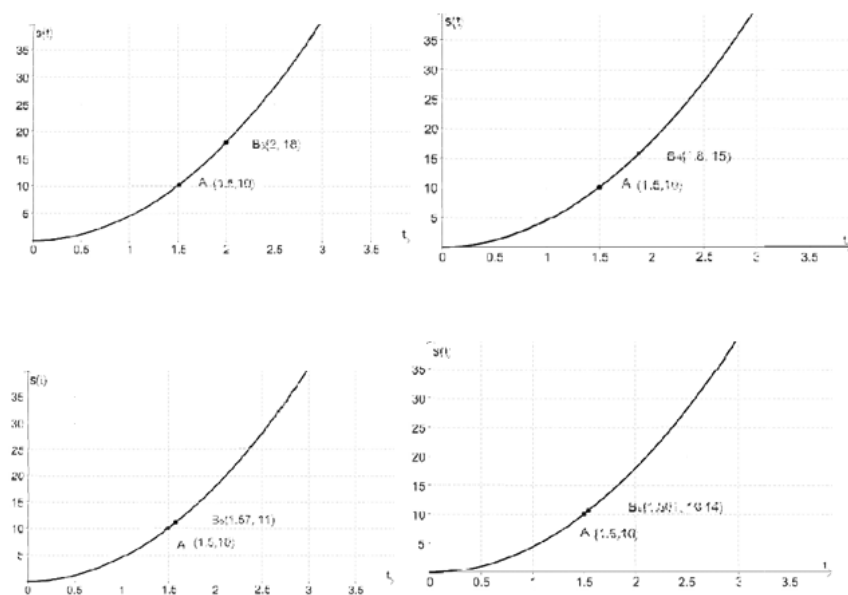


Figura 16

Continuación actividad 1 Velocidad promedio e instantánea.



4. ¿A qué conclusión puede llegar observando las rectas secantes dibujadas en el punto anterior y la respuesta obtenida en el punto 2?

Figura 17**Actividad 2 Velocidad promedio e instantánea.****Actividad 2**

Si dejamos caer un objeto desde un edificio de 125 mts. de altura la posición del objeto en cualquier momento estará dada por la expresión: $f(t) = 125 - \frac{1}{2} 10t^2 = 125 - 5t^2$.

1. Utilizando papel milimetrado realice un gráfico de la función.
2. Complete la información pedida en la siguiente tabla:

t	$f(t)$	$f(3) - f(t)$	$3 - t$	$v_{prom} = \frac{f(3) - f(t)}{3 - t}$
2				
2,5				
2,9				
2,99				
2,999				
2,9999				

3. De acuerdo con la información hallada en la tabla anterior a medida que t se aproxima a **3**, ¿a qué valor se aproxima $f(t)$?
4. De acuerdo con la información hallada en la tabla anterior a medida que t se aproxima a **3**, ¿a qué valor se aproxima la velocidad promedio $v_{prom} = \frac{f(3) - f(t)}{3 - t}$?
5. ¿A qué conclusión puede llegar?

- **Derivada de una función.**

En esta actividad se busca inducir el concepto de derivada a través de los incrementos en las variables tiempo y desplazamiento; además se pretende que el estudiante encuentre las primeras derivadas de funciones elementales. Es de aclarar que en esta parte de las actividades el concepto de límite se manejará de manera intuitiva.

Figura 18**Actividad 1 Derivada de una función.****Actividad 1**

La posición de un cuerpo está dada por la función $h(t) = 16t^2$.

1. Utilizando la función $h(t) = 16t^2$, calcule la posición del cuerpo después de $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ segundos.
2. Halle la velocidad promedio entre $t = 1,5$ y $t = 2,5$.
3. Complete la información de la siguiente tabla utilizando la función $h(t) = 16t^2$.

$t_1 + \Delta t = t_2$	t_2	t_1	$\Delta t = t_2 - t_1$	$h(t_2)$	$h(t_1)$	$\Delta h = h(t_2) - h(t_1)$	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$
1.5+1.00	2.5	1.5	1	100	36	64	64
1.5+0.4							
1.5+0.2							
1.5+0.01							
1.5+0.001							
1.5+0.0001							

4. ¿A medida que t se aproxima a 1.5 a qué valor se aproxima la velocidad promedio del cuerpo?

Figura 19**Actividad 2 Derivada de una función.****Actividad 2**

1. Observe cuidadosamente los datos suministrados en la primera fila de la siguiente tabla y complétela.

$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+h) - f(x)$	$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Derivada $f'(x)$
$16x^2$	$16(x+h)^2$	$16(x+h)^2 - 16x^2$	$\frac{16(x+h)^2 - 16x^2}{h}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{16(x+h)^2 - 16x^2}{h}$	$32x$
$8x^2$					
$4x^2$					
$-2x^2$					
x^3					
$2x^3$					

2. Utilizando la información encontrada en el punto anterior compare la respuesta del punto 4 de la actividad anterior con $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t}$ de la función $h(t) = 16t^2$ en 1.5. ¿A qué conclusión puede llegar?
3. Con los resultados hallados en la tabla anterior halle una expresión general para la derivada de funciones de la forma $f(x) = ax^n$.
4. Evalúe $f'(x)$ en cada una de las funciones encontradas en la tabla para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.
5. Complete la información de la siguiente tabla utilizando las funciones dadas

$h(x)$	$h(x+h)$	$h(x+h) - h(x)$	$\frac{h(x+h) - h(x)}{h}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$	Derivada $h'(x)$
$8x$	$8(x+h)$	$8(x+h) - 8x$	$\frac{8(x+h) - 8x}{h}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(x+h) - 8x}{h}$	8
$6x + 2$					
$2x$					
$\frac{3}{2}x$					
$\frac{5}{2}x - 1$					
$8x + 4$					
$5x - \frac{3}{2}$					

6. Con los resultados hallados en la tabla anterior halle una expresión general para hallar la derivada de funciones de la forma $f(x) = ax + b$ con a y b números reales.

- **Recta tangente a una función en un punto dado usando GeoGebra.**

En esta actividad se pretende que el estudiante a través del uso de un programa computacional como GeoGebra, construya el concepto de derivada de una función a través de rectas secantes que se aproximan a la recta tangente en un punto dado.

Figura 20

Actividad 1 y 2 Recta tangente a una función en un punto dado usando GeoGebra.

Actividad 1

1. Dada la función $f(x) = x^2 + x + 1$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tome dos puntos **A** y **B** sobre la gráfica de la función y observe la variación de la recta secante cuando el punto **B** se acerca cada vez más al punto **A**. Los pasos para desarrollar esta actividad se encuentran en el Anexo **A**.

Actividad 2

2. Utilizando los pasos descritos en el Anexo **A** construya la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tome dos puntos **A** y **B** sobre la gráfica función y observe la variación de la recta secante cuando el punto **B** se acerca cada vez más al punto **A**.
3. ¿De acuerdo a los resultados de las actividades 1 y 2, qué ocurre cuando el punto **B** se aproxima al punto **A**?
4. ¿Cómo son las pendientes de la recta secante y la recta tangente cuando el punto **A** coincide con el punto **B**?

II. Análisis del Contenido Matemático

Se presenta, a continuación, el análisis del contenido matemático siguiendo las categorías descritas en la matriz de análisis de la sección 3.2

Análisis de la sección: Identificación de variables dependientes e independientes

En esta sección se presentan dos actividades en donde se aborda la idea de variable dependiente e independiente en dos contextos diferentes. Encontramos por tanto un intento implícito de desarrollar pensamiento variacional en tanto que un estudio funcional bien fundamentado permite la cohesión entre las situaciones de variación presentes en las funciones y la derivada como herramienta que caracteriza dichas variaciones. El estudio de la variación aquí parte de situaciones elementales de variación como se ha encontrado en otras propuestas,

es a partir del estudio de estas situaciones de variación que se hace un reconocimiento de las variables dependientes e independientes que están involucradas en el problema.

Para abordar esta idea cada actividad presenta una situación en donde se presenta la representación gráfica de una función y seguidamente unas preguntas y consignas que permitan destacar los elementos matemáticos con los que se puede relacionar dicha situación. Como se puede ver en la figura A, la Actividad 1 se centra en una función lineal por tramos y una tasa de cambio constante, enfocándose en el análisis de costos en función del consumo.

La actividad invita a los estudiantes a interpretar las pendientes en cada tramo de la función, ya que la pendiente representa la tasa de cambio del costo respecto al consumo de kilovatios-hora. En el primer tramo (hasta 50 kWh), la pendiente es mayor, reflejando el costo de \$10 por kWh. En el segundo tramo, la pendiente es menor, representando el cargo adicional de \$3 por kWh. Este cambio en la pendiente permite trabajar con el concepto de variación y analizar cómo se representa gráficamente.

La última pregunta de la actividad pide que se encuentre una ecuación que relacione el consumo con el costo. Esto implica que los estudiantes deben formular una función que describa adecuadamente el comportamiento observado en la gráfica, fomentando así la capacidad de modelar situaciones reales mediante funciones matemáticas, que, a su vez, permite a los estudiantes aplicar sus conocimientos en contextos prácticos. Según los lineamientos (MEN, 1998), cuando se valida el modelo (en este caso la función) pueden ocurrir discrepancias que conducen a una modificación del modelo con lo cual la comunicación es un proceso central en esta actividad pues requiere que el estudiante justifique su construcción de la función.

Por otro lado, la Actividad 2 utiliza una función de crecimiento logístico, con una tasa de cambio decreciente y un comportamiento asintótico, permitiendo analizar patrones de crecimiento poblacional y la estabilización en un límite (Ver figura B). Esta situación corresponde a una situación de variación continua y las formas de representación empleadas son gráficas.

Al observar la gráfica, los estudiantes pueden deducir que la tasa de crecimiento de la población de peces es mayor en las primeras semanas (aproximadamente entre la semana 2 y la semana 4) y que después de la semana 4, la tasa de crecimiento se reduce considerablemente. Esto les permite entender el concepto de cambio en la tasa o razón de cambio de la tasa de crecimiento de la población, además de que podrían conjeturar cuál es la relación entre el valor numérico de la tasa de cambio y la forma “aplanada o menos pronunciada” de la gráfica de la función.

La actividad sugiere que los estudiantes hagan una conjetura sobre el comportamiento de la población de peces a partir de la semana 4. A partir de la gráfica, se puede observar que el crecimiento de la población tiende a estabilizarse en un valor constante cercano a los 10,000 peces. Esto introduce a los estudiantes al concepto de comportamiento asintótico y les permite ver cómo una población puede acercarse a un límite máximo debido a factores ambientales.

En general, las actividades 1 y 2 abordan los conceptos de función, variable dependiente e independiente, tasa de cambio, representación gráfica, comportamiento asintótico y límites. Los procesos más presentes en estas actividades son la modelación, el razonamiento y la comunicación pues ellas exigen que el estudiante no solo establezca relaciones entre las variables y proceda con un pensamiento lógico sobre las cantidades que cambian, sino que también exigen que se movilice la función como modelo matemático que permite identificar propiedades de correlación positiva y negativa entre variables.

Análisis de la sección: Funciones y sus Graficas

Con el propósito de abordar el concepto de función desde su representación simbólica y gráfica, el autor propone la definición de dominio y rango de una función, además de un ejemplo donde se parte de un problema de área de terreno para llegar a determinar el área en términos de x , de forma simbólica. Y, finalmente dos actividades.

La actividad 1, presentada en la figura W propone el análisis de una gráfica que representa el desplazamiento de un vehículo en función del tiempo en donde se debe realizar un

análisis del comportamiento a lo largo del trayecto. Por un lado, responder a la pregunta ¿Cuánto tiempo duró el viaje del vehículo? implica analizar cuanto tiempo ha transcurrido, es decir, interpretar el eje t de la gráfica, mientras que para saber cuánta distancia se ha recorrido no solo basta con fijarse en el último tramo de la gráfica, sino que hay que hacer un cálculo sobre las distancias recorridas en consideración con el eje d . Como ya hemos visto anteriormente, esta situación de variación implica reconocer las variables del problema además de establecer la dependencia entre ellas, siempre usando la función como modelo matemático que permite traducir situaciones del mundo real al dominio de las matemáticas. Por otro lado, para responder a ¿Cuántos km por hora marca el velocímetro en la hora 8? es necesario entender que, en el contexto de una gráfica de distancia versus tiempo, la pendiente de la gráfica en cualquier punto nos proporciona la velocidad del vehículo en ese momento. Matemáticamente, la pendiente de la gráfica es el cociente de las diferencias $\Delta y / \Delta x$, dado que en $t=8$ la gráfica es horizontal entonces $\Delta y = 0$ por lo que la pendiente y en consecuencia la velocidad del vehículo en ese momento es 0. Esto representa el primer acercamiento al concepto de pendiente y velocidad instantánea que hay en la propuesta además de marcar la relación entre valor numérico de la pendiente y su posición en la gráfica.

La actividad 2, se centra en el análisis del movimiento de un objeto lanzado hacia arriba bajo la influencia de la gravedad. Se parte de la función cuadrática $y=9.8t-5t^2$ $y=9.8t-5t^2$, que representa la posición del objeto en función del tiempo, y se busca abordar conceptos relacionados con el cambio, el comportamiento de la altura máxima y los intervalos de tiempo en los que el objeto se encuentra en movimiento.

En la primera parte de la actividad, se pide al estudiante que construya la gráfica de la función, estableciendo una representación visual del movimiento del objeto lo que moviliza nuevamente procesos de razonamiento, modelación y comunicación. Este enfoque permite observar cómo la altura varía con el tiempo, destacando que la altura en función del tiempo sigue un patrón parabólico, donde la altura inicialmente aumenta hasta alcanzar un máximo y

luego disminuye. Este análisis gráfico introduce de manera implícita las nociones de crecimiento, decrecimiento y máximos locales, fundamentales para la comprensión del comportamiento de funciones cuadráticas y la medición de la pendiente a la curva en situaciones de variación.

En la siguiente pregunta, se solicita calcular la altura en tiempos específicos, como $t = 0.2, 0.6, 1, 1.4, 1.8$ y 2.2 , para observar cómo varía la posición del objeto en intervalos cortos. Este ejercicio introduce de manera implícita la noción de tasa de cambio promedio al analizar cómo la altura varía entre diferentes puntos temporales. Aunque no se menciona explícitamente, este tipo de análisis prepara el terreno para la transición hacia la derivada como herramienta matemática para estudiar cambios instantáneos y proporciona métodos geométrico-analíticos para su obtención.

Por último, se incluye una pregunta crítica que invita al estudiante a reflexionar sobre el comportamiento del objeto cuando el tiempo $t > 1$. Permitiendo reconocer que el modelo matemático requiere de validaciones y ajustes, es por esto que en las preguntas 7 y 8 preguntan por el dominio y rango de la función, porque la función permite describir matemáticamente el fenómeno físico hasta donde este tiene sentido.

Análisis de la sección: Función Lineal y Afín

En esta sección, el autor inicia presentando las definiciones de función lineal y función afín, posteriormente presenta dos actividades bajo el contexto de ingresos y ventas de una fábrica. En la actividad número uno se aborda el concepto de función lineal y su aplicación a una situación concreta: el ingreso de una empresa en función de la cantidad de artículos vendidos. La actividad inicia solicitando al estudiante que complete una tabla de valores donde se relaciona el número de artículos vendidos con el ingreso correspondiente. Esto permite articular algunos de los procesos matemáticos como la formulación, tratamiento y resolución de problemas y el razonamiento junto con las distintas representaciones de las situaciones de

variación. Al asignar un precio fijo de \$1500 por artículo, se introduce una dependencia directa entre las dos variables, lo que constituye un ejemplo típico de proporcionalidad directa.

En el primer apartado, el llenado de la tabla permite identificar de manera explícita que el ingreso es proporcional al número de artículos vendidos, ya que cada incremento de un artículo genera un aumento constante de \$1500 en el ingreso. Esto refuerza la idea de que el modelo que describe la relación es lineal. En comparación con la actividad 2 de la sección anterior, donde se trabajaba con una función cuadrática, aquí el comportamiento es mucho más sencillo, ya que el cambio entre los valores es uniforme y por tanto su variación es constante.

A continuación, se plantea encontrar una función que modele matemáticamente la relación entre el número de artículos vendidos y el ingreso. El estudiante puede deducir que la función tiene la forma $=1500x$, donde x es el número de artículos vendidos. Esta actividad introduce de manera implícita el concepto de pendiente como la tasa de cambio constante entre las variables, que en este caso corresponde al precio por artículo. Comparando nuevamente con la actividad anterior, aquí la pendiente es constante y positiva, mientras que en la función cuadrática la pendiente variaba dependiendo del intervalo analizado.

En las preguntas finales, se explora el tipo de función que describe la gráfica, identificándola como una función lineal, y se reflexiona sobre la proporcionalidad directa entre las variables. Este análisis consolida el aprendizaje de las características de las funciones lineales y su aplicación en contextos reales. En contraste con la actividad previa, donde se exploraban cambios variables y conceptos iniciales de derivada, esta actividad se mantiene en un nivel más básico, proporcionando un puente hacia el análisis de funciones lineales y su representación gráfica.

Análisis de la sección: Razón de Cambio

En esta sección, se introduce la definición de razón de cambio como el cociente de las diferencias $\Delta y / \Delta x$, este es un paso necesario para consolidar la noción de derivada tanto en contextos numéricos como geométricos. En la Actividad 1, se propone el análisis de datos

relacionados con la cantidad de personas que se contagian semanalmente de una enfermedad. La primera consigna solicita el cálculo del promedio de contagios a lo largo de todo el periodo registrado. La segunda consigna consiste en la construcción de una tabla que registre las diferencias en el total de contagios semana a semana. A partir de la semana 5, los contagios comienzan a disminuir progresivamente, lo que motiva las consignas 4 y 5, que tienen como objetivo explicitar este comportamiento, señalando que existen cambios negativos y positivos.

Hasta este punto, se ha establecido un proceso sistemático de medición del cambio: primero, mediante el cálculo de una medida de cambio en intervalos consecutivos, y luego mediante el análisis del cambio en intervalos más grandes, al comparar los promedios de los contagios en las primeras semanas con el promedio del resto del periodo. La consigna 3, sin embargo, tiene un carácter diferente, pues solicita la construcción de una gráfica basada en los datos de la tabla. Este requerimiento implica, en términos de Duval (2006), un proceso de conversión: el estudiante debe pasar de un registro simbólico y tabular a un registro gráfico, es decir, le pide al estudiante construir un gráfico en el cual se relacionen las variables del problema. Es interesante ver en este punto cómo el estudiante naturalmente usará la gráfica de una función en un plano cuyos ejes se corresponderán con las variables involucradas sin que se le pida explícitamente hacerlo; el estudiante tendrá que determinar qué variable depende de la otra y cómo se hace evidente el cambio. La función nuevamente aquí es el vehículo de modelación de la situación y aparece una función especial que mide justamente el cambio en las cantidades de casos nuevos con el cambio en el número de semanas

Para llevar a cabo esta tarea, el estudiante podría definir los puntos de la gráfica a partir de los datos tabulados y luego unir estos puntos, o bien, podría hallar la función que describe el comportamiento de los datos, lo que proporcionaría mayor precisión en la construcción, pero implicaría un proceso más complejo.

Por otro lado, en la Actividad 2, se sugiere el análisis de los valores representados en una tabla de temperatura en función del tiempo. Una de las consignas consiste en construir la gráfica

de la función, mientras que otra consiste en determinar los cambios en intervalos de una hora y construir la gráfica que representa la razón de cambio en esos intervalos. Este es un acercamiento a la comparación entre dos gráficas: la de la función y la de su razón de cambio. A través de esta comparación, el estudiante puede observar la relación entre los puntos de la función y los puntos que indican "cómo cambia la función". Además, se solicita que esta comparación quede registrada en otra tabla, y que se realice una interpretación de los resultados obtenidos, configurando así la relación entre el valor numérico de la tasa o razón de cambio de la situación y el crecimiento o decrecimiento en la gráfica correspondiente.

Estas actividades abordan varios aspectos clave del concepto de razón de cambio, aunque algunos otros no se hacen explícitos. En primer lugar, no se aborda el comportamiento de la razón de cambio en el caso de funciones lineales, ni cuando esta no es lineal. Por otro lado, se trabaja explícitamente con la dependencia: es decir, la razón de cambio depende de cómo la función modela la relación entre las variables. Si la función crece, la razón de cambio es positiva, y si la función decrece, la razón de cambio es negativa. Asimismo, se resalta que este concepto es tratado dentro del contexto de la vida real, con aplicaciones matemáticas que permiten modelar situaciones del entorno cotidiano.

Análisis de la sección: Velocidad promedio y velocidad instantánea

En esta sección, el autor presenta la definición de velocidad promedio a partir de una función de dominio real que mide la distancia cubierta por un objeto en movimiento en función del tiempo. Así, la velocidad promedio será la diferente de distancias barridas en dos instantes de tiempo sobre el intervalo de tiempo. Esta definición está acompañada de un ejemplo ilustrativo que explica cómo utilizar esta definición en un contexto práctico.

La primera actividad describe una situación de caída libre, representada gráficamente como se observa en la figura T. Aquí, se busca calcular la velocidad promedio entre intervalos de tiempo cada vez más pequeños, acercándose progresivamente a un punto específico A . Este proceso se realiza con el objetivo de observar cómo cambia la velocidad promedio a medida que

el intervalo de tiempo se reduce, lo que intuitivamente llevará al estudiante hacia la consolidación de la noción de velocidad instantánea.

Una de las consignas clave de esta actividad es la siguiente: ¿A medida que t se aproxima a 1,5 a qué valor se aproxima la velocidad promedio? A medida que los intervalos de tiempo se hacen más pequeños, los estudiantes comienzan a ver cómo la velocidad promedio se aproxima a un valor específico, lo que proporciona una introducción intuitiva al concepto de velocidad instantánea y sobre todo un método para calcularla. Este proceso de reducción de los intervalos es fundamental para comprender cómo la velocidad promedio se convierte en la velocidad instantánea a medida que el intervalo tiende a cero, es una progresión en el pensamiento del estudiante que configura levemente la noción de límite. Este concepto introduce la noción de derivada como el valor límite de la razón de cambio cuando el intervalo se reduce infinitesimalmente.

En la consigna 3, se solicita la construcción de las rectas secantes a la función de distancia en los puntos determinados en la consigna anterior. Esto permite a los estudiantes visualizar el cambio en la pendiente de la secante a medida que se van acercando al punto A, lo que refuerza la idea de que la pendiente de la secante es una aproximación a la pendiente de la tangente en ese punto, que corresponde a la velocidad instantánea. La visualización geométrica de la velocidad se modela por medio de la función como vimos anteriormente, pero aparece otro objeto con el potencial de modelar una propiedad específica de la situación y es la cuerda secante a la curva.

En la actividad 2, se hace aún más evidente el paso entre velocidad promedio e instantánea a pesar de que se usa el mismo tipo de problema físico para relacionar las variables, el de caída libre. Concretamente en las consignas 4 y 5 se hace evidente la intención de enfrentar al estudiante a una situación de variación infinitesimal movilizándolo no solo la correlación entre las variables sino también la idea intuitiva de límite.

Análisis de la sección: Derivada de una Función

En esta sección el autor presenta la definición de derivada de una función como el límite de la función $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h tiende a cero.

En la actividad 1, cumplir con la primera consigna implica fomentar en el estudiante la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos dado que se debe evaluar los diferentes valores de t en la función y así determinar la posición del cuerpo en esos valores. En la consigna, aunque también se propone un proceso de tratamiento en la función, este va más allá de evaluar ciertos valores de la función puesto que como ya se estableció en la sección 4 y 5, hallar la velocidad promedio es determinar la razón de cambio de la función entre ciertos valores. En la consigna 3, hay que hacer este proceso de tratamiento reiteradamente para llenar la tabla pero se resalta que los valores de la primer columna son valores que intentan aproximar la razón de cambio para valores cada vez más próximos a 1.5, del mismo modo en que se había realizado en la sección 5 pero en este caso se hace mediante una tabla en donde se dejan explícitos los pasos para llegar a la razón de cambio o velocidad promedio en tendencia a una velocidad instantánea ya que los valores se aproximan a un punto en particular.

En la actividad 2 se pretende la generalización del proceso de hallar la razón de cambio que se hizo en la actividad 1, y para esto llenar una tabla en donde las columnas dejan explícito los cálculos a realizar hasta llegar a la derivada de algunas funciones cuadráticas y cúbicas. Y luego se pretende la generalización de la derivada de una función de la forma ax^n .

Se considera que estas actividades se dejan explícitos algunos elementos claves del concepto de función derivada sin embargo no se presentan todos los elementos con los que se puede asociar esta función. Por un lado, en las actividades no aborda la aplicación de la definición de derivada en diferentes contextos. Por otro lado, la asociación del concepto de derivada y su representación gráfica como la recta tangente a la función en cuestión no se hizo explícito, si bien se presentaron elementos como la recta secante a la curva en la sección 4, estos no evolucionaron para poder ser determinantes en el concepto de tangente a la curva.

Análisis de la sección: Recta tangente a una función en un punto dado usando GeoGebra.

En esta sección, la propuesta plantea un escenario de geometría dinámica a través del software GeoGebra en el que el estudiante podrá realizar construcciones gráficas de funciones a partir de sus representaciones algebraicas. Esta herramienta permite no solo un paso casi inmediato entre registros de representación sino también la exploración geométrica de las situaciones de variación. Las consignas tienen la intencionalidad de que el estudiante reconozca la tasa o razón de cambio promedio de la función para intervalos inicialmente grandes y, progresivamente, por medio del acercamiento de los puntos que subtienden las cuerdas secantes a la gráfica, caracterizar la tasa instantánea de variación.

Si bien las preguntas son acordes a las potencialidades del escenario de geometría dinámica, es posible que los estudiantes encuentren dificultades en la interpretación o relación entre el valor numérico de la razón de cambio y la pendiente de la cuerda secante o tangente que pase por ese punto. Esto debido a que no se ha concretado la derivada como una función en sí misma que da cuenta de la variación de la función inicial en todo punto.

III. Análisis didáctico.

Desde una mirada didáctica se pretende aquí poner en juego qué elementos se han usado para evitar las dificultades asociadas a la enseñanza de la derivada o los obstáculos asociados a los elementos que ella pone en juego. Es posible evidenciar por palabras propias del autor que la propuesta se centra en los prerrequisitos conceptuales que se manejan previamente a la introducción del concepto de derivada, es así como podemos partir de la propuesta que frente a esos objetos se hace para lograr una construcción ordenada de la noción de derivada.

Los elementos que aparecen entonces y que son objeto de investigaciones didácticas relacionadas a sus dificultades son la función y la noción de límite. Por un lado, referente a las funciones y los obstáculos que ellas suscitan, es posible que los estudiantes caigan en obstáculos relacionados a la concepción de la función limitada al reconocimiento de prototipos comunes, es

decir, que se limiten a reconocer ejemplos de funciones sin comprender la función como un objeto matemático complejo con características bien definidas; esto debido a que la estructura general de los apartados de la propuesta presenta una definición y un ejemplo sin llegar a realizar un tratamiento exhaustivo de los elementos diferenciales de cada uno de los objetos matemáticos invocados. Un elemento que podría reforzar esta idea es el uso recurrente de situaciones de velocidad de móviles y caída libre en donde el estudiante puede no hacer un uso adecuado de las funciones que modelan las situaciones de variación. Las tres primeras partes de la propuesta se limitan a ofrecer una definición, dar un ejemplo y presentar un problema que relaciona el objeto matemático nombrado sin ofrecer un bosquejo completo e integral del mismo que le permita al estudiante apropiarse de los contenidos.

Pareciera entonces que el tiempo destinado y la intensidad sugerida no es suficiente para “superar” esa falta de apropiación de los prerrequisitos conceptuales que se quiere tratar en la propuesta. No se hace tampoco una reflexión adecuada en tanto al carácter operacional y al carácter conceptual central de las funciones y la flexibilidad que tal concepto exige para modelar las situaciones matemáticamente. Quizá en la última parte de la propuesta se le presta atención a la dificultad asociada a la articulación de los registros simbólicos a través del uso de GeoGebra como herramienta que facilita la transición entre representaciones algebraicas y gráficas, pero no deja de ser un esfuerzo que se queda corto a la luz de este análisis pues no se alcanza a concretar la noción de derivada como una función en sí misma con propiedades y ejes rectores fundamentados en la variación que permiten percibir los cambios de la función original en todo punto de su dominio.

Por otro lado, referente al segundo objeto matemático central que surge en la introducción de la derivada en esta propuesta, el de límite; se menciona que la intención es trabajar con ideas intuitivas del límite pero no se menciona explícitamente cuál es la idea que el autor tiene por “intuitivo” dentro del concepto de límite; se entiende que el autor parte de unas reflexiones didácticas y que toma a la profesora Azcarate (previamente mencionada en otra

propuesta de este trabajo) para abordar la idea de límite pero no menciona específicamente qué del límite está tomando y cómo lo está abordando.

Esta falta de información deja incluso más dudas acerca de si las actividades planteadas abordan obstáculos epistemológicos del límite que no aparecen de manera explícita en Azcarate como por ejemplo la concepción que sugiere el sentido común de la palabra “límite” la cual evoca una barrera intraspasable y no alcanzable o los obstáculos ligados a su tratamiento como un proceso algebraico finito. No es tampoco claro si las actividades planteadas logran el objetivo de acercar al estudiante a la formalización de la idea de límite y por tanto de derivada.

IV. Algunas consideraciones

Para tener una visión clara acerca de la afinidad o intencionalidad curricular en la propuesta del profesor Carlos Pineda es necesario recordar que dicha propuesta parte de una consideración acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de grado once al enfrentarse al cálculo: la falta de reconocimiento o manejo de los prerrequisitos conceptuales que involucran la derivada. Esto nos sugiere que, si bien la propuesta intenta dar manejo al objeto derivada, su atención se centra en aquellos elementos de ante sala que permiten un reconocimiento preliminar de sus características.

Uno de los elementos más importantes en la construcción de la propuesta son las situaciones problema que involucra. Si bien no se sabe explícitamente si las situaciones tomadas buscan al igual que en la propuesta del profesor Dolores explorar situaciones elementales de variación, es posible ver la potencialidad de dichas situaciones desde el inicio en el primer apartado sobre la “identificación de variables” en donde es posible ver un escenario de variación en el que se exige que el estudiante reconozca qué cantidades están cambiando, cuánto cambian en un determinado tiempo y qué conjeturas puede hacer acerca del comportamiento de la situación en el futuro.

También es posible identificar elementos importantes de la modelación como proceso en tanto que hace uso de las funciones para modelar situaciones de forma precisa mediante

representaciones cuantitativas. Es evidente por tanto una correlación con elementos del pensamiento variacional durante toda la propuesta en las formas de representación tabular, gráfica y algebraica de las funciones para representar situaciones de cambio y predicción de patrones en los fenómenos de cambio. El cambio en el sistema de representaciones parece ser consistente con la teoría de Duval.

Otro de los elementos importantes acerca de la modelación presentes en las actividades de la propuesta tiene que ver con las situaciones problema de las cuales toma partida. Estas situaciones problema según los lineamientos deben ser simplificadas, idealizadas, estructuradas, sujetas a condiciones y suposiciones que deben precisarse; en últimas son los requisitos para la construcción de un modelo que recoja la naturaleza de la situación y permita realizar modificaciones sobre las predicciones de este.

En cuanto a la fenomenología abordada es posible identificar situaciones físicas como lo es la caída libre, la gráfica de desplazamiento de un vehículo y la posición de una partícula; y otros fenómenos como la velocidad de propagación de una enfermedad, el cambio de temperatura corporal o la población de peces en un lago lo cual nos remite a los contextos de las otras ciencias contemplados en los lineamientos. Los contextos diarios se pueden identificar como aquellos en los que se estudia la venta de un artículo y los matemáticos están presentes de manera implícita en todas las propuestas de ejercicios.

Una de las falencias encontradas en la articulación de los elementos curriculares de la propuesta es quizá la falta de escenarios donde se le permita y exija al estudiante realizar validaciones y ajustes a los modelos geométricos construidos a partir de los cambios a las expresiones algebraicas que se le asocian, no es sino hasta el último apartado donde por medio de GeoGebra será posible que el estudiante reconozca esa naturaleza dinámica de los fenómenos de variación pero solo se hará para representar pendientes de rectas tangentes a un punto, no para la validación de la construcción de la expresión algebraica que representa la función.

La coordinación entre los diferentes tipos de pensamiento matemático se hace de manera explícita por ejemplo en los apartados de “velocidad promedio e instantánea” y “derivada de una función” respectivamente al plantear problemas en los que el estudiante debe hacer cambios entre registros para comprender la variación del fenómeno y encontrar un modo de realizar los cálculos. Así mismo, es posible encontrar preguntas que fomentan los procesos de comunicación y razonamiento pues se le pide al estudiante que argumente sus elecciones y las comunique.

Finalmente, respecto de la interpretación geométrica de la derivada, la herramienta computacional GeoGebra busca modelar gráficamente una función con el objetivo de exhibir regularidades en la representación gráfica y caracterizar la dirección y magnitud de los cambios a través de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos A y B empleando nociones intuitivas de límite sin llegar a formalizar directamente la interpretación geométrica de la derivada ni la construcción de la “función derivada”.

3.3.4. Una Aproximación a la Derivada desde la Variación y el Cambio por John Jairo Gómez M. y Cesar Augusto Martínez G.

Las imágenes referenciadas, en el análisis de esta propuesta, aparecen en la descripción de esta, sin embargo, para acceder al trabajo de grado completo refiérase al repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

I. Descripción de la propuesta

La cuarta propuesta que se ha seleccionado fue desarrollada por los estudiantes John Jairo Gómez Morales y Cesar Augusto Martínez Gómez de la Universidad Pedagógica Nacional sede Bogotá y fue presentada como requisito para optar al título de “Especialista en Educación Matemática” bajo la dirección de la Dra María Nubia Soler Álvarez en el año 2015.

La propuesta titulada “Una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio” es una adaptación del instrumento didáctico realizado por las investigadoras Silvia Vrancken y Adriana Engler (2014) titulado “Una introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio:

resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad”. La adaptación consiste en un rediseño de actividades con el propósito de llevarla al aula con estudiantes del grado once de la Institución Educativa Rural Departamental Chimbe del municipio de Albán.

Así pues, la fundamentación teórica de esta adaptación es la misma fundamentación teórica del trabajo original de Silvia Vrancken y Adriana Engler, con lo cual, basta revisar la sustentación teórica de este último para situarnos en el entorno conceptual de las actividades.

La base teórica que fundamenta esta propuesta se remite entonces al Pensamiento y Lenguaje Variacional que estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que da cabida. (Cantoral, 2003, citado en Gómez Morales y Martines Gómez 2015). Es así como podemos dar cuenta que la propuesta tiene su fundamentación en el estudio de los fenómenos de variación modelados matemáticamente mediante las diferencias; la incorporación de elementos variacionales y el otorgamiento de significado a los distintos elementos relacionados a la variación en estudio favorecerán la construcción de la derivada.

