



**LA NOCIÓN DE LA CLASE DE EQUIVALENCIA EN EL DESARROLLO
HISTÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS**

JHON ALEXANDER VELASCO QUINTERO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI**

2019



**LA NOCIÓN DE LA CLASE DE EQUIVALENCIA EN EL DESARROLLO
HISTÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS**

JHON ALEXANDER VELASCO QUINTERO

Código: 1134631

**Trabajo de grado presentado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y
Física**

DIRECTOR

DR

LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2019

Contenido

Resumen	6
Introducción	8
1 Marco teórico de la noción de relación de equivalencia	9
1.1 Relación y clase de equivalencia desde la perspectiva de la matemática moderna	9
1.2 Definiciones básicas	10
1.2.1 Relación de equivalencia	10
1.2.2 Clase de equivalencia	10
1.3 Algunos procesos que emplean relación de equivalencia	13
1.3.1 La versión conjuntista de los números naturales	13
1.4 Los números enteros como clases de equivalencia	18
1.5 Los números racionales como clases de equivalencia	22
1.6 Los números reales como clases de equivalencia	24
1.6.1 Cortaduras	25
1.6.2 Sucesión fundamental	26
1.7 Clases de equivalencia y conjuntos no medibles	28
1.8 La noción de clase de equivalencia en el álgebra	30

2	ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA CLASE DE EQUIVALENCIA	33
2.1	El surgimiento de la noción de clase de equivalencia	33
2.2	Euclides y el uso implícito de la clase de equivalencia	34
2.3	El aporte de Russell en el desarrollo conceptual de la noción de equivalencia . .	37
2.4	Gauss y el uso implícito de la noción de clase de equivalencia	37
2.5	Dedekind y el surgimiento de la noción de clase de equivalencia	39
2.6	La noción de clase de equivalencia en las primeras investigaciones de Cantor .	41
3	Proceso de formalización de la noción de clase de equivalencia	44
3.1	Relación de equivalencia y clase de equivalencia en el siglo XX	46
3.1.1	Relación de equivalencia	46
3.1.2	Clase de equivalencia	47
3.2	Relación de equivalencia y clase de equivalencia	47
3.2.1	Evolución del término clase de equivalencia durante el siglo XX.	48
4	Conclusiones	52
	Bibliografía	56

Tabla de Figuras

Figura 1	35
-----------------------	-----------

Resumen

El presente trabajo de grado realiza un análisis histórico epistemológico de algunos procesos que dieron lugar a la formalización de la noción de clase de equivalencia al interior de las matemáticas. Para ello se toma como punto de partida los diferentes usos implícitos que se han registrado a través de la historia; desde la antigüedad griega con Euclides hasta el siglo XIX. Se describe el proceso histórico en el cual la clase de equivalencia se consolida como una noción matemática; al mismo tiempo se describen los aportes de diversos investigadores que contribuyeron en la formalización de las nociones de clase y relación de equivalencia. Al final del documento se hace un comentario sobre la importancia de este tipo de indagaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones del curso de teoría de conjuntos que se imparte en la licenciatura de matemáticas y física.

Palabras Clave: Relación de equivalencia, Clase de equivalencia, Extensión Numérica.

Introducción

En la matemática se pueden encontrar diversos términos, conceptos y teoremas que permiten la consolidación de una teoría. En muchas ocasiones se pone en discusión la importancia de estos términos en las diversas ramas que componen la matemática, pero en otras ocasiones se pasa casi que inadvertido el origen de algunos conceptos que se vuelven transcendentales en la matemática. Un ejemplo de ello se puede encontrar en la noción de clase de equivalencia. La cual se deriva de la relación de equivalencia, la clase de equivalencia es fundamental al interior de las matemáticas ya que es el vehículo que le permite a la matemática formalizar muchas de sus teorías que carecen de un aparato formal.

El auge que vivió las matemáticas durante los siglos XIX y XX da lugar a la incorporación de la relación de equivalencia ya que permite consolidar muchos resultados que se hallan de manera intuitiva en la matemática. La noción de relación de equivalencia se puede rastrear desde la antigüedad griega; específicamente, Euclides hace uso implícito ella; posteriormente se pueden identificar las huellas de esta noción en los desarrollos de algunos matemáticos; en particular aparece de esta manera en los trabajos de Cantor.

En este trabajo de tesis se pretende evidenciar la importancia de la clase de equivalencia en la matemática y al mismo tiempo describir el proceso de formalización e incorporación en la escolaridad a través de textos matemáticos. Para ello este trabajo se dividirá en 4 capítulos.

En el capítulo 1, se presenta la relación y clase de equivalencia desde la perspectiva moderna

de las matemáticas, es decir, se brindan las definiciones básicas que dan lugar a la relación y clase de equivalencia. De manera similar se presentan los sistemas numéricos de los números naturales, enteros, racionales y reales; los números naturales se presentan desde la perspectiva conjuntista. Tomando como punto de partida los números naturales, se incorporan los números enteros, racionales y reales desde la noción de clase de equivalencia. Para finalizar se brindan algunas aplicaciones de la clase de equivalencia en la matemática como; por ejemplo: la clase de equivalencia y los conjuntos no medibles y la clase de equivalencia en el álgebra.

En el capítulo 2; se presentan los antecedentes históricos que dan origen a la noción de clase de equivalencia; para ello se toman los aportes realizados por diversos autores como: Euclides, Russell, Gauss, Dedekind y Cantor. Sus aportes son muy valiosos para la consolidación de la clase de equivalencia en las matemáticas, y muestra que la noción de clase de equivalencia ha estado presente en la matemática desde los tiempos de la antigua Grecia con Euclides y durante el constante avance de la matemática del siglo XX.

En el capítulo 3, se detalla la consolidación de la relación y clase de equivalencia en el siglo XX, analizando los diferentes procesos que llevaron a que la relación y clase de equivalencia se reconocieran como nociones matemáticas.

Finalmente, el capítulo 4 está destinado a las conclusiones. Este capítulo trata de sintetizar el aporte que brinda la clase de equivalencia en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de los cursos de teoría de conjuntos en la licenciatura de matemáticas y física.

Capítulo 1

Marco teórico de la noción de relación de equivalencia

1.1 Relación y clase de equivalencia desde la perspectiva de la matemática moderna

Muchos de los desarrollos modernos de las matemáticas se basan en la relación y clase de equivalencia. En general, los libros modernos de teoría de conjuntos le dedican uno o varios capítulos a la noción de relación, la cual se ha fundamentado a partir de definir el concepto de par ordenado como un conjunto. Tomemos como referencia el libro de Thomas Jech y Karel Hrbacek para introducir las nociones básicas con el propósito de tener un panorama teórico claro en este trabajo de grado.

1.2 Definiciones básicas

Sean a, b conjuntos, se define el par ordenado o pareja ordenada, (a, b) como el conjunto $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Una relación se define en un conjunto cuyos elementos son parejas ordenadas. Si se consideran A y B conjuntos distintos de vacío, una relación R , definida de A a B , es un subconjunto del producto cartesiano de ambos conjuntos, $R \subseteq A \times B$. Dado el caso $(x, y) \in R$, entonces se dice que x se relaciona con y mediante R y se representará como xRy . Si $A = B$, se dice que R está definida en A .

1.2.1 Relación de equivalencia

La relación de equivalencia se define mediante 3 propiedades. Sea R una relación definida en A , entonces:

1. R se dice **reflexiva**, si todo elemento de A se relaciona consigo mismo: $(\forall x \in A) (xRx)$.
2. R es **simétrica**, si cada vez que un elemento está relacionado con otro, se tiene que el segundo lo está con el primero: $(\forall x, y \in A) (xRy \Rightarrow yRx)$.
3. R se dice **transitiva**, si cada elemento que se encuentra relacionado con un segundo elemento y éste a su vez se encuentra relacionado con un tercero: entonces el primer elemento se encuentra relacionado con el tercero: $(\forall x, y \in A), (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.

1.2.2 Clase de equivalencia

Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto A , sea a un elemento cualquiera de A ; se define una **clase de equivalencia** de a , al conjunto constituido por todos los elementos de A que se encuentren relacionados mediante R con a .

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}$$

Lema 1.1 Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Entonces se dan la siguientes condiciones:

1. aRb , si y sólo si $[a]_R = [b]_R$.
2. $a \not R b$, si y sólo si $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Demostración:

1. Supongamos que aRb . Sea $x \in [a]_R$, entonces xRa . Por transitividad de R , xRa y aRb , implica xRb , es decir, $x \in [b]_R$. De manera similar, si $x \in [b]_R$ se sigue que $x \in [a]_R$. Por lo tanto, $[a]_R = [b]_R$.

Recíprocamente, si $[a]_R = [b]_R$, como $a \in [a]_R = [b]_R$, entonces aRb .

2. Supongamos que no se cumple aRb y que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, existe $x \in [a]_R \cap [b]_R$, luego xRa y xRb , pero usando la simetría de R tenemos aRx y xRb , así por la transitividad de R , aRb , lo cual es absurdo.

Recíprocamente si $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ y aRb , entonces $a \in [b]_R$ y como también se tiene $a \in [a]_R$, implica que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Definición 1.1 Una familia $\mathcal{G}$ de subconjuntos no vacíos se llama una partición de A si:

1. Para todos $g, d \in \mathcal{G}$ con $g \neq d$, $g \cap d = \emptyset$.
2. $\bigcup \mathcal{G} = A$.

Definición 1.2 Sea R una relación de equivalencia en A . El sistema de clases de equivalencia modulo R se denota por

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}.$$

Teorema 1.1 Sea R una relación de equivalencia en A ; entonces A/R es una partición en A .

Demostración: Mostremos que A/R es una partición. Como $A/R = \{[a]_R : a \in A\}$, es claro que A/R es un sistema de conjuntos no vacíos.

1. Si $[a]_R \neq [b]_R$ entonces del Lema 1.1(1) no se cumple que aRb , luego del Lema 1.1(2) se tiene $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.
2. Para finalizar demostremos que $\bigcup A/R = A$. Sea $x \in A$, como $x \in [x]_R \in A/R$, entonces $x \in \bigcup A/R$. Por otro lado si $x \in \bigcup A/R$, se tiene equivalentemente que $x \in [a]_R$ para $[a]_R \in A/R$, de aquí que $x \in A$. Por lo tanto $\bigcup A/R = A$.

Definición 1.3 Sea P una partición. La relación R_P en A esta definida por

$$R_P = \{(a, b) \in A \times A : a, b \in C \text{ para algún } C \in P\}.$$

Teorema 1.2 Sea P una partición en A ; entonces R_P es una relación de equivalencia en A .

