
UNA DUALIDAD UNIFORME PARA MV-ÁLGEBRAS SEMISIMPLES

CELIMO ALEXANDER PEÑA RENGIFO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial
para optar al título de Maestría en Ciencias Matemáticas.

Director
Guillermo Ortiz Rico

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI**

12 de marzo de 2012

DEDICATORIA

A mi madre, Fanny Rengifo, a mi esposa Carmen Ramírez y a mi hijo Juan David Peña.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la vida por su generosidad. A mi madre, por su sacrificio, amor y dedicación; a mi tía por su entrega, a mi hermano por su ejemplo, a mi esposa por su paciencia y comprensión.

Un agradecimiento especial al profesor Guillermo Ortiz quien confió en mi desempeño, me estimuló y aconsejó en los momentos que lo necesité.

Por supuesto a la Universidad del Valle, al departamento de matemáticas y al programa de asistencias de docencia. Con el cual financie todos los gastos que conllevaron los estudios en la maestría.

Adicional agradezco a Jaime Andrés Castaño, amigo y compañero de estudio durante la maestría. Y a todos aquellos compañeros y amigos que intervinieron durante la maestría y que en algún momento fueron apoyo en los momentos de dificultad.

RESUMEN

Se establece una representación dual entre la categoría de los espacios uniformes Hausdorff compactos y la categoría de las mv-álgebras semisimples. Para esto se hace una introducción a los conceptos necesarios sobre mv-álgebra, espacios uniformes y categorías, finalmente se definen funtores y transformaciones naturales adecuados.

Además se obtienen algunos resultados de representación por medio de esta dualidad y otros independientes de la misma como la definición de una uniformidad para toda mv-álgebra a partir de la función distancia, la cual esta estrechamente ligada a la cantidad de ideales de la mv-álgebra.

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. NOCIONES BÁSICAS	4
1.1. Teoría de Categorías	4
1.1.1. Categorías	4
1.1.2. Funtores	7
1.1.3. Transformaciones Naturales	9
1.1.4. Equivalencia entre Categorías.	10
1.2. MV-Álgebras	11
1.2.1. MV-Homomorfismos.	12
1.2.2. Ideales y MV-Álgebra Cociente.	13
1.2.3. Producto Subdirecto	15
1.2.4. MV-Álgebras Simples y Semisimples.	15
1.3. Espacios Uniformes	16
1.3.1. Bases y Subbases	18
1.3.2. Funciones Uniformemente Continuas	19
1.3.3. Uniformidad Inducida y uniformidad Producto	19
1.3.4. Topología Uniforme	20
2. DUALIDAD UNIFORME	23
2.1. Uniformidades y MV-Álgebras	23
2.1.1. Uniformidad sobre el conjunto $[0, 1]^A$	23
2.1.1.1. Uniformidad de la Convergencia Puntual	23
2.1.2. La MV-Álgebra $[0, 1]^X$	25
2.1.2.1. Teorema de Representación	26
2.2. Dualidad entre $\text{MVC}[0, 1]$ y UCOMP	27

2.2.1. Los Funtores F y K	27
2.2.2. Las Transformaciones Naturales η y κ	30
CONCLUSIONES	34
BIBLIOGRAFÍA	37

INTRODUCCIÓN

Las mv-álgebras fueron presentadas por primera vez en 1958 por Chen Chung Chang [3] como la contrapartida algebraica de las lógicas de Łukasiewicz. Las mv-álgebras son para las lógicas de Łukasiewicz lo que las álgebras booleanas lo son para la lógica clásica, más aún, las mv-álgebras resultan ser una extensión de las álgebras booleanas al igual que las lógicas de Łukasiewicz son una extensión de la lógica clásica.

Una **mv-álgebra** es un conjunto no vacío A dotado de una operación binaria $\oplus$, una operación unitaria $\neg$ y un elemento destacado (operación cero-aria) 0 tal que $(A, \oplus, 0)$ es un monoide conmutativo que satisface las siguientes identidades: $\neg\neg x = x$, $x \oplus \neg 0 = \neg 0$, $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$. Así toda álgebra booleana es una mv-álgebra, otro ejemplo de una mv-álgebra es el intervalo real $[0, 1]$ con las operaciones $x \oplus y = \min\{x + y, 1\}$ y $\neg x = 1 - x$.

Uno de los primeros resultados de representación para mv-álgebras en términos topológicos que se pueden considerar se debe a Marshall Harvey Stone [11] el cual establece que cada álgebra Booleana se puede representar como un espacio de Stone, es decir, como un espacio topológico Hausdorff compacto que tiene una base de conjuntos que son cerrados y abiertos simultáneamente. La representación explícita para un álgebra booleana B esta dada por el isomorfismo $\varphi_B : B \rightarrow \mathcal{P}(Ult(B))$, donde $Ult(B)$ es la colección de todo los ultrafiltros en B y $\varphi_B(b) = \{\mathcal{V} \in Ult(B) | b \in \mathcal{V}\}$.

En 2001, Niederkorn [8] establece una dualidad natural para mv-álgebras generadas por cadenas finitas, es decir, para la categoría cuyos objetos son los elementos de la variedad generada a partir de una mv-álgebra de la forma $L_n = \{\frac{i}{n} | 0 \leq i \leq n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ (las operaciones sobre L_n son las de $[0, 1]$ restringidas). La categoría dual correspondiente está dada por la cuasivariedad topológica generada por la estructura $\langle \mathbb{L}_n; \mathcal{S}(\mathbb{L}_n), \tau_d \rangle$ donde $\mathcal{S}(\mathbb{L}_n)$

son las subálgebras de L_n y τ_d es la topología discreta sobre L_n . De hecho toda estructura topológica de la forma $\langle X; \{r_m | m \in \text{div}(n)\}, \tau \rangle$ esta en la cuasivariiedad topológica dual si y sólo si $\langle X, \tau \rangle$ es un espacio de Stone, para cada $m \in \text{div}(n)$ la relación unitaria r_m es un subespacio cerrado de $\langle X, \tau \rangle$ y para cada $m, m' \in \text{div}(n)$ se tiene que $r_m \cap r_{m'} = r_{\text{mcd}(m, m')}$.

Cignoli, Dubuc y Mundici generalizaron en el 2004 [9] la dualidad de Stone a una dualidad entre mv-álgebras localmente finitas y multiconjuntos. Una mv-álgebra se llama **localmente finita**, si todas sus subálgebras finitamente generadas son finitas. Un **multiconjunto** es la pareja (S, σ) formada por un espacio de Stone S y una función continua $\sigma : S \rightarrow G$ donde G será el conjunto de todas las funciones que van del conjunto de sucesiones de números primos al ordinal ω . En [9] también se establece una equivalencia entre la categoría de los espacios Hausdorff compactos y la subcategoría plena de las mv-álgebras de la forma $\text{cont}(X, [0, 1])$ de todas las funciones continuas de un espacio Hausdorff compacto X en la mv-álgebra $[0, 1]$.

En 2007, Poveda [12] da una representación general para mv-álgebras, estableciendo una equivalencia categórica para mv-álgebras donde la categoría dual correspondiente es la de los espacios topológicos provistos de un haz de cadenas cuyos objetos son triplas (X, E, π) , siendo $\pi : E \rightarrow X$ un homomorfismo local, E y X espacios topológicos tales que para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ es una mv-álgebra. Y dados dos objetos (X, E, π_1) , (Y, F, π_2) , un morfismo entre estos está dado por el par (f, φ) donde f es una función continua y φ_x es un morfismo de mv-álgebras tales que para toda sección $s \in F$, $k(x) = \varphi_x \circ s \circ f(x)$ es una sección de E . Además de generalizar lo hecho por Cignoli, Dubuc y Mundici en [9], Poveda establece también una representación para mv-álgebras **arquimediana (ó hiperarquimediana)**, es decir, una mv-álgebra A tal que para todo elemento $a \in A$ existe un entero $n > 0$ que cumple $n.a = (n + 1).a$, donde $n.a = a \oplus \dots \oplus a$ (n -veces).

Después de la breve presentación sobre representación topológica de mv-álgebras, se nota que los espacios topológicos Hausdorff y compactos juegan un papel importante en estos resultados. Nuestra investigación se centra en esta particularidad, pero antes de mencionarlo se darán algunas definiciones sobre espacios uniformes.

Una **estructura uniforme** sobre un conjunto X es un filtro $\mathcal{U}$ sobre $\wp(X \times X)$, cuyos elementos llamados **entornos** satisfacen lo siguiente: todo entorno contiene la diagonal $\Delta X = \{(x, x) | x \in X\}$ y para cada entorno D existen entornos E y F tales que $F \circ F \subseteq D$

y $E \subseteq D^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in D\}$. El par $(X, \mathcal{U})$ es llamado **Espacio Uniforme**. Los espacios uniformes forman la categoría que tiene por objetos todos los espacios uniformes y las funciones uniformemente continuas entre éstos como morfismos.

A partir de una estructura uniforme es posible definir una estructura topológica. Luego, todo espacio uniforme tiene subyacente un espacio topológico. De otro lado solo sobre los espacios topológicos completamente regulares es posible definir una estructura uniforme que tenga la topología original como subyacente. De hecho pueden existir estructura uniformes diferentes sobre un mismo conjunto que tiene subyacente la misma estructura topológica, solo para los espacios topológicos Hausdorff y compactos la existencia de tal estructura uniforme es única.

He aquí nuestra motivación, ¿es posible extender una dualidad entre mv-álgebras y espacios topológicos, a espacios uniformes? En este trabajo haremos una primera exploración en este sentido, demostrando que tal extensión es posible. De forma mas precisa se establece una dualidad entre la categoría de la mv-álgebra semisimples y los espacios uniformes Hausdorff compactos.

Así pues, disponemos de dos capítulos. En el primer capítulo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de categorías, las mv-álgebras y los espacios uniformes, junto con algunos ejemplos y resultados empleados en este trabajo.

En el segundo capítulo se definen los funtores y transformaciones naturales adecuadas para establecer la dualidad entre la categoría de los espacios uniformes Hausdorff compactos y la categoría de las mv-álgebras semisimples. Además se establece el teorema de representación correspondiente.

Finalizamos con las conclusiones y expectativas.

Capítulo 1

NOCIONES BÁSICAS

En este capítulo se presenta de forma rápida los conceptos en teoría de categorías empleados en la construcción de una dualidad entre categorías. De igual manera se presenta los conceptos de mv-álgebras y espacios uniformes, los cuales definirán las categorías sobre las cuales trabajaremos.

1.1. Teoría de Categorías

1.1.1. Categorías

En el estudio de una estructura matemática ya sea algebraica, topológica, de orden, etc, es evidente la importancia que tienen las aplicaciones que conservan la estructura tanto como la misma estructura. Así que aunque se puede pensar en una categoría de manera mas general, podemos decir que una categoría se puede ver como una colección de objetos matemáticos junto con las aplicaciones que preservan la estructura de los objetos. Una referencia clásica sobre teoría de categoría es el libro de Saunders MacLane [7].

Definición 1.1.1. Una *categoría* $\mathbb{C}$ consta de dos clases, la clase $Obj_{\mathbb{C}}$ cuyos elementos llamaremos *objetos* de $\mathbb{C}$ y la clase $Mor_{\mathbb{C}}$ cuyos elementos llamaremos *morfismos* de $\mathbb{C}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

- C1)** Para cada par de objetos A, B de $\mathbb{C}$, existe una subclase de $Mor_{\mathbb{C}}$ denota por $Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$, llamada los morfismos de A en B , tal que las clases $Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$ son disyuntas dos a dos para todo $A, B \in Obj_{\mathbb{C}}$.

C2) Para $A, B, C \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$, existe una función

$$\circ : \text{Mor}_{\mathbb{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, C),$$

cuyo valor para $\nu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(B, C)$, $\mu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B)$ sera denotado por $\nu \circ \mu$ y llamado *composición* de μ y ν .