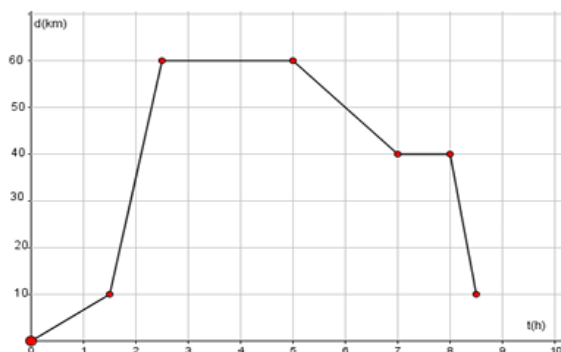
La propuesta utiliza la incorporación de elementos variacionales propios de los fenómenos de variación y favorece el desarrollo de unos de los procesos cognitivos más importante en el desarrollo de pensamiento matemático como lo es el proceso de la visualización. A continuación, presentamos entonces el cuerpo de la propuesta que lo conforma una secuencia didáctica llamada *secuencia didáctica final*. Esta secuencia es la versión final de una *secuencia didáctica piloto* y comprende una serie de cuatro actividades diseñadas para trabajarse en dos secciones de clase; un esquema general implícito en las actividades y que puede considerar un hilo conductor de la propuesta sería el siguiente: Apartado primero sobre la medición del cambio; apartado segundo sobre las diferencias y la velocidad promedio; apartado tercero sobre el cociente de diferencias pequeñas y la velocidad instantánea; apartado cuarto sobre la velocidad instantánea y la posición límite de las cuerdas secantes.

A continuación, se presentan las figuras con las actividades y las consignas que componen la secuencia encontrada en la propuesta.

Figura 21

Actividad 1 y sus consignas. Propuesta 4.

Actividad 1. La siguiente gráfica representa el movimiento de un automóvil que parte del colegio de Chimbe y se dirige a la ciudad de Bogotá:

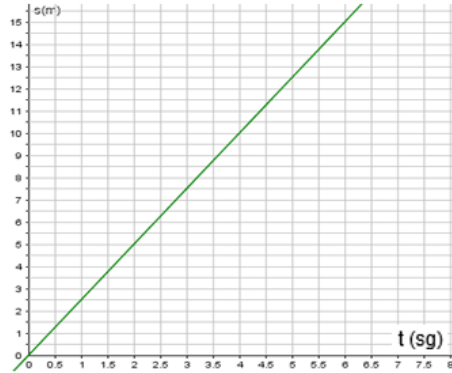


- Describe el movimiento del automóvil en los diferentes momentos
- ¿En qué trayecto es más rápido el automóvil? ¿Por qué?
- ¿En qué trayecto es más lento el automóvil? ¿Por qué?
- ¿Cómo determinas que tan rápido o lento va el automóvil?
- Ubica los siguientes puntos en la gráfica : (Facatativá, Pantanillo, Bogotá,)
- ¿Qué sucede con el automóvil en los puntos señalados?
- ¿Es posible que el movimiento del auto sea representado por una recta vertical?
- Observando la gráfica, ¿qué se puede mencionar sobre el concepto de pendiente?
¿todas son iguales?
- ¿Existe una sola velocidad en todo el recorrido?
- ¿Qué puedes mencionar sobre la velocidad promedio del automóvil?

Figura 22

Actividad 2 y sus consignas. Propuesta 4.

Actividad 2. La siguiente gráfica representa el movimiento de un móvil



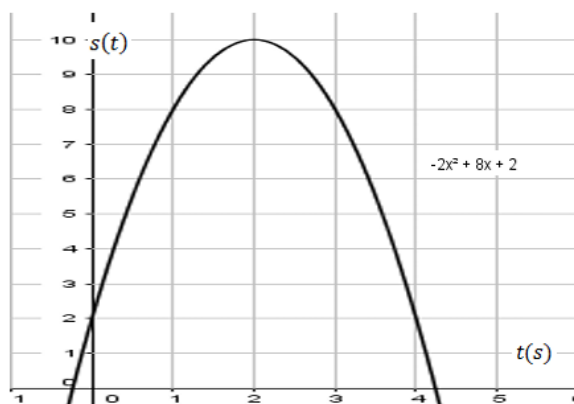
Completa la siguiente tabla a partir de grafica anterior

t_0	t_1	Δt	Δs	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
0	2			
1	6			
2	5			
5	6			
0	4			

- ¿Qué observan en la tabla y qué se puede decir acerca del movimiento del automóvil?
- ¿Qué significan y que información brindan Δt y Δs ?
- ¿Si en un segundo, el móvil se desplaza 2.5 metros y en cuatro segundos se desplaza 10 m, cuantos metros se desplaza después de transcurridos 15sg, 21sg? explique.
- ¿Si al desplazarse 5 metros transcurren 2 segundos y al desplazarse 15 metros pasan 6 segundos, cuantos segundos transcurren después de desplazarse 25 m, 30m? explique.
- ¿Qué diferencia hay en el movimiento del móvil de esta grafica con el movimiento del automóvil de la gráfica anterior

Figura 23**Actividad 3 y sus consignas. Propuesta 4.**

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por la siguiente trayectoria, donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos



Completa la siguiente tabla y responde

t_0	t_1	Δt	Δs	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
0	0.5			
0.5	1			
1	1.5			
1.5	2			
2	2.5			
2.5	3			
3	3.5			
3.5	4			

- ¿Encuentras alguna regularidad en la tabla?
- ¿Si de 0s a 1s la piedra recorre 8m, entonces de 0s a 2s recorre 16m?
¿si no es así, cuantos metros recorre?
- ¿Existe alguna relación entre Δs y Δt ? ¿es constante? ¿es proporcional?
Explica.
- ¿Existe alguna relación entre la velocidad de la piedra y la velocidad del móvil en el ejercicio anterior? Explica.
- ¿Qué diferencia existe entre estos dos movimientos?

Figura 24*Actividad 4 y sus consignas. Propuesta 4.***Actividad 4.** Completa la siguiente tabla

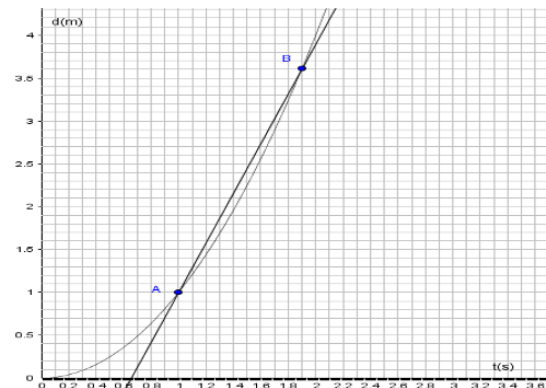
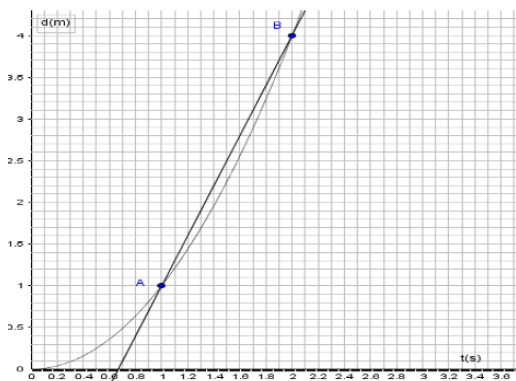
t_0	1	1	1	1	1	1	1	1
t_1	2	1.8	1.7	1.5	1.3	1.1	1.05	1.04
Δt								
Δs								
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$								

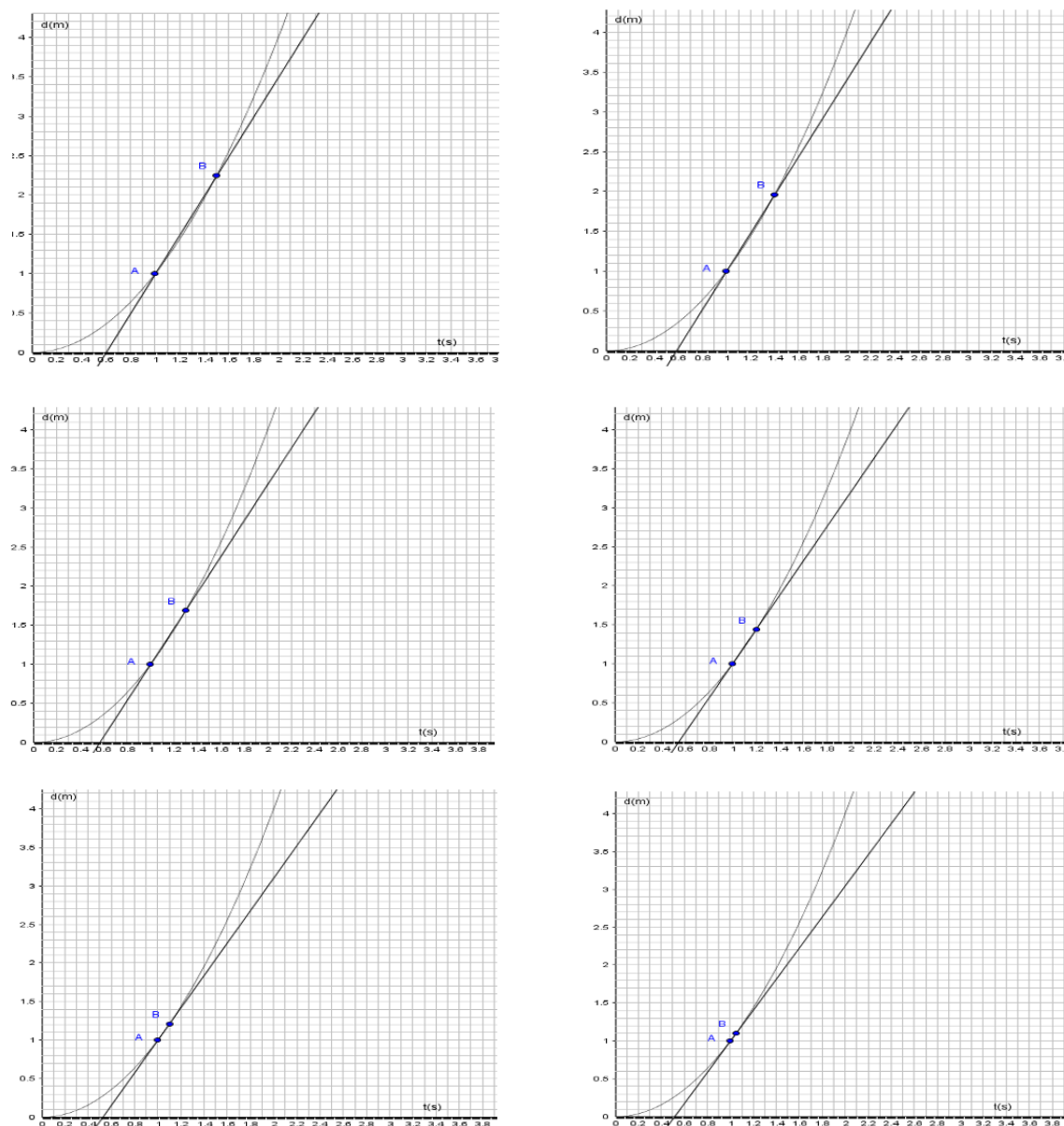
- ¿Qué sucede con la media cuando t_1 se acerca a t_0 ?
- Observe las siguientes gráficas y describa ¿qué sucede con la recta y la curva cuando t_1 se acerca a t_0 ?
- ¿Qué sucede si el punto A=B?

Introduzca valores muy cercanos a 2 por la izquierda y por la derecha para t_1 completando la siguiente tabla para la función $y = t^3$.

t_0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
t_1										
Δt										
Δs										
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$										

- ¿Qué sucede con la velocidad media?
- De acuerdo a las dos tablas anteriores ¿hay algún límite involucrado? ¿Puedes expresarlo en términos de límite?





II. Análisis del contenido matemático.

A continuación, se procede al análisis de cada una de las partes de esta propuesta, integrando el análisis de la perspectiva matemática y curricular.

- **Sobre la medición del cambio**

La Actividad 1, presentada en la Figura X explora la medición del cambio por medio de conceptos como la velocidad promedio y pendiente de la recta. En este sentido, podría

determinarse que la actividad está enmarcada en un contexto de la vida diaria usando modelos matemáticos para su análisis e interpretación.

Aunque los autores no dejan explícitos los objetivos de cada actividad, se puede decir que uno de los propósitos es que los estudiantes interpreten gráficamente el comportamiento del movimiento analizando los cambios en diferentes intervalos de tiempo. También, que relacionen el concepto de pendiente con el concepto de velocidad promedio. Para cumplir dichos objetivos, los autores proponen un par de consignas y algunas preguntas de reflexión.

En primer lugar, se aborda en el análisis la identificación de los elementos matemáticos que se encuentran en la actividad. La primera consigna es la descripción del cambio en el movimiento del automóvil. Sin embargo, este proceso supone una fase previa que no se aborda de manera explícita: la identificación del cambio en el movimiento. Este es un paso fundamental, ya que facilita el análisis posterior y guía a los estudiantes hacia una interpretación más clara del comportamiento del automóvil.

Esta descripción del cambio supone también que en el análisis gráfico se asocie la inclinación de la recta como un valor cualitativo que indica la mayor o menor rapidez del automóvil en cuestión. Además, las preguntas sobre los intervalos donde el vehículo va más rápido o más lento introducen de forma explícita el concepto de rapidez y, de manera implícita, nociones como la velocidad promedio y la relación entre la pendiente de la recta y la velocidad promedio en cada tramo.

Las preguntas g, h, i y j se centran en el concepto de velocidad, abarcando tanto la velocidad promedio como la velocidad instantánea, además de explorar la magnitud y el carácter vectorial de la velocidad. Por ejemplo, en la pregunta g, se cuestiona si una gráfica de distancia versus tiempo podría ser representada por una recta vertical. Una respuesta correcta a esta pregunta requeriría que el estudiante comprenda que una recta vertical implicaría una velocidad infinita, lo cual no es físicamente posible, ya que significaría que el automóvil recorrería cualquier distancia en un instante de tiempo.

Desde una perspectiva matemática, esta interpretación también depende de que el estudiante comprenda que la pendiente de la gráfica distancia-tiempo representa la velocidad del automóvil. Por tanto, abordar esta pregunta requiere no solo conocimientos sobre la física del movimiento, sino también una comprensión sólida de las propiedades matemáticas de la pendiente como medida de la tasa de cambio.

En segundo lugar, se pretende identificar o clasificación de las consignas y preguntas dadas en la actividad 1 de acuerdo con los procesos más usado para el desarrollo de los propósitos de la actividad. Las preguntas a, e, y f caben dentro del proceso de comunicación dado que se busca que el estudiante haga una interpretación y descripción de sus observaciones. Mientras que las preguntas b, c, d, g, h e i están enmarcadas en el proceso de razonamiento, esto porque aquí se busca que el estudiante haga un análisis y justificación de conceptos matemáticos como la rapidez.

La clasificación de las preguntas según los procesos de comunicación y razonamiento se conecta estrechamente con las acciones cognitivas necesarias para responderlas. En particular, responder a las preguntas no solo implica interpretar o justificar información, sino también realizar un proceso de conversión y tratamiento, según el modelo de Duval (2006). Por un lado, los estudiantes deben traducir la información del registro gráfico al registro simbólico (por ejemplo, identificar puntos específicos en la gráfica y calcular la pendiente de un tramo).

Por otro lado, deben realizar tratamientos simbólicos al analizar las diferencias entre las coordenadas de los puntos extremos de cada tramo y calcular el cociente correspondiente para determinar la rapidez del automóvil en cada intervalo.

La situación descrita también implica una interpretación gráfica: los estudiantes deben identificar visualmente el tramo con mayor pendiente, realizar los cálculos correspondientes y luego comparar las magnitudes obtenidas para determinar en qué tramo el automóvil fue más rápido.

En tercer lugar, hay que resaltar que ciertos aspectos no se abordan de manera explícita o quedan fuera del alcance de la actividad: Velocidad promedio global: La actividad se centra en intervalos específicos, pero no aborda el cálculo de la velocidad promedio considerando todo el recorrido. Diferencia entre rapidez y velocidad: Aunque se sugiere implícitamente, no se profundiza en la distinción entre ambos conceptos, lo cual es crucial para entender la naturaleza vectorial de la velocidad. Formalización del concepto de velocidad promedio: La actividad no define explícitamente la velocidad promedio ni orienta al estudiante sobre cómo realizar la conversión completa entre el registro gráfico y el registro simbólico.

En general, la Actividad 1 aborda adecuadamente aspectos clave relacionados con la velocidad promedio y su representación gráfica. Sin embargo, no desarrolla de forma exhaustiva otros elementos fundamentales, como la interpretación global de la velocidad promedio, la distinción entre rapidez y velocidad, y una formalización más clara del concepto de velocidad promedio. Para reforzar el aprendizaje, sería recomendable incluir preguntas o ejercicios adicionales que ayuden a los estudiantes a integrar todos estos elementos, de modo que logren una comprensión completa tanto del concepto de velocidad promedio como de su relación con los registros gráfico y simbólico.

- **Sobre las diferencias y la velocidad promedio.**

La actividad 2, presentada en la figura U, explora la idea de velocidad promedio haciendo alusión a otros conceptos como tasa de cambio y razón de cambio. Para esto se presenta una gráfica de una función lineal cuyas dimensiones son tiempo y distancia y a la vez representa el movimiento de un automóvil.

Un posible propósito de la actividad es desarrollar en los estudiantes la capacidad de interpretar y analizar relaciones funcionales entre variables (como tiempo y distancia) a partir de tablas y gráficas, promoviendo la construcción de conceptos relacionados con la velocidad promedio y el cambio en el movimiento.

Primero, respecto a la identificación de los elementos matemáticos de la actividad, se aborda la primera consigna. En esta consigna se pide registrar en una tabla los diferenciales del tiempo en ciertos intervalos algunos de tiempo. En la segunda columna de la tabla se registra el diferencial de “s” lo que sería el cambio del cambio en el tiempo y en la última columna el cociente entre los valores de estas últimas dos columnas. Este proceso sería la representación simbólica de los valores que determinan la razón de cambio para una función lineal.

Por un lado, para responder a la pregunta a las preguntas dadas, el estudiante debe reconocer patrones en los datos registrados. Esto implica comprender el concepto de razón de cambio constante en una función lineal y cómo se refleja en la relación entre los valores de Δt , Δs y $\Delta s/\Delta t$. Matemáticamente, el estudiante debe identificar que, en una función lineal, la tasa de cambio (pendiente) es constante, independientemente de los intervalos seleccionados.

Por otro lado, para la pregunta e, el estudiante debe comparar el movimiento representado en la función lineal con el de la actividad anterior, probablemente una función no lineal. Esto implica identificar diferencias clave: en la función lineal, la velocidad es constante (movimiento uniforme), mientras que, en la función no lineal, la velocidad cambia con el tiempo (movimiento acelerado o desacelerado). Matemáticamente, esto requiere que el estudiante interprete la pendiente de la gráfica y cómo cambia (o no) a lo largo del tiempo.

En segundo lugar, de acuerdo con lo anterior se puede decir que las pregunta a hace alusión al proceso de comunicación ya que en esta se requiere un nivel de interpretación y descripción de lo observado en la gráfica y el reconocimiento del patrón de los datos de la tabla. Las preguntas b y e, hacen alusión al proceso de razonamiento. Mientras que, las preguntas c y d hacen alusión al proceso de resolución de problemas ya que implican la aplicación de conocimientos, cálculo de resultados basados en datos y resolver la situación planteada.

En general, en la actividad hay una coherencia en cuanto al uso de las diferentes representaciones como las gráficas y la tabular y que además se sigue gestando la idea de variación empleando el mismo tipo de problema sobre el movimiento del móvil, el uso de este

problema permite modelar el fenómeno ofreciendo características importantes sobre su comportamiento futuro a la par que permite introducir dócilmente la idea de velocidad, más específicamente velocidad promedio.

- **Sobre el cociente de diferencias pequeñas y la velocidad instantánea.**

La actividad 3, presentada en la figura O, aborda una situación de caída libre, en la que una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba, y se muestra una representación gráfica de este movimiento, que está modelado por una función cuadrática $y=2x^2+8x+2$. En este contexto, el comportamiento del movimiento es representado mediante una parábola, ya que la aceleración debida a la gravedad actúa de forma constante, y el movimiento de la piedra sigue una trayectoria no lineal.

Entre los objetivos que se pueden identificar en esta actividad está la identificación de patrones de acuerdo con información suministrada en tablas, y de la comparación entre movimientos (el movimiento de la actividad 1 lineal y este, parabólico).

La primera consigna es completar una tabla con columnas Δt , Δs y $\Delta s/\Delta t$, esta vez con intervalos de diferencia de 0.5 unidades de tiempo, partiendo de $t=0$ hasta $t=4$. Esto permite al estudiante calcular los valores de Δt (la variación en el tiempo), Δs (la variación en la distancia recorrida) y el cociente $\Delta s/\Delta t$, que se asocia con el concepto de velocidad promedio en los distintos intervalos de tiempo. Este proceso está relacionado con la razón de cambio de la distancia en relación al tiempo en el contexto de una función cuadrática. La razón de cambio no será constante, ya que el movimiento no es uniforme.

Sobre la pregunta a, Se pide identificar si hay o no un patrón en los datos registrados en la tabla. Esta pregunta está orientada a que el estudiante analice cómo cambia la velocidad promedio a medida que transcurren los intervalos de tiempo, lo cual está relacionado con la tasa de variación de la distancia. Dado que la función es cuadrática, la razón de cambio no será constante, lo que significa que la velocidad promedio variará entre los distintos intervalos. La identificación de un patrón en este caso ayuda a los estudiantes a reconocer cómo el movimiento

de la piedra es acelerado, es decir, que la velocidad aumenta conforme pasa el tiempo. Este ejercicio está relacionado con la comprensión de cómo la tasa de cambio cambia en funciones no lineales. Mientras que en la pregunta b los estudiantes deben interpretar cómo la pendiente de la gráfica varía a medida que el tiempo avanza. Esta pendiente representa la velocidad instantánea, ya que, en un contexto continuo, la derivada de la función $y(t)$ (la velocidad instantánea) se asocia a la tasa de cambio en un punto específico. Esta pregunta está diseñada para que los estudiantes visualicen que la pendiente de la función cuadrática cambia en cada instante, lo que refleja una aceleración constante en el movimiento.

A continuación, en la pregunta c se puede observar cómo la variación de la velocidad promedio en diferentes intervalos es mayor o menor dependiendo de la forma de la gráfica. Al reducir los intervalos, los estudiantes se aproximan al concepto de velocidad instantánea. En términos matemáticos, esto implica que, al tomar intervalos infinitesimales, la razón de cambio se aproxima a la derivada de la función en ese punto. Los estudiantes deben reconocer que, en un contexto no lineal, la tasa de cambio varía a lo largo de los intervalos, lo que lleva al concepto de derivada como la velocidad en un momento específico.

En la pregunta d se solicita comparar las velocidades en los diferentes tramos del movimiento (ascendente y descendente). Este análisis está relacionado con la simetría de la función cuadrática y cómo la pendiente cambia de manera uniforme en cada tramo. Los estudiantes deben identificar que la aceleración es constante a lo largo de toda la trayectoria, lo que implica una variación lineal en la velocidad instantánea. Matemáticamente, esto se puede observar a través de la forma de la parábola y el análisis de la pendiente en los diferentes tramos.

En la pregunta e esta pregunta lleva a los estudiantes a considerar la relación entre velocidad y aceleración en el contexto de la caída libre. Al analizar la velocidad en función del tiempo, los estudiantes deben ser capaces de identificar que la aceleración es constante (en función de la gravedad), y esto se refleja en la variación de la pendiente de la gráfica a medida

que el objeto cae. Matemáticamente, esto implica que la derivada de la velocidad será constante, lo que se asocia a una aceleración constante.

Finalmente, se puede establecer que las preguntas a y d corresponden al proceso general de razonar dado que en el caso de la pregunta a, implica la identificación y análisis de patrones y la pregunta d implica un análisis y comparación de movimientos. La pregunta b está orientada por otro lado a la ejercitación, comparación y elaboración de procedimientos ya que requiere aplicar un cálculo directo para la verificación de una relación entre datos.

- **Sobre la velocidad instantánea y la posición límite de las cuerdas secantes.**

En la actividad 4 presentada en la figura B, a diferencia de las anteriores actividades se da en un contexto netamente matemático. Aquí se incluyen dos registros tabulares similares a los anteriores, pero en este caso, dado que en el contexto no queda explícito que se hable de un movimiento en particular, la fila de t_0 tiene un valor fijo de 1 para todas las columnas y t_1 toma valores que van desde 2 hasta 1.04, lo que implica que los intervalos para calcular Δt se vuelven progresivamente más pequeños.

Según la anterior descripción y el hecho de que la primera consigna es llenar la tabla, es decir hallar los valores de Δt , Δs , y el cociente de estos, se puede decir que, realizar el proceso de completar la tabla puede considerarse como una introducción implícita al concepto de límite. Las preguntas a, b y c buscan explicitar esta idea, aunque no se presenta la definición formal de límite.

En cuanto a la segunda tabla, se propone completar los valores de las columnas ** para la función $y=t^3$, y en este caso, los valores de t_1 pueden ser seleccionados libremente. Se plantea la pregunta sobre lo que ocurre con la velocidad media y si existe algún límite involucrado. Si el propósito de la actividad es abordar la idea de la derivada de una función como la razón de cambio en un valor límite o infinitesimalmente pequeño, la actividad no cubre de manera integral estos conceptos. Aunque se establecen ciertos patrones de comportamiento relacionados con la aproximación de la recta secante a la curva y su eventual convergencia a la

tangente, este proceso se limita al ámbito visual, sin llevarlo al registro simbólico. Esto impide explorar adecuadamente las propiedades del límite, como su linealidad, las operaciones que se pueden realizar con él, y, lo más importante, la relación directa entre el límite y la derivada de una función. La derivada, como herramienta fundamental, caracteriza de manera general el cambio de una función.

Finalmente, como es claro, llevar a cabo la consigna de llenar las tablas para luego analizar estos patrones, hace referencia primeramente a un proceso de ejercitación. La consigna b, describir el análisis de la recta y curva cuando t_1 se acerca a t_0 implica tanto un proceso de razonamiento como un proceso de comunicación, esto en cuanto al proceso mismo de describir. Las preguntas c, d y e también hacen alusión al proceso de razonamiento sin embargo en la pregunta e también hay un proceso de modelación pues expresar ciertas observaciones en términos de límite, implica la creación de esa expresión metamatemática.

III. Análisis Didáctico

En la propuesta se pueden identificar diversas dificultades relacionadas con el proceso general de razonamiento y con la comprensión de objetos matemáticos como las funciones, el límite y los números reales. En primer lugar, se observa que los estudiantes pueden enfrentar problemas al interpretar la gráfica como una representación del camino recorrido en lugar de una función que describe la posición en el tiempo. Esta dificultad impide la comprensión de la velocidad como razón de cambio y de la pendiente como indicador de rapidez. Asimismo, la actividad exige que los estudiantes transiten de un razonamiento basado en valores puntuales a uno que involucre relaciones funcionales y tasas de variación, lo que puede representar un reto en términos de pensamiento algebraico-funcional.

En la propuesta se le da tratamiento a estas dificultades a través del análisis gráfico y de preguntas orientadas a la comparación de velocidades en distintos intervalos. Esto permite que los estudiantes no solo calculen diferencias de posición, sino que también interpreten el significado de la pendiente en contextos específicos. Al pedirles que determinen en qué tramo el

automóvil es más rápido o más lento, la actividad promueve el paso de un pensamiento procedimental, basado en la simple aplicación de fórmulas, a un pensamiento conceptual, donde la velocidad es entendida como una magnitud que varía según el contexto. Además, se fomenta una transición del razonamiento estático al dinámico, ya que se espera que los estudiantes comprendan que la velocidad no es una cantidad fija, sino una razón de cambio dependiente del intervalo analizado.

Sin embargo, la propuesta no alude explícitamente a dificultades relacionadas con la comprensión formal del concepto de límite ni con la idea de velocidad instantánea como un caso límite de la razón de cambio promedio. Aunque se trabaja el concepto de pendiente en términos de intervalos, no se profundiza en la idea de tendencia de la razón de cambio cuando el intervalo se reduce a un punto. Tampoco se aborda de manera directa la noción de continuidad y la existencia de valores intermedios entre dos posiciones, lo que podría dificultar la construcción de una visión más robusta sobre los números reales en el contexto del análisis matemático.

IV. Algunas consideraciones

Dado que la propuesta analizada se presenta como una adaptación de otra previamente existente, se esperaba identificar elementos significativos en cuanto a los aspectos que se mantuvieron originales, aquellos que fueron modificados y las estrategias empleadas para lograr dicha adaptación. Considerando que el diseño de la propuesta se realizó teniendo en cuenta las características de la población estudiantil, se anticipaba que la adaptación reflejara el contexto específico de los estudiantes, como aspectos relacionados con su realidad socioeconómica, las actividades comerciales más comunes en su entorno o elementos propios de su contexto cultural. Sin embargo, el análisis permitió evidenciar que la adaptación se limitó únicamente a modificar los nombres de los lugares en las situaciones planteadas, específicamente en el contexto del movimiento de un automóvil. Si bien este enfoque no puede considerarse

incorrecto, no cumplió con la expectativa de incorporar elementos contextuales más profundos que pudieran enriquecer la propuesta.

El análisis de las actividades permitió identificar que los procesos matemáticos predominantes fueron el razonamiento y, en menor medida, la modelación. Sin embargo, se observó una ausencia de consignas orientadas de manera explícita a fomentar el proceso de modelación. De acuerdo con los lineamientos curriculares, esta situación podría tener implicaciones importantes, ya que dichos lineamientos subrayan la importancia de promover todos los procesos matemáticos de manera equilibrada. Esto se debe a que cada proceso contribuye de manera única al desarrollo del pensamiento variacional, por lo que una implementación que no integre de forma adecuada todos los procesos podría limitar el alcance y los objetivos formativos de la propuesta.

3.4. Elementos para la Construcción Curricular de la Derivada a partir del Análisis de las Propuestas.

A continuación, se presentan las secciones 3.4.1 y 3.4.2 las cuales corresponden a la síntesis de los resultados obtenidos en los análisis y a la presentación de los elementos comunes encontrados en las propuestas de enseñanza que serán considerados como ejes direccionales de nuevas propuestas de enseñanza y refinamiento del currículo de matemáticas actual.

3.4.1. Resultados de Análisis

El análisis de las cuatro propuestas de enseñanza y aprendizaje de la derivada, realizado previamente, ha permitido identificar aspectos fundamentales que pueden considerarse para el refinamiento o ajuste de nuestro currículo actual de matemáticas de tal manera que este sea más consciente en la construcción de objetos matemáticos fundamentales en el desarrollo del pensamiento variacional como lo es la derivada. En esta sección se presentan los elementos

destacados de cada propuesta, con el objetivo de sintetizar los hallazgos y proponer aspectos clave que contribuyan al desarrollo del pensamiento desde un enfoque variacional.

Para tales fines, se opta por presentar un cuadro comparativo en donde toman en cuenta seis categorías de comparación: Intencionalidad, Núcleo Conceptual de la Propuesta, Enfoque Matemático, Significados Consolidados, Elementos Matemático-Curriculares y Elementos Didácticos.

La primera categoría propuesta es *Intencionalidad*. En esta categoría se pretende explicitar el propósito generar de cada propuesta analizada. Aquí, se incluyen aspectos como los objetivos que busca alcanzar, los problemas o desafíos desde los que se posicionan los autores para la proposición de sus propuestas. La segunda categoría es *Núcleo Conceptual* de la Propuesta, aquí se identifican las ideas centrales sobre las cuales se estructura la propuesta. La tercera categoría es, *Enfoque Matemático*, esta se centra en cómo la propuesta organiza y desarrolla los contenidos matemáticos relacionados con la derivada. Es decir, si tal organización está centrada desde los fenómenos lo que podría llamarse un enfoque fenomenológico, o si está dada desde una perspectiva geométrica es decir las actividades se conectan en tanto que usan más este registro de representación, también se considera si la propuesta incluye una mirada histórica, o una perspectiva más formal.

La cuarta categoría es *Significados Consolidados*, esta categoría se refiere a qué tan lejos llega la propuesta en la consolidación del concepto de derivada. Si abarca aspectos como razón de cambio, pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, la función derivada como herramienta para medir el cambio de una función, métodos para hallar derivadas, propiedades de funciones y sus derivadas, modelización de situaciones de variación e interpretación de resultados y ejemplos de aplicación.

La quinta categoría es, Elementos Matemático-Curriculares, en esta categoría se analizan los aspectos del diseño curricular en cada propuesta. Incluye la alineación con los estándares y lineamientos curriculares, la relación entre los conceptos matemáticos propuestos, los procesos

generales que se evidencian en las propuestas y los contextos que permiten articular el aprendizaje con los conocimientos básicos en torno al pensamiento variacional.

Por último, está la categoría de *Elementos Didácticos*, aquí se toman en cuenta los direccionamientos didácticos que se pueden evidenciar en las propuestas y que buscan, de una manera u otra, eludir algunos de los obstáculos epistemológicos más recurrentes relacionados a los objetos matemáticos que se involucran en un estudio general de derivadas.

Estas categorías permiten no solo resaltar los aspectos particulares de cada propuesta sino también delinear posibles recomendaciones para la articulación curricular. Estos se condensan en la tabla X. Posteriormente, se presenta más a detalle aquellos elementos diferenciales en cada propuesta.

