

Geometría Activa: una propuesta didáctica para la construcción de la noción de ángulo.

Giovanni Secue Tenorio

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Matemáticas y Física

Abril 2026



Geometría Activa: una propuesta didáctica para la construcción de la noción de ángulo.

Giovanni Secue Tenorio

Código: 1533464-3487

Directora:

Mg. Ma. Cristina Valencia Molina

Trabajo de grado presentado como requisito para poder optar al título de Licenciado en Educación en Matemáticas y Física

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Matemáticas y Física

Abril 2026

Agradecimientos

Con profunda gratitud, deseo expresar mi reconocimiento a Dios y a todas las personas que hicieron posible la culminación de este proyecto. A mis familiares, docentes y amigos, gracias por su acompañamiento constante, por sus palabras de aliento y por guiarme con generosidad a lo largo de este camino.

A la Universidad del Valle, mi sincero agradecimiento por brindarme los espacios, conocimientos y herramientas que enriquecieron significativamente mi formación profesional y personal, dejando una huella invaluable en mi crecimiento.

De manera muy especial, expreso mi más profundo e infinito agradecimiento a la directora de este trabajo de grado, Mg. Ma. Cristina Valencia Molina, por su paciencia, compromiso, pasión y sabiduría. Su orientación no solo fortaleció este proyecto en el ámbito académico, sino que también aportó de manera significativa a mi desarrollo personal.

Asimismo, agradezco a la monitora Lic. Sthefania Elizabeth Anaguano Yela, por su disposición, entrega y acompañamiento constante. Su guía fue fundamental para dar claridad a cada etapa, haciendo posible la materialización de este logro.

Finalmente, dedico un agradecimiento lleno de amor a mi madre, Martha Lucía Secue Tenorio, y a mi hermana, Esperanza Secue Tenorio, quienes han sido mi mayor fuente de inspiración y fortaleza. Su apoyo incondicional, confianza y motivación constante fueron el impulso necesario para alcanzar esta meta.

A todos ustedes, gracias por ser parte esencial de este logro.

Resumen

El trabajo tiene como objetivo desarrollar la noción de ángulo en estudiantes de tercer grado de básica primaria mediante una secuencia didáctica basada en la geometría activa. Para ello, se consideran aspectos como la lateralidad, la orientación, los lados del ángulo, el giro, el punto, la distancia y el vértice, promoviendo la descripción, la explicación, el análisis y la argumentación a través de actividades prácticas.

La investigación se estructura en cuatro capítulos: el primero presenta la problemática, los objetivos, los antecedentes y la justificación; el segundo desarrolla los fundamentos matemáticos, curriculares y didácticos; el tercero expone la metodología, el diseño y la implementación de la secuencia didáctica, organizada en dos situaciones de aprendizaje; y el cuarto presenta las conclusiones y recomendaciones sobre la efectividad de la propuesta.

En conclusión, el estudio busca fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de la geometría desde los primeros años escolares, mediante experiencias activas que faciliten la comprensión del concepto de ángulo y favorezcan la construcción significativa del conocimiento matemático.

Palabras clave: Geometría Activa, ángulo, enseñanza, aprendizaje, giro, pensamiento espacial, secuencia didáctica, etnomatemática, métrica.

Abstract

This work aims to develop the concept of an angle among third-grade primary school students through a didactic sequence based on active geometry. To this end, it incorporates elements such as laterality, orientation, the sides of an angle, rotation, points, distance, and the vertex, while fostering description, explanation, analysis, and argumentation through hands-on activities.

The research is structured into four chapters: the first presents the problem, objectives, background, and justification; the second develops the mathematical, curricular, and didactic foundations; the third outlines the methodology, design, and implementation of the didactic sequence, organized into two learning situations; and the fourth presents conclusions and recommendations regarding the effectiveness of the proposal.

In conclusion, the study seeks to strengthen the teaching and learning of geometry from the early school years through active experiences that facilitate the understanding of the concept of an angle and foster the meaningful construction of mathematical knowledge.

Keywords: Active Geometry, angle, teaching, learning, rotation, spatial thinking, didactic sequence, ethnomathematics, metrics.

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN 12

Capítulo 1 14

1. El Problema 14

1.1 Situación Problemática 14

1.2 Objetivos 18

1.2.1 Objetivo General 18

1.2.2 Objetivos Específicos 18

1.3 Justificación 18

1.4 Antecedentes 22

1.4.1 Estudios relacionados con el pensamiento matemático y la etnomatemática. 22

1.4.2 Estudios relacionados con pensamiento métrico y concepto de ángulo. . 25

1.4.3 Estudios relacionados con el pensamiento espacial 35

Capítulo 2 41

2. Marco de referencia 41

2.1 Perspectiva Matemática 41

2.4.1 Ángulo como región del espacio. 42

2.4.2 Ángulo como par de rayos o como par de semirrectas. 42

2.4.3 Ángulo como cantidad de giro. 43

2.4.4 Introducción del Pensamiento Métrico. 44

2.2 Perspectiva Curricular. 46

2.2.1. El pensamiento espacial y los sistemas geométricos. 50

2.2.2. Pensamiento Métrico y los Sistemas Métricos o de Medidas. 51

2.2.3 Coherencia Vertical y Horizontal en la Investigación 52

2.2.4 Derechos básicos de aprendizaje (DBA) para los grados de primero a quinto. 54

2.3 Perspectiva Didáctica 56

2.3.1 Relación entre los Procesos Cognitivos. 58

2.3.2 Aprehensión Discursiva. 62

2.3.3 Enfoques Didácticos en la enseñanza del ángulo. 66

Capítulo 3 68

3. Metodología 68

3.1 Diseño metodológico. 69

3.2 Paradigma. 69

3.3 Contexto de la investigación. 70

3.4 Fases de la Investigación 71

3.5 Secuencia didáctica. 74

3.5.1 Diseño de la prueba diagnóstica 75

3.5.2 Consideraciones para el Diseño de la Secuencia Didáctica 77

3.5.3 Implementación de la Secuencia Didáctica. 87

3.6 Análisis de la Implementación. 111

3.6.1 Análisis del Diagnóstico inicial 115

3.6.2. Análisis de implementación de la Secuencia Didáctica 116

3.6.3 Análisis de los Resultados de prueba final 120

Capítulo 4 123

Conclusiones 123

Recomendaciones 125

Referencias bibliográficas 126

Anexos 1

Índice de tablas

Tabla 1 Descripción De Las Actividades. 83

Tabla 2 Ejemplo De La Tabla De Clasificación De Información Y Propiedades De Los Ángulos..... 101

Tabla 3 Muestra del análisis realizado, de la tarea 1. 116

Tabla 4 Muestras del análisis final, bloque 1. 118

Tabla 5 Muestra del análisis de la tarea 6. 119

Tabla 6 Muestra final de análisis final de la tarea 6. 120

Tabla 7 Muestra de la prueba final. 121

Índice de figuras

Figura 1 Ángulo Como Región Del Espacio. 42

Figura 2 Ejemplo De Ángulo Como Par De Rayos O Como Par De Semirrectas. 43

Figura 3 Procesos Cognitivos Fundamentales del Pensamiento. 59

Figura 4 Aprehensión Visual Las Figuras. 61

Figura 5 Ejemplo De Aprehensión Discursiva. 63

Figura 6 Enfoques Didácticos en la Enseñanza del Ángulo. 67

Figura 7 Pasos Para Implementar Una Secuencia Didáctica. 72

Figura 8 Elementos Esenciales Que Aportan Las Diferentes Perspectivas Para Diseñar Una Secuencia Didáctica. 82

Figura 9 Estudiantes Realizando La Actividad 1 88

Figura 10 Estudiante Presentando La Etapa 2 De La Actividad. 90

Figura 11 Sentido de las Manecillas del Reloj 98

Figura 12 Elaboración De La Circunferencia. 102

Figura 13 Circunferencia Que Involucra El Giro De Una Posición Inicial Y Final. 103

Figura 14 Estudiante Realizando La Actividad. 104

Figura 15 Elaboración De Un Ángulo Recto. 106

Figura 16 Elaboración De Un Ángulo Agudo 107

Figura 17 Estudiantes Realizando las Posiciones Básicas del Karate. 109

Figura 18 Estudiantes Explorando los Movimientos del Kata. 110

Índice de Anexos

Anexo A Prueba Diagnóstica. 1

Anexo B Respuestas de los estudiantes a la prueba diagnóstica y su análisis. 7

Anexo C Análisis de la implementación de la secuencia didáctica. 36

Anexo D Análisis de la aplicación de la prueba final. 118

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está realizado bajo la línea de Investigación en Didáctica de las Matemáticas del programa Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle. Se plantea desarrollar la noción de ángulo con estudiantes de tercer grado de básica primaria a partir de una secuencia didáctica que implemente la geometría activa. Para llevar a cabo el proyecto se tuvieron en cuenta algunos referentes metodológicos de acercamiento a la investigación de diseño, se analizaron las condiciones y posibilidades involucradas en el aprendizaje del concepto de ángulo, considerando principalmente sus aspectos generales (lateralidad, orientación, lados del ángulo, giro, etc.), para luego abordar propiedades básicas (orientaciones desde su propio cuerpo, noción de punto, de distancia y de vértice, entre otras). Como resultado de este proceso se propusieron situaciones y actividades que permitieran a los estudiantes realizar una descripción, poder explicar, analizar y argumentar los sucesos y distintos hallazgos en el desarrollo de las tareas.

El primer capítulo introduce las generalidades del proyecto, incluyendo la identificación de la problemática, la formulación de los objetivos, la revisión de antecedentes y la justificación del estudio. En este contexto, se hace un diagnóstico sobre las concepciones primitivas que los estudiantes tienen respecto a la geometría y se destaca la limitada atención que tradicionalmente se ha brindado a la enseñanza de esta disciplina en los primeros años escolares. La propuesta de la geometría activa se presenta como una solución innovadora y viable para abordar el estudio de los sistemas geométricos, con un

enfoque específico en el desarrollo del concepto de ángulo. El capítulo concluye con el planteamiento de la pregunta de investigación y los objetivos que guían este trabajo.

El segundo capítulo expone los referentes teóricos que sustentan el estudio, estructurados en tres perspectivas complementarias: la perspectiva matemática, que analiza los conceptos geométricos en cuestión; la perspectiva curricular, que contextualiza el estudio en el marco de los programas educativos vigentes; y la perspectiva didáctica, que fundamenta las estrategias pedagógicas implementadas.

El tercer capítulo describe la metodología utilizada para la elaboración del proyecto, abarcando las fases de diseño, implementación en el aula y análisis de la información recolectada. Este capítulo presenta la estructura general de la secuencia didáctica, que se organiza en dos situaciones principales diseñadas para facilitar la comprensión de la noción de ángulo en los estudiantes. La descripción detallada de estas situaciones, así como las actividades y tareas específicas que las componen, se abordan exhaustivamente en el desarrollo de este, permitiendo un análisis profundo de los conceptos clave y su relación con el objeto de estudio.

Finalmente, el cuarto capítulo presenta las conclusiones y recomendaciones derivadas del proceso investigativo, evaluando el impacto y la eficiencia de la secuencia didáctica propuesta en el desarrollo de la noción de ángulo en los estudiantes.

Capítulo 1

1. El Problema

1.1 Situación Problemática

En las últimas décadas, se ha resaltado la importancia de enseñar geometría en la escuela, surgiendo numerosas investigaciones en Educación Matemática que proveen elementos conceptuales y metodológicos para mejorar el desempeño de los estudiantes en esta área, sin embargo, no ha sido posible dar un paso adelante en esta tarea, y esto en parte se debe, a que "entre los campos de conocimiento, la geometría exige al estudiante la una actividad cognitiva más completa y concisa, ya que se orienta bajo los gestos, al lenguaje y la mirada, entrando en la necesidad de razonar y construir, indisociablemente" (Duval,2016. p.1). Por tanto, la enseñanza de la geometría se vuelve compleja. Sumado a esto, en la escuela se suele presentar al estudiante como un producto final y acabado, no se le permite tomar un rol activo en el desarrollo de su conocimiento matemático, no se fomenta la creatividad y el aprendizaje significativo, en consecuencia, la enseñanza de esta disciplina suele llegar a tener menos éxito que enseñar operaciones numéricas o álgebra elemental.

Esta complejidad se hace evidente de manera crítica en la enseñanza del concepto de ángulo. Investigaciones en didáctica de la geometría señalan que los niños de tercer grado suelen enfrentar obstáculos epistémicos al intentar comprender el ángulo, limitándolo a una representación estática en el papel. Entre las dificultades recurrentes se encuentra la imposibilidad de reconocer el ángulo como un giro o movimiento, centrándose únicamente

en la longitud de los rayos que lo forman o en la posición de sus lados, lo que genera errores de percepción en los que el estudiante asume que un ángulo es "más grande" si sus líneas son más largas, ignorando la amplitud.

En Colombia, los Lineamientos Curriculares (1998) retoman el estudio de la geometría intuitiva y desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, muestran la necesidad de rescatar el sentido espacial para poder entender toda la matemática. En es sentido, el pensamiento espacial, es considerado como “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manejan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y las diferentes traducciones a representaciones materiales” (p. 56). Siendo este pensamiento esencial para el desarrollo del pensamiento científico, ya que permite manejar y representar la información en el aprendizaje y en la resolución de problemas, de ahí que, la geometría activa sirve como “Posibilidad para restablecer el estudio de sistemas geométricos como medios de exploración y representación del espacio” (p. 56).

Por otra parte, la preocupación por la falta de habilidades del manejo mental y gráfico del espacio en las personas y a partir de una serie de experiencias en trabajos experimentales, Vasco (1992, p. 4) propone la geometría activa como “Investigación del espacio y de sus modos de representación en la imaginación y en el plano”, también, invita a estudiar y aprender geometría como ejercicio del propio cuerpo, de la imaginación y del dibujo, y sobre todo, sugiere no perder el papel activo y dinámico, planteando que se debe evitar llenar de figuras muertas y símbolos estáticos en los tableros. Precisamente, la noción de ángulo suele ser una de esas "figuras muertas" en el aula tradicional. Los niños de tercer grado suelen tener dificultades porque creen que el ángulo cambia si se gira o se mueve,

esto hace que les cueste aplicar lo aprendido en situaciones de la vida real.

Al tomar su cuerpo como instrumento de enseñanza se espera que el estudiante enfrente un proceso de autoconocimiento que le permita modelar problemas cotidianos, de tal manera que niños que están iniciando su formación escolar, mediante una secuencia didáctica, podrían incentivar un conocimiento dinámico e interactivo que les permitiera fortalecer nociones matemáticas, en este caso, el pensamiento espacial. Asimismo, en los Lineamientos Curriculares (1998) se precisa que «los sistemas geométricos se construyen mediante la exploración activa y modelación del espacio» (p. 56). Este planteamiento valida el uso de la geometría activa como recurso fundamental para examinar y configurar el entorno, partiendo del rol dinámico del estudiante en interacción con su medio. En este sentido, «se trata de 'hacer cosas', moverse, dibujar, construir, crear y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna» (p. 57).

Con base en esto, y de acuerdo a los Lineamientos Curriculares (1998), se sugiere enseñar la noción de ángulo a niños de primero, segundo y tercer grado escolar a partir de "la experiencia de giros de su propio cuerpo del que pueda apreciar de manera cualitativa la mayor a menor amplitud o abertura del ángulo de giro" (p. 58). Esta recomendación surge como respuesta a la dificultad que tienen los niños para transitar de lo concreto a lo abstracto; sin la vivencia corporal del giro, el concepto de ángulo permanece ajeno a su realidad física, dificultando la superación de errores comunes como confundir la región angular con el vértice mismo.

Ahora, durante los primeros años de vida, los niños se encuentran en etapa de

exploración constante y busca con sus acciones descubrir su entorno inmediato, al mismo tiempo va construyendo aprendizajes de manera natural; de lo anterior surge un interrogante, ¿Por qué la escuela no incorpora a su proceso de enseñanza espacios para la construcción natural del aprendizaje?, además, suena interesante considerar ¿Cómo la geometría activa en la escuela puede proporcionar recursos valiosos para la exploración del espacio y la estimulación del aprendizaje natural del concepto de ángulo?

Como resultado de la problemática expuesta, y teniendo en cuenta la formación deportiva del autor en el Karate Do, con este trabajo se pretende fortalecer el desarrollo de la noción de ángulo en niños de tercer grado de básica primaria mediante actividades de juego y enseñanza de algunos movimientos del karate en el contexto de la vida cotidiana, procurando que el estudiante supere las barreras conceptuales de la geometría estática mediante la vivencia del ángulo en la acción motriz.

Desde esta perspectiva, cobra relevancia la **etnomatemática**, entendida como la matemática practicada por grupos culturales identificables, en este caso, el grupo de niños en su contexto escolar y deportivo. En su cotidianidad, los niños realizan actividades y juegos que involucran giros, cambios de dirección y nociones espaciales que, aunque no están formalizadas académicamente, constituyen una base de conocimiento matemático vivo. Sin embargo, la escuela a menudo ignora estos saberes previos, creando una brecha entre el juego y el aula . Es allí donde la geometría activa, vinculada a experiencias como el Karate Do, permite rescatar esos esquemas operatorios naturales para convertirlos en conceptos geométricos sólidos."

Como resultado se formula la siguiente pregunta.

¿Cómo la implementación de una secuencia didáctica basada en la geometría activa permite integrar las experiencias previas de los estudiantes para el desarrollo de la noción de ángulo en estudiantes de tercer grado de básica primaria en una IE de la ciudad de Cali?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Desarrollar la noción de ángulo en estudiantes de tercer grado de básica primaria a partir de una secuencia didáctica que implemente la geometría activa.

1.2.2 Objetivos Específicos

- ✓ Documentar el proceso de construcción del concepto de ángulo en la enseñanza de la geometría para estudiantes de tercer grado de básica primaria.
- ✓ Identificar y analizar los conocimientos matemáticos subyacentes en la enseñanza de la geometría activa que facilitan la comprensión de los ángulos.
- ✓ Diseñar y articular una secuencia didáctica que utilice la geometría activa para la enseñanza de la noción de ángulo.

1.3 Justificación

A nivel nacional e internacional, se ha observado que la enseñanza tradicional de la geometría tiende a enfocarse en la memorización de definiciones y teoremas, lo que conduce a la adquisición de significados estáticos y descontextualizados. Esta situación plantea la necesidad de encontrar enfoques pedagógicos más dinámicos y significativos para el aprendizaje de los conceptos geométricos. Como lo afirma Gamboa (2010):

> En el sistema de educación formal, por lo general los contenidos de geometría son postulados a los educandos como el producto terminado de la actividad matemática,

> que deja en segundo plano los procesos implícitos de la construcción y de razonamiento en este conocimiento. La enseñanza tradicional de la geometría se centra en aprender de memoria diferentes áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, respaldadas en construcciones más mecánicas y a la vez mas descontextualizadas. (p. 114)

Ahora bien, es importante destacar que el aprendizaje y desarrollo de habilidades matemáticas no es algo que se da meramente en la escuela a partir de la conceptualización de objetos matemáticos, sino que es un proceso que surge desde la experiencia propia de cada individuo en cada uno de los espacios de interacción que tiene con sus pares, en este sentido, D'Ambrosio (2013) menciona que "Aprender no es la simple adquisición de técnicas y habilidades, ni la memorización de algunas explicaciones y teorías" (p.13).

De esa manera, la geometría activa es una propuesta que resalta la importancia de construir significados matemáticos a partir de la exploración de prácticas culturales y experiencias personales. En este enfoque, el aprendizaje de conceptos geométricos, incluyendo el concepto de ángulo, surge desde la experiencia propia de cada individuo y se relaciona con situaciones cotidianas y aplicaciones prácticas. En el caso específico de la institución educativa, se busca desarrollar en los niños de tercer grado de primaria el concepto de ángulo y su importancia en el aprendizaje de las matemáticas. El ángulo es una medida fundamental en geometría y trigonometría, y su comprensión es esencial para el desarrollo de distintas habilidades matemáticas de avanzado nivel.

> El enfoque de la geometría activa permite a los estudiantes identificar aspectos básicos de los ángulos y sus características a través de situaciones reales y concretas, como calcular el ángulo adecuado para lanzar una pelota, cambiar un

> bombillo, dar la vuelta a una esquina o diseñar la construcción de una casa. Además, al enfatizar la comunicación clara y precisa sobre los ángulos, los estudiantes desarrollan habilidades lingüísticas relacionadas con términos y vocabulario geométrico. (Gómez, 2022a)

Por otra parte, la geometría activa también promueve la integración de conceptos geométricos con otras áreas matemáticas, como la geometría y la trigonometría. “Al comprender los ángulos, los niños pueden explorar y comprender las propiedades de figuras geométricas y aplicar conceptos trigonométricos como el seno, coseno y tangente en situaciones de medida y comparación”. (Gómez, 2022a, p.17)

En este sentido, también Vasco (2011), postula el “constructivismo genético" con un enfoque educativo que resalta la importancia de la construcción activa del conocimiento por parte de los educandos a través de la interacción con su entorno y la construcción de sus estructuras cognitivas. Esta teoría, influenciada por las ideas de Jean Piaget, Vasco plantea su propia perspectiva y se centra en el papel del contexto social y cultural, así como en la reflexión y la metacognición en el proceso de aprendizaje. Por lo que este enfoque es muy conveniente para incentivar la relación matemática con actividades cotidianas en este caso con movimientos que requiere la práctica del arte marcial ya que este posibilita aprehender al sujeto desde su propio cuerpo conceptos matemáticos como: sistemas geométricos espaciales, ubicación del espacio que le rodea, dirección, sentido, perpendicularidad, paralelas, rotaciones, noción de ángulo u otras.

Por tal razón, los movimientos que se realizan en la práctica del arte marcial Karate se presentan como un escenario ideal para ilustrar la relación entre el movimiento corporal y los conceptos geométricos que se abordan en la secuencia didáctica. Esta aproximación

no solo permite a los educandos comprender de manera tangible conceptos como la lateralidad, el giro y la orientación, sino que también integra un enfoque etnomatemático, conectando las prácticas culturales con el aprendizaje matemático. En el diseño e implementación en el aula, se consideró cómo estas conexiones pueden enriquecer la experiencia de aprendizaje, como se detalla en la práctica final realizada con los estudiantes.

Según el Ministerio de Educación Nacional, 2016 El estudio de figuras y cuerpos geométricos, tanto en dos como en tres dimensiones, junto con el análisis de sus desplazamientos y transformaciones, favorece la comprensión de conceptos relacionados con el área, el perímetro y el volumen. Estos aprendizajes pueden vincularse con el uso de diferentes unidades de medida y con conceptos geométricos como la simetría, la semejanza y la congruencia. Desde esta perspectiva, la geometría activa constituye una estrategia importante para fortalecer el pensamiento espacial, ya que permite al estudiante explorar, interpretar y representar de manera dinámica las características y relaciones presentes en el espacio

En este contexto, la práctica del Karate-Do se presenta como un espacio valioso para el aprendizaje significativo y la construcción de nociones geométricas. Los movimientos y prácticas del Karate-Do requieren habilidades relacionadas con la identificación, representación y uso de ángulos en giros, aberturas, inclinaciones y figuras geométricas, lo que brinda a los estudiantes una oportunidad única para vincular el arte marcial con conceptos matemáticos y fomentar el Desarrollo del pensamiento espacial.

1.4 Antecedentes

En este apartado se presentan diversas investigaciones de pregrado, maestría y artículos académicos que se han desarrollado en el ámbito de las matemáticas, tanto en el contexto educativo como en otras disciplinas relacionadas, abarcando un panorama local, nacional e internacional. Estas investigaciones contribuyen de manera significativa a los objetivos de este estudio. En este marco, se analizan trabajos que abordan temas como el pensamiento matemático y la etnomatemática, pensamiento métrico y concepto de ángulo, así como el pensamiento espacial.

1.4.1 Estudios relacionados con el pensamiento matemático y la etnomatemática.

Jaramillo (2022), en su tesis de maestría, de la Universidad del Valle, titulada "Implementación de la metodología Clic en la enseñanza de las nociones de perímetro y área dentro del contexto de la huerta escolar a través del inglés como lengua extranjera", realizó una intervención pedagógica en un contexto de huerta escolar con estudiantes de grado cuarto de primaria; este proyecto involucró enseñanzas de nociones de longitud, perímetro y área, con la enseñanza del vocabulario y las expresiones en inglés necesarias para comunicarse de forma oral y escrita.

Algunas conclusiones a las que llegó Jaramillo (2022) fueron que los contextos reales son necesarios para la comprensión de las magnitudes de longitud y superficie y sus medidas, para enseñar conceptos como área y perímetro se debe privilegiar la experimentación, la comparación, la iteración de la unidad de medida en contextos reales, descomposición y recomposición de superficies, los recubrimientos del plano, para pasar luego a lo icónico y a lo procedimental.

Por otro lado, en su investigación Jaramillo (2022), resalta que:

> Desarrollar un discurso matemático es equivalente a pensar matemáticamente y que la separación entre comunicación y pensamiento es inviable dado que el pensar es un esfuerzo dialógico. Por esta razón, la tarea del profesor en el aula será la de modificar el discurso previo de los estudiantes por un discurso matemático. (p. 18)

En conclusión, este proyecto investigativo brinda una visión de cómo fortalecer el aprendizaje de las matemáticas teniendo como eje central la comunicación y los contextos reales para así enriquecer el vocabulario y por ende el lenguaje matemático.

Por otra parte, en la investigación, Audor (2016), en su investigación titulada "Visualización y razonamiento matemático. Una situación de aprendizaje acerca de la relación de congruencia, implementada a través de un experimento de enseñanza en una escuela rural"*,* aborda las dificultades que presentan los estudiantes de cuarto grado al momento de interpretar y utilizar conceptos relacionados con la congruencia, la visualización y el razonamiento matemático. Entre los aspectos asociados a estas dificultades se encuentran la disponibilidad limitada de recursos didácticos, el predominio de estrategias de enseñanza tradicionales y la poca incorporación de herramientas tecnológicas en las actividades de aprendizaje.

En cuanto a la noción de ángulo, el trabajo plantea que es un concepto fundamental para el estudio de la geometría, ya que permite describir y analizar las propiedades y relaciones entre las figuras geométricas. Sin embargo, los estudiantes suelen tener dificultades para comprender y manejar este concepto, debido a que se les presenta de forma abstracta y descontextualizada. Por esta razón, el trabajo propone una situación de aprendizaje que busca desarrollar la noción de ángulo desde una perspectiva dinámica y visual, mediante el uso de material que se pueda manipular y software educativo. "De esta

forma, se pretende que los estudiantes reconozcan el ángulo como una medida del giro o la rotación entre dos semirrectas que comparten un vértice, y que puedan establecer criterios de congruencia entre ángulos" (Audor, 2016, p.109). El objetivo del trabajo es diseñar e implementar un entorno de aprendizaje que permita el desarrollo de las actividades cognitivas par visualizar y razonar, por medio de tareas en las que se involucra el aprendizaje de la correspondencia geométrica. La metodología que utilizó para desarrollar la propuesta fue investigación-acción.

> De esa manera la autora concluye que al implementar cada una de las actividades que componen el diseño se avanzó progresivamente en la comprensión de la relación de congruencia y en la distinción entre esta y otras relaciones geométricas como la semejanza, ángulo y el área. (Audor, 2016)

Gutiérrez (2019), en su tesis de maestría en educación titulada "Etnomatemática al aula: la danza como medio en la relación cultura y escuela", desarrollado en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, se analiza la posibilidad de incorporar al contexto educativo los conocimientos matemáticos presentes en las manifestaciones culturales. La investigación parte de la observación de las prácticas propias de la danza folclórica desarrolladas por un grupo de Bogotá, en las cuales se reconocen diferentes formas de utilizar y comprender las matemáticas desde una perspectiva cultural. A partir de estos saberes, se diseñó una propuesta pedagógica dirigida a estudiantes de tercer grado de primaria, enfocada en el aprendizaje de conceptos geométricos. De esta manera, el estudio buscó generar una conexión entre los conocimientos matemáticos construidos en el ámbito cultural y aquellos que se trabajan habitualmente dentro de la escuela.

La metodología empleada por Gutiérrez (2019) resulta interesante para el desarrollo de este proyecto, pues su estructura permite implementar y analizar las actividades de aula basadas en un enfoque cualitativo, especialmente la investigación-acción cooperativa, descrita por Ghiso (1996), quien a partir de estos establece fases metodológicas y en consecuencia categorías de análisis.

1.4.2 Estudios relacionados con pensamiento métrico y concepto de ángulo.

Por otra parte, en el estudio Marmolejo et al. (2016), desarrollado por un equipo de la Universidad de Nariño en el municipio de Tumaco del departamento de Nariño, titulado "La Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria", determinaron la planeación y la transformación de las prácticas educativas en las clases de matemáticas, por lo cual, en conjunto con los docentes de Tumaco diseñaron diferentes actividades para la enseñanza de la magnitud longitud y capacidad en la educación primaria, desde la etnomatemática, bajo un metodología sociocultural, involucrando en el proceso de aprendizaje a estudiantes, padres de familia y a profesores, para reflexionar sobre cómo los docentes de la institución enseñaban las matemáticas y cómo aplicar los saberes matemáticos extraescolares en la cultura tumaqueña, con un grupo de estudiantes de 3°, 5° y 6° grado. Con base en esto Marmolejo et al. (2016) postulan que:

> La propuesta contempló tres actividades elaboradas por los docentes, orientadas a que los estudiantes experimentaran con unidades no convencionales para determinar medidas relacionadas con la longitud y la capacidad. A partir de esta experiencia, se resalta la importancia de desarrollar estrategias pedagógicas que permitan al estudiante construir progresivamente el concepto de magnitud, especialmente en

> situaciones relacionadas con medir longitudes y capacidades, antes de avanzar hacia su representación mediante valores numéricos.

Desde esta perspectiva, la investigación aborda el fortalecimiento del pensamiento métrico y la comprensión de los sistemas de medida. Para ello, presenta diferentes situaciones didácticas dirigidas a los primeros niveles de la educación básica, en las cuales los estudiantes pueden desarrollar conocimientos y habilidades vinculados con la medición a través de experiencias significativas (Marmolejo et al., 2016).

De esta manera en los estudios llevados a cabo por los autores encontraron que los docentes, aún realizaban las clases de una forma tradicional y no inculcan en los niños la motivación por aprender las matemáticas, por lo que por medio de diferentes actividades didácticas aplicadas se determinó que los niños aún no relacionaban muy bien los conceptos de área, volumen y ángulo y además tenían dificultades para identificar las diferentes figuras geométricas. Según Marmolejo et al. (2016):

> Los niños pueden presentar dificultades para diferenciar y establecer relaciones entre conceptos como área y perímetro cuando se trabajan figuras planas, así como entre área y volumen al abordar cuerpos geométricos. Esta situación puede generar interpretaciones equivocadas sobre las magnitudes que caracterizan cada figura o sólido. Por esta razón, resulta pertinente fortalecer la comprensión de estos conceptos mediante experiencias que permitan reconocer las relaciones y diferencias entre las propiedades geométricas, incluyendo nociones como la equivalencia y las figuras isoperimétricas.

Concluyendo los autores que, al brindar una enseñanza clara y significativa en torno a estos conceptos, se puede promover una comprensión más profunda y una mejor relación entre las diferentes medidas en el contexto, por lo que es importante implementar en las instituciones el diseño, implementación y evaluación de actividades desde una perspectiva etnomatemática, con el objetivo de empoderar a los estudiantes desde el aprendizaje de las matemáticas y valorar la cultura de la región.

Por otro lado, en el estudio que llevó a cabo Gómez (2021a), sobre el fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 en primer grado de matemáticas, se diseñaron actividades de aprendizaje orientadas a fortalecer este tipo de pensamiento en los estudiantes. Además, se elaboraron evaluaciones para medir los avances en el logro del DBA. Este trabajo se desarrolló a través de un estudio cualitativo, que buscó dar respuesta algunas dificultades que presenta el referente de calidad DBA, por lo que este trabajo pretendió construir una RED que sirviera para fortalecer el pensamiento métrico, y a la vez, proponer algunas mejoras para dicho referente en torno al DBA #5, de grado primero de matemáticas.

Por otro lado, Gómez (2021a), inspirado en los lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), fundamenta su propuesta en una serie de procesos orientados al fortalecimiento del pensamiento métrico. Dichos procesos resultan particularmente pertinentes para el desarrollo de la noción de ángulo entendida como magnitud o cantidad de giro, más allá de su concepción meramente geométrica o estática.

Uno de los procesos centrales señalados Gómez (2021a) plantea que uno de los aspectos importantes en el aprendizaje de las magnitudes consiste en que los estudiantes logren comprender qué representa cada una y cómo puede ser medida. Esto implica

reconocer que magnitudes como la longitud, la masa y el volumen son diferentes entre sí y, por lo tanto, requieren formas particulares de medición. Tener claridad sobre estas diferencias ayuda a evitar errores frecuentes, como considerar que la cantidad de materia de un objeto puede determinarse de la misma manera que el espacio que este ocupa. En relación con los ángulos, también es necesario favorecer una comprensión adecuada de esta magnitud, entendiendo que su medida está relacionada con el giro y no con el tamaño o la longitud de los segmentos que lo forman.

Otro aspecto que resulta importante es comprender que una magnitud puede mantenerse, aunque cambie la apariencia o la forma del objeto. Según Gómez (2021a), las características visuales de una representación pueden llevar a los estudiantes a pensar que una medida se ha modificado, cuando en realidad permanece igual. Por ejemplo, un alambre puede cambiar de una posición recta a una forma de espiral sin que esto altere su longitud. Algo parecido ocurre con los ángulos, pues es común que se piense que un ángulo aumenta cuando sus lados son más largos. Sin embargo, la extensión de sus lados no determina su medida. Por esta razón, el trabajo con materiales concretos y manipulables puede ser una alternativa útil para que los estudiantes exploren estas situaciones, comparen diferentes representaciones y construyan una comprensión más clara de las magnitudes.

Asimismo, el autor resalta la importancia de la estimación de magnitudes y del proceso de capturar lo continuo a partir de lo discreto. La estimación se define como un proceso mental mediante el cual se obtiene una medida sin recurrir a instrumentos formales, apoyándose en percepciones visuales o manipulativas. En la vida cotidiana, capturar lo

continuo con lo discreto suele implicar el uso de medidas aproximadas, dado que los patrones empleados requieren, en muchos casos, ser fraccionados para lograr mayor precisión. En el aprendizaje del ángulo, este proceso se evidencia cuando los estudiantes realizan giros con el cuerpo y los relacionan con porciones de una circunferencia, transitando de una estimación intuitiva del giro hacia el reconocimiento de fracciones de vuelta, como la vuelta completa, la media vuelta, el cuarto o el octavo de vuelta. (Gómez, 2021a)

Este proceso discreto–continuo se consolida cuando la circunferencia se utiliza como patrón de medida, permitiendo que un rayo que gira desde una posición inicial hasta coincidir nuevamente con ella represente la vuelta completa y se asocie con el ángulo completo. De manera análoga, la media circunferencia, el cuarto y el octavo de circunferencia se relacionan con ángulos como el llano, el recto u otros ángulos intermedios, fortaleciendo la comprensión del ángulo como una magnitud continua que puede discretizar mediante patrones convenidos. (Gómez, 2021a)

Otro aspecto señalado por Gómez (2021a) es la apreciación del rango de las magnitudes, ya que ubicar una medida dentro de un determinado rango permite decidir cuáles unidades, patrones e instrumentos resultan más adecuados para su medición. En el caso del ángulo, el rango de la magnitud se determina a partir de la estimación de giros corporales y su relación con la circunferencia y sus fracciones. Así, la circunferencia no solo funciona como patrón de medida, sino también como instrumento que permite representar gráficamente el inicio y el final del giro, dando lugar a la identificación de ángulos específicos, como el ángulo llano en el caso de la media vuelta.

En este contexto, Gómez (2021a) distingue entre unidad y patrón de medición. El patrón de medida se entiende como un acuerdo explícito y no estandarizado sobre aquello que se toma como referencia para medir, el cual puede variar según la actividad o el sujeto. Por el contrario, las unidades de medida corresponden a referencias fijas y estandarizadas que permiten cuantificar una magnitud de manera convencional. Así, aunque la circunferencia y sus fracciones actúan inicialmente como patrones para medir giros, estas se vinculan posteriormente con unidades de medida estandarizadas del ángulo, como el ángulo completo, el ángulo llano y el ángulo recto.

Finalmente, el autor aborda la asignación numérica de las medidas, destacando que toda medición de una magnitud continua conlleva un grado de incertidumbre inherente. Esta imprecisión se debe tanto a las limitaciones perceptivas del observador como a la precisión de los instrumentos utilizados. Además, Gómez (2021a) subraya el papel del trasfondo social de la medición, señalando que el aprendizaje significativo de las magnitudes se favorece cuando el conocimiento matemático se vincula con contextos cotidianos, o cuando estos contextos se integran deliberadamente en las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Lacera et al. (2017) realizaron una investigación de carácter cualitativo, orientada desde la investigación-acción en el contexto escolar. El estudio involucró tanto a docentes como a estudiantes y buscó generar mejoras en el proceso educativo a partir de la identificación de una situación concreta del aula. Para ello, el trabajo se desarrolló mediante diferentes momentos que permitieron planificar las acciones, llevarlas a cabo, analizar lo ocurrido y valorar los resultados obtenidos. Para recopilar la información se utilizaron

diferentes estrategias, entre ellas cuestionarios aplicados antes y después de la intervención, encuestas y observación directa.

Los resultados evidenciaron una respuesta favorable por parte de los estudiantes frente a las actividades propuestas, destacándose un alto nivel de motivación durante su desarrollo. Esta disposición favoreció la comprensión de los conceptos de área y perímetro y contribuyó al fortalecimiento del pensamiento métrico. De esta manera, el estudio muestra la importancia de implementar actividades que involucren activamente a los estudiantes y que permitan abordar los conceptos matemáticos desde experiencias más participativas.

Por medio, de las actividades como: me divierto hallando el perímetro de polígonos, recubrimiento de figuras geométricas, lograron concluir que la propuesta de innovación, es viable no solo para fortalecer el pensamiento métrico, sino también para el fortalecimiento de los diferentes pensamientos matemáticos y en diferentes áreas del conocimiento, reafirmando así lo que se postula en la teoría del conectivismo.

Por otro lado, en el trabajo de Rotaeche (2008) titulado la construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria, muestra el problema en que ha caído la escuela al asumir que con el solo hecho de definir el concepto de ángulo, exponer su tipología y manipular el concepto en clase está exento de dificultades en el tratamiento y aplicación en otras áreas. La historia muestra que el definir el ángulo no es tan sencillo como se piensa, ya que este no se mide de la misma forma que una línea o una superficie, haciendo tal proceso ambiguo a causa de su naturaleza multifacética que abarca su construcción. Lo

anterior ha llevado a que el alumno tenga problemas para conceptualizar y luego utilizarlo en la construcción de otros conocimientos.

Al no existir una definición absoluta y con el objetivo de permitir al alumno conocer diferentes facetas que involucra tal concepto para así crear su propia concepción de ángulo, Rotaeche (2008) centra su mirada en estudios de situaciones didácticas y en consecuencia el uso de la ingeniería didáctica como metodología para el diseño de una primera secuencia.

En este sentido, Rotaeche (2008) muestra las diferentes fases que contempla la Ingeniería Didáctica, la cual resulta útil en la organización y elaboración metodológica del presente proyecto investigativo, además, sugiere para la planeación de una situación didáctica, tener presente tres dimensiones: dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica.

En el trabajo de Pachuca y Zubieta (2020), en su artículo de investigación, presentan las definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior, determinado que los educandos al llegar a la educación superior aún presentan una serie de complicaciones al definir el concepto de ángulo y se les dificulta relacionar este con su medida. Según Pachuca y Zubieta (2020):

- ✓ Los resultados obtenidos permitieron identificar que los estudiantes poseen diferentes formas de comprender y explicar qué es un ángulo. Algunas de sus respuestas lo relacionaron con la unión o intersección de dos líneas, rayos o semiplanos, mientras que otros lo asociaron principalmente con la abertura que se forma entre ellos o con el valor de su medida.

- ✓ En las representaciones gráficas realizadas también se encontraron algunos elementos que se repetían con frecuencia. La mayoría de los estudiantes ubicó el vértice hacia el lado izquierdo de la figura y representó uno de los lados en dirección horizontal o cercana a esta, mientras el segundo se extendía hacia la parte superior.

