



**UNA MIRADA ARTÍSTICA A LA GEOMETRÍA FRACTAL EN CONTEXTOS
ESCOLARES A TRAVÉS DE LA PROPIEDAD DE LA AUTO SEMEJANZA
EN GRADO 9° DE LA EDUCACIÓN BÁSICA EN COLOMBIA**

JONATHAN RAMÍREZ POLO
Código: 1122954

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2016**



Una mirada artística a la geometría fractal en contextos escolares a través de la propiedad de la auto semejanza en grado 9° de la Educación Básica en Colombia

JONATHAN RAMÍREZ POLO

Código: 1122954

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Directora
Mg. Mónica Andrea Aponte

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS.
SANTIAGO DE CALI
2016

TABLA CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS	6
INDICE DE TABLAS	8
RESUMEN	9
INTRODUCCIÓN	11
REPORTE I: DOCUMENTACIÓN BIBLIOGRÁFICA	15
1.1. Naturaleza y descripción de la problemática.....	15
1.1. Justificación de la problemática.....	18
1.3. Objetivos	22
1.3.1. Objetivo general:.....	22
1.3.2. Objetivos específicos:	22
1.4. Marco de referencia del problema de la investigación	22
1.4.1. Algunas ideas materializadas del desarrollo y evolución de la Geometría vista a través de lentes artísticos	23
1.4.1.1. En la Prehistoria	25
1.4.1.2. Mesopotamia	26
1.4.1.3. La cultura Egipcia	29
1.4.1.4. La Antigua Grecia	30
1.4.1.4.1. <i>Geometría Euclidiana</i>	31
1.4.1.4.2. <i>El Renacimiento</i>	34
1.4.1.4.3 <i>Geometrías no Euclidianas</i>	36
1.4.1.4.3.1 <i>El cubismo</i>	38
1.4.1.4.4. <i>Maurits Cornelius Escher (1898-1972)</i>	39
1.5. Una aproximación al concepto de fractal	40
1.5.1. Conjunto de Cantor:.....	43
1.5.2. La curva de Peano y de Hilbert	44
1.5.3. La curva de Von Koch	45
1.5.4. La curva del Dragón.....	46
1.5.5. Triángulo de Sierpinski	46
1.6. Acercamiento a la propiedad de auto semejanza	47
1.6.1. La propiedad de auto semejanza aplicada en las artes	48
1.6.2. Breve fundamentación teórica del concepto matemático involucrado	53
1.6.3. Algunas definiciones básicas de la semejanza	54

1.7. Los fractales vistos como un recurso pedagógico	59
1.7.1. Materiales manipulativos	61
1.8. Algunos referentes curriculares y didácticos	64
1.8.1. Desde los Lineamientos Curriculares	64
1.8.2. Algunos Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas relacionados con la problemática	65
1.9. Tecnologías y Currículo de Matemáticas	69
1.9.1. Empleo de la tecnología para la enseñanza de los fractales	71
1.10. Diseño metodológico	75
1.10.1. Marco contextual	76
1.10.2. Algunas cuestiones de la Normal Superior Santiago de Cali	77
1.10.3. Poblacion objeto del estudio: caracterización de los estudiantes	78
1.11. Fases en el proceso de investigación	79
1.11.1. Formas de recolección de la información	81
REPORTE II:.....	83
DIAGNÓSTICO Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA	83
2.1 Breve descripción de los instrumentos en esta fase.....	83
2.1.1. Encuesta para los estudiantes	84
2.1.2. Encuesta para los docentes	86
2.2. Análisis de los resultados	91
2.2.1. Encuesta dirigida a los estudiantes	91
2.2.2. Encuesta dirigida a los docentes	98
2.3. Presentación de la propuesta de enseñanza	104
2.4. Resultados esperados	130
REPORTE III.....	135
MACRO-RELATO DE LA EXPERIENCIA, TRABAJO DE CAMPO Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	135
3.1 Sesión 1	136
3.1.1. Información general.....	136
3.1.2. Observaciones de la puesta en práctica	136
3.2. Sesión 2	137
3.2.1. Información general.....	137
3.2.2. Observaciones de la puesta en práctica	138
3.3. Sesión 3	141
3.3.1. Información general.....	141

3.2.2. Observaciones de la puesta en práctica:	141
3.4. Sesión 4	145
3.4.1. Información general.....	145
3.4.2. Observaciones de la puesta en práctica	145
3.5. Sesión 5	151
3.5.1. Información general.....	151
3.5.2. Observaciones de la puesta en práctica	151
3.6. Sesión 6	154
3.6.1. Información general.....	155
3.6.2. Observaciones de la puesta en práctica	155
3.7. Sesión 7	159
3.7.1. Información general.....	159
3.7.2. Observaciones de la puesta en práctica	159
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	161
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	167