Tabla 9

Comparación de los elementos constitutivos de las propuestas

Criterio / Propuesta	Variación de una función: Hacia la Derivada	La Variación y la Derivada	Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto Derivada en el Último Grado de Educación Secundaria	Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio
Intencionalidad	La propuesta de Azcarate se enmarca en el estudio general de funciones en su libro <i>Funciones y gráficas</i> , es por esto por lo que su interés es el de desarrollar todo el estudio relativo a la función como objeto matemático. Dentro de este estudio funcional, aparece la derivada como un tipo especial de función que caracteriza la variación en todo su dominio cuando la función es continua de variable real. Además, la propuesta tiene por objetivo ofrecer a los profesores una reflexión sobre el contenido matemático del objeto de función, así como su desarrollo histórico.	La intención del profesor Dolores es proporcionar elementos didácticos que ayuden tanto al estudiante como al profesor en la comprensión de la derivada. Siguiendo esta idea, el profesor parte de un enfoque de covariación y del estudio de situaciones elementales de variación con el objetivo de construir ideas intuitivas acerca de la derivada tomando la variación como eje fundamental.	Pineda identifica que uno de los factores que impiden la plena comprensión de la derivada es la falta de comprensión de los estudiantes hacia los prerrequisitos conceptuales de esta. Por tanto, construye una propuesta didáctica constituida por una secuencia de actividades en donde identifica los principales temas necesarios para la comprensión de la derivada integrándolos de forma intuitiva.	La propuesta intenta, a través de una adaptación de un instrumento teórico, explorar diversos escenarios de variación para que el estudiante pueda caracterizar variaciones entre las magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio. Favoreciendo el desarrollo de procesos cognitivos como la argumentación y la visualización.
Núcleo Conceptual de la	Estudio general de funciones	Estudio covariacional de las situaciones elementales de variación	Estudio de los prerrequisitos conceptuales que anteceden al concepto derivada	Exploración de escenarios de variación y relación entre razón de cambio y pendiente de la curva
Enfoque Matemático	El enfoque matemático se centra en lo histórico y fenomenológico a través de la introducción del concepto de derivada sin la introducción formal del concepto de límite.	El enfoque matemático de esta propuesta es principalmente fenomenológico en tanto que prioriza el estudio de fenómeno físicos como la caída libre, a través de la construcción del concepto derivada devalando su naturaleza	El enfoque de esta propuesta es histórico y fenomenológico principalmente, a través de la construcción sólida de elementos tales como función, gráficas, relación entre variables, razones de cambio y velocidades;	Enfoque grafico-geométrico centrado en la interpretación de gráficos y tablas para la construcción de la noción de variación y cambio, exhibiendo la relación entre razón de

		variacional, a partir del estudio de situaciones que involucran la variación como eje rector.	elementos necesarios para la consolidación del concepto de función.	cambio y pendiente de la curva.
Significados Consolidados	La propuesta de Azcarate logra consolidar la derivada como pendiente de la recta tangente a un punto de la curva, esto lo hace coordinando la idea intuitiva de límite junto con la interpretación histórica de las cuerdas secantes en intervalos de medición. Así, la derivada es la posición límite de las cuerdas secantes cuando el intervalo de variación tiende a ser infinitamente pequeño. Otro significado que adquiere la derivada en la propuesta es el de la derivada como una tasa instantánea de variación o razón de cambio instantánea que mide la velocidad de variación de una variable respecto a la otra en intervalos de tiempo muy pequeños. Finalmente, la derivada adquiere un significado funcional en tanto que ella misma es una función que caracteriza la variación de la función original en todo su dominio.	La propuesta de Dolores logra consolidar la derivada como la herramienta que permite la medición del cambio de una función en tanto que determina la pendiente de la función en un punto por medio de la relación entre las representaciones simbólica y gráfica entre la derivada de la función y la función. Además, Dolores expone, de manera precisa, la relación de la interpretación de la función derivada con la tasa de cambio de una función en intervalos de la función independiente, denotando que el cambio de una variable depende del cambio de otra. Y también la derivada como límite del cociente incremental.	La propuesta de Pineda logra consolidar la derivada como razón de cambio entre variables a través del estudio de las relaciones entre las variables, su dependencia y cómo cambia la gráfica de la función. Además, el uso de la velocidad junto con el software GeoGebra permite identificar, intuitivamente, la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.	Los significados alcanzados por la propuesta interpretan la derivada en términos de razón de cambio instantánea, así como su interpretación geométrica como el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva. Las situaciones de variación abordadas permiten interpretar la derivada como la velocidad instantánea ya que se abordan situaciones de cálculo de velocidades de automóviles.
Elementos Matemático-Curricular	Utiliza modelación, planteamiento y resolución de problemas en situaciones de variación enmarcadas en el estudio general de funciones. Estos procesos se articulan con situaciones de la vida diaria y de las ciencias que permiten estudiar las regularidades y patrones de variación en	La modelación y el razonamiento son los procesos generales más comunes encontrados en esta propuesta que articula nociones del cálculo diferencial tales como razón de cambio, tasa de variación, velocidad instantánea, pendiente de	Los procesos de modelación, razonamiento y comunicación se articulan en las actividades de manera que permiten que el estudiante identifique conceptos clave en el desarrollo de la derivada como lo son la dependencia e independencia de las	Utiliza modelación en tanto que hace uso de herramientas que permiten modelar situaciones y analizar propiedades de la mano de la geometría dinámica en escenarios de variación. El

el comportamiento de los fenómenos a lo largo del tiempo.	la recta, cálculo de derivadas, y optimización; junto con fenómenos físicos que aluden a contextos de las ciencias como lo es la caída libre de los cuerpos, el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento uniformemente acelerado.	variables, la relación entre las variables, sus graficas, el valor de la pendiente de la recta tangente, la velocidad media e instantánea, así como su conexión con las tasas de cambio promedio e instantáneas. Los contextos usados aluden a situaciones de la vida diaria y de las ciencias como el cálculo de velocidades y el crecimiento de poblaciones.	razonamiento permite identificar e interpretar los patrones de variación de los fenómenos usados como la caída libre de los cuerpos y el cálculo de velocidades de móviles que describen un movimiento rectilíneo uniforme.
Elementos Didácticos La introducción de la derivada sin la definición formal de límite elude los principales obstáculos epistemológicos relacionados a este último concepto. Además, el uso de diferentes registros permite que el estudiante interprete intuitivamente el significado de los incrementos infinitamente pequeños y eluda los obstáculos ligados a la disrupción del pensamiento algebraico.	La utilización de las situaciones de variación introduce de manera intuitiva el concepto de límite, esto permite también eludir los obstáculos epistemológicos relacionados al concepto. El uso de situaciones cercanas al estudiante como fenómenos de la vida real permite también entender las relaciones entre las variables, así como el comportamiento y sentido del fenómeno, eludiendo los obstáculos relacionados a la disrupción del pensamiento algebraico y el cálculo.	El foco de atención en los prerrequisitos conceptuales que dan paso al concepto de derivada atiende directamente los obstáculos epistemológicos ligados a los objetos fundamentales del cálculo.	La exploración y análisis de los escenarios de variación permiten articular las construcciones geométricas de la derivada junto con las numéricas, el enfoque gráfico – geométrico permite eludir obstáculos ligados al límite.

De la tabla presentada anteriormente, es posible identificar unos aspectos diferenciales de las propuestas de enseñanza seleccionadas para esta revisión documental y que, respetando la intencionalidad con la que fueron desarrolladas en un primer momento por los autores, pueden considerarse como los aspectos esenciales a destacar de cada una de ellas.

El enfoque de la propuesta de **Carmen Azcarate** *Variación de una función: Hacia el Estudio de las Derivadas* es el estudio general de las funciones, dentro de ese estudio se enmarca el estudio de la variación de una función. Así, surge el interés de estudiar la variación como una característica propia de las funciones, lo cual delimita las situaciones presentadas a aquellas susceptibles de ser modeladas a través de funciones. Aquí se logran consolidar los siguientes aspectos fundamentales de la derivada: la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva a través de la consolidación de la recta secante límite que mejor se “acopla” a una curva en un punto; la derivada como el límite de las tasas de cambio medias cuando el intervalo de interés es infinitamente pequeño; la derivada como una función en sí misma que guarde estrecha relación con la función original y que, además, se obtiene de la función original a partir de un tratamiento algebraico; la derivada como herramienta máxima representativa de medición de variación de funciones.

En la propuesta del profesor **Crisólogo Dolores Flores** *La variación y la Derivada*, el enfoque es a través del estudio de las situaciones elementales de variación que encontramos en los diferentes contextos de la vida diaria pero también aquellos contextos netamente matemáticos, es justamente desde los elementos propios de las situaciones elementales de variación como lo es el cambio, la magnitud, las variables y la correlación de variables que se empieza a construir una teoría general sobre la medición y la caracterización del cambio y por ende de la derivada. Aquí también se consolida la derivada como la recta tangente a la curva; como el límite de la tasa de cambio promedio, como cociente de diferenciales y, finalmente, como función en sí misma que caracteriza los cambios de la función en todo punto.

En la propuesta del profesor **Carlos Pineda** *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria*, el núcleo es el estudio de los prerrequisitos conceptuales previos al estudio de la derivada, por tanto, su aspecto a destacar es el de maximizar los conocimientos sobre función, variables, dependencia de variables, gráficas de funciones, función lineal y afín y razones de cambio. Aquí no se logra consolidar de manera fuerte que la derivada es una función en sí misma y no se hace explícita la consolidación de la derivada como la tasa de cambio instantánea que surge de la tasa de cambio límite de los intervalos en que se mide la variación, sin embargo, las nociones preliminares sobre rectas secantes potencian parcialmente la consolidación de la interpretación geométrica de la derivada.

Finalmente, la propuesta **de Jhon Gómez y Cesar Gómez** no logra consolidar muy bien la interpretación de la derivada como una función nueva que depende de la función original. Sin embargo, creemos que el potencial de esta propuesta se encuentra en los escenarios de variación propuestos ya que articulan fenómenos físicos cercanos al estudiante junto con una pequeña adaptación contextualizada, esto podría influir en el interés de los estudiantes por las situaciones a la vez que se exhibe la conexión entre la razón de cambio y la pendiente de la curva.

3.4.2. Elementos de Direccionamiento Curricular

Una vez presentado lo anterior, y a la luz de los análisis realizados en la sección 3.3 es posible identificar los elementos comunes a las propuestas y que, en consideración de este trabajo investigativo, son aquellos elementos fundamentales que toda propuesta acerca de la enseñanza de la derivada debe aludir explícita o implícitamente:

- Contextos: Tal y como se afirma en los lineamientos, los contextos deben ser cercanos al estudiante y pertenecer a situaciones de la vida diaria o situaciones matemáticas. Tal y como se observa en la propuesta de Azcarate, Dolores y Pineda, la caída libre es un

fenómeno físico de la vida diaria que, además de representar una situación de variación ideal, es un fenómeno que es cercano al estudiante. De estas situaciones de variación se pueden diseñar problemas adaptados al ambiente escolar o el entorno comunitario en donde se lleve a cabo la clase. En la propuesta de Jhon Gómez y Cesar Gómez podemos notar cómo la adaptación que se realiza sobre los problemas involucra ciudades o corregimientos conocidos por la comunidad, esta adaptación podría parecer en un principio trivial, sin embargo, no se debe subestimar el impacto que esto podría suponer en la motivación de los estudiantes pues caracterizar la situación, en últimas, se traduce a caracterizar “viajes diarios o comunes” que ellos mismos realizan en su rutina.

- **Fenómenos:** Referente a los fenómenos que dan lugar a las situaciones problema, ya hemos dicho que deberían usarse situaciones cercanas al contexto del estudiante, pero esto no es suficiente para garantizar que las situaciones puedan generar escenarios de variación susceptibles de ser estudiados, analizados y comprendidos. Es por esto por lo que se ha identificado, en todas las propuestas, que los fenómenos de variación en donde el tiempo funciona como una de sus variables dan lugar a un buen tipo de situaciones. Estas situaciones, según la propuesta de Crisólogo, pueden considerarse como un tipo de situaciones elementales de variación, ellas permiten que se pueda identificar fácilmente la variable independiente (el tiempo) y la variable dependiente, además, permiten identificar cómo el comportamiento del fenómeno cambia con el tiempo y es susceptible de ser medido, analizado, interpretado y modelado.
- **Procesos:** Sobre los procesos, es evidente que desde nuestro currículo Nacional se ha propuesto un modelo que integra todos los procesos, los conocimientos básicos y los contextos en el desarrollo del pensamiento matemático. Todos los procesos son importantes desde una mirada curricular, sin embargo, en el análisis de las propuestas se ha identificado que hay dos procesos que usualmente se priorizan y son la modelación y el razonamiento. El razonamiento es el proceso que permite, fundamentalmente,

estudiar las situaciones de variación e interpretar los cambios que se producen, por otro lado, la modelación es el proceso que se usa al construir un modelo matemático que permite identificar patrones y hacer predicciones sobre los fenómenos de variación; razonar para entender el fenómeno y modelar para predecir su comportamiento son, esencialmente, los procesos que permiten consolidar la naturaleza variacional presente en el estudio de la derivada.

En menor medida, pero de igual importancia, aparece la formulación y resolución de problemas en tanto que permite la manipulación de los escenarios con el fin de obtener resultados; la comunicación pues aquí es posible identificar el pensamiento matemático del estudiante en las actividades, cuando el estudiante justifica sus respuestas es posible identificar la idea de variación y las conjeturas que se hace sobre el fenómeno; la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos es útil sobre todo en los ejercicios que buscan reforzar los significados que el estudiante hizo sobre la función derivada, por ejemplo, aquellos relacionados a los problemas de optimización.

- Núcleos conceptuales previos: Del análisis de las propuestas, uno de los elementos más importantes a resaltar son los núcleos matemáticos pertenecientes a los saberes previos del estudiante. Estos núcleos ya son mencionados por el currículo en los EBC, sin embargo, se identificaron núcleos específicos para el desarrollo del concepto derivada.

Los núcleos identificados corresponden a las variables, es necesario que los estudiantes conozcan qué es una variable y cómo se relacionan en un fenómeno; independencia, es importante que se reconozca en toda situación de variación cuál es la variable independiente; función, el estudiante debe comprender que, de todos los tipos de relación entre variables, la función es la relación más especial pues permite no solo cuantificar el cambio sino analizar su comportamiento; gráficas y tablas, la cuantificación del cambio es el punto de partida del estudio de la variación, por tanto, es

importante que los estudiantes ya estén familiarizados con la construcción de tablas y gráficas relacionadas a funciones.

- Sobre el Concepto de Función: En la construcción del concepto de función derivada es fundamental abordar [con anterioridad] Conceptos Básicos de Funciones incluyendo aspectos como la definición, el dominio y rango, los tipos de funciones y sus múltiples representaciones (Verbales, Tabulares, Simbólicas y Gráficas).

En relación con la definición de una función, es crucial introducir este concepto usando contextos significativos y cercanos en donde se puedan representar relaciones de dependencia para la identificación de las variables dependientes e independientes.

También es importante que, dentro de la situación en cuestión, el estudiante pueda analizar los datos de cada registro de forma que estos mismos se puedan representar en otros registros. En este sentido, algunos fenómenos pueden ser, el costo de la energía en función del consumo, estatura de estudiantes en función de la edad, decrecimiento de una población en función del tiempo, velocidad de un motociclista en función del tiempo, y otros.

De manera similar, abordar el dominio y rango en contextos aplicados como, por ejemplo, determinar el precio y las ganancias en la venta de productos, puede ser útil para que los estudiantes entiendan como interpretar los valores de entrada y salida de la función conectando estos conceptos con el mundo real. Teniendo conocimientos sólidos sobre el dominio y rango, los estudiantes pueden identificar qué valores son válidos para la variable independiente. Del mismo modo, determinar el rango de una función determina el conjunto de valores válidos para la variable dependiente lo que es fundamental para la interpretación y análisis de problemas de producción y ventas, velocidades, crecimiento de población entre otros.

En cuanto a los tipos de funciones es importante promover la clasificación y comparación de estas mediante ejemplos prácticos, como modelar crecimientos

exponenciales o analizar fenómenos que sigan patrones lineales y cuadráticos. Este ejercicio no solo permite identificar las características de cada tipo de función, sino que también prepara a los estudiantes para comprender la relación estrecha entre una función y su derivada. Por ejemplo, considerar el costo de energía cuando ciertos electrodomésticos están conectados en un mismo intervalo de tiempo y con un costo fijo en comparación a la función que se puede determinar por el consumo energético de un calentador que tiene un pico de consumo al encenderse y luego se estabiliza.

- Sobre aspectos locales: De los aspectos locales se debe prestar especial atención al cálculo de tasas de variación promedio e instantáneas. Estos conceptos son clave en el desarrollo de la noción de derivada pues marcan la conexión que tiene las pendientes de las rectas secantes formadas en los intervalos de variación y la tasa o razón de cambio del fenómeno. Del análisis de las propuestas en la sección 3.3, se hace evidente que el uso de problemas propios de la física como el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado constituyen situaciones de variación y contextos que permiten explicitar las diferencias entre variación promedio e instantánea y la necesidad de desarrollar mecanismos cada vez más sofisticados para medir la variación en un punto. Con estos problemas de la física, la variación media e instantánea adquiere el sentido del cálculo de velocidades medias y velocidades instantáneas, estas situaciones develan la naturaleza de la conexión entre la razón de cambio y la pendiente de la recta tangente a la curva que describe la trayectoria de la partícula. La propuesta del profesor Dolores hace explícita esta conexión en las *secciones ¿cómo cambia la rapidez media?, los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea, interpretación geométrica de la velocidad instantánea y cálculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos*.
- Sobre aspectos globales: En los aspectos globales de la derivada encontramos los elementos que, constitutivamente, dan el significado y la interpretación global de

derivada. Primero, de la interpretación geométrica de la derivada tenemos que es la posición límite de las cuerdas secantes que miden la variación promedio, esto nos conduce a interpretar la derivada como la recta tangente usando la noción de límite. En las propuestas se manifiesta la preocupación por abordar el concepto de límite sin caer en los obstáculos epistemológicos que él supone, una buena forma de abordar este concepto de manera intuitiva es como se propone en la propuesta de Azcarate analizando situaciones en contextos numéricos y geométricos. Segundo, de la consolidación de la derivada como una función especial, se rescata lo relativo a sus usos y aplicaciones en la resolución de problemas, aquí los procesos de ejercitación de procedimientos y razonamiento se articulan de tal forma que el estudiante pueda entender las características del problema y desarrollar métodos para encontrar soluciones. Por último, lo relativo a las manipulaciones algebraicas para encontrar derivadas de funciones, en este punto la ejercitación de procedimientos es el proceso clave y los contextos matemáticos y de las otras ciencias son los que mejor parecen adaptarse tales como problemas de velocidad, caída libre, crecimiento de poblaciones, entre otros.

- **Linealidad:** Uno de los elementos más importantes, que se puede destacar del análisis de las propuestas, es la linealidad u orden común en el desarrollo de los contenidos del concepto derivada. En el análisis de los fenómenos de variación, uno de los primeros procesos es la identificación y medición del cambio. Este proceso implica analizar cómo cambia una cantidad respecto a otra y por esto se propone llevar a cabo este proceso por medio de la diferencia (resta) y el uso de los registros tabulares y gráficos, estos registros permiten la identificación rápida de los valores de la función y por ende la comparación de estos de forma visual. Una vez identificado y medido el cambio en diferentes intervalos de la variable independiente es posible establecer patrones de cambio lo que da cabida a establecer una tasa media de variación en un intervalo. Es decir, un número que represente el valor de variación de la función en ese intervalo, aquí también se

priorizan los registros gráficos y tabulares, por un lado, porque el registro tabular permite identificar el patrón de cambio cuando los intervalos son uniformes. Para estos casos de medición, los fenómenos o situaciones que los autores más usaron fueron basados en contextos de otras ciencias como la biología y economía. Por otro lado, desde el registro gráfico se puede considerar trazar una recta que conecte estos puntos considerados para la creación de la tasa media de variación, con lo que se obtiene una recta secante a la función.

Al trazar dicha secante se puede asociar el valor de la tasa media de variación con la pendiente de esta recta secante, al hacer esta asociación se evidencia que estos dos valores coinciden. En este punto los autores coinciden en que el fenómeno que permite ejemplificar con mayor claridad el concepto de tasa media de variación es el de la velocidad pues se puede estudiar la velocidad media de un cuerpo en cierta trayectoria. La representación como función de este fenómeno tiene por variables tiempo y posición, como aquí el tiempo es la variable independiente se considera que este fenómeno está dentro del contexto de vida diaria. Establecido que el valor de la tasa media de variación coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho intervalo, se puede establecer el concepto de recta tangente como la posición límite de las cuerdas secantes, es decir, aquella recta formada cuando un punto de la recta secante “tiende” al otro.

Aquí hay dos vertientes, por un lado, esa recta tangente tiene una pendiente y este valor representaría la tasa instantánea de variación en ese punto de tangencia a la función. Por otro lado, establecer esta recta tangente da paso al concepto de límite, aquí los autores coinciden en una aproximación al concepto de límite de forma intuitiva, es decir, no una presentación formal de este sino desde la idea de acercamiento, en este caso el acercamiento de los puntos de la secante a ser un punto de tangencia.

Desde la primera vertiente se puede considerar nuevamente el fenómeno de velocidad para el análisis de la velocidad instantánea de un cuerpo en un punto particular del trayecto, también crecimiento celular o el análisis de cambio de tendencias económicas. Desde la segunda vertiente se pueden considerar principalmente los registros tabular y algebraico. El registro algebraico permite la construcción de aquellos valores límite que se pueden registrar tubularmente para la identificación de ciertos patrones dentro de la función.

El paso del concepto de velocidad instantánea a número derivada, Ascarate y Dolores lo proponen como la introducción de una nueva nomenclatura, este número derivada pasa a corresponder con el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. Con esto, se puede explorar ahora el concepto de Función Derivada, como función que determina estos números derivadas, es decir, la función dice a cuanto equivale la variación de la función no solo en un punto sino en cualquier punto de la función. En este proceso se articulan los registros gráfico, algebraico y verbal, además, el contexto pasa a ser un contexto de las propias matemáticas. Finalmente, se exploran las aplicaciones de este concepto o herramienta que mide la variación en todos los contextos, matemático, de otras ciencias y de la vida diaria articulando a la vez en diferentes actividades los cinco procesos generales, así, se puede establecer los puntos máximos y mínimos de las funciones o el momento de inflexión de un cuerpo en movimiento, el valor máximo de crecimiento de una población, entre otros.

Capítulo 4: Conclusiones Generales Y Reflexiones Didácticas

En este capítulo, se presentan las conclusiones que se obtienen de los resultados presentados en la sección 3.4, estas conclusiones están directamente relacionadas con los objetivos, tanto general como específicos, que motivaron la ejecución de esta revisión documental, además, se incluyen algunas conclusiones curriculares que buscan explicitar los resultados y el alcance de los elementos curriculares encontrados que, a la luz de este trabajo documental, son un potencial punto de partida en la construcción y validación de nuevas propuestas de trabajo de enseñanza sobre la derivada.

4.1. Conclusiones Generales

Con relación con el primer objetivo específico de este trabajo, relacionado con la identificación y selección de algunas propuestas sobre la enseñanza de la derivada reportadas por la investigación se puede concluir que:

- La principal fuente de recursos o propuestas nacionales de enseñanza para la derivada en la escuela la constituyen los trabajos de pregrado, tesis de maestría y tesis de doctorado de los repositorios digitales de las universidades más importantes en el campo de la educación tales como: Repositorio Institucional UdeA (Universidad de Antioquia), Repositorio Institucional UNAL (Universidad Nacional de Colombia), Repositorio institucional UPTC (Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia), Repositorio Institucional UPN (Universidad Pedagógica Nacional), Biblioteca Digital (Universidad del Valle).
- En el panorama internacional, la principal fuente de propuestas la constituyen las publicaciones de libros de autores reconocidos y los artículos de revista publicados en revistas de gran reconocimiento como *la Educational Studies in Mathematics* y *Journal for Research in Mathematics Education*.

- Al realizar una búsqueda documental en los principales repositorios universitarios del país y algunas de las revistas más reconocidas en el campo de la educación matemática se obtiene una lista de 49 documentos que se pueden ver en el anexo B. Luego, usando los criterios descritos en la sección 3.1 se seleccionan 4 propuestas de enseñanza, 2 de carácter nacional y 2 de carácter internacional, que cumplieran a priori los requerimientos para la consecución de los objetivos de este trabajo. Así, cerca del 89% de los documentos encontrados son de origen nacional; los trabajos de pregrado fueron los de mayor incidencia pues cerca del 40% de los documentos son de este tipo.
- Las propuestas seleccionadas corresponden a 2 trabajos de pregrado y maestría de origen nacional “Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria” por Carlos Eduardo Pineda Ruiz, “Una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio” por Jhon Jairo Gómez Morales y Cesar Augusto Martínez Gómez; y dos libros de autores internacionales “Variación de una función: Hacia el estudio de la derivada” por Carmen Azcárate Giménez y Jordi Deulofeu, “La variación y la derivada” por Crisólogo Dolores Florez.
- Respecto de esta búsqueda inicial, podemos concluir que existen muchas investigaciones de tipo *estudio de caso* o *caracterización de pensamiento matemático del estudiante* y, otras tantas acerca de *identificación de obstáculos y dificultades en relación con los procesos de enseñanza*. Hay una falta preocupante de investigaciones que presenten *propuestas de enseñanza* como resultado de su ejecución.

Para el segundo objetivo específico, que busca la caracterización de las propuestas de enseñanza de la derivada a partir de la determinación de unas categorías de análisis según el marco de referencia conceptual se puede concluir que:

- La articulación de los referentes del marco conceptual permitió determinar dos grandes categorías de análisis que incluyen todos los aspectos necesarios para la construcción de una caracterización de las propuestas. Estas dos grandes categorías describen y simplifican los aspectos matemático-curriculares y didácticos direccionados hacia el desarrollo del pensamiento variacional.
- Una vez determinadas las dos grandes categorías de análisis, se logró la construcción de la matriz de análisis presentada en la sección 3.2, dicha matriz relaciona los aspectos matemático-curriculares concernientes a lo estipulado por los lineamientos curriculares como lo son los conocimientos básicos, los procesos generales de pensamiento matemático y los contextos; además, relaciona también los elementos más importantes del tratamiento didáctico de la derivada en la escuela como lo son las dificultades y perspectivas didácticas. Con esta matriz de análisis, un profesor o investigador en educación matemática podría caracterizar nuevas propuestas de enseñanza sobre la derivada con el fin de determinar si los elementos más importantes que la componen están direccionados hacia el desarrollo del pensamiento variacional, en especial en el contexto colombiano.
- Posterior a la construcción de la matriz, se efectúa su aplicación en la sección 3.3 lo que consolida el análisis de las propuestas de enseñanza dando como resultado una caracterización presentada en la sección 3.4. Esta caracterización destaca la naturaleza intuitiva de la derivada presente en todas las propuestas, en especial aquellas donde las situaciones problema consideradas exhiben situaciones de variación elementales que los estudiantes pueden reconocer fácilmente; la naturaleza

variacional y los fenómenos de variación relacionados a la magnitud del tiempo son fundamentales en todas las propuestas sin importar su enfoque matemático pues se ha demostrado que estos tipos de fenómenos son apropiados para introducir la dependencia de las variables, sus relaciones y cuantificar los cambios que se producen a lo largo del tiempo.

- Cada una de las propuestas consideradas tienen unas potencialidades y situaciones únicas que permiten abordar de manera eficiente los distintos núcleos conceptuales que componen la derivada. Esto demuestra que hay una diversidad de enfoques matemáticos que permiten ir adaptando las situaciones problema y los fenómenos utilizados de acuerdo con los requerimientos y particularidades de las diferentes aulas de clase. Se concluye, por ejemplo, que la propuesta de Carmen Azcarate y Jordi Deulofeu *Variación de una función: Hacia el estudio de la derivada* y la propuesta de Crisólogo Dolores Flores *La variación y la derivada*, permiten consolidar de manera intuitiva la noción de límite eludiendo las dificultades epistemológicas asociadas al mismo, también permiten una consolidación más completa de la derivada pues no solo se caracteriza como una herramienta importante en la predicción de variaciones sino que también se devela su naturaleza funcional así como sus principales propiedades. En cuanto a la propuesta de Carlos Pineda *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria* y la propuesta de Jhon Jairo Gómez Morales y Cesar Augusto Martínez Gómez *Una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio*, es posible afirmar que los escenarios de variación presentados junto con el tratamiento de los prerrequisitos conceptuales forman un buen punto de partida para introducir la derivada como razón de cambio, a esto le sumamos el esfuerzo por integrar escenarios de geometría dinámica con el fin de establecer una

conexión clara entre el valor numérico de la pendiente de la recta tangente y su interpretación geométrica.

En relación con el tercer objetivo específico del trabajo, que busca proponer algunos elementos en la construcción y selección de propuestas curriculares que articulen aspectos fundamentales del pensamiento variacional se tiene que:

- Este trabajo de investigación, realizado bajo la modalidad de revisión documental, que surge a partir de la pregunta de investigación *¿Cómo, a través del estudio documental de algunas propuestas para la enseñanza de la derivada en la escuela, se pueden proponer elementos curriculares que potencien su estudio desde la perspectiva del pensamiento variacional?*; aporta valiosas recomendaciones y reflexiones en cuanto al desarrollo y validación de nuevas propuestas alternativas de trabajo sobre la enseñanza de la derivada. Una lectura de los documentos que direccionan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la educación media en Colombia, permite identificar que el aprendizaje de las matemáticas es una actividad que involucra diferentes elementos y situaciones que los profesores del territorio nacional tienen la libertad de escoger o diseñar, debido a la libertad de cátedra que desde la constitución política de nuestro país se contempla. Es por esto por lo que los lineamientos y estándares no direccionan, de manera precisa, una estructuración de contenidos en cuanto a la enseñanza de la derivada en la escuela.
- Se logran consolidar 8 elementos presentados en la sección 3.4, producto del análisis de las propuestas. Estos elementos, que fueron establecidos tomando consideraciones curriculares, matemáticas y didácticas; buscan proporcionar un punto de partida a futuros profesores en ejercicio e investigadores que quieran construir o evaluar propuestas sobre la enseñanza de la derivada desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional. Se puede concluir entonces que, si bien

los lineamientos curriculares mencionan los contextos, los procesos, los conocimientos básicos, entre otros; no se hace explícita la potencialidad que tienen las diferentes situaciones de variación, exploradas en las propuestas, con el fin de articular dichos elementos.

- No se pretende con los resultados de este trabajo, de ninguna manera, ir en contravía de los direccionamientos nacionales, sin embargo, a partir del análisis realizado y de los elementos comunes encontrados, se ha identificado una estructura o fragmentación de la derivada que, desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional y los marcos teóricos propios de las propuestas consideradas, parece funcionar muy bien en tanto que devela la naturaleza variacional de la derivada y de las situaciones que la subtienden. Así, se considera que una buena alternativa, que desde el currículo se debería estructurar en cuanto a la enseñanza de la derivada, contempla la progresión de los núcleos conceptuales que dan forma y significado a la derivada y sus diferentes interpretaciones.
- Esta estructuración progresiva de los núcleos conceptuales debería articularse con los procesos de la actividad matemática y los contextos de la vida diaria y de las otras ciencias. Un buen tipo de fenómenos que funcionan para conseguir dicha articulación son los fenómenos cuya variable independiente es el tiempo y que suscitan situaciones de variación en las que es posible determinar el comportamiento del fenómeno a través del tiempo. Otra conclusión que surge de las propuestas y los elementos aquí presentados en la sección 3.4 es la referida a los escenarios de variación mediados a través de la geometría dinámica con el uso de software como GeoGebra, Cabri, entre otros; que permiten modelar las situaciones de variación promedio y coordinar la idea intuitiva de límite para dar paso a la construcción de la variación instantánea. Así pues, desde los resultados obtenidos en el análisis del contenido matemático se sugiere:

- Construir y reforzar las nociones que los estudiantes tienen sobre los núcleos conceptuales que anteceden el desarrollo de la derivada, dichos núcleos conceptuales pueden denominarse *prerrequisitos conceptuales* en la terminología de la propuesta del profesor Carlos Pineda. Estos núcleos conceptuales comprenden la noción de variable, dependencia entre variable, relación entre las variables, las funciones, dominio y rango de funciones, gráfica de funciones, función lineal y afín, razón de cambio y velocidad promedio e instantánea. Para desarrollar dichos núcleos conceptuales es necesario articular contextos, fenómenos y procesos matemáticos en situaciones que permitan rápidamente identificar la independencia de las variables y la regularidad de la variación; volvemos nuevamente a resaltar la potencialidad que tiene la caída libre para estos fines.
- En el tratamiento de los aspectos locales y globales se debe proceder, de manera organizada, en el tratamiento de la variación media y, usando las situaciones del cálculo de velocidades medias e instantáneas de móviles inducir la noción intuitiva de límite, hasta llegar al cálculo de velocidades instantáneas. Este no es el único fenómeno físico que funciona bien, las propuestas de Azcarate y Pineda muestran que fenómenos como la concentración de agua en las nubes o el crecimiento poblacional (fenómenos en donde también interviene el tiempo) tienen también el potencial de exhibir regularidades de variación que los estudiantes pueden identificar sin que esto suponga un salto de dificultad desmedido. Por ejemplo, en estas situaciones problema podría preguntarse al estudiante por la concentración de agua en determinada hora específica o el crecimiento de la población en un determinado día del año.
- Los resultados sugieren que la conexión entre pendiente de la recta tangente a la curva y la tasa instantánea de variación o razón de cambio se ve fuertemente favorecida por los escenarios de variación que involucran la geometría dinámica,

estos escenarios de variación, como los que encontramos en GeoGebra, permiten modelar geométricamente la inclinación de la recta al mismo tiempo que muestra numéricamente el valor de su pendiente. El estudiante podrá asociar los valores correspondientes entre la pendiente de la recta y la tasa instantánea de variación que se ha calculado por medios algebraicos.

- A partir del análisis de las propuestas, se identifica una ruta progresiva común en el desarrollo de los núcleos conceptuales que dotan de significado a la derivada, así pues, las potencialidades que surgen de esta ruta específica se justifican no solo en la construcción consciente de los elementos que componen la derivada, sino también en que es completamente compatible con los fenómenos de variación y los contextos presentados en la sección 3.4, nuevamente reiteramos en que esta no es la única ruta procedimental que se debe seguir, pero los resultados muestran sus fortalezas: variables - funciones - variación promedio - cuerdas secantes - variación instantánea - recta tangente - velocidad media e instantánea - función derivada - aplicaciones de la derivada.
- Desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional y los elementos encontrados en esta revisión documental, se determina que las situaciones de variación con mayor potencial para desarrollar la idea de derivada, desde su naturaleza variacional, son aquellas que corresponden a fenómenos físicos en donde el tiempo interviene como una variable (caída libre, movimiento rectilíneo y rectilíneo uniformemente acelerado) además, explorar la noción de derivada sin hacer uso de la idea formal de límite (tal y como lo presenta la propuesta de Azcarate) permite eludir los principales obstáculos epistemológicos ligados al límite y a los modos de disrupción entre el pensamiento algebraico y el cálculo.

Teniendo en cuenta lo anterior y lo que planteado en el objetivo general relacionado a proponer algunos elementos para la construcción de alternativas de trabajo curriculares desde la

perspectiva del desarrollo del pensamiento variacional, a través de una revisión documental de algunas propuestas para la enseñanza de la derivada en la escuela; es posible concluir que las propuestas muestran diferentes enfoques matemáticos y perspectivas didácticas desde las cuales se abordan la mayoría de los núcleos conceptuales que comprenden el desarrollo de la noción de derivada de una función, esto sugiere inequívocamente que no existe una forma única de enseñar la derivada; sin embargo, a pesar de la diversidad y las potencialidades únicas de cada propuesta, es posible determinar una serie de elementos comunes desde los cuales se pueden construir nuevas propuestas curriculares. Los fenómenos de variación cuya variable independiente es el tiempo, articulados con los procesos de modelación a través de las funciones permiten develar el comportamiento del fenómeno a través del tiempo y asociar los patrones de variación con las regularidades exhibidas por las graficas de su función.

Por último, las características propias de las razones de cambio sugieren que una buena forma de conectar la razón de cambio de las variables con su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la curva, es a través de situaciones inmersas en ambientes de geometría dinámica donde los estudiantes pueden ver fácilmente la inclinación de las rectas secantes que se van acercando cada vez más a un punto específico.

El análisis documental también muestra cómo en cada propuesta encontramos una perspectiva didáctica para abordar las dificultades y obstáculos ligados a los núcleos conceptuales de la derivada, en especial al concepto de límite. Estas perspectivas didácticas abordan el concepto de límite desde aproximaciones intuitivas sin delegar el papel de la derivada a la definición formal de un límite.

4.2. Algunas reflexiones didácticas

A continuación, se presentan algunas reflexiones que surgieron de la realización de este análisis documental:

- El análisis de las propuestas nos muestra la importancia de construir nociones intuitivas sobre el concepto de derivada antes de abordar su definición formal o la solución de ejercicios. Es decir, primero debemos explorar los fenómenos de variación y cambio que son cercanos o conocidos por el estudiante con el fin de que puedan percibir las variables, las cantidades que cambian y la relación que guardan entre ellas. Se identificaron algunas limitaciones que afectan la comprensión de la derivada debido al enfoque metodológico que siguen. Muchas de ellas presentan un enfoque predominantemente algebraico y procedimental, dejando en segundo plano la construcción conceptual del significado de la derivada.