- ✓ Además, 18 estudiantes representaron el ángulo mediante dos rayos, segmentos o líneas que partían de un mismo punto y, en algunos casos, identificaron sus diferentes partes. Los cuatro estudiantes restantes realizaron representaciones en las que dos líneas, rayos o lados se encontraban en un punto común, señalando igualmente algunos de sus elementos.

El análisis de las respuestas les permitió reconocer las distintas ideas que los estudiantes tienen acerca del ángulo y de su medida, así como las formas gráficas que utilizan para representarlo. Estos resultados evidencian la importancia de explorar las concepciones iniciales de los estudiantes antes de abordar formalmente este concepto geométrico.

Otras dificultades mencionadas por los autores, son que los estudiantes no conciben un ángulo de 180º por no visualizar dos líneas que se conectan, de forma similar pasa con el ángulo de 360º al no considerar o no visualizar dos lados que se unen en una esquina.

Las imágenes mentales evocadas por los estudiantes carecen de una definición precisa, lo que hace que cada estudiante forme su propia representación del concepto en función del problema. Por lo tanto, no existe una única imagen del concepto.

Es importante hacer notar al estudiante que existe una definición de ángulo para geometría y otra para trigonometría.

La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan dos rayos, con un rayo horizontal.

Similarmente, Torres y Sánchez (2023), en su investigación titulada *Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile*, analizan cómo se presenta y desarrolla el concepto de ángulo en materiales escolares destinados a la educación básica. Los autores identifican cuatro tipos de significados asociados al objeto matemático ángulo: **cualitativo estático**, **cualitativo dinámico**, **cuantitativo estático** y **cuantitativo dinámico**. Estos significados evidencian la diversidad de enfoques desde los cuales se aborda el concepto en los textos escolares y permiten comprender las posibles fuentes de dificultad en su enseñanza y aprendizaje.

Uno de los principales hallazgos del estudio señala que las dificultades asociadas a una concepción estática del ángulo, entendida como un par de rayos con un punto en común, se relacionan con la exclusión de ciertos valores de medida. En particular, esta concepción limita la aceptación de ángulos de 0°, 180° y 360°, así como de ángulos negativos o aquellos cuya medida exceda los 360°. Estas restricciones evidencian una comprensión incompleta del ángulo.

En contraste, los autores destacan que las actividades que presentan menores niveles de dificultad para la construcción de distintos ángulos —incluidos los ángulos de 0° y aquellos mayores de 360°— son aquellas que se fundamentan en una concepción dinámica del

ángulo. En este tipo de actividades, se considera un rayo inicial fijo y un rayo final que gira hasta alcanzar la medida de ángulo deseada, lo que favorece una comprensión más amplia e inclusiva del concepto.

Asimismo, Torres y Sánchez (2023). Indican que las dificultades relacionadas con la asociación entre la longitud de los rayos y la medida del ángulo no parecen ser provocadas directamente por el tratamiento que ofrecen los textos escolares analizados. Por el contrario, estas confusiones podrían originarse en las inferencias realizadas por el propio estudiantado, derivadas de experiencias previas con otros objetos matemáticos, como la medición de segmentos o figuras geométricas.

Finalmente, los autores sugieren la incorporación de aplicaciones prácticas que permitan ejemplificar los distintos significados del ángulo, complementando el trabajo con situaciones cotidianas que resulten significativas para los estudiantes. Entre estas, se destacan actividades relacionadas con los giros del cuerpo y otros movimientos presentes en la vida diaria, las cuales contribuyen a fortalecer la comprensión del ángulo como una magnitud asociada al movimiento y al cambio de orientación.

1.4.3 Estudios relacionados con el pensamiento espacial

Por otro lado, en el estudio de Cardona (2017), titulado el aprendizaje de la matemática mediante proyectos de aula, este trabajo de investigación buscó fortalecer el aprendizaje de la matemática en el modelo Escuela Nueva y bajo una metodología cuantitativa y cualitativa, basada en Proyectos de Aula y teniendo presente los pensamientos matemáticos emanados por el MEN como son: El pensamiento numérico, el

pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional.

En ese sentido, el autor obtuvo óptimos resultados logrando identificar que los niños de 3, 4 y 5 de primaria no tenían mucha motivación por aprender matemáticas, dado que los docentes únicamente enseñaban las matemáticas de una manera tradicional y no hacían de las matemáticas una experiencia agradable, mostrando de esta manera el área como "difícil de aprender", por lo que al diseñar los proyectos de aula, como por ejemplo la construcción de un mural escolar, determina que los estudiantes lograran identificar las figuras geométricas y de esta forma consiguen clasificar los ángulos y vértices, conllevando de tal forma a que los niños apliquen sus saberes sobre las figuras y cuerpos geométricos. Según Cardona (2017):

> Los resultados de la investigación mostraron que los estudiantes mantenían una disposición favorable hacia el aprendizaje de las matemáticas. Después de implementar la metodología de Proyectos de Aula, esta actitud positiva se fortaleció, evidenciándose también una mejora en el desempeño académico. El incremento en el promedio de las calificaciones permite señalar que esta estrategia favoreció el proceso de aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes pertenecientes al modelo de Escuela Nueva.

Lo anterior, muestra una serie de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la noción de ángulo y la falta de motivación por aprender las matemáticas, donde por medio de nuevas estrategias lúdicas y didácticas hace que los niños fortalezcan el pensamiento espacial y aprendan los conceptos de la geometría de una manera más acorde y significativa.

En el estudio de Gómez (2022b) titulado “El laboratorio de Matemáticas una propuesta para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en el grado tercero” desarrollado en la Institución Educativa Donald Rodrigo Tafur, sede José María Carbonell en la ciudad de Santiago de Cali, Valle del Cauca. La problemática que aborda el trabajo es la dificultad que tienen los estudiantes de grado tercero para comprender y aplicar los conceptos de geometría espacial, presentando diversas dificultades, frente a la noción de ángulo y desarrollo de pensamiento espacial, debido a la falta de recursos didácticos, la metodología tradicional y el escaso uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El objetivo del trabajo es diseñar e implementar un laboratorio de matemáticas mediado por las TIC en un ambiente virtual de aprendizaje, que permita a los estudiantes desarrollar el pensamiento geométrico espacial mediante la exploración, manipulación y construcción de figuras tridimensionales.

Llevando a cabo una revisión teórica sobre los conceptos de geometría espacial, pensamiento geométrico, material manipulativo y ambientes virtuales de aprendizaje, se describe la metodología de investigación-acción que se utilizó para desarrollar la propuesta. Gómez (2022b) concluye que:

> El trabajo de la geometría desde situaciones cercanas y significativas puede favorecer una actitud más activa por parte de los estudiantes frente al aprendizaje. El uso de recursos tecnológicos, como la aplicación Quiver, despertó su curiosidad y los llevó a formular preguntas relacionadas con la manera en que una representación plana podía adquirir características tridimensionales. Este tipo de experiencias permitió que los estudiantes exploraran diferentes posibilidades, plantearan sus propias inquietudes y participaran de manera más activa en la

> construcción de sus conocimientos. De esta forma, la incorporación de herramientas digitales en el aprendizaje de la geometría puede contribuir a generar experiencias que motiven a los estudiantes a seguir explorando y aprendiendo.

En la investigación de Rodríguez (2021), titulado “Incidencia del pensamiento espacial y visual en la enseñanza aprendizaje de la geometría en grado tercero” La problemática que determina la autora es la baja comprensión y desempeño de los estudiantes de grado tercero en el área de geometría, identificado que los estudiantes no diferencian las figuras geométricas y confunden la noción de ángulo, debido a la falta de estrategias didácticas que promuevan el desarrollo del pensamiento espacial y visual. El objetivo del estudio es analizar la incidencia del pensamiento espacial y visual en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, mediante la implementación de una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas retadores. Bajo una metodología de investigación cualitativa que utilizó para desarrollar la propuesta.

> Los resultados obtenidos muestran que la implementación de una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas retadores tuvo un impacto positivo en el desarrollo del pensamiento espacial y visual de los estudiantes de tercer grado. Los estudiantes mostraron una mayor comprensión y desempeño en el área de geometría, así como una mayor motivación y participación en las actividades propuestas. (Rodríguez, 2021)

En ese sentido, el estudio demuestra que el uso de estrategias didácticas que promuevan el desarrollo del pensamiento espacial es fundamental para mejorar la comprensión y desempeño de los estudiantes en el área de geometría. La implementación

de una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas retadores puede ser una herramienta efectiva para lograr este objetivo.

En el estudio de Acevedo et al. (2008), titulado “GeoGebra como soporte en el proceso de construcción del concepto de ángulo “un análisis desde el modelo de Van Hiele” aborda la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de ángulo en un grupo de estudiantes de grado cuarto de Educación Básica.

> Los resultados obtenidos muestran que la implementación de una serie de actividades desarrolladas con los estudiantes, utilizando el software de Geometría Dinámica GeoGebra y las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, tuvo un impacto positivo en el proceso de construcción del concepto y en la transición de los niveles iniciales de razonamiento. Los estudiantes mostraron una mayor comprensión y desempeño en el área de geometría, así como una mayor motivación y participación en las actividades propuestas. (Acevedo et al., 2008)

En ese sentido, la investigación demuestra que el uso del software GeoGebra como soporte en el proceso de construcción del concepto de ángulo, junto con la aplicación del modelo educativo de Van Hiele, puede ser una herramienta efectiva para mejorar la comprensión y desempeño de los estudiantes en el área de geometría. La implementación de actividades diseñadas para cada una de las fases de aprendizaje del modelo contribuye a los estudiantes a desarrollar su pensamiento geométrico y a transitar entre los niveles iniciales de razonamiento.

El estudio anterior coadyuva a la presente investigación mostrando otras alternativas para poder fortalecer la noción del concepto de ángulo y su medida en los niños de grado

tercero y a la vez potenciar las habilidades y el aprendizaje de la geometría y desarrollo de pensamiento espacial.

Ahora bien, hay investigaciones como la de Morales y Herrera (2020), titulada "Modelación matemática del alcance en karate a través del ángulo de una patada", que relacionan la práctica y conocimientos del karate con elementos de las matemáticas para potencializar los resultados dentro de este deporte. Resulta interesante esta investigación para este proyecto pues visibiliza la modelación de un deporte a partir de los objetos matemáticos implícitos en él. Además, permite apreciar la relación del karate con las matemáticas, lo cual se puede aprovechar como espacio de aprendizaje significativo de objetos matemáticos como los ángulos.

Por lo anterior, la modalidad *Kata* resulta ser una práctica del karate interesante y acorde con los objetivos de este proyecto, teniendo en cuenta que las Katas se ejecutan como fases primordiales de movimientos con pasos, giros, junta técnica de brazos y piernas, mientras se intenta realizar una forma perfecta y trazar correctamente el mapa de los pasos del kata (Canalsapeando, 2011).

Capítulo 2

2. Marco de referencia

En la presente investigación se tiene en cuenta la importancia de la geometría activa, la construcción del concepto de ángulo y la aplicación del Karate en el proceso de enseñanza-aprendizaje. A partir de nuevas estrategias didácticas, se busca desarrollar la comprensión de la geometría de manera lúdica e interactiva. En este capítulo se presenta la información más destacada basada en un marco teórico que abarca las perspectivas didáctica, curricular y matemática. Se emplea una metodología coherente para llevar a cabo la ejecución de los objetivos formulados en este proyecto.

2.1 Perspectiva Matemática

La noción de ángulo es compleja debido a su carácter polivalente, lo que complica su definición precisa y uniforme. Según Casas (2005, p. 202), las interpretaciones del ángulo se pueden clasificar en tres categorías distintas: el ángulo como una región del espacio, el ángulo como un par de rayos o semirrectas, y el ángulo como una cantidad de giro. Cada una de estas perspectivas ofrece una forma diferente de entender el ángulo, lo que presenta desafíos únicos en la enseñanza.

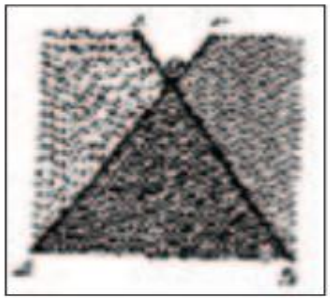
Torres y Sánchez (2023) enfatizan que es crucial integrar estas diversas definiciones en los textos escolares para proporcionar una comprensión completa y enriquecedora del ángulo en la educación básica. Al abordar estas diferentes conceptualizaciones, se facilita una visión más integral del ángulo, que ayuda a los estudiantes a construir una base sólida para su aprendizaje geométrico futuro.

2.4.1 Ángulo como región del espacio.

Según Casas (2005) "un ángulo es el conjunto de los puntos comunes a dos semiplanos, de un mismo plano, cuyos contornos se encuentran en un punto" (p. 202). Esta definición considera los ángulos como conjuntos de puntos o porciones del plano. Sin embargo, esta concepción no define un único objeto, ya que podría referirse a múltiples ángulos lo cual sólo se clarifica mediante la señalización en el dibujo.

Figura 1

Ángulo Como Región Del Espacio.



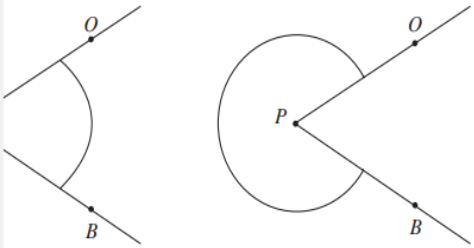
Fuente: Casas (2005)

2.4.2 Ángulo como par de rayos o como par de semirrectas.

Esta definición destaca los bordes del ángulo, considerándolo como un par de rayos o semirrectas con similitudes. Estos rayos dividen el plano en dos regiones. Las limitaciones de esta concepción incluyen la identificación de qué ángulo se refiere, cómo diferenciar entre un ángulo cóncavo y uno convexo, y la distinción entre los dos ángulos que se forman en el vértice. Para superar estas dificultades, se suelen utilizar dibujos adicionales con pequeños arcos o flechas.

Figura 2

Ejemplo De Ángulo Como Par De Rayos O Como Par De Semirrectas.



Fuente: Casas (2005)

2.4.3 Ángulo como cantidad de giro.

Esta concepción define el ángulo como "la cantidad de inclinación entre dos líneas o la cantidad de giro necesaria para trasladar una línea a la posición de otra". Ofrece una visión dinámica del ángulo, superando problemas de las definiciones anteriores, como la consideración de ángulos mayores a 360°. Casas (2005) señala que el aprendizaje del ángulo requiere que los alumnos integren distintas experiencias educativas y definiciones, entendiendo que el concepto no puede expresarse completamente en palabras, pero puede representarse mediante la relación entre dos líneas unidas en un punto. Torres y Sánchez (2023) resaltan la importancia de esta definición en la comprensión dinámica del ángulo, promoviendo actividades que involucren movimientos y rotaciones.

Siguiendo esta idea, Rotaeche (2008), menciona tres factores esenciales para describir un giro con exactitud: la amplitud de giro, esto es, la medida del ángulo que va girar; el centro del giro, esto es, el punto alrededor del que va girar; el sentido del giro, que puede ser el mismos de las agujas del reloj o el contrario. (p.14)

2.4.4 Introducción del Pensamiento Métrico.

El pensamiento métrico es fundamental para el estudio del ángulo, ya que el giro o abertura implican una métrica o sistema de medida. Una métrica se refiere a un sistema que permite cuantificar y comparar magnitudes. Sus características incluyen la invariabilidad, la proporcionalidad y la capacidad de descomposición.

2.4.4.1 Características del Pensamiento Métrico.

1. Invariabilidad: Las propiedades de las figuras geométricas permanecen constantes bajo ciertas transformaciones.
2. Proporcionalidad: La capacidad de relacionar diferentes magnitudes de manera proporcional.
3. Capacidad de Descomposición: La habilidad de dividir una figura en partes más pequeñas para facilitar su análisis y comprensión.

2.4.4.2 Integración de Métrica en el Estudio del Ángulo.

El concepto de ángulo puede abordarse desde una perspectiva cualitativa dinámica, cuantitativa dinámica o cualitativa estática. Dependiendo de la postura adoptada, se enfatizan diferentes aspectos del ángulo:

- ✓ Cualitativa Dinámica: Se enfoca en la comprensión del movimiento y la transformación de las figuras.
- ✓ Cuantitativa Dinámica: Se centra en la medición y comparación de ángulos, utilizando herramientas métricas.
- ✓ Cualitativa Estática: Destaca las propiedades invariantes y la relación entre los elementos de una figura.

Torres y Sánchez (2023) sugieren que la integración del pensamiento métrico en la enseñanza del ángulo es crucial para ayudar a los estudiantes a comprender tanto las concepciones estáticas como dinámicas. Esta integración permite una comprensión más profunda de las propiedades y relaciones geométricas, promoviendo un aprendizaje integral y robusto del concepto de ángulo.

La enseñanza del ángulo en la geometría enfrenta varias dificultades y obstáculos que deben ser abordados para garantizar una comprensión efectiva del concepto. Los estudiantes a menudo se enfrentan a problemas al integrar las diferentes concepciones del ángulo, tanto estáticas como dinámicas, debido a la naturaleza polivalente del concepto. Estos desafíos incluyen la dificultad para visualizar y distinguir entre las distintas representaciones del ángulo, así como problemas para comprender la relación entre la medida del ángulo y su representación en el espacio.

La incorporación del pensamiento métrico es crucial para superar estos obstáculos, ya que facilita una comprensión más profunda de las propiedades y relaciones geométricas asociadas al ángulo. Sin embargo, es común que los estudiantes cometan errores al aplicar medidas y al relacionar las diferentes definiciones del ángulo. La investigación de Torres y Sánchez (2023) destaca la importancia de abordar estas dificultades en el currículo educativo. Al integrar múltiples enfoques y definiciones del ángulo, se puede promover un aprendizaje más integral y robusto, ayudando a los estudiantes a superar estos obstáculos y errores comunes en la enseñanza del concepto de ángulo.

En ese sentido, el concepto de ángulo, al ser polivalente y multifacético, requiere una aproximación didáctica que permita a los estudiantes experimentar con sus diferentes representaciones. El marco teórico clasifica el ángulo en tres categorías principales: como

región del espacio, como un par de rayos o semirrectas, y como cantidad de giro. Esta clasificación guía el diseño de actividades que permiten a los estudiantes explorar estas dimensiones de manera práctica y significativa.

Por ejemplo, para abordar el ángulo como región del espacio, la secuencia didáctica incluye actividades en las que los estudiantes identifican y crean ángulos dentro de diversas figuras geométricas utilizando materiales manipulativos. Estas actividades están diseñadas para ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender cómo los ángulos se forman y se relacionan en el espacio.

Asimismo, al considerar el ángulo como par de rayos o semirrectas, se incorporan ejercicios en los que los estudiantes dibujan y miden ángulos utilizando transportadores y otras herramientas geométricas. Esto refuerza la noción de que un ángulo se forma por la intersección de dos rayos y ayuda a los estudiantes a familiarizarse con las herramientas necesarias para medir y describir ángulos.

Finalmente, para explorar el ángulo como cantidad de giro, se diseñan actividades en las que los estudiantes realizan movimientos físicos que representan ángulos, como rotaciones y giros. Esto facilita una comprensión intuitiva del ángulo como una medida de giro, alineándose con el enfoque de la geometría activa propuesto por el marco teórico.

2.2 Perspectiva Curricular.

En el ámbito educativo, los estándares curriculares desempeñan un papel fundamental al guiar y estructurar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el caso de las matemáticas, los estándares curriculares constituyen un marco esencial que define los conocimientos, habilidades y competencias que los estudiantes deben adquirir en cada nivel

educativo. Estos estándares no solo delinean los contenidos a enseñar, sino que también influyen en la forma en que los educadores diseñan sus estrategias pedagógicas y en cómo los estudiantes se involucran con los conceptos matemáticos.

En la búsqueda constante por mejorar la calidad de la educación y asegurar un aprendizaje significativo, los estándares curriculares se han convertido en un componente esencial en la planificación y desarrollo de la enseñanza en diversos países, incluida Colombia. En el contexto de las matemáticas, los estándares curriculares definen un conjunto de objetivos educativos que guían la selección y organización de contenidos, la metodología pedagógica y la evaluación del aprendizaje. Según el Ministerio de Educación Nacional (2006):

> Los estándares básicos de competencias sirven como referentes para orientar diferentes procesos dentro de las instituciones educativas. Entre sus principales aportes se encuentran:
>
> - Orientación del currículo: contribuyen a organizar el currículo, los planes de estudio y los proyectos que se desarrollan en las instituciones educativas, además de apoyar la planificación del trabajo pedagógico en el aula.
> - Selección de recursos educativos: ofrecen criterios que pueden tenerse en cuenta al momento de elegir o elaborar libros de texto, materiales didácticos y otros recursos utilizados para apoyar el aprendizaje.
> - Orientación de la evaluación: sirven como referente para diseñar y desarrollar estrategias de evaluación que permitan valorar los aprendizajes y competencias alcanzados por los estudiantes.

- Formación docente: también pueden orientar la creación de programas relacionados con la formación inicial de los futuros docentes y con la actualización y cualificación de quienes ya ejercen la profesión. (p.11)

Los estándares curriculares de matemáticas en Colombia han experimentado una transformación significativa a lo largo de las últimas décadas. Desde su introducción, han pasado de ser una lista rígida de contenidos a un enfoque más integral que enfatiza el desarrollo de habilidades cognitivas y competencias matemáticas. A medida que la educación ha evolucionado para requerir en el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la aplicación práctica de los conceptos matemáticos, los estándares han adaptado su enfoque para alinearlos con estas tendencias pedagógicas.

Los estándares curriculares han ejercido una influencia significativa en la educación matemática en Colombia. Han servido como punto de referencia para el diseño de programas académicos, la elaboración de materiales didácticos y la formación docente. También han promovido una mirada

más profunda y holística de la educación matemática, fomentando la comprensión en lugar de la memorización y la aplicación en contextos reales en lugar de la mera solución de ejercicios abstractos. (Ministerio de Educación Nacional, 2006)

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas han sido diseñados para abordar diversos niveles de desarrollo en habilidades matemáticas a través de cinco categorías fundamentales: pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Esta estructura se organiza en cinco columnas, cada una representando una categoría de pensamiento matemático, y está vinculada a los sistemas conceptuales y simbólicos

correspondientes. Aunque cada estándar está asociado con categorías específicas, también puede relacionarse con otras formas de pensamiento y sistemas (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

En cuanto al término "competencia" en este caso, se emplea para destacar la capacidad de aplicar conocimientos matemáticos en contextos variados, lo que implica no sólo la adquisición de conceptos y procedimientos, sino también la habilidad para utilizar estos conocimientos en situaciones prácticas y resolver problemas de manera efectiva. Este enfoque promueve un aprendizaje integral y contextualizado, en lugar de una mera memorización de contenidos.

Por otro lado, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas están estructurados en niveles que abarcan desde primer hasta undécimo grado. Cada nivel está diseñado para guiar a los estudiantes a través de un proceso de aprendizaje progresivo, conduciéndolos hacia altos niveles de alfabetización matemática. Los estándares se dividen en los siguientes grupos: primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno, y décimo a undécimo grado. Cada grupo establece los aprendizajes esperados y los objetivos pedagógicos necesarios para desarrollar competencias matemáticas adecuadas en los estudiantes (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Finalmente, los Estándares Básicos de Competencias para matemáticas también hacen énfasis en los procesos de enseñanza y aprendizaje, tales como la resolución de problemas, el razonamiento matemático, y la comunicación de ideas matemáticas. Estos procesos son esenciales para el desarrollo de las competencias matemáticas, ya que permiten a los estudiantes no solo entender y aplicar conceptos, sino también reflexionar sobre ellos y comunicar sus pensamientos de manera efectiva

2.2.1. El pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Según el Ministerio de Educación Nacional (2006):

> El pensamiento espacial se entiende como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales los individuos construyen y manipulan representaciones mentales de los objetos en el espacio, así como sus relaciones, transformaciones y traducciones materiales. Este enfoque requiere un estudio de los conceptos y propiedades del espacio físico y geométrico. En las etapas iniciales, el enfoque está en las relaciones topológicas y la ubicación del estudiante en el espacio, sin necesidad de mediciones precisas. A medida que se avanza en el aprendizaje, la metrización se vuelve relevante, introduciendo propiedades cuantitativas y permitiendo la comprensión de conceptos geométricos más complejos, como los teoremas de la geometría euclidiana. Los sistemas geométricos, que incluyen puntos, líneas, regiones planas y cuerpos sólidos, se representan mediante dibujos, gestos y símbolos, lo que permite su análisis y refinamiento a través de modelos y teorías matemáticas. (p.61)

En el contexto de la investigación, el pensamiento espacial se manifiesta en las siguientes áreas:

- ✓ **Construcción de representaciones mentales:** Trabajar con la ubicación, orientación y transformación de figuras geométricas en el espacio.
- ✓ **Manipulación de figuras geométricas:** Explorar cómo los estudiantes entienden las transformaciones y las relaciones entre diferentes figuras.

- ✓ **Conceptos:** Incluir conceptos como ángulo, lateralidad y orientación, son fundamentales para la comprensión espacial.

En ese sentido, mi investigación se enfoca en el desarrollo de la noción de ángulo y otras figuras geométricas, utilizando actividades que promueven la visualización y manipulación espacial. Estas actividades están diseñadas para ayudar a los estudiantes a entender cómo los objetos se relacionan y se mueven en el espacio, lo cual es un aspecto central del pensamiento espacial.

2.2.2. Pensamiento Métrico y los Sistemas Métricos o de Medidas.

Según el Ministerio de Educación Nacional (2006):

> El pensamiento métrico se refiere a la comprensión y el uso de magnitudes y cantidades, así como a la flexibilidad en la aplicación de los sistemas métricos en diversas situaciones. Incluye conceptos y procedimientos como la construcción de conceptos de magnitud, la conservación de magnitudes, la estimación de medidas y la selección de unidades y patrones de medición. La estimación actúa como un puente entre las matemáticas y el mundo cotidiano, mientras que el pensamiento métrico se apoya en sistemas de medidas estandarizadas, como el SI (Sistema Internacional de Unidades). Históricamente, el pensamiento métrico ha evolucionado desde sistemas locales hasta el sistema decimal moderno. En el aprendizaje, es crucial reconocer la relación entre las unidades del SI y el sistema decimal, y entender las diferencias entre precisión y exactitud en la medición. Además, el pensamiento métrico se extiende a las ciencias naturales y sociales, influyendo en el uso racional de los servicios públicos y en la conciencia ambiental. (p.63)

Teniendo en cuenta este estudio, el pensamiento métrico se aborda de la siguiente manera:

- ✓ **Medición de ángulos y figuras:** Aunque el enfoque principal es el pensamiento espacial, se introducen conceptos básicos de medición y comparación de ángulos y figuras para proporcionar una base para el pensamiento métrico.
- ✓ **Estimación y Comparación**: Se introducen conceptos básicos de medición para ayudar a los estudiantes a estimar y comparar las magnitudes de los ángulos y figuras.

El pensamiento métrico complementa el pensamiento espacial al introducir la noción de medida, lo que permite a los estudiantes realizar comparaciones cuantitativas entre figuras geométricas. Esto ayuda a construir una comprensión más completa de cómo las propiedades métricas se relacionan con las propiedades espaciales.

2.2.3 Coherencia Vertical y Horizontal en la Investigación

2.2.3.1 Coherencia Vertical.

La coherencia vertical se refiere a la progresión y complejidad creciente de los conceptos matemáticos a lo largo de los grados, garantizando que cada nivel de aprendizaje construya sobre el anterior (MEN, 2006). En este estudio, la coherencia vertical se manifiesta en la evolución de los conceptos del pensamiento espacial y métrico desde los primeros grados hasta los grados superiores.

En primer grado, los estudiantes comienzan con la introducción a conceptos básicos de figuras geométricas y su ubicación en el espacio. Se enfocan en la construcción de

representaciones mentales simples y en explorar relaciones espaciales básicas. Los conceptos iniciales de medición se presentan de manera intuitiva, como la comparación y estimación de longitudes y áreas mediante patrones arbitrarios (MEN, 2006).

En segundo grado, se amplía la manipulación de figuras geométricas y se introducen transformaciones básicas, como rotaciones y reflejos. Los estudiantes comienzan a aplicar conceptos de medición más específicos, utilizando unidades estándar básicas para promover una mayor precisión en las mediciones (MEN, 2006).

En tercer grado, los estudiantes desarrollan habilidades para medir y comparar ángulos y figuras geométricas con una mayor precisión. Se introducen sistemas métricos estandarizados y se exploran las relaciones entre diferentes unidades de medida. Este grado establece una base sólida para el aprendizaje de conceptos matemáticos más complejos en grados posteriores, como la relación entre el SÍ (Sistema Internacional de Unidades) y el sistema decimal (MEN, 2006).

2.2.3.2 Coherencia Horizontal.

La coherencia horizontal se refiere a la alineación y relación de los estándares dentro de un mismo conjunto de grados, asegurando que los conceptos se integren de manera coherente entre diferentes áreas de pensamiento matemático (MEN, 2006). Por tanto, en el presente estudio, la coherencia horizontal se observa de la siguiente manera:

- ✓ Los conceptos de pensamiento espacial y métrico se integran a lo largo de los grados. Por ejemplo, la manipulación de figuras geométricas en el espacio (pensamiento espacial) se relaciona con la medición de ángulos y dimensiones (pensamiento métrico). Los estudiantes desarrollan habilidades

para describir y comparar figuras geométricas utilizando tanto representaciones espaciales como medidas precisas. (MEN, 2006)

- ✓ Los procesos de medición se conectan con el pensamiento numérico y espacial. La descripción y comparación de datos medidos requieren habilidades numéricas para cuantificar magnitudes, mientras que la representación de datos en gráficos y diagramas involucra conceptos espaciales. Esta interacción entre diferentes áreas de pensamiento matemático asegura que los estudiantes puedan aplicar de manera efectiva conceptos de medición en contextos variados y relevantes. (MEN, 2006)

La coherencia vertical y horizontal en esta investigación, garantizan que los conceptos y habilidades matemáticas se desarrollen de manera lógica y estructurada a lo largo de los grados y en relación con diferentes áreas del pensamiento matemático. Este enfoque asegura que los estudiantes construyan una comprensión profunda e integrada de los conceptos geométricos y métricos, facilitando un aprendizaje continuo y progresivo en matemáticas.

2.2.4 Derechos básicos de aprendizaje (DBA) para los grados de primero a quinto.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) son los derechos fundamentales que todo estudiante debe adquirir durante su proceso educativo. Estos derechos comprenden un conjunto de habilidades, conocimientos y competencias esenciales que garantizan el desarrollo integral del estudiante, asegurando una educación de calidad para todos (Derechos Básicos de Aprendizaje, 2016).

La relación entre los DBA y los Estándares Básicos de Competencias (EBC) es estrecha y complementaria. Por un lado, los EBC son los criterios establecidos por el

Ministerio de Educación para orientar y regular el proceso educativo en Colombia. Estos estándares definen lo que se espera que los estudiantes aprendan en cada área del conocimiento y nivel educativo. Por otro lado, los DBA se alinean con estos estándares y actúan como una herramienta práctica para diseñar currículos, planificar la enseñanza y evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Los docentes desempeñan un papel clave en la implementación de los DBA. Utilizan estos derechos como una guía para planificar sus clases, asegurando que se cumplan los objetivos educativos establecidos. Además, los DBA influyen en la creación de materiales didácticos y en la evaluación del progreso estudiantil, permitiendo a los docentes adaptar sus estrategias pedagógicas para atender las necesidades específicas de sus estudiantes y garantizar su avance hacia el cumplimiento de los estándares educativos.

En el contexto de los grados 1° a 3°, los DBA especifican habilidades concretas que los estudiantes deben desarrollar. Por ejemplo, se espera que los estudiantes sean capaces de “reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura” (DBA, 2016, p.80), lo cual fomenta la comprensión de conceptos geométricos fundamentales desde una edad temprana. Asimismo, se incluye la habilidad de “describir y representar trayectorias y posiciones de objetos y personas para orientar a otros o a sí mismo en el espacio circundante” (DBA, 2016, p.11), y “describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas” (DBA, 2016, p.19). Estas competencias son fundamentales para el desarrollo del pensamiento espacial, que es una base importante para el aprendizaje de la geometría y otras áreas del conocimiento.

2.3 Perspectiva Didáctica

En el presente estudio, la perspectiva didáctica juega un papel fundamental, ya que se centra en el análisis y diseño de estrategias educativas que faciliten el aprendizaje de los estudiantes. Al abordar el desarrollo de la noción del concepto de ángulo en la educación primaria, la didáctica permite no solo la identificación de los contenidos y competencias esenciales, sino también la implementación de metodologías activas y contextuales que promuevan una comprensión profunda y significativa. Esta perspectiva es crucial para asegurar que las secuencias didácticas propuestas sean efectivas y alineadas con los derechos básicos de aprendizaje, logrando así un aprendizaje integral y duradero en los estudiantes.

En ese sentido, un estudio realizado por Gamboa & Ballestero (2010) titulado, la enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria la perspectiva de los educandos*,* a estudiantes de secundaria en Costa Rica, permite conocer su percepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Como resultado, Gamboa & Ballestero (2010) afirman que:

> Las clases de geometría se han orientado en un sistema tradicional de enseñanza, en las cuales la metodología de enseñanza de los docentes ha sido presentar la teoría, desarrollar ejemplos y colocar ejercicios que deben ser resueltos por los estudiantes. Estas actividades se enfocan en la aplicación de fórmulas y situaciones que implican únicamente la memoria, lo que conlleva que procesos de observación, argumentación y justificación no tengan un rol importante en la enseñanza de esta disciplina (p. 125).

En ese sentido, Duval (2006) en su libro un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*,* destaca la importancia de la habilidad para cambiar el registro de representación en el aprendizaje matemático. Esta habilidad permite a los estudiantes interpretar y expresar conceptos matemáticos de diferentes maneras, facilitando una comprensión más profunda y flexible de los mismos.

Por su parte, Duval (1998) afirma que enseñar matemáticas, en especial la geometría, no es tarea fácil. Para llevar a cabo esta tarea, sugiere tener en cuenta tres procesos cognitivos en la enseñanza de la geometría, los cuales cumplen funciones epistemológicas específicas: la visualización, la construcción y el razonamiento. Estos procesos pueden darse por separado. La visualización permite el acceso a las figuras independientemente de cómo se construyen. La construcción se basa en las conexiones entre las propiedades matemáticas y las limitaciones técnicas de las herramientas utilizadas. El razonamiento depende del corpus de proposiciones disponibles (definiciones, axiomas, teoremas). Aunque estos procesos pueden darse por separado, en la práctica están estrechamente relacionados.

La habilidad para cambiar el registro de representación es fundamental para el desarrollo de los tres procesos cognitivos descritos por Duval (1998). A continuación, se integran estos conceptos:

- ✓ **Visualización y Cambio de Registro:**

  La visualización en geometría implica la capacidad de interpretar figuras y diagramas. La habilidad para cambiar el registro de representación facilita la visualización al permitir a los estudiantes alternar entre diferentes formas de

representación (por ejemplo, de una representación gráfica a una algebraica), enriqueciendo su comprensión de las figuras geométricas.

- ✓ **Construcción y Representación Múltiple:**

  La construcción geométrica se beneficia de la capacidad de cambiar el registro de representación, ya que permite a los estudiantes utilizar diferentes herramientas y métodos para construir figuras. Por ejemplo, pueden pasar de una construcción con regla y compás a una construcción digital, cada una con sus propias ventajas y limitaciones técnicas.

- ✓ **Razonamiento y Flexibilidad Representacional:**

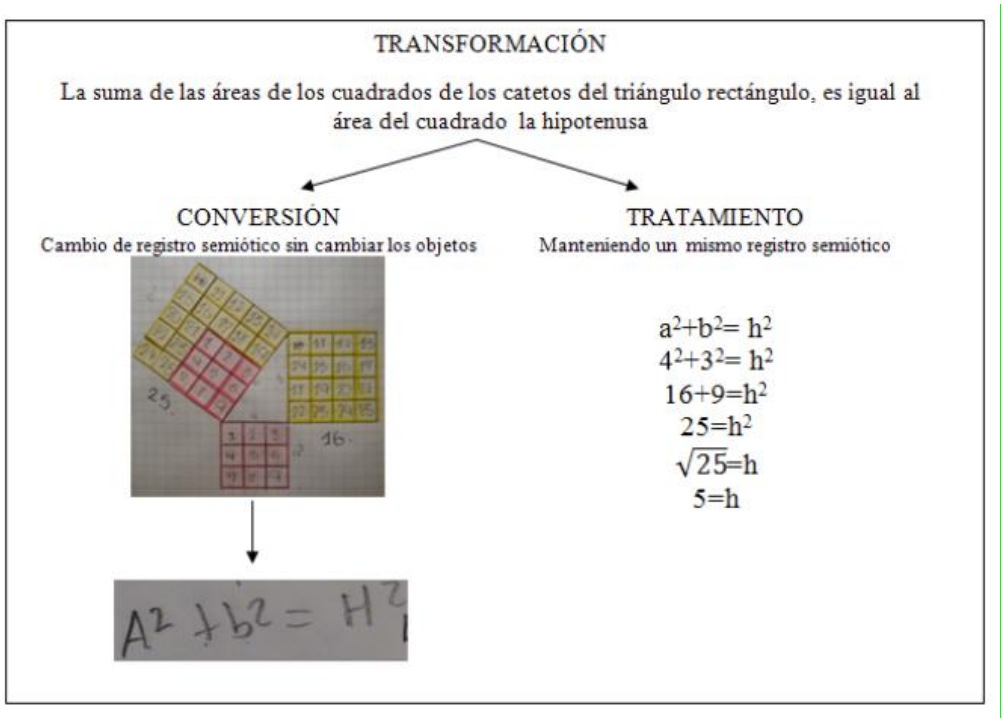
  El razonamiento geométrico se fortalece con la habilidad de cambiar el registro de representación. Los estudiantes que pueden ver un problema desde múltiples perspectivas (gráfica, numérica, verbal) tienen más recursos para desarrollar y justificar sus razonamientos, conectando diferentes proposiciones matemáticas de manera más efectiva. (Duval, 1998; Duval, 2006)

2.3.1 Relación entre los Procesos Cognitivos.

Aunque Duval (1998) menciona que los procesos de visualización, construcción y razonamiento pueden darse por separado, en la realidad educativa están interrelacionados. La habilidad para cambiar el registro de representación actúa como un puente entre estos procesos, facilitando una integración más coherente y completa de los mismos. La siguiente imagen ilustra cómo estos procesos están vinculados:

Figura 3

Procesos Cognitivos Fundamentales del Pensamiento.



Fuente: Osorio (2011)

En síntesis, este autor subraya aspectos cruciales en la enseñanza de la geometría. La integración de sus ideas sugiere que fomentar la habilidad para cambiar el registro de representación es esencial para desarrollar una enseñanza efectiva de la geometría, que considere y potencie los procesos de visualización, construcción y razonamiento de manera integrada.

Por otra parte, el problema de la enseñanza de la geometría en los centros educativos radica en cómo lograr que los alumnos vean la interconexión entre los procesos de visualización, construcción y razonamiento. Es sabido que la demostración presenta una gran dificultad, lo que sugiere que inicialmente puede ser más sencillo trabajar con los

procesos de construcción y visualización. Sin embargo, surge la pregunta: ¿la práctica de un tipo de proceso favorece a los otros dos?

Para abordar esta cuestión, se presenta el siguiente marco de análisis:

- ✓ **Desarrollo Separado**: Los tres tipos de procesos (visualización, construcción y razonamiento) deben desarrollarse por separado.
- ✓ **Diferenciación Curricular**: Es necesario trabajar en el currículo la diferenciación entre los distintos procesos de visualización y los distintos procesos de razonamiento, ya que existen varias formas de ver una figura y varios tipos de razonamiento.
- ✓ **Coordinación Posterior**: La coordinación de estos tres tipos de procesos sólo puede producirse realmente después de este trabajo de diferenciación.