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: <i>Arte rupestre</i>	25
Figura 2: <i>Olla de Tajos de Cacín</i>	26
Figura 3: <i>Escritura cuneiforme</i>	27
Figura 4: <i>Ciudad de Persépolis</i>	27
Figura 5: <i>Friso encontrado en la ruinas de Persépolis</i>	27
Figura 6: <i>Reconstrucción ideal del Zigurat de Babilonia</i>	28
Figura 7: <i>Pirámide de Gizet</i>	30
Figura 8: <i>Escuela de Atenas</i>	32
Figura 9: <i>Venus de Milo</i>	33
Figura 10: <i>El hombre de Vitrubio</i>	34
Figura 11: <i>El Partenón</i>	34
Figura 12: <i>la Giovanna (Mora, 2011 ,p. 93)</i>	35
Figura 13: <i>Fábrica de Horta del Ebro” (1909), de Picasso</i>	38
Figura 14: <i>Serpientes, grabado en madera en el 1969</i>	39
Figura 15: <i>Metamorfosis, 1943, reptiles</i>	40
Figura 16: <i>La luna vista cada vez ms cerca</i>	41
Figura 17: <i>Benoit Mandelbrot</i>	42
Figura 18: <i>Esbozo aproximado del Conjunto de Cantor</i>	43
Figura 19; <i>Esbozo aproximado de La Curva de Peano</i>	44
Figura 20: <i>Esbozo aproximado de La Curva de Hilbert</i>	45
Figura 21: <i>Esbozo del Copo de nieve</i>	45
Figura 22: <i>Esbozo aproximado se la Curva del Dragón</i>	46
Figura 23: <i>Esbozo aproximado del Triángulo de Sierpinski</i>	46
Figura 24: <i>La pintura Polos Azules</i>	48
Figura 25: <i>En el lado izquierdo se encuentra el árbol fractal mientras que en lado derecho se aprecia un árbol real.</i>	49
Figura 26: <i>Mándalas tibetanos</i>	49
Figura 27: <i>Mosaico de la catedral de Anagni</i>	50
Figura 28: <i>En el lado derecho se aprecia el Castillo del Monte y su lado izquierdo se encuentra su estructura arquitectónica</i>	50
Figura 29: <i>La torre Eiffel</i>	51
Figura 30: <i>Giménez & otros (2009, p.55), La proporción: arte y matemáticas, en la cual se contempla el modo de generar un octaedro en la pag.55</i>	51
Figura 31: <i>Cubo fractal (1993-1995) que hizo parte de la exposición titulada “Escultura cultivada” ..</i>	52
Figura 32: <i>Imágenes de la exposición The Frontier between Art and Science tomada de la revista Sigma Nº 26(p.104)</i>	53
Figura 33: <i>Tomado y adaptado Castro y Céspedes (2009; p.41)</i>	56
Figura 34: <i>Ángulo, Ángulo (A-A)</i>	58
Figura 35: <i>Lado, Ángulo, Lado (L-A-L)</i>	58
Figura 36: <i>Lado, Lado, Lado (L-L-L)</i>	58
Figura 37: <i>Un ejemplo de Kirigami</i>	63
Figura 38: <i>Esquema general de las fases de la investigación</i>	79

Figura 39: <i>Algunas perspectivas frente a las matemáticas y al arte</i>	101
Figura 40: <i>Propuesta de trabajo en el aula de clase</i>	135
Figura 41: <i>Títulos e imágenes</i>	138
Figura 42: <i>Trabajo en clase</i>	139
Figura 43: <i>Algunos dibujos realizados por los diferentes grupos</i>	140
Figura 44: <i>Fotografía tomada mientras los estudiantes ven el video</i>	141
Figura 45: <i>Elaboración del Conjunto de Cantor por los estudiantes</i>	142
Figura 46: <i>Procedimiento empleados por los estudiantes para detallar las proporciones en el Conjunto de Cantor</i>	144
Figura 47: <i>Una fotografía de la presentación.</i>	146
Figura 48: <i>Fotografía en donde se observa el momento donde decora los mándalas.</i>	147
Figura 49: <i>Mándalas de grupo 1</i>	148
Figura 50: <i>Mándalas de grupo 2</i>	148
Figura 51: <i>Mándalas de grupo 3</i>	148
Figura 52: <i>Mándalas de grupo 4</i>	149
Figura 53: <i>Mándalas de grupo 5</i>	149
Figura 54: <i>Mándalas de grupo 6</i>	149
Figura 55: <i>Mándalas de grupo 7</i>	150
Figura 56: <i>Mándalas de grupo 8</i>	150
Figura 57: <i>Un ejemplo de Triangulo de Sierpinski construido en la clase</i>	152
Figura 58: <i>Trabajando la técnica del Kirigami</i>	155
Figura 59: <i>Algunas fotos de la feria</i>	160