Demostración:

1. R_P es reflexiva. Sea $a \in A$, dado que $A = \bigcup P$, $a \in C$ para algún $C \in P$, de la definición de R_P , se sigue que $(a, a) \in R_P$, es decir, $aR_P a$.
2. R_P es simétrica. Supongamos que $aR_P b$, entonces $a, b \in C$ para algún $C \in P$, lo que es lo mismo que $b, a \in C$ para algún $C \in P$, es decir, $bR_P a$.
3. R_P es transitiva. Supongamos que $aR_P b$ y $bR_P c$, entonces $a, b \in C$ para algún $C \in P$ y $b, c \in D$ para algún $D \in P$, entonces $C \cap D \neq \emptyset$, luego $C = D$, de manera que $a, c \in C$ para $C \in P$, luego de la definición de R_P , $aR_P c$.

1.3 Algunos procesos que emplean relación de equivalencia

1.3.1 La versión conjuntista de los números naturales

Los números naturales se constituyen como el sistema numérico de referencia de las matemáticas, es decir, son la estructura fundamental de las matemáticas. A través del tiempo los números naturales se han venido consolidando formalmente, en principio se presentan intuitivamente generados a partir de la unidad, sin embargo, el desarrollo de la matemática que se da en el siglo XIX exige formalizar los números naturales. La formalización se desarrolla desde dos puntos de vista, uno axiomático y otro conjuntista. Desde el punto de vista axiomático se tiene como referente a Giuseppe Peano. También se puede introducir conjuntistamente a través de la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Los números naturales vistos desde la perspectiva de Peano, se introducen a partir de 5 axiomas, los cuales toman como base al cero “0” y la noción de número sucesor.

N1: 0 es un número natural.

N2: El sucesor de todo número natural también es un número natural.

N3: Si S es una colección de números naturales que cumple.

a) 0 está en S .

b) Cada vez que un natural está en S , también el sucesor de él está en S . Entonces S es el conjunto de los números naturales.

N4: 0 nunca es el sucesor de un natural.

N5: Si los sucesores de dos números naturales son iguales, entonces los números son iguales.

En general se acepta que la mejor manera de introducir los números naturales es a través de la teoría de conjuntos. Esto se debe a la aceptación de la teoría de conjuntos como la base de

las matemáticas, en el sentido que todo objeto o concepto matemático se puede definir a través de la teoría de conjuntos. Para introducir la noción de número natural partimos de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel.

1. **Axioma de Existencia.** Existe un conjunto que carece de elementos, el cual se simboliza como $\emptyset$.
2. **Axioma de Extensionalidad.** si cada elemento de X es un elemento de Y y cada elemento de Y es un elemento de X , entonces $X = Y$.

Se puede demostrar que vacío es único y se simboliza como $\emptyset$.

3. **Axioma de Pares.** Para cualquier a y b existe un conjunto $\{a, b\}$, dicho conjunto contiene exactamente los elementos a y b .
4. **Axioma de separación.** Si P es una propiedad (con el parámetro p), entonces para cualquier X y p existe un conjunto $Y = \{u \in X : P(u, p)\}$ que contiene todos aquellos $u \in X$ que tienen la propiedad P .
5. **Axioma de Unión.** Para cualquier X existe un conjunto $Y = \bigcup X$, la unión de todos los elementos de X .

6. **Axioma del conjunto potencia.** Para cualquier X existe un conjunto $Y = P(X)$, el conjunto de todos los subconjuntos de X .

Antes de introducir el Axioma del infinito veamos la definición de sucesor:

$$S(x) := x \cup \{x\}$$

7. **Axioma del infinito.** Existe un conjunto Inductivo I ; el conjunto I debe cumplir:

- $\emptyset \in I$.

- $\forall x \in I, x \cup \{x\} \in I$.

8. **Axioma de remplazo** Si una clase F es una función, entonces para cualquier X existe un conjunto $Y = F(X) = \{ F(x) : x \in X \}$.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se define de manera recursiva, el número natural cero corresponde al conjunto $\emptyset$, el número 1 es el conjunto cuyo elemento es vacío, en general se tiene:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n + 1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots n\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Si aplicamos la definición de sucesor se tiene:

$$S(0) = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$$

$$S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = 2$$

$$S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = 3$$

$$S(3) = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\} = 4$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

En este sentido se dice que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo.

La relación de orden en el conjunto de los números naturales se define de la siguiente manera:

Definición 1.4 Sea $(A, <)$ un conjunto ordenado con primer elemento, se dice que A es bien ordenado si y sólo si todo subconjunto de A tiene primer elemento.

Definición 1.5 Sean n, m números naturales cualesquiera; $n < m$ significa que $n \in m$; y $n \leq m$ implica que $n < m \vee n = m$, por tanto el orden en los naturales se establece como $(\mathbb{N}, <)$, dónde para $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ sii $n \in m$.

Proposición 1.1 la relación “ $\in$ ” de pertenencia es transitiva en los $\mathbb{N}$.

Demostración: Sean $x \in n$ y $n \in m$; como todo elemento de un número natural es un subconjunto propio de dicho natural, entonces se tiene que $x \in n \wedge n \subset m$, entonces $x \in m$.

Teorema 1.3 Teorema de recursión. Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, una función $g : A \times \mathbb{N} \Rightarrow A$ y un elemento $a \in A$, existe una única función $f : \mathbb{N} \Rightarrow A$ tal que

1. $f_0 = a$
2. $f_{n+1} = g(f_n, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

La suma en los números naturales se define de la siguiente manera:

Por el teorema de recursión existe una función en la cual a cada número natural se le asigna su sucesor inmediato, por tanto se considera la función $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

1. $+(m, 0) = m, \forall m \in \mathbb{N}$
2. $+(m, n+1) = +(m, n) + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}$

De tal manera que:

$$\begin{aligned}
 +(m, 0) &= m \\
 +(m, 1) &= +(m, 0^+) = +(m, 0) + 1 = m + 1 = S(m) \\
 +(m, 2) &= +(m, 1^+) = +(m, 1) + 1 = (m + 1) + 1 = S(m + 1) \\
 +(m, 3) &= +(m, 2^+) = +(m, 2) + 1 = ((m + 1) + 1) + 1 = S(m + 2) \\
 +(m, 4) &= +(m, 3^+) = +(m, 3) + 1 = (((m + 1) + 1) + 1) + 1 = S(m + 3) \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

El anterior procedimiento permite describir a 1 y 2 como:

$$\begin{aligned}
 a) \quad m + 0 &= m \\
 b) \quad m + (n + 1) &= (m + n) + 1
 \end{aligned}$$

El sistema numérico de los números naturales tiene las siguientes propiedades:

Propiedad Modulativa: $(\forall m \in \mathbb{N}) (m + 0 = m = 0 + m)$.

Propiedad Conmutativa: $(\forall m)(\forall n) (m + n = n + m)$.

Propiedad Asociativa: $(\forall m)(\forall n)(\forall k) ((m + n) + k = m + (n + k))$

Propiedad Cancelativa: $(\forall m)(\forall n)(\forall k); ((m + n = k + n) \rightarrow m = k)$.

El producto entre números naturales se define de la siguiente manera:

Por el teorema de recursión existe una única función $\bullet : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$, tal que:

$$1. \bullet(m, 0) = 0$$

$$2. \bullet(m, n + 1) = +(\bullet(m, n), m)$$

$$\bullet(m, 0) = 0$$

$$\bullet(m, 1) = +(\bullet(m, 0), m) = +(0, m) = m$$

$$\bullet(m, 2) = +(\bullet(m, 1), m) = +(m, m) = 2m$$

$$\bullet(m, 3) = +(\bullet(m, 2), m) = +(2m, m) = 3m$$

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet (m, 4) & = & +(\bullet (m, 3), m) & = & +(3m, m) & = & 4m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Las condiciones dadas al inicio del teorema de recursión para el producto de los números naturales, permite redefinir dichas propiedades como:

$$c) m.0 = 0$$

$$d) m.(n + 1) = mn + n$$

Al igual que en la suma, el producto cuenta con algunas propiedades similares

Propiedad Modulativa: $(\forall m) (m.1 = m = 1.m)$

Propiedad Conmutativa: $(\forall m, n \in \mathbb{N})(mn = nm)$

Propiedad Asociativa: $(\forall m, n, k \in \mathbb{N}) ((mn)k = m(nk))$

Propiedad Cancelativa: $(\forall m, n, k \in \mathbb{N}) (mk = nk \wedge k \neq 0 \rightarrow m = n)$

Propiedad distributiva del producto: $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})(k(m + n) = km + kn)$

1.4 Los números enteros como clases de equivalencia

En los números naturales la operación resta no se encuentra definida. Por tal razón se debe considere el caso $m > n$ es decir, que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + k = m$. Ahora considere que $m < n$ si lo anterior ocurre entonces la expresión $k = m - n$ carece de todo sentido.

Los números enteros se obtienen mediante la diferencia de números naturales, es decir, unas parejas ordenadas de números naturales determinan un número entero. Sin embargo existe un inconveniente, ya que la misma diferencia se puede obtener de muchas parejas distintas; así $(5, 3)$, $(6, 4)$, $(11, 9)$, entre otras, siempre tendrán como diferencia el 2. De tal manera se deben considerar como equivalentes a todas aquellas parejas ordenadas que produzcan la misma diferencia.

Como deseamos construir los número enteros partiremos de $(\mathbb{N}, +, \bullet, \prec)$ y realizaremos una

extensión numérica para introducir los números enteros. Para ello la herramienta conceptual que permite desarrollar la extensión numérica es la relación de equivalencia.

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, decimos que $(a, b) \approx (c, d)$ si y sólo si $a + d = b + c$.

El primer paso es demostrar que la relación es una relación de equivalencia, para ello debe cumplir con las propiedades de la reflexividad, simetría y la transitividad.