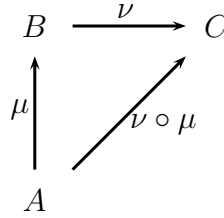


Figura 1.1.1:

C3) Para todo $A \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$, existe un morfismo 1_A en $\text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, A)$, llamado identidad en A , tal que para todo $B \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$, $\nu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(B, A)$ y $\mu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B)$ se cumple que,

$$\mu \circ 1_A = \mu \text{ y } 1_A \circ \nu = \nu.$$



Figura 1.1.2:

C4) Si $A, B, C, D \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$, $u \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B)$, $v \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(B, C)$ y $w \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(C, D)$, entonces

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u.$$

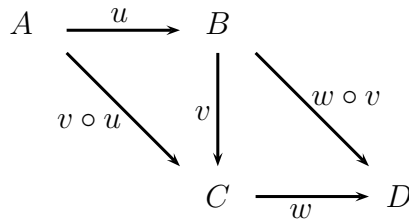


Figura 1.1.3:

Observación 1.1.2.

$$Mor_{\mathbb{C}} = \bigcup_{A, B \in Obj_{\mathbb{C}}} Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$$

Si en una categoría $\mathbb{C}$ la clase $Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$ es un conjunto para todo $A, B \in Obj_{\mathbb{C}}$, la categoría $\mathbb{C}$ es llamada *localmente pequeña*. Si tanto la colección $Mor_{\mathbb{C}}$ como la colección $Obj_{\mathbb{C}}$ son conjuntos, se dirá que la categoría $\mathbb{C}$ es *pequeña*.

Ejemplo 1.1.3. La categoría de los conjuntos **SET** cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones.

Ejemplo 1.1.4. La categoría **MET** cuyos objetos son los espacios métricos y los morfismos son las contracciones débiles.

Ejemplo 1.1.5. La categoría de los espacios topológicos **TOP** cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas.

Ejemplo 1.1.6. Un retículo es un conjunto L dotado de dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$, las cuales satisfacen la ley conmutativa, la ley asociativa y la ley de absorción. Si las operaciones $\wedge, \vee$ son distributivas una respecto a la otra, el retículo se dice distributivo. Además si L tiene cota superior e inferior, se dice acotado. **LAT** denota la categoría de los retículos distributivos y acotado, cuyos morfismos son funciones que preservan las operaciones $\wedge, \vee$.

Sea $\mathbb{C}$ una categoría arbitraria. Por una *subcategoría* de $\mathbb{C}$ entiéndase una categoría $\mathbb{C}'$ tal que $Obj_{\mathbb{C}'} \subseteq Obj_{\mathbb{C}}$, $Mor_{\mathbb{C}'}(A, B) \subseteq Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in Obj_{\mathbb{C}'}$, la operación composición de morfismos en $\mathbb{C}'$ es la restricción de la composición de morfismos en $\mathbb{C}$ y todo morfismo identidad en $\mathbb{C}'$ es un morfismo identidad en $\mathbb{C}$. Una subcategoría $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{C}$ que satisface $Mor_{\mathbb{C}'}(A, B) = Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$ para todo par de objetos A, B en $\mathbb{C}'$ es llamada una *subcategoría plena* de $\mathbb{C}$.

Un morfismo $\nu \in Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$ es llamado *sección* si existe un morfismo $\mu \in Mor_{\mathbb{C}}(B, A)$ tal que $\mu \circ \nu = 1_A$. En tal caso μ es llamado *retracción*. Un *isomorfismo* es un morfismo que es sección y retracción. Si $\nu \in Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$ es un isomorfismo, el único $\mu \in Mor_{\mathbb{C}}(B, A)$ tal que $\nu \circ \mu = 1_B$ y $\mu \circ \nu = 1_A$ será llamado el *inverso* de ν y se denota por ν^{-1} . Un par de objetos A y B se dice que son *isomorfos*, $A \approx B$, si existe un isomorfismo en $Mor_{\mathbb{C}}(A, B)$.

La *categoría opuesta* de una categoría $\mathbb{C}$, la cual se notara por $\mathbb{C}^{op}$, es aquella tal que $Obj_{\mathbb{C}^{op}} = Obj_{\mathbb{C}}$ y $Mor_{\mathbb{C}^{op}}(A, B) = Mor_{\mathbb{C}}(B, A)$, para todo par de objetos A, B en $\mathbb{C}^{op}$.

1.1.2. Funtores

Es natural pensar en como relacionar la estructura de dos categorías, de tal manera que se respeten tanto las colecciones que conforman cada categoría como la composición entre los morfismos en cada categoría. He aquí donde aparece el concepto de funtor.

Definición 1.1.7. Un *funtor covariante* (o simplemente *funtor*) de una categoría $\mathbb{C}$ en una categoría $\mathbb{D}$ es una aplicación $\mathbf{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que para A, B, C objetos de $\mathbb{C}$ y ν, μ morfismos de $\mathbb{C}$ se tiene que:

F1) $\mathbf{F}(A) \in \text{Obj}_{\mathbb{D}}$,

F2) $\mathbf{F}(\nu) \in \text{Mor}_{\mathbb{D}}$,

F3) $\mathbf{F}(\nu : A \rightarrow B) = \mathbf{F}(\nu) : \mathbf{F}(A) \rightarrow \mathbf{F}(B)$,

$$\begin{array}{ccc} A & & \mathbf{F}(A) \\ \downarrow \nu & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \downarrow \mathbf{F}(\nu) \\ B & & \mathbf{F}(B) \end{array}$$

Figura 1.1.4:

F4) $\mathbf{F}(\nu \circ \mu) = \mathbf{F}(\nu) \circ \mathbf{F}(\mu)$,

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mu} & C \\ \uparrow \nu & \nearrow \mu \circ \nu & \\ A & & \end{array} \xrightarrow{\mathbf{F}} \begin{array}{ccc} \mathbf{F}(B) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\mu)} & \mathbf{F}(C) \\ \uparrow \mathbf{F}(\nu) & \nearrow \mathbf{F}(\mu) \circ \mathbf{F}(\nu) & \\ \mathbf{F}(A) & & \end{array}$$

Figura 1.1.5:

F5) $\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}(A)}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{A} \circlearrowleft & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \text{F(A)} \circlearrowleft \\ & & 1_{\mathbf{F}(A)} \end{array}$$

Figura 1.1.6:

Un funtor covariante $\mathbf{F} : \mathbb{C}^{op} \rightarrow \mathbb{D}$ se dice *funtor contravariante* de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$.

Ejemplo 1.1.8. Sea $\mathbf{H} : \mathbf{MET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ tal que a cada espacio métrico (X, d) el asigna el espacio topológico (X, τ_d) donde τ_d es la topología inducida por la métrica d (topología que tiene como base el conjunto de las bolas abiertas $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ con $\epsilon \in \mathbb{R}$) y dada una contracción débil $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$, $\mathbf{H}(f) : (X, \tau_d) \rightarrow (Y, \tau_{d'})$ es tal que $\mathbf{H}(f) = f$. Como toda contracción débil es continua para las topologías inducidas, $\mathbf{H}(f)$ es un morfismo en $\mathbf{TOP}$. El resto de propiedades de funtor son fáciles de verificar.

Ejemplo 1.1.9. Si $\mathbb{C}$ es una categoría localmente pequeña y $X \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$. Se define el funtor contravariante $\mathbf{M}_{-X} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{SET}$ para todo $A, B, C \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$ y $\nu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B)$ como $\mathbf{M}_{-X}(C) = \text{Mor}_{\mathbb{C}}(C, X)$ y $\mathbf{M}_{-X}(\nu) : \text{Mor}_{\mathbb{C}}(B, X) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, X)$ dada por $\mathbf{M}_{-X}(\nu)(\alpha) = \alpha \circ \nu$ para todo $\alpha \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(B, X)$.

Veamos que $\mathbf{M}_{-X} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{SET}$ es un funtor contravariante para todo objeto X en $\mathbb{C}$. Por ser $\mathbb{C}$ localmente pequeña $\mathbf{M}_{-X}(A) = \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, X)$ es un conjunto para todo $A \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$, es decir, un objeto de la categoría $\mathbf{SET}$. Si $\nu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B)$ y $\alpha = \beta$ son morfismos en $\mathbb{C}$, entonces $\mathbf{M}_{-X}(\nu)(\alpha) = \alpha \circ \nu = \beta \circ \nu = \mathbf{M}_{-X}(\nu)(\beta)$, es decir, $\mathbf{M}_{-X}(\nu)$ es una función por tanto un morfismo de $\mathbf{SET}$. Tomemos A, B, C objetos en $\mathbb{C}$, $\nu : A \rightarrow B$, $\mu : B \rightarrow C$, morfismos en $\mathbb{C}$, luego para todo morfismo $\alpha : C \rightarrow X$ $\mathbf{M}_{-X}(\mu \circ \nu)(\alpha) = \alpha \circ (\mu \circ \nu) = (\alpha \circ \mu) \circ \nu = \mathbf{M}_{-X}(\mu)(\alpha) \circ \nu = \mathbf{M}_{-X}(\nu)(\mathbf{M}_{-X}(\mu)(\alpha))$, así $\mathbf{M}_{-X}(\mu \circ \nu) = \mathbf{M}_{-X}(\nu) \circ \mathbf{M}_{-X}(\mu)$. Finalmente $\mathbf{M}_{-X}$ conserva identidades, para todo $\alpha \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(X, A)$, tenemos que: $\mathbf{M}_{-X}(1_A)(\alpha) = \alpha \circ 1_A = \alpha = 1_{\mathbf{M}_{-X}(A)}(\alpha)$.

Ejemplo 1.1.10. Si $\mathbb{C}$ es como en el ejemplo anterior y $X \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$. $\mathbf{M}_{X-} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{SET}$ tal que para todo $A, B, C \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$ y $\nu \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, B)$, se define, $\mathbf{M}_{X-}(C) = \text{Mor}_{\mathbb{C}}(X, C)$ y $\mathbf{M}_{X-}(\nu) : \text{Mor}_{\mathbb{C}}(X, A) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{C}}(X, B)$ dada por $\mathbf{M}_{X-}(\nu)(\alpha) = \nu \circ \alpha$ para todo $\alpha \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(X, A)$. Se muestra de forma análoga al ejemplo anterior que $\mathbf{M}_{X-}$ es un funtor covariante para todo $X \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 1.1.11. El funtor contravariante $\mathbf{S} : \mathbf{LAT} \rightarrow \mathbf{TOP}$ tal que a cada retículo distributivo y acotado L le asigna el conjunto de todos los ideales primos en L junto con la topología que tiene como base todos los conjuntos de la forma $s_a = \{p \in \mathbf{S}(L) : a \notin p\}$ con $a \in L$. Y para cada morfismo $h : L \rightarrow M$ en $\mathbf{LAT}$, $\mathbf{S}(h) : \mathbf{S}(M) \rightarrow \mathbf{S}(L)$ es tal que a cada $p \in \mathbf{S}(M)$ le asigna el ideal primo $f^{-1}(p)$ en L .

Ejemplo 1.1.12. El funtor contravariante $\mathbf{O} : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{LAT}$ tal que a cada espacio topológico X asigna el retículo de todos los abiertos en X con las operaciones $\cap$ y $\cup$. Y a cada función continua $f : X \rightarrow Y$, $\mathbf{O}(f) : \mathbf{O}(Y) \rightarrow \mathbf{O}(X)$ es tal que a cada $A \in \mathbf{O}(Y)$ le asigna el abierto $f^{-1}(A)$.

1.1.3. Transformaciones Naturales

Ya definidas las categorías y los funtores, ahora como un ejemplos mas podríamos pensar en la categoría cuyos objetos sean las categorías y cuyos morfismos sean los funtores. Más aún, dadas dos categorías se puede pensar en la categoría donde los objetos sean todos los funtores entre estas y los morfismos pueden ser aplicaciones entre funtores llamadas transformaciones naturales los cuales se definen a continuación.

Definición 1.1.13. Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ son dos categorías y $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ dos funtores de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$. Una *transformación natural* $\varphi : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ es una familia de morfismos en $\mathbb{B}$

$$\{\varphi_C : \mathbf{F}(C) \rightarrow \mathbf{G}(C)\}_{C \in \text{Obj}_{\mathbb{A}}}$$

tal que para todo morfismo $f : C \rightarrow C'$ en $\mathbb{A}$, se tiene

$$\varphi_{C'} \circ \mathbf{F}(f) = \mathbf{G}(f) \circ \varphi_C.$$

es decir, el cuadro a la derecha en la siguiente figura conmuta,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{F} & \nearrow & \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(C') \\
 C & \xrightarrow{f} & C' & & \downarrow \varphi_C \\
 & & \mathbf{G} & \searrow & \mathbf{G}(C) \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} \mathbf{G}(C') \\
 & & & & \downarrow \varphi_{C'}
 \end{array}$$

Figura 1.1.7:

En el caso que φ_C sea una inmersión (isomorfismo) para todo $C \in \text{Obj}_{\mathbb{A}}$, la transformación natural será llamada *Inmersión (isomorfismo) natural*.