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: <i>Clasificación de fractales</i>	48
Tabla 2: <i>Categorías conceptuales</i>	59
Tabla 3: <i>Determinadas relaciones que se puede encontrar entre algunos estándares con respecto a los materiales manipulativos.</i>	69
Tabla 4: <i>Tipificación de los docentes participes en el proyecto</i>	77
Tabla 5: <i>Cronología de edades instaurada en el Manual de Convivencia</i>	78
Tabla 6: <i>Descripción de cada fase de la investigación</i>	81
Tabla 7: <i>Cuantificación de los datos</i>	92
Tabla 8: <i>Interpretación de los datos</i>	93
Tabla 9: <i>Tipificación de las respuestas de los estudiantes</i>	95
Tabla 10: <i>Tipificación de las respuestas del docente de matemáticas 1</i>	98
Tabla 11: <i>Tipificación de las respuestas del docente de matemáticas 2</i>	100
Tabla 12: <i>Tipificación de las respuestas de la docente de arte.</i>	102
Tabla 13: <i>Tipificación del docente de matemáticas 3</i>	103
Tabla 14: <i>Algunas recomendaciones</i>	137
Tabla 15: <i>Correlación entre las imágenes y los títulos</i>	138
Tabla 16: <i>Descripción de los resultados obtenidos por los estudiantes en la S2AC2</i>	144
Tabla 17: <i>Relación entre matemáticas y arte según los estudiantes</i>	146
Tabla 18: <i>Descripción de los estudiantes frente a la técnica de los mandalas</i>	151
Tabla 19: <i>Caracterización de Triangulo Sierpinski</i>	154
Tabla 20: <i>Descripción de la propiedad de auto semejanza considerando las materiales y recursos manipulativos empleados por los estudiantes a lo largo del trabajo</i>	158

RESUMEN

En el área de Educación Matemáticas, la enseñanza de la geometría ha sido influenciada por diversos factores que de algún modo repercuten en su aprendizaje, y contribuyen al bajo desempeño que suelen presentar algunos estudiantes en sus resultados en pruebas internacionales como en internas.

Un aspecto que cabe destacar, que posiblemente afecta de manera evidente en la formación académica del estudiantado, es el modo en el que se presentan las actividades, porque por un lado, tienden a ser centradas al manejo exclusivo de lápiz y papel, y por el otro, se tratan usualmente con figuras geométricas altamente regulares, las cuales no siempre son las más precisas para describir la realidad. Por lo tanto, a raíz de la problemática generalizada, surge la presente indagación como una propuesta alternativa para complementar y contextualizar el pensamiento geométrico través de un lente artístico, debido a que ha existido desde la antigüedad, una profunda relación directa entre el arte y la geometría, siendo complementarias cada una de ellas a partir del desarrollo y aportes de la otra.

En este trabajo se realizó un acercamiento intuitivo a la geometría fractal, en particular a la propiedad de la auto semejanza mediante una geometría activa, propuesta a través de acciones concretas, y estipuladas mediante el desarrollo de un conjunto de actividades que les posibilite a los estudiantes, conocer brevemente aspectos históricos y conceptuales que le permitan la aplicación y la construcción de algunos fractales básicos, manipulando diferentes ambientes y recursos: el tradicional (a lápiz y papel), empleando ambientes de geometría dinámica (geogebra) y el empleo el arte milenario Kirigami, todo esto conlleva a la materialización la feria de matemáticas, en donde se compartió los trabajos y las experiencias adquiridas.

PALABRAS CLAVE: Arte, Auto semejanza, Geometría fractal

ABSTRACT

In the area of basic mathematics education, the geometry teaching has been influenced by various factors that somehow has to do with the learning techniques, and leads to poor performance on some students results. An aspect that stands out, that is involved with the academic education of students, is the way the activities are given, because on one side they concentrate in the use of pencil and paper, and on the other side they use geometric figures highly regular, which are not always precise to describe the reality that lays beneath. Therefore, the problematic, generates the investigation like an alternative proposal to complete the geometrical thought, through a artistic lense, because it has always been a direct relationship between art and geometry, being complementary to one and other. This work pretends an intuitive approach to fractal geometry, in particular to auto similarity by an active geometry, proposed through clear actions and stipulated by the development of activities that allow the students, to know briefly historic and conceptual aspects that enable them the application and construction of some basic facts, manipulating different environments and resources: the traditional (pencil and paper) in surroundings of dinamic geometry (geogebra) and the use of milenary Kirigami art, to end up in a mathematics fair, where it can be shared and showed the work and experiences acquired.

KEYWORDS: Art , Auto similarity , fractal geometry

INTRODUCCIÓN

Cabe resaltar y recordar, que la geometría se configuró como de los mayores pilares de la formación académica, considerándose como una de las ciencias precursoras más antiguas que promovió el razonamiento lógico-matemático; al respecto Zalaya (2005) comenta:

(...) la verdadera creación de las Matemáticas con entidad de ciencia no se produce hasta su desarrollo en la cultura griega. Entre sus aportaciones más sobresalientes y que permiten darle esta entidad, están la noción de prueba y la iniciación de una estructura axiomática. (p.28)

Entonces, el desarrollo matemático fue un aspecto importante para los antiguos griegos, también se puede adicionar que siendo la geometría un elemento presente del edificio matemático, está ha permitido fomentar otras disciplinas por su carácter axiomático, por tanto, se han manifestado vínculos estrechos y fuertes con una gran cantidad de saberes de otras áreas, por ejemplo, la ingeniería civil, la arquitectura, el arte, entre otros; en relación como lo ha mencionado Barrentos, L y Balletbo, I. (2012) quienes afirman:

Consideramos que la geometría, además de estar presente en múltiples facetas de la vida actual, (...). La geometría favorece y desarrolla en los alumnos una serie de capacidades como la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de otras áreas de Matemáticas o materias (p.140)

En consecuencia, se hace presente de cierta manera el empleo de cuestiones geométricas en muchas situaciones, por ejemplo al intentar dibujar un paisaje donde el sol tiende a ser circular, las montañas triangulares e igualmente cuando se conduce y se considera las direcciones, el sentido y diagonales de las calles; también en las formas rectangulares que se aprecian de una fotografía de un edificio, asimismo en las diferentes formas y diseños de piscinas, igualmente cuando se observa un reloj en el que se aprecia los diferentes ángulos que se forma las manecillas del reloj, entre otros modelos que se pueden mencionar, e incluso hasta se puede evidenciar de manera implícita en distintos eventos cuando ni siquiera se toma conciencia del uso de algunos conceptos geométricos.