Los fenómenos más cercanos al estudiante podrían ser los problemas de velocidad, el crecimiento de una flor que tengan en su jardín, la sensación térmica, etc. Este camino potencia el desarrollo del pensamiento variacional por encima de los ya conocidos métodos memorísticos para derivar algunas funciones.

- Todo profesor de matemáticas que desee enseñar cálculo diferencial y sus principios fundamentales a un grupo de estudiantes debe saber de antemano que el concepto de límite es uno de los objetos de mayor complejidad dentro del estudio de las matemáticas. Dicho concepto es la puerta de entrada a la mayoría de las situaciones problema propias del cálculo, sin embargo, su definición trae consigo dificultades y obstáculos que terminan permeando la comprensión que los estudiantes logran concretar acerca de la derivada. No se trata de eludir el problema dejando el límite de lado; se trata de reconocer e indagar sobre algunas perspectivas didácticas que abordan el concepto de límite desde nociones intuitivas y que permiten consolidar significados sobre la derivada sin depender de la definición formal del límite de una función.
- El enfoque matemático y didáctico a través de fenómenos de variación como la caída libre de los cuerpos o cualquier caso de movimiento rectilíneo uniforme y

uniformemente acelerado son una puerta de entrada perfecta para los estudiantes en la comprensión de la variación. Esto ocurre porque son fenómenos con los que están familiarizados y además tienen la potencialidad de trabajar de manera interdisciplinar con otras áreas del conocimiento como las ciencias o la ingeniería.

- La colaboración entre profesores e investigadores en el campo de la educación matemática puede fomentar la creación o mejoramiento de nuevas propuestas de enseñanza sobre la derivada que articulen algunos de los elementos aquí descritos. Si bien se han encontrado buenas propuestas en este análisis documental, no significa que ellas sean la única forma de abordar el concepto de derivada en la escuela, por el contrario, los elementos reportados por la investigación facilitan la construcción de nuevo material educativo que esté alineado con nuestro currículo y que tenga por objetivo general desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes. Además, la colaboración entre profesores e investigadores puede acercar de manera efectiva las últimas producciones científicas del campo de la educación matemática a las diferentes aulas de clase, permitiendo así que los profesores cuenten con herramientas bien fundamentadas para mejorar la calidad de la educación que reciben nuestros estudiantes.
- La culminación de esta investigación contribuye a disminuir la brecha que existe entre los estudios sobre la enseñanza de la derivada y las prácticas educativas predominantes en el aula de clase al ofrecer un análisis detallado de cómo se aborda el concepto en diferentes propuestas. Al contrastar propuestas nacionales e internacionales, se resalta la importancia de priorizar el desarrollo del pensamiento matemático y, especialmente, el desarrollo del pensamiento variacional antes del desarrollo de contenidos matemáticos inconexos. Se espera que este trabajo impacte la enseñanza de la derivada en la escuela en Colombia al proporcionar herramientas que guíen el diseño de nuevas estrategias didácticas y ajustes curriculares.

Referencias Bibliográficas

- Alarcón Vasco, S., & Suescún, C. M. (2011). El método de Descartes para determinar la tangente a una curva. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIX(1), Vol. XIX, 103–114.
- <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/b5a7cc48-bbd7-4742-bad7-206fd3752087/content>
- Amaya, C. S., Rojas, H. D., & Ballen, M. B. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (26).
- Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1, 97–140.
- Azcárate Giménez, C., & Deulofeu Piquet, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Botello, C., & Parada, S. (2013). Diseño de una alternativa de acompañamiento y seguimiento a estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial en la Universidad Industrial de Santander. En S. Roa, J. Fiallo, & S. Parada (Eds.), *Memoria del 40 Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación* (pp. 79–82). Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Camargo, L. U. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Universidad de Antioquia.

- Castro, W., & Cadavid, G. (2016). Una concepción institucional sobre la derivada en la Universidad Tecnológica de Pereira, en el curso de Matemáticas I. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 10(20), 9–1.
- Collette, J. (1998). *Historia de las matemáticas II* (A. Casal Piga, Trad., 3.^a ed.). Editorial Siglo XXI Editores. (Trabajo original publicado en 1779).
- Dolores, C. (2012). *La Variación y la Derivada*. México: Díaz de Santos.
- Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Duval, R. (2019). *Semiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Euclides. (s. f.). *Los Elementos*. <https://euclides.org/los-elementos/>
- Gamboa, R., Castillo, M., & Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 104–136.
- Giraldo Urrea, V., & Henao Cañaveral, M. (2014). El papel de la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada en estudiantes del grado undécimo. (Trabajo de grado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- González Gilmas, O. (2004). El cálculo infinitesimal leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro. *Signos Filosóficos*, 6(11), 97–120.

- Guitérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017, julio-diciembre). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15(20), 137–153.
- Leibniz, G. W. (1684). *A New Method for Finding Maxima and Minima. Actis Eruditorum Lipsiensium*. (Traducción y notas por Ian Bruce, 2014).
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Matemáticas: Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ossa Zapata, T. (2018). La pendiente de la recta como una razón de cambio para aproximarse al concepto de derivada. (Trabajo de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Pascual León, C., & Rico Romero, L. (2015-2016). *Unidad Didáctica: Derivadas y Cálculo Diferencial*. Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad en Matemáticas, Universidad de Granada.
- Paez Solano, C., & Hernandez Martín, H. (2017). Qué sentido tienen las matemáticas: Una propuesta de acercamiento a la noción de derivada desde una perspectiva

- crítica de la modelación matemática. (Trabajo de grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Parra Naranjo, J. (2020). *Significados sobre la derivada que manifiestan estudiantes universitarios*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Pinto Hurtado, A. D. (2018). Errores que presentan estudiantes universitarios en relación al concepto de la derivada. (Trabajo de grado, Universidad del Valle). Universidad del Valle.
<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/117b0b9c-ocf1-4895-a31c-70a094f49ec3>
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163–172. <https://doi.org/10.2307/748804>
- Recalde, L. (2018). *Lectura de Historia de las Matemáticas*. Programa Editorial Universidad del Valle.
- Rendón Arcila, C., Ruiz Restrepo, K., & Córdoba Asprilla, Y. (2014). La comprensión del concepto de derivada en el marco de la enseñanza para la comprensión. (Trabajo de grado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). *Planificación de las matemáticas escolares en secundaria*. España: Editorial Síntesis.
- Rojas Celis, C. (2013). ¿Enseñamos a los profesores de matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada? (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. Gonzales, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41–53). Salamanca: SEIEM.

- Sapiencia. (2017). Deserción en la educación superior. (J. Mejía, Ed.). *ODES*, 5, 2–17.
- Saraza Sosa, D., & Prada Nuñez, R. (2017, noviembre). Estado del arte alrededor de la comprensión conceptual de la derivada. En *II Encuentro Internacional en Educación Matemática año 2017*. Cúcuta, Colombia.
- Schönbeck, J. (2004). Thomas Fincke und die Geometria rotundi. *NTM N.S.*, 12, 80–99.
<https://doi.org/10.1007/s00048-004-0191-1>
- Solano Camargo, S. P. (2017). Las concepciones del concepto de derivada: Dos estudios de caso sobre un matemático y un licenciado en matemáticas. (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Tapiero, K. (2020). *Análisis de una propuesta para el aprendizaje del concepto de derivada a través de la razón de cambio*. (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Trujillo Castro, J., Gutiérrez Vera, C., & Prada Núñez, R. (2017, noviembre). Estado del arte sobre el concepto de límite. En *II Encuentro Internacional en Educación Matemática Año 2017*. Cúcuta, Colombia.
- Vasco 2002

ANEXOS

Anexo A: Elementos Fundamentales Del Desarrollo Histórico Del Concepto De Derivada De Una Función.

Con el propósito de caracterizar el tratamiento, que a lo largo de la historia ha tenido la derivada en la escuela, es fundamental describir este concepto partiendo desde su desarrollo histórico, para así presentar los elementos fundamentales que dan sentido a la derivada hoy. Para esto, se describirá el progreso histórico de la derivada en relación con el desarrollo histórico del cálculo diferencial, desde los primeros enfoques geométricos hasta su formalización en el cálculo moderno. Caracterizando así las aproximaciones iniciales de la tangente, las notaciones históricas y las reglas de derivación, así como las contribuciones de matemáticos destacados como Arquímedes, Fermat, Newton y Leibniz. Este recorrido nos permitirá comprender mejor la evolución y la importancia de la derivada en el contexto del cálculo diferencial.

De Euclides A Leibniz: Los Primeros Pasos Hacia El Cálculo De Derivadas.

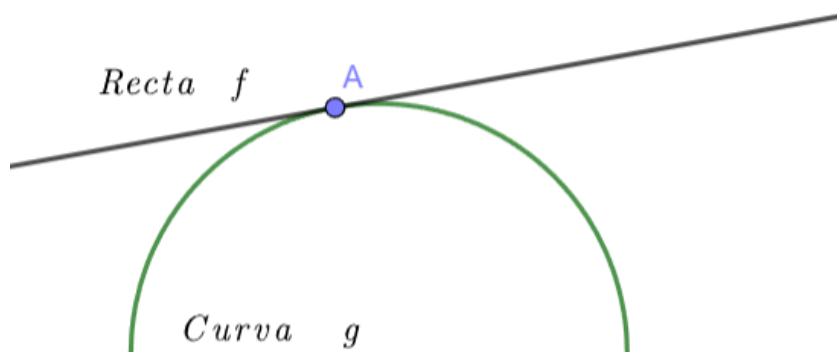
Para el siglo XVII, los matemáticos de la época se concentraron en la resolución de problemas que habían sido definidos siglos atrás, como el problema de la recta tangente, definido en la época euclidiana (Siglo III a.C.). Este problema, entre otros, se convirtió en el motor para el desarrollo de nociones como la derivada y la integral. Estos avances culminaron en la instauración de lo que conocemos hoy como el cálculo diferencial. Este recuento histórico se elaborará con base en la lectura del libro *Historia de las Matemáticas II*, escrito por Jean-Paul Collette, tercera edición, traducción de Alfonso Casal Piga en 1998.

Por un lado, el problema de la recta tangente se refiere a encontrar una recta que toca una curva en un punto específico y tiene la misma dirección que la curva en ese punto. La siguiente figura (figura 1) muestra cómo la recta f es tangente a la curva g en el punto A . Para el siglo XVII, los matemáticos de la época se concentraron en la resolución de problemas que habían sido definidos siglos atrás, como el problema de la recta tangente, definido en la época

euclidiana (Siglo III a.C.). Este problema, entre otros se convirtió en el motor para el desarrollo de nociones como la derivada y la integral. Estos avances culminaron en la instauración de lo que conocemos hoy como el cálculo diferencial.

Figura 1

Tangente a una Semicircunferencia



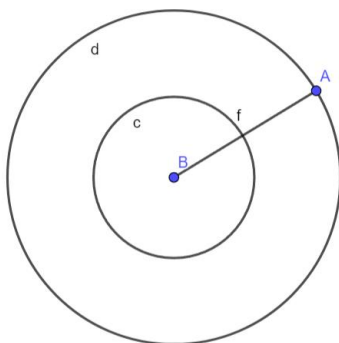
La noción de recta tangente como se muestra en este problema esta generalizada a través de la noción de recta tangente para la circunferencia. Así, pues, Euclides en el 300 a.c. caracterizó la recta tangente en Los elementos, libro III, Definición 2 como; Una recta es tangente a una circunferencia cuando, tocando a la circunferencia y siendo alargada no corta a la circunferencia (Euclides, 300 a.C., como se cita en Los Elementos de Euclides, s.f.)

Este planteamiento era posible con métodos geométricos pues se determinó que la tangente a una circunferencia sería siempre perpendicular al radio, en cualquier punto de tangencia. Es así como Euclides en la proposición 17 del mismo libro, demuestra a detalle la posibilidad de trazar siempre una tangente a cualquier circunferencia.

Si se tiene el punto A y la Circunferencia c con centro en B, entonces al trazar un segmento f de A hasta B y tomando este segmento como radio de una nueva circunferencia d, se obtiene la figura 2.

Figura 2

Primera parte de la demostración sobre la proposición 17.



Si se traza la intersección entre el segmento f y la circunferencia c , obteniendo el punto C , y sobre este formando ángulos de 90 grados en relación con el segmento f entonces se tiene el ángulo ECA y ACD , así como la recta ED que es perpendicular al segmento f . Como el segmento f está compuesto por el segmento BC que es un radio de la circunferencia c , entonces por la proposición 14, el segmento ED y la recta que se podrá trazar con los mismo punto, es tangente a la circunferencia c en el punto C . Euclides (300 a.c./s.f.)

Figura 3

Segunda parte de la demostración sobre la proposición 17.

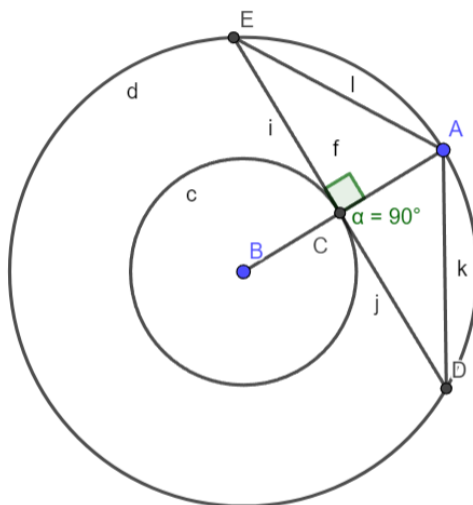
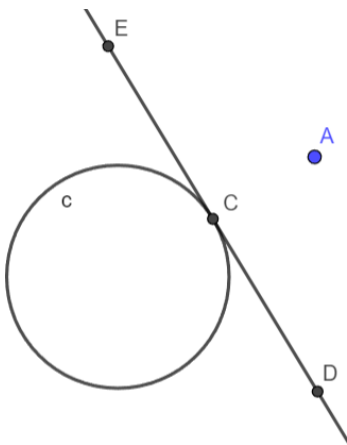


Figura 4

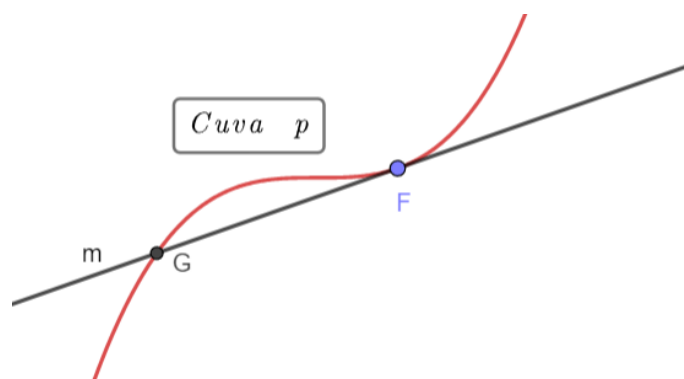
Tercera parte de la demostración sobre la proposición 17.



Este sería uno de los primeros esbozos de la recta tangente a una circunferencia.

Por otro lado, **Apolonio de Perga (c. 262–190 a.C.)** un matemático del siglo I, en su obra "Cónicas", amplió el concepto de tangente a las cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas). Definió la tangente como una línea que toca la cónica en un solo punto sin cruzarla, similar a la definición de Euclides, pero aplicada a una clase más amplia de curvas. (Collette, 1998)

Este planteamiento dio paso a pensarse sobre una tangente no solo para curvas cerradas sino también para curvas abiertas. Es aquí en donde los métodos geométricos dejaron de bastar trazar tangentes pues en curvas abiertas existe la posibilidad de que al trazar una recta m por un punto F a la curva p , esta recta también toque a la curva p en un punto G , como lo muestra la figura 5.

Figura 5*Curva p*

En el siglo XVII, el matemático y filósofo francés René Descartes realizó un avance revolucionario al introducir el concepto de coordenadas cartesianas, lo que condujo al desarrollo del plano cartesiano y sentó las bases para la geometría analítica. En su obra "La Géométrie" (1637), (citado en Collette, 1998) Descartes propuso una forma de representar puntos en un plano mediante pares ordenados de números. Esto permitió una conexión entre el álgebra y la geometría, ya que ahora las curvas y figuras geométricas podían ser representadas mediante ecuaciones algebraicas.

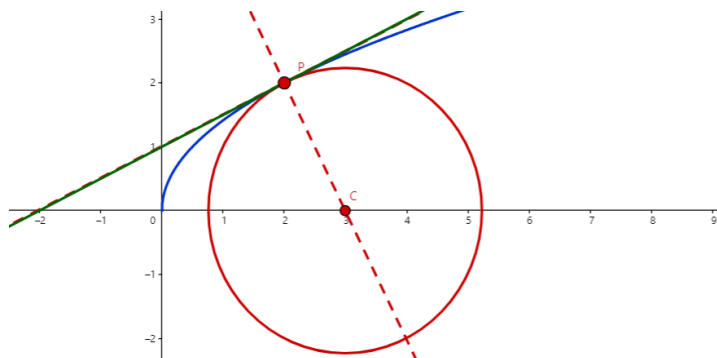
Una de las formas más simples de ecuación algebraica que describe una recta es la forma canónica $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen. Descartes, junto con otros matemáticos de su época, desarrolló este concepto al darse cuenta de que la pendiente m de una recta es la tangente del ángulo que forma con el eje x . De esta manera, la ecuación $y = mx + b$ proporciona una forma eficiente de describir la relación entre x e y en una línea recta.

Alarcón Vasco, S., & Suescún, C. M. (2011) muestran como paralelamente, Descartes (1637) apoyado en el trabajo de Francois Vieta, definió la tangente como una línea que intercepta una curva en exactamente un punto en el contexto de sus métodos para encontrar las normales y tangentes a curvas definidas por ecuaciones algebraicas. Así pues, como se muestra en la figura 6, tomando una función P de la que se quiere hallar su tangente en P . Se toma la circunferencia

auxiliar de centro $(C, 0)$ y radio de C a P . Buscando C tal que sea tangente a la curva en P . En ese caso, la tangente de la circunferencia que es sencilla de calcular (es la perpendicular al radio en P entonces, $m_1 * m_2 = -1$) será también tangente a la función en P .

Figura 6

La Tangente en Descartes

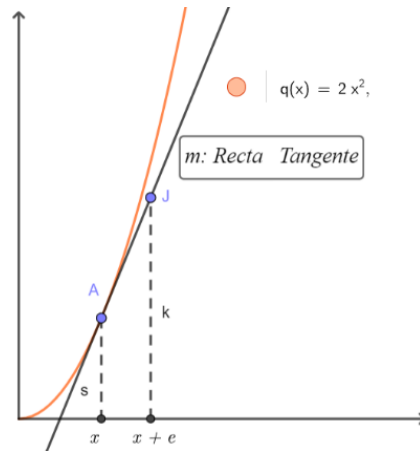


Nota. Adaptado de Método de Cálculo de tangentes de René Descartes, de ErosFer, (s.f.).

GeoGebra. [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m/GeoGebra)

Por otro lado, Pierre de Fermat (1607-1665), un matemático francés del siglo XVII desarrolló una noción de tangente que involucró el uso de pequeños incrementos anticipándose a la noción de límite usada en la definición contemporánea de la derivada. (Recalde, 2018)

Teniendo la curva $y = f(x) = x^2$, [ver figura 7] la tangente de $f(x)$ en un punto x , Fermat introducía un incremento e , y al calcular la diferencia entre $f(x + e)$ y $f(x)$ resultaba el siguiente desarrollo:

Figura 7**La Tangente de Fermat****Tabla 1**

Representación simbólica de la tangente de Fermat

Partiendo de la semejanza de triángulos se determina que: $\frac{2x^2}{2s} = \frac{k}{2s+e}$ Dado que, $k = 2(x+e)^2$ $\frac{2x^2}{2s} = \frac{2(x+e)^2}{2(s+e)}$ $\frac{2x^2}{2s} = \frac{2(x^2 + 2xe + e^2)}{2s + 2e}$	$2x^2(2s + 2e) = 4s(x^2 + 2xe + e^2)$ $4sx^2 + 4ex^2 = 4sx^2 + 8sxe + 4se^2$ $2 * 2ex^2 = 2(4sxe + se^2)$ $2ex^2 = 4sxe + se^2$ $2ex^2 = se(4x + e)$ $\frac{2ex^2}{es} = 4x + e$ Despreciando e, se obtiene $\frac{2x^2}{s} = 4x$
---	--

A este desarrollo dado por Fermat, se le conoce como el cociente de Fermat o cociente diferencial, procedimiento que más tarde Wilhem Leibniz usaría para desarrollar su versión de la derivada en el marco del desarrollo del cálculo diferencial e integral.

Ahora bien, el cociente diferencial de Fermat permite hallar entonces la pendiente de una recta tangente para curvas descritas algebraicamente, dado este desarrollo, otra cuestión que fue de análisis para el siglo XVII, fue el problema de los máximos y mínimos de una función.

Por otro lado, Recalde (2018) haciendo un desarrollo de las matemáticas, muestra el problema de máximos y mínimos. Este problema, presentado en el siglo XVII se refiere a los métodos desarrollados por matemáticos como Pierre de Fermat y René Descartes para encontrar los puntos de una curva en los que una función alcanza sus valores extremos. Pierre de Fermat, alrededor de 1637, introdujo un enfoque innovador para describir la tangente de una curva utilizando incrementos aproximados a cero. Este razonamiento fue crucial para la determinación de máximos y mínimos en curvas descritas algebraicamente. Fermat propuso que al obtener el valor de la tangente en un punto y establecer este valor igual a cero, se pueden identificar los puntos en los que la función alcanza un máximo o un mínimo.

Fermat razonó que, si la tangente de la función en un punto no tiene un ángulo de inflexión, entonces la función “ha dejado de crecer o decrecer” en ese punto. Este enfoque esencialmente establecía que en los puntos donde la pendiente de la tangente es cero, la función tiene un punto que modernamente se llama punto crítico y que podría ser un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Retomando el ejemplo anterior, para el caso de la función $y = f(x) = x^2$

En donde se halló que la tangente de $f(x)$ es $g(x) = 2x$ entonces si

$$g(x) = 0$$

$$\rightarrow 2x = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{0}{2}$$

$$\rightarrow x = 0$$

Así, Fermat sentó las bases para los métodos de cálculo diferencial utilizados para resolver problemas de optimización, que serían formalizados más tarde por Newton y Leibniz.

Para la misma época, Galileo Galilei (1564 - 1642), un astrónomo, matemático y físico italiano, en el siglo XVII hizo grandes desarrollos con respecto al ***problema de la modelación matemática del movimiento*** pues él quiso demostrar que todos los cuerpos caen al vacío con la misma aceleración y es así como determinó, que la relación entre el espacio y el tiempo está dada por la función:

$$s(t) = C * t^2$$

“C” es una constante que ajusta la fórmula para que coincida con las condiciones específicas del problema de caída libre en cuestión

Este hallazgo se enmarca en el llamado problema de la modelación del movimiento, uno de los cuales fue fundamental para el desarrollo del cálculo.

Considerando entonces que la aceleración podría plantearse como el ritmo de cambio de la velocidad, y la velocidad a la vez, el ritmo de cambio de la distancia de un cuerpo en movimiento, el problema quedaría en determinar cómo cambia la función que describe la velocidad del movimiento de un cuerpo para cualquier punto, lo que sería pensar en la pendiente de la recta tangente en un punto dado de la curva de velocidad.

El experimento de la caída de los cuerpos desde la Torre de Pisa llevó a Galilei a descubrir que la aceleración de un objeto en caída libre debido a la gravedad es constante, independientemente de su masa. Con esto se pudo plantear que la velocidad de un cuerpo aumenta uniformemente con el tiempo. Esta conclusión permitió a Galileo desarrollar una comprensión más profunda de la relación entre la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida por un cuerpo en movimiento. Además, al tomar intervalos de tiempo más pequeños para medir la velocidad de los cuerpos en caída libre, Galileo observó que la velocidad media de un cuerpo se acercaba a un valor constante, lo que sugiere que la velocidad instantánea de un cuerpo también podría ser medida con precisión mediante un proceso experimental adecuado.

El desarrollo histórico de la derivada se fundamenta en los descubrimientos que proporcionaron una sólida evidencia experimental de la relación entre la velocidad, la

aceleración y el movimiento de los cuerpos. Estos hallazgos sentaron las bases para que matemáticos posteriores, como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, construyeran sobre estos fundamentos. Utilizando el concepto de velocidad instantánea, desarrollaron de forma independiente el cálculo diferencial y la derivada. Este progreso se enmarca en el contexto del desarrollo matemático del siglo XVIII, proporcionando a Newton y Leibniz los elementos teóricos necesarios para desarrollar su versión del cálculo diferencial.

Siguiendo este desarrollo histórico, en 1687, **Isaac Newton**, un físico, filósofo y matemático nacido en Woolsthorpe, Lincolnshire (Reino Unido), publica su obra “*Principios matemáticos de la filosofía natural*” en donde muestra tres interpretaciones para el cálculo infinitesimal buscando una fundamentación formal y rigurosa de esta. (Recalde, 2018, pág. 246).

En un primer momento, presenta el cálculo en términos infinitesimales, teniendo la noción de infinitésima como una cantidad infinitamente pequeña pero no nula, un concepto análogo a los indivisibles de Cavalieri. En un segundo momento, Newton, desarrolla su teoría de fluxiones introduciendo el concepto de flujo y fluente, donde la tangente a una curva en un punto se define a través de la idea de velocidad instantánea. Idea, que como se vio en el desarrollo del problema del movimiento de los cuerpos, Descartes, Galilei y Fermat usaron en diferentes desarrollos haciendo referencia a la pendiente de una curva en un punto particular de esta.

Por un lado, un fluente es una cantidad que varía respecto al tiempo, denotada como x, y . Una fluxión es la rapidez de cambio de un fluente, representada por $\dot{x}, \dot{y}$. Por lo que el cociente de fluxiones se interpreta como la pendiente de la recta tangente, denotado como:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

A través de procesos algorítmicos Newton describió los incrementos de las fluxiones en función de los incrementos del tiempo. Así pues, si v es un incremento infinitesimal del tiempo, entonces los incrementos de x, y están dados por $\dot{x}v, \dot{y}v$, llamados momentos.

Si se tiene la curva con ecuación:

$$x^2 + bx + y^2 = 0$$

Sustituyendo $x = (x + \dot{x}v)$, $y = (y + \dot{y}v)$

$$(x + \dot{x}v)^2 + b(x + \dot{x}v) + (y + \dot{y}v)^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x\dot{x}v + (\dot{x}v)^2) + (bx + b\dot{x}v) + (y^2 + 2y\dot{y}v + (\dot{y}v)^2) = 0$$

$$(x^2 + bx + y^2) + v\dot{x}(2x + v + b) + 2y\dot{y}v + (\dot{y}v)^2 = 0$$

Dado que $x^2 + bx + y^2 = 0$ entonces al dividir entre v , y, despreciar los factores de v se obtiene;

$$\frac{v\dot{x}(2x + v + b) + v\dot{y}(2y + v\dot{y})}{v} = \frac{0}{v}$$

$$\dot{x}(2x + v + b) + \dot{y}(2y + v\dot{y}) = 0$$

Entonces, se obtiene el cociente diferencial a partir del cual se puede obtener una recta tangente a la curva $x^2 + bx + y^2 = 0$ en cualquier punto

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-(2x + b)}{2y}$$

Esta segunda interpretación toma elementos de la física para fundamentar el cálculo, por lo cual consideró que trabajar con conceptos como el tiempo, no era estrictamente riguroso en matemáticas, lo que lo lleva a desarrollar la tercera versión. En esta última interpretación publicada bajo el título “*De Quadratura Curvarum*” (publicado en 1704), Newton, presenta en calculo en términos de razones primeras y últimas, aludiendo a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades que varían con el objetivo de identificar estos valores en el instante en que estas cantidades comienzan desde cero (razón primera) o se vuelven nulas (razón última).

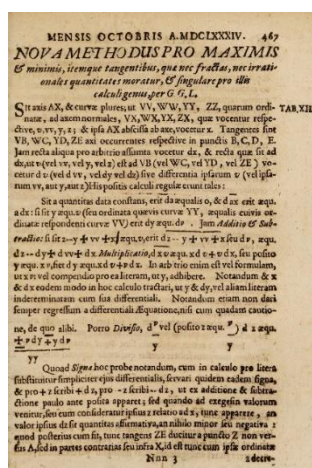
Por otro lado, **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 - 1716) nacido en Leipzig (Alemania), un filósofo, matemático y jurista entre el siglo XVII y siglo XVIII, tres años antes de la publicación

de “*Principios matemáticos de la filosofía natural*”, Leibniz publica en “*Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genu*” (1687), traducido al español como “*Un nuevo método para máximos y mínimos, y para tangentes, que no se ve obstaculizado por cantidades fraccionarias o irracionales, y un tipo singular de cálculo para lo mencionado anteriormente*”.

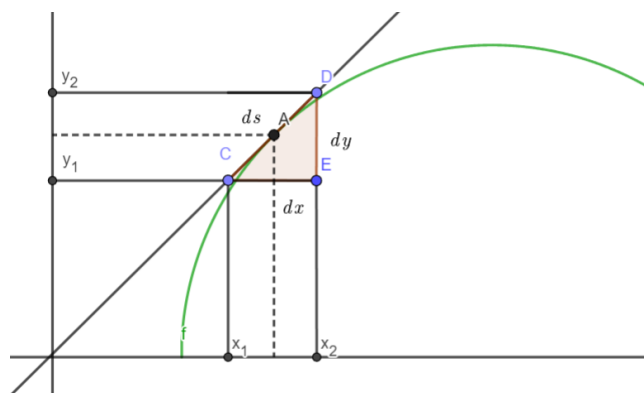
En este trabajo, Leibniz usa por primera vez en la historia del cálculo, la notación $\frac{dy}{dx}$ para representar el cambio de y respecto de x , y , describe las reglas de diferenciación tales como la regla de la potencia o regla del producto. (Recalde, 2018 pág. 251)

Figura 8

Portada de Leibniz (1687)



En una publicación posterior, en 1714, Leibniz “*Geschichte und Ursprung der Differentialrechnung*” (“*Historia y Origen del Calculo Diferencial*”) Leibniz, basado en los desarrollos de Fermat sobre el cociente diferencial, hace alusión al triángulo característico para fundamentar y representar geoméricamente su versión de los diferenciales. Este triángulo característico se refiere a un triángulo rectángulo formado en un punto A de coordenada (x, y) de una curva $f(x)$ en donde el cateto es la diferencial de la abscisa representado dx , y el otro cateto es la diferencia de la ordenada, dy , así mismo la hipotenusa es un segmento de la curva, que representa una aproximación infinitesimalmente pequeña de la curva en el punto A .

Figura 9*La Tangente de Leibniz*

El triángulo característico tiene lados infinitesimales dx, dy, ds y se verifica la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. El lado ds sobre la curva se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y) y la pendiente de la recta se representa como $\frac{dy}{dx}$. Bajo este razonamiento, Leibniz desarrollo algunas reglas de diferenciación como la regla del producto, regla del cociente, regla de la potencia, y de la raíz:

$$\begin{aligned} \bullet \quad d(xv) &= xdv + vdx & \bullet \quad d\left(\frac{x}{v}\right) &= \frac{vdx - xdv}{v^2} & \bullet \quad d(x^n) &= nx^{n-1} \\ \bullet \quad d(\sqrt[n]{x^a}) &= d\left(x^{\frac{a}{n}}\right) = \frac{ax^{\left(\frac{a}{n}\right)-1}}{n} \end{aligned}$$

Un ejemplo de la interpretación de la derivada de Leibniz con la curva,

$$x^2 + bx + y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + bx + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2) + \frac{dy}{dx}(bx) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + b + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{-(2x + b)}{2y}$$

Con el objetivo de comprender el desarrollo contemporáneo de la derivada, se han reconocido los avances históricos que sentaron las bases para el cálculo diferencial moderno. Inicialmente, el problema de encontrar la recta tangente a una curva en cualquier punto se resolvía fácilmente para circunferencias, gracias a la simplicidad geométrica de su radio perpendicular a la tangente. Matemáticos como Pierre de Fermat y René Descartes extendieron este concepto a una gama más amplia de curvas, desarrollando métodos para calcular la pendiente de la tangente. Gottfried Wilhelm Leibniz, con su formalización y notación sistemática, consolidó estas ideas, haciendo posible una aplicación más general y robusta. En la actualidad, la derivada ha evolucionado para abarcar un vasto espectro de aplicaciones en diversas disciplinas, desde la física hasta la economía, y se ha integrado con nuevas tecnologías y teorías avanzadas como el análisis numérico y el cálculo simbólico, demostrando su versatilidad y relevancia continua en el mundo moderno.

Es preciso entonces abordar en este momento, la derivada desde la perspectiva moderna.

La Formalización De La Derivada En El Análisis Matemático Por Augustin Cauchy.

Como se vio en el anterior subtítulo de este apartado, las contribuciones de Newton y Leibniz hacia el desarrollo del concepto de derivada se dieron a finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII. Estos autores lograron conceptualizar la derivada en contextos matemáticos, físicos y al mismo tiempo hallar el valor de esta medida de variación para diferentes funciones. Con base en esto, se explorará a continuación la contribución de Augustin Louis Cauchy, describiendo así la formalización de este concepto dentro del cálculo infinitesimal y el análisis matemático. (Recalde, 2018 pág. 278)

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), influyente matemático francés del siglo XIX, publica en 1821 su obra "*Cours d'analyse*". La primera edición en español de este libro fue publicada en México en 1994 con edición de Carlos Alvarez Jiménez. Esta obra se divide en dos partes, una primera titulada: Análisis Algebraico, y la segunda parte bajo el título "Cálculo infinitesimal". A lo largo de la obra, presenta conceptos como límite, continuidad y la derivada, desde un punto

de vista riguroso pues en lo posible construye estos objetos libres de referentes geométricos, por lo cual este autor es considerado hoy en día como el padre del análisis matemático.

Entre sus construcciones fundamentales para la presentación de la derivada, presenta la definición de límite:

Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por definir de este tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás.

Una representación algebraica sobre el límite, usada por Cauchy se puede ver en la sexta lección en donde el autor se centra en el concepto de series y sumar infinitas. En la solución propuesta para el problema IV, el autor usa la siguiente notación:

$$s = \frac{z}{y} = \lim \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y}$$

En esta notación se quiere estudiar el comportamiento del cociente $\frac{z+\Delta z}{y+\Delta y}$ pero no se establece explícitamente que el diferencial Δy tienda a cero, más bien es una idea que esta implícita. Mientras que, actualmente está notación ha cambiado un poco en pro de tener una caracterización del límite autoconsistente¹.

Ahora, el límite de una función $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$ es L , lo que se denota como:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Otras definiciones en Cauchy, asociadas al concepto de función derivada son sobre cantidad infinita y función continua:

Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que descienden por debajo de cualquier número dado, esta variable

¹autoconsistente es la palabra que usa Luis Recalde para hacer referencia a que en esta conceptualización del límite no se usa la idea de movimiento que usaba Newton, por tanto, esta notación no da lugar a ambivalencias.

deviene lo que se suele llamar infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña - una variable de esta especie tiene al cero por limite.