Ejemplo 1.1.14. Dados X, Y objetos de una categoría $\mathbb{C}$ localmente pequeña y los funtores contravariantes $\mathbf{M}_X, \mathbf{M}_Y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{SET}$. Para cada morfismo $\beta \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ se define la transformación natural $\hat{\beta} : \mathbf{M}_X \rightarrow \mathbf{M}_Y$ dada por la familia de morfismos en $\mathbf{SET}$, $\{\hat{\beta}_A : \mathbf{M}_X(A) \rightarrow \mathbf{M}_Y(A)\}_{A \in \text{Obj}_{\mathbb{C}}}$ donde $\hat{\beta}_A(\alpha) = \beta \circ \alpha$, para todo $\alpha \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A, X)$. Verifiquemos que $\hat{\beta}$ es una transformación natural. Si $\varphi : A \rightarrow A'$ un morfismo en $\mathbb{C}$, $\hat{\beta}_A \circ \mathbf{M}_X(\varphi)(\alpha) = \hat{\beta}(\alpha \circ \varphi) = \beta \circ (\alpha \circ \varphi) = (\beta \circ \alpha) \circ \varphi = \hat{\beta}_{A'}(\alpha) \circ \varphi = \mathbf{M}_Y(\varphi) \circ \hat{\beta}_{A'}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \text{Mor}_{\mathbb{C}}(A', X)$, es decir $\hat{\beta}_A \circ \mathbf{M}_X(\varphi) = \mathbf{M}_Y(\varphi) \circ \hat{\beta}_{A'}$.

1.1.4. Equivalencia entre Categorías.

Una *adjunción dual* $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}, \varphi, \psi \rangle$ entre dos categorías $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, es un par de funtores contravariantes $\mathbf{F} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, $\mathbf{G} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ y un par de transformaciones naturales $\varphi : 1_{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbf{F}\mathbf{G}$ y $\psi : 1_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbf{G}\mathbf{F}$ que satisfacen la siguiente condición: para cada $A \in \text{Obj}_{\mathbb{A}}$ y $B \in \text{Obj}_{\mathbb{B}}$ existe una correspondencia biyectiva $\pi : \text{Mor}_{\mathbb{A}}(A, \mathbf{G}(B)) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{B}}(B, \mathbf{F}(A))$ tal que si $\pi(\alpha) = \beta$, los siguiente diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}\mathbf{F}(A) & \xrightarrow{\mathbf{G}(\beta)} & \mathbf{G}(B) \\ \psi_A \uparrow & \nearrow \alpha & \\ A & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{F}\mathbf{G}(B) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\alpha)} & \mathbf{F}(A) \\ \varphi_B \uparrow & \nearrow \beta & \\ B & & \end{array}$$

Figura 1.1.8:

estos es

$$\alpha = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\alpha) \circ \varphi_B) \circ \psi_A \quad \beta = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\beta) \circ \psi_A) \circ \varphi_B$$

Una *representación dual* entre las categorías $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ es una adjunción dual $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}, \varphi, \psi \rangle$ tal que una de las transformaciones naturales φ ó ψ es un isomorfismo natural; si φ es el isomorfismo natural diremos que cada objeto de $\mathbb{B}$ tiene una representación en términos de los objetos de la categoría $\mathbb{A}$. Si ambos φ y ψ son isomorfismos naturales diremos que $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}, \varphi, \psi \rangle$ es una *equivalencia dual*.

Ejemplo 1.1.15. Retomando los funtores $\mathbf{S} : \mathbf{LAT} \rightarrow \mathbf{TOP}$ y $\mathbf{O} : \mathbf{TOP} \rightarrow \mathbf{LAT}$ de los ejemplos 1.1.11 y 1.1.12. Definimos la transformación natural $\sigma : 1_{\mathbf{LAT}} \rightarrow \mathbf{OS}$ como la familia $\{\sigma_L : L \rightarrow \mathbf{OS}(L)\}$ tal que $\sigma_L(a) = \{p \in \mathbf{S}(L) : a \notin p\}$ para todo $a \in L$ y la transformación natural $\beta : 1_{\mathbf{TOP}} \rightarrow \mathbf{SO}$ dada por la familia $\{\beta_X : X \rightarrow \mathbf{SO}(X)\}$ tal que para cada $x \in X$, $\beta_X(x) = \{A \in \mathbf{O}(X) : x \notin A\}$. Este ejemplo es la representación estándar de espacios de Stone como el retículo de los abiertos y compactos de $\mathbf{S}(L)$. En cuanto a σ resulta ser una inmersión natural, en cuanto a β cada componente β_X es una función continua relativamente abierta y $\beta(X)$ resulta ser denso en $\mathbf{SO}(X)$; solo cuando X es T_0 , β es una inmersión natural. Para ver detalles de esta representación consultar [1].

1.2. MV-Álgebras

En 1958, Chang [3] para demostrar el teorema de completez del cálculo proposicional multivaluado de Łukasiewicz introduce el concepto de mv-álgebras. Las mv-álgebras son para las lógicas de Łukasiewicz como las álgebras Booleanas son para la lógica clásica, más aún, las mv-álgebras resultan ser una generalización de las álgebras Booleanas. Una referencia estándar para mv-álgebras es Cignoli, D'Ottaviano, Mundici [10].

Definición 1.2.1. Una *mv-álgebra* es un conjunto A dotado con una operación binaria $\oplus$, una unitaria $\neg$ y un elemento destacado 0_A satisfaciendo las siguientes identidades para todo a, b y c en A :

$$\text{MV1)} \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$\text{MV2)} \quad a \oplus 0_A = a$$

$$\text{MV3)} \quad a \oplus b = b \oplus a$$

$$\text{MV4)} \quad \neg\neg a = a,$$

$$\text{MV5)} \quad a \oplus \neg 0_A = \neg 0_A,$$

$$\text{MV6)} \quad \neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a.$$

Una *subálgebra* de una mv-álgebra A es un conjunto $S \subseteq A$ cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\neg$, que contiene el elemento 0_A y que se dota con las operaciones de la mv-álgebra A restringidas a S .

Ejemplo 1.2.2. El intervalo unidad real $[0, 1]$ dotado con la negación $\neg x = 1 - x$ y la adición truncada $x \oplus y = \min(1, x + y)$ es una mv-álgebra donde el 0 es el elemento destacado.

Ejemplo 1.2.3. El conjunto $L_n = \{\frac{i}{n} : 0 \leq i \leq n\}$ es una mv-álgebra para todo entero positivo n con las operaciones restringidas de la mv-álgebra $[0, 1]$ y 0 como elemento destacado. Así L_n es una subálgebra de $[0, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.2.4. Si A es una mv-álgebra y X es un conjunto no vacío. El conjunto A^X de todas las funciones $f : X \rightarrow A$, es una mv-álgebra con las operaciones definidas puntualmente, es decir, $(f \oplus g)(a) = f(a) \oplus g(a)$, $(\neg f)(a) = \neg(f(a))$, para todo $a \in A$ y la función constate 0_A como elemento destacado.

Sobre toda mv-álgebra A se puede definir una constante adicional, $1_A = \neg 0_A$ y dos operaciones binarias auxiliares $\odot$ y $\ominus$ como sigue, $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$ y $x \ominus y = x \odot \neg y$. Cuando no hay necesidad de distinguir el universo de los elementos destacados 0_A y 1_A se omitirá el subíndice.

Observación 1.2.5. Toda mv-álgebra es un monoide conmutativo, esto es inmediato de M1), M2) y M3).

Observación 1.2.6. Si $(A, \oplus, \neg, 0)$ es una mv-álgebra, $(A, \oplus, \odot, \neg, 0, 1)$ es una álgebra Booleana, si y solo si la operación $\oplus$ es idempotente. Esto es, si para todo $x \in A$, $x \oplus x = x$.

Observación 1.2.7. $(A, \leq)$ es conjunto parcialmente ordenado donde la relación de orden, llamada *orden natural*, esta dada por, $x \leq y \Leftrightarrow \neg(\neg x \oplus y) = 0$. Además esta relación de orden induce una estructura de retículo definiendo las operaciones, $\wedge$ y $\vee$, como $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. El retículo $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ resulta ser acotado con 1 como cota superior y 0 cota inferior. Este retículo sera denotado por $\mathbf{L}(A)$ y llamado *retículo subyacente* de A .

1.2.1. MV-Homomorfismos.

Definición 1.2.8. Si A y B son mv-álgebras. Llamaremos a una función $f : A \rightarrow B$ un *mv-homomorfismo* si satisface las siguientes propiedades para todo $x, y \in A$:

H1) $f(0_A) = 0_B$,

H2) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$,

H3) $f(\neg x) = \neg f(x)$.

Un mv-homomorfismo inyectivo es llamado una *inmersión*, una inmersión sobreyectiva es llamada un *isomorfismo*. Si $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo, diremos que A y B son isomorfos (en notación $A \cong B$).

Observación 1.2.9. Se puede verificar que la función identidad es un mv-homomorfismo y que composición de mv-homomorfismos es un mv-homomorfismo. Por lo tanto, tenemos otro ejemplo de una categoría. La categoría $\mathbf{MV}$ cuyos objetos son las mv-álgebra y cuyos morfismos son los mv-homomorfismos.

1.2.2. Ideales y MV-Álgebra Cociente.

Definición 1.2.10. Un *ideal* de una mv-álgebra A es un conjunto $I \subseteq A$ que satisface las siguientes condiciones:

- I1) $0_A \in I$,
- I2) Si $b \in I, a \in A$ y $a \leq b$ entonces $a \in I$,
- I3) Si $a, b \in I$ entonces $a \oplus b \in I$.

Se puede verificar que la intersección de una familia de ideales es un ideal. Si B es un subconjunto de una mv-álgebra A , la intersección de todos los ideales que contienen a B es llamado el *ideal generado por B* y es denotado por $\langle B \rangle$.

Observación 1.2.11. Un ideal en la estructura del retículo subyacente $L(A)$ para una mv-álgebra A , es un subconjunto I_L de A que satisface I1), I2) y que para cada par de elementos $a, b \in I_L$ se tiene que $a \vee b \in I_L$. Como $a \vee b \leq a \oplus b$ para todo par $a, b \in A$, entonces tenemos que todo ideal de una mv-álgebra es un ideal de la estructura del retículo subyacente de A .

Un ideal I en una mv-álgebra A se llama: un *ideal principal*, si existe $a \in A$ tal que $I = \langle a \rangle = \langle \{a\} \rangle$; un *ideal propio*, si $I \neq A$; un *ideal primo*, si es propio y para todo $a, b \in A$, $a \oplus b \in I$ o $b \oplus a \in I$; un ideal maximal, si para todo ideal J tal que $I \subset J$ implica que $J = A$. El conjunto de los ideales de A será denotado por $\mathcal{I}(A)$, el conjunto de los ideales primos de A por $\mathcal{P}(A)$ y el conjunto de los ideales maximales por $\mathcal{M}(A)$.

Ejemplo 1.2.12. En la mv-álgebra $[0, 1]$ los únicos ideales son los triviales $\{0\}$ y $[0, 1]$. Esto es consecuencia de la propiedad arquimediana de los números reales.

Ejemplo 1.2.13. Sean X un conjunto no vacío y A es una subálgebra de la mv-álgebra $[0, 1]^X$. Para todo $S \subseteq X$, el conjunto $J_S = \{f \in A \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x \in S\}$ es un ideal en A . Más aún, Si $S = \{x\}$ para algún $x \in X$, $J_{\{x\}} \in \mathcal{M}(A)$. Ver lema 3.4.1 de [10].