A pesar de las previas ejemplificaciones mencionadas en donde se ilustra con certeza el sentido significativo de algunas actividades geométricas en la cotidianidad social y cultural; sin embargo, este hecho en algunas ocasiones se omite en las clases, uno de los posibles factores a manera de hipótesis, es a causa del famoso movimiento de renovación denominado como “Matemática Moderna” que se presentó en la décadas sesenta y setenta en el siglo XX, y trajo consigo ciertos efectos opuestos, implicando un paulatino despojo la

geometría en los planes de estudio, direccionando en profundizar en el rigor lógico y la abstracto, en ese sentido, se privilegió el estudio del álgebra en las escuelas, frente a la geometría. Atendiendo a la consideración anterior, Vasco (2006) afirma: *“Esos sistemas formales eran lo único verdaderamente matemático de la geometría (...) Muerte a Euclides. Vivan los sistemas formales.”*(p.39)

En ese sentido, se puede afirmar que este movimiento impulso en cierta medida la ausencia de la actividad geométrica, implicando entre sus efectos posteriores, el considerarse como tema que suele enseñarse en las últimas semanas del año escolar y por lo tanto, se termina presentando de forma aislada e independiente del resto de saberes. Otro factor que igualmente desfavorece su aprendizaje, es la manera y el cómo se exhiben los objetos geométricos debido a que no son muy asequibles para los estudiantes, porque en ocasiones se exteriorizan de forma intangible a una manipulación directa. Para apoyar este argumento, se puede revisar una idea de Mora (2011) que afirma:

Solo se genera gusto por las matemáticas cuando se tiene un acercamiento de tipo práctico con ella y dado su carácter abstracto no siempre permite una fácil aprehensión de sus conceptos en el aula de clase, creando desinterés, desgano y no despierta en el estudiante ningún tipo de emoción o sentimiento (p.98)

De acuerdo a la situación, se puede interpretar que el motivo principal puede atribuirse a la falta de dinamismo y a la desvinculación parcial con la realidad cotidiana del alumnado. Por ello es necesario, la búsqueda constante de alternativas para fortalecer su enseñanza, pues es importante que los profesores encuentren la necesidad de generar contextos¹ significativos al estudiantado, el contexto tiene que ver con los ambientes cercanos que rodean al estudiante y que le dan sentido a la matemática que aprende, es decir, próximos a su realidad y de esta forma ofrecerles situaciones matemáticas probablemente de manera activa, más allá de la sola manipulación de objetos abstractos y muy formales.

En vista de la problemática anteriormente aludida, se hace importante el gestar cambios en las prácticas pedagógicas. De esta manera, el diseño metodológico que contribuyó a la materialización de este documento fue el método de investigación acción, por ser un método flexible, recursivo y social. Asimismo, se adoptó algunas de sus principales características descriptoras y que la vez la particulariza en su estructuración y organización, por

.

consiguiente, se presentó la indagación a través de tres reportes, en donde se consigna cada las especificidades que conforman el trabajo de grado, de acuerdo con esta puntualización, a continuación se relatara de manera breve cada uno de ellos:

En *el reporte I* contiene una revisión de literatura, en donde se aprecie la descripción y dimensión de la problemática, abordando algunas conexiones entre el arte y el devenir de la geometría, en ese barrido histórico se tuvieron presentes algunas culturas y momentos importantes. En ese sentido, se realizó un acercamiento en particular a la propiedad de auto semejanza que poseen los fractales como un recurso para abordar el concepto de semejanza los cuales no ha sido muy indagado en la Educación Matemática colombiana, por consiguiente, no se incluye en los documentos oficiales emanados por el Ministerio de Educación de Nacional, ni los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, entre otros.

En *el reporte II*, se realizó un estudio de la población reflexionando cuestiones tales como geográficas, sociales, entre otras, de los diferentes actores involucrados (docentes-estudiantes) en la institución educativa Normal Superior Santiago de Cali, debido a que en este apartado, se diseñó y se ejecutó un conjunto de actividades, con su respectivo análisis preliminares, y además se consideró importante para el proceso, los resultados de unas encuestas dirigidas a la población de estudio aludida, con el objetivo de recolectar ciertos insumos que permitieron plantear un acercamiento a la geometría fractal en el contexto escolar, de manera intuitiva, a través del empleo de varios recursos manipulativos estos se entienden como un conjunto de medios y materiales que se caracterizan por ofrecer a los individuos una manera de representación del conocimiento, para la construcción y adquisición del conocimiento a través de experiencias con objetos tangibles, este concepto será abordado en un posterior apartado del presente proyecto; también se emplearon recursos tecnológicos para la exploración y construcción de un determinado número de fractales

Por último, en *el reporte III*, se estudiaron los resultados a la luz de la información recogida tanto del primer y segundo reporte. Luego, al final de esta indagación se proporcionaron varios elementos de reflexión, que por un lado, motivó la importancia de generar una revisión teórica y práctica que apruebe el diseño de propuestas de enseñanza que involucren conceptos actuales relacionados entre las matemáticas y el arte; los cuales favorecen en la participación y construcción activa de los estudiantes en su propio conocimiento matemático, asimismo permitió ampliar la mirada del estudiante con referencia a lo bvgen particular sobre los fractales, que describe en cierta forma algunos fenómenos

naturales de manera más fidedigna que los tratados clásicos a los tienen acostumbrados en la Geometría Euclidian.