- Por la conmutatividad de la adición en los naturales, se tiene que $a + b = b + a$, lo cual implica que $(a, b) \approx (a, b)$, para cualquier (a, b) en A , por tanto la relación **reflexiva**.
- Si $(a, b) \approx (c, d)$ entonces $a + d = b + c$, aplicando la propiedad de la simetría de la igualdad y la conmutatividad de la suma de los números naturales, se tiene que $c + b = d + a$, por lo tanto se determina que $(c, d) \approx (a, b)$, esto quiere decir que la relación es **simétrica**.
- Para finalizar se debe demostrar que la relación es transitiva.

$$(a, b) \approx (c, d) \wedge (c, d) \approx (e, f) \quad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in A$$

$$\text{por lo tanto, se tiene que} \quad a + d = b + c \wedge c + f = d + e$$

$$\text{sumando miembro a miembro} \quad a + d + c + f = b + c + d + e$$

la anterior igualdad permite cancelar los elementos c, d . Esto implica que $a + c = d + e$, de acuerdo a la definición se establece que $(a, d) \approx (e, f)$, por lo tanto, se ha demostrado que la relación es **transitiva**.

Suma y producto en los números enteros

Considere el conjunto $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definición 1.6

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

Para efectos de notación se considera que $(a, b) = a - b$

$$(a, b) \oplus (c, d) \quad \text{donde} \quad (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

$$(a, b) \odot (c, d) \quad \text{donde} \quad (a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$$

Proposición 1.2 Las operaciones $\oplus$ y $\odot$ son conmutativas en el conjunto A .

$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b)$. La propiedad conmutativas de la suma de los números naturales permite que la segunda igualdad sea válida.

$(a, b) \odot (c, d) = (ac + bd, ad + bc) = (ca + db, da + cb) = (c, d) \odot (a, b)$ por el argumento utilizado en la suma, la segunda igualdad es válida.

Teorema 1.4 $(a, b) \approx (c, d)$ si y sólo si $a + d = b + c$, es compatible con $\oplus$ y $\odot$.

Demostración: como las operaciones son conmutativas basta probar que se cumplen las siguientes propiedades:

$$1. (a, b) \oplus (j, p) \approx (c, d) \oplus (j, p) \quad \text{donde} \quad (a, b), (j, p), (c, d) \in A$$

$$2. (a, b) \odot (j, p) \approx (c, d) \odot (j, p) \quad \text{donde} \quad (a, b), (j, p), (c, d) \in A$$

$$(a, b) \approx (c, d) = a + d = b + c \quad \text{por clase de equivalencia}$$

$$(a + j) + (d + p) = (c + j) + (b + p) \quad \text{sumando } j + p \text{ a la ecuación}$$

$$(a + j, b + p) \approx (c + j) + (d + p) \quad \text{por clase de equivalencia}$$

$$(a, b) \oplus (j, p) \approx (c, d) \oplus (j, p) \quad \text{por definición de } \oplus$$

para terminar sólo basta demostrar que $(a, b) \odot (j, p) \approx (c, d) \odot (j, p)$

$$(a, b) \approx (c, d) \quad \text{aplicando la definición}$$

$$a + d = b + c \wedge b + c = a + d \quad \text{por igualdad}$$

$$aj + dj = bj + cj \wedge bp + cp = ap + dp \quad \text{multiplicando por } j \text{ y } p$$

$$aj + dj + bp + cp = bj + cj + ap + dp \quad \text{sumando miembro a miembro}$$

$$(aj + bp) + (cp + dj) = (cj + dp) + (ap + bj) \quad \text{agrupando adecuadamente}$$

$$(aj + bp, ap + bj) \approx (cj + dp, cp + dj) \quad \text{por clase de equivalencia}$$

$$(a, b) \odot (j, p) \approx (c, d) \odot (j, p) \quad \text{por definición de } \odot$$

Por tanto las operaciones de $\odot$ y $\oplus$ se pueden vincular a las clases de equivalencia, de esta manera se obtiene.

$$[(a, b)] + [(j, p)] = [(a, b) \oplus (j, p)]$$

$$[(a, b)] \cdot [(j, p)] = [(a, b) \odot (j, p)]$$

El conjunto de los números enteros estará determinado por $A/\approx$.

Proposición 1.3 *Dado un entero $[(p, q)]$, existe un único natural n tal que ó $[(p, q)] = [(n, 0)]$ ó bien $[(p, q)] = [(n, 0)]$.*

Demostración: Dado $[(p, q)]$, por ley de la tricotomía del orden entre naturales, se debe cumplir una única de las relaciones: $p = q, p > q, p < q$

Si ocurre el primer caso se tendrá que $[(p, q)] = [(p, p)] = [(0, 0)]$ y $n = 0$.

Para el segundo caso, existe un único n tal que $p = n + q$, tal que $[(p, q)] = [(n + q, q)] = [(n, 0)]$, ya que $(n + q, q) \approx (n, 0)$.

En el caso $p < q$, existe $n \in \mathbb{N}_*$ único tal que $p + n = q$ y $[(p, q)] = [(p, p + n)] = [(0, n)]$.

Si consideramos $\mathbb{N}^*$ el conjunto de los números enteros de la forma $\mathbb{N}^* = [(n, 0)]/n \in \mathbb{N}$, se puede observar que estos números enteros son cerrados para la adición y la multiplicación.

Definamos una función $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ mediante $j(n) = [(n, 0)]$. La anterior función es una inyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, la cual permite una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$, por tanto j es un isomorfismo de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}^*$. Por tanto $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$

La notación canónica de $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

1.5 Los números racionales como clases de equivalencia

El sistema numérico de los racionales se construye apartir de los números enteros, el método utilizado para su obtención es mediante el proceso de la extensión numérica. Dado $(\mathbb{Z}, +, \bullet, \preceq)$, se busca darle sentido a la operación división ya que dicha operación en $\mathbb{Z}$ no se encuentra definida. Lo cual permite considerar los elementos $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{n}{m}$ si y sólo si $\exists k$, tal que $n = mk$, esto quiere decir que $\frac{n}{m} = k$ lo cual implica que $\frac{n}{m}$, por lo tanto se concluye que $k = \frac{n}{m}$ es decir, dada la pareja de enteros $(8, 4)$ se encuentra relacionada con $(16, 8)$ y $(10, 5)$ en general todas las parejas (m, n) tales que $m = 2n$, de esta manera se buscan todas las parejas ordenadas que se relacionene entre si y al mismo tiempo se tien que $([8, 4]) = 2$.

Dado el caso de la pareja de enteros $(1, 4)$ no tendria sentido, ya que $\frac{1}{4}$, carece de todo sentido en los números enteros. El sistema numérico de los racionales tiene como objetivo brindarle sentido a la expresión $\frac{m}{n}, n \neq 0, \forall m, n \in \mathbb{Z} n \neq 0$.

El proceso de la extensión numérica se inicia con la relación de equivalencia, sean (a, b) y $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ talque $(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

El primer paso es demostrar que la relación es una relación de equivalencia, por tanto se tiene que:

- $(a, b) \approx (a, b)$ cumple con la propiedad **reflexividad**, ya que $ab = ab$.
- Si $(a, b) \approx (c, d)$ entonces $ad = bc$. Esto decir que $cb = da$, lo anterior es válido por la conmutatividad en $\mathbb{Z}$, por tanto $cb = da$, lo anterior implica que $(c, d) \approx (a, b)$. Se ha demostrado que la relación es **simétrica**.
- Para finalizar se debe demostrar que la relación es transitiva, por lo tanto

$$(a, b) \approx (c, d) \wedge (c, d) \approx (e, f) \quad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in A$$

$$\text{Entonces, se tiene que} \quad ad = bc \wedge cf = de$$

multiplicando miembro a miembro $adc f = bcde$

Dado el caso en el cual $c \neq 0$, entonces $cd = dc \neq 0$, el anterior resultado se puede cancelar. Por tanto se obtiene $af = be$, lo cual implica que $(a, b)R(e, f)$. Considere que $c = 0$, esto implica que $ad = 0 \wedge de = 0$, donde $d \neq 0$, de tal manera que $a = 0 \wedge e = 0$, es decir, que $af = 0 = be$, entonces $(a, b)R(e, f)$. De esta manera se ha comprobado la propiedad **transitiva**.

La clase de equivalencia está dada por:

$$[(a, b)]_R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x, y)R(a, b)\}$$

$$[(a, b)]_R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xb = ya\}$$

El conjunto cociente se encuentra determinado por:

$$\begin{aligned} A/\sim &= \{([a, b]) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b}\} \\ &= \{\{n(a, b) \mid n \in \mathbb{Z}\}, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ y } m.c.d(a, b) = 1\} \end{aligned}$$

Suma y producto en los números racionales La suma y el producto se determina para un conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

Proposición 1.4 *la relación de equivalencia es compatible $\otimes$ y con $\oplus$, es decir:*

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ad + bc, bd)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$$

Demostración: para $\oplus$ se debe considerar que ésta es conmutativa, por tanto basta demostrar que si $(a, b) \simeq (c, d)$ y (p, q) , donde $(p, q) \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que $(a, b) \oplus (p, q) \simeq (c, d) \oplus (p, q)$, lo cual equivale a $(aq + bp, bq) \simeq (cq + dp, dq)$, esto quiere decir que $(aq + bp)dq = bq(cq + dp)$, por tanto $adq^2 + bpdq = bcq^2 + bqdp$.

Dado que $(a, b) \simeq (c, d)$, $ad = bc$, si se procede a multiplicar la igualdad por q^2 y se suma $bpdq$ se llegará a la igualdad.

De manera análoga se tiene que dado $(a, b) \simeq (c, d)$, $ad = bc$, si se procede a multiplicar ambos lados de la igualdad por pq , se tiene que $apdq = bqcp$ es decir, $(ap, bq) \simeq (cp, dq)$, lo anterior permite concluir que:

$$(a, b) \otimes (p, q) \simeq (c, d) \otimes (p, q)$$

Lo anterior permite que tanto las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ se puedan definir como:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = [(a, b) \oplus (c, d)] = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = [(a, b) \otimes (c, d)] = \frac{ac}{bd}$$

Orden en los números racionales Sea x, y números racionales tales que $x = [(a, b)]$ y $y = [(c, d)]$, se dice que $x \preceq y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}^+$.

De igual manera como sucede en los números enteros, los cuales se construyen con los números naturales es decir, $\mathbb{Q}$ es una extensión de $\mathbb{Z}$ en otras palabras $\mathbb{Q}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, para ello considere $\mathbb{Z}_*$ el conjunto de racionales de la forma $\frac{m}{1}$; $\mathbb{Z}^* = \{\frac{m}{1} | m \in \mathbb{Z}\}$. Este subconjunto es cerrado para la adición y la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

Definamos una función $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como $k(m) = \frac{m}{1}$, la cual es inyectiva y establece una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^*$, como h es isomorfo no existe diferencia alguna entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^*$, excepto en la forma de notar sus elementos, es decir $\frac{m}{1} = m$ y se considera a $\mathbb{Z}$ como un subconjunto de $\mathbb{Q}$. Por tanto, se tiene que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

1.6 Los números reales como clases de equivalencia

Durante el siglo XIX se realiza la construcción rigurosa de los números reales. Esto se debe a los trabajos realizados por George Cantor y Richard Dedekind, quienes desde diferentes puntos de vista llegaron al mismo objetivo, el cual era fundamentar los números reales. George Cantor

empleo encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos, mientras que Richard Dedekind utilizó vecindades, entornos y cortaduras de Dedekind. Cantor y Dedekind entienden que para fundamentar los números reales el camino es a través de los números racionales.