Observación 1.2.14. Cuando X es un espacio topológico, una subálgebra de la mv-álgebra $[0, 1]^X$ es el conjunto de todas las funciones continuas de X en $[0, 1]$. En este caso se puede verificar que todo ideal es de la forma J_S para algún $S \subseteq X$. Y los ideales maximales se corresponde con cada punto de X mediante la aplicación $x \mapsto J_x$, teorema 3.4.3 de [10].

Algunas propiedades del kernel de un mv-homomorfismo.

Lema 1.2.15. *Sean A, B mv-álgebras, $h : A \rightarrow B$ un mv-homomorfismo. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada ideal J de B , el conjunto $h^{-1}(J) = \{a \in A \mid h(x) \in J\}$ es un ideal de A . En particular, $\text{Kern}(h) = h^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal;*
2. *$h(a) \leq h(b)$ si y sólo si $a \ominus b \in \text{Kern}(h)$;*
3. *h es una inmersión si y sólo si $\text{Kern}(h) = \{0_A\}$.*

Existe una correspondencia entre las relaciones de congruencia sobre una mv-álgebra y los ideales de la mv-álgebra.

Proposición 1.2.16. *Dada una mv-álgebra A y un ideal I en A . La relación binaria $\equiv_I$ definida de la siguiente manera, $a \equiv_I b$ si y solo si $(a \ominus b) \oplus (b \ominus a) \in I$, es una relación de congruencia. De otro lado, dada una relación de congruencia sobre A , el conjunto $\{a \in A : a \equiv 0\}$ es un ideal en A . De hecho, $I = \{a \in A : a \equiv_I 0\}$.*

El mv-álgebra cociente de A por I es el conjunto de clase de equivalencia, $A/I = \{\hat{a} : a \in A\}$ donde $\hat{a} = \{b : b \equiv_I a\}$, con las siguientes operaciones; $\neg \hat{a} = \widehat{\neg a}$, $\hat{a} \oplus \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$ y elemento destacado $\hat{0}$. La función $h_I : A \rightarrow A/I$ tal que a cada $a \in A$ le asigna $\hat{a}$ es un mv-homomorfismo sobreyectivo cuyo kernel coincide con I . El siguiente resultado establece una relación entre los ideales de la mv-álgebra A/I y los ideales de la mv-álgebra A que contienen al ideal I . Ver demostración en [10] proposición 1.2.10,

Proposición 1.2.17. *Sea I un ideal en una mv-álgebra A . Entonces la función que asigna a cada ideal J en A , su imagen por h_I es una correspondencia biunívoca que preserva la inclusión entre los ideales de A que contienen a I y los ideales de la mv-álgebra A/I .*

Observación 1.2.18. Si I es un ideal maximal de la mv-álgebra A , dada la correspondencia anterior, la mv-álgebra A/I solo posee los ideales triviales

Otra proposición de la cual haremos uso mas adelante es,

Proposición 1.2.19. *Sea A, B mv-álgebras $f : A \rightarrow B$ un mv-homomorfismo y M un ideal maximal en B . Entonces $f^{-1}(M)$ es un ideal maximal en A . En particular cuando A es una subálgebra de B , y f es la inclusión, $f^{-1}(M) = M \cap A$.*

1.2.3. Producto Subdirecto

Dada una familia de mv-álgebras $\{A_i : i \in I\}$ con $I \neq \emptyset$, se llama producto directo de la familia al producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}$ dotado con las operaciones puntuales, esto es, $(\neg f)(i) = \neg f(i)$, $(f \oplus g)(i) = f(i) \oplus g(i)$ y $0(i) = 0_{A_i}$. El producto directo constituye otro ejemplo de una mv-álgebra, note que la mv-álgebra A^X en el ejemplo 1.2.4 es el producto directo de la familia $\{A_x : x \in X\}$ donde $A_x = A$ para todo $x \in X$. Las proyecciones del producto son las funciones $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ definidas por $\pi_j(f) = f(j)$, las cuales resultan ser mv-homomorfismos inyectivos.

Una mv-álgebra A es llamada el producto subdirecto de una familia $\{A_i : i \in I\}$ de mv-álgebra si existe un mv-homomorfismo inyectivo $h : A \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ tal que para cada $j \in I$, la composición $\pi_j \circ h$ es un mv-homomorfismo sobreyectivo. la demostración del siguiente resultado se puede consultar en [10], teorema 1.3.2.

Teorema 1.2.20. *Una mv-álgebra A es un producto subdirecto de una familia de mv-álgebras $\{A_i : i \in I\}$ si y solo si existe una familia $\{J_i : i \in I\}$ de ideales en A tal que: $A_i \cong A/J_i$ para $i \in I$ y $\bigcap_{i \in I} J_i = \{0_A\}$.*

1.2.4. MV-Álgebras Simples y Semisimples.

Una mv-álgebra A es llamada *simple* si sus únicos ideales son los triviales, es decir, $\{0\}$ y A . La mv-álgebra $[0, 1]$ es un ejemplo de una mv-álgebra simple al igual que las subálgebras L_n . El siguiente resultado caracteriza la mv-álgebra simples, su demostración se encuentra en [10], teorema 3.5.1.

Teorema 1.2.21. *Una mv-álgebra es simple si y solo si es isomorfa a una subálgebra de $[0, 1]$.*

Una mv-álgebra A se dice *semisimple* si $\bigcap \mathcal{M}(A) = \{0\}$. Es claro que toda mv-álgebra simple es semisimple. El siguiente teorema de caracterización para mv-álgebra semisimple corresponde a la proposición 3.6.2 de [10].

Teorema 1.2.22. *Una mv-álgebra es semisimple si y solo si esta es el producto subdirecto de subálgebras de $[0, 1]$*

1.3. Espacios Uniformes

En esta sección se hace una breve presentación de la teoría de los espacios uniformes. Los espacios uniformes fueron introducidos por primera vez en 1937 por André Weil [13]. Estos generalizan los espacios métricos y los grupos topológicos. Se utilizan en el estudio de las propiedades no topológicas de los espacios métricos y sus funciones, como convergencia uniforme, completez y continuidad uniforme, propiedades que infortunadamente se pierden cuando los espacios métricos se generalizan a espacios topológicos. La referencia clásica sobre espacios uniformes es Bourbaki [2], también se recomienda Kelley [6] o James [5].

Sea X un conjunto arbitrario. La notación X^2 indica el producto cartesiano $X \times X$. La diagonal de X^2 es el conjunto $\Delta = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$. El inverso de un conjunto $U \subseteq X^2$ es el conjunto $U^{-1} = \{(x, y) \in X^2 \mid (y, x) \in U\}$. La composición de $U, V \subseteq X^2$ se define como $U \circ V = \{(x, z) \in X^2 \mid \exists w \text{ para algun } w \in X, \text{ tal que } (x, w) \in V \text{ y } (w, z) \in U\}$. Se puede verificar que la composición es asociativa, $U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$ y satisface $(U \circ V)^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1}$.

Definición 1.3.1. Una estructura uniforme (o simplemente una uniformidad) sobre un conjunto X es un subconjunto no vacío $\mathcal{U}$ de $\wp(X^2)$ que cumple con las siguientes propiedades:

- U1)** Si $D \in \mathcal{U}$ y $D \subset E \subset X^2$, $E \in \mathcal{U}$
- U2)** Si $D, E \in \mathcal{U}$, $D \cap E \in \mathcal{U}$
- U3)** Para todo $D \in \mathcal{U}$, $\Delta \subset D$
- U4)** Si $D \in \mathcal{U}$ entonces existe $E \in \mathcal{U}$ tal que $E \subset D^{-1}$
- U5)** Si $D \in \mathcal{U}$ entonces existe $D' \in \mathcal{U}$ tal que $D' \circ D' \subset D$

Los elementos de la uniformidad $\mathcal{U}$ son llamados entornos y el par $(X, \mathcal{U})$ es llamado espacio uniforme. Para ayudar un poco a visualizar un poco los espacios uniformes y sus entornos, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.3.2. Dado un conjunto no vacío X podemos por lo menos definir dos uniformidades sobre este: La discreta, dada por todos los conjuntos $U \subseteq X^2$ tales que $\Delta \subset U$. Y la indiscreta, cuyo único entorno es el conjunto X^2 .

Ejemplo 1.3.3. Dada una métrica d sobre un conjunto X esta induce una uniformidad sobre X , tal uniformidad es $\mathcal{U}_d = \{U \subseteq X^2 \mid d^{-1}([0, \varepsilon]) \subseteq U, \text{ para algún } \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$

Ejemplo 1.3.4. El conjunto $\{U \subseteq [0, 1]^2 : \exists(\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(|x - y| < \varepsilon \Rightarrow (x, y) \in U)\}$ es una uniformidad sobre $[0, 1]$, llamada la uniformidad usual. Las bandas simétrica al rededor de la diagonal Δ , $U_\varepsilon = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : |x - y| < \varepsilon < 1\}$, claramente son un ejemplo de entornos en esta uniformidad. Mas aun, un conjunto $U \subseteq [0, 1]^2$ es considerado un entorno si este contiene una banda $U_\varepsilon = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : |x - y| < \varepsilon\}$, para algún $\varepsilon \in [0, 1]$.

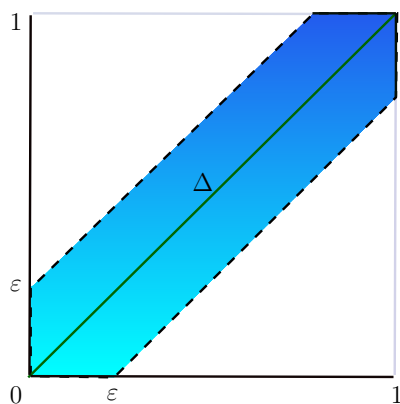


Figura 1.3.1: entorno U_ε

Ejemplo 1.3.5. Otra uniformidad sobre $[0, 1]$. Consideremos los conjuntos $V_a = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y > ax \wedge x > ay\}$ con $a \in [0, 1]$. Ahora diremos que un conjunto V es un entorno, si $V_a \subseteq V$ para algún $a \in [0, 1]$. Gráficamente los conjuntos V_a son conos simétricos al rededor de la diagonal Δ .

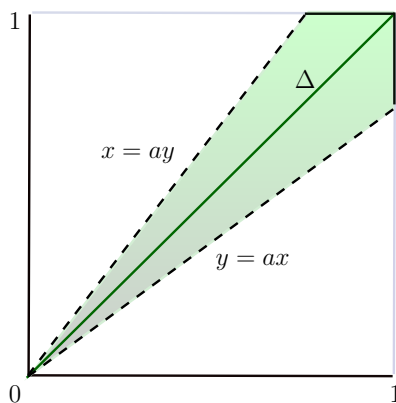


Figura 1.3.2: entorno V_ε

1.3.1. Bases y Subbases

A la hora de trabajar con espacios uniformes, al igual que con los espacios topológicos, es mucho mas práctico usar generadores.

Definición 1.3.6. Dada una uniformidad $\mathcal{U}$, diremos que una *subbase* para $\mathcal{U}$ es un conjunto de entornos $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ que satisfacen las propiedades U3, U4, U5. Si además una subbase satisface que para cada par de elementos A, B de $\mathcal{V}$, existe $C \in \mathcal{V}$ tal que $C \subseteq A \cap B$, diremos que el conjunto de entornos es una *base*.

Una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto no vacío X se dice *separable* si la intersección de todos los entornos coincide con la diagonal, es decir, $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$. En caso de contar con una base o con una subbase la condición anterior se verifica restringiendo la intersección sólo a los miembros de la base o la subbase.

Un entorno U tal que $U = U^{-1}$ es llamado *entorno simétrico*. Si U es un entorno, tanto $U \cap U^{-1}$ como $U \cup U^{-1}$ son entornos simétricos. De manera que dado un entorno U siempre es posible encontrar entornos simétricos S y V tales que $S \subseteq U \subseteq V$.

Ejemplo 1.3.7. La familia de todos los entornos simétricos de una uniformidad $\mathcal{U}$ es una base para $\mathcal{U}$. Una base cuyos entornos son simétricos es llamada un *sistema fundamental de entornos*.

Ejemplo 1.3.8. Si (X, d) es un espacio métrico, un sistema fundamental de entornos para la uniformidad definida en el ejemplo 1.3.3 esta dado por la familia de todos los conjunto de la forma $U_\epsilon^d = \{(x, y) \in X^2 \mid d(x, y) < \epsilon\}$, donde ϵ recorre todo $\mathbb{R}^+$.