REPORTE I: DOCUMENTACIÓN BIBLIOGRÁFICA

1.1. Naturaleza y descripción de la problemática

Sin duda, ante el desarrollo de culturas y costumbres de cada región, en el mundo se puede evidenciar de una u otra forma actividades matemáticas, claro está, de diferentes maneras de acuerdo a su contexto, y no ajena a esta situación emerge la geometría como ciencia empírica que surgió a partir de prácticas situaciones naturales correlacionadas con la medición del espacio de acuerdo al entorno que subyace, constituyéndose desde sus orígenes en una parte fundamental de la Matemática, esto se refleja en afirmaciones como la de Platón quien indico: “*Nadie entra si no sabe geometría, rezaba una máxima esculpida en el dintel de la academia*” (Ceballos, M; Higita; Rivera, G; Hernández y Arias, L 2001, p.19), según la tradición esta frase se leía en la inscripción de la entrada evidenciando la geometría como un aspecto relevante en su filosofía platónica.

A lo largo de la historia, la Geometría Euclidiana se ha considerado como la primera axiomatización que rebasa ampliamente los trabajos matemáticos de sus antecesores debido al orden que se suscribe en ella, a la selección de los principios o nociones comunes, a la presencia de postulados y proposiciones con los cuales se demuestran las proposiciones planteadas de manera articulada. Lo anterior se refleja en el texto los *Elementos* que datan en el siglo III a.C. Uno de los autores que apoya esta descripción es Proclo quien expresó al respecto: “*Los Elementos contienen una guía incontestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría.*” (Vega, L; 1991, p.6-7).

Por lo tanto, la organización de los *Elementos* influyó sobre el pensamiento científico, lo cual generó motivación al posterior desarrollo de otras geometrías y de nuevas disciplinas científicas. En ese orden de ideas, por un lado, es claro el papel de la geometría en la historia de las matemáticas y por su puesto de la humanidad, y se reconoce que su enseñanza es meritoria porque proporciona una visión del espacio, así como de las formas necesarias para que los estudiantes adquieran habilidades necesarias para afrontar y percibir su realidad visual.

Aunando a la situación, igualmente se resalta la necesidad de fortalecer los métodos de enseñanza que se trabajan alrededor de la geometría tradicional², debido a que generalmente se ofrecen pocas formas de representación de la realidad, en ese sentido desde esta geometría, así mismo las figuras y formas que se estudian generalmente son regulares e ideales, más bien anacrónicas de las que realmente se encuentran en la naturaleza y con mucha frecuencia se trabajan de forma fragmentada y descontextualizada. Sin embargo, en los Lineamientos Curriculares no se habla de geometría como asignatura, se hace referencia al **pensamiento espacial y sistemas geométricos**³. En ese sentido, emanados por el Ministerio de Educación Nacional ahora en adelante MEN o Ministerio de Educación Nacional (1998) afirma:

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales. (p.37)

Por lo tanto, los educadores tienen entre sus responsabilidades la misión de aportar y construir en los estudiantes herramientas para enfrentar un complejo y diverso mundo actual lo cual lleva a considerar que las instituciones educativas deben estar en estado de alerta para adaptar nuevos cambios, tanto en contenidos como en sus metodologías dado que actualmente en muchos currículos modernos hablan de conectar las matemáticas con la realidad cotidiana y con otras asignaturas; en acto seguido se considera entonces como una posible alternativa complementar la manera como se enseña la geometría tradicional en las escuelas. En este sentido, en Colombia, el MEN (2006) en sus Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas:

El estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial. (p.16)

²Se hace referencia a aquella geometría estudiada por Euclides de Alejandría.

³Al respecto una idea del MEN (1998) leída en la publicación de (Gallo, O y otros 2004)): En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, considerado como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales". (p.15)

En ese camino, conjugar el arte y las matemáticas siendo dos áreas en apariencia contrapuestas y de naturalezas discrepantes que normalmente se le adjudica al arte, sensibilidad y emoción, mientras que a las matemáticas se le relaciona comúnmente con la racionalidad, en ese sentido, cabe preguntarse si se pueden tratar simultáneamente estas cualidades cuándo se buscan y se establecen ciertas conexiones reales de las matemáticas con el arte que son poco trabajadas y exploradas como Giménez y otros (2009) afirman:

En efecto, no sólo desde las matemáticas escolares hay experiencia de reconocimiento de los valores interdisciplinarios, sino que en las facultades de artes, ingeniería y arquitectura en todo el mundo hay matemáticos preocupados por hacer real las matemáticas. Y aparecen genios artistas que buscan reconocer la fuerza de las ideas científicas. (p.7)