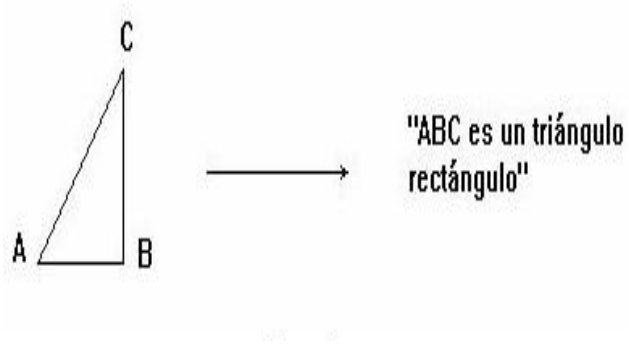
Por otro lado, es importante preguntarse si simplemente observar imágenes y figuras es suficiente para comprender lo que representan en términos matemáticos. Cuando se percibe una figura, la mente reconoce uno o varios "gestalts", que son patrones o configuraciones que se distinguen por sus características en comparación con otras formas. Como explica Torres (2015), “el reconocimiento visual de los gestalts está relacionado con diferentes principios de organización perceptiva, los cuales permiten identificar y estructurar aquello que se observa. Estas formas de organización pueden emplearse tanto para representar objetos presentes en la realidad como para construir representaciones de objetos matemáticos.” (p. 1). Sin embargo, para que un gestalt pueda cumplir esta función dentro del ámbito matemático, es necesario que responda a determinadas condiciones o criterios específicos:

1. Ser una configuración, es decir, un conjunto o una fusión de varios gestalts.
2. Estar anclados en un enunciado que fije algunas propiedades representadas por el gestalt (hipótesis), haciendo necesaria la distinción entre dos aprehensiones: perceptual y discursiva.

En la aprehensión visual, las figuras son apreciadas como un todo, por lo que los gestalts son trabajados en las mismas dimensiones. La forma de ver a los gestalts como representaciones geométricas se da cuando se construyen con herramientas (como las primitivas de regla y compás de algún software geométrico).

Figura 4

Aprehensión Visual Las Figuras.



Fuente: Torregrosa y Quesada (2007)

Para determinar el objeto representado, la aprehensión discursiva de una figura se apoya en las asociaciones de gestalts y enunciados, presentando dos formas:

1. **De lo Visual a lo Discursivo:** Implica un cambio dimensional, trabajando con los gestalts que constituyen las representaciones geométricas. Por ejemplo, un

gestalt 2D/2D se convierte en una configuración predominante 2D/2D de varios gestalts constituyentes 1D/2D.

2. **De lo Discursivo a lo Visual:** No se recurre a los gestalts en su representación geométrica inicial, sino que la aprehensión se da primero en las propiedades del objeto. Luego, mediante configuraciones mentales de imágenes y cambios dimensionales, se llega a una representación geométrica del objeto (Duval, 2004).

De esta manera, la aprehensión discursiva posibilita realizar trazos y configuraciones de una figura, lo que permite interactuar con las propiedades del objeto y evitar la simple identificación de figuras.

2.3.2 Aprehensión Discursiva.

La aprehensión discursiva otorga a una figura un estatus privilegiado en el enunciado de sus proposiciones. Es importante destacar que las figuras, por sí mismas, no constituyen un registro de tratamiento autónomo. No es suficiente reconocer perceptivamente una figura para asignarle propiedades particulares; es necesario considerar ciertas condiciones del registro semiótico de las representaciones figurales. Como señala Duval (1999), “una representación gráfica adquiere significado dentro de una situación geométrica cuando determinados elementos que la componen y las relaciones que se establecen entre ellos han sido definidos previamente. En este sentido, no basta con reconocer visualmente una figura, sino que es necesario interpretar los elementos que la conforman a partir de los conocimientos matemáticos asociados.” (p. 160). De manera complementaria, Torregrosa y Quesada (2007) explican que la aprehensión discursiva

implica un proceso cognitivo mediante el cual la configuración geométrica identificada se relaciona con enunciados matemáticos, tales como definiciones, axiomas y teoremas.

Figura 5

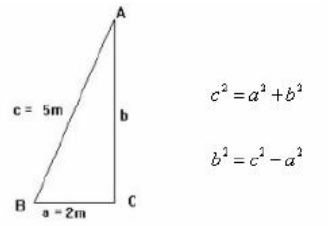
Ejemplo De Aprehensión Discursiva.

Veamos el siguiente ejemplo: *Un albañil apoya una escalera de 5 metros contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2 metros del muro. Calcula la altura a la que se encuentra la parte superior de la escalera* (Figura 5).



Figura 5

El cambio del enunciado del problema (texto) al dibujo de la escalera apoyada en el muro no implica la asociación con ninguna afirmación matemática. Sin embargo, identificar dicha situación con un triángulo rectángulo y asociar el Teorema de Pitágoras con la configuración es lo que llamamos *aprehensión discursiva*. En este caso, el sentido de la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo.



Fuente: Torregrosa y Quesada (2007)

Duval (2004) también destaca la existencia de un umbral crítico en los primeros aprendizajes de la geometría: la relación con las figuras. Superar este obstáculo es complejo en la enseñanza y decisivo para comprender los procesos geométricos.

Para encontrar estas figuras en la enseñanza, es necesario desarrollar una serie de actividades como observación, reproducción, descripción y definición. Estas actividades buscan conocer las propiedades de las figuras, permitiendo desarrollar razonamientos para resolver problemas y justificar soluciones. Según Duval (2004), las figuras son

"representaciones que envían una cosa a otra, 'el espacio', que tiene múltiples aspectos: real, percibido, topológico, afín, proyectivo, métrico" (p. 2).

Trabajar con figuras implica un acto cognitivo: Ver. Este acto requiere cuestionar lo que se percibe a primera vista y lo que se reconoce a primera vista. Las figuras en geometría no se observan como cualquier otra figura distinta. Por lo tanto, surgen dos cuestiones: ¿en qué consiste esta manera de ver en geometría? y ¿qué tipo de actividad puede contribuir a que los alumnos adopten esta manera de ver?

Las actividades geométricas pueden agruparse en cuatro clases, comparadas desde dos puntos de vista: cognitivo, examinando las posibilidades de transferencia de un tipo de actividad a otro; y matemático, analizando la pertenencia o no de las maneras de ver utilizadas en los procesos geométricos (Duval, 2004). Estas clases de actividades son:

- ✓ **El botánico:** Esta entrada trata de aprender de forma perceptiva las diferentes formas elementales utilizadas en geometría plana (tipos de triángulos, cuadriláteros). Las propiedades geométricas se reconocen como características visuales.
- ✓ **El agrimensor:** Esta entrada trata de medir longitudes en el terreno y trasladarlas a un dibujo que adquiere el estatus de plano. Las tareas consisten en actividades que exigen cambios de escala.
- ✓ **El constructor:** La particularidad de las figuras geométricas debe ser construida con instrumentos que guían el movimiento de la mano o lo sustituyen, permitiendo obtener una forma visual con una propiedad geométrica. La utilización de

instrumentos facilita estas operaciones, ya que cada uno introduce cambios en las propiedades geométricas.

- ✓ **El inventor:** Esta entrada se centra en problemas que requieren una reorganización visual de las formas básicas que permita construir la figura requerida. Implica trazos suplementarios y una reorganización visual que revela la solución del problema.

La relación entre la visualización y el razonamiento constituye un aspecto esencial en el desarrollo de cualquier actividad geométrica. Si bien ambos procesos implican un cierto nivel de complejidad, la visualización presenta particularidades que requieren especial atención, debido a que existen diferentes formas de interpretar y analizar una misma figura. Estas maneras de observar pueden estar asociadas a distintas formas de funcionamiento cognitivo. En este contexto, resulta importante diferenciar entre la visualización icónica, caracterizada por una interpretación más espontánea de las figuras y con pocas posibilidades de modificación, y la visualización no icónica, que requiere dejar de lado la comparación directa con modelos conocidos o con objetos de la realidad. Esta distinción permite comprender mejor cómo se relacionan los procesos de visualización y razonamiento en el aprendizaje de la geometría.

Por otro lado, la ausencia del manejo mental y gráfico del espacio en las personas causa gran preocupación, por ende, Vasco (1992) propone estudiar y aprender geometría como ejercicio del propio cuerpo, de la imaginación y del dibujo, y sobre todo, sugiere no perder el aspecto activo y dinámico, surgiendo el estudio de sistemas geométricos mediante la geometría activa.

La propuesta de Geometría Activa “parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio” (MEN, 1998, p.56).

En el mismo sentido, la Geometría Activa es tomada como “una alternativa para restablecer el estudio de sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio” (MEN, 2006, p.62), con la característica de partir de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo.

2.3.3 Enfoques Didácticos en la enseñanza del ángulo.

Torres y Sánchez (2023) abordan el tratamiento del concepto de ángulo en textos escolares de enseñanza básica en Chile. Identifican la necesidad de integrar las concepciones estática y dinámica del ángulo en el currículo. De acuerdo con Casas (2005), estas concepciones pueden agruparse en:

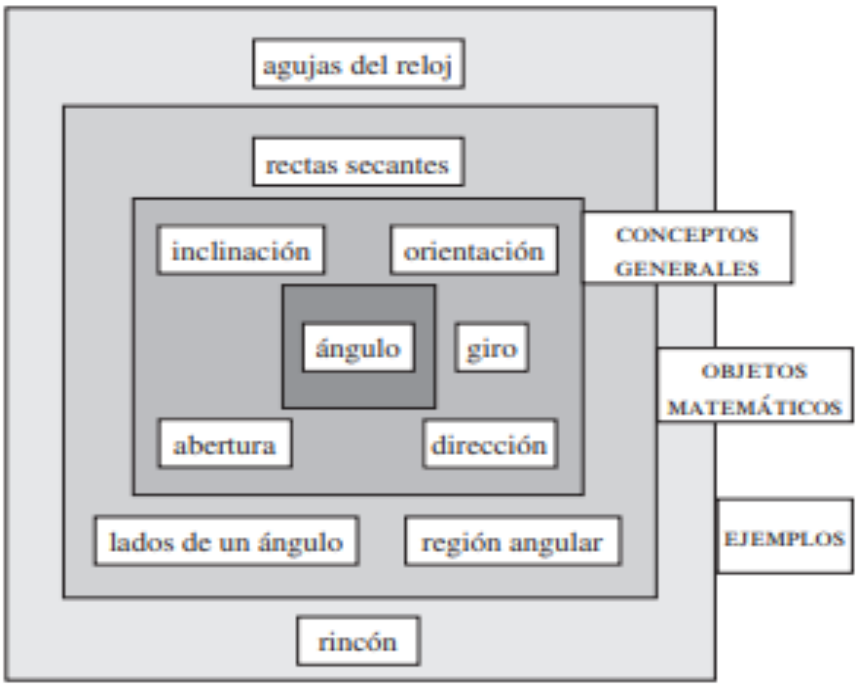
- ✓ Concepción Estática de Ángulo: Incluye conceptos como rincón, región angular, lados de un ángulo y rectas secantes.
- ✓ Concepción Dinámica de Ángulo: Incluye conceptos como orientación, giro, dirección y agujas del reloj.
- ✓ Conceptos Mixtos: Incluyen ángulo, abertura e inclinación.

Casas (2005) clasifica estos conceptos en función de su generalidad matemática, con ángulo siendo el concepto más general. En los libros de texto, las definiciones más recurrentes son inclinación, orientación, giro y dirección. Los objetos matemáticos como región angular y lados del ángulo se utilizan para definir y describir estos conceptos. Ejemplos comunes incluyen agujas del reloj y rincón. Torres y Sánchez (2023) enfatizan la

importancia de presentar estas distintas concepciones de manera coherente en el currículo para facilitar la comprensión y aplicación de los conceptos de ángulo.

Figura 6

Enfoques Didácticos en la Enseñanza del Ángulo.



Fuente: Casas (2005)

Capítulo 3

3. Metodología

En este capítulo se detalla el proceso de diseño e implementación de la prueba diagnóstica y de la secuencia didáctica para investigar y mejorar la enseñanza de construir la noción de ángulo con estudiantes de 3º grado. El objeto de esta investigación se orientó pensando en generar un impacto directo en el proceso educativo mediante la aplicación de metodologías innovadoras que integraron la geometría activa y los movimientos de Karate-do.

Debido a que el ángulo no posee una definición única y exacta, y a que su significado depende del campo en el que se aborde, no es posible caracterizarlo estrictamente como un concepto. Según Pachuca y Zubieta (2020), cuando se observa o se escucha el nombre de un concepto, lo que se evoca en la memoria no es su definición, sino una imagen asociada a él, a lo que los autores denominan **noción** (p. 43).

En consecuencia, en el presente trabajo se abordará la noción de ángulo y no el concepto de ángulo. En concordancia con Pachuca y Zubieta (2020), el término *concepto* implica la existencia de una definición verbal que explique el objeto con precisión. Con el fin de evitar este conflicto teórico, este trabajo se propone desarrollar la noción de ángulo, sin la intención de alcanzar una definición rigurosa, sino más bien de construir ideas progresivamente más precisas, sin llegar a una formalización estricta de lo que es un ángulo.

3.1 Diseño metodológico.

Con base en los objetivos de esta investigación, se da paso a las consideraciones que brinda el paradigma cualitativo, el enfoque sociocultural y el tipo de investigación- acción (IA).

3.2 Paradigma.

La investigación toma como referencia el Paradigma de Investigación Cualitativa, el cual busca comprender y describir en profundidad la realidad social y humana desde la perspectiva de las personas.

Asimismo, se basa en un enfoque inductivo, lo que significa que se genera conocimiento a través de la recolección y análisis de datos, permitiendo que las teorías y conceptos emerjan a partir de los hallazgos obtenidos.

Ramírez y Arbesú (2019), manifiestan que:

> La investigación cualitativa busca comprender los fenómenos y las situaciones estudiadas dentro del contexto natural en el que ocurren. Su interés se centra en conocer e interpretar las experiencias y acciones de los participantes, teniendo en cuenta los significados que ellos mismos construyen a partir de sus vivencias. Desde esta perspectiva, el investigador procura realizar una descripción e interpretación profunda del fenómeno que constituye su objeto de estudio, considerando las particularidades del contexto y las perspectivas de quienes participan en él. (p.433).

De esta manera, el paradigma cualitativo, valora la diversidad de interpretaciones y significados que las personas atribuyen a sus experiencias, igualmente reconoce que cada

individuo tiene una perspectiva única y se busca comprender y dar voz a esas perspectivas en la investigación.

Por lo que, el paradigma cualitativo aboga por una comprensión global, inductiva, estructuralista y subjetiva de los fenómenos sociales y humanos, orientada hacia el proceso y en línea con los principios de la antropología social, permitiendo así capturar la complejidad y riqueza de la experiencia humana y ofrecer una perspectiva enriquecedora para la investigación social.

Además, la investigación-acción promueve la participación activa de los estudiantes en el proceso de investigación, involucrándose en la identificación de problemas, la generación de ideas y la evaluación de resultados. Esto fomenta su autonomía, sentido de pertenencia y capacidad de reflexión crítica.

3.3 Contexto de la investigación.

. La investigación se llevó a cabo en el tercer grado de la Institución Educativa General José María Cabal, ubicada en zona de ladera en la ciudad de Cali, en el departamento del Valle del Cauca. Esta institución educativa atiende a poblaciones de estratos 1 y 2 y tiene cerca de 1800 estudiantes en los niveles de educación Básica, Secundaria y Media. Su modelo pedagógico está definido como crítico social y se enfoca en brindar una educación integral, promoviendo tanto el desarrollo académico como personal de sus estudiantes.

Para llevar a cabo el presente estudio, se seleccionó una población de 15 estudiantes de tercer grado, con edades comprendidas entre los 8 y 9 años. La propuesta didáctica que se implementó en esta investigación está diseñada para atender las necesidades educativas

de estos estudiantes, quienes provienen de diversos contextos socioeconómicos y culturales, lo que enriquece la dinámica del aula y representa un reto adicional en la enseñanza.

3.4 Fases de la Investigación

Guerrero (2006) concibe la secuencia didáctica como el plan de actuación del profesor, la denomina fase *Preactiva,* donde se explicitan sistemas didácticos esenciales en las acciones de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, "una secuencia didáctica es un aspecto central de la metodología de la ingeniería didáctica necesaria para estructurar el trabajo de aula de manera sistemática, en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (relación didáctica)" (p. 3).

Una secuencia didáctica es un conjunto organizado de actividades de enseñanza y aprendizaje que se estructuran de manera coherente y sistemática. Busca guiar el proceso educativo y facilitar el logro de objetivos específicos (García y Manterola, 2016).

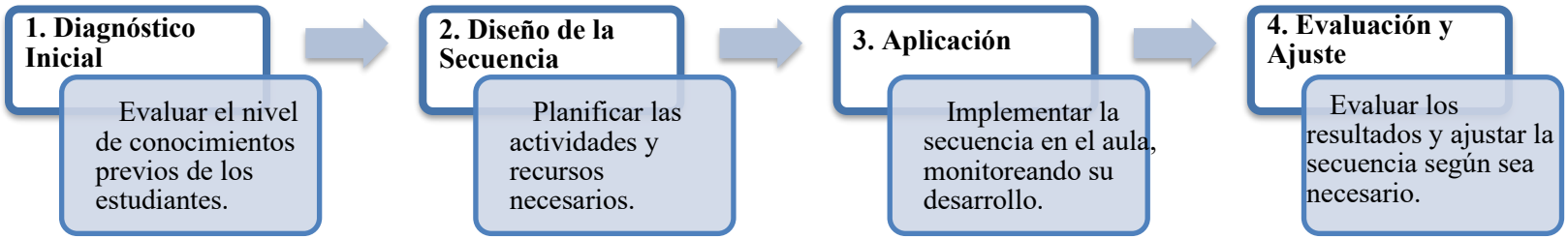
Entre los criterios a tener en cuenta al diseñar una secuencia didáctica se incluyen:

- Definir claramente los objetivos de aprendizaje.
- Asegurar que las actividades sean relevantes para los estudiantes.
- Organizar las actividades de manera lógica y progresiva.
- Permitir adaptaciones según las necesidades y contextos específicos.
- Integrar mecanismos de evaluación formativa y sumativa. (Breda et al., 2017, p.5)

Por otro lado, para implementar una secuencia didáctica en una investigación, es crucial seguir una serie de pasos

Figura 7

Pasos Para Implementar Una Secuencia Didáctica.



Fuente: Adaptado de Breda et al. (2017)

En el marco de esta investigación, se llevó a cabo una secuencia didáctica cuidadosamente diseñada para facilitar el desarrollo de la noción del concepto de ángulo en estudiantes de educación primaria. Esta secuencia no solo se alineó con los derechos básicos de aprendizaje (DBA) y los Estándares Básicos pertinentes, sino que también se incorporaron enfoques de geometría activa para promover un aprendizaje significativo. A través de actividades prácticas y contextuales, los estudiantes son guiados en la exploración y comprensión de los ángulos, permitiéndoles construir una base sólida en geometría desde una edad temprana. Esta intervención didáctica fue evaluada para medir su efectividad y su impacto en el proceso de aprendizaje del estudiante.

3.5 Secuencia didáctica.

A continuación, se describen las fases del desarrollo de la secuencia didáctica

Fase 1: Documentación. En esta fase inicial, el docente realizó una investigación exhaustiva para buscar información relevante relacionada con el tema que se deseaba enseñar. Se recopilaron recursos bibliográficos, materiales didácticos, recursos multimedia y otras fuentes que podrían enriquecer el proceso de enseñanza. Además, se identificaron los objetivos de aprendizaje y se definieron los contenidos clave que se abordarían durante la secuencia didáctica. También se consultó la bibliografía necesaria para desarrollar la investigación, se realizó el planteamiento del problema, se definieron los objetivos, y se presentaron los antecedentes y la justificación.

Fase 2: Diseño. Durante esta etapa, el docente planificó y organizó de manera lógica y coherente la secuencia de actividades y recursos que los estudiantes seguirán para alcanzar los objetivos de aprendizaje. Se establecieron estrategias didácticas, métodos de enseñanza y actividades prácticas que promovieron la participación activa de los estudiantes y su construcción de conocimientos. Asimismo, se seleccionaron los materiales y recursos que se utilizarían en el proceso de enseñanza. Esta fase incluyó la identificación de los katas o movimientos de Karate-do mencionados anteriormente, así como la realización de diferentes actividades didácticas que, mediante la observación directa, permitieron identificar elementos geométricos relacionados con la construcción del concepto de ángulo. Integrado a los elementos teóricos desde las perspectivas matemática y didáctica, se diseñó y aplicó una prueba diagnóstica al grupo de niños del tercer grado de

primaria para conocer sus nociones previas sobre el ángulo, cuyos resultados permitieron ajustar las actividades de enseñanza que se aplicarían posteriormente.

Fase 3: Implementación. En esta fase, se desarrollaron las actividades diseñadas en la Institución Educativa General José María Cabal con estudiantes de tercer grado. La implementación de estas actividades en el aula permitió al docente observar el progreso de los estudiantes, realizar ajustes al diseño inicial según las necesidades del grupo, y aplicar un enfoque de investigación-acción para mejorar la secuencia didáctica en tiempo real.

Fase 4: Análisis. Luego de la implementación, se llevó a cabo un análisis de los resultados obtenidos. Se realizó una nueva evaluación a los estudiantes para indagar si se habían construido los aprendizajes esperados. Los resultados de este análisis permitieron identificar fortalezas y debilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y se reflexionó sobre la eficacia de las estrategias y actividades utilizadas. Esta fase fue crucial para emitir conclusiones sobre la aplicación y mejorar futuras secuencias didácticas, ajustando el enfoque pedagógico según las necesidades del grupo de estudiantes.

3.5.1 Diseño de la prueba diagnóstica

Con el propósito de comprender en profundidad las nociones que los estudiantes de 3º grado tienen acerca del concepto de ángulo, se diseñó una prueba diagnóstica que permitiera identificar cómo perciben y entienden este concepto en diferentes contextos. Dado que la noción de ángulo es fundamental en la geometría, su comprensión adecuada es esencial para el desarrollo de habilidades más avanzadas en esta área. Por ello, la prueba se

centró en evaluar tanto las ideas previas como las posibles concepciones erróneas que los estudiantes pudieran tener.

La elaboración de la prueba diagnóstica se basó en la selección cuidadosa de actividades que abordan el concepto de ángulo desde distintas perspectivas: visualización, identificación y aplicación en situaciones concretas. Las preguntas fueron diseñadas para explorar cómo los estudiantes reconocen ángulos en figuras geométricas y en su entorno cotidiano, cómo relacionan los ángulos con las propiedades de las figuras, y qué estrategias utilizan para describir o construir ángulos.

Esta prueba es fundamental porque permitió no solo identificar el nivel de comprensión actual de los estudiantes, sino también determinar las áreas que requieren una intervención didáctica específica. Los resultados obtenidos sirvieron para diseñar la secuencia didáctica que refuerce la noción de ángulo, abordando las dificultades detectadas y fortaleciendo los conocimientos previos.

Para asegurar la eficacia del diagnóstico, se tomaron en cuenta los tres procesos cognitivos esenciales en la enseñanza de la geometría, tal como los propone Duval (1998), ya expuestos en el marco teórico.

Al examinar cómo los estudiantes perciben y aplican algunos conceptos geométricos en contextos variados, es posible adaptar las estrategias didácticas para abordar las dificultades específicas y fortalecer las áreas de conocimiento, asegurando un aprendizaje más efectivo y significativo.

En el Anexo A se presenta la prueba diagnóstica.

3.5.2 Consideraciones para el Diseño de la Secuencia Didáctica

El diseño de la secuencia didáctica se fundamenta en los resultados obtenidos al aplicar a los estudiantes la prueba diagnóstica mencionada en el ítem anterior. (Ver Anexo B).

Las actividades diseñadas para esta secuencia didáctica se enfocaron en la integración de movimientos físicos, específicamente los movimientos del Karate-do, con los conceptos geométricos. Esta combinación tenía como objetivo principal facilitar la comprensión de la noción de ángulo a través de experiencias kinestésicas. El Karate-do, con sus movimientos precisos y definidos, ofrece una oportunidad única para que los estudiantes visualicen y experimenten ángulos en acción. Por ejemplo, movimientos como los giros o las posiciones de defensa pueden ser analizados desde una perspectiva geométrica, ayudando a los estudiantes a entender cómo se forman y se relacionan los ángulos en un espacio tridimensional.

La geometría activa, que se centra en aprender geometría mediante la interacción física y el movimiento, complementa esta integración al promover un aprendizaje más dinámico. Al participar en actividades que implican el movimiento del cuerpo, los estudiantes pueden explorar conceptos abstractos como los ángulos de una manera concreta y tangible. Este enfoque no solo mejora la comprensión teórica, sino que también hace que el aprendizaje sea más atractivo y memorable, ya que los estudiantes pueden relacionar los conceptos matemáticos con experiencias físicas que son familiares y significativas para ellos.

Reconociendo la importancia de situar el aprendizaje en contextos que reflejan la realidad cotidiana de los estudiantes, las actividades fueron cuidadosamente diseñadas para

conectar la noción de ángulo con situaciones prácticas y familiares. Esta contextualización tiene como propósito principal facilitar la transferencia del conocimiento matemático al mundo real, ayudando a los estudiantes a ver la relevancia y la aplicabilidad de lo que aprenden en el aula.

Por ejemplo, las actividades podrían involucrar la exploración de ángulos en objetos y estructuras que los estudiantes encuentran en su vida diaria, como las esquinas de una habitación, las posiciones de las manecillas de un reloj o los ángulos formados por los rayos de luz que pasan a través de una ventana. Esta conexión con la vida cotidiana permite que los estudiantes comprendan que la geometría no es solo un conjunto de reglas abstractas, sino una herramienta que pueden usar para entender y describir el mundo que los rodea.

La geometría activa, en este contexto, fomenta la exploración de conceptos geométricos a través de experiencias diarias y actividades lúdicas que los estudiantes pueden relacionar fácilmente con su entorno. Este enfoque no solo facilita la comprensión, sino que también aumenta la motivación de los estudiantes al mostrarles cómo los conceptos geométricos son útiles en su vida diaria.

Desde una perspectiva didáctica, la secuencia se diseñó para combinar la enseñanza teórica con experiencias prácticas que ocurren fuera del aula tradicional. Este enfoque didáctico se basa en la idea de que los conceptos geométricos, como la noción de ángulo, pueden ser mejor comprendidos cuando se aprenden a través de la experiencia directa y la manipulación física.

Las actividades de geometría activa y los movimientos de Karate-do fueron seleccionados específicamente para fomentar momentos de aprendizaje en contextos dinámicos y participativos. Se esperaba que estos momentos de aprendizaje permitieran que los estudiantes construyeran y reforzaran sus conocimientos de manera interactiva, mediante la manipulación de objetos, la creación de figuras geométricas con su cuerpo y la exploración de patrones y simetrías a través del movimiento. Por ejemplo, al crear figuras geométricas con su cuerpo o con materiales como cuerdas o palos, los estudiantes no solo visualizarían los ángulos, sino que también los experimentarían físicamente, lo que afianzaría su comprensión de una manera que las explicaciones teóricas por sí solas no podrían lograr.

Por otro lado, la secuencia didáctica contempló diversas actividades de carácter kinestésico y geométrico, orientadas a promover la participación activa de los estudiantes en la construcción de conceptos relacionados con la geometría. Entre las estrategias desarrolladas se encontraban juegos como el “Juego del Caminito”, “Gallina Ciega”, “Triqui” y “Palito Dormilón”, fueron desarrolladas con el propósito de que los estudiantes practiquen movimientos físicos que reflejan conceptos geométricos específicos, tales como giros, trayectorias y posiciones espaciales.

Por ejemplo, en el "Juego del Caminito", los estudiantes pueden seguir un recorrido que los obliga a realizar giros en ángulos específicos, ayudándolos a internalizar la medida y la relación entre diferentes ángulos. En "Gallina Ciega", el desafío de moverse en un espacio determinado sin ver fomenta la comprensión espacial y la noción de ángulo al tener que girar y orientarse en diferentes direcciones. En "Triqui", los estudiantes podrían formar ángulos con cuerdas o palos, visualizando y experimentando cómo se forman y cambian los

ángulos. En “palito dormilón", los estudiantes podían experimentar los giros de una cuerda extendida, fijada por uno de sus extremos, fomentando el movimiento desde un punto inicial hasta un punto final intuyendo de esta forma la creación de ángulos mediante giros de objetos cotidianos giros.

Además, se incluyó la construcción de figuras geométricas utilizando materiales diversos, como cuerdas, palos o el propio cuerpo, para representar ángulos y formas geométricas. Estas actividades permiten que los estudiantes no solo visualicen, sino también manipulen físicamente los conceptos que están aprendiendo, lo que refuerza su comprensión de una manera práctica y tangible.

Cada actividad fue cuidadosamente diseñada para incluir no sólo la ejecución física, sino también momentos de reflexión y análisis. Estos momentos son cruciales para que los estudiantes puedan registrar y evaluar sus experiencias, conectando lo que han hecho físicamente con los conceptos geométricos que están aprendiendo. Por ejemplo, después de realizar una actividad, los estudiantes podrían discutir en grupo cómo los ángulos que forman se relacionan con los ángulos que ven en objetos de la vida diaria, promoviendo así la internalización de los conceptos aprendidos y su aplicación en diversas situaciones.

Cabe mencionar que durante el proceso de implementación se realizaron ajustes continuos a las actividades para asegurar que los objetivos de aprendizaje se estuvieran alcanzando de manera efectiva. Estos ajustes permitieron refinar la secuencia didáctica, alineándose con las necesidades específicas de los estudiantes y asegurando que la noción de ángulo fuera entendida de manera profunda y aplicable.

En ese contexto, la combinación de estrategias didácticas innovadoras con actividades prácticas y contextualizadas no solo facilitó la comprensión de conceptos geométricos abstractos, sino que también enriqueció el proceso de enseñanza y aprendizaje. Al conectar la teoría con la práctica, se creó un marco dinámico que promovió la participación activa de los estudiantes, ayudándolos a desarrollar una comprensión intuitiva y profunda de la noción de ángulo.

La figura 8 presenta los aspectos que se consideran del marco de referencia conceptual para el diseño de la secuencia didáctica, la elaboración de las actividades, la puesta en práctica y el análisis de los resultados sobre la propuesta implicada en la presente investigación y en la tabla 1 se muestra la estructura de la Secuencia Didáctica realizada.

Figura 8

Elementos Esenciales Que Aportan Las Diferentes Perspectivas Para Diseñar Una Secuencia Didáctica.

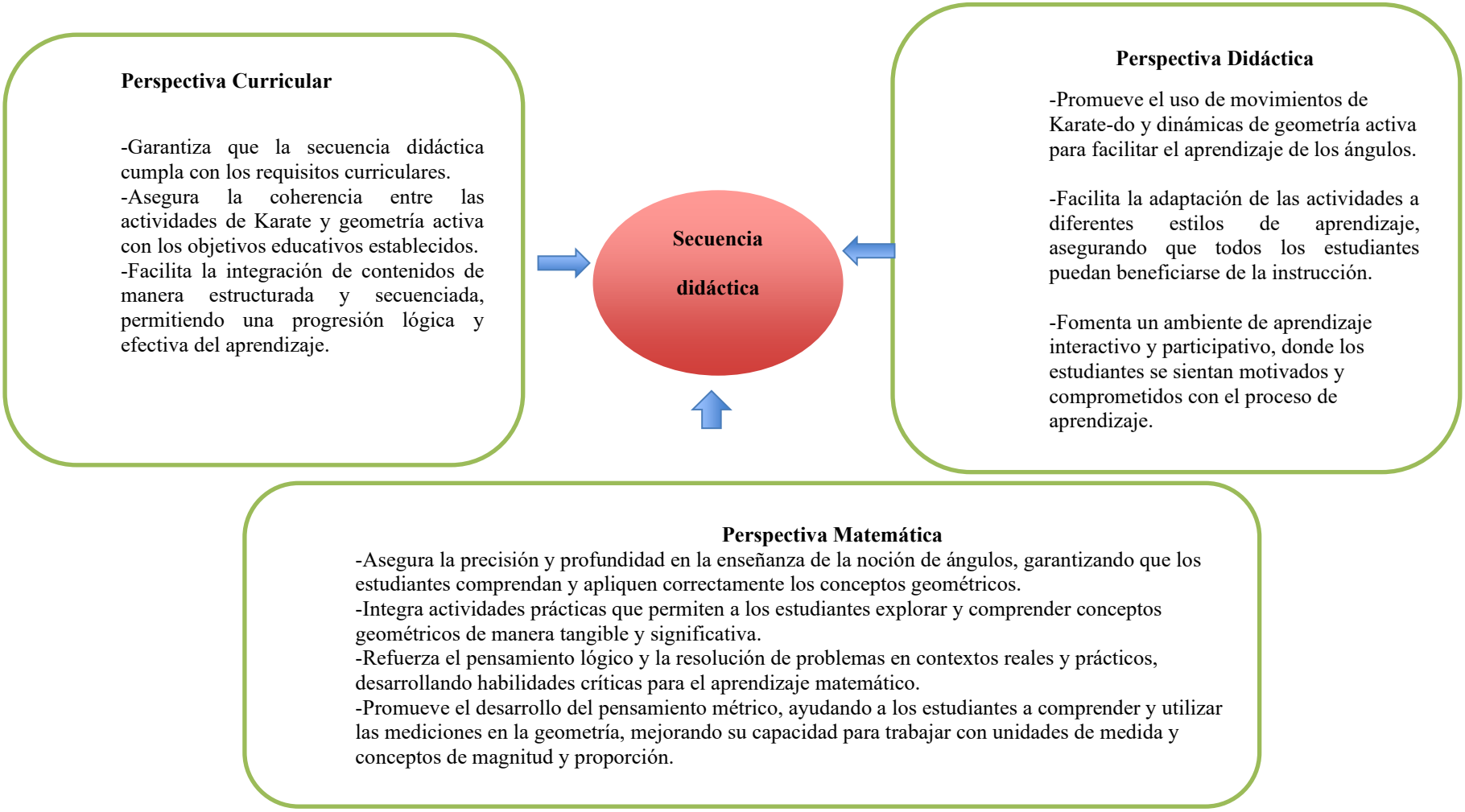


Tabla 1

Descripción De Las Actividades.

Situación	Actividades	Propósitos	No. De Tarea	Elementos de didáctica
1	1.Juego El Caminito	Retroalimentar conceptos previos esenciales para la construcción de la noción de ángulo, tales como lateralidad, identificación del centro de una figura o espacio, noción de distancia (cerca, lejos), giro y rotación. Se alineará con los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) relacionados con la ubicación espacial y la orientación.	**Tarea 1:** Dibuja en tu cuaderno el trayecto realizado en el "Juego del Caminito" y reflexiona sobre las nociones espaciales utilizadas. **Tarea 2:** Reflexiona sobre las indicaciones de tu compañero y cómo te ayudaron a completar el recorrido.	Geometría Activa, Visualización, Trabajo en Equipo
	2. La Gallina Ciega	Introducir y diferenciar conceptos como giro y rotación, reforzando los aprendizajes de la actividad anterior, en consonancia con los DBA y EBC que	**Tarea 3:** Realiza un dibujo del mapa asignado en la actividad de aros y analiza las dificultades presentadas durante la actividad.	Geometría Activa, Interacción Social, Kinestesia

		abordan la comprensión de movimientos espaciales y su representación gráfica.	**Tarea 4:** Reflexiona sobre las diferencias entre giro y rotación en la actividad de "La Gallina Ciega", y realiza un dibujo de un giro completo y medio giro.	
	3. Triqui	Superar posibles dificultades con los conceptos de línea recta, línea recta horizontal, línea recta vertical y centro, utilizando el juego para aplicar estos conceptos de forma práctica. Esta actividad se vincula con los DBA y EBC que enfatizan la identificación y uso de figuras geométricas básicas.	**Tarea 5:** Dibuja el "Triqui" en tu cuaderno, trazando las diagonales y las líneas rectas verticales y horizontales, y reflexiona sobre cómo se determinaron las distancias y el centro. **Tarea 6:** Analiza las estrategias utilizadas para que los grupos rivales quedaran a la misma distancia de los aros del Triqui.	Geometría Activa, Visualización, Conceptualización Espacial
	4. Palito dormilón	Introducir propiedades de la circunferencia como centro, equidistancia de puntos, línea curva y cerrada (circunferencia). Se alinea con los DBA y EBC relacionados con la	**Tarea 7:** Dibuja una circunferencia y marca tres puntos en ella, analizando cómo se mantienen las distancias	Geometría Activa, Conceptualización de la

		comprensión de las propiedades geométricas de las figuras cerradas y su aplicación en la vida diaria.	equidistantes respecto al centro en la actividad del "Palito Dormilón". **Tarea 8:** Reflexiona sobre las implicaciones de mover el centro del palo a otra ubicación y dibuja una solución en tu cuaderno.	Circunferencia, Interacción Física
2	5.Construcción del ángulo	Desarrollar en los estudiantes la noción de ángulo como cantidad de giro, utilizando la circunferencia y porciones de ellas para relacionar las vueltas de su cuerpo con las diferentes clasificaciones de ángulos (completo, llano, recto, agudo). Esta actividad está enmarcada en los DBA y EBC que tratan sobre la medición de ángulos y la comprensión de las relaciones angulares.	**Tarea 9:** Dibuja una circunferencia con un giro completo, media vuelta, un cuarto de vuelta, y un octavo de vuelta etiquetando correctamente los lados y el vértice. **Tarea 10:** Dibuja el giro de una vuelta y media, una vuelta más un cuarto de vuelta, una vuelta más una semi vuelta, y dos vueltas en tu cuaderno. **Tarea 11:** Completa la tabla de propiedades de los ángulos	Geometría Activa, Manipulación de Materiales, Relación Física-Conceptual

			en tu cuaderno, identificando los vértices, lados, y nombres de los giros.	
	6.Explorando los Movimientos del Kata	Relacionar conceptos y propiedades de ángulos con las posiciones y desplazamientos en el arte marcial Karate-Do, demostrando la aplicación práctica de la geometría en actividades cotidianas y en el cuerpo. Esta actividad refleja los DBA y EBC sobre la aplicación del conocimiento geométrico en situaciones reales.	**Tarea 12:** Analiza los movimientos del Kata y cómo se relacionan con los ángulos, dibujando las posturas y desplazamientos con referencias a los conceptos geométricos discutidos. **Tarea 13:** Reflexiona sobre la aplicación de los ángulos en la vida cotidiana, especialmente en actividades físicas y prácticas, como los movimientos del Kata.	Geometría Aplicada, Integración de Conceptos, Práctica Kinestésica

Fuente: Elaboración Propia

3.5.3 Implementación de la Secuencia Didáctica.

Bloque 1: ***(***Relacionado con la construcción de conceptos que permiten la construcción del concepto de ángulo) Este bloque está constituido por las actividades 1,2, 3 y 4 trata de retroalimentar conceptos previos esenciales para la construcción de noción de ángulo, tales conceptos son el uso de: lateralidad, identificación de centro de una figura o espacio, noción de distancia (cerca, lejos), giro y rotación.

En este primer momento se trata de contextualizar la actividad iniciando con la explicación de la metodología del juego, se pretende que los estudiantes al finalizar la actividad identifiquen y asimilen desde su propio cuerpo conceptos de lateralidad y direccionalidad, como, por ejemplo, identifiquen su lado derecho e izquierdo, también, al frente, atrás, realicen giros y rotaciones utilizando su cuerpo para parcialmente ubicarse y desplazarse en el espacio.

Actividad 1: El Juego del caminito.

Esta actividad tiene como propósito introducir de manera intuitiva los conceptos de lateralidad (derecha, izquierda) y direccionalidad (adelante, atrás) utilizando el propio cuerpo de los estudiantes. Se busca que los participantes desarrollen habilidades espaciales y mejoren su orientación mediante la interacción y el trabajo en equipo.

Primera etapa: Camino sobre cuadros.

El juego consiste en formar parejas de estudiantes, el cual uno de los integrantes deberá realizar un trayecto en el piso marcado con hojas. Un integrante será vendado de ojos, lo que su compañero será su guía para recorrer el camino propuesto, el compañero deberá tocar el hombro izquierdo pronunciando en voz alta ´’izquierdo’’ para dirigirse al

lado izquierdo y viceversa con el lado derecho, se tocará la cabeza para indicar al frente (delante) y la espalda para indicar atrás. En la ida va un integrante vendado y en la vuelta se cambian los roles. (si se equivoca en algún punto, se devuelve al punto inicial, comienza nuevamente el recorrido).

Figura 9

Estudiantes Realizando La Actividad 1



Fuente: Elaboración Propia

Indicaciones: Desarrolla la actividad con ayuda de un compañero, teniendo en cuenta las indicaciones del juego, el caminito, y las indicaciones del compañero, realiza el siguiente trayecto descrito en el piso.