Ejemplo 1.3.9. En el caso del ejemplo 1.3.4. Los conjuntos U_ϵ forman un sistema fundamental de entornos. Más aún, gracias a la propiedad arquimediana de los números reales basta considerar $\epsilon = \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, para obtener un sistema fundamental de entornos.

Ejemplo 1.3.10. Otro ejemplo de un sistema fundamental de entornos es el conjunto de todos los V_a para la uniformidad del ejemplo 1.3.5. Nuevamente por la propiedad arquimediana de los números reales podemos solo considerar los $a = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, para obtener un sistema fundamental de entornos.

1.3.2. Funciones Uniformemente Continuas

Definición 1.3.11. Sean $(X, \mathcal{U}), (Y, \mathcal{V})$ espacios uniformes, f una función de X en Y y $f_2 : X^2 \rightarrow Y^2$ definida por $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$. Entonces diremos que f es uniformemente continua si para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq f_2^{-1}(V)$.

Dos espacios uniformes X y Y se dicen *uniformemente equivalentes* si existe una función biyectiva f entre X y Y tal que f y f^{-1} son uniformemente continuas. En el caso de tener una base o una subbase de la uniformidad $\mathcal{V}$, se puede restringir la verificación anterior sólo a los elementos de la base o de la subbase.

Observación 1.3.12. La composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua y la función identidad es uniformemente continua. Así tenemos la categoría **UNIF** que tiene por objetos los espacios uniformes y por morfismos las funciones uniformemente continuas.

1.3.3. Uniformidad Inducida y uniformidad Producto

De manera similar a lo que ocurre en topología, en la teoría de uniformidades tenemos los conceptos de uniformidad inducida por una función y producto de uniformidades.

Dada una función $f : X \rightarrow Y$ de un conjunto X en un espacio uniforme Y , se puede verificar que las imágenes inversas $f_2^{-1} : Y^2 \rightarrow X^2$ de los entornos de Y , forma una base de entornos sobre X . La uniformidad generada por esta base es llamada *uniformidad inducida por f* sobre X . Es claro que, si dotamos a X con la uniformidad inducida por f , f es uniformemente continua. Cuando f se trata de la función inclusión, $X \subseteq Y$, la uniformidad inducida por f es llamada uniformidad restringida a X y los entornos en X son los entornos de Y interceptados con X .

Un caso mas general. Dada una familia de funciones $F = \{f_i : X \rightarrow Y_i : i \in I\}$ donde X es un conjunto y los $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ son espacios uniformes, el conjunto $\{f_{i2}^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_i, i \in I\}$ forma una subbase de entornos en X . La uniformidad generada por esta subbase se denomina *uniformidad inducida por la familia F* . En el caso del producto cartesiano de una familia de espacios uniformes, $X = \prod_{i \in I} (Y_i, \mathcal{U}_i)$, la uniformidad inducida por la familia de las proyecciones $\{\pi_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ sobre X , es llamada *uniformidad producto*.

1.3.4. Topología Uniforme

Toda estructura uniforme sobre un conjunto induce una estructura topológica sobre este. Incluso es posible que diferentes uniformidades sobre un mismo conjunto generen la misma topología, este es el caso de los ejemplos 1.3.4 y 1.3.5 (ambos inducen la topología usual sobre $[0,1]$). Así todo espacio uniforme tiene subyacente un espacio topológico. Existen topologías que no son inducidas por ninguna uniformidad. Solo para las topologías que son completamente regulares existe una uniformidad que las induce, ver [4] teorema 3.1. En el caso de las topologías Hausdorff compactas estas son inducidas por una única uniformidad.

Para definir la topología inducida por una uniformidad se dará un sistema fundamental de vecindades. Dada una uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X , definimos para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}$ el conjunto $U[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$. Veamos gráficamente tomando X como en el ejemplo 1.3.5.

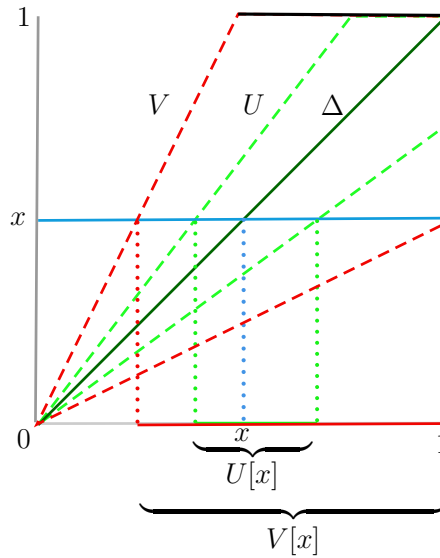


Figura 1.3.3: vecindades $U[x]$ y $V[x]$

Se puede verificar que el conjunto $\mathcal{U}_x = \{U[x] : U \in \mathcal{U}\}$ es un sistema fundamental de vecindades para cada $x \in X$. Luego tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en Bourbaki[2] II§ 1.2 proposición 1.

Proposición 1.3.13. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces existe una única topología $\tau_{\mathcal{U}}$ en X tal que para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{U}_x$ es un sistema fundamental de vecindades de x .*

La topología $\tau_{\mathcal{U}}$ definida en la proposición anterior es llamada topología inducida por la uniformidad $\mathcal{U}$ o *topología uniforme*. En adelante, cuando se diga que un espacio uniforme es Hausdorff, compacto, localmente compacto, etc; significa que su topología subyacente tiene la propiedad de ser Hausdorff, compacta, localmente compacta, etc; respectivamente.

Algunas proposiciones que usaremos que relacionan propiedades uniformes y topológicas son las siguientes, sus demostraciones se pueden encontrar en James [5] capítulo 8. Comencemos con la relación entre funciones continuas y funciones uniformemente continuas.

Proposición 1.3.14. *Si X, Y son espacios uniformes y $f : X \rightarrow Y$ es una función uniformemente continua, entonces f es continua respecto a las topologías subyacentes.*

Observación 1.3.15. Ya estamos en condición de definir el funtor $\Sigma : \text{UNIF} \rightarrow \text{TOP}$ tal que cada espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es enviado en su espacio topológico subyacente $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ esto en virtud de la proposición 1.3.13, y cada función uniformemente continua $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ es enviada en la función continua $f : (X, \tau_{\mathcal{U}}) \rightarrow (Y, \tau_{\mathcal{V}})$, dada la proposición 1.3.14.

En cuanto al recíproco de la proposición 1.3.14, podemos decir que por lo menos se cumple para espacios uniformes Hausdorff compactos.

Proposición 1.3.16. *Sean X, Y espacios uniformes y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua respecto a las topologías subyacentes. f es uniformemente continua, si X es un espacio uniforme Hausdorff compacto.*

La propiedad de separación para espacios uniformes es análoga a la propiedad Hausdorff para los espacios topológicos.

Proposición 1.3.17. *Sea X un espacio uniforme. Entonces la uniformidad es separable si y sólo si la topología uniforme es Hausdorff.*

De hecho toda uniformidad es separable y toda topología uniforme es completamente regular, la demostración en James [5] pag. 142.

Proposición 1.3.18. *Un espacio topológico es inducido por una uniformidad si y solo si este es completamente regular.*

Una propiedad importante de los espacios topológicos Hausdorff compactos es que son inducidos por una única uniformidad.

Proposición 1.3.19. *Si (X, τ) es un espacio topológico Hausdorff compacto, el conjunto de todas las vecindades de la diagonal, es la única uniformidad sobre X tal que la topología uniforme coincide con la topología τ .*

Se finaliza esta sección con un ejemplo el cual sera fundamental en nuestra construcción.

Ejemplo 1.3.20. Consideremos el intervalo real unitario $I = [0, 1]$ y la uniformidad $\mathcal{U}_I$, que llamaremos uniformidad usual, cuya base está dada por la familia de los conjuntos de la forma $U_n = \{(x, y) \in I^2 : |x - y| < \frac{1}{n}\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Hay que notar que el conjunto de los $U_n[x] = (x + \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n}) \cap I$ con $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$ es un sistema fundamental de vecindades para la topología usual de I o topología usual de los números reales restringida a I .

Capítulo 2

DUALIDAD UNIFORME

En este capítulo nos centraremos en dar una representación dual entre la categoría $\mathbf{MVC}[0, 1]$ de las mv-álgebras semisimples, la cual es una subcategoría plena de la categoría $\mathbf{MV}$ y la categoría $\mathbf{UCOMP}$ de los espacios uniformes Hausdorff compactos la cual es una subcategoría plena de $\mathbf{UNIF}$. Para ello definiremos los funtores y las transformaciones naturales adecuadas. También estableceremos el correspondiente teorema de representación.

2.1. Uniformidades y MV-Álgebras

2.1.1. Uniformidad sobre el conjunto $[0, 1]^A$

En esta sección consideraremos la uniformidad de la convergencia puntual para dotar de estructura uniforme a una familia arbitraria de funciones de un conjunto A en el espacio uniforme $I = [0, 1]$, con la uniformidad usual $\mathcal{U}_I$. En particular, trataremos el caso donde A es una mv-álgebra y la uniformidad se relativiza a todos los mv-homomorfismos entre A y el intervalo I visto como mv-álgebra. Adicional a esto daremos algunas propiedades que usaremos en la próxima sección.

2.1.1.1. Uniformidad de la Convergencia Puntual

Para una familia arbitraria de funciones F de un conjunto X en un espacio uniforme $(Y, \mathcal{U})$ se define *la uniformidad de la convergencia puntual sobre F* , como la uniformidad producto del espacio $\prod_{x \in X} Y$ restringida a F , la cual denotaremos por $\mathcal{U}_F$.

Una subbase para la uniformidad de la convergencia puntual sobre la familia de funciones F es dada por todos los conjuntos de la forma $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in U\}$ para algún $U \in \mathcal{U}$ y $x \in X$.

De esta manera dotaremos de la uniformidad de la convergencia puntual a la familia $H(A)$ de todos los mv-homomorfismos de una mv-álgebra A en la mv-álgebra $[0, 1]$, considerando la uniformidad usual $\mathcal{U}_I$ sobre $[0, 1]$. Tal uniformidad sera denotada por $\mathcal{U}_H$. Además tenemos que la familia de todos los conjuntos de la forma

$$V_{a,n} = \left\{ (f, g) \in F^2 : |f(a) - g(a)| < \frac{1}{n} \right\} \text{ donde } a \in A \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

es una subbase para esta uniformidad y así la familia de los conjuntos

$$V_{A',n} = \bigcap_{a \in A'} V_{a,n} \text{ donde } A' \text{ es un subconjunto finito de } A \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

es una base.

Observación 2.1.1. La topología uniforme inducida por la uniformidad de la convergencia puntual $\mathcal{U}_F$ coincide con la topología de la convergencia puntual cuya subbase está dada por los conjuntos de la forma:

$$W_{a,U} = \{f \in F : f(a) \in U\}, \text{ donde } a \in A \text{ y } U \text{ es un abierto en } I.$$

La uniformidad de la convergencia puntual sobre una familia de funciones F depende únicamente del espacio uniforme base, igual para la topología de la convergencia puntual. Así la uniformidad puntual $\mathcal{U}_H$ hereda la propiedad de ser Hausdorff y compacto dado que el espacio base en este caso $(I, \mathcal{U}_I)$ lo es.

Cerramos esta sección dando una nueva cara al espacio uniforme $(H(A), \mathcal{U}_H)$ gracias a la correspondencia que hay entre $H(A)$ y el conjunto de todo los ideales maximales de A , $\mathcal{M}(A)$. Este resultado es comentado en [9].