La función $f(x)$ es una función continua de la variable x entre dos limites asignados, si para cada valor de x entre esos límites, el valor numérico (absoluto) de la diferencia $f(x + a) - f(x)$ decrece indefinidamente con a . En otras palabras, la función $f(x)$ será continua entre dos limites, si un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma. . (Cauchy, 1821/1994 pág. 76)

Es así como Augustin-Louis Cauchy en la tercera lección de la parte Calculo Infinitesimal presenta la definición de derivada de una función como:

Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua entre dos limites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos limites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la razón de las diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$

Serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan infinitamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x

En la actualidad, esta definición se ha dado paso para ser la siguiente:

Considerando la función $f(x)$ y el punto $P(a, f(a))$ en $f(x)$, entonces, se dirá que la derivada de la función $f(x)$ es la función $f'(x)$ definida por:

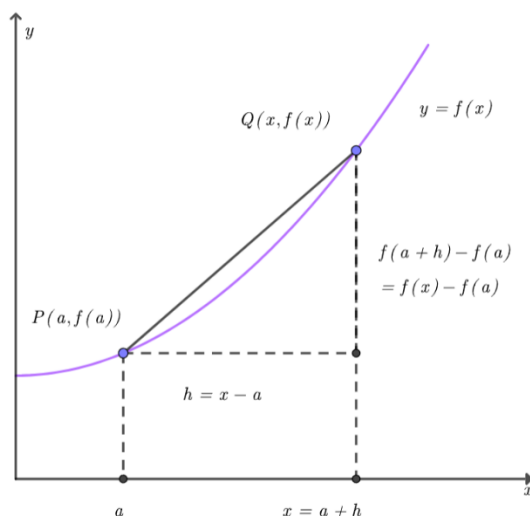
$$f'(x) = m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Para todo x donde existe este límite.

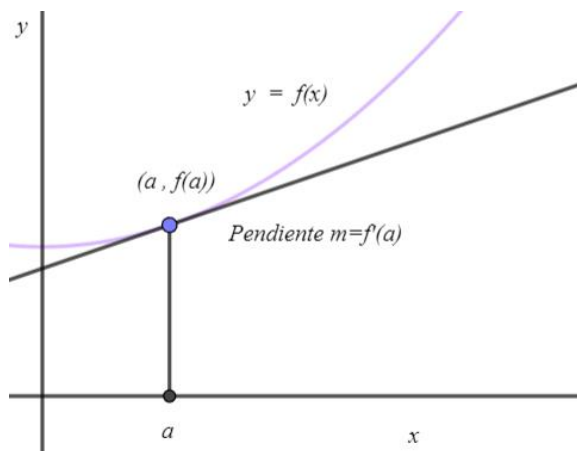
Esta definición de la derivada tiene por representación gráfica:

Figura 10

Representación de la derivada del cociente diferencial

**Figura 11**

Representación de la derivada cuando h se aproxima a cero.



Al evaluar en la definición diferentes tipos de funciones, entonces se obtienen las reglas de derivación, que como se mostró en la parte inicial de este apartado, Leibniz las obtuvo por medio de aproximaciones infinitesimales.

ANEXO B

Artículos y trabajos de grado relacionados con la derivada.

LISTA DE DOCUMENTOS A CONSIDERAR						
#	Título	Localidad	Años	Autores	Observación	Referencia o Link
1	El Currículo de Matemáticas: Una Mirada a su Estructura en Algunas Investigaciones durante los Últimos Diez Años en Colombia.	Universidad del Valle	2021	Salcedo Valdés, R. y Vidal Cándelo, E.	Análisis de la estructura del currículo de matemáticas en algunas investigaciones durante los últimos 10 años.	Salcedo Valdés, R y Vidal Cándelo, E. (2021). El currículo de matemáticas: una mirada a su estructura en algunas investigaciones durante los últimos diez años en Colombia. Universidad del Valle
2	La Comprensión Intuitiva del Concepto de Límite en un Grupo de Estudiantes de Cálculo Diferencial.	Universidad de Antioquia	2014	Joan Gonzalo Zapata, Juan Fernando Escobar y Darlinton Bernal	Referente sobre una construcción histórico-pistemológica de un objeto matemático.	Repositorio Institucional Universidad de Antioquia: La comprensión intuitiva del concepto de límite en un grupo estudiantes de cálculo diferencial (udea.edu.co)
3	La Comprensión de la Tasa de Variación para una Aproximación al Concepto de Derivada: Un Análisis desde la Teoría de Pirie y Kieren.	Universidad de Antioquia	2011	Jhony Alexander Ochoa Villa	Revisión Documental	Repositorio Institucional Universidad de Antioquia: La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada: un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren (udea.edu.co)
4	Comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren	Universidad de Antioquia	2022	Carlos Mario Pulgarín	Desarrollo Histórico-Epistemológico del Concepto de Curva	Repositorio Institucional Universidad de Antioquia: Comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (udea.edu.co)
5	Una Revisión Documental de la Modelación Matemática en el Encuentro Distrital en Educación Matemática 2014-2018: Conociendo el Pasado para Repensar el Presente.	Universidad Distrital	2019	Diana Marcela Acevedo Caro	Revisión Documental	AcevedoCaroDianaMarcela2019.pdf?jsessionid=7F779DBB27D4E423664D01FE56B3BB1A (udistrital.edu.co)
6	Análisis de la Comprensión de la Noción de Infinito : Un Estudio de Caso con Estudiantes de Educación Básica.	Universidad Distrital	2019	Ivan Yesid Ayala Laverde	Revisión Documental	Análisis de la comprensión de la noción de infinito : un estudio de caso con estudiantes de educación básica - hdl:11349/25438 (udistrital.edu.co)
7	La Comprensión de la Derivada como Objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática	Universidad de Alicante	2008	Gloria Sánchez-Matamoras, Mercedes García y Salvador Linares	Revisión Documental	La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática (scielo.org.mx)
8	Análisis de una Propuesta para el Aprendizaje del Concepto de Derivada a través de la Razón de Cambio.	Universidad del Valle	2020	Karol Tapiero Castellanos	Revisión de propuesta de trabajo de la derivada del profesor Crisólogo Flores a través de la razón de cambio y el cálculo de velocidades instantáneas.	Tapiero Castellanos, K. (2020). Análisis de una propuesta para el aprendizaje del concepto de derivada a través de la razón de cambio. Universidad del Valle.

9	Interpretación de la Noción de Razón de Cambio Instantánea en Contextos Matemáticos.	Universidad Nacional de Colombia	2012	Oscar Eduardo Videl Rojas	Trabajo de Maestría	https://drive.google.com/file/d/1t_IQO03dLiiAe5hwOocIcDg7M5EoofPt/view
10	Las Concepciones del Concepto de Derivada: Dos estudios de Caso sobre un Matemático y un Licenciado en Matemáticas.	Universidad del Valle	2017	Silvia Paola Solano, Tutor, Carlos Eduardo Vasco	Trabajo de Pregado	https://drive.google.com/file/d/1iMk-qXKEiSoFHTLXZ75fceoF1m53TIG5/view?usp=sharing
11	Una Caracterización de los Procesos Semióticos y Cognitivos Desarrollados en la Resolución de Problemas por Estudiantes de Grado Undécimo en el Contexto de la Noción de Derivada.	Universidad del Valle	2022	Mario Raúl Gómez Dirigido por Miriam Vega R.	Trabajo de Pregado	Gómez Cerón, M. (2022). Una Caracterización de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados en la resolución de problemas por estudiantes de grado undécimo en el contexto de la noción de derivada. Universidad del Valle. https://drive.google.com/file/d/1AogRYIVNaf_QZ_fhXltHVaLVdXsXwFsR/view?usp=sharing
12	Errores que presentan Estudiantes Universitarios en Relación al Concepto de la Derivada.	Universidad del Valle	2018	Andrés David Pinto	Trabajo de Pregado	Pinto Hurtado, A. (2018). Errores que presentan estudiantes universitarios en relación al concepto de la derivada. Universidad del Valle.
13	La Visualización Didáctica en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas en la Universidad del Valle: El Caso de la Derivada en un Curso de Cálculo I	Universidad del Valle	2014	Gonzalo Ramirez y Joan Ordoñez	Trabajo de Pregado	Ramírez Bernal, G y Ordoñez Cuastumal, J. (2014). La visualización didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle : el caso de la derivada en un curso de cálculo I.
14	Elementos para una Transposición Didáctica del Concepto de Derivada.	Universidad del Valle	2015	Elias Cardona	Trabajo de Maestría	Cardona Velázquez, E. (2015). Elementos para una transposición didáctica del concepto de derivada "La derivada de carathéodory". Universidad del Valle.
15	El Problema del Área: De la Medida Relativa a la Medida Abstracta	Universidad del Valle	2014	José Diovan Montilla Dirigido por Luis Recalde	Trabajo de Pregado	https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/5860e8d8-ab0d-4417-913a-28e2ecd10b36/content
16	Un Estudio sobre las Concepciones de Docentes de Matemáticas acerca de la Noción de Variación en la Educación Secundaria y Media en Instituciones Educativas de Cali	Universidad del Valle	2023	José Manuel Arenas M. y Vanessa Escallón Gómez	Trabajo de Pregado	Arenas Madrid, J y Escallón Gómez, V. (2023). Un estudio sobre las concepciones de docentes de matemáticas acerca de la noción de variación en la educación secundaria y media en instituciones educativas de Cali. Universidad del Valle.
17	El Sentido de la Derivación por Medio de la Literatura Científica	Universidad de Antioquia	2016	Diego A. Torres Jaramillo	Trabajo de Pregrado	https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/19476
18	La Comprensión del Concepto de Derivada en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión	Universidad de Antioquia	2014	Carlos E. Rendón Arcila, Karen Y. Ruiz y Yeiler Córdoba	Trabajo de Pregrado	Repositorio Institucional Universidad de Antioquia: La comprensión del concepto de derivada en el marco de la enseñanza para la comprensión (udea.edu.co)
19	El Papel de la Modelación Computacional en el Aprendizaje Significativo Crítico del Concepto de Derivada en Estudiantes del Grado Undécimo	Universidad de Antioquia	2014	Verónica Giraldo Urrea y María C. Henao	Trabajo de Pregrado	Repositorio Institucional Universidad de Antioquia: El papel de la modelación computacional en el aprendizaje significativo crítico del concepto de derivada en estudiantes del grado undécimo (udea.edu.co)

20	Comprensión de Conceptos Involucrados en Procesos de Resolución de una Ecuación Diferencial	Universidad de Antioquia	2022	Diego Antonio Rolong Molinares	Trabajo de Doctorado	Repositorio Institucional Universidad de Antioquia: Comprensión de conceptos involucrados en procesos de resolución de una ecuación diferencial (udea.edu.co)
21	Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemática	Universidad de Antioquia	2019	Jhony Villa, Jaime Carmona y Difarenev González	Artículo de Revista	https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=So718-50062018000200025
22	Significados sobre la Derivada que Manifiestan Estudiantes Universitarios	Universidad de Antioquia	2020	Jhonatan Parra	Trabajo de Maestría	https://www.researchgate.net/publication/279914807_Significados_para_la_derivada_en_un_curso_universitario_de_Matematicas
23	Análisis de una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Límite Finito de Variable Finita	Universidad de los Andes, publicado por Revista Iberoamericana de Educación Matemática	2007	Engler, Adriana, Vrancken, Silvia, Hecklein, Marcela, Müller, Daniela y Gregorini, María	Artículo	https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-de-una-propuesta-didactica-para-la-ensenanza-de-limite-finito-de-variable-finita/
24	Las Prácticas Evaluativas en el Aula de Clase: Una Mirada desde la Construcción del Concepto de Derivada	Universidad de Antioquia	2011	Garzon Barrera, Diego Alejandro Perez Castro Viáfara Cogollo, Krismar Sabino	Trabajo de Pregrado	https://hdl.handle.net/10495/22716
25	La Comprensión del Concepto de Derivada en el Marco de la Enseñanza para la Comprensión	Universidad de Antioquia	2014	Rendón Arcila, Carlos Eduardo Ruiz Restrepo, Karen Yuliana Córdoba Asprilla, Yeiler	Trabajo de pregrado	Rendón, C., Ruiz, K., & Córdoba, Y. (2014). La comprensión del concepto de derivada en el marco de "La enseñanza para la comprensión".
26	Una Concepción Institucional sobre la Derivada en la Universidad Tecnológica de Pereira, en el curso de Matemáticas I	Universidad Católica de Pereira	2016	German Cadavid Arango Walter Castro Gordillo	Artículo de Revista	Castro Gordillo, W., & Cadavid Arango, G. (2016). Una concepción institucional sobre la derivada en la Universidad Tecnológica de Pereira, en el curso de Matemáticas I. Entre Ciencia E Ingeniería, 10(20), 9-14. Recuperado a partir de https://revistas.unp.edu.co/index.php/entrecienciaei
27	Comprensión del Concepto de Derivada de Maestros en Formación en el Contexto de Newton y de Leibniz a partir de la EpC	Universidad de Antioquia	2021	Cardona Arias, América María	Tesis de maestría	https://hdl.handle.net/10495/23568
28	Qué Sentido tienen las Matemáticas: Una Propuesta de Acercamiento a la Noción de Derivada desde una Perspectiva Crítica de la Modelación Matemática.	Universidad Distrital	2017	Cesar E. Paez y Harold a. Hernandez	Trabajo de Pregado	Cesar Enriquez Paez, Harold Alberto Hernandez. (2017). Qué sentido tienen las matemáticas: Una propuesta de acercamiento a la noción de derivada desde una perspectiva crítica de la modelación matemática. Universidad Distrital.
29	Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de la Derivada en el Último Grado de Educación Secundaria.	Universidad Nacional de Colombia	2013	Pineda Ruiz, Carlos Eduardo	Trabajo de Maestría	Pineda Ruiz, C. (2013). <i>Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria.</i>
30	El Concepto de Aproximación Local: Una Propuesta Metodológica a partir de la Recta Tangente	Universidad del Valle	2013	Esteban Duarte, Pedro Vicente Pérez Carreras, Pedro	Artículo de Revista	Esteban Duarte, P y Pérez Carreras, P. (2013). El concepto de aproximación local : una propuesta metodológica a partir de la recta tangente.
31	La Pendiente de la Recta como una Razón de Cambio para Aproximarse al Concepto de Derivada	Universidad Nacional de Colombia	2018	Ossa Zapata, Tatiana Andrea	Trabajo de MAestría	Ossa Zapata, T. (2018). La pendiente de la recta como una razón de cambio para aproximarse al concepto de derivada.
32	Libro Taller para la Enseñanza del Concepto de Derivada en el Grado 11 (Un enfoque Geométrico)	Universidad Nacional de Colombia	2014	Barrientes Tascón, Paula Andrea	Trabajo de Maestría	Barrientes Tascón, P. (2014). Libro-Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11° (un enfoque geométrico).

33	Una Propuesta Para la Enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo	Universidad Nacional de Colombia	2011	Cardona Aguirre, Robinson Alfonso	Trabajo de Maestría	Cardona Aguirre, R. (2011). <i>Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo.</i>
34	¿Enseñamos a los profesores de matemáticas aquello que nos enseña la investigación en didáctica sobre la derivada?	Universidad Pedagógica Nacional	2013	Carolina Rojas Celis	Trabajo de Grado en Maestría en Docencia de la Matemática	http://hdl.handle.net/20.500.12209/204
35	Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de Derivada	Universidad del Quindío	2013	Darío Álvarez y Humberto Ospina	Artículo en la Revista Científica	https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/5961
36	Una Propuesta para la Enseñanza de la Derivada Basada en el Aprendizaje Autónomo	Universidad de Cartagena	2017	Alfonso Gómez Mulett	Artículo de Revista	https://ojs.urepublicana.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/201/255
37	Una Propuesta para la Enseñanza del Concepto de Derivada de una Función, Mediante Actividades de Visualización	Universidad de Guadalajara México	2014	Lucía González Rendón y Marisol Radillo Enríquez	Artículo en la Revista Iberoamericana de Educación Matemática	https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/una-propuesta-para-la-ensenanza-del-concepto-de-derivada-de-una-funcion-mediante-actividades-de-visualizacion/
38	El Desarrollo Histórico-Epistemológico de la Derivada en el Paso de lo Geométrico a lo Analítico.	Universidad del Valle	2019	Vega Agredo, Samith Tatiana Dirigido por Luis Recalde	Trabajo de Grado Maestría	https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/ea009432-f44c-4a92-9c58-bdaec3f4e3e2
39	Historia y Epistemología de la Función Derivada	Universidad Pedagógica Nacional	2009	Eliseo Ramírez Rincón	Ponencia	https://revistas.upn.edu.co/index.php/TED/article/view/261
40	Idoneidad Epistémica del Significado de la Derivada en el Currículo de Bachillerato	Universidad del Valle		Walter F. Castro Juan d. Godino Luis Pino- Fan Vicenc Font	Artículo de Revista	https://drive.google.com/drive/folders/1ZV_gTgfC4Pd3ZPRHjCWbyvCWAFBRL8GO
41	Breve Historia del Concepto de Derivada	Universidad de Quindío	2015	Juan Carlos Ponce C.	Libro	https://drive.google.com/drive/folders/1ZV_gTgfC4Pd3ZPRHjCWbyvCWAFBRL8GO
42	Un Acercamiento Histórico a la Formación del Concepto de Derivada	Universidad de Sucre	2003	Miguel Martín Suárez	Trabajo de grado Pregrado	https://drive.google.com/drive/folders/1ZV_gTgfC4Pd3ZPRHjCWbyvCWAFBRL8GO
43	Desarrollo del Concepto de la Derivada sin la Noción del Límite	Fundación Universitaria Konrad Lorenz	2011	Yeimy Alexandra Lozano Robayo	Trabajo de Pregrado	https://repositorio.konradlorenz.edu.co/search?spc.page=1&query=Derivada
44	Una Propuesta Didáctica Centrada en la Resolución de Problemas para la Enseñanza y Aprendizaje de la Derivada en el Tercer Curso de la Educación Media del Colegio Municipal Santa Rosa de Lima, Departamento Central, Paraguay	Universidad Pedagógica Nacional (Paraguay)	2018	Simón Francisco Ruiz Díaz Vicézar	Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Especialista en Pedagogía	http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/9153/TO-22062.pdf?sequence=1&isAllowed=y
45	Estudio de las Variaciones y Covariaciones Proporcionales de las Funciones Polinómicas hasta Cuarto Grado, como Estrategia Didáctica para la Enseñanza del Concepto de Derivada a partir de Razones de Cambio Correlacionadas.	Universidad Pedagógica Nacional	2012	Barreto Pulido, Héctor Eduard y Caro Quintero, Juan Pablo	Trabajo de Grado	http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/113/TO-15346.pdf?sequence=1&isAllowed=y
46	Una Aproximación a la Derivada desde la Variación y el Cambio	Universidad Pedagógica Nacional	2015	John Jairo Gómez y Cesar Augusto Martínez	Trabajo de grado en Especialización en Educación Matemática	http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/142/TO-18803.pdf?sequence=1&isAllowed=y
47	Variación de una Función: Hacia el Estudio de la Derivada	Madrid, España	1996	Carmen Azcárate Giménez y Jordi Deulofeu	Libro	https://www.sintesis.com/libro/funciones-y-graficas
48	La Variación y la Derivada	Madrid, España	2012	Crisólogo Dolores Florez	Libro	La variación y la derivada Dolores Flores, Crisólogo 978-84-9969-091-9
49	El estudio de la tasa de cambio en el entendimiento de la derivada	UNAM Mexico	2008	Rojas García, Zaira Eréndira	Maestría en Educación Superior	https://ru.dgb.unam.mx/handle/20.500.14330/TES01000632125

ANEXO C

Clasificación de las Propuestas de Enseñanza de la Derivada

INTERNACIONALES						
#	Título	Lugar de Publicación	Año	Autores	Observación	Referencia o Link
1	Variación de una Función: Hacia el Estudio de la Derivada	Madrid, España	1996	Carmen Azcárate Giménez y Jordi Deulofeu	Libro	https://www.sintesis.com/libro/funciones-y-graficas
2	La Variación y la Derivada	Madrid, España	2012	Crisólogo Dolores Florez	Libro	La variación y la derivada Dolores Flores, Crisólogo 978-84-9969-091-9
3	El estudio de la tasa de cambio en el entendimiento de la derivada	UNAM México	2008	Rojas García, Zaira Eréndira	Maestría en Educación Superior	https://ru.dgb.unam.mx/handle/20.500.14330/TES01000632125
4	Una Propuesta Didáctica Centrada en la Resolución de Problemas para la Enseñanza y Aprendizaje de la Derivada en el Tercer Curso de la Educación Media del Colegio Municipal Santa Rosa de Lima, Departamento Central, Paraguay	Universidad Pedagógica Nacional (Paraguay)	2018	Simón Francisco Ruíz Díaz Vicézar	Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Especialista en Pedagogía	http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/9153/TO-22062.pdf?sequence=1&isAllowed=y
5	Una Propuesta para la Enseñanza del Concepto de Derivada de una Función, Mediante Actividades de Visualización	Universidad de Guadalajara México	2014	Lucía González Rendón y Marisol Radillo Enríquez	Artículo en la Revista Iberoamericana de Educación Matemática	https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/una-propuesta-para-la-ensenanza-del-concepto-de-derivada-de-una-funcion-mediante-actividades-de-visualizacion/

NACIONALES						
#	Título	Lugar de Publicación	Año	Autores	Observación	Referencia o Link
1	Qué Sentido tienen las Matemáticas: Una Propuesta de Acercamiento a la Noción de Derivada desde una Perspectiva Crítica de la Modelación Matemática.	Universidad Distrital	2017	Cesar E. Páez y Harold a. Hernández	Trabajo de Pregrado	Cesar Enriquez Paez, Harold Alberto Hernandez. (2017). Qué sentido tienen las matemáticas: Una propuesta de acercamiento a la noción de derivada desde una perspectiva crítica de la modelación matemática. Universidad Distrital.
2	Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de la Derivada en el Último Grado de Educación Secundaria.	Universidad Nacional de Colombia	2013	Pineda Ruiz, Carlos Eduardo	Trabajo de Maestría	Pineda Ruiz, C. (2013). <i>Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria.</i>
3	La Pendiente de la Recta como una Razón de Cambio para Aproximarse al Concepto de Derivada	Universidad Nacional de Colombia	2018	Ossa Zapata, Tatiana Andrea	Trabajo de Maestría	Ossa Zapata, T. (2018). La pendiente de la recta como una razón de cambio para aproximarse al concepto de derivada.
4	Libro Taller para la Enseñanza del Concepto de Derivada en el Grado 11 (Un enfoque Geométrico)	Universidad Nacional de Colombia	2014	Barrientos Tascón, Paula Andrea	Trabajo de Maestría	Barrientos Tascón, P. (2014). Libro-Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11° (un enfoque geométrico).
5	Una Propuesta Para la Enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo	Universidad Nacional de Colombia	2011	Cardona Aguirre, Robinson Alfonso	Trabajo de Maestría	Cardona Aguirre, R. (2011). <i>Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo.</i>
6	Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Concepto de Derivada	Universidad del Quindío	2013	Darío Álvarez y Humberto Ospina	Artículo en la Revista Científica	https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/5961
7	Una Propuesta para la Enseñanza de la Derivada Basada en el Aprendizaje Autónomo	Universidad de Cartagena	2017	Alfonso Gómez Mulett	Artículo de Revista	https://ojs.urepublicana.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/391/355
8	Desarrollo del Concepto de la Derivada sin la Noción del Límite	Fundación Universitaria Konrad Lorenz	2011	Yeimy Alexandra Lozano Robayo	Trabajo de Pregrado	https://repositorio.konradlorenz.edu.co/search?spc.page=1&query=Derivada

LOCALES						
#	Título	Lugar de Publicación	Año	Autores	Observación	Referencia o Link
1	El Desarrollo Histórico-Epistemológico de la Derivada en el Paso de lo Geométrico a lo Analítico.	Universidad del Valle	2019	Vega Agredo, Samith Tatiana Dirigido por Luis Recalde	Trabajo de Grado Maestría	https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/ea009432-f44c-4a92-9c58-bdaec3f4e3e2
2	El Concepto de Aproximación Local: Una Propuesta Metodológica a partir de la Recta Tangente	Universidad del Valle	2013	Esteban Duarte, Pedro Vicente Pérez Carreras, Pedro	Artículo de Revista	Esteban Duarte, P y Pérez Carreras, P. (2013). El concepto de aproximación local: una propuesta metodológica a partir de la recta tangente.
3	Las Concepciones del Concepto de Derivada: Dos estudios de Caso sobre un Matemático y un Licenciado en Matemáticas.	Universidad del Valle	2017	Silvia Paola Solano, Tutor, Carlos Eduardo Vasco	Trabajo de Pregrado	https://drive.google.com/file/d/1iMk-qXKEiSoFHTLXZ75fceoF1m53TIG5/view?usp=sharing
4	Elementos para una Transposición Didáctica del Concepto de Derivada.	Universidad del Valle	2015	Elías Cardona	Trabajo de Maestría	Cardona Velázquez, E. (2015). Elementos para una transposición didáctica del concepto de derivada "La derivada de carathéodory". Universidad del Valle.
5	Un Estudio sobre las Concepciones de Docentes de Matemáticas acerca de la Noción de Variación en la Educación Secundaria y Media en Instituciones Educativas de Cali	Universidad del Valle	2023	José Manuel Arenas M. y Vanessa Escallón Gómez	Trabajo de Pregrado	Arenas Madrid, J y Escallón Gómez, V. (2023). Un estudio sobre las concepciones de docentes de matemáticas acerca de la noción de variación en la educación secundaria y media en instituciones educativas de Cali. Universidad del Valle.

6	Análisis de una Propuesta para el Aprendizaje del Concepto de Derivada a través de la Razón de Cambio.	Universidad del Valle	2020	Karol Tapiero Castellanos	Revisión de propuesta de trabajo de la derivada del profesor Crisólogo Flores a través de la razón de cambio y el cálculo de velocidades instantáneas.	Tapiero Castellanos, K. (2020). Análisis de una propuesta para el aprendizaje del concepto de derivada a través de la razón de cambio. Universidad del Valle.
---	--	-----------------------	------	---------------------------	--	---

ANEXO D: Versiones preliminares de la matriz de análisis

Presentamos aquí dos versiones anteriores de la matriz de análisis

Versión 1 de la matriz de análisis

CATEGORÍAS DE ORDEN SUPERIOR (MARCO TEÓRICO)	SUBCATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN DE LOS CRITERIOS ESPECÍFICOS
PERSPECTIVA CURRICULAR	Idoneidad currículo nacional	Con esta subcategoría se pretende identificar la idoneidad o complementariedad que tienen las propuestas con la construcción del currículo nacional, el desarrollo de sus competencias y los significados institucionales que adopta la derivada. Se trata de poner evidencia si eso que nos presenta la propuesta de trabajo se puede articular de alguna manera con las propuestas que tiene el Ministerio de Educación Nacional para desarrollar la noción de derivada en los estudiantes y poder identificar así las estrategias más efectivas. Algunas de las posibles preguntas a las que puede responder esta subcategoría se indican a continuación: • ¿La propuesta puede fomentar el desarrollo de alguna competencia en el marco del pensamiento variacional y sistemas algebraicos del currículo nacional? • ¿Las estrategias empleadas por la propuesta desarrollan la noción de derivada como objeto fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional? • ¿Las estrategias empleadas por la propuesta articulan otros tipos de pensamiento matemático tales como geométrico, métrico o numérico?
	Idoneidad investigación internacional	La subcategoría que aborda la idoneidad de las propuestas con la investigación internacional busca poner en evidencia si las estrategias empleadas se corresponden o tienen en cuenta los avances que se hacen en el campo de la educación matemática con relación al desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, esto debido a que no tiene sentido resaltar y replicar estrategias que se desarrollen por fuera de lo reportado por la investigación. Para efectos prácticos, las preguntas que podrían indicarnos si se cumple o no este requisito serían: • ¿Cómo caracteriza la noción de variación la propuesta y que papel le otorga en la construcción global de la noción de derivada? • ¿Cuál es la estrategia central que se propone para desarrollar la noción de variación como eje central del pensamiento variacional? • ¿Qué fuentes o autores usa la propuesta para fundamentarse teórica y metodológicamente?
PERSPECTIVA HISTÓRICO- EPISTEMOLÓGICA	Origen fenomenológico	El propósito con esta subcategoría es entender cómo la propuesta pone en juego el origen de la derivada, es decir, cómo plantea el surgimiento y la necesidad de tener la derivada a partir de unos problemas históricos que caracterizan la fenomenología del concepto. Es claro que para caracterizar la derivada es necesario mostrar mínimamente cómo surge y dotar al estudiante con una herramienta poderosa que permite solucionar una serie de problemas con el mismo dominio. • ¿En qué fenómenos de la vida real aparece la noción de derivada? • ¿Por qué se hace necesaria la aparición de la derivada dentro de las matemáticas? • ¿Cómo se usa la derivada para explicar fenómenos de variación?
	Carga histórica	Relativo a la carga histórica del concepto, el propósito aquí es preguntarse cómo la propuesta articula la historia del desarrollo de la derivada con las estrategias que propone, esto porque la historia de un concepto matemático es de vital importancia dentro del campo de la educación matemática. Algunas de las preguntas que podrían poner en evidencia el contenido histórico que condensa la propuesta son: • ¿Qué elementos históricos presenta la propuesta y cómo los utiliza para desarrollar la noción de derivada en el estudiante? • ¿La propuesta muestra la evolución de los significados que se tenía a lo largo de la historia en relación con la derivada? • ¿Qué tan importante es la noción de variación en el tratamiento histórico de la propuesta en caso de que hubiese uno?
	Campo conceptual	La subcategoría del campo conceptual es quizá la de mayor interés puesto que aquí se pretende analizar en sí cómo se entiende la noción de derivada en la propuesta, cómo se desarrolla, que tipo de problemas aborda, cuáles son sus aplicaciones y relevancia dentro del campo de la matemática. Algunas de las preguntas que pueden direccionar el análisis de las propuestas en este sentido se presentan a continuación: • ¿Qué interpretación se le asigna a la noción de derivada local y global? • ¿Qué es la derivada en un punto y cómo se relaciona con la función derivada? • ¿Cuál es la interpretación geométrica que se le asigna a la derivada? • ¿Qué es la razón de cambio y como se relaciona con la derivada?
	Sistemas de representación	Puesto que los sistemas de representación que se emplean en la enseñanza de las matemáticas son fundamentales para comprender cómo son los procesos de reconocimiento y abstracción de los objetos matemáticos es importante entonces preguntarse qué medios usan las diferentes propuestas y cómo los emplean para desarrollar la noción de derivada en los estudiantes. Algunas de las preguntas que podrían ayudarnos a reconocer el uso de los sistemas de representación en las propuestas son las siguientes: • ¿Qué registros emplea la propuesta para manipular las construcciones que se hacen de la derivada? • ¿De qué forma se caracteriza la derivada en la propuesta? ¿Se hace por medios numéricos? ¿Gráficos? ¿Geométricos? • ¿Qué papel se les da a los registros de representación de forma global en la propuesta? • ¿Hay coordinación entre registros? • ¿Se usa algún dispositivo que favorezca uno o varios registros de representación? • ¿La propuesta usa de manera acertada las reglas de uso de los registros empleados?

PERSPECTIVA DIDÁCTICA	Dificultades y obstáculos conceptuales	La forma en la que las diferentes propuestas de trabajo abordan las dificultades y obstáculos es clave en la selección de las estrategias idóneas para la construcción de la noción de derivada en los estudiantes. Primero debemos identificar si las propuestas efectivamente tienen en consideración las dificultades reportadas por la investigación y segundo, las propuestas deben emplear métodos para solucionar o por lo menos evitar replicar las mismas situaciones que históricamente han generado el problema de comprensión en los estudiantes. Algunas de las preguntas orientadoras para esta subcategoría son: • ¿Qué escenarios se propone para abordar las dudas de los estudiantes? • ¿Es posible identificar una conciencia por parte de los autores acerca de las dificultades más conocidas en relación con la enseñanza de la derivada? • ¿Algunas de las actividades propuestas o escenarios de aprendizaje fomentan la incurrancia de dificultades en el estudiante? • ¿Qué papel se le otorga al concepto de límite de manera global en la construcción de la noción de derivada? • ¿Cómo se le da tratamiento al salto entre las representaciones de la derivada con el fin de evitar los obstáculos? • ¿Se emplean reglas de formulación matemática muy avanzadas para las descripciones geométricas, numéricas y algebraicas de la noción de derivada? • ¿Se establecen metas claras de aprendizaje al inicio de la propuesta?
	Enfoque metodológico	Una de las razones más fuertes para la revisión de las propuestas de trabajo alternativas sobre la enseñanza de la derivada la constituye el error de replicar construcciones netamente algorítmicas que se hacen del concepto en la escuela, es por esto que es de vital importancia poder caracterizar el enfoque metodológico que tienen las propuestas con el fin de garantizar que las estrategias que se van a recopilar son innovadoras y permiten que el estudiante se sitúe en un nivel epistémico superior frente a la noción de derivada. Para poder entender qué función cumple esta subcategoría es necesario poner en practica una serie de conocimientos didácticos y matemáticos que le permitan al profesor establecer metas claras de aprendizaje, objetivos y criterios para la evaluación. Es importante aquí garantizar que toda acción que se emplee en las propuestas sea una acción consciente por parte del profesor en la consecución de esos objetivos planteados. • ¿La propuesta supera la barrera de lo algorítmico? • ¿Qué valor se les otorga a las reglas de uso algebraico? • ¿Las metas y/o objetivos de aprendizaje son claros desde el inicio de la propuesta? • ¿Cómo se orquestan las diferentes actividades, definiciones, evaluaciones, etc. con relación a la consecución de las metas de aprendizaje? • ¿Es posible modificar o adaptar parcialmente las estrategias encontradas para ser implementadas con estudiantes de diferentes niveles de escolaridad?