Tarea 1.

Dibuja en tu cuaderno el trayecto realizado del camino.

b. ¿Qué nociones espaciales tuviste para ubicarte y realizar el recorrido? ¿las indicaciones del compañero fueron suficientes para hacer el camino?

c. ¿En tu cuerpo, respecto a que podemos relacionar lo que es derecha, izquierda, delante, atrás?

d. Realiza un dibujo para indicar el lado derecho e izquierdo con relación a tu cuerpo.

Una vez completada la etapa anterior, se pasa a una segunda etapa, la cual pretende reforzar la noción de lateralidad.

Segunda etapa: Camino sobre aros.

Esta actividad consiste en pasar sobre aros o cuadrantes dibujados en el piso, en cada uno de los cuales se han dibujado flechas con diferentes direcciones. Se asignará a cada pareja dos hojas(mapas) con diferente indicativo del paso a paso para el recorrido que debe realizar, uno servirá para llegar a la meta y otro, servirá para volver al sitio inicial (en la pareja, un integrante usa el mapa de ida y al llegar el otro realiza el mapa de vuelta). Este indicativo es una especie de mapa escrito (derecha, izquierda, frente, atrás), el compañero ayuda al otro indicando las direcciones y el juez será el docente que indicará si se equivocan con las indicaciones, de modo que a cada equivocación hará que el alumno vuelva al origen para volver a realizar el trayecto. Las tres primeras parejas que logren realizar la actividad en el menor tiempo posible serán las ganadoras, y las parejas que pierdan recibirán una penitencia de 10 burpees, para esto se requiere la ayuda de un cronómetro.

Figura 10

Estudiante Presentando La Etapa 2 De La Actividad.



Fuente: Elaboración propia

Tarea 2.

a. ¿Qué dificultades presentaste al realizar la actividad?

b. Realiza un dibujo en tu cuaderno del mapa que se te asignó.

c. Dibuja en tu cuaderno e indica el lado derecho e izquierdo de un objeto (televisor, armario, carro, moto, etc.).

d. De acuerdo a la siguiente situación. Con un compañero ubíquese frente a frente, ¿creen que su lado derecho, lado izquierdo, son los mismos al del compañero? ¿A qué se debe lo anterior?

Actividad 2: La gallina ciega y los giros en el espacio.

Esta actividad busca que el estudiante ponga en práctica y refuerce los conceptos tratados en la anterior actividad mediante el juego de la gallina ciega, también, se pretende introducir y diferenciar conceptos como giro y rotación al comienzo de la actividad cuando se requiere rotar al niño para iniciar el juego.

Este juego consiste en la división de dos grupos, el cual eligen a un representante que será vendado los ojos, luego los dos representantes de cada grupo serán rotados por sus compañeros, desde el sitio de partida harán el recorrido hacia la meta con las siguientes indicaciones: derecha, izquierda, al frente, atrás, gire hacia la derecha, gire hacia la izquierda, el primer integrante que llegue a la meta gana. El equipo que primero llegue a cuatro puntos ganará la partida (se espera hacer tres rondas para evitar empates) y asignará penitencia de 30 sentadillas.

Indicaciones:

1. Para realizar la siguiente actividad, ubícate en uno de los dos grupos asignados.
2. Teniendo en cuenta las indicaciones del juego, Gallina ciega, y las indicaciones de tus compañeros, realiza el trayecto para llegar a la meta.

Tarea 3:

a. ¿Qué se tiene en cuenta para hacer un giro?

b. ¿Qué se tiene en cuenta para hacer una rotación?

c. ¿Qué diferencia hay entre estos dos movimientos (giro, rotación)?

d. Respecto a tu cuerpo, realiza un dibujo de un giro de una vuelta, media vuelta.

Actividad 3: El triqui y las líneas rectas

Esta actividad pretende introducir lo que es una línea recta diagonal, línea recta horizontal, línea recta vertical, y centro.

El lenguaje es esencial en el aprendizaje de conceptos matemáticos, ya que una mala información puede generar una serie de dificultades, por ende, la siguiente actividad pretende traer a colación y superar posibles dificultades frente a los conceptos de línea recta, línea recta horizontal, línea recta vertical, y centro.

De modo que el guía estará atento a tales problemas, el cual recurrirá a explicar de manera pertinente el concepto apoyándose en la construcción del juego, por ejemplo: a partir de la necesidad de ubicarse de forma equivalente para que los equipos contrarios recorran la misma distancia del punto de partida hacia los aros, se busca con los estudiantes fijen un punto de referencia para así ubicar el centro y con la ayuda de los pasos fijar los extremos de ambos equipos en línea recta (sin curvas), el desarrollo de los demás conceptos se construirán a causa de las reglas del juego, como el de formar tres en raya del cual tienen que ser en línea recta ya sea en horizontal, vertical o diagonal. Así, para desarrollar la secuencia de manera satisfactoria, es necesario que el docente tenga presente las siguientes definiciones:

- ✓ Línea: Una línea puede ser una sucesión infinita de puntos interrelacionados o puede ser la trayectoria descrita por un solo punto a través del plano o del espacio.
- ✓ Recta: Línea formada por una serie continua de puntos en una misma dirección que no tiene curvas ni ángulos y cubre la menor distancia posible entre dos puntos.
- ✓ Diagonal: [línea recta] Que en una figura geométrica une un ángulo con otro no inmediato.

- ✓ Horizontal: Que es paralelo a la línea imaginaria del horizonte o tiene todos sus puntos a la misma altura.
- ✓ Vertical: Que es perpendicular al plano del horizonte o está situado en su posición mayor en esa perpendicular.
- ✓ Centro: Punto o lugar que está en medio, más o menos equidistante de los límites o extremos.

Ahora, el juego consiste en ir marcando los espacios de los aros con conos de color respectivo al equipo hasta que un grupo de jugadores consiga hacer tres en raya en línea recta. La línea recta puede ser horizontal, diagonal o vertical.

Se hacen dos grupos (A, B) de la misma cantidad de alumnos, consensuando con los niños, se busca una forma que los equipos queden de extremo a extremo en línea recta de forma equidistante a partir de la ubicación de un punto de referencia en el espacio, a este punto lo llamaremos centro y serán ubicados los aros en forma de un cuadrado 3x3.

Los conos son de diferente color (rojo, azul) respecto al grupo, se hace una fila uno tras del otro desde el extremo o punto de partida, los primeros tres primeros integrantes de cada equipo se le asigna un cono de un color respectivo a su grupo, a la orden de inicio (listos…preparados…ya) el primer integrante corre hacia los aros colocando un cono estratégico dentro del círculo del aro elegido, se devuelve tocando la mano de su compañero para dar el turno hasta llegar el tercer turno. Si un equipo coloca un cono en un aro, este espacio no puede ser sustituido por otro cono del contrario, en el caso de realizar los tres turnos y no haber ganador podrá salir un cuarto y transportar estratégicamente un

cono de su equipo y asignar su ubicación en otro círculo vacío que le permita formar tres en raya, así, puede salir un quinto, un sexto integrante, etc.

Indicaciones:

1. Para realizar la siguiente actividad, ubícate en uno de los dos grupos asignados (A, B).
2. Teniendo en cuenta las indicaciones del juego, Triqui, ubícate en la fila de tu grupo.
3. Espera la orden de salida (listos…preparados…ya).

Tarea 4

a. ¿Qué estrategias utilizaste para que los grupos rivales quedarán a una misma distancia de los aros del Triqui?

b. ¿Cómo ubicaste el centro de la distancia entre los dos equipos?

c. Dibuja en tu cuaderno una línea recta.

d. Dibuja el Triqui en tu cuaderno y traza con diferentes colores, las diagonales, líneas rectas verticales, líneas rectas horizontales.

Actividad 4: Palito dormilón y propiedades de circunferencia

Para introducir propiedades de la circunferencia como centro, equidistancia de puntos, línea curva cerrada (circunferencia), se opta por realizar la siguiente actividad.

Con la ayuda de un palo de escoba se inicia la dinámica el cual consiste en un trabajo de reacción, los participantes estarán acostados boca abajo a una determinada distancia frente a un palo que sostiene un alumno de forma perpendicular al piso, cada

integrante se le asignará un número el cual la persona que sostiene el palo indicará el número(1,2,3,4,..) en voz alta y la soltará, la persona correspondiente al número corre hacia el palo con la intención de no dejarlo caer a causa de la gravedad, si el jugador logra sostener el palo sustituirá al compañero siendo el nuevo guía para indicar el número, de lo contrario el participante vuelve a su sitio de ubicación.

De esta manera se da inicio a la actividad ubicando a distintos alumnos a diferentes distancias con respecto al palo de escoba pretendiendo hacer notar la ventaja del que ha estado más cerca cayendo en la necesidad de una medida que permita ubicar a los integrantes en las mismas distancias y por ende estar en las mismas condiciones, así, todos los integrantes serán ubicados a la misma distancia del palo, para indicar un límite visual de distancia consensuado con los estudiantes se trazará una circunferencia en el piso y a medida en que se realiza la construcción se dialoga características como de punto de referencia que pasa a ser centro debido a la equidistancia con los puntos de la línea curva cerrada (circunferencia).

Se hace un breve recordatorio de lo que es rotación y lo que es giro, involucrando tales conceptos en la construcción de la circunferencia (con un punto de referencia, una cuerda, se estipula una distancia, se traza una circunferencia haciendo girar la cuerda con punto fijo, ‘centro’, y extremo en la distancia asignada, ‘circunferencia’).

Tarea 5

a. ¿Qué estrategias fueron utilizadas para ubicarse a una misma distancia tú y tus compañeros respecto al palo?

b. En la situación de mover el punto de origen del palo a otro punto en el espacio(cancha), ¿qué implicaciones tendrá respecto a las distancias de sus compañeros respecto al palo?, en tu cuaderno realiza un dibujo ilustrando el problema.

c. Respecto a lo anterior, ¿qué soluciones darías para que tus compañeros queden a igual distancia del palo en el nuevo punto de ubicación del centro?

d. Dibuja una circunferencia en tu cuaderno, con colores diferentes, ubica y dibuja tres puntos sobre la circunferencia, a su vez, traza líneas rectas que vayan del centro a los puntos de la circunferencia marcados

3.5.3.2 El ángulo y su relación con giros en la circunferencia.

Bloque 2: Encaminado a construir la noción de ángulo como cantidad de giro de su cuerpo mediante la construcción de diversos tipos de ángulos como, el completo, llano, recto, agudo y combinaciones de ellos mediante la suma de estos. En este bloque también se presenta una actividad orientada a establecer la relación entre los ángulos y los giros del cuerpo, a partir de la ejecución de posiciones propias del kata de karate. Dichas posiciones se asocian con giros que representan distintas magnitudes angulares, tales como el ángulo completo, el ángulo llano, el ángulo recto y el ángulo agudo. Este bloque está constituido por las actividades 5 y 6

Actividad 5: **Construcción de ángulo (3 horas)**

Posibles problemas conceptuales:

- ✓ **Sentido:** hace referencia al lugar hacia el cual se dirige el vector y se representa gráficamente mediante la punta de la flecha.

- ✓ **Dirección:** corresponde a la recta sobre la cual se encuentra o se desplaza el vector. Esta recta puede prolongarse de manera continua e indefinida en el espacio.
- ✓ **Orientación:** se relaciona con la manera en que un objeto o elemento se dispone o se ubica tomando como referencia un punto determinado.

Esta actividad pretende desarrollar en los estudiantes el concepto de ángulo como cantidad de giro de acuerdo con la definición, "Un ángulo plano se genera si se gira (en un plano) una línea de la posición inicial → ox a la posición terminal →op. Entonces, O es vértice, →ox se llama lado inicial, y →op, lado terminal del ángulo" (Herrera, 2020, p. 43). Así pues, a fines didácticos adecuamos propiedades de la definición anterior como, giro de una línea recta que coincide su punto de origen con el centro de la circunferencia, esta línea realiza un giro que parte de una posición inicial a una posición final. La línea de posición inicial la llamamos lado inicial →ox, la línea de posición final la llamamos lado final → op y el centro de la circunferencia donde se unen las líneas la llamamos vértice O.

Para empezar, **s**e guía al estudiante a utilizar la circunferencia como instrumento de relación con el giro, es decir, se pretende que el estudiante note la relación de aquellas porciones de circunferencia con la cantidad de giro de su propio cuerpo. Por tanto, se procede a realizar la construcción de la noción de ángulo mediante una serie de instrucciones que involucran realizar trazos, divisiones y recortes de circunferencia, con el fin de estandarizar algunos giros como; vuelta completa con un giro completo en una circunferencia nombrándolo como ángulo completo, media vuelta con el giro en media circunferencia nombrándolo como ángulo llano, un cuarto de vuelta con un giro en un

cuarto de circunferencia nombrándolo como ángulo recto, semi vuelta con el giro en un octavo de vuelta en una circunferencia nombrándolo como ángulo agudo.

Esta actividad también pretende superar algunos problemas en el aprendizaje de los ángulos presentados en el trabajo de (Herrera, 2020) como por ejemplo: el problema de la imagen estandarizada de ángulo como ángulo agudo; la ubicación del lado inicial en una horizontal; el conflicto de la representación gráfica de ángulo completo debido a que su lado inicial coincide con el lado final causando que los estudiantes no conciben la existencia de ángulo al no parecer una abertura entre los lados; el conflicto de la representación gráfica del ángulo llano debido a que visualmente el lado inicial al estar en dirección contraria al lado final los estudiantes conciben un solo lado imposibilitando la existencia de ángulo.

Para realizar este proceso se invita a seguir el procedimiento que se presenta a continuación:

Se consensua el sentido del giro con los estudiantes, es decir, se dialoga el sentido de giro de la derecha e izquierda, para esto, se apoya en los giros de la manecilla del reloj, donde el giro en sentido de las manecillas del reloj será el giro hacia la derecha y en sentido contrario será el giro hacia la izquierda como lo indica las siguientes figuras.

Figura 11

Sentido de las Manecillas del Reloj



Nota. La imagen describe la dirección en la que se mueven las manecillas de un reloj. Fuente: (Agujas del Reloj - Euclides, 2021)

Al finalizar este momento, se inicia realizar la siguiente instrucción:

1.Dibuja en tu cuaderno una manecilla de reloj indicando el giro hacia la derecha y el giro hacia la izquierda.

2. Se divide el grupo de estudiantes en 5 subgrupos, a cada grupo se le asigna una hoja con el dibujo de una circunferencia, la cual servirá como material de ayuda en la construcción del ángulo completo, llano, recto y obtuso, a partir de las instrucciones recibidas. Cada hoja tendrá una circunferencia de tamaño diferente a las de los otros grupos con el fin de poder hacer comparaciones entre las porciones de las distintas circunferencias correspondiente a un ángulo (completo, llano, recto, obtuso), se pretende hacer notar a medida que se construye el respectivo ángulo que las diferentes porciones de las distintas circunferencias indican la misma cantidad de giro y así poder mostrar de forma experimental que el ángulo no depende de la longitud de sus lados sino de la abertura o cantidad de giro entre ellos.

En este orden de ideas, para contextualizar los giros sobre una circunferencia, se inicia el diálogo con los estudiantes sobre la necesidad de ubicarse y orientarse en el espacio mediante un sistema más preciso que simples tanteos o aproximaciones visuales, por ende, se pone a un estudiante como modelo, el cual habla con el grupo en busca de una forma de orientar al compañero y ubicar objetos en diferentes puntos del espacio (compañeros en distintas ubicaciones del entorno), para ello se pone de manifiesto la utilidad de los giros sobre una circunferencia que sirve como referencia para determinar

una posición inicial (lado inicial) y una posición final (lado final), posteriormente, se procede a dibujar con una crayola una circunferencia en el piso remarcando su centro y con fines prácticos se ubica el eje de giro como la línea recta que pasa por el centro del cuerpo y es perpendicular al piso coincidiendo con el centro de la circunferencia al que llamaremos eje de giro o vértice. El brazo derecho representará la línea recta que realiza el giro en sentido derecho de una posición inicial a una posición final pudiendo así ejemplificar de forma más exacta lo que con su cuerpo es un giro de una vuelta, media vuelta, un cuarto de vuelta y un octavo de vuelta al realizar giros en la circunferencia con su cuerpo.

Antes de iniciar la construcción del ángulo completo, a cada estudiante se le asigna una tabla (ejemplo tabla 2) con el fin de clasificar información y propiedades de los ángulos, en especial la identificación de la condición del ángulo de tener dos lados, un vértice y un respectivo giro. Los espacios en blanco de la tabla 2 serán llenados en el transcurso de la construcción de los ángulos.

Tabla 2

Ejemplo De La Tabla De Clasificación De Información Y Propiedades De Los Ángulos.

Giro del cuerpo	**Representación gráfica del giro con ayuda de la circunferencia**	**Nombre geométrico de la cantidad de giro realizado**	**Número de vértices**	**Número de lados**	**Representación gráfica opcional**
Vuelta completa					
Media vuelta					
Un cuarto de vuelta					
Octavo de vuelta					

Fuente: Elaboración Propia.

Con base en lo anterior, se procede a construir el ángulo completo relacionándolo con el giro de una vuelta completa de su cuerpo en una circunferencia, se les indica a los grupos de estudiantes trazar un lado en la circunferencia indicando una posición inicial, con el estudiante modelo se realiza una vuelta de su cuerpo partiendo de la posición inicial acordada ilustrando el giro en la circunferencia, se proyectan las diferentes circunferencias de los estudiantes sobre la circunferencia base realizada en el piso, se compara los giros que se realizan entre las circunferencias de diferentes tamaños, haciendo caer en cuenta que no importa el tamaño de la circunferencia, todas indican la misma cantidad de giro de una vuelta. Se sugiere nombrar a este tipo de vuelta como ángulo completo y se les pide marcar con una flecha arqueada el recorrido del giro.

Figura 12

Elaboración De La Circunferencia.



Fuente: Elaboración Propia.

Respecto a la actividad anterior, se indica al estudiante realizar la siguiente tarea.

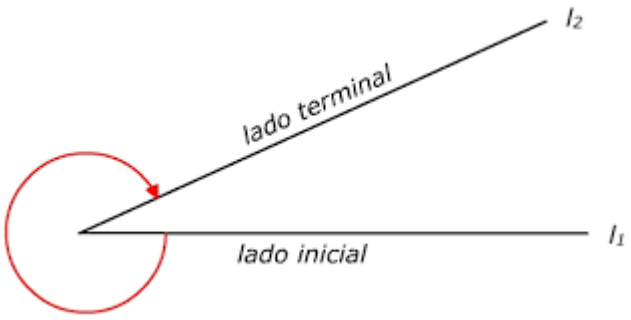
Tarea 6

a. Dibuja en tu cuaderno una circunferencia que involucre un giro de una línea recta de una posición inicial a una posición final. La línea de posición inicial debe nombrarse como ‘lado inicial’, y la de posición final como ‘lado final’. Ubica y nombra el vértice y, finalmente con una flecha arqueada dibuja el sentido de giro.

De la indicación anterior se espera que los estudiantes realicen aproximadamente la siguiente figura.

Figura 13

Circunferencia Que Involucra El Giro De Una Posición Inicial Y Final.



Fuente: Castro, J. (s. f.).

a) Dibuja en tu cuaderno el giro en una circunferencia de una vuelta completa de tu cuerpo.
b) ¿Qué pasa con las posiciones del lado inicial y el lado final cuando se realiza una vuelta completa de tu cuerpo en una circunferencia?
c) ¿Qué nombre recibe el giro de una vuelta completa de tu cuerpo en una circunferencia?

d) Llena los espacios en blanco de la segunda fila de la tabla 1(vuelta completa).

Se procede a construir el ángulo llano relacionándolo con el giro de media vuelta de su cuerpo en la circunferencia marcada en el piso llegando a la idea que media vuelta es equivalente a realizar un giro en media circunferencia. De este modo se indica a los estudiantes marcar un lado inicial en la circunferencia que, de cuenta de la posición inicial, luego para dar cuenta de la posición final se proyecta el lado final en sentido contrario al lado inicial, se recorta sobre los lados la circunferencia, se compara los giros que se realizan entre las mitades de circunferencias de diferentes tamaños reflexionando que no importa el tamaño de la media circunferencia, todas indican la misma cantidad de giro de media vuelta. Se sugiere nombrar a este tipo de vuelta como ángulo llano y se les sugiere marcar con una flecha arqueada el recorrido del giro como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 14

Estudiante Realizando La Actividad.



Fuente: Elaboración propia.

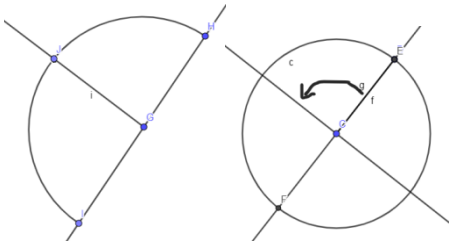
Tarea 7

a) Dibuja en tu cuaderno el giro en una circunferencia de media vuelta de tu cuerpo.
b) ¿Qué pasa con el lado inicial y el lado final cuando se realiza una media vuelta de tu cuerpo en una circunferencia?
c) ¿Qué nombre recibe el giro de media vuelta de tu cuerpo en una circunferencia?
d) Llena los espacios en blando de la tercera fila de la tabla 1(octavo de vuelta).

Después, se procede a construir el ángulo recto relacionándolo con el giro de un cuarto de vuelta de su cuerpo en la circunferencia marcada en el piso llegando a la idea que un cuarto de vuelta es equivalente a realizar un giro en un cuarto de circunferencia. De este modo se indica a los estudiantes marcar un lado inicial en la circunferencia que dé cuenta de la posición inicial, luego para dar cuenta de la posición final se divide ese ángulo llano en dos(se utiliza la porción de papel donde está la figura de media circunferencia y se unen los dos extremos o puntas, se marca el trazo o lado generado y se recorta), el lado marcado de la división de ángulo llano será nuestro lado final, de este modo se divide la circunferencia en cuatro partes de los cuales cada parte representa un cuarto de vuelta. Se compara los giros que se realizan entre los cuartos de circunferencias de diferentes tamaños reflexionando que no importa el tamaño de los cuartos de circunferencia, todas indican la misma cantidad de giro de un cuarto de vuelta. Se sugiere nombrar a este tipo de vuelta como ángulo recto y se les sugiere marcar con una flecha arqueada el recorrido del giro como se muestra en la siguiente figura.

Figura 15

Elaboración De Un Ángulo Recto.



Fuente: Elaboración propia.

Tarea 8

a) Dibuja en tu cuaderno el giro en una circunferencia de un cuarto de vuelta de tu cuerpo.
b) ¿Qué nombre recibe el giro de un cuarto de vuelta de tu cuerpo en una circunferencia?
c) Llena los espacios en blando de la cuarta fila de la tabla 1(un cuarto de vuelta).

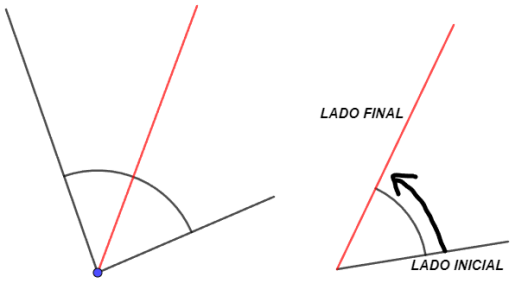
Se procede a construir el ángulo agudo relacionándolo con el giro de un octavo de vuelta(semi-vuelta) de su cuerpo en la circunferencia marcada en el piso llegando a la idea que un octavo de vuelta es equivalente a realizar un giro en un octavo de circunferencia. De este modo se indica a los estudiantes marcar un lado inicial en la circunferencia que dé cuenta de la posición inicial, luego para dar cuenta de la posición final se divide el ángulo recto en dos(se utiliza la porción de papel donde está la figura de octavo de circunferencia y se unen los dos extremos o puntas, se marca el trazo o lado generado y se recorta), el lado marcado de la división del ángulo recto será nuestro lado final, de este modo se divide la circunferencia en ocho partes de los cuales cada parte representa un octavo de vuelta. Se

compara los giros que se realizan entre los octavos de circunferencia de diferentes tamaños reflexionando que no importa el tamaño de los octavos de circunferencia, todas indican la misma cantidad de giro de un octavo de vuelta(semi-vuelta). Se sugiere nombrar a este tipo de vuelta como ángulo agudo y se les sugiere marcar con una flecha arqueada el recorrido del giro como se muestra en la siguiente figura.

.

Figura 16

Elaboración De Un Ángulo Agudo



Fuente: Elaboración Propia.

Tarea 9

a) Dibuja en tu cuaderno el giro en una circunferencia de un octavo de vuelta de tu cuerpo.

b) ¿Qué nombre recibe el giro de un octavo de vuelta de tu cuerpo en una circunferencia?

c) Llena los espacios en blanco de la quinta fila de la tabla 1.

Se reflexiona sobre la continuación de los giros del cuerpo en una circunferencia del cual pueden ser representados como sumatorias de ángulos, por ejemplo, se dialoga sobre hacer dos vueltas completas, el cual sería equivalente a realizar dos giros sobre una circunferencia lo que sería la realización de dos ángulos completos, lo mismo para una vuelta y media que sería la suma de un ángulo completo más un ángulo llano.

Tarea 10

a) Dibuja en tu cuaderno: el giro de una vuelta y media, una vuelta más un cuarto de vuelta, una vuelta más una semi vuelta, dos vueltas.
b) Finalmente, con el objetivo de sintetizar esta actividad se procede a realizar la tarea 11 teniendo en cuenta la tabla uno.

Tarea 11

Según la tabla 2, se realiza los siguientes puntos:

a) Qué nombre se da a una vuelta completa, media vuelta, un cuarto de vuelta y un octavo de vuelta respecto a la cantidad de giro realizado con tu cuerpo en una circunferencia.
b) Cuántos vértices y cuántos lados, tiene un ángulo completo, un ángulo llano, un ángulo recto y ángulo agudo.
c) Dibuja en tu cuaderno un ángulo completo, llano, recto, agudo.
d) ¿Consideras que en la circunferencia se podría hacer más divisiones que relacionen los giros de tu cuerpo?, si la respuesta es sí o no, justificar el porqué.

e) Notaste que en la construcción del ángulo completo, llano, recto y obtuso las diferentes porciones de circunferencia de diferentes tamaños indican la misma cantidad de giro. Que podemos concluir de acuerdo a lo anterior.

Actividad 6: Explorando los Movimientos del Kata

Se pretende en esta actividad relacionar conceptos y propiedades de ángulos en una actividad diferente a las convencionales, en este caso se quiere mostrar la utilidad de los ángulos en las actividades del Kata (posiciones estéticas del arte marcial Karate-Do) por ejemplo: la utilidad de los ángulos para posicionar los pies en el piso para realizar cierta postura que implica el arte marcial para desplazarse o ubicarse en el espacio, Para ello se realizará el aprendizaje de posiciones básicas de Karate.

Figura 17

Estudiantes Realizando las Posiciones Básicas del Karate.



Estas posturas permiten realizar cambios convenientes en los ejes de giro según el movimiento que se desee ejecutar. Dependiendo del tipo de giro, el eje puede ubicarse en el pie izquierdo, en el pie derecho o en el centro de gravedad del cuerpo, el cual se proyecta a través de una línea imaginaria que desciende desde la corona de la cabeza y cae perpendicularmente al piso. De esta manera se juega con posturas que impliquen giros del cuerpo relacionados con giros de ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto y ángulo agudo, evidenciando de esta manera, la utilidad de conceptos geométricos en la vida cotidiana, interiorizando propiedades en la práctica desde su propio cuerpo.

Figura 18

Estudiantes Explorando los Movimientos del Kata.



3.6 Análisis de la Implementación.

Para este trabajo en un principio se había tomado una muestra de 15 estudiantes del total de 40, por causa de inasistencia a diferentes factores escolares y extraescolares, algunos no pudieron asistir a todas las actividades de seguimiento, por ende, se tomó la muestra de los 8 estudiantes que cumplieron todas las actividades.

Para facilidad de nomenclatura a cada estudiante se le asignó una letra: A, B, C, D, E, F, G y H

A continuación, se muestran los criterios que serán utilizados para la elaboración y análisis de las rejillas del diagnóstico inicial, rejillas de la secuencia didáctica y rejillas de la prueba final.

Criterio 1. Visualización en geometría

La visualización en geometría se entiende como un proceso de transferencia bidireccional entre representaciones gráficas y representaciones mentales. Este proceso implica la capacidad de transformar objetos, conceptos, fenómenos y procedimientos —tanto concretos como abstractos— en imágenes visuales, así como realizar el proceso inverso, con el fin de favorecer la comprensión matemática (Torregrosa & Quesada, 2007). En este sentido, la visualización permite trasladar un dibujo a una imagen mental o convertir una imagen mental en una representación gráfica.

Desde esta perspectiva, un dibujo posibilita la visualización de una o varias figuras que pueden representarse como elementos unidimensionales en un plano bidimensional (1D/2D), figuras bidimensionales cerradas (2D/2D) o representaciones planas de objetos tridimensionales (3D/2D), como ocurre con cubos o esferas (Duval, 1998, citado en

Torregrosa & Quesada, 2007, p. 280). Asimismo, la identificación de figuras funciona como una estrategia para representar objetos reales o matemáticos mediante distintos tipos de aprehensión: perceptual, discursiva y operatoria, esta última asociada a procesos de cambio figural y reconfiguración.

Criterio 2. Definiciones e imágenes del concepto de ángulo

Un ángulo plano se genera cuando, en un mismo plano, una semirrecta gira desde una posición inicial hasta una posición terminal, compartiendo un mismo punto de origen que actúa como vértice del ángulo (Pachuca Herrera & Zubieta Badillo, 2020). Sin embargo, la definición de ángulo que adopta el estudiante influye directamente en su capacidad de visualización y reconocimiento de ciertos casos particulares.

En este sentido, se ha evidenciado que los estudiantes presentan dificultades para reconocer ángulos de 0°, 180° y 360°, debido a que no perciben una abertura entre dos lados, lo que los lleva a interpretar estas representaciones únicamente como líneas sin significado angular. Además, las imágenes mentales asociadas al concepto de ángulo no responden a una definición única, sino que varían según el contexto del problema. Predomina una imagen estereotipada del ángulo, generalmente agudo, con el vértice ubicado a la izquierda y un rayo horizontal como referencia.

Criterio 3. Significados del ángulo en textos escolares

El concepto de ángulo puede abordarse desde cuatro significados: cualitativo estático, cualitativo dinámico, cuantitativo estático y cuantitativo dinámico (Torres & Sánchez, 2023). Las dificultades más recurrentes se asocian a una concepción estática del

ángulo como un par de rayos con un punto común, lo que conlleva la exclusión de ángulos como 0°, 180°, 360°, ángulos negativos o mayores a 360°.

Las actividades que incorporan un rayo inicial y otro rayo que gira hasta alcanzar una medida determinada favorecen la comprensión de estos casos, al resaltar el carácter dinámico del ángulo. Por otro lado, las confusiones entre la longitud de los rayos y la medida del ángulo no parecen originarse en los textos escolares, sino en inferencias previas del estudiantado. Por ello, se sugiere integrar aplicaciones prácticas y situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, para ejemplificar los distintos significados del ángulo.

Criterio 4. Construcción del concepto de ángulo

El aprendizaje del concepto de ángulo requiere que los estudiantes integren diversas experiencias educativas y múltiples definiciones, comprendiendo que este concepto no puede expresarse de manera única en palabras (Casas & Luengo, 2005). No obstante, los estudiantes pueden identificar la presencia de dos líneas que se interceptan en un punto y la relación que se establece entre ellas, la cual puede interpretarse como cantidad de giro, inclinación entre rayos o grado de abertura de una región angular.

Desde esta perspectiva, el ángulo puede concebirse como una región del espacio, como un par de rayos o semirrectas, o como una cantidad de giro. Estas definiciones dan lugar a concepciones estáticas, dinámicas y mixtas del ángulo.

Criterios 5, 6 y 7. Enfoque curricular (MEN y DBA)

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016), se espera que los estudiantes identifiquen, representen y utilicen ángulos en situaciones tanto estáticas como dinámicas, relacionadas con giros, aberturas, inclinaciones y figuras geométricas. Asimismo, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) enfatizan la formulación y resolución de problemas vinculados con la posición, dirección y movimiento de objetos, así como la descripción de la posición mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad (MEN, 2016).

Criterio 8 y 9. Pensamiento métrico

El pensamiento métrico hace referencia a la comprensión de las magnitudes, su medición y el uso flexible de sistemas de medida en diversos contextos (MEN, 2006). Su desarrollo implica procesos como la construcción de conceptos de magnitud, la conservación de las magnitudes, la estimación, la selección de unidades y patrones, y la asignación numérica (Gómez, 2021).

En el caso de los ángulos, una dificultad frecuente radica en asociar la longitud de los rayos con la medida angular. Aunque los rayos pueden variar en longitud, la magnitud del ángulo permanece constante. Por ello, el uso de material manipulativo y experiencias corporales —como los giros del cuerpo asociados a fracciones de circunferencia— resulta pertinente para transitar de una estimación intuitiva a una comprensión discreta–continua del ángulo como unidad de medida.

Criterio 10. Geometría activa

La geometría activa se concibe como la exploración del espacio y de sus formas de representación tanto en la imaginación como en el plano gráfico (Vasco, 1992). Este enfoque propone el aprendizaje de la geometría a través del movimiento del cuerpo, la imaginación y el dibujo, resaltando su carácter dinámico y transformacional.

Criterio 11. Transformaciones geométricas

Finalmente, el currículo propone que los estudiantes reconozcan y apliquen transformaciones geométricas, como traslaciones y giros, sobre figuras, fortaleciendo la comprensión del ángulo desde una perspectiva dinámica y funcional (MEN, 2016).

3.6.1 Análisis del Diagnóstico inicial

En el **Anexo A** se presenta la prueba diagnóstica, la cual consta de 14 preguntas organizadas en la primera columna. Algunas de estas preguntas se agrupan de acuerdo con su similitud temática, lo que permite su organización final en seis categorías. En la segunda columna se describen los criterios teóricos que orientaron la elaboración de las tareas y que, a su vez, posibilitan el análisis de los resultados. La tercera columna contiene los criterios específicos empleados en la actividad, así como su propósito y el análisis de las respuestas a las preguntas. En la cuarta columna, a partir del análisis de las respuestas, se presentan las conclusiones generales correspondientes a cada categoría evaluada. Finalmente, en la última fila se encuentra la conclusión general de todas las actividades.

Para el análisis de los resultados se empleó un enfoque cualitativo, apoyado en el análisis mediante criterios teóricos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11). Este enfoque tuvo como propósito identificar las concepciones o nociones que poseen los estudiantes acerca

del ángulo, reconocer posibles dificultades asociadas al tema y determinar los conocimientos previos que presentan al enfrentarse a la serie de ejercicios. Lo anterior permitió adecuar una secuencia didáctica de carácter experimental orientada al desarrollo de la noción de ángulo en estudiantes de tercer grado de educación básica primaria.

3.6.2. Análisis de implementación de la Secuencia Didáctica

En la siguiente tabla se presentan, en la primera columna, las actividades desarrolladas (Juego del Caminito, Juego de la Gallina, Juego del Triqui y Juego del Palito Dormilón), junto con su respectivo propósito. En la segunda columna se describen los criterios teóricos que orientaron la elaboración de las tareas y que, a su vez, sustentan el análisis de los resultados. En la tercera columna se incluyen los objetivos de cada tarea, las actividades propuestas con sus respectivas indicaciones y preguntas, organizadas en los literales (a, b, c, d y e), así como el análisis descriptivo del desarrollo de las actividades por parte de los educandos. Este análisis contempla conclusiones específicas de cada literal (a, b, c, d y e) o conclusiones generales de la actividad, a partir de los resultados obtenidos en las tareas resueltas, con el propósito de identificar patrones de respuesta, aciertos, dificultades y estrategias empleadas durante la resolución de las actividades. Ver **anexo** C

Tabla 3

Muestra del análisis realizado, de la tarea 1.

Juego El Caminito.	**El objetivo de la tarea y el análisis descriptivo de los resultados de las tareas desarrolladas por los estudiantes**
Tarea 1.	a. Dibuja en en el espacio en blanco el trayecto realizado del camino.

	Respuesta de A, B, G y H Análisis de respuesta. La percepción visual del trayecto realizado por los estudiantes se enmarca en una percepción bidimensional (2D). Para representar la trayectoria, utiliza figuras como personajes, cuadrados y rectángulos que simbolizan los papeles pegados al piso. Sus dibujos evidencian que su comprensión del recorrido se basa principalmente en la aprehensión visual. Respuesta de C, D Análisis de respuesta. La aprehensión presente en el estudiante es unidimensional, pues representa el trayecto del camino mediante flechas direccionales que orientan el recorrido. Además, se aprecia cómo relaciona las nociones de lateralidad —derecha,

Tabla 4

Muestras del análisis final, bloque 1.

Conclusiones Los estudiantes tienden a reconocer únicamente la imagen estandarizada del ángulo agudo —con una abertura y orientación específicas— y muestran dificultades cuando se les presentan ángulos con formas, aberturas u orientaciones distintas. En estos casos, suelen asociarlos con figuras familiares, especialmente letras como V, L o I, lo que evidencia una comprensión basada en la apariencia y no en las propiedades geométricas. También se observan influencias del lenguaje en sus respuestas. Por ejemplo, al ver las manecillas del reloj alineadas en una recta, algunos estudiantes denominan el ángulo como “recto” por analogía con “línea recta”, sin reconocer que se trata de un ángulo llano. Del mismo modo, algunos llaman al ángulo obtuso “abierto”, guiándose por rasgos visuales antes que por conceptos formales.		

En la siguiente tabla, se presentan, en la primera columna, las actividades desarrolladas (retroalimentación de la primera sesión e introducción de giros del cuerpo sobre una circunferencia, ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto, ángulo agudo), junto con su respectivo propósito. En la segunda columna se describen los criterios teóricos que orientaron la elaboración de las tareas y que, a su vez, sustentan el análisis de los resultados. En la tercera columna se incluyen los objetivos de cada tarea, las actividades propuestas con sus respectivas indicaciones y preguntas, organizadas en los literales (a, b, c, d y e), así como el análisis descriptivo del desarrollo de las actividades por parte de los

estudiantes. Este análisis contempla conclusiones específicas de cada literal (a, b, c, d y e) o conclusiones generales de la actividad, a partir de los resultados obtenidos en las tareas resueltas, con el propósito de identificar patrones de respuesta, aciertos, dificultades y estrategias empleadas durante la resolución de las actividades. Finalmente, en la última fila se encuentra la tarea 10 cuyo objetivo consiste en reconocer ideas y dificultades de conceptos trabajados en el desarrollo de las actividades del segundo bloque. Ver **Anexo C**

Tabla 5

Muestra del análisis de la tarea 6.

Tarea 6	a. Dibuja en el espacio en blanco el giro en una circunferencia de media vuelta de tu cuerpo. a. Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante, aunque no dibuja una circunferencia perfecta debido a la falta de compás, reconoce que su representación simboliza una circunferencia. Además, logra identificar puntos y propiedades clave del giro de media vuelta, como la ubicación del lado inicial y del lado final sobre la misma línea en direcciones opuestas. También asigna una flecha que indica tanto la dirección como la magnitud del giro, partiendo del lado inicial hasta el lado final. Conclusión del punto a. Los estudiantes dan uso de la circunferencia para graficar el giro de media vuelta, logra identificar puntos y propiedades claves acerca de este giro, tal es el caso de ubicación del lado inicial y el lado final sobre una misma línea en direcciones opuestas, además logra asignarle una flecha que indica la cantidad y dirección que parte del lado inicial y el lado final del giro realizado. Algunas dificultades que se presentaron fueron el no asignar el nombre de lado inicial y lado final a los lados, al estudiante E se le dificulto en un principio dibujar el giro de media vuelta de su cuerpo en el plano. Estas

	dificultades fueron tratadas en la retroalimentación que se hizo cuando llenaba la tabla sintetizadora. b. ¿Qué pasa con el lado inicial y el lado final cuando se realiza una media vuelta de tu cuerpo en una circunferencia? ● Respuesta de A,B,C,D,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra identificar y visualizar que, al realizar un giro de media vuelta, el lado inicial y el lado final se ubican sobre la misma línea, pero en direcciones opuestas.

Tabla 6

Muestra final de análisis final de la tarea 6.