Proposición 2.1.2. *Sea A una mv-álgebra. La aplicación $\varphi : H(A) \rightarrow \mathcal{M}(A)$ tal que a cada mv-homomorfismo $f : A \rightarrow I$ le asigna el kernel de f , es una función biyectiva.*

Demostración. El único ideal maximal de la mv-álgebra $I = [0, 1]$ es $\{0\}$. De la proposición 1.2.16.i) de [10] se tiene que la imagen inversa por mv-homomorfismos de un ideal maximal es un ideal maximal luego se tiene que $\varphi(f) = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M}(A)$ para todo $f \in H(A)$. Claramente φ es una función, puesto que, si $f = g$ en $H(A)$ entonces $f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$. Para la inyectividad, si $f^{-1}(\{0\}) \neq g^{-1}(\{0\})$, entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$, luego $f \neq g$. Finalmente, si B es un ideal maximal de A , definimos $\chi_B : A \rightarrow [0, 1]$ dada por $\chi_B(a) = 0$ si $a \in B$ y $\chi_B(a) = 1$ si $a \notin B$. Es claro que $B = \text{Kern}(\chi_B)$ resta mostrar que $\chi_B \in H(A)$. En efecto, Por def. 1.2.10. l1) $0_A \in B$, luego $\chi_B(0_A) = 0$. Si $a, b \in B$ por def. 1.2.10. l3) $a \oplus b \in B$ y se tiene que $\chi_B(a \oplus b) = 0 = 0 \oplus 0 = \chi_B(a) \oplus \chi_B(b)$. Si $a \notin B$ (o $b \notin B$) se tiene que $a \oplus b \notin B$ (puesto que $a, b \leq a \oplus b$ y def.1.2.10. l2)), así se tiene $\chi_B(a \oplus b) = 1 = 1 \oplus \chi_B(b) = \chi_B(a) \oplus \chi_B(b)$. Y como para todo $a \in A$, $a \oplus \neg a = 1$ y B es un ideal maximal se tiene que $\neg a \in B$ o $a \in B$ pero no ambas. Luego $\chi_B(\neg a) = \neg \chi_B(a)$. Así que φ es sobreyectiva. $\square$

Así tenemos que el espacio uniforme $(H(A), \mathcal{U}_H)$ es uniformemente equivalente al espacio uniforme $(\mathcal{M}(A), \mathcal{U}_{\varphi(H)})$ donde $\mathcal{U}_{\varphi(H)}$ es la uniformidad inducida por la imagen a través de $\varphi \times \varphi$ de los entornos de $\mathcal{U}_H$.

2.1.2. La MV-Álgebra $[0, 1]^X$

El conjunto de las funciones uniformemente continuas de un espacio uniforme Hausdorff compacto $(X, \mathcal{U})$ en el espacio uniforme $([0, 1], \mathcal{U}_I)$, que notaremos por $Ucon(X)$, es una subálgebra de la mv-álgebra $[0, 1]^X$. En esta sección reescribiremos algunos resultados que se tienen para la subálgebra $Cont(X)$ de las funciones continuas de un espacio topológico Hausdorff compacto (X, τ) en el intervalo $[0, 1]$ (dotado de la topología usual) en términos de $Ucon(X)$ y espacios uniformes.

El conjunto A^X de todas las funciones de un conjunto no vacío X en una mv-álgebra A es una mv-álgebra con las operaciones definidas puntualmente, ver ejemplo 1.2.4. En particular cuando A es la mv-álgebra $[0, 1]$. Una subálgebra S de la mv-álgebra $[0, 1]^X$ se dice que *separa puntos* si dados dos puntos $x \neq y$, existe $f \in S$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) > 0$. Como una consecuencia del teorema de Urysohn tenemos que: Si (X, τ_X) es un espacio topológico Hausdorff compacto y $[0, 1]$ es dotado con la topología usual τ_I , $Cont(X)$ es una subálgebra de $[0, 1]^X$ que separa puntos.

Ahora si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme Hausdorff compacto, $\tau_{\mathcal{U}}$ su topología subyacente y A una subálgebra de $[0, 1]^X$ que separa puntos. El teorema 3.4.3 ítem i) de [10] establece que la función que asigna a cada punto x del espacio topológico Hausdorff compacto $(X, \tau_{\mathcal{U}})$, el ideal maximal $J_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ es una correspondencia uno a uno entre los ideales maximales de la subálgebra A , $\mathcal{M}(A)$, y el espacio topológico X . De la proposición 1.3.14 toda función uniformemente continua bajo la uniformidad $\mathcal{U}$ es continua bajo la topología $\tau_{\mathcal{U}}$. Además como $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es Hausdorff compactos, de la proposición 1.3.16 se concluye que $Ucon(X) = Cont(X)$. De esta forma tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme Hausdorff compacto y A una subálgebra de $Ucon(X)$ que separa puntos. Entonces la función ψ que asigna a cada $x \in X$ el ideal J_x es un isomorfismo uniforme entre X y $\mathcal{M}(A)$, este último dotado con la uniformidad inducida por la imagen $\psi \times \psi$.*

2.1.2.1. Teorema de Representación

El corolario 3.6.8 de [10] nos da una caracterización de las mv-álgebras semisimples en términos de $Cont(X)$. Para ser mas precisos,

Teorema 2.1.4. *Una mv-álgebra A es semisimple si y solo si A es isomorfa a una subálgebra de la mv-álgebra $Cont(X)$ para algún espacio topológico Hausdorff compacto X .*

Este resultado también se puede dar en términos de espacios uniformes.

Dada una mv-álgebra semisimple A . Por el teorema 1.2.20, $A = \prod_{I \in \mathcal{M}(A)} A/I$. Para $I \in \mathcal{M}(A)$, A/I es semisimple en virtud de la observación 1.2.18. Así para cada $I \in \mathcal{M}(A)$, existe una subálgebra S_I de la mv-álgebra $[0, 1]$ tal que $A/I \cong S_I$ (esto por teorema 1.2.21). De esta forma, $A \cong \prod_{I \in \mathcal{M}(A)} S_I$ la cual es una subálgebra de la mv-álgebra $[0, 1]^{\mathcal{M}(A)}$, donde $\mathcal{M}(A)$ es un espacio uniforme Hausdorff compacto por el teorema 2.1.2.

De otro lado, toda subálgebra S de $Ucon(X)$ donde X es un espacio uniforme Hausdorff compacto, es semisimple puesto que $\mathcal{M}(S) = \{I \cap S : I \in \mathcal{M}(Ucon(X))\}$ (prop.1.2.19) y $Ucon(X)$ es semisimple. Del teorema 2.1.3 todo ideal maximal de $Ucon(X)$ es de la forma J_x con $x \in X$, puesto que $Ucon(X)$ separa puntos. Si $f \in \bigcap_{I \in \mathcal{M}(S)} I = \bigcap_{x \in X} J_x$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Teorema 2.1.5. *Una mv-álgebra A es semisimple si y sólo si es isomorfa a una subálgebra de $Ucon(X)$ para algún espacio uniforme Hausdorff compacto X .*

2.2. Dualidad entre $\mathbf{MVC}[0, 1]$ y $\mathbf{UCOMP}$.

Ya contamos con lo necesario para definir los funtores $\mathbf{F} : \mathbf{MVC}[0, 1] \longrightarrow \mathbf{UCOMP}$ y $\mathbf{K} : \mathbf{UCOMP} \longrightarrow \mathbf{MVC}[0, 1]$, y las transformaciones naturales $\eta : \mathbf{1}_{\mathbf{MVC}[0, 1]} \longrightarrow \mathbf{KF}$ y $\kappa : \mathbf{1}_{\mathbf{UCOMP}} \longrightarrow \mathbf{FK}$ de tal manera que $\langle \mathbf{F}, \mathbf{K}, \eta, \kappa \rangle$ establezcan una representación dual entre la categoría de la mv-álgebras semisimples y los espacios uniformes Hausdorff compactos, la cual se describe en la siguiente figura.

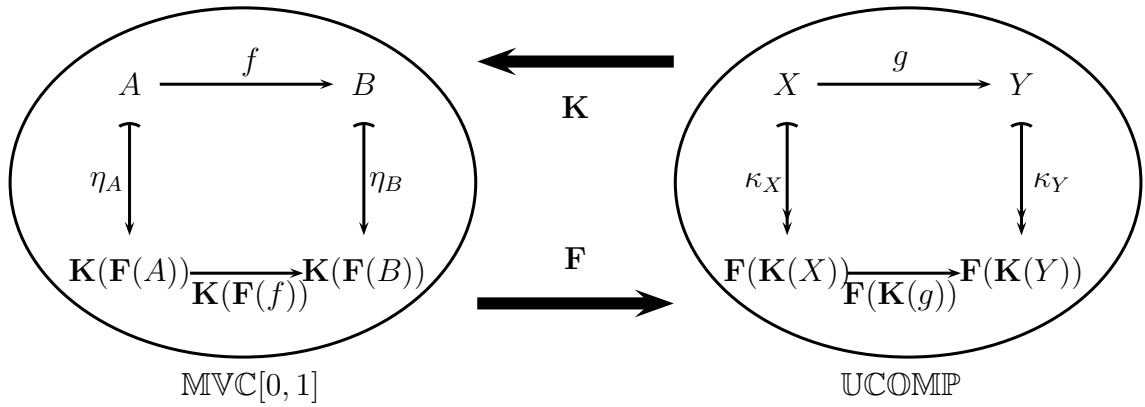


Figura 2.2.1: Representación dual

2.2.1. Los Funtores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{K}$

Se define el functor contravariante $\mathbf{F} : \mathbf{MVC}[0, 1] \rightarrow \mathbf{UCOMP}$ por

$$\mathbf{F}(A) = (H(A), \mathcal{U}_H) \text{ y } \mathbf{F}(\alpha) : \mathbf{F}(B) \longrightarrow \mathbf{F}(A)$$

Donde A y B son mv-álgebras semisimples y $\alpha : A \rightarrow B$ es un mv-homomorfismo. Y $\mathbf{F}(\alpha)$ es tal que para cada $\beta \in \mathbf{F}(B)$, $\mathbf{F}(\alpha)(\beta) = \beta \circ \alpha$.

En la sección 2.1.1 se vio que $\mathbf{F}(A)$ es un objeto de $\mathbf{UCOMP}$ en cuanto a $\mathbf{F}(\alpha)$ es fácil ver que es un morfismo en $\mathbf{UCOMP}$. Para ello calculemos la imagen inversa mediante $\mathbf{F}(\alpha)$ de un elemento de la subbase para la uniformidad sobre $\mathbf{F}(A)$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}(\alpha))_2^{-1}(V_{a,n}) &= \{(f, g) \in (\mathbf{F}(B))^2 : (\mathbf{F}(\alpha)(f), \mathbf{F}(\alpha)(g)) \in V_{a,n}\} \\
 &= \{(f, g) \in (\mathbf{F}(B))^2 : (f \circ \alpha, g \circ \alpha) \in V_{a,n}\} \\
 &= \left\{ (f, g) \in (\mathbf{F}(B))^2 : |f(\alpha(a)), g(\alpha(a))| < \frac{1}{n} \right\} \\
 &= V_{\alpha(a), n}
 \end{aligned}$$

La cual coincide con un elemento de la subbase para uniformidad sobre $\mathbf{F}(B)$ y así $\mathbf{F}(\alpha)$ es una función uniformemente continua.

Si $1_A : A \rightarrow A$ es el morfismo identidad en $\mathbf{MVC}[0, 1]$, $\mathbf{F}(1_A)$ es identidad en $\mathbf{UCOMP}$, $\mathbf{F}(1_A)(\beta)(a) = (\beta \circ 1_A)(a) = \beta(1_A(a)) = \beta(a)$ para todo $a \in A$. Por ultimo veamos que $\mathbf{F}$ respeta la composición de morfismos,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\alpha \circ \alpha')(\beta) &= \beta \circ (\alpha \circ \alpha') \\
 &= (\beta \circ \alpha) \circ \alpha' \\
 &= \mathbf{F}(\alpha')(\beta \circ \alpha) \\
 &= \mathbf{F}(\alpha')(\mathbf{F}(\alpha)(\beta)) \\
 &= (\mathbf{F}(\alpha') \circ \mathbf{F}(\alpha))(\beta),
 \end{aligned}$$

esto para todo $\beta \in \mathbf{F}(B)$.

Observación 2.2.1. Hemos observado que dada una mv-álgebra A , el conjunto $H(A)$ de todos los mv-homomorfismo de A en la mv-álgebra $[0, 1]$ es un espacio uniforme Hausdorff compacto dotado con la uniformidad de la convergencia puntual. Luego el funtor $\mathbf{F}$ se puede definir como un funtor de la categoría de todas las mv-álgebra $\mathbf{MV}$ en la categoría $\mathbf{UCOMP}$.