1.6.1 Cortaduras

El matemático Richard Dedekind nació en Brunswick Alemania, en el año 1831 y falleció en 1916. Dedekind es un icono en la matemática ya que sus desarrollos permitieron el surgimiento de la matemática conjuntista y estructural del siglo XX. En 1882 publicó su más celebre trabajo *¿Qué son y para qué sirven, los números?*, esta obra es un fundamental en la matemática, su trabajo relacionado a la estructuración de la matemática se puede ver con más detalle en *Los números reales como objeto matemático una perspectiva histórico-epistemológica* publicado en 2011.

Dedekind define una cortadura sobre el conjunto de los racionales mediante un par (A, B) de conjuntos, los cuales deben cumplir dos condiciones:

- $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{Q}$, donde $A \subset \mathbb{Q}$ y $B \subset \mathbb{Q}$.
- Dado $a \in A$ y $b \in B$, entonces $a < b$.

Dado un número racional cualquiera r se puede generar una cortadura (A_1, B_1) en $\mathbb{Q}$:

$$A_1 = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq r\}$$

$$B_1 = \{a \in \mathbb{Q} : a > r\}$$

De manera similar como ha sucedido con los sistemas numéricos de los racionales y de los enteros, se van a producir números que no se pueden definir al interior de los anteriores sistemas numéricos. En el caso de las cortaduras se pueden encontrar cortaduras que no son producidas por racionales:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \text{ ó } a \leq 0\}$$

$$B = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0 \text{ y } a^2 > 2\}$$

La anterior cortadura evidencia que no existe un número racional que elevado al cuadrado dé como resultado 2, es decir que esta cortadura es generada por un número diferente a los racionales. El conjunto de todas las cortaduras de $\mathbb{Q}$ se llama el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Dado que todo número racional puede producir una cortadura en $\mathbb{Q}$, entonces se puede considerar el sistema de los números reales como una extensión del sistema numérico de los racionales.

1.6.2 Sucesión fundamental

George Ferdinand Cantor fue un matemático alemán de origen ruso, que nació en San Petersburgo en el año de 1845 y murió en 1918 en la ciudad de Halle, en Alemania. Realizó sus estudios en la Universidad de Zurich. En 1874 Cantor publicó su primer trabajo relacionado con la teoría de conjuntos, bajo la influencia de las ideas de Bernhard Bolzano. En 1851 Bernard Bolzano publica *Paradojas de lo infinito*; un libro que inspira a Cantor para teorizar sobre el infinito.

Durante los años de 1874 y 1897, Cantor demostró que el conjunto de los números enteros tenía el mismo número de elementos que el conjunto de los números pares, y que el número de puntos en un segmento es igual al número de puntos de una línea infinita, de un plano y de cualquier espacio. Cantor demostró que el infinito de los números reales era mayor que el infinito de los número naturales; es decir, demostró que habían diversos niveles de infinitos.

Para Cantor era necesario desarrollar, una teoría de números que le permitiera involucrar a los irracionales; dicha teoría debe evitar la definición a priori de los números irracionales, los cuales si son vistos como límites de sucesiones convergentes tendrían problema, debido a que

no se ha proporcionado el conjunto al cual pertenece el límite.

Como se menciona en Recalde (2016), Cantor llega a los números reales por medio de los números racionales al igual que lo hizo Dedekind, pero Cantor lo hace mediante sucesiones fundamentales, para tal fin Cantor define una sucesión fundamental de la siguiente manera:

La sucesión de números racionales $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$, se considera que es una sucesión fundamental si para cualquier $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un entero N tal que $|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$ para todo m y para todo $n > N$. A la sucesión $\{a_n\}$, le asigna un símbolo asociado b . A continuación Cantor define la igualdad entre sucesiones fundamentales.

Igualdad entre sucesiones: Sean dos sucesiones fundamentales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que tienen asociados símbolos b_1 y b_2 respectivamente. Se dice que $b_1 = b_2$, si $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un número natural N tal que $|a_n - b_n| < \epsilon$, para todo $n > N$.

La igualdad entre sucesiones fundamentales de números racionales juega un papel muy importante en la matemática, ya que Cantor hace uso implícito por primera vez de la clase de equivalencia, para generar una partición al interior de las sucesiones fundamentales de números racionales. De esta forma, una sucesión $\{a_n\}$ se relaciona con otra sucesión $\{b_n\}$, si cumple la definición de igualdad. Entonces b también se le asocia a la sucesión $\{b_n\}$. De lo anterior se sigue que son equivalentes a $\{a_n\}$. Es decir $\{a_n\}$ es equivalente a $\{b_n\}$ si existe un $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que existe un $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que $|a_n - b_n| < \epsilon$, $\forall n \geq N$. Por tanto se tiene que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, donde $b = [a_n] = \{b_n/a_n \sim b_n\}$.

Cantor evidencia la formación de un nuevo sistema numérico, constituido por todos los elementos b . Para brindarle la categoría de sistema numérico al conjunto B formado por todos los elementos b , se debe establecer un orden y operaciones aritméticas.

Orden: Considere una relación de equivalencia, en la cual el símbolo b_1 , corresponde a la sucesión fundamental de números racionales $\{a_n\}$ y b_2 le corresponde a la sucesión $\{b_n\}$. Se

dice que $b_1 < b_2$ si existe un $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ y un número natural N tal que $b_n - a_n > \epsilon$, para todo $n > N$.

Aritmética: Sean a, b, c números, los cuales se encuentran en el dominio de B y sean las sucesiones infinitas $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$, las cuales tienen asociados los símbolos a, b, c .

1. $a + b = c$, si y sólo si $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n + b_n - c_n) = 0$.

2. $a \cdot b = c$, si y sólo si $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n - c_n) = 0$.

3. $\frac{a}{b} = c$, si y sólo si $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n} - c_n) = 0$.

Al igual como sucede en los sistemas numéricos de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, se puede establecer una función biyectica con el nuevo sistema numérico denominado como los números reales, el cual se denota como $\mathbb{R}$. Se tienen las siguientes contenenencias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.7 Clases de equivalencia y conjuntos no medibles

En el año de 1905, Giuseppe Vitali, presenta su obra *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*; en dicha obra establece un conjunto que no es Lebesgue-medible. Para ello define el conjunto de Vitali, el conjunto de Vitali emplea la noción de clase de equivalencia de la siguiente manera: considera una función f tal que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Debemos tener en cuenta que los conjuntos lebesgue medibles cumplen las siguientes propiedades:

1. $m[(a, b)] = b - a$.

2. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Es una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, la medida de la unión es la serie de las medidas

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

$$3. m(E + x) = m(E).$$

Se define una relación en el intervalo $[0, 1]$ de la siguiente manera: $x \sim y$ si y sólo si $(x - y) \in \mathbb{Q}$. En primer lugar se debe demostrar que es una relación de equivalencia:

1. Si $x \sim x$ de acuerdo a la definición se tendrá $x - x = 0$, entonces es reflexiva.
2. Si $x \sim y$, entonces $y - x = -(x - y)$ es racional, por tanto $y \sim x$, es decir es simétrica.
3. Para finalizar se demuestra la propiedad transitiva. Suponga que $x \sim y$ y $y \sim z$, de acuerdo a la definición se tiene que $x - y = \frac{a}{b}$ y $y - z = \frac{a^*}{b^*}$, sumando componente a componente en la ecuación se tiene que $x \sim z$, ya que al sumar racionales se tiene que estos continúan siendo racionales. Esto quiere decir que la relación es de equivalencia.

Se define A_0 como un subconjunto de $[0, 1]$, el cual se compone de un único elemento de cada clase de equivalencia, lo cual se garantiza por el axioma de elección. Sea la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de todos los números racionales que se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$, donde $(r_n \neq r_m \text{ si } n \neq m)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto A_n de la siguiente manera:

$$A_n = \{r_n + x, x \in A_0\} = r_n + A_0.$$

Lo anterior nos indica que el conjunto A_0 se traslada sumando el número r_n . Si se supone que A_0 es medible, entonces:

1. Cada conjunto A_n es medible, debido a que es la traslación de un conjunto medible.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $m(A_n) = m(A_0)$.
3. Los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos. Para demostrarlo utilizamos el método de contradicción. Supongamos que existe $x \in A_M \cap A_N$, entonces existe un $x_N \in A_0$ y $x_M \in A_0$ tal que $x = r_N + x_N = r_M + x_M$, donde $x_N - x_M = r_M - r_N \in \mathbb{Q}$, lo cual

significa que $x_N \sim x_M$. como A_0 esta constituido por un único elemento de cada clase de equivalencia, por tanto $x_N = x_M$, lo cual permite afirmar que $r_N = r_M$, y por lo tanto $N = M$.

4. $A = \bigcup A_n$, probaremos que $[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$.

Sea $x \in [0, 1]$, entonces existe $x_0 \in A_0$ tal que $x - x_0 = r \in \mathbb{Q}$. Es claro que $r \in [-1, 2]$, entonces $r = r_m$ para algún número natural m , por lo que $x \in A_m$. Esto prueba la primera contención.

La segunda contención es cierta porque la sucesión r_n está contenida en $[-1, 1]$. Así que si sumamos cualquier r_n con un número x de $[0, 1]$, obtenemos que $r_n + x \in [-1, 2]$.

5. El conjunto A_0 no puede ser Lebesgue medible. Supongamos que sí lo fuera, entonces su medida es cero o positiva. La medida no es cero porque entonces A tendría medida cero, pero contiene un conjunto de medida 1, a saber contiene a $[0, 1]$. La medida de A_0 no puede ser positiva porque entonces la medida de A sería infinita.

Considere $m(A_0) = 0$ si ocurre lo anterior entonces la unión de las medidas es cero, pero esto contradice el hecho de que el intervalo $[0, 1]$ debe estar en la unión.