Conclusión general de la actividad.	El estudiante logra representar gráficamente el giro de media vuelta, logra percibir de forma visual y práctica la ubicación del lado inicial y el lado final en una misma línea, pero en sentidos contrarios cuando se realiza tal giro. Por ende, se logra de forma consensuada asignar a este tipo de giro el nombre de “ángulo llano". Además, el estudiante logra clasificar conceptos y reconocer propiedades acerca del ángulo, como, por ejemplo: el estudiante logra graficar de dos formas la representación del giro, también, logra identificar y percibir la cantidad de vértices y lados del ángulo.

3.6.3 Análisis de los Resultados de prueba final

En el **Anexo D** se encuentra la prueba diagnóstica final, conformada por 14 preguntas que se presentan en la primera columna. Algunas de estas preguntas se encuentran agrupadas teniendo en cuenta las similitudes existentes entre ellas, en ocho

categorías, lo que permite su organización y análisis. En la segunda columna se describen los criterios teóricos que orientaron la elaboración de las preguntas y que, a su vez, posibilitan el análisis de los resultados. La tercera columna contiene los criterios específicos empleados en la actividad, junto con su propósito y el análisis de las respuestas a cada pregunta. En la cuarta columna se presentan las conclusiones generales derivadas del análisis expuesto en la columna tres. Finalmente, en la última fila se consignan las conclusiones generales de la prueba diagnóstica final, cuyo objetivo es reconocer las ideas y las dificultades relacionadas con los conceptos trabajados durante el desarrollo de las actividades correspondientes al segundo bloque.

Tabla 7

Muestra de la prueba final.

pregunta(s) prueba final	**Criterio**	**Criterio usado/Propósito/Análisis de respuesta de las preguntas**	**Conclusión general**
1	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. * La visualización puede comprenderse como un proceso mediante el cual los objetos, conceptos, fenómenos y procesos son llevados a una representación visual,	Criterio Usado: 1,2,3,4,5 Propósito: Indagar si el estudiante reconoce de forma gráfica propiedades básicas (lados, vértice) de un ángulo en una situación estática.	Los estudiantes en general reconocen e identifican en la gráfica los lados y el vértice del ángulo, por tanto, perciben de forma gráfica propiedades básicas de los ángulos a excepción de un estudiante que no

	así como la posibilidad de realizar el proceso contrario, es decir, pasar de la representación visual a aquello que esta representa. * Desde esta perspectiva, la visualización también se concibe como la relación o transferencia que se establece entre un dibujo**,** entendido como representación gráfica, y una figura**,** correspondiente a la imagen mental que el observador construye a partir de dicha representación.	1. En la siguiente imagen, indica y nombra el vértice y los lados del ángulo. respuesta de A, B, C, E, F, G y H Análisis de respuesta El estudiante reconoce los lados y el vértice del ángulo, por lo tanto, el estudiante percibe de forma gráfica propiedades básicas de los ángulos.	responde y, no hay información que nos permita analizar.

Capítulo 4

En este capítulo se presenta las conclusiones atendiendo a los objetivos presentados en el capítulo 1

Conclusiones

Teniendo en cuenta el objetivo específico 1, *"Documentar el proceso de construcción del concepto de ángulo en la enseñanza de la geometría para estudiantes de tercer grado de básica primaria"*, El proceso de documentación permitió confirmar que los estudiantes no llegan al aula "en blanco"; traen consigo un bagaje de saberes previos construidos en su cotidianidad y en el juego. Sin embargo, estos saberes suelen estar fragmentados en imágenes estáticas (como la "V" o la "L"). La implementación de las tareas demostró que, para que el niño de tercer grado asimile el ángulo, debe dejar de ser un espectador de figuras en el tablero para convertirse en el protagonista. El papel de las actividades iniciales (como el Tangram o el reloj) fue actuar como un puente que dio sentido a lo que ellos ya "veían" en su entorno, permitiéndoles validar sus propias experiencias y transitar de una percepción visual simple a una comprensión geométrica más robusta.

En relación con el objetivo específico 2, *"Identificar y analizar los conocimientos matemáticos subyacentes en la enseñanza de la geometría activa que facilitan la comprensión de los ángulos"*, Se concluye que la integración de movimientos propios del Karate Do fue el factor diferenciador en la comprensión de la noción de ángulo. Al ejecutar *katas* o posiciones de defensa, el estudiante dejó de ver el ángulo como una "figura muerta"

y empezó a comprenderlo como un giro y una dirección. En este escenario, el Karate funcionó como un laboratorio etnomatemático donde el cuerpo es el compás y el movimiento es la medida. Esta dinámica permitió que conceptos complejos como el ángulo llano o recto dejarán de ser analogías lingüísticas (como la "línea recta" o la letra "L") para convertirse en sensaciones físicas de apertura y rotación, otorgando un papel activo al estudiante en la creación de su propio conocimiento.

Asimismo, se cumplió de manera satisfactoria el objetivo específico 3, *"Diseñar y articular una secuencia didáctica que utilice la geometría activa para la enseñanza de la noción de ángulo"*. La secuencia didáctica no fue solo una lista de ejercicios, sino un diseño intencionado que generó sentido desde el primer momento. La articulación de la geometría activa permitió que el aprendizaje fuera significativo porque respetó la naturaleza exploratoria del niño. Se evidenció que cuando el estudiante "hace" (mueve su cuerpo, manipula el geoplano, gira en el Karate), la dificultad de la abstracción disminuye. El éxito de la secuencia radicó en que no impuso una definición técnica, sino que permitió que la definición surgiera de la experiencia vivida, cumpliendo así con las exigencias del MEN y los DBA desde una perspectiva humana y dinámica.

Finalmente, se concluye que la noción de ángulo en básica primaria debe enseñarse desde la acción sobre el espacio. Las actividades pensadas desde la etnomatemática y el deporte permitieron superar los obstáculos detectados en el diagnóstico (como la confusión entre ángulo y triángulo). El estudiante de tercer grado logra una comprensión profunda cuando puede relacionar la geometría con su vida cotidiana; así, el ángulo deja de ser un trazo en el papel para ser la forma en que su cuerpo se organiza y se mueve en el mundo. Aproximación centrada exclusivamente en definiciones formales.

Recomendaciones

Se recomienda que los docentes profundicen en las diversas concepciones del ángulo (estática y dinámica) para evitar sesgos en la enseñanza

Se recomienda que los docentes de básica primaria profundicen en la naturaleza conceptual del ángulo, reconociendo que no es solo una figura estática, sino un objeto que implica giro e inclinación. Esto permitirá tener una postura conceptual sólida que evite transmitir a los estudiantes imágenes estereotipadas.

Es fundamental que el diseño de las tareas escolares no tenga un fin puramente evaluativo, sino que funcione como una guía orientadora. Se recomienda el uso de referentes teóricos y metodológicos, como la Geometría Activa para modelar actividades que respondan a las necesidades reales de los estudiantes, evitando caer en la repetición de modelos tradicionales que no generan aprendizaje significativo.

Se sugiere a las instituciones educativas integrar la etnomatemática y el deporte como el Karate Do o juegos tradicionales en el currículo de matemáticas. Utilizar el cuerpo y las experiencias previas de los niños permite que los conceptos abstractos cobren sentido y se conviertan en herramientas para modelar problemas cotidianos.

Se recomienda priorizar el uso de materiales manipulativos como Tangram, Geoplano y la exploración del espacio físico antes de pasar al dibujo en papel, esto ayuda a superar los obstáculos de visualización detectados en este estudio, donde los niños confunden figuras 1D con 2D asimismo, ángulos con triángulos.

Referencias bibliográficas

Acevedo, I., Londoño, G; Ramírez, N. & Villa, J. (2008). *GeoGebra como soporte en el proceso de construcción del concepto de ángulo "un análisis desde el modelo de Van Hiele".* En Bonilla, Martha (Ed.), Memorias del 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (161-164). http://funes.uniandes.edu.co/11924/

Adeniji, S. y Baker, P. (2022). Instrucción con ejemplos resueltos versus fases de enseñanza de Van Hiele: una demostración de la comprensión procedimental y conceptual de los estudiantes. *Journal on Mathematics Education* . https://doi.org/10.22342/jme.v13i2.pp337-356 .

Audor, Y. (2016). *Visualización y razonamiento matemático. una situación de aprendizaje acerca de la relación de congruencia, implementada a través de un experimento de enseñanza en una escuela rural* [Tesis de pregrado]. Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/12953/3469-0525554.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Agujas del reloj - Euclides. (2021, 19 julio). Euclides. https://euclides.org/agujas-del-reloj/

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Conocimiento meta didáctico-matemático del profesorado: criterios para la reflexión y la evaluación de la práctica docente. *Revista Eurasia de educación en matemáticas, ciencias y tecnología*, 13, 1893-1918. https://doi.org/10.12973/EURASIA.2017.01207A .

Casas, L., & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 201-216.

Castro, J. (s. f.). *Ángulos*. Matemática, Informática y Educación. https://jcastrom.jimdofree.com/matematica/geometr%C3%ADa/%C3%A1ngulos/

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 37-52.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1984436

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas: cuatro entradas y una quinta. In *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Subdirección General de Información y Publicaciones.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos.

Duschl, R., Maeng, S., y Sezen, A. (2011). Progresiones de aprendizaje y secuencias de enseñanza: una revisión y análisis. Estudios en Educación en Ciencias , 47, 123 - 182. https://doi.org/10.1080/03057267.2011.604476 .

D' Ambrosio, U. (1988). Etnomatemáticas: Un Programa de Investigación en la Historia de las Ideas y en la Cognición. Boletín del grupo internacional de estudios sobre etnomatemática (ISGEm). 4 (1). Edición electrónica.

D' Ambrosio, U. (2013). Etnomatemáticas: Entre las tradiciones y la modernidad (2da ed.). Diaz de Santos. https://www.editdiazdesantos.com/wwwdat/pdf/9788499694573.pdf

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educate*, 14(2), 125–142.

García-Azkoaga, I., & Manterola, I. (2016). Las secuencias didácticas de lengua: una encrucijada entre teoría y metodología. Calidoscopio , 14, 46-58. https://doi.org/10.4013/CLD.2016.141.04 .

Geoplano - Google Search. (s. f.). https://www.google.com/search?q=geoplano&oq=geoplano0&aqs=chrome.1.69i57j0i13i433i512j0i13i512l8.5359j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Gómez, F. (2021). *Fortalecimiento del pensamientométrico, asociadoal DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales* [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/79989/1088289367.2021.pdf?sequence=2

Gómez, D. (2022a). *Fortalecer el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico en el concepto de ángulo desde la utilización de recursos didácticos y tecnológicos enfocados en situaciones cotidianas* [Tesis de pregrado]. Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD. https://repository.unad.edu.co/handle/10596/53311

Gómez, M. (2022b). *El laboratorio de MatemáTICas una propuesta para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en el grado tercero* [Tesis de maestría]. Universidad ICESI. https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/98836/1/T02487.pdf

Guerrero, F., Lurduy, O., & Sánchez, N. (2006). La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de las situaciones didácticas.

Gutiérrez, J. (2007). Módulo 4: Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia.

Gutiérrez, A. (2019). Etnomatemáticas al Aula: La Danza como medio en la relación Cultura y Escuela. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Jaramillo, C. (2022). Implementación de la metodología Clic en la enseñanza de las nociones de perímetro y área dentro del contexto de la Huerta escolar a través del inglés como lengua extranjera. Universidad del Valle.

Marmolejo, G., Álvarez, H. y Mosquera, E. (2016). *La Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria* (Vol. 1). (F. S. Children, Ed.) https://sired.udenar.edu.co/3528/1/INTRODUCCI%C3%93NALDESARROLLO%20DE

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Revolución Educativa Colombia aprende. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje - matemáticas*. https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Serie de lineamientos curriculares. Bogotá: Creamos alternativas.

Miranda, P. (2020). Alternativas para un mayor y mejor aprovechamiento de las posibilidades de comprensión y aprendizaje que tienen los estudiantes de preescolar respecto al conocimiento espacial. Universidad del Valle.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.

Lacera, G., Rangel, F., & Rodríguez, K. (2017). *El fortalecimiento del pensamiento métrico con el aprendizaje de perímetro y área a través de los recursos educativos abiertos (R.E.A),* [Tesis de Maestría]. Fundación Universitaria del Norte. http://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/7948/131387.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación matemática*, *32*(1), 38-66.

Osorio, L. (2011). *Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras,* [Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma de Manizales. https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/472

Origen del tangram - Google Search. (s. f.). https://www.google.com/search?q=origen+del+tangram&oq=&aqs=chrome.1.35i39i362l7j69i59i450.2915004j0j15&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Roa, M. A. G., Franco, F. A., & Garzón, D. (2006). *Didáctica de la geometría euclidiana: Conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacia*. Coop. Editorial Magisterio. https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=jkUUhKtRLHgC&oi=fnd&pg=PA5&dq=geometr%C3%ADa+euclidiana+conceptos+b%C3%A1sicos&ots=4tVHjL7wgB&sig=gg8yMB8Luvs7F1OfGn8ni3OO9cI#v=onepage&q=geometr%C3%ADa%20euclidiana%20conceptos%20b%C3%A1sicos&f=false

Rodríguez, V. (2014). La Formación Situada y Los Principios Pedagógicos de la Planificación: La Secuencia Didáctica. *Ra Ximhai* , 10 (5), 445-456. https://www.redalyc.org/pdf/461/46132134027.pdf

Rodríguez, D. (2021). *Incidencia del pensamiento espacial y visual en la enseñanza aprendizaje de la geometría en grado tercero* [Tesis de maestría]. Universidad Antonio Nariño. http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/6145

Rotaeche, A. (2008). La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria. Instituto Politécnico Nacional. Centro De Investigación En Ciencia Aplicada Y Tecnología Avanzada.

Sousa, C. (2010). El error de Euclides: geometrías no euclidianas presentes en la naturaleza y el arte, ausentes en las no superiores y superiores. Re*vista Internacional de Materias Transdisciplinarias en Educación*, 1, 242-247.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(2), 275-300.

Torres, A. (2015). *Teoría de la Gestalt: leyes y principios fundamentales*. Psicología y Mente. https://psicologiaymente.com/psicologia/teoria-gestalt

Torres, R., & Sanchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. *Contextos Educativos. Revista De Educación*, (32), 289–304. https://doi.org/10.18172/con.5149

Viedma, J. (1960). Lecciones de geometría intuitiva. Norma.

Vasco, C. (2011). La presencia de Piaget en la Educación colombiana, 1960-2010. *Revista Colombiana de Educación*, (60), 15-40. https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RCE/article/view/836/845

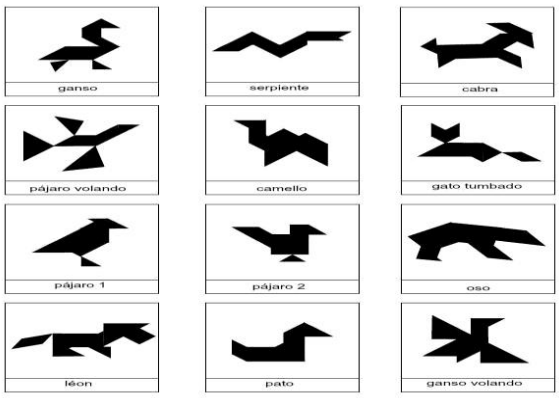
Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (2), 1–8. https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/download/5706/4717

Anexos

Anexo A

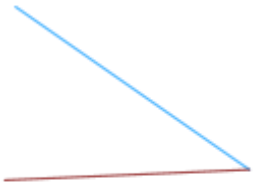
Prueba Diagnóstica.

1. Con ayuda del tangram armar la figura del ganso:



1.1 Ubica el borde del pico del ganso, proyectarlo en el geoplano con los dos resortes, dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco.

Figura pico del ganso



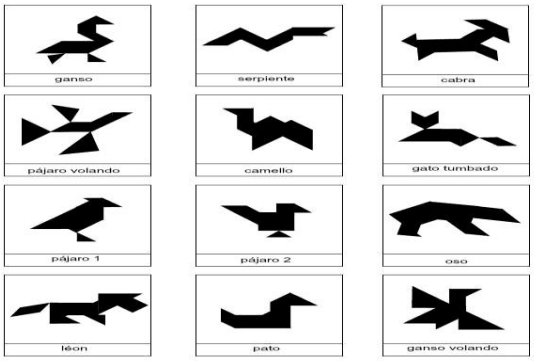
1.2 De acuerdo a la figura (pico de ganso), responder lo siguiente

¿Qué crees que puede representar la figura del pico del ganso en matemáticas?

a) un número b) un ángulo c) una letra d) otro, (dar ejemplo)

2. Con ayuda del tangram armar la figura de la serpiente

Figura



2.1. Ubica el borde inferior de la panza de la serpiente, proyectarlo en el geoplano, dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco.

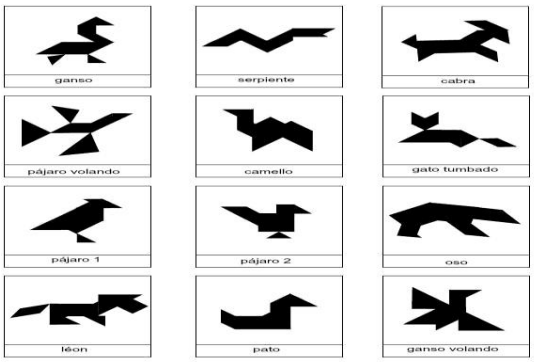
Los estudiantes responden: figura del borde inferior de la panza de la serpiente

2.2 De acuerdo a la figura (borde inferior de la serpiente), responder lo siguiente:

¿Qué crees que puede representar esta figura en matemáticas?

b. un número b) un ángulo c) una letra d) otro, (dar ejemplo)

3. Con ayuda del tangram armar la figura de la cabra



3.1 Ubica el borde superior del torso y el cuello de la cabra, proyectarlo en el geoplano, dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco.

Borde superior del torso de la cabra

3.2 De acuerdo a la figura (borde superior de la cabra), responde lo siguiente:

¿Qué crees que puede representar esta figura en matemáticas?

a) un número b) un ángulo c) una letra d) otro (dar ejemplo)

En cuarto momento, busca poder asociar el giro en relación a las aberturas de forma manipulativa en los estudiantes el cual puede formar distintos ángulos, también de forma consensuada con los alumnos se pretende ponerse de acuerdo del giro hacia la derecha e izquierda en las manecillas del reloj (derecha en relación al giro en sentido de la manecilla del reloj, giro izquierdo en contra a las manecillas del reloj). Siguiendo esta idea, mediante la formación de distintos ángulos se pretende conocer si el estudiante identifica los distintos tipos de ángulos, entre los más comunes ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo).**

A continuación, cada reloj contiene dos manecillas que parten desde el centro en un punto fijo llamado vértice, el cual, pueden girar hacia la izquierda o hacia la derecha.



4. Si una manecilla se deja en sentido de las 12 y otra se gira en dirección de las 3, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

---

5. Si una manecilla se deja en sentido de las 12 y otra se gira en dirección de las 6, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

---

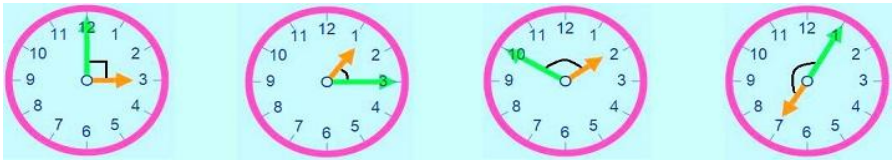
6. Si una manecilla se gira hacia las 10 y otra se gira hacia las 3, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

---

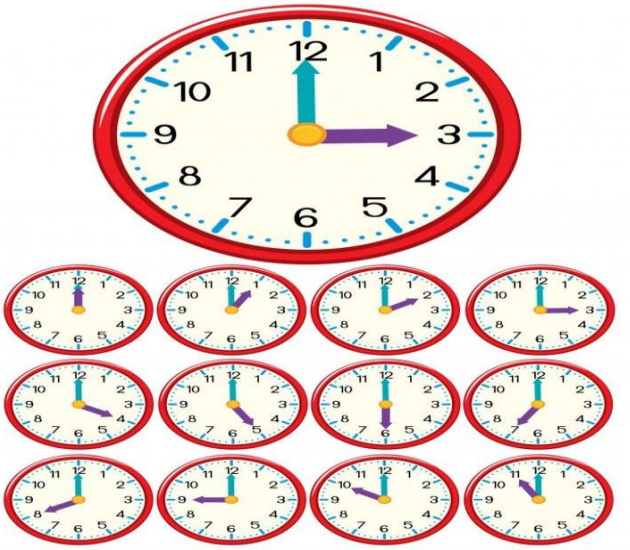
7. Si una manecilla se gira hacia las 10 y otra se gira hacia la 1, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

El punto seis es un complemento del punto 5.

8. En la imagen 12, en la parte superior de cada reloj nombra el ángulo que forma la abertura entre las manecillas del reloj.



9. A continuación se muestra la imagen de un mismo reloj que ha sido girada una de sus manecillas hacia la derecha formando distintas aberturas, de esta manera, el estudiante debe nombrar en la parte posterior de cada reloj el ángulo que corresponda a tal abertura, así poder darnos cuenta de las ideas de tienen los estudiantes de los distintos ángulos con distintas aberturas.

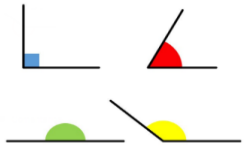


9. Indica el nombre de cada ángulo y señala con una flecha el vértice.

Este punto busca conocer si el estudiante reconoce los distintos ángulos como también si reconoce las características como son sus dos lados y vértice.

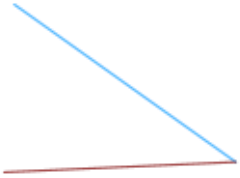
El punto 9 es un complemento del punto 8.

10. Indica el nombre de cada ángulo y señala con un círculo el vértice.



Este punto busca reconocer, si el estudiante identifica gráficamente distintos ángulos

11. En la siguiente imagen, indica con un círculo el vértice y los lados del ángulo



En los siguientes puntos trata de precisar nociones acerca del ángulo por parte de los estudiantes.

12. ¿Cuántos lados tiene un ángulo?

-

13. ¿Cuántos vértices tiene un ángulo?

-

14. ¿Qué es un ángulo?

Anexo B

Respuestas de los estudiantes a la prueba diagnóstica y su análisis.

preguntas	Criterio	Criterio usado/Propósito/Análisis de respuesta de las preguntas	Conclusión general
1,2,3	*Criterio 1:*Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Se entiende por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones hacia algún tipo de representación visual y, a la vez, el proceso inverso. *visualización se entiende como el proceso de transferencia que se da entre un dibujo (la representación gráfica) y una figura (la imagen mental que construye el observador) *En palabras de Duval (1998), un dibujo permite visualizar una o	Criterios Usados:1,2,3,4,5,8,9, 10. Propósito: Se utiliza el juego del tangram para que el estudiante interactúe de manera manipulativa y visual con figuras geométricas en el espacio. Una vez armada la figura, se busca que relacione sus bordes —esquinas, inclinaciones y otros rasgos— con las aberturas de los ángulos. Complementariamente, mediante el uso del geoplano, se pretende que el estudiante clasifique visual y manualmente distintos tipos de ángulos e identifique sus características fundamentales, como el vértice, (punto común	Se puede apreciar la imagen estandarizada del ángulo, la cual debe presentarse al estudiante como un ángulo agudo con una abertura y orientación específicas. Cuando se les muestran figuras con otros tipos de ángulos, con diferentes aberturas u orientaciones, los estudiantes tienden a relacionarlas con sus conocimientos previos, especialmente

	varias figuras: 1D/2D, es decir, elementos unidimensionales representados en un plano bidimensional; 2D/2D, como líneas rectas o curvas que conforman fronteras cerradas —por ejemplo, las de un triángulo o un cuadrilátero—; o 3D/2D, como las representaciones planas de objetos tridimensionales, tales como cubos o esferas. *Identificación de figuras como estrategia para representar objetos reales u objetos matemáticos: aprehensión perceptual, aprehensión discursiva (anclaje visual al anclaje discursivo, anclaje discursivo al anclaje visual) y aprehensión operatoria (aprehensión operatoria de cambio figural, aprehensión operatoria de reconfiguración). *Criterio 2:* Pachuca Herrera, Y., & Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida	entre dos lados), y la formación del ángulo a partir de la inclinación de los mismos. A través de la proyección realizada en el geoplano y su posterior dibujo, se analiza el nivel de familiaridad del estudiante con la percepción de un ángulo. Cada figura incluye un tipo de ángulo (agudo, recto, obtuso), lo que permite determinar si el estudiante reconoce estas formas como ángulos o si, por el contrario, las percibe como imágenes sin significado geométrico. 1. Con ayuda del tangram arma la figura del ganso: R/a 1.1 Ubica el borde del pico del ganso, proyéctalo en el geoplano con ayuda de los resortes y dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco	mediante el uso de letras.

	en estudiantes que inician la educación superior. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina *lado inicial* y OP se denomina *lado terminal* del ángulo. *Según la definición de ángulo que emplee el estudiante, puede resultar difícil visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360°. Al no percibir dos lados que forman una abertura y que se unan en un vértice, los estudiantes tienden a no reconocer la existencia del ángulo. En estas representaciones, suelen interpretar la figura únicamente como una línea, sin atribuirle ninguna función adicional.	---------- ---------- figura pico de ganso Respuesta de figura geoplano 1.2 De acuerdo a la figura (pico de ganso), responde lo siguiente ¿Qué crees que puede representar la figura del pico del ganso en matemáticas? a. un número b) un ángulo c) una letra d) otro, (dar un ejemplo) Respuesta de A, B, C, D, F, G. *Análisis de respuesta.* Al realizar rotaciones del tangram A y D, concluyen que la figura representa un ángulo, ya que este concepto había sido trabajado previamente con su profesora. Esto evidencia las imágenes evocadas y estandarizadas según	

	*Las imágenes mentales que evocan no responden a una definición única del concepto de ángulo: cada estudiante activa su propia representación según el problema al que se enfrenta. Por ello, no existe una imagen uniforme del concepto. *La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan dos rayos, con un rayo horizontal. Criterio 3*:* Torres, R., & Sánchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. *Cuatro tipos de significados del objeto matemático de ángulo: Cualitativa estático, Cualitativo Dinámico, Cuantitativo Estático, Cuantitativo Dinámico.	los conocimientos previos de los estudiantes. En este caso, ellos adaptan la figura y logran reconocer una similitud con el ángulo agudo. De esta manera, se observa cómo los estudiantes identifican y estandarizan la imagen del ángulo, asociándose con el ángulo agudo y orientándola hacia el lado derecho. tangram rotado por los estudiantes Respuesta de E y H. No responden. Cuando se les pregunta el porqué, mencionan que no saben qué responder, que lo único es que se parece una V acostada. *Análisis de respuesta.* Se observa que, al presentar el ángulo agudo en una orientación diferente, E y H no lo reconocen como un ángulo y lo asocian con elementos más cercanos a sus	

	*Las dificultades asociadas a considerar un ángulo como un par de rayos con un punto en común y un sentido estático incluyen la exclusión de ciertos valores de medida. Entre estas se encuentran la imposibilidad de admitir ángulos de 0°, 180° y 360°, así como también ángulos negativos o aquellos cuya medida supera los 360°. *Se sugiere incorporar aplicaciones prácticas que ejemplifican los diferentes significados del ángulo, complementándose con situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, entre otras. Criterio *4.* Casas, L., & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Casas (2005, p. 202) el aprendizaje del ángulo se basa en que los alumnos integren distintas experiencias	conocimientos previos; en este caso, lo relacionan con la letra V. 2. Con ayuda del tangram armar la figura de la serpiente R/a 2.1. Ubica el borde inferior de la panza de la serpiente, proyectarlo en el geoplano y dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco. ---------- Borde inferior de la panza de serpiente Respuesta de A,B,C,D,E,F,G,H. figura geoplano dibujo en hoja 2.2 De acuerdo a la figura (borde inferior de la serpiente), responde lo siguiente	

	educativas, como también, deben integrar distintas definiciones, de tal forma que el estudiante debe darse cuenta de que no es posible expresar ese concepto en palabras, pero si pueden notar la implicación de dos líneas unidas en un punto y alguna relación entre ellas. Estas relaciones pueden ser expresadas de forma diferente acorde a la circunstancia que lo requiera, por ejemplo, una cantidad de giro, la inclinación de dos rayos, o lo puntiagudo de una región angular. *Definiciones al mismo concepto de ángulo: ángulo como región del espacio, ángulo como par de rayos o como par de semirrectas, ángulo como cantidad de giro. * Concepción Estática de Ángulo, Concepción Dinámica de Ángulo, Conceptos Mixtos *Criterio 5:* "Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas,	¿Qué crees que puede representar esta figura en matemáticas? a. un número b) un ángulo c) una letra d) otro, dar un ejemplo Respuesta de A,B,C,D,E,F,G,H. *Análisis de respuesta.* Las respuestas de los estudiantes B, C, E, F, G y H indican que identifican directamente la figura como la letra V. Aunque los estudiantes A y D aplican el mismo mecanismo de rotación del tangram, no logran reconocer la figura como un ángulo. Según sus propias palabras, consideran que "la figura es más abierta que el ángulo agudo" y que, por ello, "se parece más a una letra V". Esta percepción pone de manifiesto la influencia que ejercen en ellos las representaciones estandarizadas del ángulo agudo. En consecuencia, se evidencia que, al	

	inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas" (MEN, 2016; p.82). Criterio 6*:* "Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: "Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas" (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8: El pensamiento métrico se relaciona "Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como	presentar el ángulo agudo con una orientación o abertura diferente a la habitual, los estudiantes no lo identifican como tal y tienden a asociarlo con formas más próximas a sus conocimientos previos; en este caso, con la letra V. 3. Con ayuda del tangram arma la figura de la cabra 3.1 Ubica el borde superior del torso y el cuello de la cabra, proyéctalos en el geoplano y dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco. --- Borde superior del torso de la cabra Respuesta de R/a	

	con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos contextos" (MEN, 2006; p.63). *Criterio 9*. Gómez, F. (2021). *Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales* [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico:	figura geoplano Figura en hoja 3.2 De acuerdo a la figura (borde superior de la cabra), responde: ¿Qué crees que puede representar esta figura en matemáticas? a) un número b) un ángulo c) una letra d) otro (dar ejemplo) Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. *Análisis de respuesta.* Se evidencia que cuando el ángulo se presenta con una orientación o una abertura distinta a la habitual del ángulo agudo, los estudiantes no lo reconocen como un ángulo. En su lugar, tienden a asociarlo con figuras más cercanas a sus conocimientos previos, como la letra "V" o "L".	
4,5,6,7	· La construcción de los conceptos de cada magnitud	Criterios Usados: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	Se observa que los

	· La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes · La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto · La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos · La diferencia entre la unidad y el patrón de medición · La asignación numérica · El papel del trasfondo social de la medición procesos tomados de la medición *Criterio 10*: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. *Criterio 11:* "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	Propósito: Se busca que los estudiantes asocien de manera manipulativa el giro con la apertura de los ángulos, comprendiendo que diferentes giros generan distintos tipos de ángulos. De forma consensuada, se acuerdan las direcciones de giro: hacia la derecha, en el sentido de las manecillas del reloj, y hacia la izquierda, en sentido contrario. A partir de la formación de diversos ángulos, se pretende evaluar si el estudiante reconoce los tipos más comunes: agudo, obtuso, recto, llano y cóncavo. A continuación, cada reloj contiene dos manecillas que parten desde el centro en un punto fijo llamado vértice, el cual, pueden girar hacia la izquierda o hacia la derecha. Figura 11 4. Si una manecilla se deja en sentido de las 12 y otra se gira en	estudiantes no logran identificar correctamente las figuras correspondientes a los distintos ángulos formados por las manecillas del reloj. En lugar de ello, tienden a asociarlo con conceptos más próximos a sus conocimientos previos, relacionando la forma de las aberturas con letras como V, L o I, según la amplitud o la posición de las manecillas. Además, algunos, especialmente el estudiante D, establecen vínculos con el lenguaje. En este caso, al visualizar las manecillas

		dirección de las 3, ¿qué tipo de ángulo (agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo) forma la abertura entre las manecillas del reloj? ---------- ---------- Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Análisis de respuesta A, B, C, D, E, F, G, H. Se observa que los estudiantes no reconocen la figura formada por las manecillas del reloj como un ángulo recto; en su lugar, tienden a asociarla con formas más cercanas a sus conocimientos previos, como la letra L. 5. Si una manecilla se deja en sentido de las 12 y otra se gira en dirección de las 6, ¿qué tipo de ángulo (agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo) forma la	coincidiendo en una misma línea recta, el estudiante la asocia con una “línea recta” y, por analogía lingüística, la denomina “recto”, sin reconocer que dicho término no corresponde al ángulo recto, sino al ángulo llano.	

		abertura entre las manecillas del reloj? ---------- ---------- Respuesta de A, B, C, E, F, G, H. Análisis de respuesta A, B, C, E, F, G, H. Se observa que los estudiantes no reconocen la figura formada por las manecillas del reloj como un ángulo llano; en su lugar, tienden a asociarla con formas más cercanas a sus conocimientos previos, como la letra i. Respuesta de D. Análisis de respuesta de D Se observa que los estudiantes no identifican la figura formada por las manecillas del reloj como un ángulo llano.		

		En su lugar, tienden a asociarla con conceptos más cercanos a sus conocimientos previos, especialmente del ámbito del lenguaje. En este caso, al visualizar las manecillas coincidiendo en una misma línea recta, el estudiante la relaciona con una “línea recta” y, por analogía lingüística, la denomina “recto”, sin reconocer que este término no corresponde al ángulo recto, sino al ángulo llano. 6. Si una manecilla se gira hacia las 10 y otra se gira hacia las 3, ¿qué tipo de ángulo (agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo) forma la abertura entre las manecillas del reloj? ---------- ---------- Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Análisis de respuesta de		

		Se observa que los estudiantes no reconocen la figura formada por las manecillas del reloj como un ángulo obtuso; en su lugar, tienden a asociarla con formas más cercanas a sus conocimientos previos, como la letra V. Respuesta de Análisis de respuesta de El estudiante comenta que eligió su respuesta únicamente por descarte, es decir, la seleccionó al azar. Respuesta de Análisis de respuesta de Se observa que los estudiantes no reconocen la figura formada por las manecillas del reloj como un ángulo obtuso; en su lugar, tienden a asociarla con formas más cercanas a sus conocimientos previos, como la letra I.		

		7. Si una manecilla se gira hacia las 10 y otra se gira hacia la 1, ¿qué tipo de ángulo (agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo) forma la abertura entre las manecillas del reloj? ---------- ---------- Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Análisis de respuesta Se observa que los estudiantes no reconocen la figura formada por las manecillas del reloj como un ángulo agudo; en su lugar, tienden a asociarla con formas más cercanas a sus conocimientos previos, como la letra V.	
8		Criterio Usado: 1,2,3,4,5,6,8 Propósito: A partir de las distintas figuras de diversos ángulos, se pretende evaluar si el	Se observa que los estudiantes no logran reconocer los diferentes ángulos

		estudiante reconoce los tipos más comunes: recto, agudo, obtuso, llano. 8. En la imagen 12, en la parte superior de cada reloj nombra el ángulo que forma la abertura entre las manecillas del reloj. Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Análisis de respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Se observa que los estudiantes no logran reconocer los diferentes ángulos presentes en las figuras mostradas; en su lugar, tienden a asociarlos con formas que les resultan más familiares según sus conocimientos previos, como las letras V, L o l.	presentes en las figuras mostradas; en su lugar, tienden a asociarlos con formas que les resultan más familiares según sus conocimientos previos, como las letras V, L o l.
9		Criterios Usados: 1,2,4,5,8 Propósito: A partir de diversas figuras con	Se observa que los estudiantes presentan dificultades

		ángulos de distintas aberturas, se busca identificar el conocimiento o las nociones que los estudiantes tienen sobre los diferentes tipos de ángulos y, según sus características, determinar si son capaces de clasificarlos por nombre (agudo, obtuso, recto, llano y cóncavo). 9. A continuación se muestra la imagen de un mismo reloj en el que algunas manecillas han sido giradas hacia la derecha formando distintas aberturas, de esta manera, nombra en la parte posterior de cada reloj el ángulo que corresponda a tal abertura. Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Análisis de respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Se observa que los estudiantes no logran	para reconocer los distintos tipos de ángulos en las figuras mostradas. En lugar de identificarlos correctamente, los asocian con formas familiares según sus conocimientos previos, como las letras V, L o l. Además, mantienen una imagen estandarizada del ángulo como siempre agudo, con una abertura cerrada y específica. Al visualizar un ángulo llano, por ejemplo, cuando las manecillas del reloj forman una línea recta, los estudiantes suelen denominarlo “recto”,

		reconocer los diferentes ángulos presentes en las figuras mostradas; en su lugar, tienden a asociarlos con formas que les resultan más familiares según sus conocimientos previos, como las letras V, L o l. Respuesta de D. El estudiante presenta la imagen estandarizada del ángulo como agudo, también, al visualizar al ángulo llano en que las manecillas del reloj coinciden en una misma línea recta, el estudiante la relaciona con una “línea recta” y, por analogía lingüística, la denomina “recto”, sin reconocer que este término no corresponde al ángulo recto, sino al ángulo llano. Respuesta de A El estudiante comenta que eligió su respuesta únicamente por descarte, es decir, de manera aleatoria. Además, señala que denomina al ángulo	confundiendo el término por analogía lingüística, sin reconocer que en realidad se trata de un ángulo llano. Asimismo, surge un nuevo término utilizado por algunos para referirse al ángulo obtuso: lo llaman “abierto”, ya que perciben que sus lados forman un “pico abierto”. Esta denominación evidencia que los estudiantes identifican características visuales del ángulo, pero las nombran a partir de analogías perceptivas en lugar de conceptos

		obtuso como “abierto”, ya que percibe que su forma se asemeja a un pico abierto. Explica que, al ver las manecillas formando esa figura, considera que sus lados están “abiertos”, de ahí que lo relacione con el nombre “abierto”.	geométricos formales.
10		Criterio Usado: 1,2,3,4,5,8 Propósito: Verificar si el estudiante reconoce los distintos tipos de ángulos y si identifica correctamente sus propiedades, incluyendo sus dos lados y el vértice. 10. Indica el nombre de cada ángulo y señala con un círculo el vértice. Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Análisis de respuesta de A El estudiante manifiesta no saber qué nombre	Los estudiantes presentan vacíos conceptuales respecto a las figuras geométricas, especialmente en la identificación de vértices y tipos de ángulos. En lugar de reconocer correctamente los ángulos, los asocian con formas familiares (como las letras V, L o I), lo que refleja una comprensión basada en la

		asignar a las figuras ni qué es un vértice, lo que evidencia vacíos en sus conocimientos. Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H. Se observa que los estudiantes presentan dificultades para reconocer los diferentes tipos de ángulos en las figuras mostradas. En lugar de identificarlos correctamente, tienden a asociarlos con formas que les resultan más familiares según sus conocimientos previos, como las letras V, L o I. En el caso particular de D, se evidencia una novedad en este ejercicio: no logra identificar el ángulo agudo, a pesar de ser muy similar al de ejercicios anteriores. La diferencia radica en que, en esta ocasión, el ángulo aparece representado mediante una porción sombreada	apariencia más que en las propiedades geométricas. En el caso del estudiante D, se evidencia dificultad para reconocer un ángulo agudo cuando este se representa de manera distinta a la habitual (con una porción sombreada de circunferencia), lo que indica una comprensión dependiente de imágenes estandarizadas . Asimismo, los estudiantes E y F muestran confusión al representar los ángulos de un triángulo en la figura de un ángulo agudo, dibujando círculos en las

		de circunferencia que indica su abertura. Cuando se le pregunta por la figura correspondiente al ángulo agudo, D no la reconoce, lo que sugiere que percibe este tipo de ángulo únicamente a través de una imagen estandarizada, es decir, aquella en la que se observan dos lados que forman una abertura típica y sin elementos adicionales. Respuesta de Análisis de respuesta Se observa que los estudiantes presentan dificultades para reconocer los diferentes tipos de ángulos en las figuras mostradas, así como para identificar y ubicar el vértice. Además, los estudiantes E y F muestran un caso particular con el ángulo agudo: en las puntas de los lados asignan círculos para representar los ángulos, argumentando que, al tratarse de un triángulo, este debe tener tres	puntas de las rectas del ángulo bajo la idea de que “un triángulo tiene tres ángulos”, lo que revela una mezcla entre conocimientos previos y creación de propiedades inexistentes en el ejercicio. En general, los estudiantes pasan de una comprensión unidimensional (basada en formas simples y conocidas) a una bidimensional (figuras geométricas complejas), mediante transformaciones o reinterpretaciones personales. Sin embargo, su atención se

		ángulos. Esta respuesta evidencia una mezcla de conocimientos, en la que los estudiantes elaboran características a partir de la creación de propiedades de las figuras que no están presentes en el ejercicio. De esta forma, se evidencia que, al relacionar los conocimientos previos con los ejercicios presentados, el estudiante pasa de una comprensión gestáltica en una dimensión (1D) a una representación bidimensional (2D). Esto ocurre a través de transformaciones o la creación de nuevas propiedades: en este caso, los estudiantes asimilan la figura de un triángulo con un ángulo agudo y le atribuyen características que les permiten trabajar en dos dimensiones, es decir, con triángulos y sus respectivos ángulos. Así, para ellos, más que reconocer las propiedades y características de los	centra más en las características del triángulo que en las propiedades de los ángulos en sí.	