Se define el funtor contravariante $\mathbf{K} : \mathbf{UCOMP} \rightarrow \mathbf{MVC}[0, 1]$ por

$$\mathbf{K}(X) = Ucon(X) \text{ y } \mathbf{K}(f) : \mathbf{K}(Y) \longrightarrow \mathbf{K}(X)$$

donde X, Y son espacios uniformes Hausdorff compactos y $f : X \rightarrow Y$ es un función uniformemente continua. $Ucon(X)$ es la mv-álgebra definida en la sección 2.1.2, la cual es semisimple. Y $\mathbf{K}(f)$ está dado por $\mathbf{K}(f)(\kappa) = \kappa \circ f$ para todo $\kappa \in \mathbf{K}(Y)$.

Mostremos que $\mathbf{K}(f)$ es un mv-homomorfismo.

Dado $0_{\mathbf{K}(Y)} : X \rightarrow [0, 1]$ la función constante 0,

$$\mathbf{K}(f)(0_{\mathbf{K}(Y)})(x) = (0_{\mathbf{K}(Y)} \circ f)(x) = 0_{\mathbf{K}(X)}(f(x)) = 0$$

para todo x en el dominio de f , por tanto $\mathbf{K}(f)(0_{\mathbf{K}(Y)}) = 0_{\mathbf{K}(X)}$.

Si $\alpha, \beta \in \mathbf{K}(Y)$, tenemos de la definición que $\mathbf{K}(f)(\alpha \oplus \beta) = (\alpha \oplus \beta) \circ f$ y $\mathbf{K}(f)(\alpha) \oplus \mathbf{K}(f)(\beta) = (\alpha \circ f) \oplus (\beta \circ f)$, verifiquemos que $(\alpha \oplus \beta) \circ f = (\alpha \circ f) \oplus (\beta \circ f)$.

$$\begin{aligned} [(\alpha \oplus \beta) \circ f](x) &= (\alpha \oplus \beta)(f(x)) \\ &= \alpha(f(x)) \oplus \beta(f(x)) \\ &= (\alpha \circ f)(x) \oplus (\beta \circ f)(x) \\ &= [(\alpha \circ f) \oplus (\beta \circ f)](x) \end{aligned}$$

Para todo $x \in X$, por tanto $\mathbf{K}(f)(\alpha \oplus \beta) = \mathbf{K}(f)(\alpha) \oplus \mathbf{K}(f)(\beta)$.

Si $\alpha \in \mathbf{K}(Y)$, $\mathbf{K}(f)(\neg \alpha) = (\neg \alpha) \circ f$ y $\neg \mathbf{K}(f)(\alpha) = \neg(\alpha \circ f)$. Y para todo $x \in X$,

$$[(\neg \alpha) \circ f](x) = (\neg \alpha)(f(x)) = \neg(\alpha(f(x))) = \neg(\alpha \circ f)(x),$$

luego $\mathbf{K}(f)(\neg \alpha) = \neg \mathbf{K}(f)(\alpha)$.

Así hemos mostrado que $\mathbf{K}(f)$ es un morfismo en $\mathbf{MVC}[0, 1]$.

Ahora, dado el morfismo identidad $1_X : X \rightarrow X$ mostraremos que $\mathbf{K}(1_X)$ es el morfismo identidad $1_{\mathbf{K}(X)}$. Sea $f \in \mathbf{K}(X)$ y $x \in X$,

$$\mathbf{K}(1_X)(f)(x) = (f \circ 1_X)(x) = f(1_X(x)) = f(x),$$

así que $\mathbf{K}(1_X) = 1_{\mathbf{K}(X)}$.

Para finalizar mostremos que $\mathbf{K}$ respeta la composición de morfismo. Sea $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $h \in \mathbf{K}(Z)$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(g \circ f)(h) &= h \circ (g \circ f) \\
 &= (h \circ g) \circ f \\
 &= \mathbf{K}(f)(h \circ g) \\
 &= \mathbf{K}(f)(\mathbf{K}(g)(h)) \\
 &= (\mathbf{K}(f) \circ \mathbf{K}(g))(h),
 \end{aligned}$$

Observación 2.2.2. Si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme, $Ucont(X)$ es una mv-álgebra. Luego el funtor $\mathbf{K}$ puede definirse de manera mas general como un funtor de la categoría $\mathbf{UNIF}$ de los espacios uniformes en la categoría $\mathbf{MVC}[0, 1]$.

2.2.2. Las Transformaciones Naturales η y κ

Definición 2.2.3. Sea η la familia de funciones entre mv-álgebras

$$\{\eta_A : A \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{F}(A))\}_{A \in \mathbf{MVC}[0, 1]}$$

dada por $\eta_A(a) = \widehat{a}$, $\forall a \in A$ donde $\widehat{a} : \mathbf{F}(A) \rightarrow [0, 1]$ es definida por $\widehat{a}(\chi) = \chi(a)$ para todo $\chi \in \mathbf{F}(A)$.

Primero mostraremos que η es una familia de mv-homomorfismos, esto es, para toda mv-álgebra A , η_A es un mv-homomorfismos. Para $a, b \in A$ y $\chi \in \mathbf{F}(A)$ tenemos que, $\eta_A(a \oplus b)(\chi) = \widehat{a \oplus b}(\chi) = \chi(a \oplus b) = \chi(a) \oplus \chi(b) = \widehat{a}(\chi) \oplus \widehat{b}(\chi) = (\eta_A(a) \oplus \eta_A(b))(\chi)$, así $\eta_A(a \oplus b) = \eta_A(a) \oplus \eta_A(b)$. Si $\chi \in \mathbf{F}(A)$, $\eta_A(0_A)(\chi) = \widehat{0_A}(\chi) = \chi(0_A) = 0$ luego $\eta_A(0_A) = 0_{\mathbf{K}(\mathbf{F}(A))}$. Y para todo $x \in A$ se tiene $\eta_A(\neg x) = \neg \eta_A(x)$ en efecto, si $\chi \in \mathbf{F}(A)$, $\eta_A(\neg x)(\chi) = \widehat{\neg x}(\chi) = \chi(\neg x) = \neg \chi(x) = \neg \widehat{x}(\chi) = \neg \eta_A(x)$.

Ahora veamos que η_A es inyectiva para toda mv-álgebra A semisimple, calculemos su kernel,

$$\begin{aligned}
 \text{Kern}(\eta_A) &= \{a \in A \mid \eta_A(a) = 0\} \\
 &= \{a \in A \mid \widehat{a} = 0\} \\
 &= \{a \in A \mid \forall \chi \in \mathbf{F}(A), \chi(a) = 0\} \\
 &= \bigcap_{\chi \in \mathbf{F}(A)} \{a \in A \mid \chi(a) = 0\} \\
 &= \bigcap_{\chi \in \mathbf{F}(A)} \text{Kern}(\chi)
 \end{aligned}$$

Por el teorema 2.1.3, $\bigcap_{\chi \in \mathbf{F}(A)} \text{Kern}(\chi) = \bigcap \mathcal{M}(A)$. Y $\bigcap \mathcal{M}(A) = \{0_A\}$.

Finalmente veamos que η es una transformación natural, es decir, para todo par de mv-álgebras A, A' y todo mv-homomorfismo $f : A \rightarrow A'$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_{A'} \\ \mathbf{K}(\mathbf{F}(A)) & \xrightarrow{\mathbf{K}(\mathbf{F}(f))} & \mathbf{K}(\mathbf{F}(A')) \end{array}$$

Figura 2.2.2:

lo cual es equivalente a mostrar la igualdad $\eta_{A'} \circ f = \mathbf{K}(\mathbf{F}(f)) \circ \eta_A$.

Ahora si $a \in A$, por un lado tenemos que $(\eta_{A'} \circ f)(a) = \eta_{A'}(f(a)) = \widehat{f(a)}$ y por el otro $(\mathbf{K}(\mathbf{F}(f)) \circ \eta_A)(a) = \mathbf{K}(\mathbf{F}(f))(\eta_A(a)) = \eta_A(a) \circ \mathbf{F}(f) = \widehat{a} \circ \mathbf{F}(f)$. Luego nos resta mostrar que $\widehat{f(a)} = \widehat{a} \circ \mathbf{F}(f)$. Sea $\alpha : \mathbf{F}(A') \rightarrow [0, 1]$ un morfismo en $\mathbf{UCOMP}$,

$$\widehat{f(a)}(\alpha) = \alpha(f(a)) = (\alpha \circ f)(a) = \widehat{a}(\alpha \circ f) = \widehat{a}(\mathbf{F}(f)(\alpha)) = (\widehat{a} \circ \mathbf{F}(f))(\alpha)$$

Por tanto $\eta_{A'} \circ f = \mathbf{K}(\mathbf{F}(f)) \circ \eta_A$ y η es una transformación natural.

Definición 2.2.4. Sea κ la familia de funciones entre espacios uniformes

$$\{\kappa_X : X \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{K}(X))\}_{X \in \mathbf{UCOMP}}$$

dada por $\kappa_X(x) = \widehat{x}$, $\forall x \in X$, donde $\widehat{x} : \mathbf{K}(X) \rightarrow [0, 1]$ esta definida por $\widehat{x}(\alpha) = \alpha(x)$ para todo $\alpha \in \mathbf{K}(X)$.

Comencemos mostrando que κ es una familia de morfismos en $\mathbf{UCOMP}$, es decir, para todo objeto X de $\mathbf{UCOMP}$, $\kappa_X : X \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{K}(X))$ es una función uniformemente continua. Recordemos que un elemento de la subbase para $\mathbf{F}(\mathbf{K}(X))$ es dado por

$$V_{\alpha, n} = \{(f, g) \in (\mathbf{F}(\mathbf{K}(X)))^2 : |f(\alpha) - g(\alpha)| < \frac{1}{n}\}$$

para $\alpha \in \mathbf{K}(X)$ y $n \in \mathbb{N}$. Y calculemos su imagen inversa respecto a κ_X ,

$$\begin{aligned}
 (\kappa_X)_2^{-1}(V_{\alpha,n}) &= \{(x, y) \in X^2 : (\kappa_X(x), \kappa_X(y)) \in V_{\alpha,n}\} \\
 &= \{(x, y) \in X^2 : (\widehat{x}, \widehat{y}) \in V_{\alpha,n}\} \\
 &= \{(x, y) \in X^2 : |\widehat{x}(\alpha) - \widehat{y}(\alpha)| < \frac{1}{n}\} \\
 &= \{(x, y) \in X^2 : |\alpha(x) - \alpha(y)| < \frac{1}{n}\} \\
 &= \{(x, y) \in X^2 : (\alpha(x), \alpha(y)) \in U_n\} \\
 &= \alpha_2^{-1}(U_n)
 \end{aligned}$$

como U_n es un entorno de la uniformidad usual $\mathcal{U}_I$ sobre $[0, 1]$ y $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ es uniformemente continua $(\kappa_X)_2^{-1}(V_{\alpha,n}) = \alpha_2^{-1}(U_n)$ es entorno de la uniformidad en X . Así κ_X es uniformemente continua.

Para cada X , κ_A es una biyección, primero mostraremos que κ_X es inyectiva. Sean $x_1 \neq x_2$ en X , como el mv-álgebra $\mathbf{K}(X)$ separa puntos, existe $\alpha \in \mathbf{K}(X)$ tal que $\alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$ luego tenemos que

$$\kappa_X(x_1)(\alpha) = \alpha(x_1) \neq \alpha(x_2) = \kappa_X(x_2)(\alpha)$$

es decir que $\kappa_X(x_1) \neq \kappa_X(x_2)$.

Ahora, para mostrar la sobreyectividad debemos considerar la aplicación biyectiva ψ de X sobre $\mathcal{M}(\mathbf{K}(X))$ dada en el teorema 2.1.3 y la aplicación biyectiva φ que hay entre $\mathbf{F}(\mathbf{K}(X))$ y $\mathcal{M}(\mathbf{K}(X))$, de la proposición 2.1.2. Luego $\varphi \circ \psi : X \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{K}(X))$ es una aplicación biyectiva y así κ_X es sobreyectiva.