Si considera $m(A_0) \neq 0$, se tendrá que la unión de las medidas sera muy grande tanto como el infinito, por tanto la unión no puede estar contenida entre $[0, 1]$ y $[1, 2]$.

1.8 La noción de clase de equivalencia en el álgebra

Los inicios del álgebra se remontan a las civilizaciones de los babilonios y los griegos. Los desarrollos de los babilonios le permitieron brindar cálculos mediante algoritmos, los griegos se enfocaron a resolver los problemas mediante la utilización del método geométrico. El álgebra en la antigüedad se caracteriza por representar términos mediante objetos geométricos; sin

duda alguna el mayor aporte del álgebra lo brinda la cultura árabe, ya que estos por medio de Al-Khwarizmi brindan soluciones a los problemas que se relacionan con ecuaciones lineales y cuadráticas.

En la edad media se supera todo lo alcanzado por los babilonios, griegos, chinos, hindúes. Se brinda soluciones a ecuaciones de orden superior a dos, estos desarrollos se dan alrededor del siglo XVI, pero es tan sólo en el siglo XIX donde el álgebra alcanza su punto cumbre al brindar un álgebra abstracta. Durante el siglo XIX se dispone de diversos modelos numéricos y de diversas estructuras que se dan al interior del álgebra.

El desarrollo del álgebra se da al momento de brindar soluciones a nuevos problemas los cuales surgen a través de la historia, esto le permite desarrollar nuevos conceptos al interior de la misma, como, por ejemplo: anillo, cuerpo, grupo, espacios vectoriales, entre otros; la clase de equivalencia se puede encontrar en el álgebra a través de la teoría de congruencias.

Definición 1.7 Sea $n > 0$ un entero fijo. Se define $a \equiv b \pmod{n}$ si $n \mid (a - b)$.

Definición 1.8 Sea $K, T \in \mathbb{Z}$ se dice que k divide a T . Esto se simboliza como $k \mid T$ si y sólo si $T = Km$

Proposición 1.5 La relación “congruencia módulo n ” define una relación de equivalencia en el conjunto de los enteros.

Demostración: se verifica que la relación $(\text{mod } n)$ es una relación de equivalencia.

1. $a \equiv a \pmod{n}$, para todo $a \in \mathbb{Z}$, de acuerdo a la definición se tiene que $n \mid (a - a)$ para todo a , por tanto se tiene que $0 = nk$, lo cual nos garantiza la propiedad **reflexiva**.
2. $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $b \equiv a \pmod{n}$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces por definición se tiene que $n \mid (a - b)$, es decir $a - b = nk$ multiplicando por $(-)$ se tiene $b - a = n(-k)$ por tanto, $b \equiv a \pmod{n}$, por tanto cumple con la **simétrica**.

3. Dado $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$, si $a \equiv b \pmod{n}$ de acuerdo a la definición se tiene que $n \mid (a - b)$ donde $a - b = nk$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, ahora $b \equiv c \pmod{n}$ de acuerdo a la definición $n \mid (b - c)$ donde $b - c = np$ para todo $p \in \mathbb{Z}$, sumando termino a término $(a - b) + (b - c) = kn + pn$, por tanto $(a - c) = n(k + p)$, es decir $(a - c) = n(m)$ donde $m = k + p$ y $m \in \mathbb{Z}$ por tanto $n \mid (a - c)$ lo cual es equivalente a $a \equiv c \pmod{n}$ lo cual significa que se cumple la propiedad **transitiva**.

Capítulo 2

ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA CLASE DE EQUIVALENCIA

2.1 El surgimiento de la noción de clase de equivalencia

La noción de clase de equivalencia se ha utilizado de manera intuitiva e implícita durante todo el desarrollo de la matemática, dando origen en los antiguos griegos hasta llegar a los tiempos modernos. El reconocimiento formal que se le asigna a la noción de clase de equivalencia data alrededor de los años 1900, con los trabajos desarrollados por Zermelo. El concepto de relación de equivalencia da lugar a la clase de equivalencia, lo anterior se desarrolla a principios del siglo XX.

En matemáticas el surgimiento de un concepto corresponde a un proceso de años o incluso de siglos de desarrollos matemáticos. La noción de clase de equivalencia no es ajena a esta situación, desde la antigüedad se puede destacar los usos implícitos de la noción de clase de equivalencia, muchos de ellos se pueden encontrar desde su forma más elemental e inclusive se pueden dar situaciones en las cuales la noción de clase de equivalencia representa la misma

herramienta fundamental de trabajo, aunque esta se encuentre de manera implícita.

2.2 Euclides y el uso implícito de la clase de equivalencia

Los *Elementos* de Euclides a través de sus definiciones geométricas, brindan una idea de la noción de clase de equivalencia respecto a la forma. Dos figuras geométricas están relacionadas por la forma cuando cumplen una definición determinada. Se puede clasificar triángulos, cuadrados, rectángulos, entre otros elementos como una clase general de polígonos. Es muy importante resaltar que al momento de referenciar las propiedades de los polígonos se deben considerar que la clase de equivalencia no será la misma para los triángulos, cuadrados, etc., esto se debe a que la propiedad de la clase de equivalencia no se puede aplicar de forma general a la clase de todos los polígonos. Es decir que las propiedades de los triángulos no serán válidas para cuadrados, rectángulos etc, para ello se considera el libro 1 de los *Elementos*.

Proposición 1.32: En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos ángulos rectos.

La anterior proposición afirma que las medidas de los ángulos internos de un triángulo miden 180 grados. La demostración de la proposición se da al considerar un triángulo, al cual se le prolonga uno de sus segmentos, luego se procede a ubicar dos rectas paralelas, las cuales se cortan por una secante. Es decir que el ángulo C_1 es igual ángulo C , esto se debe a alternos internos, el siguiente paso es tomar el ángulo A_1 el cual es igual al ángulo A , esto se tiene por ángulos correspondientes. Entonces se concluye que las sumas de los ángulos internos de un triángulo miden 180 grados, tal como se puede observar en la figura 1.

Una vez Euclides demuestra la proposición I.32, no la vuelve a demostrar para otro triángulo, ya que considera que esta propiedad se cumple para todos los triángulos, sin importan su ubi-

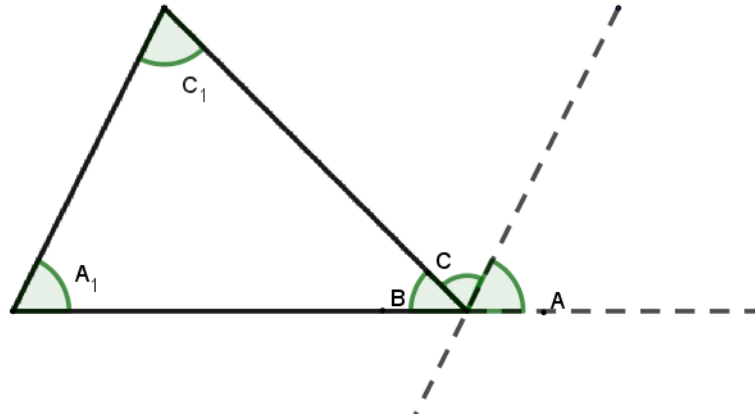


Figura 1.

cación en el espacio o su tamaño. Esto permite evidenciar que Euclides comienza a utilizar la noción de clase de equivalencia intuitivamente en sus trabajos.

Los *Elementos* de Euclides permiten encontrar más utilizaciones implícitas de la clase de equivalencia y lo mas importante es que estas se hacen cada vez más evidentes. El libro V de *Elementos* es dedicado a **razones y proporciones**; Euclides toma como elementos a las magnitudes y las clasifica de acuerdo a su dimensión. De esta manera tiene a su disposición un universo de magnitudes y construye el conjunto $S \times S$, dicho conjunto está conformado por todas las relaciones definidas a través de la cantidad.

Partiendo del universo de todas las magnitudes lineales (segmentos), Euclides introduce en el libro V de los Elementos las siguientes definiciones:

- **Definición V.1:** Se dice que una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.
- **Definición V.2:** Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
- **Definición V.3:** Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto a su cantidad.
- **Definición V.4:** Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar

una de ellas de modo que supera la otra.

- **Definición V.5:** Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Si dadas cuatro magnitudes A, B, C, D representamos por $A : B$ (se lee A es a B) la razón de A y B , y $C : D$ la razón entre C y D , entonces, a través de la definición V5, Euclides esta incorporando una relación de equivalencia en el universo de las razones.

Modernamente la proposición V.5 establece que dadas las magnitudes A, B, C, D , se dice que $A : B = C : D$, si para todo entero n y m se cumple que:

1. Si $nA > mB$ entonces $nC > mD$
2. Si $nA = mB$ entonces $nC = mD$
3. Si $nA < mB$ entonces $nC < mD$

El libro V de los *Elementos*, recopila el trabajo desarrollado por Eudoxo. Modernamente el trabajo realizado por Eudoxo se puede interpretar como la definición de cortadura. Sin duda alguna el libro V permite evidenciar la noción de clase de equivalencia.

Euclides es el primer escalón para poder consolidar la clase de equivalencia. Pero también se debe distinguir que es muy difícil poder atribuirle a un solo matemático el termino clase de equivalencia, por ello es importante indagar sobre las diferentes posturas que tienen los matemáticos referentes a la clase de equivalencia. Esto permite conocer de primera mano qué matemático es el que más se acerca a la consolidación de la clase de equivalencia, por ello se consideran los desarrollos de Russell, Gauss, Cantor y Dedekind.

2.3 El aporte de Russell en el desarrollo conceptual de la noción de equivalencia

Bertrand Russell 1872 – 1970 fue un matemático británico, que realizó grandes aportes a la matemática, entre sus obras se destaca *Principia Mathematica* publicado entre los años 1910 – 1913. Según Asghari (2018) La definición de números de Russell proporciona una imagen completa de una concepción de múltiples grupos más unidad, que muestra dónde cesó el uso de la equivalencia por parte de Euclides.

En la búsqueda de la noción de clase de equivalencia, se encuentra que Russell inicia su trabajo definiendo el concepto de similitud. En Asghari (2018) Se dice que dos clases son “similares” cuando hay una relación uno a uno que correlaciona los términos de una clase, cada uno con un término de la otra clase

Russell comprueba que la similitud tiene 3 propiedades importantes en sus relaciones y estas son la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva. Claramente Russell se topa con que la similitud es una relación de equivalencia.