		ángulos, lo que hacen es identificar ciertas características del triángulo.	
11, 12, 13, 14		Criterio Usado: 1,2,3,4,5,8 Propósito: Se busca determinar si el estudiante reconoce los distintos tipos de ángulos y si identifica sus características fundamentales, como los dos lados y el vértice. Además, se pretende detectar si los estudiantes pueden expresar o precisar sus propias nociones sobre lo que significa un ángulo. 11. En la siguiente imagen, indica con un círculo el vértice y con una flecha indica los lados del ángulo 12. ¿Cuántos lados tiene un ángulo? ----------	Se denota gran confusión de los estudiantes al asemejar la figura de un ángulo agudo a la del triángulo a tal punto de atribuirle propiedades de los triángulos al ángulo agudo, como es el de añadirle un lado, los ángulos internos, mediante transformaciones perceptivas de tipo gestalt, que va de lo unidimensional (1D) a lo bidimensional (2D). evidenciando

		13. ¿Cuántos vértices tiene un ángulo? ---------- Respuesta de B, E, F. Análisis de respuesta Aunque los estudiantes no señalan gráficamente los lados, sí responden que la figura tiene tres. Ellos justifican su respuesta aludiendo a las "puntas" de la gráfica: las dos correspondientes a los extremos laterales y la del vértice. Además, asocian la figura con un triángulo, lo que evidencia una marcada confusión entre las propiedades conceptuales de los lados, los ángulos y las figuras triangulares. Esta confusión refleja una mezcla conceptual entre términos que, en teoría, son distintos. Así, podemos observar cómo los estudiantes, al intentar resolver los ejercicios, recurren a ideas vagas	de esta forma un conocimiento limitado de los conceptos de vértice y ángulo, así como una comprensión imprecisa de la estructura de un triángulo.

		provenientes de sus conocimientos previos para establecer relaciones creativas. Estas relaciones les permiten vincular propiedades del ángulo agudo con las del triángulo, realizando una transformación perceptiva de tipo *gestalt*, que va de lo unidimensional (1D) a lo bidimensional (2D). Además, se evidencia el nulo conocimiento de lo que es un vértice, ya que mencionan que no tienen idea de lo que es. Respuesta de A, C, y D. Los estudiantes presentan una confusión similar a la observada en el grupo anterior; sin embargo, en este caso, manifiestan dificultades para distinguir entre los vértices y los triángulos. Como resultado, tienden a atribuir a los vértices propiedades que corresponden a los triángulos y a representar en el ángulo agudo los ángulos que pertenecen al triángulo.	

		Esto evidencia un conocimiento limitado de los conceptos de vértice y ángulo, así como una comprensión imprecisa de la estructura de un triángulo. Respuesta de G, H. Los estudiantes presentan una confusión similar a la observada en los estudiantes B, E, F. 14. ¿Qué es un ángulo? --- Respuesta de D El estudiante explica que su respuesta se debe a que los ángulos se encuentran en las esquinas del triángulo. Esta justificación evidencia que posee ciertas nociones sobre las propiedades de los triángulos, aunque muestra una comprensión limitada del concepto de ángulo. Respuesta de A	

		El estudiante presenta confusión de ideas de lados y ángulos, evidenciando el poco conocimiento de esta. Respuesta de E Esta respuesta parece estar influenciada por el ejercicio del reloj, en el que se menciona que el ángulo corresponde a la abertura entre las manecillas. Esto evidencia un leve acercamiento a la noción de ángulo a causa de los ejercicios presentados. Respuesta de B, C, F, G y H Esta respuesta evidencia el poco conocimiento acerca de este concepto.	

CONCLUSIÓN GENERAL

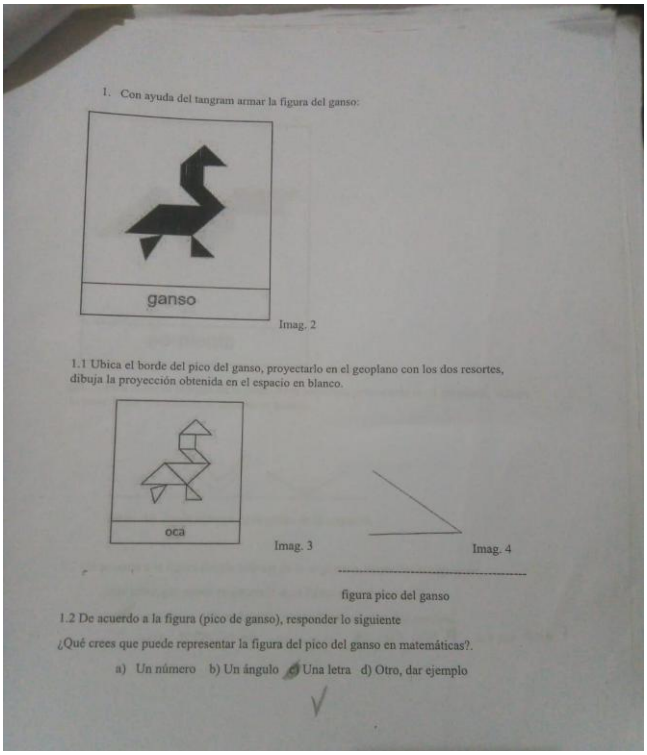
Los estudiantes tienden a reconocer únicamente la imagen estandarizada del ángulo agudo —con una abertura y orientación específicas— y muestran dificultades cuando se les presentan ángulos con formas, aberturas u orientaciones distintas. En estos casos, suelen asociarlos con figuras familiares, especialmente letras como V, L o I, lo que evidencia una comprensión basada en la apariencia y no en las propiedades geométricas.

También se observan influencias del lenguaje en sus respuestas. Por ejemplo, al ver las manecillas del reloj alineadas en una recta, algunos estudiantes denominan el

ángulo como “recto” por analogía con “línea recta”, sin reconocer que se trata de un ángulo llano. Del mismo modo, algunos llaman al ángulo obtuso “abierto”, guiándose por rasgos visuales antes que por conceptos formales.

Estas respuestas revelan vacíos conceptuales en la identificación del vértice y en el reconocimiento de los distintos tipos de ángulos. Este desconocimiento se evidencia también en estudiantes como E y F, quienes al representar un ángulo agudo incorporan elementos propios de un triángulo —como añadir un lado o marcar tres ángulos— bajo la idea de que “todo triángulo tiene tres ángulos”. Esta confusión muestra una mezcla entre conocimientos previos y atribución de propiedades inexistentes, pasando de formas simples (1D) a figuras complejas (2D) mediante transformaciones perceptivas personales.

En conjunto, estas interpretaciones reflejan una comprensión limitada del concepto de ángulo y una identificación imprecisa de sus elementos fundamentales.


1. Con ayuda del tangram armar la figura del ganso:

ganso

Imag. 2

1.1 Ubica el borde del pico del ganso, proyectarlo en el geoplano con los dos resortes, dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco.

oca

Imag. 3

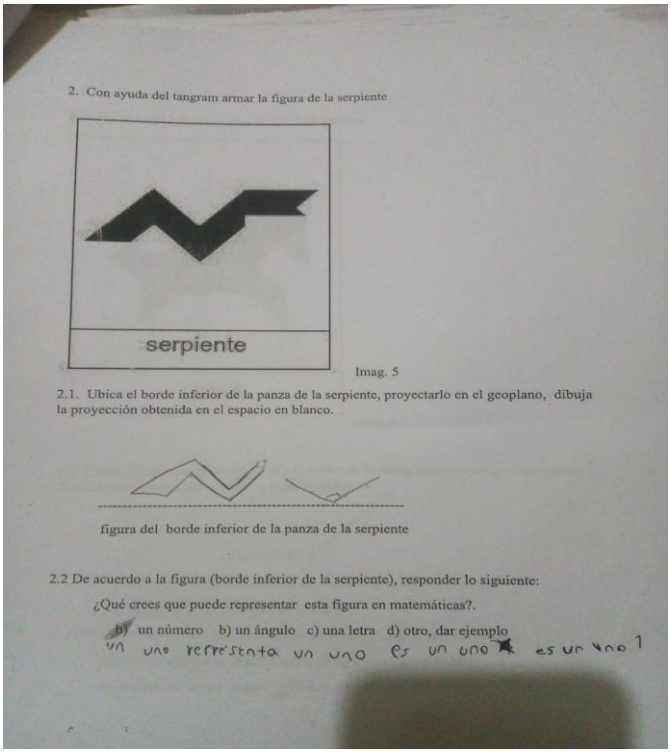
Imag. 4

figura pico del ganso

1.2 De acuerdo a la figura (pico de ganso), responder lo siguiente

¿Qué crees que puede representar la figura del pico del ganso en matemáticas?.

a) Un número b) Un ángulo c) Una letra d) Otro, dar ejemplo


2. Con ayuda del tangram armar la figura de la serpiente

serpiente

Imag. 5

2.1. Ubica el borde inferior de la panza de la serpiente, proyectarlo en el geoplano, dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco.

figura del borde inferior de la panza de la serpiente

2.2 De acuerdo a la figura (borde inferior de la serpiente), responder lo siguiente:

¿Qué crees que puede representar esta figura en matemáticas?.

a) un número b) un ángulo c) una letra d) otro, dar ejemplo

Quinto momento. A continuación cada reloj contiene dos manecillas que parten desde el centro en un punto fijo llamado vértice, el cual, pueden girar hacia la izquierda o hacia la derecha.



Imag. 11

5. Si una manecilla se deja en sentido de las 12 y otra se gira en dirección de las 3, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

una l

5.1. Si una manecilla se deja en sentido de las 12 y otra se gira en dirección de las 6, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

un l

5.2. Si una manecilla se gira hacia las 10 y otra se gira hacia las 3, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

se parese una V

5.3. Si una manecilla se gira hacia las 10 y otra se gira hacia la 1, ¿qué tipo de ángulo **(agudo, obtuso, recto, llano, cóncavo)** forma la abertura entre las manecillas del reloj?

se parese una V

Tabla 1.

Figura 1. lados que unen la base del piso de la casa	Figura 2. lados de la abertura entre las orejas del gato	Figura 3. lados de la abertura entre el torso y el ala del ave	Figura 4. lados del borde inferior de la cara del conejo

De acuerdo a las figuras obtenidas en la **tabla 1**, responder.

1. ¿Cuál de las figuras realizadas representa un ángulo?
   nose
   a) figura 1 b) figura 2 , 3 y 4 c) figura 3 y 1 d) todas las anteriores

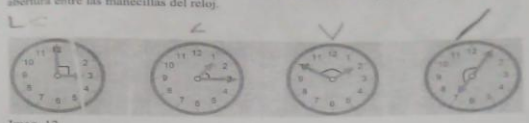
2. ¿Cuál de las figuras realizadas representa un ángulo agudo?
   nose
   a) figura 1 y 4 b) figura 2 y 3 c) figura 1 y 2 d) todas las anteriores

3. ¿Cuál de las figuras realizadas representa un ángulo llano?
   nose
   a) figura 1 b) figura 1,3 y 4 c) 1 y 2 d) todas las anteriores

4. ¿Cuál de las figuras realizadas representa un ángulo recto?
   nose
   a) figura 1 y 4 b) figura 4 c) 1 y 2 d) todas las anteriores

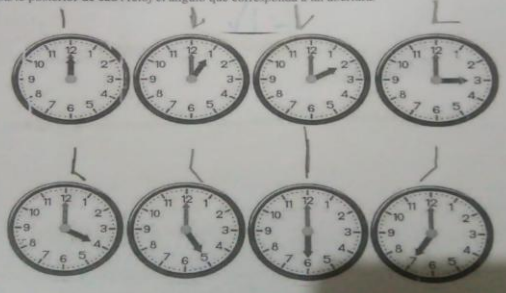
6. En la imagen 12, en la parte superior de cada reloj nombra el ángulo que forma la abertura entre las manecillas del reloj.

L ∠ V L

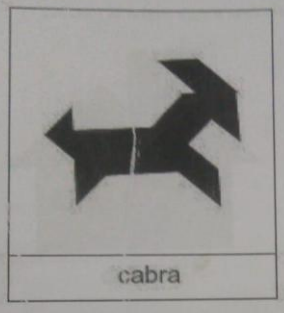


Imag. 12

7. A continuación se muestra la imagen de un mismo reloj que ha sido girada una de sus manecillas hacia la derecha formando distintas aberturas, de esta manera, nombra en la parte posterior de cada reloj el ángulo que corresponda a tal abertura.

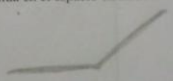


3. Con ayuda del tangram armar la figura de la cabra



Imag. 6

3.1 Ubica el borde superior del torso y el cuello de la cabra, proyectarlo en el geoplano, dibuja la proyección obtenida en el espacio en blanco.



Borde superior del torso de la cabra

3.2 De acuerdo a la figura (borde superior de la cabra), responde lo siguiente:

¿Qué crees que puede representar esta figura en matemáticas?

a) un número b) un ángulo c) una letra d) otro, dar ejemplo

V

Anexo C

Análisis de la implementación de la secuencia didáctica.

Actividad / Propósito	**Criterio teórico**	**Objetivo de tarea, tarea y análisis descriptivo de los resultados de las tareas desarrolladas por los estudiantes**
Juego El Caminito. Propósito: Reforzar los conceptos previos esenciales para la construcción de la noción de ángulo, tales como la lateralidad; la identificación del centro de una figura o espacio; la noción de distancia (cerca y lejos); y las ideas de giro y rotación.	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. * Se entiende por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones hacia algún tipo de representación visual y, a la vez, el proceso inverso. Es decir, implica la capacidad de convertir ideas —tanto concretas como abstractas— en imágenes, diagramas, gráficos u otras formas visuales que faciliten su comprensión. Por ello, en el estudio de la geometría, la visualización se concibe como el proceso o acción de trasladar un dibujo a una imagen mental, o de transformar una imagen	Objetivo: Identificar si los conceptos trabajados en la actividad fueron comprendidos o, por el contrario, presentan dificultades, así como determinar qué tipo de dificultades surgen. Además, busca observar cómo los estudiantes representan gráficamente las nociones de lateralidad (mediante flechas, dibujos, entre otros recursos). Nota. Por adecuación de tiempo, el juego del Caminito omite una segunda actividad con su respectiva tarea (tarea 2), por ello se adecuó la tarea 1 y la tarea 2 en una sola. Tarea 1.

	mental en una representación gráfica. * Desde esta perspectiva, la visualización también se concibe como la relación o transferencia que se establece entre un dibujo, entendido como representación gráfica, y una figura**,** correspondiente a la imagen mental que el observador construye a partir de dicha representación. *En palabras de Duval (1998), un dibujo permite visualizar una o varias figuras: 1D/2D, es decir, elementos unidimensionales representados en un plano bidimensional; 2D/2D, como líneas rectas o curvas que conforman fronteras cerradas —por ejemplo, las de un triángulo o un cuadrilátero—; o 3D/2D, como las representaciones planas de objetos tridimensionales, tales como cubos o esferas. *Identificación de las figuras constituye una estrategia que permite representar tanto objetos de la realidad como objetos matemáticos. Este proceso puede abordarse mediante diferentes formas de aprehensión: **l**a aprehensión perceptual**,** relacionada con el reconocimiento visual de las figuras; la aprehensión discursiva**,** que establece	a. Dibuja en el espacio en blanco el trayecto realizado del camino. Respuesta de A, B, G y H , , Análisis de respuesta. La percepción visual del trayecto realizado por los estudiantes se enmarca en una percepción bidimensional (2D). Para representar la trayectoria, utiliza figuras como personajes, cuadrados y rectángulos que simbolizan los papeles pegados al piso. Sus dibujos evidencian que su comprensión del recorrido se basa principalmente en la aprehensión visual. Respuesta de C, D , Análisis de respuesta. La aprehensión presente en el estudiante es unidimensional, pues representa el trayecto del camino mediante flechas direccionales que orientan el recorrido. Además, se aprecia cómo relaciona las nociones de lateralidad —derecha,

	relaciones entre lo visual y los enunciados matemáticos, ya sea desde el anclaje visual hacia el discursivo o en sentido contrario; y la aprehensión operatoria**,** que implica la posibilidad de realizar transformaciones sobre una figura, como cambios figurales y procesos de reconfiguración. Criterio 6. “Formula y resuelve problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno” (DBA, 2016; p. 26). Criterio 10. Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Tecné, Episteme y Didaxis, (2), 1–8.	izquierda, adelante y atrás— a través del uso de estas flechas. Respuesta de E, F ’ Análisis de respuesta. La aprehensión presente en el estudiante es unidimensional, ya que representa el trayecto mediante líneas conectadas que indican la dirección del recorrido. Además, se observa cómo relaciona las nociones de lateralidad —derecha, izquierda, adelante y atrás— a través de líneas rectas que organizan en la representación del camino recorrido. Conclusión general del punto a. En este punto podemos observar distintas formas de graficar el trayecto recorrido. Algunos estudiantes representan el camino como un todo, a través de una aprehensión perceptiva en 2D; mientras que otros lo hacen desde una perspectiva unidimensional (1D), utilizando flechas, líneas rectas y rectángulos para ilustrar el recorrido. b. ¿Qué nociones espaciales tuviste para ubicarte y realizar el recorrido? ¿las indicaciones

		del compañero fueron suficientes para hacer el camino? --- --- --- --- --- --- --- Respuesta de A Análisis de respuesta. El estudiante menciona los conceptos trabajados (derecha, izquierda, atrás y al frente); sin embargo, afirma que estas indicaciones no fueron suficientes, ya que el compañero que recorría el trayecto se salía del camino trazado al dar pasos muy grandes. Por ello, más que una confusión con las direcciones, lo que dificulta el juego fue la forma en que ejecutaban los movimientos. Respuesta de B,C Análisis de respuesta. El estudiante menciona los conceptos trabajados (derecha, izquierda, atrás y al frente). Respuesta de D Análisis de respuesta.

		Se observa que el estudiante utiliza gráficas de flechas para representar lateralidad, de modo que el sentido de cada flecha indica si el movimiento es hacia la izquierda, la derecha, atrás o al frente. Respuesta de E,G Análisis de respuesta. El estudiante logra asociar los conceptos de lateralidad con las partes de su cuerpo; identifica la derecha y la izquierda al tocar el hombro correspondiente y utiliza esta referencia para desplazarse en la dirección indicada. Respuesta de F Análisis de respuesta. Se puede apreciar confusión de los conceptos de lateralidad en cuanto a las direcciones, derecha e izquierda, por ejemplo, el compañero para indicar que diera un paso al lateral derecho y se desplazaba en otro sentido. Respuesta de H Análisis de respuesta. Poca información.

		conclusión general del punto b. Algunos estudiantes logran reconocer los indicativos de lateralidad (derecha, izquierda, atrás y al frente). Varios de ellos los asocian con partes de su cuerpo, como el hombro derecho e izquierdo, la frente para representar el frente y la espalda para indicar atrás. En otros casos, estos indicativos generaron confusión, ya que al pedirles que se desplazaran hacia la derecha se dirigían hacia la izquierda. c. ¿En tu cuerpo, respecto a que podemos relacionar lo que es derecha, izquierda, delante, atrás? ---------- ---------- ---------- ---------- ---------- ---------- ----- Análisis de respuesta. Respuesta de A, B,F,G Y E

		, , Análisis de respuesta. El estudiante logra asociar las direcciones con parte de su cuerpo ya que asocia la dirección de enfrente con su frente, atrás con su espalda, derecha con su brazo derecho, izquierda con su brazo izquierdo. Respuesta de C Análisis de respuesta. Se puede apreciar que el estudiante utiliza los conceptos de lateralidad para ubicar objetos en el espacio, pero aún no relaciona estos con partes de su cuerpo. Respuesta de D y H Análisis de respuesta. Relaciona los conceptos de lateralidad para moverse en el espacio, pero aún no relaciona estos conceptos con partes de su cuerpo. conclusión general del punto c. En general, los estudiantes logran relacionar las partes de su cuerpo con los conceptos de

		lateralidad (derecha, izquierda, delante y atrás). Algunos utilizan estos conceptos para señalar y ubicar objetos en el espacio, mientras que otros los emplean para orientarse dentro de él. d. Realiza un dibujo en el espacio en blanco para indicar el lado derecho e izquierdo con relación a tu cuerpo. Respuesta de A,B,C,D,G ,, Análisis de respuesta. El estudiante demuestra los conceptos de lateralidad a través del gráfico de su cuerpo, identificando en el dibujo el lado derecho, el izquierdo, adelante y atrás. Respuesta de E Análisis de respuesta. El estudiante identifica a nivel general el lateral derecho y lateral izquierdo, pero no los relaciona con partes de su cuerpo en específico.

		Respuesta de F,H , Análisis de respuesta. El estudiante logra asociar conceptos de lateralidad con partes de su cuerpo. Conclusión general del punto d Se observa que algunos estudiantes logran identificar los conceptos de lateralidad a un nivel general (lo que se encuentra a la derecha o a la izquierda de su cuerpo), mientras que otros lo hacen de manera más específica, relacionándolos con partes concretas de su cuerpo (mano derecha, mano izquierda, espalda para indicar atrás, entre otras). Conclusiones generales de esta actividad Los estudiantes al hacer actividades de gráficas que impliquen el uso de conceptos de lateralidad, unos presentan aprehensiones en 2D y otros en 1D, es decir, para unos representar el trayecto del camino recurren a la imagen del trayecto proyectado en el piso como un todo dibujándolo el papel pegado en el piso tal

		cual como si fuera una foto y otros representan el trayecto del camino por medio de flechas o líneas rectas como recurso de ilustración del recorrido. Además, se puede apreciar algunos estudiantes logran identificar conceptos de lateralidad a nivel general (lo que está a la derecha o izquierda de mi cuerpo) y otros a nivel más específicos en relación con partes de su cuerpo (mano derecha, mano izquierda, espalda con relación de hacia atrás, entre otras), esto les permite utilizar conceptos de lateralidad para orientarse y ubicar objetos en el espacio.
Juego la Gallina Ciega Propósito: Introducir y diferenciar conceptos como giro y rotación.	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. * La visualización puede comprenderse como un proceso mediante el cual los objetos, conceptos, fenómenos y procesos son llevados a una representación visual, así como la posibilidad de realizar el proceso contrario, es decir, pasar de la representación visual a aquello que esta representa. Es decir, implica la capacidad de	Objetivo: Identificar si los conceptos trabajados en la actividad fueron comprendidos o, por el contrario, generaron dificultades, así como precisar el tipo de dificultades presentadas. Además, se busca sintetizar e identificar el eje de giro como una unidad invariable que permita distinguir entre los conceptos de giro y rotación. Tarea 2. a. ¿Qué se tiene en cuenta para hacer un giro?

	convertir ideas —tanto concretas como abstractas— en imágenes, diagramas, gráficos u otras formas visuales que faciliten su comprensión. Por ello, en el estudio de la geometría, la visualización se concibe como el proceso o acción de trasladar un dibujo a una imagen mental, o de transformar una imagen mental en una representación gráfica. * Desde esta perspectiva, la visualización también se concibe como la relación o transferencia que se establece entre un dibujo**,** entendido como representación gráfica, y una figura, correspondiente a la imagen mental que el observador construye a partir de dicha representación. *En palabras de Duval (1998), un dibujo permite visualizar una o varias figuras: 1D/2D, es decir, elementos unidimensionales representados en un plano bidimensional; 2D/2D, como líneas rectas o curvas que conforman fronteras cerradas —por ejemplo, las de un triángulo o un cuadrilátero—; o 3D/2D, como las representaciones planas de objetos tridimensionales, tales como cubos o esferas. (parafraseo a torres página 280)	---------- ---------- ---------- ---------- ---------- ------- Respuesta de A, D, G. Análisis de respuesta. El estudiante reconoce los sentidos de giro, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, para orientarse correctamente en el espacio. Respuesta de B, E Análisis de respuesta. Reconoce las representaciones de objetos que realizan giros; sin embargo, aún no logra comprender los giros a partir de su propio cuerpo. Respuesta de C Análisis de respuesta. Cuando se habla de giros, el estudiante tiende a asociar la rotación con los giros de su propio cuerpo, mostrando una línea de distinción poco clara entre ambos conceptos. Esto

	*Identificación de figuras como estrategia para representar objetos reales u objetos matemáticos: aprehensión perceptual, aprehensión discursiva (anclaje visual al anclaje discursivo, anclaje discursivo al anclaje visual) y aprehensión operatoria (aprehensión operatoria de cambio figural, aprehensión operatoria de reconfiguración). Criterio 5: "Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas" (MEN, 2016; p.82). Criterio 6. "Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 10. Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Tecné, Episteme y Didaxis, (2), 1–8.	puede generar confusión sobre lo que realmente constituye un giro. Por ello, es importante reforzar la diferencia entre rotación y giro, teniendo como elemento clave la ubicación del eje de giro en su cuerpo. Respuesta de F Análisis de respuesta. La respuesta es similar a la del estudiante A; además, este estudiante logra identificar el punto de referencia o eje de giro como una propiedad fundamental para ejecutar un giro. conclusión general del punto a. Los estudiantes utilizan los conceptos de lateralidad (derecha, izquierda) para realizar giros. Algunos logran reconocer el eje de giro, mientras que otros asocian los giros con el movimiento de las manecillas del reloj. De esto podemos deducir que el estudiante intuye lo que es un giro, aunque el concepto aún no está completamente claro. b. ¿Qué se tiene en cuenta para hacer una rotación?

		---------- ---------- ---------- ---------- ---------- --------- Respuesta de A, C, D, G , , Análisis de respuesta. El estudiante logra reconocer el eje de giro, al que él denomina ‘punto de control’; además, es capaz de asociar giros para ejecutar una rotación. Respuesta de B, E y H Análisis de respuesta. El estudiante percibe la rotación a través del movimiento de las manecillas del reloj, lo que indica que aún existe confusión entre lo que constituye una rotación y un giro. Respuesta de F Análisis de respuesta. El estudiante relaciona los giros de su cuerpo para

		ejecutar rotaciones y, además, identifica la ubicación del eje de giro en el centro de su cuerpo para realizarlas correctamente. Conclusión general del punto b. Algunos estudiantes logran reconocer el eje de giro como punto de referencia, mientras que otros perciben la rotación a través del movimiento de las manecillas del reloj, lo que indica que aún existe confusión entre lo que constituye una rotación y un giro. Por su parte, otros estudiantes relacionan los giros de su propio cuerpo para ejecutar rotaciones y, además, identifican la ubicación del eje de giro en el centro de su cuerpo para realizarlas correctamente. De esto podemos deducir que los estudiantes intuyen lo que es una rotación, aunque el concepto aún no está completamente claro. c. ¿Qué diferencia hay entre estos dos movimientos (giro, rotación)? --- --- --- ---

		----------
		Respuesta de A, G, D Análisis de respuesta. El estudiante logra identificar el eje de giro como una propiedad fundamental para diferenciar, a través de los distintos giros de su cuerpo, lo que implica rotar y girar. Respuesta de B, H. Análisis de respuesta. La respuesta no es clara, presenta confusión en el tema. Respuesta de C Análisis de respuesta. El estudiante logra ubicar el eje de giro en el centro de su cuerpo para realizar una rotación y ubica el eje de giro en los extremos de su cuerpo para hacer giros. Respuesta de E Análisis de respuesta. No hay respuesta. Respuesta de F Análisis de respuesta. El estudiante logra ubicar el eje de giro en el centro de su

		cuerpo para realizar una rotación y en los extremos para ejecutar giros. En sus explicaciones, cuando afirma que la rotación implica estar ‘quieto’, se entiende que se refiere a girar la mitad de su cuerpo alrededor del eje de rotación central. Conclusión general del punto c Aunque de manera aún imprecisa, el estudiante logra reconocer el eje de giro —al que denomina ‘punto de control’— como una propiedad fundamental para diferenciar entre un giro y una rotación. En particular, comprende que la ubicación del eje de giro en el cuerpo determina si se realiza un giro o una rotación. Algunos alumnos logran percibir esta diferencia, mientras que otros aún presentan confusiones y no logran responder con claridad. d. En el espacio en blanco, realiza un dibujo del giro de una vuelta y media vuelta de tu cuerpo. Respuesta de A, E, G ,

		Análisis de respuesta. Aunque hace una representación de su cuerpo, se le dificulta hacer una representación de los giros. Respuesta de B Análisis de respuesta. El estudiante utiliza flechas rectas en distintos sentidos para indicar direcciones y giros de su cuerpo. Respuesta de C, F. Análisis de respuesta. El estudiante utiliza flechas arqueadas para indicar direcciones y giros de su cuerpo. Respuesta de D Análisis de respuesta. El estudiante utiliza líneas arqueadas para indicar e ilustrar direcciones y giros de su cuerpo. Respuesta de H Análisis de respuesta. El estudiante representa su cuerpo y utiliza palabras para indicar dirección y giro. Conclusión general del punto d

		Los estudiantes representan de forma creativa los giros de su cuerpo, utilizando diversas estrategias como flechas arqueadas, conceptos de lateralidad (derecha e izquierda) y líneas curvas. Sin embargo, aún hay estudiantes a quienes se les dificulta representar gráficamente los giros de su propio cuerpo. Conclusiones generales de la actividad. Algunos estudiantes utilizan los conceptos de lateralidad en su cuerpo (derecha, izquierda, delante, atrás y al frente) para realizar giros. Además, logran reconocer el eje de giro como punto de referencia o como una propiedad fundamental para diferenciar entre giros y rotaciones, mientras que algunos asocian de manera errónea la rotación con el movimiento de las manecillas del reloj, lo que evidencia que aún existe confusión entre ambos conceptos. En general, a los estudiantes les resulta difícil representar gráficamente los giros de su cuerpo. No obstante, las representaciones más comunes para indicar direcciones y giros son el uso de flechas y líneas arqueadas. El concepto de eje de rotación o punto de

		referencia es percibido por los estudiantes, aunque todavía falta mayor apropiación y claridad en su comprensión.
Juego del Trique Propósito: Superar posibles dificultades relacionadas con los conceptos de línea recta, línea horizontal, línea vertical y centro.	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones hacia algún tipo de representación visual y, a la vez, el proceso inverso. *visualización se entiende como el proceso de transferencia que se da entre un dibujo (la representación gráfica) y una figura (la imagen mental que construye el observador)*En palabras de Duval (1998), un dibujo permite visualizar una o varias figuras: 1D/2D, es decir, elementos unidimensionales representados en un plano bidimensional; 2D/2D, como líneas rectas o curvas que conforman fronteras cerradas —por ejemplo, las de un triángulo o un cuadrilátero—; o 3D/2D, como las representaciones planas de objetos tridimensionales, tales como cubos o esferas. Criterio 6. “Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la	Objetivo: Identificar si los conceptos trabajados fueron comprendidos o, por el contrario, generaron dificultades, así como precisar qué tipo de dificultades se presentaron. Además, se pretende conocer las nociones de métrica que emplean los estudiantes, es decir, qué tipo de medición utilizan para estimar distancias en la actividad (por ejemplo, pasos, comparación con objetos u otros métodos). También se busca analizar su percepción de conceptos como línea recta, línea horizontal y línea vertical, así como su capacidad para identificar el centro de un objeto o espacio. Tarea 3. a. ¿Qué estrategias utilizaste para que los grupos rivales quedarán a una misma distancia de los aros del Triqui?

	dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: "Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas" (DBA, 2016; p. 19). Criterio 9. Gómez, F. (2021). *La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto Criterio 10. Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Tecné, Episteme y Didaxis, (2), 1–8.	---------- ---------- ---------- ---------- ---------- -------- Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H. Análisis de respuesta. Reconoce el uso de una unidad de medida para identificar la equidistancia; en este caso, utiliza los pasos para indicar la distancia. conclusión general del punto a Los estudiantes utilizan sus pisadas como unidad de medida para indicar distancia de un punto a otro en el espacio. b. Dibuja en el espacio en blanco una línea recta vertical, una línea recta horizontal y una línea recta diagonal. Respuesta de A

		Análisis de respuesta. El estudiante reconoce y grafica perfectamente una línea horizontal, línea vertical y línea diagonal. Respuesta de B,C,D,E,G y H. Análisis de respuesta. El estudiante realiza líneas horizontales, verticales y diagonales; sin embargo, no existe claridad sobre cuál considera horizontal, vertical o diagonal, ya que, aunque las líneas están correctamente trazadas, no asigna los nombres correspondientes a cada una. Respuesta de F Análisis de respuesta. Representa gráficamente la actividad que se realizó en el juego e ubica las líneas horizontales, verticales, diagonales de manera perfecta. Conclusión general del punto b Los estudiantes logran graficar líneas rectas horizontales, verticales y diagonales, las dificultades más presentes son el nombrar cuál línea es horizontal, vertical o diagonal.

		De esta manera se dialoga recordando los diferentes tipos de líneas rectas trabajadas (línea recta horizontal, línea recta vertical, línea recta diagonal) y se da paso al punto c. c. Dibuja el Triqui en el espacio en blanco y traza con diferentes colores, las diagonales, líneas rectas verticales, líneas rectas horizontales. Respuesta de A,B,C,G y H. Análisis de respuesta. Asigna y representa perfectamente una línea recta horizontal, diagonal y vertical. Respuesta de D Análisis de respuesta. Presenta confusión al asignar los nombres correspondientes a las líneas, y en particular identifica la línea diagonal como línea horizontal. Respuesta de F Análisis de respuesta. El estudiante traza líneas horizontales, verticales y

		diagonales; sin embargo, no hay claridad sobre cuál identifica como horizontal, vertical o diagonal, pues, aunque las líneas están correctamente dibujadas, no les asigna los nombres correspondientes. Esto resulta llamativo, ya que en el punto anterior (d) las había identificado correctamente. Conclusión general del punto c. Los estudiantes en general logran realizar y nombrar líneas rectas horizontales, verticales y diagonales. Conclusiones generales de la actividad. Los estudiantes en general reconocen como unidad de medida partes de su cuerpo; en este caso, utilizan las pisadas para identificar equidistancias. Además, logran graficar e identificar líneas rectas horizontales, verticales y diagonales.
Juego del Palito dormilón Propósito: Introducir propiedades de la	Criterio 6. “Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno” (DBA, 2016; p. 26).	Objetivo: Sintetizar e identificar si los conceptos abordados en la actividad fueron comprendidos o, por el contrario, generaron dificultades, así como determinar qué tipo de dificultades presentan los

circunferencia, como el centro, la equidistancia de los puntos, la línea curva y la línea cerrada que forma la circunferencia.	Criterio 7: “Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas” (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8. El pensamiento métrico se relaciona “Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos contextos” (MEN, 2006; p.63). Criterio 9. Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. · La construcción de los conceptos de cada magnitud	estudiantes. Además, se busca indagar en las estrategias que emplean los estudiantes en sus procesos de medición para generar equidistancias y, en consecuencia, comprender cómo incorporan el punto de referencia (punto de origen o centro) como propiedad fundamental para conservar dichas distancias dentro del concepto de circunferencia. Asimismo, se pretende analizar cómo los estudiantes asimilan la introducción del concepto de circunferencia y de las líneas rectas que se originan en el punto de origen y se proyectan sobre ella. Inicio de actividad Aquí tienes una versión más clara, coherente y bien redactada del texto: Se inició la actividad ubicando a varios estudiantes a diferentes distancias del palo de escoba, con el objetivo de evidenciar la ventaja que tenía quien se encontraba más cerca. Esto llevó a la necesidad de definir una medida que permitiera situar a todos los participantes a la misma

	· La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes · La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto · La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos · El papel del trasfondo social de la medición procesos tomados de la medición Criterio 10. Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Tecné, Episteme y Didaxis, (2), 1–8.	distancia y, por lo tanto, en igualdad de condiciones. Para lograrlo, se decidió ubicar a todos los estudiantes a una distancia uniforme respecto al palo. Como límite visual consensuado, se trazó una circunferencia en el piso haciendo girar una cuerda con un extremo fijo, identificado como el centro, hasta alcanzar una distancia radial adecuada. A medida que se realiza esta acción, se reflexiona sobre conceptos como rotación y giro, además de resaltar la importancia del punto de referencia (el centro), desde el cual todos los participantes se ubican equidistantes. De esta manera, se reconoció que los puntos de la línea curva cerrada obtenida —el círculo— se encuentran a igual distancia del centro, constituyendo lo que denominamos circunferencia. Tarea 4. a. ¿Qué estrategias fueron utilizadas para ubicarse a una misma distancia tú y tus compañeros respecto al palo? --- --- --- ---

		---------- Respuesta de A Análisis de respuesta. El estudiante reconoce los distintos materiales empleados como unidades de medida para identificar distancias y comprende su utilidad para ubicar objetos o personas a una distancia determinada en el espacio. Respuesta de B, E. Análisis de respuesta. El estudiante identifica el círculo o la línea de la circunferencia como un punto de ubicación en el que todos los integrantes se encuentran a la misma distancia, reconociendo implícitamente las propiedades de equidistancia que poseen los puntos de la circunferencia respecto de su centro u origen. Respuesta de C, D y H. Análisis de respuesta. El estudiante reconoce como unidad de medida las pisadas para determinar la equidistancia. Respuesta de F y G.

		Análisis de respuesta. Respuesta similar a la de B, con la particularidad de que el estudiante reconoce el punto de referencia como centro o punto medio, integrando en ello la idea de equidistancia. conclusión general del punto a En general, los estudiantes logran identificar la propiedad de equidistancia de la circunferencia respecto de su centro e incorporar dicha propiedad para ubicarse a una distancia equitativa entre sus compañeros. b. Supongamos que la imagen M representa la ubicación de sus compañeros respecto al palo, el cual, la ubicación del palo será el punto en el centro de la circunferencia del que sus compañeros se ubicaron alrededor. ¿Qué implicaciones tendrá respecto a las distancias de sus compañeros respecto al palo si se traslada el punto de referencia (centro) hacia otro punto en el espacio? Imagen M

		--- --- --- --- --- --- Respuesta de A,C, E. Análisis de respuesta. El estudiante identifica las implicaciones de mover el punto de referencia y comprende cómo este cambio afecta las distancias con respecto a la circunferencia. Respuesta de B y H Análisis de respuesta. Mediante la comparación de ambas circunferencias, el estudiante logra identificar las implicaciones de trasladar el punto de referencia para conservar la equidistancia entre sus compañeros, reconociendo de manera implícita la importancia del punto de referencia como propiedad invariante en el espacio. Respuesta de D

		Análisis de respuesta. El estudiante reconoce que al cambiar la ubicación del punto de referencia se modifican las distancias entre sus compañeros, lo que genera la necesidad de medir nuevamente las distancias desde la nueva posición del punto de referencia para conservar la equidistancia, aplicando e intuyendo de manera implícita la propiedad de la circunferencia. Respuesta de F. Análisis de respuesta. El estudiante logra identificar las implicaciones de trasladar el punto de referencia para conservar la equidistancia entre sus compañeros, reconociendo de manera implícita la importancia del punto de referencia como propiedad invariante en el espacio. conclusión general del punto b El estudiante logra reconocer la importancia del punto de referencia como propiedad invariante para mantener la equidistancia entre sus compañeros, así como las implicaciones de trasladar

		dicho punto a distintas posiciones en el espacio. c. Respecto a lo anterior, ¿qué soluciones darías para que tus compañeros queden a igual distancia del palo en el nuevo punto de ubicación del centro? --- --- --- --- --- --- Respuesta de A, B, G y H Análisis de respuesta. Identifica las propiedades de la circunferencia, como la equidistancia y el punto de referencia (origen), mediante el uso de objetos (palos, cuerdas, regla, metro, pies) crea estrategias que le permiten medir distancias iguales y utilizarlas como base para trazar una nueva circunferencia en cualquier punto en el espacio. Respuesta de C,D,E,F Análisis de respuesta.