La familia κ es una transformación natural, es decir, para cada par de espacios uniformes Hausdorff compactos X, Y y toda función uniformemente continua $g : X \rightarrow Y$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & Y \\
 \kappa_X \downarrow & & \downarrow \kappa_Y \\
 \mathbf{F}(\mathbf{K}(X)) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathbf{K}(g))} & \mathbf{F}(\mathbf{K}(Y))
 \end{array}$$

Figura 2.2.3:

lo que es equivalente a tener la siguiente igualdad, $\kappa_Y \circ g = \mathbf{F}(\mathbf{K}(g)) \circ \kappa_X$.

Si $x \in X$, tenemos que $(\mathbf{F}(\mathbf{K}(g)) \circ \kappa_X)(x) = \mathbf{F}(\mathbf{K}(g))(\kappa_X(x)) = \kappa_X(x) \circ \mathbf{K}(g)$ por un lado, y $(\kappa_Y \circ g)(x) = \kappa_Y(g(x)) = \widehat{g(x)}$ por el otro. Luego debemos mostrar que $\widehat{g(x)} = \kappa_X(x) \circ \mathbf{K}(g)$

Si $\beta : \mathbf{K}(Y) \rightarrow [0, 1]$ es un morfismo en $\mathbf{MVC}[0, 1]$

$$\widehat{g(x)}(\beta) = \beta(g(x)) = (\beta \circ g)(x) = \widehat{x}(\beta \circ g) = \widehat{x}(\mathbf{K}(g)(\beta)) = (\widehat{x} \circ \mathbf{K}(g))(\beta) = (\kappa_X(x) \circ \mathbf{K}(g))(\beta)$$

Por tanto, el diagrama conmuta y así κ es una transformación natural.

Teorema 2.2.5. $\langle \mathbf{F}, \mathbf{K}, \eta, \kappa \rangle$ es una representación dual entre $\mathbf{MVC}[0, 1]$ y $\mathbf{UCOMP}$.

Demostración. Ya tenemos que κ es un isomorfismo natural. Solo resta mostrar que para todo $X \in \mathbf{Obj}_{\mathbf{MVC}[0, 1]}$ y todo $A \in \mathbf{Obj}_{\mathbf{UCOMP}}$, las identidades $f = \mathbf{K}(\mathbf{F}(f) \circ \kappa_X) \circ \eta_A$ y $h = \mathbf{F}(\mathbf{K}(h) \circ \eta_A) \circ \kappa_X$ se satisfacen para todo $f \in \mathbf{Mor}_{\mathbf{MVC}[0, 1]}(A, \mathbf{K}(X))$ y todo $h \in \mathbf{Mor}_{\mathbf{UCOMP}}(X, \mathbf{F}(A))$. De hecho solo mostraremos $f = \mathbf{K}(\mathbf{F}(f) \circ \kappa_X) \circ \eta_A$, ya que la otra identidad se demuestra de forma similar.

Sea $a \in A$, $\eta_A(a) = \widehat{a}$ y de las definición de $\mathbf{K}$,

$$(\mathbf{K}(\mathbf{F}(f) \circ \kappa_X) \circ \eta_A)(a) = \mathbf{K}(\mathbf{F}(f) \circ \kappa_X)(\widehat{a}) = \widehat{a} \circ \mathbf{F}(f) \circ \kappa_X.$$

Ahora tomado $x \in X$, $\kappa_X(x) = \widehat{x}$ y de la definición de $\mathbf{F}$,

$$(\widehat{a} \circ \mathbf{F}(f) \circ \kappa_X)(x) = \widehat{a}(\mathbf{F}(f)(\widehat{x})) = \widehat{a}(\widehat{x} \circ f).$$

De las definiciones de $\widehat{a}$ y $\widehat{x}$ tenemos que $\widehat{a}(\widehat{x} \circ f) = (\widehat{x} \circ f)(a) = (f(a))(x)$. Así, $(\widehat{a} \circ \mathbf{F}(f) \circ \kappa_X)(x) = (f(a))(x)$ para todo $x \in X$ y $(\mathbf{K}(\mathbf{F}(f) \circ \kappa_X) \circ \eta_A)(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Por tanto se tiene la identidad. $\square$

Conclusiones

Dualidad topológica y dualidad uniforme.

Como se mencionó en la introducción, Cignoli, Dubuc y Mundici en [9] establecen una representación dual entre las mv-álgebras semisimples $\mathbf{MVC}[0, 1]$ y los espacios topológicos Hausdorff compacto $\mathbf{COMP}$. Esta representación dual se obtiene de la que hemos logrado en termino de espacios uniformes por aplicación del funtor $\Sigma : \mathbf{UNIF} \longrightarrow \mathbf{TOP}$. De modo que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{UCOMP} & \xrightarrow{K} & \mathbf{MVC}[0, 1] \\ & \searrow \Sigma & \nearrow C \\ & \mathbf{COMP} & \end{array}$$

Figura 2.2.4:

donde el funtor $C : \mathbf{COMP} \longrightarrow \mathbf{MVC}[0, 1]$ es tal que cada espacio topológico Hausdorff compacto X es enviado en el conjunto $Cont(X)$.

La representación que se ha obtenido en este trabajo muestra que por lo menos para el caso de las mv-álgebras semisimples es posible pasar una dualidad en términos topológicos a una en términos de espacios uniformes. Queda para posteriores estudios la posibilidad de hacer lo mismo para otras representaciones de mv-álgebras mas generales, teniendo en cuenta que tales representaciones son extensiones del caso para mv-álgebras semisimples. Esta posibilidad se dificulta para el caso de las mv-álgebras no arquimediana cuya representación aunque involucra topologías compactas, estas no son Hausdorff, por tanto no existe una uniformidad que de cuenta de estas topologías.

Sobre la uniformidad para el conjunto $[0, 1]^A$

En la sección 2.1.1 hemos dotado al conjuntos $[0, 1]^A$ de todas las funciones de un conjunto no vacío A en el intervalo real $[0, 1]$ de la uniformidad puntual cuya topología subyacente coincide con la topología puntual sobre $[0, 1]^A$. Esto por supuesto se hizo dada caracterización de las mv-álgebra semisimple según el corolario 2.1.5. Pero esta no es la única uniformidad que se puede definir sobre este espacio. Por ejemplo, en el libro de Kelley [6], capítulo 7, se exponen algunas uniformidades sobre el espacio de funciones y su relación con la topología subyacente. Alguna de esa uniformidades requieren que tanto el dominio como el codominio de la familia de funciones tenga estructura uniforme.

Es así que podemos pensar en investigar tales uniformidades sobre el espacio $H(A)$ y los efectos que esto causa sobre la representación dual que hemos obtenido. Consecuente con esto, se debe plantear la necesidad de definir estructuras uniformes sobre las mv-álgebras.

Otra cosa de notar en el método usado para construir esta dualidad es que hace uso del objeto $[0, 1]$, el cual vive en ambas categorías. Así se pueden estudiar algunas variantes buscando objetos con esta propiedades, nuevamente esto hace necesario el estudio de uniformidades sobre mv-álgebras. Por ejemplo en la representación de Stone que mostramos en el ejemplo 1.1.15 tenemos que $\mathbf{O}(X) \cong \mathbf{Mor}_{\mathbf{TOP}}(X, 2)$ como retículos distributivos y acotados, y $\mathbf{S}(L) \cong \mathbf{Mor}_{\mathbf{LAT}}(L, 2)$ como espacios topológicos, donde $2 = \{0, 1\}$ es tanto un espacio topológico como un retículo.

En resumen hay una gran variedad de posibilidades que podemos estudiar en busca de nuevas dualidades o de mejorar las que tenemos.

Uniformidad sobre mv-álgebras

Es sabido que a partir de una métrica se puede definir una uniformidad. Aunque las mv-álgebra no son espacios métricos, estas cuentan con una función distancia (la cual no es una métrica) que nos permite definir una uniformidad de forma análoga al caso métrico. La métrica resultante está ligada al número de ideales que tiene la mv-álgebra. Y aunque es un pequeño resultado abre las puertas en la investigación de uniformidades sobre mv-álgebra. Para consulta de definiciones y demostraciones ver Cignoli, Dubuc, Mundici [9].

Si A es una mv-álgebra, la función distancia $d : A^2 \rightarrow A$ es definida por

$$d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x).$$

Claramente esta función no es una métrica, su codominio no coincide con los números reales. Aunque si consideramos la mv-álgebra $[0, 1]$, es decir, el intervalo real unitario junto con las operaciones $x \oplus y = \min\{x + y, 1\}$ y $\neg x = 1 - x$. Tenemos que la función distancia coincide con la métrica usual en $[0, 1]$.

Algunas propiedades de la función distancia d , son:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \preceq d(x, y) \oplus d(y, z)$,
4. $d(x, y) = d(\neg x, \neg y)$
5. $d(x \oplus s, y \oplus t) \preceq d(x, y) \oplus d(s, t)$.

Ahora si consideramos una mv-álgebra A y definimos para cada ideal I de A el conjunto, $U_I = \{(x, y) \in A^2 \mid d(x, y) \in I\}$. La familia $\{U_I \subseteq A^2 \mid I \in \mathcal{I}(A) - \emptyset\}$ resulta ser un sistema fundamental de entornos sobre A . Lo cual se deduce de la propiedades de la función distancia d .

Del ítem 1) tenemos que $d(x, x) = 0$ para todo $x \in A$ y como todo ideal contiene a 0, luego se tiene que $\Delta \subseteq U_I$ para todo $I \in \mathcal{I}(A)$. Del ítem 2) es inmediata la simetría de los U_I , es decir que $U_I = U_I^{-1}$ para todo $I \in \mathcal{I}(A)$. Finalmente, si I es un ideal y $(a, b) \in U_I \circ U_I$, existe $c \in A$ tal que (a, c) y (c, b) están en U_I , es decir, $d(a, c) \in I$ y $d(c, b) \in I$. Del ítem 3) tenemos que $d(a, b) \preceq d(a, c) \oplus d(c, b)$. Por ser I un ideal, $d(a, c) \oplus d(c, b) \in I$ y $d(a, b) \in I$. Así tenemos que $(a, b) \in U_I$, luego $U_I \circ U_I \subseteq U_I$.

Es de notar que si una mv-álgebra A es simple, es decir, sus únicos ideales son $\{0\}$ y A , la uniformidad definida arriba coincide con la uniformidad indiscreta.

Por el momento esta por investigar las propiedades de esta uniformidad, la relación que tiene esta uniformidad con el numero de ideales de la mv-álgebra; Que otro tipo de uniformidad se pueden definir sobre una mv-álgebra, además de las triviales.

Bibliografía

- [1] Balbes, R. Winger Ph. DISTRIBUTIVE LATTICES. Univ. of Missouri Press 1974. 10
- [2] Bourbaki, Nicolas. *General Topology, part I* ELEMENTS OF MATHEMATICS. Hermann, 1980 16, 20
- [3] C.C. Chang. *Algebraic analisys of many-valued logics*;Trans. Am. Math. Soc. 88 (1958) 467–490. 1, 11
- [4] Hu, Sze-Tsen.*Introdution to General Topology*. Holden-Day, 1966. 20
- [5] I.M. James. *Topological and Uniform Spaces*; Springer: Berlin Heidelberg New York, 1987. 16, 21
- [6] Kelley J.L. *General topology* ;Springer: Berlin Heidelberg New York,1975. 16, 35
- [7] MacLane, S. *Categories for Working Mathematician*, 2nd ed, Springer, 1998. 4
- [8] Philippe, Niederkon. *Natural Dualities for Varieties of MV-Algebras*, / JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS, 255, 58-73: 2001. 1
- [9] R. Cignoli, E. J. Dubuc, D. Mundici. *Extending Stone duality to multisets and locally finite MV-álgebras*; JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA, 189, 37-59: 2004. 2, 24, 34, 35
- [10] R. Cignoli,I.M. D' Ottaviano, D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*; TRENDS IN LOGIC: Kluwer, 2000. 11, 13, 14, 15, 25, 26

- [11] Stone M. H, *The Representation of Boolean Algebras* , Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), Part 1:807-816. 1
- [12] Yuri A. Poveda, *A General Theory of mv-Algebras Representation*, P.H.D. THESIS, Universidad de Buenos Aires, 2007. 2
- [13] Weil, André, *Sur les Espaces et à Estructura Uniforme sur la Topologie Générale*. Actualités scientifiques et industrielles, Vol.551, París, Hermann, 1937. 39 pp. 16