2.4 Gauss y el uso implícito de la noción de clase de equivalencia

Karl Friedrich Gauss fue un matemático Alemán el cual vivió entre 1777-1855, sin duda alguna pertenece a un grupo selecto de matemáticos que promovieron el desarrollo de las matemáticas. Entre sus obras se destaca *Disquisitiones Arithmeticae* publicada en 1801. El trabajo realizado por Gauss referente a la clase de equivalencia se puede rastrear a partir de la definición de congruencia.

Si un número a divide la diferencia de los números b y c , b y c se dice que son congruentes con respecto a a ; si no, b y c no son congruentes. El número a se llama módulo. Si los números b y c son congruentes, cada uno de ellos se llama un residuo del otro. Si no son congruentes, se les llama no residentes. (Gauss, 1801, p,1)

La relación de Gauss con la clase de equivalencia se puede encontrar al utilizar la propiedad reflexiva, sucede algo peculiar con esta utilización pues al igual que muchos otros matemáticos Gauss utilizó la propiedad reflexiva pero esto lo hizo sin mencionarla.

- Como cada número se divide en cero, se deduce que podemos considerar cualquier número como congruente con respecto a sí mismo en relación con cualquier módulo. (Gauss, 1801, p,1)
- Si muchos números son congruentes con el mismo número relativo al mismo módulo, son congruentes entre sí (en relación con el mismo módulo). (Gauss, 1801, p,2)

Gauss brinda un nuevo concepto relacionado a los residuos.

Por lo tanto, cada número tendrá un residuo en la serie $0, 1, 2, \dots, m - 1$ y en la serie $0, -1, -2, \dots, -(m - 1)$. Llamaremos a estos los menos residuos. (Gauss, 1801, p,2)

La equivalencia le permite a Gauss dividir todos los enteros en grupos disjuntos de número congruentes. Ahora los números congruentes son aquellos que tienen el mismo mínimo residuo, caso contrario a los números no congruentes, pues estos se caracterizan por tener diferentes residuos mínimos.

2.5 Dedekind y el surgimiento de la noción de clase de equivalencia

Durante los siglos XVII y XVIII se da paso a un gran auge de nuevos conceptos matemáticos tales como la función, derivada e integral, estos conceptos involucraban la concepción de lo infinitamente pequeño, produciendo un estado de crisis en las matemáticas del siglo XIX. Es así que, durante la finalización del siglo XIX e inicios del siglo XX se brinda una solución a dicha crisis y se logra la fundamentación de las matemáticas, gracias a los desarrollos de los matemáticos Bolzano, R. Dedekind, G. Cantor y K. Weierstrass. Los anteriores matemáticos brindaron una aritmetización del análisis matemático, en un proceso mediante el cual se define los números complejos a partir de los números reales; los números racionales a través de los números enteros y éstos a través de los números naturales.

En 1857 Dedekind desarrolló *Abriss einer theorie der hoheren kongruenzen in bezug auf einen reellen primzahl-modulus*. En su trabajo considera a ciertas clases de congruencias de manera explícita como objetos, es decir, dichos objetos son considerados como unidades. Inicia planteando una equivalencia respecto a un módulo primo p es decir, considera los polinomios con coeficientes enteros, lo anterior le permite desarrollar infinitas clases de funciones, las cuales serán congruentes entre sí, claro está todo bajo el módulo p . En un segundo momento Dedekind brinda una segunda congruencia la cual se define en infinitas clases equivalentes las cuales se caracterizan por ser disyuntas de la primera congruencia, lo anterior permite a Dedekind brindar la asignación del doble módulo.

Curiosamente, Dedekind se movió libremente de la congruencia a las clases de elementos congruentes sin ninguna explicación adicional sobre la propiedad (o propiedades) de la congruencia que hace posible la “creación” de las clases. De hecho, jugó con la idea durante mucho tiempo: en 1857, no mencionaba ninguna propiedad en absoluto; en 1863, en las conferencias de Dirichlet sobre teoría de números, abordó la ruptura de la coincidencia en la notación introducida por Gauss, $a \equiv b \pmod{k}$ (Asghari, 2018, p, 15)

Dado dos números a y b , los cuales tienen el mismo peso sobre la relación de congruencia, se puede intercambiar los números a la izquierda y a la derecha del signo $\equiv$ (Dirichlet, 1991, p, 22).

La propiedad reflexiva y transitiva son vistos como teoremas, los cuales se desprenden del concepto de congruencia. Sin duda alguna la publicación tiende a la noción de la unidad de cada clase y también resalta que “todos los números que pertenecen a una misma clase, se comportan como un sólo número relativo al módulo k ”. (Asghari, 2018, p, 15)

En 1888 Dedekind brinda la concepción de similitud, la cual afirma que “Cada sistema es similar a sí mismo”, posteriormente hace uso de la propiedad euclidiana de similitud, la cual le va a permitir brindar una clasificación conjuntista. Dedekind propone clasificar los conjuntos mediante una clase, la cual estará compuesta por conjuntos que son similares entre sí, ahora dados $Q, R, S, \dots$ si estos conjuntos son similares a un conjunto particular R , implica que todos se encuentran en la misma clase y se le puede atribuir a R como el representante de la clase. Dedekind hace referencia a la transitividad como una propiedad, la cual “conduce a la noción de una clase de números relativa a un módulo a ” (Dedekind, 1877, p, 64-65).

Otro indicio sobre de la clase de equivalencia se brinda con la propiedad euclidiana aplicada a la partición de los ideales de un campo en clases es decir, la propiedad euclidiana afirma:

Dado los ideales a, b, c , donde a y b son equivalentes a un tercer ideal c , entonces se tiene que a y b son equivalentes entre sí. Lo importante de esta afirmación es que se hace uso de la palabra **equivalencia**. En 1890 Dedekind proporciona las 3 propiedades que definen una relación de equivalencia.

Considere todos los pares de números naturales α_1, α_2 (que deben distinguirse claramente del par de números α_2, α_1). Para ser breve, denotemos un par de los números α_1, α_2 por una sola letra α . Sea α el par de números α_1, α_2 y β el par de números de β_1, β_2 . Deje que la congruencia $\alpha \equiv \beta$ signifique que $\alpha_1 + \beta_2 = \beta_1 + \alpha_2$. Entonces es obvio la congruencia de dos pares de números α, β es simétrica, recíproca [un simétrico, mutuo], es decir, si $\alpha \equiv \beta$ sigue a $\beta \equiv \alpha$; además, siempre tenemos $\alpha \equiv \alpha$; finalmente, de $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \gamma$ siempre sigue a $\alpha \equiv \gamma$. Dedekind (1890)

2.6 La noción de clase de equivalencia en las primeras investigaciones de Cantor

La noción del infinito ha cautivado al hombre desde tiempos remotos, por ejemplo, Aristóteles expresa que la noción de infinito representa el “principio de todas las cosas”. Posteriormente Aristóteles sustenta la idea de que el infinito actual no tiene cabida en las matemáticas, lo cual frena muchos procedimientos matemáticos hasta el siglo XIX, principalmente a través del libro *Las paradojas del infinito* de Bernard Bolzano de 1991; este documento es de suma importancia para George Cantor, ya que logra demostrar la existencia de diversos tamaños del infinito.

George Cantor y Richard Dedekind desarrollan innumerables avances sobre la teoría del infinito, lo cual le permite llevar la noción del infinito a lugares inimaginables al interior de la matemática. Cantor desarrolla su teoría del infinito durante los años de 1895-1897, con su libro *contribuciones a la fundamnetación de la teoría de los conjuntos trasnfinitos*, el cual

consta de dos partes. La primera en el año de 1895 en la cual presenta los números cardinales y sus propiedades, su segundo artículo es presentado en 1897, el cual inicia con el título de **los conjuntos bien ordenados**. En su primer artículo, Cantor establece las definiciones pertinentes para dar soporte a su teoría de números tranfinitos, en la cual define conjunto y cardinal:

Conjunto: Por un “conjunto” se entiende a toda agrupación M en un todo de objetos determinados y bien diferenciados m , de nuestra intuición o de nuestro pensamiento. Estos objetos se denominan “elementos” de M . Se denotan como $M = \{m\}$

Tal cual como lo menciona J. Bares y J. Climent en *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito*. La definición que presenta Cantor sobre conjunto es en sí misma una manera implícita de considerar que un conjunto viene dado a través de una relación de equivalencia, la cual le permite determinar la igualdad (no la identidad) de los elementos del mismo.

Número cardinal: Si M_2 es una parte de M_1 , y M_1 una parte de M , entonces M_2 es también una parte de M .

A todo conjunto M le corresponde una determinada “potencia”, que también denominamos su “número cardinal”. Llamamos “potencia” o “número cardinal” de M al concepto general que se obtiene, de la actividad del pensamiento. La cual hace abstracción sobre el conjunto M y las características de sus diversos elementos m y el orden en que se designan. El número cardinal se representa con $\overline{M}$.

Conjuntos equivalentes: Los conjuntos M y N son equivalentes, si existe una función biyectiva entre M y N . Se representa como: $M \sim N$ o $N \sim M$.

Dada la definición de conjuntos equivalentes, esta permite evidenciar el uso de la clase de equivalencia. Modernamente los conjuntos equivalentes permiten establecer una partición de la colección de todos los conjuntos con base en su cardinal, esto se debe a que $M \sim N$ si y

sólo si $M = N$.

Los números cardinales dan cuenta de la cantidad pero Cantor ve la necesidad de erigir un orden. Cantor establece dos de las tres actividades fundamentales de la matemática, los números cardinales le permiten contar y los números ordinales le permiten ordenar. Se establece que mientras se hace el proceso de contar al mismo tiempo se esta ordenando y de manera similar mientras se ordena se esta contando.

Definición de orden: Sea M un conjunto, se dice que el conjunto M es ordenado si para dos elementos cualesquiera, uno de ellos es el anterior al otro es decir, que uno es menor que el otro. Dado m_1 y m_2 elementos de M , la relación “ m_1 es menor que m_2 o m_2 es mayor que m_1 ” se denota por $m_1 < m_2$ o $m_2 > m_1$.

Definición de conjuntos semejantes: Sean M y N conjuntos ordenados. Los conjuntos M y N se denominan “semejantes” si y sólo si existe entre ellos una función biyectiva f tal que m_1 y m_2 son elementos de M , por tanto $m_1 < m_2$ si y sólo si $f(m_1) < f(m_2)$.

Los números ordinales se definen mediante la clase de equivalencia. El proceso se lleva a cabo con los conjuntos semejantes, ya que dicha definición modernamente permite establecer un isomorfismo.