Versión 7 de la matriz de análisis

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	SUB - SUBCATEGORÍAS	DESCRIPCIÓN DE LAS SUB	CRITERIO
ASPECTOS MATEMÁTICO – CURRICULARES: PENSAMIENTO VARIACIONAL Y DERIVADA.	CONOCIMIENTOS BÁSICOS	ANÁLISIS DE CONTENIDO	Esta categoría analiza la interpretación de la derivada tanto de manera local, como tasa de cambio instantánea y herramienta para identificar máximos, mínimos y puntos críticos, como global, asociada a conceptos de crecimiento, decrecimiento y concavidad. También se examinan las diversas representaciones de la derivada (natural, simbólica y gráfica) y su aplicación en fenómenos de optimización, análisis de curvas, dinámica de movimientos y contextos económicos o financieros.	La propuesta incluye implícita o explícitamente todas o la mayoría de las definiciones de las subcategorías
		HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO	Esta categoría explora cómo se introduce y utiliza el concepto de derivada, analizando su asociación con la tangente a través de representaciones geométricas y simbólicas. Se incluye su interpretación como tasa de cambio instantánea, vinculada al límite como idea de cercanía entre puntos, y su aplicación para comprender variaciones en funciones respecto a cambios infinitesimales en la variable independiente.	
		CARACTERÍSTICAS DEL PV	Esta categoría se centra en la comprensión y representación de la variación como base del pensamiento variacional, abordando cambios en variables bajo condiciones continuas o discretas. Se analiza el uso de conceptos como variación, cambio, variable y función, junto con representaciones cualitativas (textuales y pictóricas) y cuantitativas (geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas). Además, se examina cómo el pensamiento variacional integra perspectivas numéricas, geométricas, algebraicas, métricas y estadísticas para modelar situaciones de cambio y variación.	
	PROCESOS	MODELACIÓN	Esta categoría consiste en analizar cómo las actividades y recursos propuestos fomentan el desarrollo del pensamiento variacional, entendiendo este como la capacidad de modelar situaciones del mundo real mediante funciones matemáticas. En este sentido, se examina si las actividades permiten simplificar, idealizar y estructurar situaciones problema, trasladarlas al lenguaje matemático para crear modelos funcionales, y validar dichos modelos mediante la identificación de discrepancias que puedan llevar a su ajuste o reemplazo. También se incluye el uso de representaciones concretas, como maquetas en movimiento, para facilitar la comprensión de relaciones entre variables y magnitudes en contextos dinámicos.	
			Las actividades permiten modelar, representar, construir situaciones problema, trasladarlas al lenguaje matemático para crear modelos funcionales, y validar dichos modelos mediante la identificación de discrepancias que puedan llevar a su ajuste o reemplazo.	
		PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Esta categoría se centra en el desarrollo del pensamiento variacional mediante la modelación de situaciones reales, promoviendo la simplificación, estructuración y matematización de problemas para generar modelos matemáticos que conecten el conocimiento matemático con contextos prácticos y significativos.	
	CONTEXTOS	COMUNICACIÓN, EJERCITACIÓN DE PROCEDIMIENTOS, RAZONAMIENTO	Esta categoría promueve la comunicación matemática y el pensamiento crítico mediante consignas que exigen interpretación, demostración, y planteamiento de conjeturas sobre la derivada. Además, fomenta el desarrollo, aplicación, y justificación de estrategias para resolver problemas, identificando patrones, generalizando soluciones y creando un ambiente que estimule la exploración y comprobación de ideas.	
		MATEMÁTICOS, DE LAS OTRAS CIENCIAS Y DE LA VIDA DIARIA.	Esta categoría destaca el uso de contextos matemáticos, cotidianos y científicos para dar significado al aprendizaje de la variación y las funciones, incentivando el análisis de relaciones entre variables. Se promueve la exposición a funciones no regulares, el diseño de problemas que involucren afectividad y aprendizaje, y el uso de múltiples representaciones para profundizar la comprensión, permitiendo la interpretación y traducción entre diferentes formas de representación.	
ASPECTOS DIDÁCTICOS	DIFICULTADES ASOCIADAS A LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA	OBJETOS	Esta categoría analiza las dificultades conceptuales y representacionales en torno a los números reales y las funciones. Aborda la falta de claridad en la asociación de los números reales con el continuo numérico y las concepciones limitadas de función, enfocadas en prototipos o fórmulas. También examina la rigidez en la visión de la función como proceso o entidad conceptual y los retos en la articulación de registros simbólicos, con una predominancia del enfoque algebraico sobre los gráficos.	La propuesta incluye implícita o explícitamente todas o la mayoría de las definiciones de las subcategorías
		LÍMITE	Esta categoría explora los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de "límite". Incluye dificultades derivadas del sentido común, que lo ve como una barrera inalcanzable, su tratamiento como un proceso algebraico "finito", y concepciones geométricas incorrectas que generan errores sobre las magnitudes asociadas al límite. También se aborda la falta de conexión entre el uso operacional del límite y su estructura como objeto matemático.	
		MODOS DE PENSAMIENTO	Esta categoría aborda las implicaciones didácticas del tratamiento de la igualdad y el cambio en el razonamiento. Diferencia la igualdad en su interpretación estática, donde se consideran valores idénticos, de la igualdad dinámica o condicional, promoviendo un cambio en el razonamiento desde un enfoque procedimental a uno conceptual o condicional.	

ANEXO E: Propuesta de Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu

Funciones y graficas

En este apartado se incluyen imágenes y fragmentos seleccionados de las propuestas de aprendizaje analizadas en este trabajo. Los elementos aquí presentados corresponden a aquellas partes que fueron referenciadas en el análisis realizado, así como otros apartados relevantes que permiten contextualizar cada propuesta en el marco de la enseñanza del concepto de derivada.

Es importante aclarar que este material no constituye una reproducción completa de las obras originales, sino una selección limitada de contenido con fines estrictamente académicos. Todas las imágenes y fragmentos están debidamente referenciados y se utilizan bajo el principio de uso justo, respetando los derechos de autor de los textos originales.

Los derechos sobre la propuesta aquí citada pertenecen a sus respectivos autores y editoriales: Azcárate Giménez, C., & Deulofeu Piquet, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis

Este material tiene como propósito exclusivo apoyar la comprensión y análisis de las propuestas descritas en el cuerpo del trabajo, sin fines comerciales ni de distribución no autorizada. A continuación, un enlace a la biblioteca de dicha editorial en donde las personas interesadas podrían adquirir el libro:

<https://www.sintesis.com/libro/funciones-y-graficas>

5.

Variación de una función: Hacia el estudio de las derivadas

5.1. INTRODUCCION: EL CONCEPTO DE LIMITE

Vamos a empezar por analizar el enfoque que se le puede dar al concepto de límite que constituye la dificultad fundamental del concepto de derivada. Empezaremos por una discusión en la que consideramos los dos enfoques didácticos más comunes, seguiremos después con unas ideas acerca de la introducción del concepto de límite en general, y acabaremos, finalmente, con el concepto geométrico de tangente a una curva en un punto como posición límite de las secantes a la curva que pasan por dicho punto y que nos servirá de introducción al concepto de derivada.

5.1.1. Discusión: Límites y derivadas

Si atendemos a los libros de texto de varios países en los cursos de secundaria donde se introduce el concepto de derivada, podemos establecer dos corrientes distintas:

- Aquellos que definen la derivada como una aplicación del concepto de límite de una función, previamente estudiado (Francia, Italia, España).
- Aquellos que plantean el concepto de derivada como una primera introducción al concepto de límite de una función (Gran Bretaña).

Vamos a analizar las ventajas e inconvenientes que plantea cada uno de estos enfoques, para poder fundamentar nuestra propuesta.

Desde un punto de vista puramente teórico y matemático, el primer enfoque es el más lógico, ya que respeta las secuencias del desarrollo deductivo del cálculo diferencial: funciones reales de variable real, concepto de límite de funciones, cálculo de límites de funciones, continuidad de funciones,

concepto de derivada de una función. Observemos, sin embargo, que el desarrollo deductivo no se corresponde con la génesis histórica del concepto de derivada que, por supuesto, no ha seguido este modelo lineal y lo que es más, ha precedido con mucho el concepto riguroso de límite de una función.

Desde un punto de vista didáctico, el primer enfoque tiene un fuerte inconveniente: hace depender la definición de derivada de la definición y del cálculo de límites. Sin pretender hacer aquí un estudio exhaustivo de las dificultades que tienen los alumnos en el estudio de límites, si queremos recoger los resultados de varias investigaciones en didáctica de las matemáticas que se han ocupado especialmente de los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite (Cornu, 1980, 1983; Robinet, 1983; Sierpinski, 1985, 1987).

A partir del estudio del desarrollo histórico del concepto de límite y de los análisis de las experiencias llevadas a cabo con alumnos en el momento de iniciar su primer contacto con dicho concepto, se puede establecer la siguiente clasificación:

1. Obstáculos ligados al «horror» al infinito. Se trata del principal obstáculo y, de hecho, tiene una raíz metafísica ligada a la discusión de la existencia de lo infinitamente grande o pequeño, de si el límite es alcanzable, de si existe un intermedio entre lo infinitamente pequeño y lo nulo... En los estudiantes existen muchas manifestaciones de ello como es la idea de límite como aquello de lo que sólo conocemos aproximaciones. También se observa cómo transfieren automáticamente los métodos algebraicos propios de las magnitudes finitas a las magnitudes infinitas. Otra transferencia que hacen los alumnos es la de las propiedades de los términos de una serie a las de su límite. Existe también la idea de que el paso al límite es como un movimiento físico de acercamiento si bien el concepto de límite en la teoría formal es estático.
2. Obstáculos ligados al concepto de función. De hecho la aparición del concepto general de función ha sido decisivo para formular claramente el concepto de límite despojado de las intuiciones geométricas y físicas. En los alumnos este obstáculo se manifiesta en su concepto primitivo de la continuidad («puntos próximos»), en la atención que prestan al aspecto relacional de la función que predomina sobre las propiedades topológicas del dominio y del codominio y sobre todo en la dificultad que tienen en distinguir el límite de las cotas superior e inferior.
3. Obstáculo geométrico. Este obstáculo se manifiesta en la idea geométrica de la diferencia entre una magnitud variable (los polígonos que se acercan al círculo o las secantes a una curva) y una magnitud constante (el círculo o la tangente) que es su límite.
4. Obstáculo lógico. Los cuantificadores resultan unos entes extraños y, además, aparece un problema en el orden de los cuantificadores: la función

lleva del eje x al eje y , mientras que al estudiar el límite de una función en un punto se sigue el orden inverso.

5. Obstáculo ligado al símbolo. En tanto que los alumnos consideran que el paso al límite no es una operación matemática, no sienten ninguna necesidad de utilizar un simbolismo tan complejo.

Como consecuencia de estas consideraciones nos parece evidente que el concepto de límite es de una complejidad tal que implica la necesidad de discutir cuál es su lugar en el currículo y cuál es el nivel de rigor que se pretende alcanzar en unos estudios de secundaria obligatoria. En todo caso estamos convencidos de que no es necesario esperar a que los alumnos hayan superado la mayoría de los obstáculos antes mencionados para iniciar el estudio de la variación de una función en un punto. De aquí que descartemos totalmente este primer enfoque.

Podríamos decir que el segundo enfoque que consiste en utilizar el concepto de derivada como una primera introducción al concepto de límite de una función sigue más fielmente el desarrollo histórico, ya que parte del método utilizado por Newton en su cálculo de velocidades instantáneas y cuya base gráfica consiste en calcular la pendiente de la tangente a una curva en un punto A como el límite de la pendiente de la cuerda AB cuando B tiende a A .

Este método tiene el inconveniente de partir de una situación de cálculo de límite especialmente difícil: la de límites de cocientes donde tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Sin embargo, si el objetivo no es el de un tratamiento formal y riguroso del concepto de límite, si se pueden abordar una serie de situaciones geométricas y numéricas que permitan un primer contacto con los límites en relación con el tema de la variación de una función. Es evidente que también aquí aparecen buena parte de los obstáculos epistemológicos antes mencionados, pero de esta manera el límite aparece como un instrumento que permite resolver el problema de cómo varía la función en un punto y nos ahorramos buena parte de los aspectos formales.

La propuesta didáctica que presentamos aquí para introducir el concepto de derivada y los primeros cálculos de funciones derivadas consiste en la siguiente secuencia:

- Casos diversos de límites en el campo numérico y geométrico.
- Un caso concreto: las cuerdas y las tangentes.
- Tasa media de variación y velocidad media.
- Tasa instantánea de variación y velocidad instantánea.
- Funciones derivadas.

5.1.2. Diversas aproximaciones al concepto de límite

El objetivo de este capítulo es dar algunas ideas que sirvan de aproximación al concepto de límite. No se trata de un estudio riguroso, sino simplemente de un primer contacto con unos casos concretos y sugerentes. La metodología más apropiada para tratar este tema será el trabajo en grupo y discusión. Buena parte de los ejemplos provienen de temas conocidos por los alumnos como, por ejemplo, los decimales periódicos, el cálculo de raíces cuadradas con calculadora o las progresiones geométricas convergentes. Por tanto, siguiendo el proceso cíclico de aprendizaje, consistirá en una reflexión más profunda de algo ya conocido.

a) Recordemos el proceso del cálculo de una raíz como, por ejemplo, $\sqrt{5}$, utilizando una calculadora con el método de aproximaciones sucesivas o de ensayo y error. Partimos de que

$$2^2 < 5 < 3^2$$

por tanto

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

Probando con los cuadrados de 2,1, 2,2, 2,3, llegamos a

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

El paso siguiente es probar con los cuadrados de 2,21, 2,22, 2,23, 2,24 y obtenemos

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$$

A continuación probamos con los cuadrados de ...2,235, 2,236, 2,237 y nos da

$$2,236 < \sqrt{5} < 2,237$$

y podemos seguir probando y obteniendo desigualdades con más y más decimales. Los alumnos admiten fácilmente que siguiendo este proceso pueden acercarse tanto como quieran a $\sqrt{5}$ si bien no conocen y no pueden hallar el valor exacto de $\sqrt{5}$.

Lo que sí pueden hacer es hallar las diferencias entre las aproximaciones por defecto y por exceso y ver que son cada vez menores, diez veces menores en cada caso; de hecho, pueden comprobar que dichas diferencias pueden

hacerse tan próximas a cero como queramos a base de prolongar la serie más y más. Las diferencias entre $\sqrt{5}$ y las aproximaciones decimales también serán cada vez menores de forma que se puede obtener una aproximación tan próxima como queramos de $\sqrt{5}$. Se puede construir la tabla:

Aprox. por defecto	Aprox. por exceso	Diferencias entre $\sqrt{5}$ y cada aproximación
2	3	menos de 1
2,2	2,3	menos de 0,1
2,23	2,24	menos de 0,01
2,236	2,237	menos de 0,001
2,2360	2,2361	menos de 0,0001

Podremos decir que cada una de las series de aproximaciones

2, 2,2, 2,23, 2,236, 2,2360...

3, 2,3, 2,24, 2,237, 2,2361...

convergen hacia $\sqrt{5}$.

b) Cuando se estudian las fracciones y su expresión decimal aparece el tema de los números decimales periódicos; es interesante ver la relación entre las fracciones, su expresión decimal periódica y su representación gráfica. Veamos el ejemplo de la fracción $1/3$.

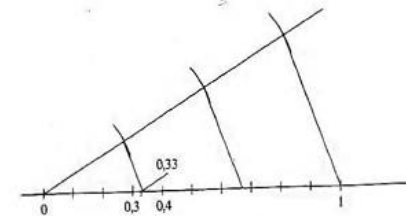
En un principio, por división, se ve que siempre queda un resto 1 y que «nunca se acaba» de dividir:

$$\begin{array}{r} 1,00000... \quad | \quad 3 \\ 10 \quad \quad \quad 0,3333... \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{array}$$

Se escribe

$$1/3 = 0,3333... = 0,\dot{3}$$

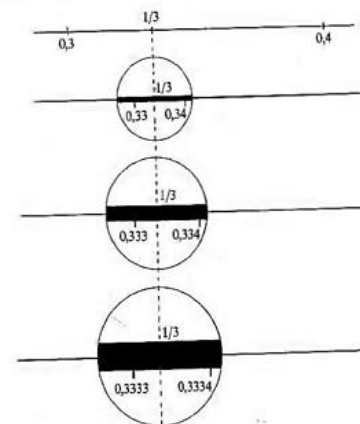
y se dice que $0,\dot{3}$ es un número decimal periódico puro. La representación gráfica de $1/3$ se podrá hacer de dos maneras: por la conocida construcción con regla y compás o marcando los puntos correspondientes a las primeras aproximaciones de $1/3$ como son 0,3, 0,33.



GRAFICA 5.1

En la práctica, es difícil distinguir entre el punto que representa 0,33 y el punto que representa $1/3$. Conviene recordar aquí que $0,33 \times 3 = 0,99 \neq 1$, por tanto, 0,33 no es igual a $1/3$. Y así ninguno de los puntos que representan cada una de las aproximaciones 0,333, 0,3333..., será exactamente el punto que representa $1/3$.

La representación con lupas sucesivas dará una serie de segmentos encajados como los de la figura:



GRAFICA 5.2

que darán las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} 0,3 &< 1/3 < 0,4 \\ 0,33 &< 1/3 < 0,34 \\ 0,333 &< 1/3 < 0,334 \\ 0,3333 &< 1/3 < 0,3334 \end{aligned}$$

y podremos construir la tabla de aproximaciones por defecto y por exceso y las diferencias correspondientes que dan la amplitud de cada uno de los segmentos encajados

Aprox. por defecto	Aprox. por exceso	Diferencias
0,3	0,4	0,1
0,33	0,34	0,01
0,333	0,334	0,001
0,3333	0,3334	0,0001

Podremos decir que la serie de números decimales 0,3, 0,33, 0,333, 0,3333... es creciente y que converge hacia $1/3$. Análogamente la serie 0,4, 0,34, 0,334, 0,3334... es decreciente y también converge hacia $1/3$.

Por otro lado se pueden establecer las diferencias entre $1/3$ y cada uno de los términos de estas dos series. Así tenemos por un lado:

$$\begin{aligned} 1/3 - 0,3 &= 1/3 - 3/10 = 1/30 \\ 1/3 - 0,33 &= 1/3 - 33/100 = 1/300 \\ 1/3 - 0,333 &= 1/3 - 333/1.000 = 1/3.000 \end{aligned}$$

y por otro:

$$\begin{aligned} 0,4 - 1/3 &= 4/10 - 1/3 = 2/30 = 1/15 \\ 0,34 - 1/3 &= 34/100 - 1/3 = 2/300 = 1/150 \\ 0,334 - 1/3 &= 334/1.000 - 1/3 = 2/3.000 = 1/1.500 \end{aligned}$$

lo cual muestra también que ambas se pueden acercar a $1/3$ tanto como se quiera, lo cual se expresa diciendo que convergen hacia $1/3$.

Los términos más apropiados para concluir este estudio pueden ser algo así como: 0,3 es el número cuyas aproximaciones por defecto son

$$0,3, 0,33, 0,333...$$

Hemos visto que estas aproximaciones se pueden hacer tan próximas a $1/3$ como queramos, por lo que decimos que

$$0,3 = 1/3$$

Téngase en cuenta que uno de los casos que ofrecen mayor resistencia por parte de los alumnos es el de 0,9. La serie de aproximaciones decimales por defecto a $0,9$ es

$$0,9, 0,99, 0,999, 0,9999...$$

y la serie de diferencias entre estos decimales y 1 es:

$$0,1, 0,01, 0,001, 0,0001...$$

Podremos decir, por tanto, que la serie

$$0,9, 0,99, 0,999, 0,9999...$$

converge hacia 1. Y como podemos hacer que el decimal 0,999... 9 se acerque tanto como queramos a 1 sin más que alargar la serie más y más, diremos que

$$0,9 = 1$$

c) Otro caso conocido por los alumnos es el de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $r < 1$. Así dada una progresión geométrica

$$a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^n$$

la suma de los $(n + 1)$ términos

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

se expresa mediante la fórmula

$$S = \frac{a - ar^{(n+1)}}{1 - r} \quad (i)$$

Cuando se estudian dichas progresiones se contempla el caso en que la razón r es menor que 1 y se dice que el factor $r^{(n+1)}$ es tal que a mayor exponente corresponde menor potencia, de tal forma que para valores gran-

des de n , $r^{(n+1)}$ se hace despreciable y se escribe $r^{(n+1)} \rightarrow 0$. Veamos un caso concreto: la progresión de razón $1/2$

$$1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n$$

cuya suma S nos proponemos calcular:

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$$

En este caso, si aplicamos la fórmula, obtenemos

$$S = \frac{1 - (1/2)^{(n+1)}}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^{(n+1)}}{1/2}$$

¿Qué pasa con el término $(1/2)^{(n+1)}$ según van creciendo los valores de n ?

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad (1/2)^1 = 1/2 = 0,5 \\ n = 2 & \quad (1/2)^2 = 1/4 = 0,25 \\ n = 3 & \quad (1/2)^3 = 1/8 = 0,125 \\ \dots & \quad \dots \\ n = 10 & \quad (1/2)^{10} = 1/2^{10} = 1/1.024 = 0,00097... \\ n = 20 & \quad (1/2)^{20} = 1/2^{20} = 1/1.048.576 = 0,00000095... \\ n = 30 & \quad (1/2)^{30} = 1/2^{30} = 1/1.073.741.824 = 0,0000000093... \end{aligned}$$

La serie obtenida

$$0,5, 0,25, 0,125, \dots, 0,00097, \dots, 0,00000095, \dots, 0,0000000093...$$

es una serie decreciente que podemos hacer tan próxima a 0 como queramos a base de aumentar n . Decimos que esta serie converge hacia 0. En consecuencia para valores grandes de n , la fórmula de la suma se reduce a

$$S = \frac{1 - 0}{1/2} = 2$$

y en general, la fórmula (i) de una progresión geométrica de razón $r < 1$ para grandes valores de n , se convierte en

$$S \rightarrow \frac{a}{1 - r}$$

que significa que S se acerca al valor $\frac{a}{1 - r}$ tanto como se quiera, aumentando n .

Se puede enfocar este mismo tema viendo lo que pasa con las sucesivas sumas según los valores de n . Podemos escribir:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 1/2 = 3/2 = 1,5 \\ S_3 &= 1 + 1/2 + 1/4 = 3/2 + 1/4 = 7/4 = 1,75 \\ S_4 &= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/4 + 1/8 = 15/8 = 1,875 \\ S_5 &= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/8 + 1/16 = 31/16 = 1,9375 \\ S_6 &= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 = 31/16 + 1/32 = 63/32 = 1,96875 \\ S_7 &= \dots = 1,984375 \\ S_8 &= \dots = 1,9921875 \\ S_9 &= \dots = 1,9960937 \\ S_{10} &= \dots = 1,9980468 \\ \dots \end{aligned}$$

La serie de números decimales obtenidos es una serie creciente que se acerca a 2 tanto como se quiera sin más que aumentar n . Diremos que S_n converge hacia 2 y escribiremos

$$S_n \rightarrow 2 \text{ para grandes valores de } n$$

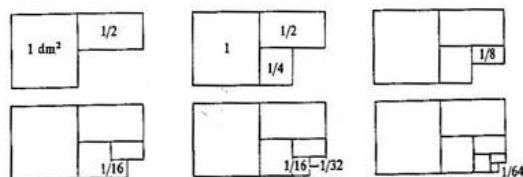
o también

$$S_n \rightarrow 2 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

d) Una visión geométrica del ejemplo anterior consiste en construir un cuadrado de 1 dm de lado y añadirle rectángulos y cuadrados alternativamente tal como indica la figura. Cada figura añadida tiene un área igual a la mitad de la figura añadida anteriormente. Se trata de averiguar cuál es el área total obtenida.

Por tanto, volvemos al caso de la suma

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$$



GRAFICA 5.3

La figura induce la idea de que el área total será menor que 2, pero cada vez más próxima a 2. En este caso se puede hacer una lista de lo que pasa en cada etapa del proceso y poner de manifiesto cuál es el área que no se ha cubierto.

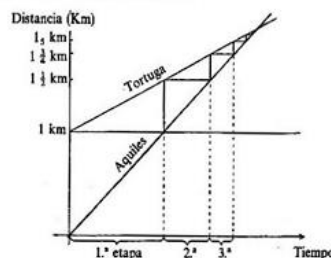
Etapas	Área cubierta	Área por cubrir
1.ª	1	1
2.ª	$1 + 1/2 = 1 \text{ y } 1/2$	$1/2$
3.ª	$1 + 1/2 + 1/4 = 1 \text{ y } 3/4$	$1/4$
4.ª	$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 1 \text{ y } 7/8$	$1/8$
5.ª	$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 1 \text{ y } 15/16$	$1/16$
...	...	...
n.ª	$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^{n-1}$	$1/2^{n-1}$

El área no cubierta de $1/2^{n-1}$ dm² se puede hacer tan pequeña como se quiera sin más que aumentar las etapas, o sea aumentando n , pero para todo n existe un área no cubierta. Diremos que el área cubierta converge hacia 2 dm².

e) El problema clásico de Aquiles y la tortuga también se puede relacionar con el ejemplo anterior, pero con la ventaja de que inicialmente los alumnos no pueden prever dónde y cuándo Aquiles alcanza a la tortuga. Ofrece además la ventaja de la representación gráfica bidimensional espacio-tiempo.

La situación que planteamos es la siguiente: Aquiles tiene una velocidad doble que la velocidad de la tortuga. Si al iniciar la persecución, la tortuga tiene una ventaja de 1 km, ¿a qué distancia del punto de partida de Aquiles, éste alcanzará a la tortuga?

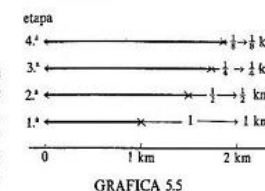
En la primera etapa, mientras Aquiles recorre 1 km, la tortuga recorre 1/2 km. En la segunda etapa, mientras Aquiles recorre 1/2 km, la tortuga recorre 1/4 de km. Y así sucesivamente.



GRAFICA 5.4

Podemos establecer las distancias recorridas por cada uno de ellos en cada etapa y la distancia que los separa al final de cada una de ellas:

	Aquiles	Tortuga	Distancia
Punto de partida	0	1	1
Final 1.ª etapa	1	$1 + 1/2$	$1/2$
Final 2.ª etapa	$1 + 1/2$	$1 + 1/2 + 1/4$	$1/4$
Final 3.ª etapa	$1 + 1/2 + 1/4$	$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8$	$1/8$
Final 4.ª etapa	$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8$	$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$	$1/16$
...	...	...	...



GRAFICA 5.5

Se pueden representar las distancias correspondientes a cada etapa:

Después de considerar las primeras etapas, los alumnos pueden prever que Aquiles alcanza a la tortuga a 2 km de su punto de partida. Nuevamente se podrá decir que la serie de fracciones que expresan la distancia entre ambos

$$1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$$

se acerca a cero tanto como se quiera y que converge hacia 0. Por otro lado la distancia recorrida por Aquiles

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$$

se acerca a 2 tanto como se quiera y se dice que converge hacia 2.

Este mismo ejercicio se podría presentar de tal manera que la velocidad de Aquiles sea diez veces mayor que la de la tortuga. En tal caso la tabla anterior sería

	Aquiles	Tortuga	Distancia
Punto de partida	0	1	1
Final 1.ª etapa	1	$1 + 1/10 = 1,1$	0,1
Final 2.ª etapa	$1 + 1/10 = 1,1$	$1 + 1/10 + 1/100 = 1,11$	0,01
Final 3.ª etapa	$1 + 1/10 + 1/100 = 1,11$	$1 + 1/10 + 1/100 + 1/1.000 = 1,111$	0,001
Final 4.ª etapa	$1 + 1/10 + \dots + 1/1.111$	$1 + 1/10 + \dots + 1/10.000 = 1,1111$	0,0001
...	...	...	...

En este caso la serie de distancias recorridas por Aquiles

1, 1,1, 1,11, 1,111, 1,1111...

converge hacia $1 + 1/9$ que es algo más difícil. En cambio es más fácil ver que la serie de las distancias que los separa

1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001...

converge hacia 0.

La idea fundamental de todos estos ejercicios que preparan el desarrollo del concepto de límite, es que si tenemos una serie de números diremos que converge hacia un determinado valor numérico o que tiene un determinado límite cuando nos podemos acercar tanto como queramos a dicho número o límite sin más que alargar la serie más y más. Por consiguiente, se trata de unos ejercicios que sirvan para desarrollar ideas intuitivas.

5.2. ASPECTOS LOCALES

En este apartado vamos a tratar de aspectos locales, es decir, de la variación de una función en un intervalo, que se mide con la tasa media de variación, y de la variación de una función en un punto, que se mide con la tasa instantánea de variación.

5.2.1. Tasa media de variación

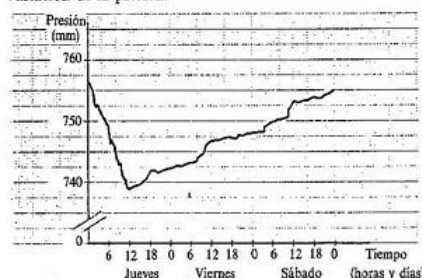
■ Variación de una función

En muchos problemas de contexto real, al estudiar una función lo que interesa son los cambios que puedan observarse en ella. Así, por ejemplo, en el caso del estudio de la presión atmosférica puede importar más lo que ha variado la presión que el valor de la misma en un determinado momento; en una gráfica espacio-tiempo interesa la distancia recorrida; en el estudio de la dilatación de una barra se prestará más atención a lo que se ha alargado que a su longitud; si se estudia la evolución de precios de un producto se centrará más el interés en los cambios que en los valores de los precios. Todo ello nos induce a tratar de la variación de una función entre dos valores de la variable independiente x_1 y x_2 .

Antes de definir la variación de una función se pueden presentar diversas situaciones presentadas en forma de gráfica o de tabla y hacer preguntas que destaquen la importancia de un orden en su cálculo: valor final-valor inicial,

que permitirá distinguir variaciones positivas y negativas. Por otro lado, es conveniente mostrar que la igualdad de dos variaciones no presupone la igualdad de los valores de la función. Así, por ejemplo:

a) Variación de la presión:

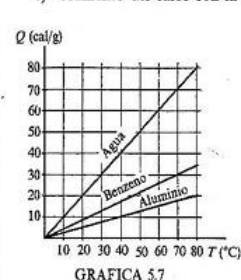


GRAFICA 5.6

b) Distancia recorrida por una bicicleta.

Tiempo (horas, min.)	10	10 ^h 15	10 ^h 30	10 ^h 45	11 ^h	11 ^h 15	11 ^h 30
Distancia (km)	25	32	40	46	53	60	68

c) Aumento del calor con la temperatura.



GRAFICA 5.7

Las preguntas pueden ser del tipo:

- ¿Cuál ha sido la variación de presión entre las 6 h y las 18 h del jueves? ¿Y entre las 12 h del jueves y las 24 h del sábado? ¿Cómo interpretas que los dos valores absolutos sean los mismos?
- ¿Qué distancia ha recorrido la bicicleta entre las 10 h 15 y las 11 h? ¿Y entre las 10 h 30 y las 11 h 30? ¿A qué distancia del punto de partida se encontraba en cada uno de estos momentos?

- Di cuál ha sido el aumento de calor para las tres sustancias entre las temperaturas 30° y 70°?

Finalmente se puede definir la variación de una función $f(x)$ entre x_1 y x_2 (siendo $x_1 < x_2$) como el número $f(x_2) - f(x_1)$. El signo indicará si es un crecimiento (variación positiva) o un decrecimiento (variación negativa).

■ Tasa media de variación

Si volvemos al ejemplo de las presiones, cuando se hacen predicciones de buen o mal tiempo, lo que importa no son sólo las variaciones sino las variaciones bruscas de presión, es decir, que interviene el tiempo que ha durado la variación. Una variación en la presión atmosférica, pongamos por caso, de -10 mm no tiene ninguna consecuencia si se realiza a lo largo de 2 días, pero sí que la tiene si se realiza en 5 horas. Se considera que:

- Una caída de la presión atmosférica que dure más de 3 horas y que sea en media superior a 1,3 mm por hora, anuncia mal tiempo (si ya lo hace, lo sigue haciendo).
- Un aumento de la presión atmosférica que dure más de 3 horas y que sea en media superior a 1,3 mm por hora, anuncia buen tiempo (si ya lo hace, lo sigue haciendo).
- Una presión estable no implica cambio de tiempo.

Así pues, si la variación de -10 mm tiene lugar a lo largo de 5 horas, la variación media por hora es de

$$-10/5 = -2 \text{ mm/h}$$

es decir, que se puede predecir mal tiempo. En cambio si la variación se ha producido en 2 días, resulta una variación media por hora de

$$-10/48 = -0,2 \text{ mm/h}$$

que indica presión estable.

Por consiguiente, lo que interesa en este ejemplo es la variación media por hora de la presión: lo llamaremos tasa media de variación de la presión atmosférica y nos indica la rapidez con que cambia la presión.

En otros casos nos encontramos con lo mismo: interesa saber la rapidez con que se ha producido una variación. Si nos fijamos, por ejemplo, en el coste de la vida según datos referidos al año 1975, lo que entonces se podía comprar por 100 ptas. costaba en los años sucesivos las cantidades que se indican:

Año:	x	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
I.P.C.:	y	100	124,5	149,1	172,5	199,3	228,4	261,3	293,1	326,0

donde I.P.C. es el índice de precios al consumo. Podríamos preguntar:

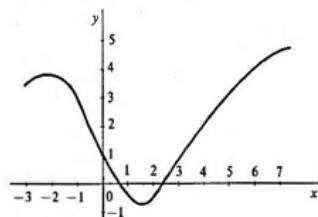
- a) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento del I.P.C. en cada uno de los años que aparecen en la tabla? ¿Cuál es la tasa media anual en el periodo 1976-1984?

Para clarificar tanto el concepto como el cálculo de la tasa de crecimiento, en este ejemplo convendrá distinguirlo del tanto por ciento de crecimiento. Se podría añadir, por tanto, las preguntas:

- b) ¿Cuál ha sido el tanto por ciento del crecimiento del coste de la vida en cada uno de los años? ¿Cuál ha sido en el periodo 1976-1984?
- c) Una persona que al comenzar el año 1976 ganase 50.000 ptas. al mes, ¿cuánto debería ganar al comenzar el año 1984 para compensar el aumento del coste de la vida?

Se pueden buscar otros ejemplos en los que la tasa media de variación es un dato significativo. Así se puede estudiar la evolución de la población en ciudades de gran crecimiento, en colonias de bacterias, etc. Habrá que considerar también ejemplos ya matematizados como son funciones dadas por su gráfica cartesiana o por una fórmula. Así:

— Dada la función $f(x)$



GRAFICA 5.8

calcula la tasa media de variación entre $x = -2$ y $x = 3$.

— Dada la función $y = 4x - 3$, calcula la tasa media de variación entre $x = -1$ y $x = 1$.

En todo caso, después de ver varios ejemplos se planteará la cuestión:

— Expresa la tasa media de variación de una función $f(x)$ entre x_1 y x_2 (siendo $x_1 < x_2$) que lleva a la conclusión que es el número $t_m(x_1, x_2)$, tal que

$$t_m(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (i)$$

cuyo signo nos indicará, como en el caso de la variación, si se trata de un crecimiento o de un decrecimiento.

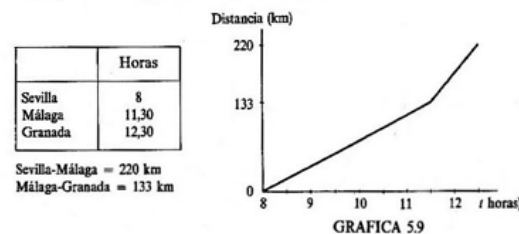
■ Velocidad media

Un caso particular especialmente interesante es el de la velocidad media que no es otra cosa que la tasa media de variación para una función espacio-tiempo. La ventaja principal de estudiar la velocidad es que en el momento de pasar a estudiar tasas de variación instantáneas, es decir, valores de la derivada de una función en un punto, la velocidad es el único caso próximo al alumno, relacionado con la vida de cada día y con nombre propio. En efecto, los alumnos están familiarizados con las velocidades de los coches y saben que hay un velocímetro que las mide; una gran mayoría conoce también los resultados y las marcas de velocidades de las principales carreras e incluso la evolución de la velocidad a lo largo de alguna de ellas (como los cien metros en los Juegos Olímpicos).

En todos los ejemplos cotidianos de velocidades medias, que se pueden trabajar en clase a partir de la experiencia de los alumnos (coches, trenes, autobuses, deportes, etc.), conviene retener unas ideas básicas acerca de la medida de velocidades, como son:

- Para medir una velocidad debe haber un intervalo de tiempo durante el cual se mide la distancia recorrida. El resultado obtenido será siempre una velocidad media y vendrá expresada en unidades de espacio divididas por unidades de tiempo (km/h, m/seg...).
- Al dar una velocidad media en un intervalo de tiempo se ocultan las variaciones que sufre la velocidad real durante dicho intervalo.
- La velocidad media de un movimiento real sirve para dar un modelo de movimiento uniforme que es útil en muchos casos.