		Utiliza partes de su cuerpo como unidad de medida y así poder determinar equidistancias. Conclusión general del punto c. Los estudiantes reconocen que, al ubicar el centro de la circunferencia en un nuevo punto del espacio, deben medir desde ese punto las distancias de sus compañeros y trazar nuevamente un círculo que les permita mantenerse a igual distancia respecto al centro, reconociendo de manera implícita la propiedad de equidistancia de los puntos de la circunferencia con respecto a su origen o centro. Para ello, utilizan diversos instrumentos de medición, como palos, cuerdas, reglas, metros o incluso sus propios pies. d. Dibuja una circunferencia remarcando su punto de referencia en el espacio en blanco, con colores diferentes, ubica y dibuja tres puntos sobre la circunferencia, a su vez, traza líneas rectas que vayan del centro a los puntos de la circunferencia marcados. Respuesta de A,B,D,E,F

		,, Análisis de respuesta. La estudiante gráfica de manera asertiva una circunferencia, ubica puntos sobre la circunferencia y traza las respectivas líneas rectas. Respuesta de C,G , Análisis de respuesta. Aunque grafica perfectamente un círculo no hay una claridad de las gráficas de las rectas solicitadas en el punto. Respuesta de H Análisis de respuesta. Aunque grafica de manera perfecta una circunferencia, se puede notar dificultad para ubicar puntos sobre la circunferencia, además presenta una leve necesidad de completar figura cuando se grafican líneas y completarlas con figuras cerradas de triángulos, de esta manera se denota una mezcla de conceptos. Conclusión general del punto d Aunque la gran mayoría de estudiantes ubican puntos y trazan líneas rectas que parten

		del centro hacia la circunferencia, también otros se les dificulta trazar estas líneas, lo cual tienden a dividir y rellenar porciones de las circunferencias con diferentes colores y simplemente tienden a realizar triángulos sobre ellas. Conclusión general de la actividad Los estudiantes identifican diversas herramientas y estrategias para determinar distancias, utilizando recursos como pisadas, cuerdas y palos como unidades de medida para ubicar objetos o personas en el espacio. Además, reconocen de manera implícita la utilidad de las propiedades de la circunferencia para establecer distancias respecto a un punto; sin embargo, algunos presentan dificultades para ubicar correctamente puntos sobre la circunferencia. En general, los estudiantes logran identificar las ventajas y desventajas de situar a sus compañeros a distintas distancias respecto a un punto de referencia. En la actividad propuesta, algunos incluso consiguen aplicar la circunferencia para ubicar a todos los participantes a la misma distancia, desarrollando

		de manera implícita la noción de propiedades de la circunferencia, como la equidistancia de sus puntos respecto al centro.

Actividad y Propósito	**Criterios teóricos**	**Objetivo de tarea y descripción general de sucesos presentados en el desarrollo de la actividad**
Retroalimentación de la primera sesión e introducción de giros del cuerpo sobre una circunferencia.	Criterio 2 Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que	En este apartado se enfatizó la retroalimentación de los conceptos que presentaron dificultad durante las actividades de la primera sesión, tales como líneas rectas horizontales, verticales y

Propósito: Esta actividad trata de retroalimentar de forma breve conceptos tratados en el bloque uno, además, se introduce de forma experimental algunas pautas para poder trabajar los giros del cuerpo sobre una circunferencia que permita determinar diferentes posiciones desde un punto de referencia, por ello se introduce los conceptos de lado inicial, lado final, eje de giro, vértice y giros del cuerpo sobre una circunferencia.	inician la educación superior. Educación matemática, 32(1), 38-66. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina lado inicial y OP se denomina lado terminal del ángulo. Criterio 5: "Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas" (MEN, 2016; p.82). Criterio 10. Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Tecné, Episteme y Didaxis, (2), 1–8. Criterio 11: "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	diagonales, circunferencia, centro, equidistancia, derecha e izquierda, entre otros. En particular, se reforzó el concepto de eje de giro mediante ejercicios de giros del cuerpo, y además se introdujeron nuevos conceptos como lado inicial, lado final y vértice. Con el fin de superar las dificultades de los estudiantes para representar giros del cuerpo en el espacio, se trazó una circunferencia en el piso y se ubicó al estudiante en el centro o punto de origen. Este punto, de manera consensuada con los estudiantes, se denominó "vértice". Para proyectar los giros en dos dimensiones, el estudiante extiende un brazo horizontalmente, y la línea imaginaria que pasa por el brazo se proyecta en el piso. A esta línea, que inicia en el centro de la circunferencia y se extiende hasta donde se desee, se le asignó el nombre de "lado inicial". A partir de esta posición, el estudiante realiza un giro de media vuelta con el brazo extendido, moviéndolo de la posición inicial a la final. Esta nueva posición, acordada con los estudiantes, se denominó

		"lado final". Para indicar el sentido, dirección y cantidad del giro, se utilizó una flecha arqueada que conecta e ilustra el lado inicial con el lado final.
Punto 1: construcción de ángulo completo. Propósito: Se busca que, mediante el giro del cuerpo, el estudiante perciba de forma práctica el movimiento desde una posición inicial hasta una posición final, experimentando cómo la posición final coincide con el punto inicial, superando en el estudiante, la dificultad de no poder identificar los dos lados de un ángulo cuando se percibe únicamente como una abertura.	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. Criterio 2: Criterio 2: Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Educación matemática, 32(1), 38-66. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina lado inicial y OP se denomina lado terminal del ángulo.	Objetivo: La tarea tiene como objetivo que el estudiante sintetice las ideas de los conceptos tratados. Se espera que logre representar gráficamente un giro de vuelta completa, obteniendo así la representación de un ángulo completo, percibir que el lado final coincide con el punto inicial donde se originó el giro, identificar algunas propiedades del ángulo completo, como sus dos lados y un vértice y, finalmente, identificar este tipo de giro como ángulo completo. <u>ángulo completo</u> Se construye el concepto de ángulo completo relacionándolo con el giro de una vuelta completa del cuerpo sobre una circunferencia. A cada estudiante se le solicita trazar un lado inicial en su circunferencia indicando una posición de partida. Luego, con un estudiante modelo, se realiza una vuelta completa del

	*Según la definición de ángulo que emplee el estudiante, puede resultar difícil visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360°. Al no percibir dos lados que forman una abertura y que se unan en un vértice, los estudiantes tienden a no reconocer la existencia del ángulo. En estas representaciones, suelen interpretar la figura únicamente como una línea, sin atribuirle ninguna función adicional. *Las imágenes mentales que evocan no responden a una definición única del concepto de ángulo: cada estudiante activa su propia representación según el problema al que se enfrenta. Por ello, no existe una imagen uniforme del concepto. *La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan dos rayos, con un rayo horizontal.	cuerpo a partir de esa posición, ilustrando el giro en la circunferencia. Posteriormente, se proyectan las circunferencias elaboradas por los estudiantes sobre la circunferencia base dibujada en el piso y se comparan los giros realizados en circunferencias de distintos tamaños. Se reflexiona que, sin importar el tamaño de la circunferencia, todas representan la misma cantidad de giro: una vuelta completa. Finalmente, se sugiere nombrar este giro como ángulo completo y marcar su recorrido con una flecha arqueada. MATERIALES Material 1: hoja con una circunferencia para recortar y utilizar en la construcción de diferentes tipos de ángulos (completo, llano, recto y agudo). En este caso, se comienza trabajando con la circunferencia completa para construir el ángulo completo. Material 2: Tabla sintetizadora de los conceptos trabajados en la construcción de los diferentes tipos de ángulos (ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto y ángulo agudo). Esta tabla se completa al finalizar cada actividad,

	Criterio 3: Torres, R., & Sanchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. * Cuatro tipos de significados del objeto matemático de ángulo: Cualitativa estático, Cualitativo Dinámico, Cuantitativo Estático, Cuantitativo Dinámico. *Las dificultades asociadas a considerar un ángulo como un par de rayos con un punto en común y un sentido estático incluyen la exclusión de ciertos valores de medida. Entre estas se encuentran la imposibilidad de admitir ángulos de 0°, 180° y 360°, así como también ángulos negativos o aquellos cuya medida supera los 360°. *Se sugiere incorporar aplicaciones prácticas que ejemplifican los diferentes significados del ángulo, complementándose con situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, entre otras.	durante el momento de la retroalimentación. Tarea 5 a. Dibuja en el espacio en blanco una circunferencia que involucre un giro de una línea recta de una posición inicial a una posición final. La línea de posición inicial nómbrala como ‘lado inicial’, y la de posición final como ‘lado final’. Ubica y nombra el vértice y, finalmente con una flecha arqueada dibuja el sentido de giro. ● Respuesta de A,C,D,E y F Análisis de respuesta. El estudiante representa de manera óptima el lado inicial y el lado final del ángulo, y además logra indicar el giro y su dirección mediante una flecha arqueada. De forma implícita, construye un ángulo llano al identificar correctamente sus dos lados para formar el giro de media vuelta. Señala el vértice como un punto, aunque no le asigna un nombre.

	Criterio 4: Casas, L., Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de las Ciencias, 23(2), 201-216. Criterio 5: “Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas” (MEN, 2016; p.82). Criterio 6. “Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno” (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: “Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas” (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8. El pensamiento métrico se relaciona “Con la comprensión que desarrolla	a. Respuesta de B y G Análisis de respuesta. La respuesta es similar a la del estudiante A; sin embargo, presenta una ligera confusión al trazar la flecha arqueada para indicar la dirección del giro, ya que esta se origina en el punto de partida, lo que podría generar dificultades en actividades posteriores al representar distintos giros. Además, identifica el vértice, pero no lo nombra. ● Respuesta de H Análisis de respuesta. Respuesta similar a A, además nombra y ubica el vértice. conclusión general del punto a. En general, los estudiantes logran representar el giro de una línea recta desde una posición inicial hasta una posición final. En la mayoría de las gráficas, tienden a construir una figura similar a un ángulo llano, superando así la dificultad previamente observada, donde no lograban percibir la abertura formada por dos lados. Aunque la mayoría no nombra el vértice, sí hacen notar su presencia al

	una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos contextos" (MEN, 2006; p.63). Criterio 9: Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico: · La construcción de los conceptos de cada magnitud · La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes · La estimación de magnitudes y los aspectos	marcarlo en la representación como un punto. b. Dibuja en el espacio en blanco el giro en una circunferencia de una vuelta completa de tu cuerpo. a. Respuesta de A,B,C,D,E,F y G , Análisis de respuesta. El estudiante representa gráficamente el giro de una vuelta completa y logra identificar el lado inicial y el lado final en el mismo punto donde se origina el giro. Además, utiliza una flecha arqueada para indicar tanto la dirección como la magnitud del giro realizado. ● Respuesta de H Análisis de respuesta. Respuesta similar al punto A, además, logra representar los giros de su cuerpo sobre una circunferencia. Análisis de respuesta.

	del proceso de capturar lo continuo con lo discreto · La apreciación del rango de las magnitudes · La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos · La diferencia entre la unidad y el patrón de medición · La asignación numérica · El papel del trasfondo social de la medición Criterio 10: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Criterio 11: "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	Conclusión general del punto b. Los estudiantes logran graficar y reconocer lo que implica realizar una vuelta completa, en la cual el lado inicial y el lado final coinciden en el mismo punto donde se originó el giro. c. ¿Qué pasa con las posiciones del lado inicial y el lado final cuando se realiza una vuelta completa de tu cuerpo en una circunferencia? --- --- --- --- --- --- 1. Respuesta de A, B,C,D,F,G y H , Análisis de respuesta. El estudiante reconoce que, en un giro de vuelta completa, el lado inicial y el lado final coincide en el mismo punto.

		• Respuesta de E Análisis de respuesta. Su respuesta no corresponde a lo solicitado, ya que indica “ángulo llano”, lo que evidencia inferencias del estudiante de experiencias anteriores del ángulo, en este caso “ángulo llano"; sin embargo, muestra confusión al relacionarlo con el ángulo completo, sin identificar las propiedades que diferencian a ambos. Esta dificultad también se manifiesta al clasificar conceptos en la tabla sintetizadora, donde dibuja un ángulo llano, pero lo nombra ángulo completo. Conclusión general del punto c. El estudiante reconoce que, en un giro de vuelta completa, el lado inicial y el lado final coincide en el mismo punto. Por otro lado, E, presenta cierta confusión entre el ángulo llano y el ángulo completo, pues nombra al ángulo completo como llano y no identifica las propiedades que los diferencian. Esta dificultad también se evidencia al clasificar conceptos en la tabla sintetizadora, donde

		dibuja un ángulo llano, pero lo denomina ángulo completo. d. ¿Qué nombre recibe el giro de una vuelta completa de tu cuerpo en una circunferencia? --- a. Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra asignarle el nombre a este tipo de giro de vuelta completa de su cuerpo como ángulo completo. Por otro lado, E, presenta cierta confusión entre el ángulo llano y el ángulo completo, pues gráfica un ángulo llano y lo nombra como ángulo completo sin identificar las propiedades que los diferencian. Conclusión general del punto d Los estudiantes logran asignar el nombre del giro de su cuerpo de vuelta completa con el nombre de ángulo completo. Por otro lado, E, presenta cierta confusión entre el ángulo llano y el ángulo completo, pues nombra al ángulo completo como llano y no identifica las propiedades que los diferencian. Esta dificultad también se evidencia al clasificar conceptos en la

		tabla sintetizadora, donde dibuja un ángulo llano, pero lo denomina ángulo completo, lo cual se dialoga con él y se aclara un poco el concepto logrando así graficar el ángulo completo en la última columna de la tabla sintetizadora e. Llena los espacios en blanco de la segunda fila de la tabla sintetizadora (vuelta completa). ● Respuesta de A,B,C,D,F,G y H , Análisis de respuesta. El estudiante logra clasificar conceptos y reconocer propiedades del ángulo. Por ejemplo, puede graficar de dos formas la representación del giro, asignar un nombre a este tipo de giro (ángulo completo) e identificar tanto la cantidad de vértices (uno) como el número de lados de un ángulo (dos). ● Respuesta de E Análisis de respuesta.

		El estudiante presenta confusión de conceptos del ángulo completo y llano en la tabla sintetizadora, el cual dibuja un ángulo llano y lo nombra como ángulo completo. De esta manera al finalizar la actividad en el momento de retroalimentación se abordó, se experimentó de forma práctica con los giros del cuerpo y las comparaciones de las circunferencias recortadas las diferencias particulares de estos dos tipos de giro o de ángulos, en el que uno termina el lado inicial en el mismo lado (ángulo completo) y el otro sobre la misma línea, pero en direcciones opuestas (ángulo llano). Conclusión general del punto e Los estudiantes en general logran graficar e identificar algunas propiedades del ángulo completo (2 lados, 1 vértice), por otro lado el estudiante ,E, presenta confusión en la gráfica del ángulo llano con el ángulo completo, de esta manera al finalizar la actividad en el momento de retroalimentación se abordó, se experimentó de forma práctica con los giros del cuerpo, en el que uno termina el lado inicial en el

		mismo lado (ángulo completo) y el otro sobre la misma línea pero en direcciones opuestas (ángulo llano). Conclusión general de la actividad. El estudiante logra representar gráficamente un giro de vuelta completa y percibir, de manera visual y práctica, que el lado inicial y el lado final coinciden en el mismo punto. A partir de esto, se consensúa asignar a este tipo de giro el nombre de "ángulo completo". Además, el estudiante es capaz de clasificar conceptos y reconocer propiedades del ángulo; por ejemplo, puede graficar de dos formas la representación del giro e identificar algunas propiedades del ángulo completo, como sus dos lados y un vértice. La dificultad más recurrente en esta actividad fue la confusión entre el ángulo llano y el ángulo completo, pues nombra y dibuja al ángulo completo como llano y no identifica las propiedades que los diferencian, estas dificultades fueron socializadas, en el cual, se experimentó de forma práctica con los giros del cuerpo ilustrando giros de vuelta completa y media vuelta del que uno termina el lado

		inicial en el mismo lado (ángulo completo) y el otro sobre la misma línea pero en direcciones opuestas (ángulo llano).
Construcción de ángulo llano. Propósito: Mediante los giros del cuerpo, se busca que el estudiante perciba de forma práctica el movimiento desde una posición inicial hasta una posición final, experimentando la magnitud del giro, en el cual el lado final queda ubicado en sentido contrario al lado inicial, superando de esta forma la dificultad de no poder visualizar dos lados en sentidos opuestos al considerar el ángulo únicamente como una abertura.	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. Criterio 2: Criterio 2: Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Educación matemática, 32(1), 38-66. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina lado inicial y OP se denomina lado terminal del ángulo.	Objetivo: La tarea tiene como objetivo que el estudiante sintetice las ideas de los conceptos tratados. Se espera que logre representar gráficamente un giro de media vuelta, obteniendo así la representación de un ángulo llano, percibir que el lado final coincide en una misma línea, pero en direcciones opuestas, identificar algunas propiedades del ángulo llano, como sus dos lados y un vértice y, finalmente, identificar este tipo de giro como ángulo llano. <u>ángulo llano</u> Se procede a construir el ángulo llano relacionándolo con el giro de media vuelta que realiza el cuerpo sobre la circunferencia marcada en el piso, llegando así a la idea de que media vuelta equivale a un giro sobre media circunferencia. Para ello, se indica a los estudiantes marcar un lado inicial que represente la posición de partida. Luego,

	*Según la definición de ángulo que emplee el estudiante, puede resultar difícil visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360°. Al no percibir dos lados que forman una abertura y que se unan en un vértice, los estudiantes tienden a no reconocer la existencia del ángulo. En estas representaciones, suelen interpretar la figura únicamente como una línea, sin atribuirle ninguna función adicional. *Las imágenes mentales que evocan no responden a una definición única del concepto de ángulo: cada estudiante activa su propia representación según el problema al que se enfrenta. Por ello, no existe una imagen uniforme del concepto. *La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan dos rayos, con un rayo horizontal.	para determinar la posición final, se proyecta un lado en sentido contrario a la inicial; para obtener una medida precisa del giro, este trazo se apoya en la media circunferencia que posteriormente será recortada y comparada con la marca realizada previamente en el piso. A continuación, se recorta la circunferencia en dos partes iguales, sobre las cuales se han marcado los lados del giro, y se comparan los giros realizados en medias circunferencias de distintos tamaños, incluyendo la elaborada en el piso. Se reflexiona que, sin importar el tamaño de la media circunferencia, todas representan la misma cantidad de giro: media vuelta. Finalmente, se sugiere nombrar este giro como ángulo llano y marcar su recorrido con una flecha arqueada. , Tarea 6

	Criterio 3: Torres, R., & Sánchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. * Cuatro tipos de significados del objeto matemático de ángulo: Cualitativa estático, Cualitativo Dinámico, Cuantitativo Estático, Cuantitativo Dinámico. *Las dificultades asociadas a considerar un ángulo como un par de rayos con un punto en común y un sentido estático incluyen la exclusión de ciertos valores de medida. Entre estas se encuentran la imposibilidad de admitir ángulos de 0°, 180° y 360°, así como también ángulos negativos o aquellos cuya medida supera los 360°. *Se sugiere incorporar aplicaciones prácticas que ejemplifican los diferentes significados del ángulo, complementándose con situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, entre otras. Criterio 4: Casas, L., Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la	a. Dibuja en el espacio en blanco el giro en una circunferencia de media vuelta de tu cuerpo. a. Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H , Análisis de respuesta. El estudiante, aunque no dibuja una circunferencia perfecta debido a la falta de compás, reconoce que su representación simboliza una circunferencia. Además, logra identificar puntos y propiedades clave del giro de media vuelta, como la ubicación del lado inicial y del lado final sobre la misma línea en direcciones opuestas. También asigna una flecha que indica tanto la dirección como la magnitud del giro, partiendo del lado inicial hasta el lado final. Conclusión del punto a. Los estudiantes dan uso de la circunferencia para graficar el giro de media vuelta, logra identificar puntos y propiedades claves acerca de este giro, tal es el caso de ubicación del lado inicial y el lado final sobre una misma línea en direcciones opuestas,

	construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de las Ciencias, 23(2), 201-216. Criterio 5: "Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas" (MEN, 2016; p.82). Criterio 6. "Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: "Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas" (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8. El pensamiento métrico se relaciona "Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las	además logra asignarle una flecha que indica la cantidad y dirección que parte del lado inicial y el lado final del giro realizado. Algunas dificultades que se presentaron fueron el no asignar el nombre de lado inicial y lado final a los lados, al estudiante E se le dificulto en un principio dibujar el giro de media vuelta de su cuerpo en el plano. Estas dificultades fueron tratadas en la retroalimentación que se hizo cuando llenaba la tabla sintetizadora. b. ¿Qué pasa con el lado inicial y el lado final cuando se realiza una media vuelta de tu cuerpo en una circunferencia? --- --- --- --- --- --- ● Respuesta de A,B,C,D,F,G y H Análisis de respuesta.

	cantidades, así como con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos contextos" (MEN, 2006; p.63). Criterio 9: Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico. Criterio 10: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Criterio 11: "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	El estudiante logra identificar y visualizar que, al realizar un giro de media vuelta, el lado inicial y el lado final se ubican sobre la misma línea, pero en direcciones opuestas. ● Respuesta de E Análisis de respuesta. El estudiante no responde. Este problema se abordó a la hora de llenar la tabla sintetizadora, el cual se realizó la gráfica y se nombró ángulo llano al giro de media vuelta, se detalla algunas propiedades y se realiza una gráfica opcional. Conclusión del punto b Se puede apreciar que los estudiantes logran percibir la posición de dos lados en una misma línea en orientación contraria, la dificultad que se presenta es en poder argumentar esta percepción en sus propias palabras a excepción del estudiante E que no respondió nada. Algunas de esas dificultades fueron tratadas en la retroalimentación que se realizó cuando se llenaba la tabla sintetizadora.

		c. ¿Qué nombre recibe el giro de media vuelta de tu cuerpo en una circunferencia? --- a. Respuesta de A Análisis de respuesta. El estudiante asigna nombre a este giro de su cuerpo sobre una circunferencia como “ángulo agudo” indicando confusión entre los nombres de los diferentes ángulos, este problema se corrigió a la hora de llenar la tabla sintetizadora asignado el nombre de “ángulo llano” a este tipo de giro. ● Respuesta de B,C,D,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra asignar nombre a este tipo de giro de su cuerpo sobre una circunferencia como “ángulo llano". Conclusión del punto c Los estudiantes logran asignar correctamente el nombre de ángulo llano al giro de media vuelta, con excepción del estudiante A, quien lo denomina ángulo agudo.

		Según sus propias palabras, esto se debe a que en clases anteriores había trabajado con ángulos y recordaba más el concepto de ángulo agudo. Por otro lado, el estudiante E no responde, ya que se distrajo jugando con su compañero con los recortes de circunferencias. Estas dificultades se abordaron durante la retroalimentación realizada al completar la tabla sintetizadora. d. Llena los espacios en blando de la tercera fila de la tabla 1(media vuelta). a. Respuesta de A,B,C,D,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra clasificar conceptos y reconocer propiedades del ángulo. Por ejemplo, puede graficar de dos formas la representación del giro, asignar un nombre a este tipo de giro (ángulo llano) e identificar tanto la cantidad de vértices como el número de lados de un ángulo. a. Respuesta de E Análisis de respuesta.

		El estudiante logra graficar de dos formas la representación del giro y asignar un nombre a este tipo de giro como ángulo llano, pero no logra identificar la cantidad de vértices ni el número de lados de un ángulo. Conclusión del punto d En general, los estudiantes logran clasificar conceptos y reconocer propiedades del ángulo. Por ejemplo, pueden graficar de dos formas la representación del giro, asignar un nombre a este tipo de giro como “ángulo llano” e identificar la cantidad de vértices y lados de un ángulo. Sin embargo, el estudiante E no logra determinar el número de vértices ni de lados, que luego se aclara con una charla con el estudiante. Conclusión general de la actividad. El estudiante logra representar gráficamente el giro de media vuelta, logra percibir de forma visual y práctica la ubicación del lado inicial y el lado final en una misma línea, pero en sentidos contrarios cuando se realiza tal giro. Por ende, se logra de forma consensuada asignar a este tipo de giro el nombre de “ángulo llano". Además, el estudiante logra

		clasificar conceptos y reconocer propiedades acerca del ángulo, como, por ejemplo: el estudiante logra graficar de dos formas la representación del giro, también, logra identificar y percibir la cantidad de vértices y lados del ángulo.
Construcción de ángulo recto. Propósito: Se busca que, mediante los giros del cuerpo, el estudiante perciba de forma práctica el movimiento desde una posición inicial hasta una posición final y experimente la magnitud del giro. En este proceso, el lado inicial queda ubicado en un cuarto de vuelta, y mediante construcciones que incluyen recortes y trazos, se obtiene un cuarto de circunferencia. Al relacionar este cuarto de circunferencia con el cuarto de giro del cuerpo, se busca que el estudiante logre visualizar y comprender la cantidad exacta de giro correspondiente al ángulo	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. Criterio 2 Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Educación matemática, 32(1), 38-66. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina lado inicial y OP	Objetivo: Esta tarea busca sintetizar las ideas de los conceptos trabajados en la actividad. Se pretende que el estudiante represente de diferentes formas el giro de un cuarto de vuelta, además de experimentar y visualizar cómo un lado inicial se desplaza hacia un lado final, observando que este último queda ubicado a una cantidad de giro precisa. Con la ayuda del recorte de media circunferencia, se busca que el estudiante relacione este giro con los movimientos de su propio cuerpo, identifique algunas propiedades del ángulo recto, como sus dos lados y un vértice, y, de esta manera, reconozca correctamente este tipo de giro con el nombre de ángulo recto. <u>ángulo recto</u>

que denominaremos ángulo recto.	se denomina lado terminal del ángulo. *Según la definición de ángulo que emplee el estudiante, puede resultar difícil visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360°. Al no percibir dos lados que forman una abertura y que se unan en un vértice, los estudiantes tienden a no reconocer la existencia del ángulo. En estas representaciones, suelen interpretar la figura únicamente como una línea, sin atribuirle ninguna función adicional. *Las imágenes mentales que evocan no responden a una definición única del concepto de ángulo: cada estudiante activa su propia representación según el problema al que se enfrenta. Por ello, no existe una imagen uniforme del concepto. *La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan	Se procede a construir el ángulo recto relacionándolo con el giro de un cuarto de vuelta que realiza el cuerpo sobre la circunferencia marcada en el piso, llegando así a la idea de que un cuarto de vuelta equivale a un giro sobre un cuarto de circunferencia. Para ello, se indica a los estudiantes marcar un lado inicial que represente la posición de partida. Luego, para determinar la posición final, se divide en dos la media circunferencia que representa el ángulo llano: se unen sus dos extremos o puntas, generando una línea central que coincide con el punto de origen; esta línea se marca y se recorta. El lado obtenido en esta división será el lado final. De este modo, la circunferencia queda dividida en cuatro partes iguales, cada una correspondiente a un cuarto de vuelta. A continuación, se comparan los giros representados por los cuartos de circunferencia de distintos tamaños, reflexionando que, independientemente de su tamaño, todos representan la misma cantidad de giro: un cuarto de vuelta. Finalmente, se sugiere nombrar este giro

	dos rayos, con un rayo horizontal. Criterio 3: Torres, R., & Sánchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. * Cuatro tipos de significados del objeto matemático de ángulo: Cualitativa estático, Cualitativo Dinámico, Cuantitativo Estático, Cuantitativo Dinámico. *Se sugiere incorporar aplicaciones prácticas que ejemplifican los diferentes significados del ángulo, complementándose con situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, entre otras. Criterio 4: Casas, L., Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de las Ciencias, 23(2), 201-216. Criterio 5: “Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y	como ángulo recto y marcar su recorrido con una flecha arqueada. , , Tarea 7 a. Dibuja en tu cuaderno el giro en una circunferencia de un cuarto de vuelta de tu cuerpo. ● Respuesta de A,C , Análisis de respuesta. El estudiante gráfica una circunferencia y representa sobre ella el giro de un cuarto de vuelta, logra identificar puntos y propiedades claves acerca de este giro, tal es el caso de ubicación del lado inicial y el lado final a una cantidad de giro determinado, el cual, para tener una grafica más precisa se les sugirió el uso de la cuarta parte de la circunferencia recortada para ubicar los lados y tener una

	dinámicas" (MEN, 2016; p.82). Criterio 6. "Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: "Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas" (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8. El pensamiento métrico se relaciona "Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos	figura más precisa de este tipo de giro. El estudiante no asigna flecha que indique la cantidad y dirección que parte del lado inicial y el lado final del giro realizado. Este problema se logra superar en la tabla sintetizadora. ● Respuesta de B,E El estudiante gráfica de forma parcial de una circunferencia y representa sobre ella el giro de un cuarto de vuelta, logra identificar puntos y propiedades claves acerca de este giro, tal es el caso de ubicación del lado inicial y el lado final a una cantidad de giro determinado, el cual, para tener una grafica más precisa se les sugirió el uso de la cuarta parte de la circunferencia recortada para ubicar y trazar los lados y tener una figura más precisa de este tipo de giro. El estudiante asigna una flecha arqueada que indica la cantidad y dirección del giro que parte de una posición inicial a una posición final del giro realizado, con la peculiaridad que a estas posiciones no le asignan nombre. Este problema se logra superar en el diálogo con

	contextos" (MEN, 2006; p.63). Criterio 9: Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico. Criterio 10: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Criterio 11: "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	los estudiantes al llenar la tabla sintetizadora. 2. Respuesta de D,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante gráfica una circunferencia y representa sobre ella el giro de un cuarto de vuelta, logra identificar puntos y propiedades claves acerca de este giro, tal es el caso de ubicación del lado inicial y el lado final a una cantidad de giro determinado, por ende, para tener una grafica más precisa se les sugirió el uso de la cuarta parte de la circunferencia recortada para ubicar y trazar los lados y tener una figura más precisa de este tipo de giro. El estudiante asigna una flecha arqueada que indica la cantidad y dirección del giro que parte de una posición inicial y llega a una posición final del giro realizado, además, a estas posiciones le asignan el nombre de lado inicial y lado final. Conclusión del punto a Los estudiantes logran graficar una circunferencia y representar sobre ella el giro de un cuarto de vuelta,

		además, llegan a identificar puntos y propiedades claves acerca de este giro, tal es el caso de ubicación del lado inicial y el lado final a una cantidad de giro determinado, por ende, para tener una grafica más precisa se les sugirió el uso de la cuarta parte de la circunferencia recortada para ubicar y trazar los lados y tener una figura más precisa de este tipo de giro. Los estudiantes asignan una flecha arqueada que indica la cantidad y dirección del giro que parte de una posición inicial y llega a una posición final del giro, a estas posiciones le asignan el nombre de lado inicial y lado final. Algunas dificultades presentadas fueron: algunos estudiantes no asignan la flecha arqueada que indica la dirección y cantidad de giro realizado, otros no asignan nombres del lado inicial y lado final. Estas dificultades fueron tratadas en la retroalimentación que se realizó cuando se llenaba la tabla sintetizadora. b. ¿Qué nombre recibe el giro de un cuarto de vuelta de tu cuerpo en una circunferencia?

		--- --- --- --- 1. Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra asignar nombre a este tipo de giro de su cuerpo sobre una circunferencia como “ángulo recto". Conclusión del punto b Los estudiantes logran asignar el nombre de ángulo recto al giro de cuarto de vuelta de su cuerpo. c. Llena los espacios en blando de la cuarta fila de la tabla 1(un cuarto de vuelta). 1. Respuesta de A,B,C,E,F,G y H , Análisis de respuesta. El estudiante consigue clasificar conceptos y reconocer propiedades relacionadas con el ángulo.

		Por ejemplo, es capaz de graficar la representación del giro de dos maneras, identificar sus dos lados y su vértice, así como asignar un nombre a este tipo de giro, en este caso, ángulo recto. Aunque al inicio muestra confusión al nombrarlo "ángulo agudo", se llega a un consenso utilizando recortes de la circunferencia (un cuarto de circunferencia). Con esta ilustración se evidencia la medida particular del ángulo recto y se explica que un ángulo agudo es más pequeño que dicha medida. De esta forma, se establece con claridad el nombre correcto para este giro en ángulo recto, diferenciándolo adecuadamente del ángulo agudo. Respuesta de D , Análisis de respuesta. El estudiante presenta dificultad para graficar un ángulo recto; en su representación dibuja un ángulo agudo, evidenciando una confusión conceptual. No obstante, logra identificar

		propiedades generales del ángulo, como sus dos lados y el vértice, y es capaz de graficarlos y nombrarlos como lado inicial y lado final. Aunque al inicio muestra confusión al representar un ángulo agudo en lugar de uno recto, se llega a un consenso mediante el uso de recortes de circunferencia (un cuarto de circunferencia). Esta ilustración permite evidenciar la medida particular del ángulo recto y aclarar que un ángulo agudo es más pequeño que dicha medida. Conclusión del punto c En general los estudiantes logran clasificar conceptos y reconocer diversas propiedades relacionadas con los ángulos. Por ejemplo, es capaz de graficar de dos maneras la representación del giro y asignar un nombre adecuado a este tipo de giro (ángulo recto). Además, identifica correctamente la cantidad de vértices y lados que conforman un ángulo, así como también dibuja la flecha de giro correspondiente a la cantidad y al sentido del giro. La dificultad más común en este punto fue la confusión al graficar y nombrar el ángulo

		recto y el ángulo agudo: en varios casos, la representación o el nombre asignado al ángulo recto correspondía al de un ángulo agudo. Las dificultades presentadas fueron dialogadas al finalizar la actividad, de esta manera se reelaboraron las gráficas en los respectivos espacios en blanco de la tabla sintetizadora en el momento de la retroalimentación como se muestra a continuación: Conclusión general de la actividad. El estudiante logra representar gráficamente el giro de un cuarto de vuelta y percibir de manera visual y práctica la ubicación del lado inicial y del lado final para una determinada cantidad de giro. De este modo, se consigue de forma consensuada asignar a este tipo de giro el nombre de “ángulo recto”. Además, el estudiante clasifica conceptos y reconoce diversas propiedades del ángulo; por ejemplo, es capaz de graficar la representación del giro de dos maneras e identificar la cantidad de vértices y lados que lo componen. Una de las dificultades más comunes fue la omisión de la

		flecha que indica la cantidad y la dirección del giro, así como la confusión entre la construcción gráfica del ángulo recto y la del ángulo agudo. Por ello, durante el diálogo de retroalimentación al completar la tabla sintetizadora, se recurrió a comparaciones con objetos cotidianos. En este caso, se utilizó la semejanza entre el ángulo recto y las esquinas de las baldosas, lo que permitió evidenciar su medida y aclarar que cualquier giro menor corresponde a un ángulo agudo.
Punto 4: construcción de ángulo agudo. Propósito: Se busca que, mediante giros corporales, el estudiante perciba de forma práctica el movimiento desde una posición inicial hasta una final y experimente la magnitud del giro. En este proceso, el lado inicial queda ubicado en un octavo de vuelta y, mediante construcciones que incluyen recortes y trazos, se obtiene un cuarto de circunferencia. Al relacionar este octavo de circunferencia con el	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. Criterio 2: Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Educación matemática, 32(1), 38-66.	Objetivo: Esta tarea tiene como objetivo sintetizar los conceptos trabajados durante la actividad. Se espera que el estudiante logre dibujar el giro de un octavo de vuelta y representar gráficamente un ángulo agudo, identificando que este es menor que un ángulo recto y diferenciándolo de este. Con la ayuda del recorte de un octavo de circunferencia, se busca que el estudiante relacione este giro con los movimientos de su propio cuerpo, reconozca algunas propiedades del ángulo agudo, como sus dos lados y su vértice, y asigne correctamente a este tipo de

giro corporal —menor que un ángulo recto— se pretende que el estudiante visualice y comprenda la cantidad de giro correspondiente al ángulo que denominaremos ángulo agudo. Además, se busca superar la imagen estandarizada del ángulo agudo, comúnmente representado sobre una línea recta horizontal con apertura hacia la derecha.	*Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina lado inicial y OP se denomina lado terminal del ángulo. *Según la definición de ángulo que emplee el estudiante, puede resultar difícil visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360°. Al no percibir dos lados que forman una abertura y que se unan en un vértice, los estudiantes tienden a no reconocer la existencia del ángulo. En estas representaciones, suelen interpretar la figura únicamente como una línea, sin atribuirle ninguna función adicional. *Las imágenes mentales que evocan no responden a una definición única del concepto de ángulo: cada estudiante activa su propia representación según el problema al que se enfrenta. Por ello, no existe una imagen uniforme del concepto.	giro el nombre de ángulo agudo. <u>ángulo agudo</u> Se procede a construir el ángulo agudo relacionándolo con el giro de un octavo de vuelta que realiza el cuerpo sobre la circunferencia marcada en el piso, llegando así a la idea de que un octavo de vuelta equivale a un giro sobre un octavo de circunferencia. Para ello, se indica a los estudiantes marcar un lado inicial que represente la posición de partida. Luego, para determinar la posición final, se divide en dos la circunferencia que representa el ángulo recto: se utiliza la porción de papel correspondiente al cuarto de circunferencia, se unen sus dos extremos o puntas para generar una línea central, se marca la línea recta generada en el centro, el cual coincide su partida desde el punto de origen y se recorta. El lado obtenido será el lado final. De esta manera, la circunferencia queda dividida en ocho partes iguales, cada una correspondiente a un octavo de vuelta.