Modernamente los números ordinales se pueden ver como clases de equivalencias entre conjuntos que tengan el mismo orden es decir se toman funciones biyectivas que preserven el buen orden. Los números cardinales son vistos como clases de equivalencias entre conjuntos con funciones biyectivas que no conservan el orden.

ω y $\omega + 1$ tienen el mismo cardinal, pero no tienen el mismo orden, ya que ω no tiene máximo y $\omega + 1$ si tiene máximo es decir, desde la perspectiva de los ordinales entre ω y $\omega + 1$ no existe un isomorfismo, pero como cardinales existe una función biyectiva entre ellos denominada $\aleph_0$, el cual es un cardinal.

Capítulo 3

Proceso de formalización de la noción de clase de equivalencia

Este capítulo sin duda alguna es el más importante de este trabajo de grado, puesto que aquí se abordará el proceso de consolidación de la relación de equivalencia y la clase de equivalencia en las matemáticas. Las nociones de relación de equivalencia y clase de equivalencia no contaban con un registro histórico que permitiera esclarecer el establecimiento de su relación dialéctica.

Existe muy poca referencia sobre trabajos que aborden el desarrollo histórico tanto de las nociones de clase y relación de equivalencia. Se puede encontrar comentarios aislados que se deben relacionar para lograr entender el proceso de consolidación. Un gran avance en este sentido constituye el trabajo de **Amir Asghari**, de la universidad de Liverpool John Moores. El trabajo de Asghari se titula *Equivalence: an attempt at a history of the idea*, el cual es publicado en la revista Synthese, en su modalidad online el 19 de enero del 2018. El manuscrito de **Amir Asghari** brinda argumentos contundentes para atribuirle a Richard Dedekind la identificación formal de la noción de clase de equivalencia.

En matemáticas las nociones de relación y clase de equivalencia comparten un vínculo

inseparable. Dada una relación de equivalencia se puede obtener una clase de equivalencia; de igual manera dada una clase de equivalencia se puede obtener una relación de equivalencia. La conexión entre relación de equivalencia y clase de equivalencia no siempre fue tan evidente, modernamente se utiliza sin ningún tipo de inconveniente ya que estas nociones son de suma importancia para las diferentes ramas de la matemática.

Durante 40 años **David Fowler** un historiador y **Christopher Zeeman** un matemático, decidieron investigar sobre la manera en la cual se dio el vínculo formal entre las nociones de clase de equivalencia y relación de equivalencia. Los *Elementos* de Euclides constituyen una referencia muy importante al momento de rastrear los orígenes de noción de relación de equivalencia y la clase de equivalencia. Todo inicia con la definición de proporcionalidad. La proporcionalidad es el mejor ejemplo del uso implícito de la relación de equivalencia. Para Fowler la proporcionalidad da lugar a la noción de clase de equivalencia; Zeeman cree que es todo lo contrario, es decir, la proporcionalidad da lugar a la relación de equivalencia.

El 1 de Agosto de 1998 en un foro de historia de las matemáticas, se registra por primera vez el interrogante acerca de la relación de equivalencia y la clase de equivalencia. El foro inicia con Moshé Machover, quien promueve la idea de establecer “clases de Equivalencias como objetos”: Machover se pregunta sobre las situaciones y las épocas en las cuales se empieza a utilizar las clases de equivalencia en sí mismas, como noción autónoma.

El interrogante planteado por Moshé en el foro de historia de la matemática, da lugar a la intervención de Fowler. Es así como el 22 de agosto de 1998 da respuesta al interrogante de Moshé:

Nadie ha intentado dar una respuesta directa. Hay algunos intentos incrustados dentro de la historia de las matemáticas relevantes, por ejemplo, el concepto de grupo cociente (Nicholson 1993), o la base de las matemáticas, y en teoría conjunto particular (Ferreirós 2008), o la filosofía de las matemáticas (Dummett 1991; Rodríguez-Consuegra 1991). Sin embargo, ninguno ha abordado la historia de la construcción matemática de la equivalencia exclusivamente”. (Asghari, 2018, p, 3).

3.1 Relación de equivalencia y clase de equivalencia en el siglo XX

3.1.1 Relación de equivalencia

El V congreso mundial de matemáticas realizado en Inglaterra en 1912, le permite al matemático inglés **Philip Edward Bertrand Jourdain** presentar su trabajo: *Sobre las relaciones isoid y las teorías de números irracionales*. El documento presentado por Jourdain hace referencia a las propiedades de una relación de equivalencia. Jourdain establece al inicio de su obra lo siguiente: “llamo una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva una relación isoid”. Los terminos planteados por Jourdain, referente a la relación isoid, no es aceptada por la comunidad académica; por ejemplo para George Cantor una relación isoid no es más que una equivalencia, la cual se puede encontrar en los números cardinales. Para Dedekind una relación isoid es una relación de similitud.

Sin embargo existen registros históricos que establecen que el matemático holandés **Van der Waerden** hace uso de la relación de equivalencia de manera implícita, esto lo lleva a cabo en 1930, año en el cual publicó *Moderne Algebra*. En (Van der Waerden, 1930, P, 4) se establece la definición de relación de equivalencia: “**entonces la relación $a \sim b$ se llama relación de equivalencia**”.

3.1.2 Clase de equivalencia

La relación dialéctica entre relación y clase de equivalencia implicaría que al incorporar la noción de relación de equivalencia, inmediatamente se logra establecer la noción de clase de equivalencia; sin embargo históricamente eso no sucedió así. Debido a que el reconocimiento y la formalización de la noción de clase de equivalencia se llevo a cabo en un periodo largo y se dio gracias al concurso de muchos académicos. Entre los académicos sobresale el matemático estadounidense **George David Birkhoff** (1884 – 1994), quien es pionero al proponer una definición para la clase de equivalencia. En sus notas se puede encontrar que:

Existe una $(1, 1)$ correspondencia entre las relaciones de equivalencia x en C y particiones de los objetos de C en “ categorías x no superpuestas $\neq$, bajo las cuales $a \times b$ si y solo si a y b están en la misma categoría x ”. (Birkhoff, 1935, p, 446)

El trabajo de Birkhoff permite denominar a las clases de objetos equivalentes como “ X -categorías” o “abstracción de clases”. Observemos que aunque se acerca, no corresponde a la definición de clase de equivalencia que se conoce actualmente. En 1942 el matemático noruego **Oystein Ore** publica *Theory of Equivalence Relations*. De este artículo se puede deducir que Ore hace referencia a la clase de equivalencia como “ Los bloques de la partición P ”.

3.2 Relación de equivalencia y clase de equivalencia

Si bien, como se ha detallado antes, en los trabajos del Noruego Oystein Ore se visualiza la noción de clase de equivalencia, una definición moderna de clase de equivalencia se puede encontrar en los trabajos del matemático estadounidense **John Wilder Tukey** quien en 1940 publicó: *Convergence and Uniformity in Topology*.

Es bien sabido que una relación de equivalencia (es decir, una que genera un sistema ordenado reflexivo, transitivo y simétrico) divide el conjunto en el que está definido en clases de equivalencia mutuamente excluyentes. Si denotamos la relación equivalencia por $\sim$ y la clase de equivalencia que contiene a por $[a]$, luego $b \in [a]$ si y solo si $b \sim a$. (Tukey, 1940, p, 4)

El matemático estadounidense, de origen ruso, **Solom Lefschetz** (1884 – 1972) hace uso reiterado de la clase de equivalencia en sus trabajos de topología algebraica. Uno de sus herederos fue **John Tukey** (1915 – 2000). Los trabajos realizados por Tukey en (1940) y Lefschetz en (1942) preceden el trabajo del matemático estadounidense **Norman Earl Steenrod** (1940 – 1971), quien en 1955 publica *Steenrod's The Topology of Fibre Bundles*. Para Fowler, en los desarrollos de Steenrod ya se puede identificar una presentación moderna de la noción de clase de equivalencia. **Edwin Spainer** (1921 – 1996), en 1955 hace referencia a la clase de equivalencia, en su obra: *Set Theory y Metric Spaces*; en esta publicación Spainer hace uso formal y claro del concepto clase de equivalencia; se debe resaltar que la notación que utiliza Spainer es la misma notación que utilizó Lefschetz en 1938, ya que Spainer procede de la línea de Lefschetz; la notación que utilizan, actualmente sigue vigente y corresponde al símbolo $[]$.

3.2.1 Evolución del término clase de equivalencia durante el siglo XX.

La clase de equivalencia debe pasar por muchas fases para llegar a la concepción moderna. La primera pista se encuentra con Birkhoff, quien en 1940 publica la primera edición de *Lattice Theory*, en la publicación es de suma importancia el siguiente apartado:

TEOREMA 1.2: El algoritmo de identificar x e y cuando (y solo cuando) $x\rho y$ y $y\rho x$, produce un sistema parcialmente ordenado de cualquier sistema cuasi ordenado Q .

Prueba: Deje $x \sim y$ significa que xpy y ypx . Luego (van der Waerden 1930, *vol.1*, p.11),

$x \sim y$ significa que x e y pertenecen a la misma subdivisión debajo de algunos partición de

Q . (Birkhoff, 1940, p.7)

El trabajo de Birkhoff tendrá más ediciones, en las cuales se introduce el termino relación de equivalencia; por ejemplo, en la segunda edición los teoremas de la primera edición se verán modificados por la relación de equivalencia, de tal manera que el teorema 1.2 se remplaza por el teorema 3, el cual establece:

TEOREMA 3: Sea ρ cualquier cuasi orden de un conjunto. La relación $x \sim y$, significa que xpy y ypx , es una relación de equivalencia. Si los elementos “equivalentes” son identificado, ρ se convierte en un orden parcial.

Prueba. Esto muestra que $\sim$ es una relación de equivalencia, o (*Birkhoff – MacLane, Ch.VI, Thm.27*) que hay una partición de X en subclases no superpuestas, tal que $x \sim y$ si y solo si x e y están en la misma subclase ... Sigue inmediatamente de esto que ... xpy y ypx implican $x \sim y$ (es decir, $x = y$ en el sistema formado por las subclases). [Birkhoff, 1948, p.4].