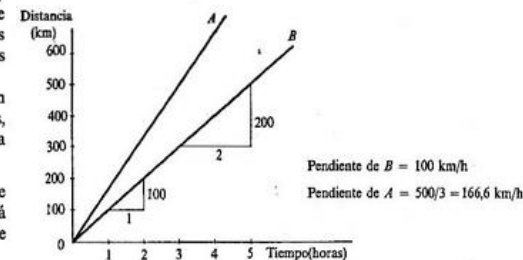
Para desarrollar y discutir estas ideas se puede estudiar el modelo de la gráfica recta. Un ejemplo sería la representación gráfica de un viaje en tren, como puede ser el Sevilla-Málaga-Granada.



GRAFICA 5.9

De acuerdo con la figura, los alumnos deducirán que al final de la primera hora el tren ha recorrido 38 km, al final de la segunda hora 76 km y así sucesivamente. Fijan, por tanto, un modelo de movimiento uniforme (velocidad constante) asociado a la línea recta. Ahora bien, es conveniente que no se queden aquí, sino que les animemos a dibujar otros modelos más posibles (considerando factores como el relieve) que se ajusten a la tabla de horarios de los trenes, teniendo en cuenta, por ejemplo, que el tren permanece un cierto tiempo parado en Málaga.

Como complemento del estudio de gráficas rectas en funciones espacio-tiempo, se pueden comparar varios movimientos con el fin de asentar la relación entre pendiente y velocidad. Dada la gráfica



GRAFICA 5.10

se puede hacer la doble lectura:

- En 3 horas el móvil A ha recorrido 500 km mientras el móvil B sólo ha recorrido 300 km, por tanto A es más rápido, su velocidad es mayor.
- Para llegar a una distancia de 500 km, el móvil A ha tardado 3 horas y el móvil B 5 horas, por tanto A tiene mayor velocidad.

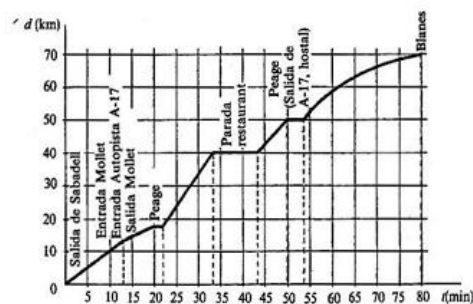
Además se calcula la velocidad de un móvil como la pendiente de la recta, que en este caso se puede expresar en la forma espacio recorrido/tiempo transcurrido.

Cuando se calculan las velocidades a partir de una gráfica, hay que tener en cuenta las unidades utilizadas en los ejes; es un punto a tener en cuenta y en el que los alumnos se equivocan fácilmente. Por eso conviene que se acostumbren a explicitar las unidades en las gráficas.

Veamos a continuación tres ejemplos más complejos, tomando sucesivamente como punto de partida una gráfica, una tabla y una fórmula. En todos ellos el tema principal es la velocidad media, pero se aborda desde diferentes

puntos de vista, en diferentes situaciones que apuntan al tema de la velocidad instantánea.

• **Ejemplo 1.** La gráfica representa la distancia recorrida por un coche en un viaje de Sabadell a Blanes.



GRAFICA 5.11

Se puede hacer una serie de preguntas acerca de la velocidad media. Así:

- ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche en este viaje?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche en la autopista? ¿Y si se descuentan las paradas?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media entre Hostalrich y Blanes?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media entre el instante que marca 60 minutos y el instante que marca 70 minutos? ¿Y entre los instantes 70 y 80 minutos? Compara estos resultados con el obtenido en la pregunta anterior.

A lo largo de estas preguntas habrá que resaltar que las velocidades medias dan una idea de lo que pasa en un intervalo de tiempo, pero no coinciden entre sí, ya que, de hecho, la velocidad del coche varía a lo largo del recorrido. Se pueden añadir ahora algunas preguntas acerca de la velocidad en un determinado momento, de progresiva dificultad:

- ¿Qué crees que marca el velocímetro del coche en el momento 10 minutos? ¿Y en el momento 30 minutos? ¿Y en el momento 70 minutos?

En la primera pregunta el alumno no tiene dificultad, ya que se trata de una línea recta que parte del origen. En la segunda pregunta la tendencia es

dividir el espacio recorrido hasta los 30 minutos por los 30 minutos, con lo cual se confunde la pregunta, ¿qué velocidad tiene en el momento 30 minutos?, con la pregunta ¿cuál es la velocidad media desde el comienzo del movimiento hasta el momento 30 minutos? Es crucial conseguir la distinción entre estas dos preguntas, ya que todo lo que sigue se basa en el cálculo de velocidades en intervalos. Finalmente, en la tercera pregunta se pretende que el alumno se plantee por primera vez la cuestión de la velocidad instantánea de un movimiento variado y que intente resolverla por aproximación con los resultados de la pregunta anterior.

• **Ejemplo 2.** Durante una carrera, se observa la posición de un coche respecto a un punto de referencia 0, a intervalos de 5 segundos, para controlar si en algún momento supera la velocidad máxima permitida de 150 km/h. Los datos obtenidos están recogidos en la siguiente tabla considerando que el coche pasa por el punto 0 en el instante 0:

Tiempo (seg)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (km)	0	0,1	0,22	0,37	0,5	0,66	0,84	1,05	1,24

- ¿Se ha pasado la velocidad máxima permitida en cada uno de los intervalos de 5 segundos?
- Calcula la velocidad media del coche en todo el recorrido.
- Haz una estimación de la velocidad que marca el velocímetro en el momento 20 segundos.

La pregunta b) contiene una pequeña trampa: se trata de aclarar que la velocidad media no es la media aritmética de las velocidades, como creen muchos alumnos que tampoco saben qué velocidades habría que coger para hacer la media, y todavía menos cómo se medirían.

• **Ejemplo 3.** Al tirar una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/seg, su altura $d(t)$ (expresada en metros) después de t segundos viene dada por la fórmula:

$$d(t) = 40t - 5t^2$$

- Construye una tabla que dé la altura de la piedra a intervalos de un segundo. ¿Qué pasa después de $t = 8$ seg? Dibuja la gráfica.
- ¿Cuál es la altura máxima? ¿Cuánto tarda en alcanzarla? ¿Cuánto tarda la piedra en volver al suelo?
- Calcula la velocidad media total, la velocidad media durante la

subida y la velocidad media durante la bajada. Comenta tus resultados.

- Calcula la velocidad media entre $t = 1$ y $t = 3$ seg y entre $t = 5$ y $t = 7$ seg. ¿Cuál crees que será la velocidad en el momento $t = 3$ seg? ¿Y en el momento $t = 5$ seg?
- Escribe la expresión de la velocidad media entre los instantes t_1 y t_2 que se puede anotar $v_m(t_1, t_2)$. Aplícala para comprobar el resultado de la pregunta anterior.

El interés de este problema radica en la variedad de enfoques que suscita. Las preguntas a), b), c) y d) remiten a los ejercicios anteriores: elaboración de la tabla y de la gráfica, con la consiguiente visualización del problema y la lectura directa que permite contestar a las preguntas sin más que tener en cuenta que la velocidad media es el cociente del espacio recorrido por el tiempo tardado en recorrerlo. La velocidad media de la bajada ofrece una doble dificultad: el espacio no se cuenta desde el origen y el resultado es negativo. La pregunta a), difícil por su abstracción, implica una algebrización del problema y la obtención de una fórmula. Es un paso importante, ya que representa el primer peldaño hacia la expresión formal de la velocidad instantánea; habremos llegado, pues, a la fórmula

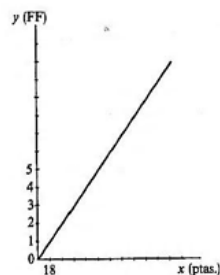
$$v_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{ii})$$

que no es otra que un caso particular de (i).

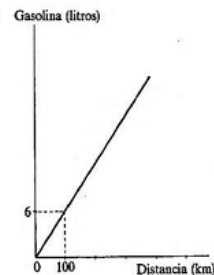
■ Tasa media de variación y pendiente de una recta

Existen muchos ejemplos de la vida real en los que la pendiente de una gráfica recta tiene el significado de una tasa de variación. Así, por ejemplo.

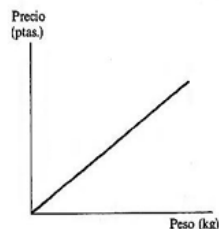
- La tasa de cambio de pesetas a francos es la pendiente de la recta que representa la relación de cuántos francos y se puede obtener por x pesetas. Las unidades se expresarán en francos/pesetas.
- La tasa de consumo de gasolina de un coche es la pendiente de la recta que representa los litros de gasolina por la distancia recorrida. Las unidades se expresarán en litros/km.
- El precio de muchos productos depende del peso. El precio por kilogramo, expresado en pesetas/kg es también una tasa de variación, y es la pendiente de la recta que representa cada precio en función del peso correspondiente.



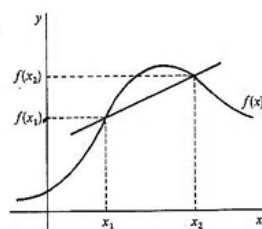
GRAFICA 5.12



GRAFICA 5.13



GRAFICA 5.14



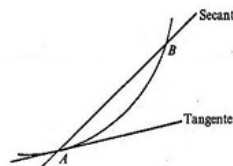
GRAFICA 5.15

En el caso general, dada una función f cualquiera, se puede comprobar fácilmente que la tasa media de variación entre dos valores de x , x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$), coincide con la pendiente de la recta secante a la gráfica de f determinada por los puntos de abscisa x_1 y x_2 .

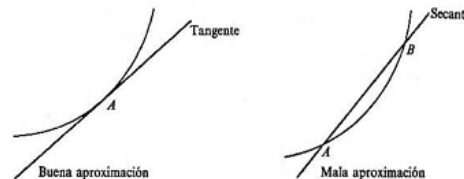
5.2.2. Cuerdas y tangentes

Ya hemos dicho que en el estudio local de funciones es útil el concepto de pendiente de la gráfica de la función en un punto, que es la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en dicho punto. En efecto, la idea intuitiva que permite dar una primera definición de tangente es que de todas las rectas que pasan por un punto A de una gráfica, existe una que se aproxima a la

curva más que cualquier otra (al menos en las cercanías de A) y es la tangente a la curva en el punto A . El método de cálculo tradicional era el de partir de la pendiente de la cuerda AB y hallar el límite de la pendiente de AB cuando B tiende a A . De hecho, éste fue el método utilizado por Newton en su cálculo de velocidades instantáneas y era la base gráfica del cálculo de derivadas de los libros clásicos. Con la tendencia a eliminar del cálculo cualquier soporte gráfico geométrico y a introducir las derivadas a partir del concepto de límite y como una aplicación de su cálculo, se perdió esta introducción simple e intuitiva que creemos que hay que recuperar. En consecuencia, en un primer momento es conveniente presentar varias rectas como posibles aproximaciones a la pendiente de una curva en un punto A determinado y hacer ver que la tangente es la que mejor se aproxima.



GRAFICA 5.16

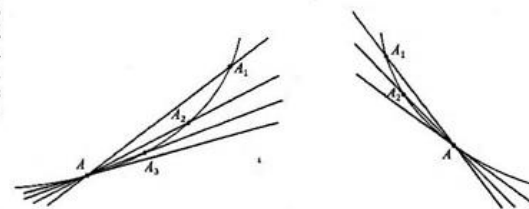


GRAFICA 5.17

Uno de los problemas que tienen los alumnos con la noción de tangente es que la asocian a una recta que sólo tiene un punto en común con la curva; ello es debido al hecho que en geometría elemental la única curva con tangente que se estudia es la circunferencia. Por tanto, en este nuevo estudio de la tangente es necesario discutir el concepto no sólo en su sentido local sino que habrá que presentar todo tipo de situaciones gráficas de funciones definidas en todo su dominio.

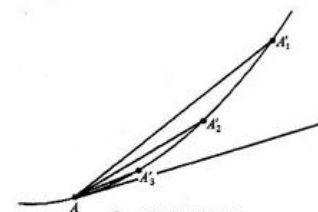
Antes de intentar otra definición por parte de los alumnos creemos que

les ayudará a observar una figura que contenga una sucesión de rectas secantes que corten en sucesivos puntos $A_1, A_2, A_3, \dots$ o $A'_1, A'_2, A'_3, \dots$ que se aproximan al punto A . Es un buen momento para recordar la idea de límite comentada anteriormente, ya que se está en un caso en que A_i se puede aproximar a A tanto como se quiera. La tangente podrá entenderse ahora como posición límite de las secantes al acercarse los puntos A_i al punto A .



GRAFICA 5.18

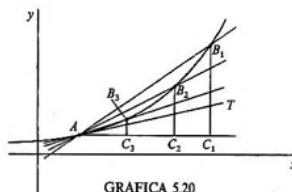
Queremos comentar un hecho común, y es que a veces se intenta simplificar esta figura algo compleja y se sustituyen las secantes por cuerdas, lo cual sería absolutamente lícito. El problema es que algunos alumnos «ven» que las cuerdas desaparecen en el punto A y no comprenden cómo aparece misteriosamente la tangente. Si tenemos en cuenta que la figura ha de ser un apoyo que ayude a la comprensión, es importante estar atentos a no provocar este tipo de confusiones.



GRAFICA 5.19

Otros textos empiezan directamente la discusión del concepto de tangente con el cálculo de la pendiente de las secantes (o de las cuerdas) de la curva de una función dibujada en un sistema de coordenadas cartesianas en la que destacan las proyecciones horizontales de los segmentos $AA_1, AA_2, AA_3, \dots$

Si bien es perfectamente correcto hacerlo así, nos parece importante escalar las dificultades y utilizar los diagramas secuencialmente: empezar por curvas, secantes y tangentes fuera de un sistema de coordenadas para acabar con la figura más compleja que permitirá deducir numéricamente la pendiente de la tangente.



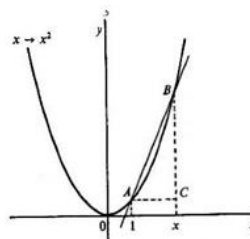
GRAFICA 5.20

Ya que estamos hablando de la primera aproximación al concepto de derivada y si tenemos en cuenta el sistema de enseñanza cíclico que permite enseñar un concepto con diferentes niveles de dificultad, resulta claro que, después de visualizar la pendiente de la gráfica y la tangente habrá que realizar una serie de ejercicios numéricos muy sencillos. Las calculadoras permiten que los alumnos calculen sin dificultad y con rapidez las pendientes de varias secantes en un punto determinado A de la gráfica. De esta manera irán percibiendo la relación entre la posición del segundo punto B, la pendiente de la secante AB. Esta doble percepción visual y numérica será una ayuda para que, llegado el momento de un estudio más formal, el alumno entienda el significado de la notación de límites.

Veamos un problema muy sencillo: hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 1.

- Primer paso, resolución gráfica: dibujar la gráfica en cuestión con mucho cuidado, marcar el punto A de abscisa 1, dibujar la tangente lo mejor posible y hacer una estimación del valor de la pendiente de la recta tangente dibujada.
- Segundo paso, resolución numérica basada en la idea que la recta tangente es una posición límite de las secantes; el ejemplo numérico dará una idea del proceso de límite. Se puede presentar una tabla que favorezca el cálculo y la percepción visual. Teniendo en cuenta que B y C tienen la misma abscisa x que se acerca cada vez más a 1 y que:

$$\text{pendiente de } AB = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$



GRAFICA 5.21

x	y = f(x)	BC = f(x) - f(1)	AC = x - 1	Pendiente de AB = BC/AC
3	9	8	2	4
2	4	3	1	3
1,5	2,25	1,25	0,5	2,5
1,1	1,21	0,21	0,1	2,1
1,01	1,0201	0,0201	0,01	2,01
1,001	1,002001	0,002001	0,001	2,001
1,0001	1,000200	0,000200	0,0001	2,0001

La secuencia de valores de las pendientes es 4, 3, 2,5, 2,1, 2,01, 2,001, 2,0001, ... y parece que la pendiente de las secantes pueda acercarse a 2 *tanto como se quiera* sin más que tomar un punto B lo suficientemente próximo a A. Es interesante confrontar el valor obtenido aquí con los valores estimados anteriormente; suele ser un elemento motivador.

Conviene hacer ejemplos variados y sobre todo algunos en los que el punto de intersección de las secantes AB esté a la izquierda del punto A, de manera que los alumnos intuyan que la aproximación es la misma por ambas partes.

Si planteamos hallar la pendiente de la recta tangente a la misma gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 2, tendremos por la izquierda:

x	y	BC'	AC'	Pendiente de AB' = BC'/AC'
1,9	3,61	2,61	0,9	2,9
1,99	3,9601	2,9601	0,99	2,99
1,999	3,996001	2,996001	0,999	2,999
1,9999	3,999600	2,999600	0,9999	2,9999

En este caso también se puede ver que la pendiente de las secantes se acerca a 3 *tanto como se quiera* según el punto B' se acerca al punto A.

En la línea de cuidar el lenguaje con el fin de potenciar la claridad de los nuevos conceptos, nos parece que es un momento oportuno para sustituir la expresión «la pendiente de las secantes puede hacerse próxima a 3 *tanto como se quiera* cuando B' se acerca a A» por la expresión «3 es el límite de la pendiente de las secantes cuando B' tiende a A».

Para preparar el trabajo de la pregunta siguiente en el que aparece una pendiente negativa, sería conveniente hacer un ejemplo del tipo: hallar la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = 5 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. Si se hace la gráfica de la función y se dibuja la tangente en $x = 1$, se podrá predecir un valor negativo de la pendiente. El cuadro de valores será del tipo:

x	y = f(x)	BC = f(x) - f(1)	AC = x - 1	Pendiente de AB = BC/AC
2	1	-3	1	-3
1,5				
1,01				
1,001				
1,0001				

y, por tanto, la pendiente de la tangente en $x = 1$ será -2. Es un buen momento para recordar de qué nos informa la pendiente (signo y valor absoluto).

5.2.3. Tasa instantánea de variación

Partiendo de la idea de tasa media de variación o de pendiente de una recta secante y del concepto de recta tangente en un punto como posición límite de las secantes en dicho punto, se puede abordar el tema de cómo medir la variación de una función en un punto. Ahora bien, existe un obstáculo de tipo conceptual ya que en una función abstracta $f(x)$, sin significado real, ¿qué significa variación instantánea?

■ Velocidad instantánea

Empezar con un caso concreto como el de la velocidad tiene la ventaja que los alumnos pueden entender el significado de la cuestión planteada y que, como ya hemos señalado anteriormente, desde el punto de vista semántico

tico existe la palabra «velocidad» que acompañada del adjetivo «instantánea» remite al alumno a aquello que marca el velocímetro, y por tanto, a algo que tiene existencia real. Se puede plantear la cuestión en los términos siguientes.

Existe una fórmula que describe bastante bien el movimiento de caída libre de los cuerpos y que es

$$d(t) = 5t^2$$

donde $d(t)$ es la distancia en metros recorrida durante t segundos. Por tanto, si dejamos caer una piedra desde una altura de 320 m, por ejemplo, la altura $a(t)$ de la piedra en cada momento vendrá dada por la expresión

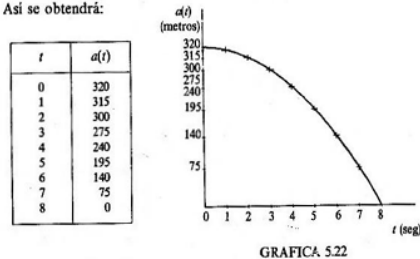
$$a(t) = 320 - 5t^2$$

Planteemos la cuestión: ¿qué velocidad tiene esta piedra en el momento $t = 3$ segundos?

Siguendo los pasos anteriores se resolverá el problema por etapas:

- Tabla de valores de la función $a(t)$.
- Representación gráfica de la función $a(t)$.
- Fórmula que exprese la velocidad media entre un instante cualquiera t_1 próximo a $t = 3$ y el instante $t = 3$.
- Estimación del valor de la velocidad para $t = 3$ segundos a partir de la velocidad media entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos. Representación gráfica de esta velocidad media como la pendiente de la secante AB .
- Discusión del valor obtenido: ¿Se puede predecir si el valor de la velocidad instantánea que buscamos, será mayor o menor que la velocidad media entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos?

Así se obtendrá:



Y si queremos expresar la velocidad media con una fórmula, es preciso recordar la expresión (ii) de la velocidad media entre los instantes t_1 y t_2 , que escribíamos $v_m(t_1, t_2)$:

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En este caso tendremos:

$$v_m(t_1, 3) = \frac{a(3) - a(t_1)}{3 - t_1}$$

El valor de la velocidad media entre los segundos 2 y 3 será pues:

$$v_m(2, 3) = \frac{a(3) - a(2)}{3 - 2} = \frac{275 - 300}{1} = -\frac{25}{1} = -25 \text{ m/seg}$$

que es la pendiente de la secante AB . Si bien no será la primera vez que el alumno se topa con velocidades negativas (recuérdese el problema de lanzar una piedra) en un movimiento de caída, habrá que tener en cuenta esta dificultad y volver a insistir en su significado ligado a la forma decreciente de la función.

Conociendo el valor de la velocidad media entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos y su representación gráfica como la secante AB , podemos plantear la cuestión de cómo será la representación gráfica de la velocidad instantánea en $t = 3$ segundos; por analogía con los problemas anteriores, no resulta extraño admitir que se trata de la pendiente de la gráfica en el punto $t = 3$ segundos, es decir, de la pendiente de la tangente en dicho punto. Si los alumnos son capaces de prever que el valor de la velocidad instantánea también será negativo, pero de mayor valor absoluto por tener una mayor inclinación, se puede asegurar que están intuyendo que la pendiente de la curva correspondiente a la velocidad instantánea en A . A continuación, incluso se puede hacer la representación gráfica y dar una estimación del valor.

Si queremos obtener un valor más exacto de la velocidad en $t = 3$ segundos tendremos que calcular la velocidad media entre puntos cada vez más próximos a $t = 3$. Teniendo en cuenta que $a(3) = 275$, se puede confeccionar la tabla:

t	$a(t)$	$BC = a(3) - a(t)$	$AC = 3 - t$	BC/AC
2	300	-25	1	-25
2,5	288,75	-13,75	0,5	-27,5
2,9	277,95	-2,95	0,1	-29,5
2,99	275,2995	-0,2995	0,01	-29,95
2,999	275,029995	-0,029995	0,001	-29,995
2,9999	275,0029999	-0,0029999	0,0001	-29,999

que permite afirmar que -30 m/seg es el límite de la pendiente de las secantes cuando B tiende a A y que será el valor del límite de las velocidades medias entre puntos cada vez más próximos a 3 y $t = 3$. Ese es precisamente el valor de lo que se llama velocidad instantánea en el momento $t = 3$ segundos y, efectivamente, coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $t = 3$. Podremos escribir

$$v(3) = -30 \text{ m/seg}$$

Planteemos ahora la cuestión: ¿Cómo podemos expresar la velocidad instantánea en un momento cualquiera t de este movimiento?

Se trata de hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa t , es decir, el valor del límite de las velocidades medias entre los instantes t_1 próximos a t y el instante t :

$$v_m(t_1, t) = \frac{a(t) - a(t_1)}{t - t_1}$$

Aplicando la expresión de $a(t)$, resultará:

$$\begin{aligned} v_m(t_1, t) &= \frac{(320 - 5t^2) - (320 - 5t_1^2)}{t - t_1} = \\ &= \frac{320 - 5t^2 - 320 + 5t_1^2}{t - t_1} = \\ &= \frac{-5t^2 + 5t_1^2}{t - t_1} = \\ &= \frac{-5(t^2 - t_1^2)}{t - t_1} = \\ &= \frac{-5(t + t_1)(t - t_1)}{t - t_1} = \\ &= -5(t + t_1) \end{aligned}$$

y podremos decir que la velocidad instantánea de la piedra en el instante t es el límite de la expresión $-5(t + t_1)$ cuando t_1 se acerca a t tanto como se quiera, o cuando t_1 tiende a t . Lo podremos escribir:

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} [-5(t + t_1)] = -5(t + t) = -5 \cdot 2t = -10t$$

o bien

$$-5(t + t_1) \xrightarrow{t_1 \rightarrow t} -5(t + t) = -5 \cdot 2t = -10t = v(t)$$

para $t = 3$ segundos, comprobamos que

$$v(3) = -10 \cdot 3 = -30$$

Para completar este problema, y si el nivel de la clase lo permite en este momento (a veces se aprecia un cierto cansancio cuando se insiste mucho sobre el mismo tema), se puede pasar a estudiar la nueva función obtenida

$$v(t) = -10t$$

Obviamente no es el momento de complicar el lenguaje de la cuestión planteada con la nomenclatura de función derivada, pero sí es interesante que los alumnos se enfrenten con esta situación sobre la que se volverá más adelante.

Es conveniente que de entrada la representación gráfica no sea superpuesta a la anterior, ya que ofrecería dificultades de lectura, pero es útil que esté alineada verticalmente con el fin de poder describir en cada instante qué pasa con la altura y qué pasa con la velocidad. Se pueden dibujar algunas tangentes a la curva y marcar sus pendientes para poner de manifiesto la relación que existe entre ellas y la velocidad correspondiente.

Hemos visto un ejemplo que ha permitido hacer todo el recorrido desde una velocidad media en un intervalo hasta una nueva función (velocidad en cada instante) asociada a la función inicial, es decir, que en términos matemáticos hemos partido de una función $y = f(x)$ y hemos llegado a la función derivada $y' = f'(x)$. En una introducción de este tipo resulta fundamental evitar lo más posible el aparato formal y riguroso imprescindible en una etapa más avanzada. Por ahora, nos interesa que se fijen unas ideas intuitivas básicas y una notación útil, aunque inevitablemente engorrosa. Así resulta que:

- Es difícil distinguir entre la velocidad instantánea en un momento t de un movimiento y la velocidad media entre t y un momento t_1 muy próximo a t . Es decir:

$$v_m(t_1, t) \rightarrow v(t) \text{ cuando } t_1 \rightarrow t$$

que también se puede escribir

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} v_m(t_1, t)$$

- La velocidad instantánea en un momento t viene representada por la pendiente de la curva, es decir, por la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa t .

A modo de consolidación de lo anterior se puede volver a las preguntas del ejemplo presentado en el tema de la velocidad media: Al tirar una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/seg, su altura $d(t)$ (expresada en metros), después de t segundos, viene dada por la fórmula:

$$d(t) = 40t - 5t^2$$

¿Cuál crees que será la velocidad en el momento $t = 3$ seg? ¿Y en el momento $t = 5$ seg?

Habría tres caminos posibles de resolución: construir una tabla de valores para cada uno de los dos casos, hallar las fórmulas $v_m(t_1, 3)$ y $v_m(t_1, 5)$, o hallar la fórmula de la velocidad en un instante cualquiera $v(t)$. Nos parece que cada alumno debe seguir el que le resulte más sencillo hasta convencerse de la rapidez y utilidad de la fórmula general. Sin embargo, no se puede obviar la dificultad operatoria de este último cálculo que se puede presentar en la forma:

$$\begin{aligned} v_m(t_1, t) &= \frac{d(t) - d(t_1)}{t - t_1} = \\ &= \frac{(40t - 5t^2) - (40t_1 - 5t_1^2)}{t - t_1} = \\ &= \frac{40t - 5t^2 - 40t_1 + 5t_1^2}{t - t_1} = \\ &= \frac{40(t - t_1) - 5(t^2 - t_1^2)}{t - t_1} = \\ &= \frac{40(t - t_1) - 5(t + t_1)(t - t_1)}{t - t_1} = \\ &= 40 - 5(t + t_1) \end{aligned}$$

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} [40 - 5(t + t_1)] = 40 - 5(2t) = 40 - 10t$$

Es evidente que este cálculo implica ciertas habilidades no triviales en el manejo algebraico. Es necesario averiguar el origen de las dificultades de los alumnos, ya que muchos son capaces de intuir y comprender el aspecto conceptual de cómo obtener la velocidad instantánea, pero no están en condiciones de superar la parte de mecánica operatoria más abstracta y, de

hecho, menos importante en este nivel. El camino intermedio suele resultar más asequible:

$$\begin{aligned} v_m(t_1, 3) &= \frac{d(3) - d(t_1)}{3 - t_1} = \\ &= \frac{(40 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2) - (40t_1 - 5t_1^2)}{3 - t_1} = \\ &= \frac{75 - 40t_1 + 5t_1^2}{3 - t_1} = \end{aligned}$$

que se puede dividir con el algoritmo de Ruffini y dará:

$$= -5t_1 + 25$$

Con ambos procedimientos se obtendrá finalmente

$$v(3) = 40 - 10 \cdot 3 = 10 \text{ m/seg}$$

o bien:

$$v(3) = \lim_{t_1 \rightarrow 3} v_m(t_1, 3) = -15 + 25 = 10 \text{ m/seg}$$

y

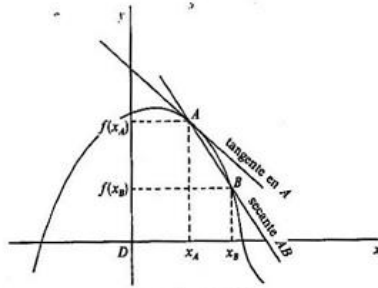
$$v(5) = 40 - 10 \cdot 5 = -10 \text{ m/seg}$$

que se presta a una interesante discusión.

■ Tasa instantánea de variación o número derivada de una función en un punto

En el caso de una función cualquiera $y = f(x)$, se planteará cómo medir la variación de la función en un punto. Recordemos los conceptos previos necesarios para abordar este tema:

- La recta tangente en un punto A es la posición límite de las secantes AB a la gráfica en dicho punto.
- La idea intuitiva de variación de la función en un punto A viene dada por la pendiente de la gráfica en A que es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en A .

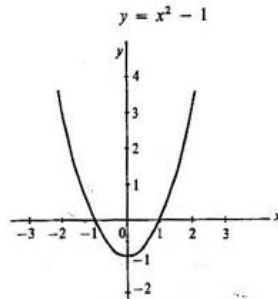


GRÁFICA 5.23

— La tasa media de variación entre dos puntos A y B de la gráfica de la función es la pendiente de la recta secante AB y su expresión es

$$t_m(x_A, x_B) = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

Por transposición del concepto de velocidad instantánea como límite de unas velocidades medias, se puede definir la tasa instantánea de variación como límite de la sucesión de tasas medias de variación y plantear directamente el problema de calcular la tasa instantánea de variación de una función del tipo



GRÁFICA 5.24

- En un punto de abscisa $x = 2$.
- En un punto de abscisa $x = a$.

Los métodos posibles para resolver este problema serán, como en el caso de las velocidades instantáneas:

— Construir una tabla de valores que dé las tasas medias de variación entre $x = 2$ y valores x_1 de x cada vez más próximos a 2:

x_1	$y = f(x_1)$	$BC = f(x_1) - f(2)$	$AC = x_1 - 2$	$t_m = BC/AC$
3	8	5	1	5
2.5	5.25	2.25	0.5	4.5
2.01	3.0402	0.0401	0.01	4.01
2.001	3.004001	0.004001	0.001	4.001
2.0001	3.0004...	0.0004...	0.0001	4.0001

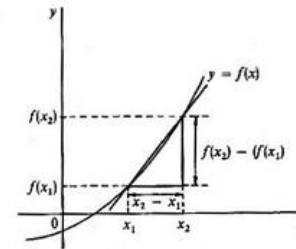
por tanto:

$$\begin{aligned} t_m(a, x_1) &= \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{(x_1^2 - 1) - (a^2 - 1)}{x_1 - a} = \\ &= \frac{x_1^2 - 1 - a^2 + 1}{x_1 - a} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1 - a} = \\ &= \frac{(x_1 + a)(x_1 - a)}{x_1 - a} = x_1 + a \end{aligned}$$

que para $a = 2$:

$$t_i(2) = 2 + 2 = 4$$

Es preciso insistir en que esta opción didáctica implica respetar el ritmo de cada alumno: los tres niveles de resolución del problema corresponden a tres niveles de abstracción y, por tanto, no se puede forzar el paso de uno a otro. El objetivo fundamental de este estudio es que todos los alumnos adquieran unas ideas básicas acerca de la variación de una función:



GRÁFICA 5.25

Esta tabla nos permite observar que cuando x tiende a 2, la pendiente tiende al valor 4, con lo cual la tasa instantánea de variación de la función en el punto $x = 2$ será 4.

— Calcular la tasa media de variación entre $x = 2$ y un valor cualquiera x_1 y ver a qué número tiende cuando x_1 tiende a 2:

$$\begin{aligned} t_m(2, x_1) &= \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} = \frac{(x_1^2 - 1) - (2^2 - 1)}{x_1 - 2} = \\ &= \frac{x_1^2 - 1 - 3}{x_1 - 2} = \\ &= \frac{x_1^2 - 4}{x_1 - 2} = \\ &= \frac{(x_1 + 2)(x_1 - 2)}{x_1 - 2} = x_1 + 2 \end{aligned}$$

Podremos escribir:

$$x_1 + 2 \xrightarrow{x_1 \rightarrow 2} 2 + 2 = 4$$

— Calcular directamente la tasa instantánea de variación de la función para un valor cualquiera $x = a$ y hallar su valor para $a = 2$. Tendremos:

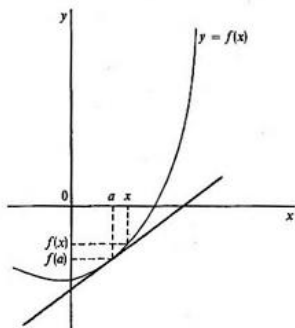
$$t_i(a) = \lim_{x_1 \rightarrow a} [t_m(a, x_1)]$$

— La tasa media de variación es un instrumento matemático que mide cómo varía la variable dependiente en un intervalo con respecto a lo que varía la variable independiente. Dados dos puntos de abscisas x_1 y x_2 , la tasa

media de variación es, por tanto, el número que se obtiene como cociente de dos números que expresan dos variaciones:

$$t_m(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

— El significado gráfico de la tasa media de variación es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $y = f(x)$ en los puntos de abscisas x_1 y x_2 .



GRAFICA 5.26

— Se puede medir la variación en un punto de abscisa a mediante el número que expresa la tasa media de variación entre el punto de abscisa a y otro punto de abscisa x tan próximo al anterior como se quiera. Se dice que la tasa instantánea de variación en el punto de abscisa a , $t_i(a)$, es el límite de la tasa media de variación entre a y x_1 , $t_m(a, x_1)$, cuando x_1 tiende a a . Este límite se puede calcular construyendo una tabla que dé las sucesivas aproximaciones de $t_m(a, x_1)$ cuando x_1 tiende a a . También se puede hacer un cálculo algebraico directo, para lo cual se escribe:

$$t_i(a) = \lim_{x_1 \rightarrow a} [t_m(a, x_1)] = \lim_{x_1 \rightarrow a} \left[\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \right]$$

o bien:

$$t_m(a, x_1) = \left[\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \right] \xrightarrow{x_1 \rightarrow a} t_i(a)$$

— El significado gráfico de la tasa instantánea de variación es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa a .

En este momento se puede introducir una nueva nomenclatura: la tasa instantánea de variación de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, se llama número derivada de la función en el punto de abscisa a y se escribe con la notación $f'(a)$. Por tanto:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$$

El cambio de nomenclatura es problemático, ya que para muchos alumnos esta nueva notación les aleja de las ideas intuitivas que han manejado. Desde luego, nos parece un aspecto secundario; la mejor manera es hacer una serie de ejercicios de aplicación que les obligue a traducir e interpretar el nuevo vocabulario. Así, por ejemplo:

— Dada la función $f(x) = x^2 + 1$, calcula los números derivada $f'(0)$, $f'(-2)$, $f'(3)$...