Por lo tanto, el presente trabajo sólo constituye un acercamiento intuitivo de la geometría fractal debido al requerimiento de un avanzado grado conceptual que implica tratar el tema, así como es comentado por Gallardo, S. y otros (2006) quienes afirman:

A pesar de la breve historia matemática de los fractales, éstos están teniendo gran importancia en multitud de aplicaciones (meteorología, medicina, geología, economía), si bien el aspecto estético es el que prima en muchos trabajos sobre los mismos. Esto es debido a la complejidad de este concepto que requiere matemáticas superiores. (p.1)

Entonces los objetos matemáticos que se denominados como fractales pueden ser vistos como un recurso fértil para explorar, debido a su características fundamentales; para empezar, el primer aspecto a considerar, es que son conjuntos “demasiado irregulares” fuera del ámbito de la Geometría Euclidiana, cuya dimensión no tiene porqué ceñirse al conjunto de los números enteros, y allí es donde se describe la dimensión fractal; la segunda, hace referencia a la irregularidad que se presenta a cualquier escala, en otras palabras, al apreciar las partes que lo configuran, se conserva un aspecto similar (no, necesariamente idéntico) que el que se presenta en su totalidad, al ser observado globalmente. Esta última propiedad mencionada se conoce como auto semejanza o auto similitud, (de ahora en adelante se optara por el termino de auto semejanza) en cierto modo es un caso particular de la semejanza.

A modo de hipótesis, el concepto de semejanza se emplea en las clases de matemáticas de forma generalmente convencional y poco variadas, limitadas a emplear únicamente razones de semejanza enteras (Razones enteras hace referencia al conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$) que puede tomar la constante de proporción o semejanza), para tal efecto en el mayor de los casos, puede implicar en los estudiantes ciertas dificultades en su proceso de aprendizaje.

Al respecto, Gualdrón (2006) manifiesta que cuando se realizan situaciones gráficas que se resuelven mediante el empleo de la semejanza en su desarrollo generalmente se confunden figuras parecidas con semejantes porque no se verifican las soluciones a través de la razón de semejanza y además llama la atención que comúnmente, se utiliza una relación de tipo aditivo para la ampliación, con el fin de evitar la multiplicación por una fracción debido a que se cree erróneamente que las constantes que no son múltiplos enteros no se asocian a figuras semejantes, este hecho se puede inferir tal vez por las frecuentes dificultades presentadas a la apropiación conceptual del significado del concepto de fracción, entendiendo sus términos y su símbolos, para ser asimilado como una cantidad numérica.

En vista de las algunas dificultades y obstáculos que se aprecian en el aprendizaje de la semejanza, entonces se pretende direccionar de manera transversalmente desde un enfoque artístico como elemento posiblemente motivador y contextual en el desarrollo del pensamiento geométrico necesario, y además para conocer de forma intuitiva y en cierta forma básica la evolución de nuevos conceptos en la conformación de las denominadas geométricas no euclidianas y entre ellas se encuentra la geometría fractal, por las numerosas aplicaciones en múltiples y diversas ramas de la ciencia y aún del arte.

De acuerdo a lo anterior, surge la siguiente pregunta problema:

¿Cómo a partir del diseño matemático y artístico de algunos fractales, se puede reconocer la propiedad de auto semejanza, en grado 9° de la Educación Básica en Colombia?

1.1. Justificación de la problemática

Incorporar en las clases de matemáticas el concepto de fractal, puede constituirse en una interesante alternativa de trabajo en el campo de la Educación Matemática y como un potencial recurso motivador para los educadores en la generación de interés por esta área pues desde hace décadas existe una decadencia en cuanto apreciación de esta área para apoyar este argumento, se puede revisar por ejemplo una idea de Freudenthal (1964) leída en la publicación Parra, C. y otros (2002) que dice:

En el sistema bourbakista la geometría no existe. En las revistas de crítica bibliográfica lo que se incluye bajo el nombre de geometría comprende menos del 5% del total de artículos de investigación registrados. En los programas universitarios de todo el mundo, la palabra geometría es apenas mencionada y los investigadores que podrían llamarse a sí mismo geómetras evitan el término por parecerles fuera de moda. (p.277)

De alguna manera, en la idea mencionada, se refleja también en periodos de la Reforma de las Matemáticas Modernas, según los Lineamientos Curriculares publicados por el MEN (1998) *“El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna.”* (p.37). Por consiguiente, la Geometría fue excluida del currículo escolar en varios países, como se menciona en y después se tuvo que rescatar su estudio de forma paulatina, lo que se considera aún en estado desarrollo. Asimismo, la incorporación de la geometría fractal podría ayudar de cierta manera a desmitificar en las escuelas el pensamiento de que las matemáticas son concebidas como una disciplina inmutable, en la cual, los conceptos y las ideas que se enseñan son productos ya finalizados y estáticos, al respecto una idea de Dienes (1964) leída en la publicación de (Hidalgos, Maroto y Palacios, 2004):