	*La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan dos rayos, con un rayo horizontal. Criterio 3: Torres, R., & Sanchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. * Cuatro tipos de significados del objeto matemático de ángulo: Cualitativa estático, Cualitativo Dinámico, Cuantitativo Estático, Cuantitativo Dinámico. *Se sugiere incorporar aplicaciones prácticas que ejemplifican los diferentes significados del ángulo, complementándose con situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, entre otras. Criterio 4: Casas, L., Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de	A continuación, se comparan los giros representados por los octavos de circunferencia de distintos tamaños, reflexionando que, sin importar sus dimensiones, todos representan la misma cantidad de giro: un octavo de vuelta. Finalmente, se sugiere nombrar este giro como ángulo agudo y marcar su recorrido con una flecha arqueada. , Tarea 8 a. Dibuja en el espacio en blanco el giro en una circunferencia de un octavo de vuelta de tu cuerpo. a. Respuesta de A,D,E,F,G y H , Análisis de respuesta. El estudiante gráfica una circunferencia apoyándose en los giros de su propio cuerpo y

	las Ciencias, 23(2), 201-216. Criterio 5: “Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas” (MEN, 2016; p.82). Criterio 6. “Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno” (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: “Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas” (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8. El pensamiento métrico se relaciona “Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como con los procesos utilizados para	relacionándolos con los recortes de un octavo de circunferencia, que representan un octavo de vuelta. Además, logra identificar puntos y propiedades clave de este giro, como la ubicación del vértice, el lado inicial y el lado final para una cantidad determinada de giro. Para realizar una representación más precisa, se sugirió utilizar el recorte de un octavo de circunferencia para ubicar los lados y medir la cantidad de giro y la flecha arqueada para indicar el sentido y la cantidad de giro. No obstante, el estudiante A y D no asigna la flecha que indique la cantidad y la dirección del giro desde el lado inicial hasta el lado final. Este problema se logra consensuar en la retroalimentación. ● Respuesta de B,C , Análisis de respuesta. El estudiante no logra de una forma clara graficar el giro de un octavo de vuelta, se le dificulta ubicar el vértice en el centro de la circunferencia.

	medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos contextos" (MEN, 2006; p.63). Criterio 9: Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico. Criterio 10: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Criterio 11: "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	Este problema se dialoga y se logra consensuar al llenar la tabla sintetizadora. Conclusión del punto a Los estudiantes grafican una circunferencia y representan sobre ella un giro de un octavo de vuelta. Logran identificar puntos y propiedades clave de este giro, como la ubicación del lado inicial y del lado final para una cantidad de giro determinada. Para obtener una representación más precisa, se les sugirió utilizar una plantilla de una octava parte de la circunferencia recortada, con el fin de ubicar correctamente los lados y visualizar con mayor claridad este tipo de giro. Además, se les indicó asignar al ángulo una flecha arqueada que señala el sentido y la magnitud del giro realizado. Las dificultades más comunes en esta etapa fueron no incluir la flecha que indica la cantidad y dirección del giro, así como problemas de los estudiantes B y C para ubicar el vértice en el centro de la circunferencia y, en consecuencia, los lados del ángulo. Estas dificultades se aclararon al finalizar la actividad, durante la retroalimentación y la

		elaboración de la tabla sintetizadora. b. ¿Qué nombre recibe el giro de un octavo de vuelta de tu cuerpo en una circunferencia? ---------- ---------- ---------- -- a. Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra asignar nombre a este tipo de giro como “ángulo agudo". Conclusión del punto b Los estudiantes logran asignar un nombre a este tipo de giro, identificándose como un “ángulo agudo”, a excepción del estudiante F, quien no proporciona respuesta. Esta dificultad se resuelve durante la retroalimentación, al completar la tabla sintetizadora, en la cual se grafica este giro, se le nombra como ángulo agudo y se

		identifican sus lados y su vértice. c. Llena los espacios en blanco de la quinta fila de la tabla sintetizadora (octavo de vuelta). 1. Respuesta de A,B,C,F,G y H Análisis de respuesta. El estudiante logra clasificar conceptos y reconocer propiedades acerca del ángulo, como, por ejemplo: el estudiante logra graficar de dos formas la representación del giro, además logra asignar un nombre a este tipo de giro (ángulo agudo), también, logra identificar propiedades como, la cantidad de vértices y lados de un ángulo, además se logra superar la imagen estandarizada del ángulo con origen sobre una recta horizontal y con apertura hacia la derecha. ● Respuesta de D Análisis de respuesta. En un principio al estudiante presenta confusión en graficar el ángulo agudo, lo que hace es graficar una mezcla del ángulo agudo con características del ángulo recto, estas dificultades se

		consensuaron al realizar la tabla sintetizadora en el momento de la retroalimentación que se da al finalizar cada actividad. Conclusión del punto c El estudiante logra clasificar conceptos y reconocer diversas propiedades del ángulo. Por ejemplo, es capaz de representar el giro de dos formas distintas, asignar el nombre correspondiente a este tipo de giro (ángulo agudo) e identificar propiedades como la cantidad de vértices y lados que conforman un ángulo. La dificultad más común en este punto fue la confusión entre la representación del ángulo recto y la del ángulo agudo. En varios casos, la gráfica del ángulo recto correspondía a la de un ángulo agudo y viceversa, o se elaboraban representaciones de ángulos agudos con características propias de un ángulo recto, como ocurrió con el estudiante D, quien dibujó un pequeño cuadrado en el vértice del ángulo agudo. No obstante, los estudiantes lograron identificar el lado inicial, el lado final y representar correctamente la flecha que indica el sentido del giro. Asimismo, se consiguió

		superar la imagen estandarizada del ángulo cuyo origen se ubica sobre una recta horizontal con apertura hacia la derecha, pues las gráficas elaboradas ya no se limitaron a esa disposición. Las dificultades presentadas se discutieron al finalizar la actividad y, durante la retroalimentación, los estudiantes reelaboraron las gráficas en los espacios correspondientes de la tabla sintetizadora. Conclusión general de la actividad. El estudiante logra representar gráficamente el giro de un octavo de vuelta y percibir, de forma visual y práctica, la ubicación del lado inicial y del lado final para una cantidad determinada de giro, al que identifica como “ángulo agudo”. Además, clasifica conceptos y reconoce diversas propiedades del ángulo, como la representación del giro de dos maneras distintas y la identificación de la cantidad de vértices y lados. Asimismo, se supera la imagen estandarizada del ángulo con origen en una recta horizontal y apertura hacia la derecha, pues las

		gráficas elaboradas ya no se limitaron a esta disposición. Una de las dificultades más frecuentes fue la omisión de la flecha que indica la cantidad y la dirección del giro. También se observó confusión entre el ángulo recto y el ángulo agudo: en varios casos, la gráfica del ángulo recto correspondía a la de un ángulo agudo y viceversa, o se elaboraban representaciones de ángulos agudos con características propias de un ángulo recto, como ocurrió con el estudiante D, quien dibujó un pequeño cuadrado en el vértice del ángulo agudo. Para abordar estas dificultades, durante la retroalimentación y la elaboración de la tabla sintetizadora se recurre a comparaciones con objetos del entorno, como las esquinas de las baldosas para identificar el ángulo recto y distinguirlo del giro menor correspondiente al ángulo agudo. También se emplearon recortes de circunferencias para apoyar la construcción y diferenciación de los distintos tipos de ángulos. ,

Sumatoria de ángulos. Propósito: A continuación, la actividad de sumatoria de ángulos se centra en la construcción de ángulos que superan una vuelta completa. El propósito es superar las dificultades que pueden surgir cuando los estudiantes deben relacionar los ángulos con giros corporales de más de una vuelta. En este sentido, el estudio de Pachuca y Zubieta (2020) muestra que, dependiendo de la definición empleada, a los estudiantes se les dificulta visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360° (p. 61). Por ello, se opta por trabajar con combinaciones de ángulos mediante su suma, de modo que el estudiante pueda visualizar ángulos de más de una vuelta y reconocer la posición o coincidencia de los lados cuando estos se alinean con las aperturas características de los ángulos de 0°, 180° y 360°. Esto también permite evidenciar la existencia de otros	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300. Criterio 2: Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. Educación matemática, 32(1), 38-66. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se denomina lado inicial y OP se denomina lado terminal del ángulo. Criterio 3: Torres, R., & Sánchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile.	Objetivo: Esta tarea tiene el propósito de que el estudiante pueda visualizar y realizar gráficos de ángulos mayores al del ángulo completo (360°) mediante la sumatoria combinada de los ángulos ya construidos (ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto, ángulo agudo) y así poder relacionar giros de más de una vuelta con ángulos mayores al del ángulo completo teniendo presente el lado inicial y el lado final al realizar los giros, se sugiere en cada construcción asignarle una flecha arqueada el cual indique el sentido y la cantidad de giro realizado. Inicio de la actividad Se reflexiona sobre cómo la continuidad de los giros corporales sobre una circunferencia puede representarse mediante la suma de distintos ángulos. Por ejemplo, se dialoga sobre que realizar dos vueltas completas equivale a efectuar dos giros sobre la circunferencia y, por lo tanto, a sumar dos ángulos completos. De igual manera, una vuelta y media puede interpretarse como la suma de un ángulo completo y un ángulo llano.

ángulos distintos a los trabajados en actividades anteriores, construidos a partir de la suma de los ángulos previamente estudiados. Por ejemplo, un ángulo mayor que un ángulo completo puede ser un ángulo de vuelta y media, resultado de sumar un ángulo completo y un ángulo llano; o un ángulo de una vuelta más un cuarto de vuelta, equivalente a la suma de un ángulo completo y un ángulo recto. Estas combinaciones permiten ampliar la comprensión del estudiante sobre la magnitud y variedad de los ángulos.	*Las dificultades asociadas a considerar un ángulo como un par de rayos con un punto en común y un sentido estático incluyen la exclusión de ciertos valores de medida. Entre estas se encuentran la imposibilidad de admitir ángulos de 0°, 180° y 360°, así como también ángulos negativos o aquellos cuya medida supera los 360°. Criterio 4: Casas, L., Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de las Ciencias, 23(2), 201-216. * Definiciones al mismo concepto de ángulo: ángulo como región del espacio, ángulo como par de rayos o como par de semirrectas, ángulo como cantidad de giro. Criterio 5: “Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas” (MEN, 2016; p.82). Criterio 6. “Formula y resuelve situaciones	Se enfatiza la importancia de identificar el lado inicial, el lado final y el vértice, así como de incluir la flecha arqueada que indica la dirección y la cantidad de giro, el cual, permite visualizar los lados cuando estos coinciden con el ángulo llano y ángulo completo. Estos elementos permiten representar y graficar correctamente la magnitud del ángulo. <u>Sumatoria de ángulos</u> Tarea 9 a. Dibuja en el espacio en blanco: el giro de una vuelta y media, una vuelta más un cuarto de vuelta, una vuelta más un octavo de vuelta, dos vueltas. 1. Respuesta de A,C,D,E,F,G y H Análisis de respuesta.

	problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: "Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas" (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8. El pensamiento métrico se relaciona "Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se presentan en distintos contextos" (MEN, 2006; p.63).	El estudiante logra graficar exitosamente los distintos ángulos de más de una vuelta a partir de combinaciones producto de las sumatorias de los ángulos construidos anteriormente (ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto, ángulo agudo), además logran asignarle una flecha arqueada que permite visualizar la dirección y la cantidad de giro realizado, así, también se puede apreciar la posición inicial y la posición final. a. Respuesta de B Análisis de respuesta. Respuesta similar a A. aunque en la primera respuesta el vértice está por fuera de los lados, esto puede generar confusión, lo cual se dialoga con el estudiante y se aclara ● Respuesta de D Análisis de respuesta. Respuesta similar a A. ● Respuesta de E Análisis de respuesta. Presenta una respuesta similar a la del estudiante A, aunque muestra dificultad para asignar la flecha arqueada y ubicarla

	Criterio 9: Gómez, F. (2021). Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico: ·La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto · La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos Criterio 10: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Criterio 11: “Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura” (MEN, 2016; p.80).	correctamente en el lado final. Por ejemplo, en el caso de una vuelta más un octavo de vuelta, el estudiante inicia la flecha en la posición inicial y la termina en el mismo lugar, sin percatarse de que la posición final debería ser distinta. Conclusión del punto a Los estudiantes logran graficar exitosamente distintos ángulos de más de una vuelta a partir de combinaciones obtenidas mediante la suma de ángulos previamente construidos (ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto y ángulo agudo). La mayoría de ellos asigna correctamente una flecha arqueada que permite visualizar la dirección y la magnitud del giro de su cuerpo en el espacio. Además, los estudiantes logran visualizar ángulos cuando coinciden con un ángulo llano o un ángulo completo, superando así la dificultad de no poder percibir los ángulos de 0°, 180° y 360°. Esta actividad también permite reconocer la existencia de más ángulos de los previamente trabajados, superando la imagen estandarizada del ángulo, el cual la imagen evocada era del ángulo agudo, que se representaba originado

		en un lado sobre la horizontal con apertura hacia la derecha.

Tarea 10

Objetivo: Reconocer ideas y dificultades de conceptos trabajados en el desarrollo de las actividades del segundo bloque.

Para lograr lo anterior, se tuvo en consideración los siguientes criterios:

Criterio usado: 1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10 y 11

De esta manera se realiza la tarea 10.

Según la tabla sintetizadora, realiza los siguientes puntos:

a. Que nombre se da a: una vuelta completa, media vuelta, un cuarto de vuelta, octavo de vuelta, respecto a la cantidad de giro realizado con tu cuerpo en una circunferencia.

---

a. Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H

Análisis de respuesta.

Los estudiantes logran asignar los respectivos nombres a los diferentes giros realizados con su cuerpo.

Conclusión del punto a

Los estudiantes en general logran asignar nombres a los diferentes giros realizados con su cuerpo en una circunferencia. De esta manera, los estudiantes, logran asignar al giro de vuelta completa con nombre de ángulo completo, media vuelta con el nombre de ángulo llano, un cuarto de vuelta con el nombre de ángulo recto, y un octavo de vuelta con el nombre de ángulo agudo.

b. cuantos vértices y cuantos lados tienen un: un ángulo completo, un ángulo llano, un ángulo recto, ángulo agudo.

- Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H

Análisis de respuesta.

El estudiante logra reconocer algunas propiedades del ángulo, en este caso, la cantidad de vértices y lados de los distintos ángulos trabajados en la actividad.

Conclusión del punto b

Los estudiantes logran reconocer algunas propiedades del ángulo, en este caso, la cantidad de vértices y lados de los distintos ángulos trabajados en la actividad.

c. Dibuja en el espacio en blanco un: un ángulo completo, un ángulo llano, un ángulo recto, ángulo agudo.

- Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H

Análisis de respuesta.

Los estudiantes logran representar giros de su cuerpo de forma gráfica relacionándolo con ángulos (ángulo completo, ángulo llano, ángulo recto, ángulo agudo). Además, algunos logran asignar nombre a los lados como lado inicial y lado final.

Conclusión del punto c

En general, los estudiantes lograron representar gráficamente los giros de su cuerpo y relacionarlos con diferentes tipos de ángulos (completo, llano, recto y agudo). Sin embargo, se evidenciaron algunas dificultades recurrentes. A varios estudiantes (C y F) se les hizo complejo asignar la flecha que indica la dirección del giro, determinar correctamente la posición final o señalar la cantidad de giro, también al A D se le dificulta representar el ángulo recto, ya que, cuando se le solicita dibujarlo, realiza en su lugar un ángulo agudo. Como consecuencia, algunos omitieron la flecha y dibujaron únicamente la abertura del ángulo, lo que impide identificar la posición inicial y final del

movimiento. Otros sí incluyeron la flecha, pero la ubicaron con un sentido invertido, es decir, iniciando en el lado final y terminando en el lado inicial, lo cual es incorrecto. Estas situaciones reflejan una confusión significativa en la comprensión y representación de la flecha direccional en los ángulos.

d. ¿Consideras que en la circunferencia se podría hacer más divisiones que relacionen los giros de tu cuerpo?, si la respuesta es sí o no, justificar el porqué.

- Respuesta de A,B,C,D,E,F,G y H

,

Análisis de respuesta.

Los estudiantes relacionan las divisiones de la circunferencia con los giros de su cuerpo.

Conclusión del punto d

Los estudiantes logran relacionar los giros de su cuerpo con las divisiones de la circunferencia.

e. Notaste que en la construcción del ángulo completo, llano, recto y agudo las diferentes porciones de circunferencia de diferentes tamaños indican la misma cantidad de giro, como por ejemplo en la siguiente imagen del ángulo recto.

- Que podemos concluir de acuerdo a lo anterior.

- Si las circunferencias crecen infinitamente como se muestra en la anterior imagen, ¿será que el ángulo generado por la cantidad de giro de un lado inicial y de lado final también crece?,¿SÍ?, ¿NO?,¿por qué?

- ¿Qué sucede con el lado inicial y el lado final de un ángulo cuando las circunferencias son cada vez más grandes?

- Si los lados de un ángulo crecen infinitamente, ¿será que el ángulo cambia de tamaño?

---

1. Respuesta de A

Análisis de respuesta.

El estudiante logra identificar propiedades invariantes acerca del ángulo, tal es el caso que identifica que, aunque crezca el tamaño de las circunferencias y lados donde se realiza el giro, el ángulo no cambia, sigue siendo el mismo.

- Respuesta de B,C,D,E,F,G y H

,

Análisis de respuesta.

Respuesta similar a A, además logra identificar que, así como pueden crecer las circunferencias, también pueden crecer los lados.

Conclusión del punto e

Los estudiantes logran identificar las propiedades del ángulo y reconocer la conservación de su magnitud a pesar de los cambios en su representación. En particular, comprenden que, aunque aumente el tamaño de las circunferencias o de los lados donde se realiza el giro, el ángulo no cambia: sigue siendo el mismo. Es decir, reconocen que tanto las circunferencias como los lados pueden crecer, pero la medida angular generada por la cantidad de giro desde una posición inicial hasta una posición final permanece constante. Con ello, superan las dificultades que inicialmente presentaban al asociar la longitud de los rayos con la medida del ángulo.

Fuente: Elaboración Propia

Anexo D

Análisis de la aplicación de la prueba final.

pregunta(s) prueba final	**Criterio**	**Criterio usado/Propósito/Análisis de respuesta de las preguntas**	**Conclusión general**

1	Criterio 1: Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *La Visualización puede comprenderse como un proceso mediante el cual los objetos, conceptos, fenómenos y procesos son llevados a una representación visual, así como la posibilidad de realizar el proceso contrario, es decir, pasar de la representación visual a aquello que esta representa. *Desde esta perspectiva, la visualización también se concibe como la relación o transferencia que se establece entre un dibujo, entendido como representación gráfica, y una figura, correspondiente a la	Criterio Usado: 1,2,3,4,5 Propósito: Indagar si el estudiante reconoce de forma gráfica propiedades básicas (lados, vértice) de un ángulo en una situación estática. 1. En la siguiente imagen, indica y nombra el vértice y los lados del ángulo. respuesta de A, B, C, E, F, G y H Análisis de respuesta El estudiante reconoce los lados y el vértice del ángulo, por lo tanto, el estudiante percibe de forma gráfica propiedades básicas de los ángulos. Respuesta de D Análisis de respuesta.	Los estudiantes en general reconocen e identifican en la gráfica los lados y el vértice del ángulo, por tanto, perciben de forma gráfica propiedades básicas de los ángulos a excepción de un estudiante que no responde y , no hay información que nos permita analizar.

	imagen mental que el observador construye a partir de dicha representación. *En palabras de Duval (1998), un dibujo permite visualizar una o varias figuras: 1D/2D, es decir, elementos unidimensionales representados en un plano bidimensional; 2D/2D, como líneas rectas o curvas que conforman fronteras cerradas —por ejemplo, las de un triángulo o un cuadrilátero—; o 3D/2D, como las representaciones planas de objetos tridimensionales, tales como cubos o esferas. *Identificación de figuras como estrategia para representar objetos reales u objetos matemáticos: aprehensión perceptual,	El estudiante no responde.	
2		Criterio Usado: 3,4,5,6,7 y 8 Propósito: Indagar si los estudiantes reconocen, ubican e identifican las propiedades básicas de un ángulo, en este caso el vértice. Asimismo, se busca determinar si reconocen de forma gráfica el ángulo llano y observar posibles dificultades para visualizar las dos líneas que se conectan en un mismo punto y se	En general, los estudiantes reconocen y asignan correctamente el tipo de ángulo y el vértice presentado en la gráfica. Sin embargo, algunos presentan dificultades para identificar el ángulo por su nombre; en este caso, dos

	aprehensión discursiva (anclaje visual al anclaje discursivo, anclaje discursivo al anclaje visual) y aprehensión operatoria (aprehensión operatoria de cambio figural, aprehensión operatoria de reconfiguración). Criterio 2: Pachuca Herrera, Y., Zubieta Badillo, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Un ángulo plano se genera cuando, dentro de un mismo plano, una semirrecta gira desde su posición inicial OX hasta alcanzar su posición terminal OP. En este caso, el punto O vuelve a ser el vértice del ángulo; OX se	proyectan en direcciones opuestas. Además, se pretende verificar si los estudiantes han superado la dificultad de identificar los ángulos de 0° y 360°, ya que suelen no percibir los dos lados que forman la abertura y los interpretan como una sola línea sin función angular. 2. En las siguientes imágenes, indica el nombre de cada giro o ángulo y señala con un círculo el vértice. grupo 3.3 A, B, C, E, F, G respondieron de la siguiente forma: Análisis de respuesta. Los estudiantes reconocen y asignan correctamente el tipo de ángulo presentado	estudiantes confunden el ángulo llano con el ángulo recto. Esto se debe, en parte, a inferencias propias derivadas de sus experiencias previas con otros objetos matemáticos. Por ejemplo, los estudiantes D y H mencionan que llaman ‘recto’ al ángulo llano porque se forma a partir de una línea recta, tal como lo trabajaron en el juego del triqui; y llaman ‘llano’ al ángulo recto porque no recuerdan su nombre con claridad, a diferencia del

	denomina lado inicial y OP se denomina lado terminal del ángulo. *Según la definición de ángulo que emplee el estudiante, puede resultar difícil visualizar los ángulos de 0°, 180° y 360°. Al no percibir dos lados que forman una abertura y que se unan en un vértice, los estudiantes tienden a no reconocer la existencia del ángulo. En estas representaciones, suelen interpretar la figura únicamente como una línea, sin atribuirle ninguna función adicional. *Las imágenes mentales que evocan no responden a una definición única del concepto de ángulo: cada estudiante activa su propia representación	en la gráfica y, además, señala con una flecha la ubicación del vértice de manera adecuada. En consecuencia, demuestra identificar los diferentes tipos de ángulos representados gráficamente, superando las dificultades observadas en los criterios 2 y 3 relacionadas con la visualización de los ángulos de 0°, 180° y 360°. Así, el estudiante logra reconocer gráficamente los ángulos de 180° y 360°, identificándose como ángulo llano y ángulo completo, respectivamente. D y H responden de la siguiente forma: Análisis de respuesta. El estudiante reconoce y ubica el vértice de cada ángulo, sin embargo, presenta confusión, en nombrar los ángulos, por ejemplo, al ángulo recto lo	ángulo completo, que asocian con un balón o el giro de una vuelta completa, y del ángulo agudo, que han trabajado con su profesora y les resulta más familiar y fácil de reconocer. De este modo, se puede inferir que la mayoría de los estudiantes han superado las dificultades señaladas en los criterios 2 y 3, relacionadas con la visualización de los ángulos de 0°, 180° y 360°. Así, logran reconocer gráficamente los ángulos de 180° y 360°, identificándose como ángulo llano y ángulo

	según el problema al que se enfrenta. Por ello, no existe una imagen uniforme del concepto. *La imagen evocada por la mayoría de los estudiantes al hacer una representación gráfica de ángulo está sumamente conectada a una figura estereotipada (ángulo agudo, con su vértice ubicado del lado izquierdo del que emanan dos rayos, con un rayo horizontal. Criterio 3: Torres, R., & Sánchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. *Cuatro tipos de significados del objeto matemático de ángulo: Cualitativa estático, Cualitativo Dinámico,	llama “llano”, y al ángulo llano lo llama “recto”. Por tanto, el estudiante reconoce y asigna nombres al ángulo completo y ángulo agudo, pero presenta confusión con los ángulos recto y llano, mostrando que, aunque el estudiante reconoce las diferentes figuras como ángulos se le dificulta reconocerlos por su nombre. Al preguntarle a los estudiantes de porque la asignación de sus nombres ellos mencionan que al ángulo llano lo llaman recto debido a que se forma a partir de una línea recta cual se trabajó en el juego del triqui, y al ángulo recto lo llaman llano debido a que es el único que no se acuerdan como se llama a diferencia del ángulo completo que lo asocian con un balón o el giro de una vuelta	completo, respectivamente.

	Cuantitativo Estático, Cuantitativo Dinámico. *Las dificultades asociadas a considerar un ángulo como un par de rayos con un punto en común y un sentido estático incluyen la exclusión de ciertos valores de medida. Entre estas se encuentran la imposibilidad de admitir ángulos de 0°, 180° y 360°, así como también ángulos negativos o aquellos cuya medida supera los 360°. *Las actividades que presentan menor dificultad para formar distintos ángulos — incluidos los de 0° y los mayores de 360°— son aquellas que se basan en un rayo inicial y otro rayo final que gira hasta obtener la medida de ángulo deseada.	completa y el ángulo agudo del que ya han venido trabajando con su profesora lo cual es más común y fácil de reconocer.	
3,4,5,6		Criterio usado:1,2,3,4,5,6,8,9,10 y 11 Propósito: Indagar si el estudiante relaciona los diferentes giros de su cuerpo con nociones de ángulos específicos. 3. ¿Qué nombre recibe el giro de una vuelta completa de tu cuerpo en una circunferencia? 4. ¿Qué nombre recibe el giro de media vuelta de tu cuerpo en una circunferencia? 5. ¿Qué nombre recibe el giro de un cuarto de vuelta de tu cuerpo en una circunferencia?	Los estudiantes en general logran relacionar los diferentes tipos de giros de su cuerpo con ángulos, en este caso, los estudiantes logran relacionar el giro de una vuelta completa con el ángulo completo, el giro de media vuelta con el ángulo llano, el giro de cuarto de vuelta con el ángulo recto y el giro de un octavo de vuelta con el ángulo agudo.

	*Las dificultades relacionadas con la asociación entre la longitud de los rayos y la medida del ángulo que representan no muestran evidencia de ser provocadas por los textos escolares. Estas confusiones podrían originarse en las propias inferencias del estudiantado, derivadas de sus experiencias previas con otros objetos matemáticos. *Se sugiere incorporar aplicaciones prácticas que ejemplifican los diferentes significados del ángulo, complementándose con situaciones cotidianas, como los giros del cuerpo, entre otras.	6. ¿Qué nombre recibe el giro de un octavo de vuelta de tu cuerpo en una circunferencia? Respuesta de A, B, C, F, G y H Análisis de respuesta. Los estudiantes logran relacionar los diferentes tipos de giros de su cuerpo con los ángulos correspondientes: el giro de una vuelta completa con el ángulo completo, el giro de media vuelta con el ángulo llano, el giro de un cuarto de vuelta con el ángulo recto y el giro de un octavo de vuelta con el ángulo agudo. Respuesta de D Análisis de respuesta. El estudiante logra relacionar los diferentes giros de su cuerpo con los diferentes tipos de ángulo,	Sin embargo, dos estudiantes presentan confusión al identificar por su nombre al giro de cuarto de vuelta y el giro de un octavo de vuelta, ya que, al giro de un cuarto de vuelta lo llama agudo y al giro de un octavo de vuelta lo llama recto. De esta manera, aunque algunos estudiantes se les dificulta identificar los ángulos por sus respectivos nombres, si logran relacionar los diferentes giros de su cuerpo con diferentes ángulos.

	Criterio 4. Casas, L., Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Casas (2005, p. 202) el aprendizaje del ángulo se basa en que los alumnos integren distintas experiencias educativas, como también, deben integrar distintas definiciones, de tal forma que el estudiante debe darse cuenta que no es posible expresar ese concepto en palabras, pero si pueden notar la implicación de dos líneas unidas en un punto y alguna relación entre ellas. Estas relaciones pueden ser expresadas de forma diferente acorde a la circunstancia que lo requiera, por ejemplo, una cantidad de giro, la inclinación de dos rayos,	sin embargo, presenta confusión al identificar por su nombre al giro de cuarto de vuelta y el giro de media vuelta, ya que, al giro de un cuarto de vuelta lo llama llano y al giro de media vuelta lo llama recto en relación a línea recta. Respuesta de E Análisis de respuesta. El estudiante logra relacionar los diferentes giros de su cuerpo con los diferentes tipos de ángulo, sin embargo, presenta confusión al identificar por su nombre al giro de cuarto de vuelta y el giro de un octavo de vuelta, ya que, al giro de un cuarto de vuelta lo llama agudo y al giro de un octavo de vuelta lo llama recto.	
7		**Criterio: 2,3,4,5,6,8,9,10,11**	Los estudiantes logran identificar propiedades

	o lo puntiagudo de una región angular. *Definiciones al mismo concepto de ángulo: ángulo como región del espacio, ángulo como par de rayos o como par de semirrectas, ángulo como cantidad de giro. * Concepción Estática de Ángulo, Concepción Dinámica de Ángulo, Conceptos Mixtos Criterio 5: "Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas" (MEN, 2016; p.82). Criterio 6: "Formula y resuelve situaciones problemáticas relacionadas con la ubicación, la dirección y el desplazamiento de	**Propósito:** Indagar si el estudiante reconoce propiedades básicas (lados, vértice) de un ángulo. **7. Cuántos vértices y cuántos lados tiene**: **-un ángulo completo**. ---------- **-un ángulo llano**. ---------- ***respuesta de A, B, C, D, E, F, G, H*** ***Análisis de respuesta.*** Los estudiantes logran identificar propiedades básicas de los distintos tipos de ángulos, por ende, identifican dos lados y un vértice para cada ángulo, superando de esta forma	básicas de los distintos tipos de ángulos, esto es, identifican dos lados y un vértice para cada ángulo, superando de esta forma las dificultades para identificar y concebir la existencia de los ángulos de 180º y 360º al no poder visualizar e identificar dos lados que forman un ángulo expuesto en los criterios 2 y 3.

	objetos presentes en su entorno" (DBA, 2016; p. 26). Criterio 7: "Describir y referenciar la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas" (DBA, 2016; p. 19). Criterio 8: El pensamiento métrico se relaciona "Con la comprensión que desarrolla una persona acerca de las magnitudes y las cantidades, así como con los procesos utilizados para medirlas. También implica la capacidad de emplear de manera flexible diferentes sistemas de medición, de acuerdo con las situaciones y necesidades que se	las dificultades para identificar y concebir la existencia de los ángulos de 180º y 360º expuestos en los criterios 2 y 3.	
8		**Criterio usado:1, 2,3,4,5,8,9 y 10** **Propósito:** Indagar si el estudiante puede representar gráficamente distintos tipos de ángulos	Los estudiantes logran representar gráficamente distintos tipos de ángulos (ángulo completo, ángulo

	presentan en distintos contextos" (MEN, 2006; p.63). Criterio 9. Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA#5 grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Procesos asociados al desarrollo del pensamiento métrico: · La construcción de los conceptos de cada magnitud · La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes · La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de	en dos dimensiones. En particular, se busca identificar dificultades relacionadas con las imágenes evocadas y estandarizadas del ángulo agudo, así como posibles obstáculos en la visualización del ángulo llano y del ángulo completo. Además, se pretende analizar si el estudiante logra diferenciar gráficamente el ángulo recto del ángulo agudo. **8. Dibuja en el espacio en blanco un:** ***respuesta de A, B, F, G y H*** ***Análisis de respuesta.*** Los estudiantes logran representar gráficamente distintos tipos de ángulos junto con sus propiedades relacionadas con la cantidad de giro. Representan de manera adecuada los ángulos	llano y ángulo agudo) junto con sus propiedades básicas, como la cantidad de giro, la presencia de dos lados, un vértice y la flecha arqueada que indica la dirección del ángulo. Sin embargo, algunos estudiantes continúan utilizando la imagen evocada estandarizada del ángulo agudo. Además, se evidencia en ciertos casos dificultad para representar el ángulo recto, ya que la abertura o cantidad de giro coincide con la de un ángulo agudo; para distinguirlo, en lugar de

	capturar lo continuo con lo discreto · La apreciación del rango de las magnitudes · La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos · La diferencia entre la unidad y el patrón de medición · La asignación numérica · El papel del trasfondo social de la medición Criterio 10: Vasco, C. (1992). Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. Criterio 11: "Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura" (MEN, 2016; p.80).	completo, llano, recto y agudo. Sin embargo, en la representación del ángulo agudo persiste la imagen evocada estandarizada señalada en el criterio 2: los estudiantes tienden a dibujar un ángulo agudo estereotipado, con el vértice ubicado al lado izquierdo y dos rayos que emergen de él, uno de ellos en posición horizontal. ***Respuesta de C y E*** ***Análisis de respuesta.*** Los estudiantes logran representar distintos tipos de ángulos (ángulo completo, ángulo llano y ángulo agudo); sin embargo, presentan dificultades para representar el ángulo recto, ya que el tamaño del giro entre el lado inicial y el lado final es menor al correspondiente a este tipo de ángulo. En consecuencia, suelen	dibujar un cuadrado entre los lados, elaboran una especie de paralelogramo en el que la abertura de sus lados coincide con la del ángulo agudo, como ocurre con los estudiantes C y E. Aunque varios estudiantes logran representar distintos tipos de ángulos, aún presentan confusiones al asignarles sus nombres. Por ejemplo, el estudiante D intercambia los nombres de ángulo llano y ángulo recto. Esto sugiere que, si bien reconoce diferentes ángulos

		dibujar un ángulo agudo acompañado de un rectángulo entre los lados. Esto sugiere que los estudiantes aún no identifican con claridad las características específicas del ángulo recto, por lo que su comprensión de este concepto sigue siendo insuficiente. ***Respuesta de D*** ***Análisis de respuesta.*** El estudiante logra representar distintos tipos de ángulos (ángulo completo, ángulo llano, ángulo agudo), pero persiste la confusión de asignarle el nombre de ángulo llano al ángulo recto y viceversa.	y algunas de sus propiedades, aún presenta dificultades para identificar sus características específicas, especialmente aquellas que diferencian el ángulo recto del ángulo agudo.
9 y 10		**Criterio usado: 1,2,3** **Propósito:** Indagar si el estudiante reconoce propiedades básicas como	Los estudiantes reconocen las propiedades básicas de un ángulo, como la

		la cantidad de lados y cándida de vértices de un ángulo. **9. ¿Cuántos lados tiene un ángulo?** **10. ¿Cuántos vértices tiene un ángulo?** ***respuesta de A, B,C, D, E, F, G y H*** ***Análisis de respuesta.*** Los estudiantes reconocen las propiedades básicas de un ángulo, como la presencia de dos lados y un único vértice.	presencia de dos lados y un único vértice.
11		**Criterio usado: 2 y 3** **Propósito:** Indagar la concepción del estudiante acerca de lo que es un ángulo, así como identificar qué concepciones han sido	En general, algunos estudiantes conciben el ángulo como la cantidad de giro de su cuerpo desde una

		influenciadas por la actividad en la concepción que el estudiante presenta; es decir, determinar si el estudiante manifiesta una concepción estática, dinámica, mixta u otra diferente. **11. ¿Qué es un ángulo?** ***Respuesta de A, F, G y H*** ***Análisis de respuesta.*** Los estudiantes logran relacionar el ángulo como la cantidad de giro de su cuerpo desde un lado inicial hasta un lado final. ***Respuesta de B*** ***Análisis de respuesta.*** El estudiante logra caracterizar y relacionar el ángulo como la cantidad de giro de un lado inicial hasta un lado final. ***Respuesta de C y D*** ***Análisis de respuesta.***	posición inicial hasta una posición final; otros también lo entienden como la cantidad de giro corporal. Sin embargo, el estudiante "E" presenta dificultades para caracterizar con claridad lo que para él representa un ángulo. Aun así, se cumple el objetivo en la mayoría de estudiantes el desarrollo de una noción de ángulo a partir de la relación con los giros de su propio cuerpo.

		Los estudiantes logran caracterizar y relacionar el ángulo como la cantidad de giro de su cuerpo. ***Respuesta de E*** ***Análisis de respuesta.*** El estudiante no responde, presentando dificultad para caracterizar lo que para él representa un ángulo.	
12(13y 14)		**Criterio usado: 1,2,3,8 y 9** **Propósito:** Indagar si el estudiante reconoce las propiedades de conservación de la magnitud del ángulo. En este caso, se busca identificar si ha superado la dificultad señalada en el criterio tres, relacionada con la asociación entre la longitud de los rayos y la medida del ángulo. En particular, se pretende observar si el estudiante comprende que el ángulo	Los estudiantes reconocen procesos de conservación de la magnitud del ángulo. En particular, identifican que, al aumentar el tamaño de la circunferencia en la que se construye el ángulo, esta conserva su magnitud, es decir, el ángulo

		generado por la cantidad de giro desde un lado inicial hasta un lado final mantiene la misma medida, aunque cambie el tamaño de las circunferencias, y que, de igual manera, cuando los lados del ángulo crecen de forma continua, su medida se conserva. **12. De acuerdo a la siguiente imagen se responde los puntos 13 y 14.** **13. Si las circunferencias crecen infinitamente como se muestra en la anterior imagen, ¿será que el ángulo generado por la cantidad de giro de un lado inicial y lado final también crece? ¿SÍ?, ¿NO?, ¿Por qué?** ***Respuesta de A, B, C, D, E, F, G y H*** ***Análisis de respuesta.***	sigue siendo el mismo. De igual manera, comprende que, al aumentar la longitud de los lados del ángulo, la magnitud del ángulo no se ve afectada. Por lo anterior, se puede afirmar que todos los estudiantes lograron reconocer los procesos de conservación de la magnitud del ángulo. Por tanto, se puede afirmar que los estudiantes logran superar con éxito la dificultad mostrada en el criterio tres, el cual afirma que, a los estudiantes se les dificulta asociar la relación

		Los estudiantes reconocen que al aumentar el tamaño de la circunferencia en la que se ha realizado el ángulo, este no cambia, es decir la magnitud del ángulo sigue siendo el mismo. **14. Si los lados de un ángulo crecen infinitamente, ¿será que el ángulo cambia de tamaño?** ***Respuesta de A, B, C, D, E, F, G y H*** ***Análisis de respuesta.*** Los estudiantes reconocen que el aumento en la longitud de los lados del ángulo no afecta la magnitud del ángulo, por lo tanto, el ángulo conserva su magnitud.	entre la longitud de los rayos y la medida del ángulo.
Conclusiones generales de la prueba final			

Los estudiantes en general logran relacionar los giros de su cuerpo con diferentes tipos de ángulos, además la mayoría de ellos son capaces de representar de forma gráfica estos giros en dos dimensiones, también, identifican algunas de las propiedades esenciales del ángulo, (propiedades de conservación de magnitudes del ángulo, cantidad de lados, cantidad de vértices, giro de un lado inicial hacia un lado final, entre otras), se pudo superar algunas de las dificultades acerca de las imágenes estandarizadas y evocadas del ángulo mostradas en el criterio 2, como también, los estudiantes logran superar las dificultades mostradas en el criterio 2 y 3 en el que el estudiante no podía visualizar y por tanto no podían percibir la existencia del ángulo de 0º,180º, 360º y mayores de 360º al tomarse ángulo como par de rayos o región del espacio lo que sí permitió superar estas dificultades al tomar el ángulo como cantidad de giro, en especial al tomar el ángulo como la cantidad necesaria para trasladar una línea a la posición de otra, en este caso girar un lado inicial a un lado final.

A continuación, se mencionan dificultades que presentaron algunos estudiantes:

1. La confusión en los nombres del ángulo llano y ángulo recto; esto se debe a que, al visualizar los lados el cual coinciden en una misma línea recta, el estudiante tiende a relacionar con una “línea recta” y, por analogía lingüística, la denomina “recto”, sin reconocer que este término no corresponde al ángulo recto, sino al ángulo llano. También, sucedieron casos como el de los estudiantes D y H mencionan que llaman ‘recto’ al ángulo llano porque se forma a partir de una línea recta, tal como lo trabajaron en el juego del triqui; y llaman ‘llano’ al ángulo recto porque no recuerdan su nombre con claridad, a diferencia del ángulo completo, que asocian con un balón o el giro de una vuelta completa, y del ángulo agudo, que han trabajado con su profesora y les resulta más familiar y fácil de reconocer,

exponiendo así las inferencias propias de los estudiantes derivadas de sus experiencias previas con otros objetos matemáticos.

2. Aunque los estudiantes logran relacionar los diferentes giros de su cuerpo con los ángulos, presentan dificultades para caracterizarlos por sus nombres, lo que los lleva a confundirlos; por ejemplo, denomina ángulo recto al ángulo llano y viceversa.

3. Algunos estudiantes presentan dificultades para graficar el ángulo recto, tendiendo a representarlo de forma similar al ángulo agudo. Esto se debe, en parte, a que no se enfatizaron de manera suficiente las características específicas del ángulo recto, el cual implica una cantidad de giro precisa que lo distingue de los ángulos agudos y obtusos. Aunque este aspecto se abordó y se minimizó esta dificultad en los espacios de retroalimentación, se considera necesaria una mayor profundización, ya que los errores fueron recurrentes a lo largo de las actividades didácticas.

4. Aunque la intención de este trabajo no fue obtener una definición exacta o formal del ángulo, y si bien los estudiantes logran percibir y nombrar distintos tipos de ángulos con diferentes aberturas o giros, así como reconocer algunas de sus propiedades, se evidencia que algunos presentan dificultades para expresar o definir, con sus propias palabras, lo que para ellos representa un ángulo.

5. Si bien los estudiantes ya no perciben al ángulo únicamente como un ángulo agudo y ahora conocen e identifican varios tipos de ángulos, se observa que, al solicitarles realizar la representación gráfica de un ángulo agudo, esta suele ser altamente estereotipada: tienden a dibujarlo con el vértice ubicado a la izquierda y con un rayo horizontal. Este esquema rígido puede dificultar la identificación del ángulo cuando se presenta en una orientación diferente. Este aspecto se trabajó en los procesos de retroalimentación, promoviendo la generación de ángulos en distintas direcciones en el espacio; no obstante, es un elemento que se debe tener presente para abordar futuros problemas.

Este trabajo permitió reconocer diferentes tipos de ángulos, superando la imagen estandarizada del ángulo, como la del ángulo llano con vértice a la izquierda y un rayo horizontal. Asimismo, se logró que los estudiantes identificarán características esenciales del ángulo, tales como el reconocimiento y la ubicación del vértice, la identificación de sus dos lados y la estimación y comprensión de procesos de conservación de magnitudes (la relación entre la longitud de los rayos y la medida del ángulo). Además, se avanzó en superar dificultades señaladas en estudios previos, como los de Pachuca Herrera y Zubieta Badillo (2020) y Torres y Sánchez (2023), donde se observa que a los estudiantes les resulta complicado percibir visualmente ángulos de 0º, 180º, 360º y mayores de 360º. Por último, se logró que los estudiantes relacionarán los giros de su cuerpo con los ángulos, concibiendo el ángulo de manera dinámica como la cantidad de giro, en especial a partir de los giros de su cuerpo desde un lado inicial hasta un lado final.