— Calcula los números derivada en el punto de abscisa $x = 3$ para cada una de las funciones siguientes:

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x^2 - x$$

$$h(x) = 3x^2 - 2x$$

$$j(x) = 1/x$$

6.

Estudio general de una función

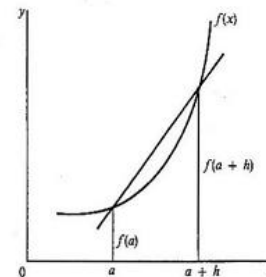
6.1. FUNCION DERIVADA DE UNA FUNCION

Vamos a iniciar este capítulo con el estudio, ahora más formal, de la función derivada. Primero estudiaremos su definición y los problemas que plantea y, posteriormente, veremos cómo se pueden derivar las funciones elementales sin utilizar el cálculo de límites.

6.1.1. Definición de la función derivada

Hasta ahora hemos introducido lo que hemos llamado tasa instantánea de variación de una función $f(x)$ en un punto de abscisa $x = a$, o número derivada de la función en el punto de abscisa a , que se escribe $f'(a)$ y se define

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



GRAFICA 6.1

si se acuerda que

$$x_1 = a + h$$

y, por tanto:

$$h \rightarrow 0 \text{ cuando } x_1 \rightarrow a$$

Conviene hacer alguna reflexión acerca de la notación. En efecto, en muchos libros de texto se da la siguiente definición: la derivada de una función $f(x)$ en un punto $A(x, y)$ es el número tal que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se utiliza, por tanto, el símbolo x con dos significados diferentes:

- Por un lado, x es la abscisa de un punto arbitrario de la gráfica $y = f(x)$.
- Por otro lado, x es la abscisa de un punto concreto A de la gráfica en el cual se calcula el número derivada y, por tanto, es un valor numérico fijo.

De esta notación pueden surgir muchas dificultades, que se pueden evitar utilizando una letra distinta de x para la abscisa del punto A : a , por ejemplo. Después de calcular valores de la derivada en varios puntos, y en particular en un punto de abscisa a , será el momento de introducir la función derivada, que será una nueva función representada por $f'(x)$ para todos los puntos.

Otra notación que se encuentra también en muchos libros de texto es la de Δx , dy/dx o $\Delta y/\Delta x$. Es la primera vez que los alumnos se encuentran con que dos letras que representan un solo número. De aquí resultan errores del tipo $\Delta y/\Delta x = y/x$ por un proceso de simplificación semejante al que se hace en $3y/3x = y/x$. Esto no quiere decir que no se pueda utilizar nunca dicha notación que, por supuesto, es imprescindible para funciones de varias variables y que muchos alumnos se encontrarán más adelante en otros campos, especialmente en física. Pero, en un primer contacto con un concepto tan abstracto y complejo como es el de derivada de una función, parece recomendable evitar al máximo cualquier dificultad añadida.

En cuanto al concepto de función derivada, una introducción posible es considerar varios casos particulares de manera que los alumnos se convengan de que a cada valor a de x de una serie de funciones sencillas corresponden un «número derivada» $f'(a)$

$$a \rightarrow f'(a)$$

de forma que se configura una nueva función

$$x \rightarrow f'(x)$$

Veamos algunos ejemplos:

- a) Dada la función $f(x) = 3x^2$, calcula $f'(2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$.

El cálculo que se espera aquí es el de la tasa instantánea de variación que ya hemos comentado. En este momento sería conveniente que todos los alumnos «renunciaran» al método de construir una tabla de tasas medias de variación que les diera el valor de la derivada por aproximación. Pero nos parece que es el propio alumno que se tiene que ir convenciendo que el método algebraico puede ser más rápido (no pretendamos convencerle que es más fácil). Así, por ejemplo, para $x = -1$:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

Según la definición dada:

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{3(-1+h)^2 - 3(-1)^2}{h} = \frac{3(1-2h+h^2) + 3}{h} = \\ &= \frac{3-6h+3h^2-3}{h} = \frac{-6h+3h^2}{h} = -6+3h \end{aligned}$$

y resulta:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-6+3h) = -6$$

- b) Calcula $f'(a)$:

El cálculo que se espera es

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se hace:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h} = \frac{3(a^2+2ah+h^2) - 3a^2}{h} = \\ &= \frac{3a^2+6ah+3h^2-3a^2}{h} = \frac{6ah+3h^2}{h} = 6a+3h \end{aligned}$$

y resulta:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a+3h) = 6a$$

- c) Comprueba los valores obtenidos en la pregunta a) aplicando la fórmula obtenida en b) y calcula directamente $f'(1/2)$, $f'(-2)$, $f'(0, 25)$.

La comprobación de valores de la pregunta c) y el cálculo directo son interesantes porque dan una pista de cómo obtener los números derivada de manera más rápida: se calcula la fórmula para $x = a$ y luego se aplica a cada valor de a .

- d) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $y = 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1/2$. ¿Cómo crees que es la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$? El objetivo de esta pregunta es volver a centrar la atención sobre el significado de $f'(a)$ como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto de abscisa $x = a$.

En esta primera fase del estudio de derivadas, nos parece primordial que los alumnos tengan siempre presente las siguientes ideas básicas:

- El significado de la derivada en un punto como pendiente de la recta tangente.
- El significado de la derivada en un punto como medida de la variación instantánea de la función en dicho punto.

Por ello nos parece que es importante entretenerse todo lo que sea necesario en recorrer todo el camino que va desde la tasa media de variación hasta el concepto de derivada en un punto.

- e) Completa la siguiente tabla y representa las dos funciones $f(x)$ y $f'(x)$.

x	$f(x) = 3x^2$	$f'(x) = 6x$
-2		
-1		
0		
0,25		
1/2		
1		
2		

Es éste un momento oportuno para hacer un primer comentario sobre el cambio de notación en el sentido de que si $f'(a) = 6a$ para cada punto a , hemos obtenido una nueva función $f'(x)$ que viene dada por la fórmula:

$$f'(x) = 6x$$

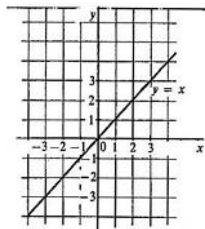
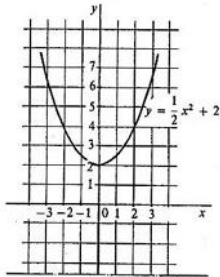
cuya gráfica es una recta de pendiente 6 y que pasa por el origen.

Por supuesto que se repetirán varios ejercicios del mismo estilo con otras funciones, como pueden ser $f(x) = x^2 - 1$ (estudiada anteriormente), $f(x) = -x^2/4$, $f(x) = x^2 - 3x$, etc. En cualquier caso en este momento se trata sólo de ver que a cada una de estas funciones $f(x)$ le corresponde una nueva función que es la función derivada $f'(x)$ y llegar a la definición.

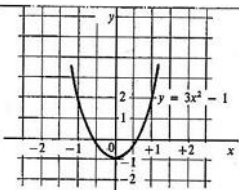
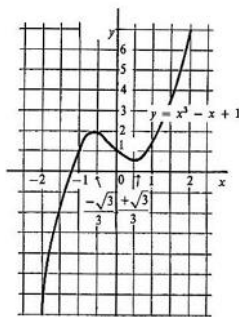
A partir de una función $f(x)$ se define una nueva función $f'(x)$ llamada función derivada de la función $f(x)$, tal que, para todo x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para completar el concepto de derivada de una función puede ser interesante realizar algunos ejercicios gráficos. Así, por ejemplo:



GRAFICA 6.2



GRAFICA 6.3

■ Problemas de aplicación

A lo largo de las deducciones de las fórmulas de las funciones derivadas nos hemos dedicado a analizar las dificultades posibles y a ilustrar una metodología que parte del caso concreto para llegar al caso general. El objetivo concreto de explicar cada uno de los apartados no nos ha permitido hasta ahora hacer una serie de observaciones que serían comunes a todos ellos y que nos parece importante tener en cuenta:

- Para evitar la sensación de que las matemáticas consisten en unas actividades encerradas en sí mismas, es necesario que los alumnos vean una utilidad inmediata en lo que hacen. Por eso es importante plantear problemas con enunciado. De esta manera, además, se acostumbra a derivar funciones con letras distintas de x .
- Para mantener el significado de la derivada en un punto como medida de variación instantánea de la función en dicho punto y como pendiente de la recta tangente habrá que plantear ejercicios gráficos especialmente referidos a tangentes.

— En el caso de las funciones inversas conviene plantear qué le pasa a la función y a su derivada en los puntos que anulan al denominador.

A modo de ejemplo:

a) La ecuación del movimiento de un móvil es $d(t) = 3t^2 + 3t + 2$, donde $d(t)$ expresa la distancia en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es su velocidad en el instante $t = 2$ seg? ¿Cuál es la velocidad instantánea $v(t)$ en el instante t ? ¿Crees que se trata de un movimiento uniforme?

b) La superficie de un globo que se está dilatando viene dada por $S = 0,16t^2$ (t en segundos, S en mm^2). Calcula la tasa de variación instantánea de la superficie a los 10 seg de comenzar la dilatación? ¿Cuál será a los 15 seg?

c) ¿Crees que la derivada de una función del tipo $f(x) = mx + n$ es siempre la misma para cualquier valor de x ? Demuéstralo.

d) Halla la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las siguientes funciones en el punto de abscisa 2

$$f(x) = x^2 + 3x - 1/3$$

$$g(x) = 5x - 1/x,$$

$$j(x) = (2x - 1)^3,$$

$$k(x) = 7x^3 - 2x - 3$$

e) ¿Cuál es la derivada de $f(x) = \frac{1}{x-1}$? ¿Cuál es su valor para $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$?

ANEXO F: Propuesta de Crisólogo Dolores

Flores

La variación y la derivada

En este apartado se incluyen imágenes y fragmentos seleccionados de las propuestas de aprendizaje analizadas en este trabajo. Los elementos aquí presentados corresponden a aquellas partes que fueron referenciadas en el análisis realizado, así como otros apartados relevantes que permiten contextualizar cada propuesta en el marco de la enseñanza del concepto de derivada.

Es importante aclarar que este material no constituye una reproducción completa de las obras originales, sino una selección limitada de contenido con fines estrictamente académicos. Todas las imágenes y fragmentos están debidamente referenciados y se utilizan bajo el principio de uso justo, respetando los derechos de autor de los textos originales.

Los derechos sobre la propuesta aquí citada pertenecen a sus respectivos autores y editoriales: Dolores Flores, C.

(2013). *La variación y la derivada*. Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Este material tiene como propósito exclusivo apoyar la comprensión y análisis de las propuestas descritas en el cuerpo del trabajo, sin fines comerciales ni de distribución no autorizada. A continuación, un enlace a la biblioteca de dicha editorial en donde las personas interesadas podrían adquirir el libro:

[La variación y la derivada Dolores Flores, Crisólogo 978-84-9969-091-9](#)

5
LA MEDICIÓN DEL CAMBIO

Ejemplo 1. En estudios realizados acerca del aumento de la estatura promedio de los adolescentes, se han encontrado datos como los que se muestran en la tabla 25.

Edad en años	11	12	13	14	15
Estatura promedio en cm	140	145	150	155	160

Tabla 25

¿Cuánto cambia la estatura promedio de los adolescentes entre los 11 y 12 años? No es difícil obtener la respuesta, pues de 140 cm cambió a 145 cm, entonces, la altura aumentó 5 cm. Obsérvese que la estatura crece 5 cm por año, y este cambio se puede calcular por medio de *restas*.

Ejemplo 2. El principal indicativo de la contaminación ambiental en las grandes ciudades se mide a partir de la concentración de ozono en la atmósfera. En la ciudad de México se utiliza el Índice Metropolitano de Contaminación Ambiental (Imeca). Si la concentración de ozono fluctúa entre 0 y 50 puntos Imeca, se dice que existe una condición buena para las actividades humanas, si fluctúa entre 51 y 100 es regular, si varía entre 101 y 150 se considera como mala, si está entre 151 y 200 es una condición muy mala para el organismo, y si es mayor de 200 se considera extremadamente mala. En la tercera semana del mes de julio de 2012 se registraron en la zona noroeste de la ciudad de México las concentraciones máximas de ozono que se muestran en la figura 29.

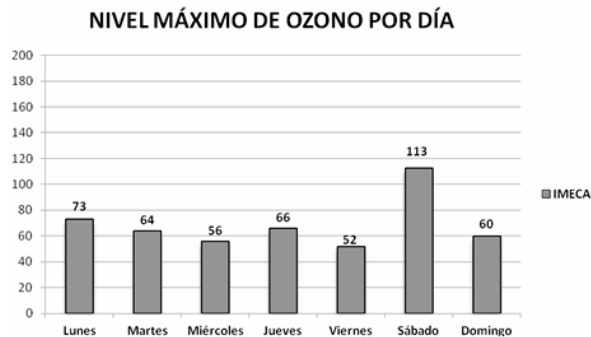


Figura 29

Ejemplo 3. La caída libre de los cuerpos en la Luna se describe por la fórmula $s(t) = 0.8t^2$, s es la distancia de caída en metros, y t el tiempo empleado en caer en segundos. El gráfico de $s(t)$ tiene la forma mostrada en la figura 30.

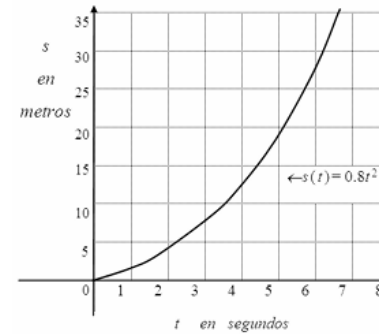


Figura 30

Tomando en cuenta esta información, ¿cuánto cambia la distancia en que cae un cuerpo entre los segundos 0 y 1? Si se observa, la gráfica *parece* que cambia 2 m, sin embargo, esta forma de calcular el cambio es poco precisa. ¿Cómo eliminar esta imprecisión? Contamos con la fórmula de la función que relaciona a la distancia y el tiempo, y por tanto, puede

determinarse el valor de la distancia recorrida del estado inicial al estado final. Véase la figura 31.



Figura 31

6

UNA NOTACIÓN OPERATIVA PARA CUANTIFICAR LOS CAMBIOS

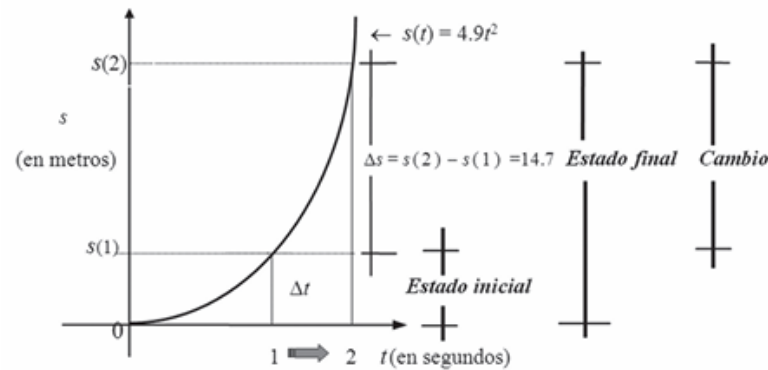


Figura 36

	Estado Inicial	Cambio	Estado final	Diferencia
Variable independiente	x_i	Δx	$x_i + \Delta x$	Δx
Variable dependiente	$f(x_i)$	Δf	$f(x_i + \Delta x)$	$f(x_i + \Delta x) - f(x_i) = \Delta f$

Tabla 33

Véase que las distancias que recorre el cuerpo a intervalos de un segundo también *cambian*. De 0 a 1 segundo, la distancia recorrida fue de 4.9 m; de 1 a 2 segundos la distancia recorrida fue de 14.7 m; en el intervalo de 2 a 3 s la distancia fue de 24.5 m. Esto indica que un cuerpo que cae libremente recorre distancias cada vez más grandes por cada segundo que transcurre, y esos cambios de distancias están dados precisamente por la fórmula: $\Delta s = 9.8t\Delta t + 4.9\Delta t^2$. Ya que las magnitudes de las distancias

varían, podemos preguntar ahora: *¿cuánto cambian esos cambios?* Esto se puede investigar en la tabla 37.

Intervalo	$0 \leq t \leq 1$	$1 \leq t \leq 2$	$2 \leq t \leq 3$	$3 \leq t \leq 4$	$4 \leq t \leq 5$	$5 \leq t \leq 6$	$6 \leq t \leq 7$	...
Δs	4.9	14.7	24.5	34.3	44.1	53.9	63.7	...
$\Delta \Delta s$	9.8	9.8	9.8	9.8	9.8	9.8	9.8	¿9.8?

Tabla 37

8

CAMBIOS RELATIVOS:

LA RAPIDEZ MEDIA DE LA VARIACIÓN

Ejemplo 1. La caída libre de los cuerpos en la superficie lunar es descrita por la fórmula $s_1(t) = 0.8t^2$, y en la superficie terrestre por $s_2(t) = 4.9t^2$. Supóngase que dos cuerpos se dejan caer

simultáneamente tanto en la Tierra como en la Luna. ¿Cuál de ellos cae con mayor rapidez? Analícese la gráfica de la figura 44.

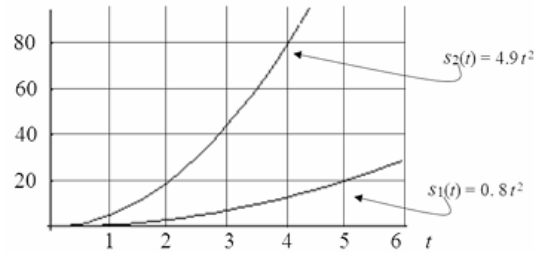


Figura 44

9

¿CÓMO CAMBIA LA RAPIDEZ (O LA VELOCIDAD) MEDIA?

Dos cuerpos se mueven de modo que la relación entre las distancias que recorren respecto del tiempo están dadas por las fórmulas: $s(t) = 5t + 5$, y $s(t) = 20t - 5t^2$; obsérvense las gráficas de las figuras 50 y 51. Esta última fórmula se refiere a la variación de la altura que recorre un cuerpo cuando es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial distinta de cero.

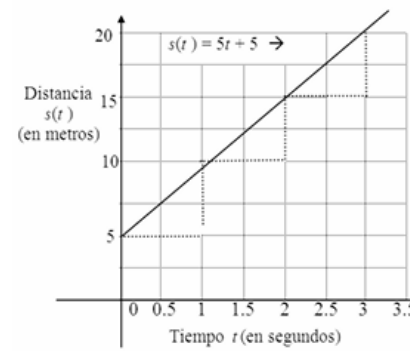


Figura 50

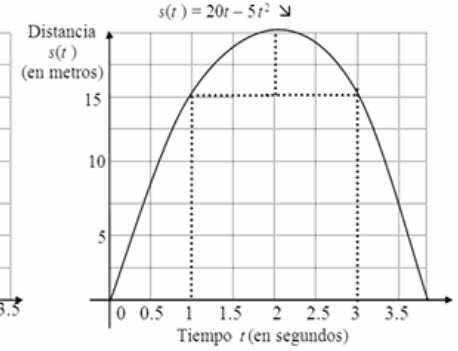


Figura 51

En los dos casos, la rapidez media a intervalos de 1 segundo puede ser obtenida sólo *viendo* las gráficas. Para mayor precisión, podemos determinarla utilizando las diferencias. La rapidez media dada por la expresión:

$$r = \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|$$

Como Δs se obtiene de $s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$, para el caso en que $s(t) = 5t + 5$ (figura 50), las diferencias son:

$$\Delta s = [5(t_i + \Delta t) + 5] - (5t_i + 5) = 5t_i + 5\Delta t + 5 - 5t_i - 5 = 5\Delta t$$

Por tanto, r queda como sigue:

$$r = \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \frac{5\Delta t}{\Delta t} \right| = 5$$

10

LOS CAMBIOS INFINITAMENTE PEQUEÑOS Y LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

En la sección anterior, cuando se investigó cómo cambia la rapidez y la velocidad en este mismo movimiento para intervalos de tiempo relativamente *grandes*, se obtuvo una información *muy burda*; mayor precisión se logró cuando se utilizaron variaciones de tiempo más pequeñas. Aplíquese esta misma estrategia, pero ahora, ya que el problema es averiguar la velocidad exactamente en el primer segundo, parece razonable asignar variaciones de tiempo de manera que se acerquen a $t = 1$. Como el cociente que da la velocidad media en $t = 1$ se indetermina, se investigará ahora que está pasando con las velocidades media *muy cerca* de $t = 1$.

Para sistematizar los procedimientos haremos que t_i sea fijo para el caso que nos ocupa, $t_i = 1$, y el que cambiará es t_f , de modo que los cambios de distancia dados por $\Delta s = 20\Delta t - 10t_i\Delta t - 5t_i^2$ sean cada vez más pequeños respecto de t_i . Se aplicará un acercamiento por la derecha (tabla 51). Obsérvese que a medida que los cambios son cada vez más pequeños, las velocidades media se van comportando de manera muy especial. Analícese esta sucesión de velocidades medias (tabla 52).

La sucesión se aproxima de forma ascendente a 10. ¿Qué pasará con esta sucesión si hacemos que la magnitud del intervalo siga disminuyendo infinitamente? ¿Qué pasa si el cambio

del tiempo es *infinitamente pequeño*, es decir, que t_f esté *infinitamente cercano* a 1? Para tener más elementos, se explorará qué pasa si $\Delta t = 0.00000000001$; utilizando una calculadora se obtiene que la velocidad media es $v = 9.99999999995$. ¡Este número está mucho más cerca de 10!

Todo indica que la sucesión de velocidades medias se acerca cada vez más a 10, de manera que la *diferencia* entre este número y la *última* velocidad media que pudiésemos calcular, sería *insignificante*. Por tanto, puede plantearse una hipótesis básica:

Si Δt es un cambio infinitamente pequeño, en este caso infinitamente cercano a $t_i = 1$, entonces la velocidad del cuerpo en $t = 1$ es exactamente igual a 10 m/s.

Velocidades medias	7.5	9.5	9.95	9.995	9.9995	9.99995	...
--------------------	-----	-----	------	-------	--------	---------	-----

Tabla 52

¿Sucederá lo mismo con acercamientos a $t = 1$ por la izquierda?
Véase la tabla 53.

Intervalos	Velocidades medias (por acercamientos a $t_i = 1$ por la izquierda)
$t_f \leq t \leq t_i$	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t}$
$0.5 \leq t \leq 1$	$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10t_i\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{20(-0.5) - 10(1)(-0.5) - 5(-0.5)^2}{0.5 - 1} = \frac{-10 + 5 - 1.25}{-0.5} = \frac{-6.25}{-0.5} = 12.5$
$0.9 \leq t \leq 1$	$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10t_i\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{20(-0.1) - 10(1)(-0.1) - 5(-0.1)^2}{0.9 - 1} = \frac{-2 + 1 - 0.05}{-0.1} = \frac{-1.05}{-0.1} = 10.5$
$0.99 \leq t \leq 1$	$v_3 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10t_i\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{20(-0.01) - 10(1)(-0.01) - 5(-0.01)^2}{0.99 - 1} = \frac{-0.2 + 0.1 - 0.0005}{-0.01} = \frac{-0.1005}{-0.01} = 10.05$
$0.999 \leq t \leq 1$	$v_4 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10t_i\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{20(-0.001) - 10(1)(-0.001) - 5(-0.001)^2}{0.999 - 1} = \frac{-0.002 + 0.001 - 0.000005}{-0.001} = \frac{-0.0010005}{-0.001} = 10.005$
$0.9999 \leq t \leq 1$	$v_5 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10t_i\Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t} = \frac{20(-0.0001) - 10(1)(-0.0001) - 5(-0.0001)^2}{0.9999 - 1} = \frac{-0.0002 + 0.0001 - 0.00000005}{-0.0001} = \frac{-0.000100005}{-0.0001} = 10.0005$
...	...

Tabla 53

También en este caso la sucesión de cocientes se acerca a 10, pero ahora lo hace de manera descendente. Este resultado refuerza nuestra hipótesis acerca de la velocidad instantánea. Analícense las dos sucesiones de velocidades medias en una misma tabla:

Acercamiento por la izquierda								Acercamiento por la derecha				
12.5	10.5	10.05	10.005	10.0005	...→	10	←...	9.9995	9.995	9.95	9.5	7.5

Tabla 54

Las sucesiones de cocientes que representan a las velocidades medias, muy cerca de $t_i = 1$, se comportan de modo que las dos *tienden* a 10, tanto por la derecha como por la izquierda. Si se siguiera reduciendo Δt hasta que fuera *infinitamente pequeño*, ¿la sucesión de valores de las velocidades promedio excedería de 10? Si no lo exceden, entonces diremos que 10 es el *límite* o *tope* del cual no pasan ambas sucesiones.

Para concluir nuestra búsqueda de la velocidad instantánea, introduciremos una notación para el *límite*. Para referirnos al límite utilizaremos la simbología *lím* y el término *tiende* lo representaremos mediante una flecha ($\rightarrow$), por tanto, para representar a la velocidad instantánea utilizaremos la notación:

$$\text{VELOCIDAD INSTANTÁNEA} = v_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad [16]$$

11 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

En la sección anterior se resolvió el problema de la velocidad instantánea por medio de aproximaciones numéricas, en esta sección se dará una interpretación geométrica de este proceso. Recuerdese que la velocidad instantánea es imposible de ser calculada aplicando la noción de velocidad media, pues ya se constató que conduce a una indeterminación. Sin embargo, la exploración de lo que sucede con las velocidades medias por medio de acercamientos a $t = 1$, tanto por la derecha como por la izquierda, proporciona una información muy valiosa, obsérvense las gráficas de las figuras 60 y 61.

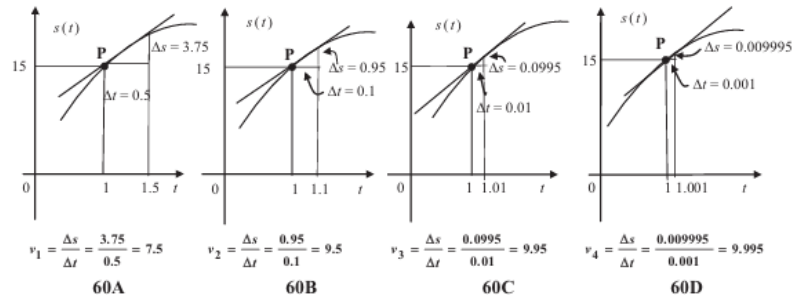


Figura 60

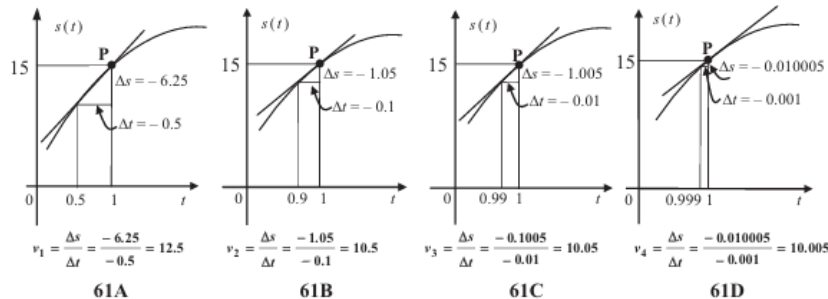


Figura 61

También en la sección anterior se concluyó que, cuando los cambios de tiempo se van haciendo cada vez más pequeños, los cambios en las distancias también se hacen cada vez más pequeños, pero la sucesión de velocidades medias a que da origen tiende a 10, tanto por la derecha como por la izquierda. Entonces, la velocidad en $t = 1$ es exactamente 10 m/s; las gráficas anteriores muestran estos acercamientos a 10. Pero véase *más de cerca* lo que sucede en la figura 62.

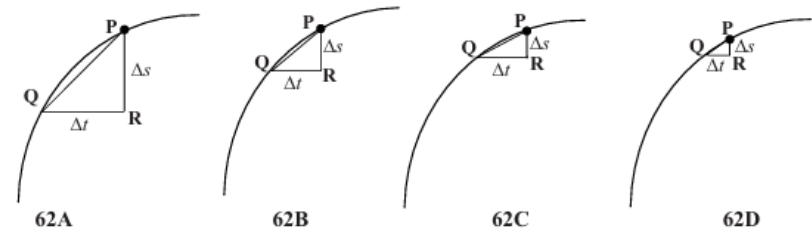


Figura 62

16

LA FUNCIÓN DERIVADA

En la sección anterior pudimos apreciar la gran utilidad que las diferenciales ofrecen en el cálculo de derivadas y en la resolución de problemas sobre variación. También concluimos que la derivada es un cociente de diferenciales y que su obtención se reduce al cálculo de diferenciales. Pero el cociente de diferenciales da origen a una nueva función desprovista de diferenciales. Ésta es la *función derivada*. Dicha función aporta mucha información valiosa acerca del comportamiento variacional de la función de la que se derivó. En esta sección se estudiará esta función y sus propiedades a partir de un ejemplo conocido.

Ejemplo 1. La velocidad de desplazamiento de un cuerpo que recorre una distancia s en un instante t , está dada por $s'(t) = 20 - 10t$, ésta se obtuvo de $s(t) = 20t - 5t^2$. Investigue y encuentre las relaciones entre el comportamiento de ambas.

Mediante la tabla 58 se compara la velocidad del cuerpo y su posición para algunos valores de t .

Tiempo t	Distancia $s(t)$		Velocidad $s'(t) = ds/dt$ [derivada de $s(t)$]	
	$s(t) = 20t - 5t^2$	$[t, (t)]$	$s'(t) = 20 - 10t$	$[t, s'(t)]$
0	$s(0) = 20(0) - 5(0)^2 = 0$	(0, 0)	$s'(0) = 20 - 10(0) = 20$	(0, 20)
0.5	$s(0.5) = 20(0.5) - 5(0.5)^2 = 8.75$	(0.5, 8.75)	$s'(0.5) = 20 - 10(0.5) = 15$	(0.5, 15)

Continúa...

De acuerdo con estos valores, la velocidad inicial del objeto es de 20 m/s. Cuanta más altura alcanza, su velocidad disminuye poco a poco hasta que alcanza su máxima altura, entonces su velocidad es cero. Después, en su camino de regreso, su velocidad disminuye poco a poco, hasta que toca el suelo con una velocidad de -20 m/s. La rapidez, por su parte, se comporta igual que la velocidad en los dos primeros segundos; después asciende nuevamente, de modo que el cuerpo choca con el suelo con la misma rapidez con que se inició su movimiento. Observe la figura 81 y compare las gráficas de $s(t)$, $s'(t)$ y $|s'(t)|$.

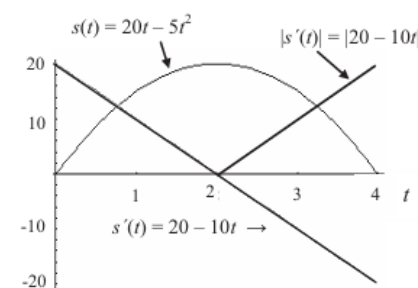


Figura 81

La función $s(t)$ crece en el intervalo $0 < t < 2$, en $t = 2$ alcanza su máxima altura y decrece en el intervalo: $2 < t \leq 4$. Por su parte, la función $s'(t)$ es decreciente en $0 < t < 2$; esto quiere decir que el cuerpo, después de haber sido lanzado, va perdiendo velocidad hasta que se anula en $t = 2$, después su velocidad es negativa (el signo negativo indica que el cuerpo se dirige hacia abajo) y sigue decreciendo hasta que choca con el suelo con una velocidad de -20 m/s. Por su parte, la rapidez decrece al igual que la velocidad en el intervalo $0 < t < 2$. En $t = 2$ también se anula y en $2 < t < 4$ nuevamente crece, hasta que choca con el suelo con una rapidez de 20 m/s. La función $s'(t)$ (que da la velocidad en cualquier t) es en realidad la función derivada de $s(t)$, el comportamiento variacional de $s(t)$ y $s'(t)$ son los que interesan. En la tabla 59 aparece condensada esta información.

Intervalos	$s(t) = 20t - 5t^2$ [altura]	$s'(t) = 20 - 10t$ [derivada]	$ s'(t) = 20 - 10t $ [rapidez]
$0 < t < 2$	Crece	Positiva	Positiva
$t = 2$	Altura máxima	Cero	Cero
$2 < t \leq 4$	Decrece	Negativa	Positiva

Tabla 59

Ejemplo 2. Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. ¿En qué intervalos $f(x)$ crece, decrece y dónde tiene puntos de estabilización o valores máximos y mínimos?

Esto se puede averiguar si se traza la gráfica, pero la visualización por sí misma no nos garantiza certidumbre. Utilicemos la derivada, que es una herramienta mucho más poderosa para averiguar su comportamiento variacional. Primero, obtengamos la derivada de $f(x)$. Ya que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, entonces $f'(x) = x^2 - 1$; la función $f'(x)$ nos informa cómo se comporta $f(x)$ en todo su dominio. Una forma estratégica de obtener esta información sería empezando por determinar los puntos de estabilización, donde $f'(x) = 0$. Una vez conocidos, se toman como referencia para averiguar

cómo se comporta $f(x)$ antes y después. Para ello primero se necesita resolver la ecuación $x^2 - 1 = 0$. Ésta se resuelve así:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 0. \\x &= \sqrt{1} = \pm 1 \\x_1 &= 1 \quad \text{y} \quad x_2 = -1\end{aligned}$$

Tales resultados indican que la función tiene puntos estacionarios en $x = 1$ y en $x = -1$. ¿Pero cuál de ellos es máximo y cuál mínimo? Para deducirlo, usemos la tabla 60, para ver lo que pasa con la derivada antes y después de estos puntos.

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$x - 1$	-	-2	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	2	+
$f'(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$f''(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$	Crece	Punto estacionario	Decrece	Punto estacionario	Crece

Tabla 60

17

PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

El origen del Cálculo Infinitesimal históricamente estuvo ligado a la resolución de problemas como: el cálculo de la velocidad de cuerpos con trayectoria variable, la determinación de la posición de un cuerpo dada su velocidad, la obtención de la dirección con la que se mueve un cuerpo, el cálculo de *máximos y mínimos*, el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Varios de estos problemas se han abordado de alguna manera en las páginas precedentes, otros quedan fuera del alcance de esta obra. Uno de los problemas de gran interés que aún faltan abordar es el de la determinación de valores *máximos y mínimos*. Ya se han estudiado en la sección anterior algunas cuestiones relativas a este problema.

Problema 1. Se dispara, verticalmente hacia arriba, un proyectil a una velocidad de 343 m/s. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza si se desprecia la fricción con el aire?

¿Qué es lo proporcionado?

Velocidad inicial de 343 m/s

¿Qué se busca?

La altura máxima alcanzada

Estrategia de resolución

Aunque este tipo de problema es ya conocido, para idear una estrategia de resolución es necesario preguntarse primero: ¿qué es lo que cambia? Lo que cambia es la altura; ésta, a la vez, cambia en dependencia del tiempo. ¿Qué se quiere maximizar? Se pide calcular la máxima altura. Es, por tanto, necesaria una fórmula para la altura que nos permita manipular a las variables en juego, es decir, que contenga al tiempo y a la velocidad inicial dada. Para ello habrá que hacer uso de la Física. Una vez obtenida la fórmula, se puede utilizar el criterio de los puntos estacionarios para obtener la máxima altura.