Actualmente son muy pocos los profesores de Matemáticas, cualquiera que sea el nivel en que trabajan, que se encuentren satisfechos del modo en que transcurre su enseñanza. Efectivamente, son muchos los niños que sienten antipatía por las Matemáticas. Antipatía que aumenta con la edad, y muchos los que encuentran dificultades casi insuperables en las cuestiones más sencillas. Hay que reconocer que la mayor parte de los niños nunca llegan a comprender la significación real de los conceptos matemáticos. En el mejor de los casos, se convierten en consumados técnicos en el arte de manejar complicados conjuntos de símbolos, pero la mayor parte de las veces acaban de desistir de comprender las imposibles situaciones en que las exigencias de las matemáticas escolares de hoy les colocan. (p.90)

En la afirmación anterior se puede interpretar que varios aspectos siguen vigentes en la actualidad, por ejemplo sobre el gusto o empatía que pocos niños manifiestan hacia las matemáticas en las escuelas colombianas. Entre los múltiples factores que explican este rechazo, uno de ellos es que en las matemáticas escolares se muestran la mayoría de los conceptos sin referentes reales, en otras palabras, hay pocas evidencias de las conexiones de las matemáticas, en este caso la geometría con la realidad.

De esta manera, dentro de la actividad humana la naturaleza de una u otra forma ha sido una fuente influyente en el desarrollo de conocimientos geométricos que permiten el estudio

de una gran variedad de conceptos y propiedades. Entonces se tiene que si se favorece en los estudiantes a redescubrir ciertos conceptos matemáticos partiendo de lo que haya a su alrededor, se puede encontrar la geometría presente en infinidad de lugares como por ejemplo, en las formas triangulares de las pirámides, la simetría que poseen los rostros, las formas poligonales de las cometas y las colmenas de abejas, entre otros muchos ejemplos que se podían mencionar.

En ese sentido, es clave el diseño y análisis de las actividades que de cierta forma impliquen elegir situaciones que pueden ser un punto de partida para trabajar fenómenos geométricos visibles y concretos, por lo tanto, justamente por las características de la geometría fractal y su proximidad a la naturaleza, se pueden aprovechar dichas propiedades espaciales para el diseño de las actividades que posibiliten el desarrollo de su creatividad y al mismo tiempo le permitan construir situaciones que favorezcan el vínculo entre la experiencia geométrica física y la geometría formal, resaltando las situaciones problemáticas sobre el tamaño, las formas, el crecimiento de los seres vivos, entre otras, para el estudio de la propiedad geométrica de la **auto semejanza**.

Pero a su vez por la complejidad de la misma, la incorporación de este objeto matemático no puede ser tan abrupta y descontextualizada, entonces es necesario hacerlo a través ambientes transversales a su conocimiento para que logren integrarse y ser significativos, en ese camino es prudente reflexionar que aquella experiencia se debería centrar en la exploración geométrica mediante el manejo de materiales manipulativos, en otras palabras que sean tangibles, en consecuencia se convertirá en un fértil terreno que genere la posibilidad de permitir y evidenciar algunas relaciones de contenidos geométricos, en el diseño y ejecución que realicen los estudiantes. Entonces en ese hilo de ideas, se puede afirmar que el empleo del arte se convierte en un eje innovador que se puede aprovechar para materializar el trabajo de aspectos geométricos, en el aula.

Al respecto Edo (2003) indica que: *“la contemplación y creación de formas artísticas a partir de líneas, figuras y cuerpos... puede ayudar tanto a intuir y construir nociones geométricas como a desarrollar sentimientos y emociones estéticas.”*(p.39). De esta manera, esta inmersión artística en la clase de geometría puede hacerse a través de los fractales. Un apoyo de esta idea aparece publicada en la revista Suma N°35, en la que afirma lo siguiente: *“El estudio de los fractales es un elemento motivador en el alumnado, debido a la estética*

implícita en sus construcciones y a lo sugerentes que pueden resultar sus diseños.”
(Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti, 2000, p.47)

A partir de los anteriores argumentos expuestos, se hace importante entonces concebir y contemplar la geometría como una herramienta de diseño, asimismo este hecho se hace alusión en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas publicados por el MEN (2006) quienes no ajenos aquella situación manifiestan algunos estándares que particularmente hacen referencia al objeto de estudio del proyecto, los cuales se presentan a continuación:

- Reconozcan y valoren simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño (*Al terminar tercer grado*).
- Construyan objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedan realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura (*Al terminar quinto grado*).
- Predigan y comparen los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte (*Al terminar séptimo grado*).