En una tercera edición de la *Lattice Theory*, un teorema se transforma en un lema. Esto ocurre con el teorema ubicado en la página 7 de la primera edición. El lema que remplaza al teorema en la 3 edición establece:

Lema 1 : En cualquier conjunto cuasi ordenado $Q = (S, \prec)$, defina $x \sim y$ cuando $x \prec y$ y $y \prec x$. Entonces:

- 1) $\sim$ es una relación de equivalencia en S ;
- 2) si E y F son dos clases de equivalencia para $\sim$, entonces $x \prec y$ para todos los $x \in E$ y $y \in F$.
- 3) el cociente del conjunto $S/\sim$ es un conjunto parcialmente ordenado $E \leq F$ se define para significar que $x \prec y$ para algunos (de ahí que todos) $x \in E, y \in F$. [Birkhoff, 1967, p 21].

La tercera edición de *Lattice Theory*, es muy importante para la incorporación de la clase de equivalencia en las matemáticas, ya que al interior de las matemáticas antes de la primera mitad del siglo XX no se puede encontrar en ningún texto matemático la definición o incorporación de la relación de equivalencia y la clase de equivalencia. Alrededor de los años 50 se vive un periodo de gran auge sobre la clase de equivalencia, ya que las diferentes ramas que componen a la matemática comienzan a incorporar el concepto de clase de equivalencia, claro está que esto sucede desde las diversas líneas de trabajo. Esto desencadena dos aspectos; uno positivo y uno negativo para la clase de equivalencia. Lo positivo se encuentra al poder unificar a una comunidad determinada alrededor del concepto clase de equivalencia; pero al mismo tiempo esto genera inconvenientes al querer contextualizar la construcción de la clase de equivalencia.

Es muy difícil atribuirle a una sola persona la autoría de la noción de clase de equivalencia, debido a que el proceso ha contado con la participación de muchos matemáticos que a través de la historia la han utilizado de manera implícita. Un ejemplo de ello proviene de la antigua Grecia con Euclides, quien en su obra *Elementos* hace uso implícito de lo que hoy se conoce como la clase de equivalencia. A través de los años otros grandes pensadores han aportado para llegar a la consolidación de lo que hoy se conoce como clase de equivalencia.

Hay un periodo especial de la historia matemática la cual permite atribuirle a muchos matemáticos la clase de equivalencia, este periodo de tiempo se da alrededor de los siglos XIX y XX. Durante este periodo el historiador Flower, le atribuye a Dedekind la “solidificación” de la clase de equivalencia. De igual manera se cuenta con la percepción de otros matemáticos quienes bridan su candidato como por ejemplo: el filósofo británico Michael Dummett postula a Frege; el matemático alemán Hermann Weyl postula a Leibniz y esto lo sustenta con su obra *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, publicada en 1949. Hermann Schubert En 1894 publicó *Monism in Arithmetic*, una obra orientada para principiantes. En este trabajo se

utiliza la clase de equivalencia al momento de definir los números negativos. Lo realizado por Schubert se relaciona con el trabajo realizado por Dedekind en 1854, ya que Dedekind define los números enteros como un par de números naturales.

Capítulo 4

Conclusiones

La matemática es una ciencia que se constituye de diversas ramas como lo son análisis, la geometría, el álgebra, entre otras. Estas diversas ramas comparten muchos elementos comunes relacionados con el método, conceptos y procedimientos. La noción de clase de equivalencia es una herramienta conceptual útil en cada una de estas ramas. La clase de equivalencia es un concepto que se define explícitamente a principios del siglo XIX, pero se encuentra de manera implícita a través de todo el desarrollo histórico de las matemáticas. En particular, la noción de clase de equivalencia juega un papel trascendental en la fundamentación de diversos teoremas de existencia y al mismo tiempo de las extensiones numéricas.

Los antiguos emplean ecuaciones, las cuales tienen como objetivo introducir cantidades en la matemática, dichas cantidades van a tomar un carácter numérico de acuerdo a la exigencia de solución de las ecuaciones. Las extensiones numéricas se caracterizan por desarrollarse a partir de equivalencias, específicamente con equivalencias que involucran la representación numérica

La representación de fracciones es un buen antecedente del uso implícito de la noción de clase de equivalencia, ya que, mediante el proceso de simplificación, se busca su expresión original en su mínima expresión; al realizar este tipo de actividad, se hace uso implícito de la

clase de equivalencia, puesto que este procedimiento permite tomar cualquier representante, y su operación debe funcionar con este o con cualquier otro elemento que haga parte de su expresión.

Previamente al ascenso de la clase de equivalencia, existe la relación de equivalencia, la cual es fundamental para dar paso a una clase de equivalencia. Debemos tener en cuenta que el uso de un determinado procedimiento no implica la conformación de una noción, que luego se transformará en objeto de las matemáticas. Para entender este procedimiento, la historia nos muestra procesos evolutivos que hacen posible dicha objetivación. Es lo que se denomina tematización.

Es común encontrar diferentes tematizaciones a partir de un concepto matemático; por ejemplo, la relación de equivalencia es el medio que permite obtener nuevos sistemas numéricos a través de las extensiones numéricas. Cuando se desea construir los números enteros, racionales y reales, esto se hace a través de la relación de equivalencia, la cual utiliza parejas ordenadas tanto para los enteros como los racionales, excepto para los reales, los cuales se logran mediante cortaduras de racionales o sucesiones de racionales. Otro importante desarrollo de la relación de equivalencia se puede encontrar en la construcción de conjuntos no Lebesgue medibles.

La clase de equivalencia se populariza alrededor de 1950, teniendo en cuenta que la teoría de conjuntos se considera como la base de la estructuración de la matemática moderna, es decir, es la herramienta que permite formalizar muchos procesos al interior de la matemática y al mismo tiempo abre la puerta a nuevos avances que le permiten trabajar en las diversas ramas de la matemática.

Concerniente a la temática de investigación de este trabajo, la cual busca darle lugar a la clase de equivalencia en la historia de las matemáticas, se puede concluir que durante los muchos siglos de uso implícito de la noción de clase de equivalencia el personaje que brinda la

formalización del concepto clase de equivalencia es Richard Dedekind, ya que sus desarrollos concernientes a congruencias permiten establecer modernamente lo que se conoce como clase de equivalencia. De igual manera se reconoce el gran trabajo realizado por Asghari (2018), quien realizó una ardua investigación histórica de las diversas fases por las cuales atraviesa la clase de equivalencia en la matemática.

Este trabajo de grado le permite al lector reconocer la importancia que desempeña la clase de equivalencia en la fundamentación de las matemáticas; dado que la clase de equivalencia es una herramienta de gran utilidad, ya que es utilizada en las diversas ramas que componen la matemática.

Referente al campo de la educación matemática más precisamente en la licenciatura en Matemáticas y Física de la universidad del Valle, la cual ofrece el curso de teoría de conjuntos; este trabajo de grado permite que el estudiante logre un mayor aprendizaje de la teoría de conjuntos, esto se debe a que el estudiante podrá identificar, desarrollar y emplear los diversos usos de la clase de equivalencia al interior de la matemática.

El curso de Teoría de Conjuntos, es un curso fundamental que desarrolla herramientas básicas para el estudiante, el cual utilizará en los diversos cursos a lo largo de la carrera de la licenciatura como: Análisis matemático, Topología, Álgebra Moderna, entre otros. No se puede desconocer que al momento de ver las asignaturas que piden como requisito la teoría de conjuntos los estudiantes llegan con un nivel de comprensión muy bajo, lo cual desencadena en la cancelación o pérdida de la asignatura; por ello es trascendental que el estudiante logre una buena comprensión de los procesos de formación que se encuentran en la teoría de conjuntos, en especial el concepto de clase de equivalencia.

La labor del educador a título personal se encamina en transmitir conocimientos, los cuales ha desarrollado desde su experiencia como estudiante y profesional, pero sin duda alguna no

puede olvidar como ha desarrollado sus bases teóricas, por ese motivo este trabajo de grado le permite al estudiante comprender y explorar el concepto de relación y clase de equivalencia desde la perspectiva histórica y matemática.

Bibliografía

Arbeláez, G. Recalde, L. (2011). *Los números reales como objeto matemático Una perspectiva histórico - epistemológica*. Universidad del Valle.

Asghari, A. (2018). Equivalence: an attempt at a history of the idea. *Synthese*, pages 1–21.

Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, 31(4):433–454.

Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory*, volume 25. American Mathematical Soc.

Bolzano, B. (1981). *Las paradojas del infinito*. México : Colección Mthema UNAM.

Cantor, Georg, e. d. J. F. (2005). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos: escritos y correspondencia selecta*. Crítica, Barcelona.

Cantor, G. (1895). Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos. *Math. Annalen*, 46(4):207–246.

Dedekind, R. (1857). Abriss einer theorie der hoheren kongruenzen in bezug auf einen reellen primzahl-modulus. *Journal fur reine und Augwandte Mathematik*, 54:1–26.

Dedekind, R. (1877). *Theory of Algebraic Integers*. Translated and introduced by John Stillwell (1996). Cambridge: Cambridge University Press.

Dedekind, R. (1890). Erweiterung des Zahlbegriffs auf Grund der Reihe der natürlichen Zahlen.

III, 2, I. Printed in: Sinaceur, H. La création des nombres. Paris: J. Vrin. (2008).

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza Editorial

(Traducción e introducción de José Ferreirós).

Dirichlet, P. (1991). Vorlesungen über Zahlentheorie (1863); English translation by J. Stillwell

(American Mathematical Society, Providence, 1991).

Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae. English translation by Arthur A. Clarke*

(1986). Springer, Berlin.

Hrbacek, K. and Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Ex-*

panded. Marcel Dekker, Inc. New York.

Jourdain, P. (1912). On isoid relations and theories of irrational number. *Proceed-*

ings of the 5th International Congress of Mathematicians, Cambridge, 2:492–496. Re-

cuperado en <http://docplayer.net/55152235-On-isoid-relations-and-theories-of-irrational-number.html>.

Ore, O. et al. (1942). Theory of equivalence relations. *Duke Mathematical Journal*, 9(3):573–

627.

Puertas, M. (1991). *Euclides. Elementos Libros I–VI.* Gredos.

Recalde, L. (2016). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Universidad del Valle.

Russell, B. (2009). *Principles of mathematics.* London: Routledge.

Schubert, H. (2015). Monism in Arithmetic. *The Monist*, 4(4):561–579.

Spanier, E. H. (1955). *Set theory and metric spaces.* Chicago: University of Chicago.

Tukey, J. W. (1940). Convergence and uniformity in topology. *Annals of Mathematics Studies*. Recuperado en <https://doi.org/10.1515/9781400882199>.

Van der Waerden, B. L. (1930). *Moderne Algebra*. Berlin: Springer.

Vitali, G. (1905). *Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta: Nota*. Tip. Gamberini e Parmeggiani.