Dada la necesidad curricular colombiana de trabajar y establecer algunas relaciones entre las matemáticas y el arte, por ende se hace pertinente realizar esta indagación. Además actualmente existe un fuerte interés a nivel mundial por las aplicaciones de las matemáticas en todas sus campos, por lo que justifica realizar exploraciones matemáticas con ojos artísticos; y al mismo tiempo, considerar los objetos de la geometría fractal, que desde sus orígenes tuvieron una vocación práctica de servir como modelos para explicar la naturaleza y posteriormente manipularlos como un recurso que podría proporcionar algunos elementos para fomentar la importancia de formular y resolver problemas que se plantean en la vida diaria, igualmente como incentivo en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo para la formación de los estudiantes

En efecto, este trabajo de grado se caracteriza fundamentalmente por evidenciar algunos vínculos entre las matemáticas y el arte, por otro lado, emerge, dentro, la existencia de otro aspecto inherente a este proceso, y es el posibilitar la familiarización del alumnado con temas científicos recientes, consecuentemente, al empleo de algunas herramientas tecnológicas, las

cuales en pleno siglo XXI no se pueden desconocer, al contrario, subyacen para promover una alternativa de aprendizaje y ambientes propicios para el desarrollo de las habilidades y destrezas cognitivas que conduzcan la posibilidad de manejar dinámicamente diferentes objetos matemáticos en múltiples registros de representación que posiblemente favorezca una experiencia significativa en el proceso de trabajar la propiedad de auto semejanza, lo cual es difícil de lograr solamente apoyado a través de medios tradicionales, como el lápiz y el papel, a diferencia de Ambientes de Geometría Dinámica (ahora en adelante AGD), en el que pueden visualizar, manipular y explorar esos esquemas reiterativos que caracterizan la geometría Fractal.

En síntesis, el desarrollo y ejecución de esta indagación, tiene la intención de ver las matemáticas como un campo interdisciplinario por el surgimiento de las nuevas necesidades y consecuencias que puede acoger la geometría fractal que se puede aprovecharse en contextos académicos de la educación matemática.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general:

Reconocer la propiedad de auto semejanza a través de una mirada a la geometría fractal en contextos escolares.

1.3.2. Objetivos específicos:

- Caracterizar algunas relaciones históricas entre las matemáticas y el arte, dentro de la geometría fractal.
- Construir y explorar algunos fractales en distintos ambientes y materiales.
- Describir la propiedad de auto semejanza en la geometría fractal.

1.4. Marco de referencia del problema de la investigación

En este documento se inscribe el estudio de los elementos teóricos, que conciernen a la problemática propuesta, obedeciendo a distintos menesteres que giran en torno al conjunto de conocimientos y conceptos desarrollados en múltiples investigaciones, en el que se abordaron

los siguientes ítem: un devenir histórico entre las matemáticas y el arte que desemboque en una aproximación al concepto fractal, igualmente ver los fractales como recurso pedagógico y empleo de la tecnología para la enseñanza.

De acuerdo a la naturaleza de este trabajo, al pertenecer al campo de la Educación Matemática, es necesario realizar una mirada atendiendo a las estipulaciones emanadas desde el MEN, en el cual encuentra también de forma implícita algunos referentes curriculares que son base de sustentación.

1.4.1. Algunas ideas materializadas del desarrollo y evolución de la Geometría vista a través de lentes artísticos

Antes de entrar en materia, se realizó un efímero y breve recorrido en el devenir histórico de la geometría, poseedora de un prestigio de miles de años, por tanto, cabe reconocer su importancia y a la vez se retomaron algunas cuestiones aproximadas que evidencian determinados vínculos de carácter y orden históricos entre el arte y las matemáticas exhibidas en el tiempo y espacio, para al final aunar sobre la relación de la geometría fractal inmersa en contextos escolares presentada y expuesta en término artístico y así justificar su pertinencia desde un punto de vista histórico- artístico.

Dada intención de exponer solo algunos resultados, la descripción de esta sección se dio en términos reducidos, en cuanto a la gran cantidad de elementos e ilustraciones que se podrían haber mencionado en los diferentes momentos de las determinadas culturas y personajes tratados, en consecuencia, es valioso aclarar que no se pretende consolidar un estudio cronológico completo.

Miles de años anteriores a nuestra época actual floreció lo que se conoce hoy en día como Geometría; constituyéndose como una de las principales ramas de las matemáticas, que eventualmente desde sus inicios se entabló a partir de aspectos empíricos relacionados con el espacio, convirtiéndose en una parte fundamental de la cultura del hombre, de ahí se afirma que su origen se encuentra de forma intrínseca a los de la humanidad misma, debido a sus aspectos de carácter social y desde luego culturales, e incluso de manera no casual al evocar su procedencia, se aprecia que proviene del latín *geometriā*, que deriva de raíces *geo* (tierra) y *metriā* (medida).

No obstante, la Geometría desde sus principios ha mantenido su verdad en constantes cambios a medida que se ha desarrollado, reconstruyendo una gran pluralidad de caminos a través de su historia y evolución, autores como Kline (1992) comenta: *“El carácter de necesidad adscrito a las verdades de la matemática, y aun la peculiar certeza a ellas atribuida, son ilusión”* (p.117); Así pues, relatar una aproximada historiografía fidedigna de la Geometría se convierte un trabajo arduo y extenso porque el carácter de verdad se encuentra condicionada por el tiempo y el contexto cultural.

Por lo tanto, surge el interés de escrutar entre todo ese cúmulo de información de conocimiento, algunas conexiones reveladas por diferentes autores e investigadores en las que se evidencia situaciones que convergen entre el arte y las matemáticas. Al respecto Vasco (2006) afirma lo siguiente

En primer lugar, no es correcto mantener a distancia las ciencias y el arte. En un libro magistral, Nelson Goodman propone que no existe “el dado, sino que hay al menos cuatro maneras de construir mundos, muy relacionados entre sí: las filosofías, las ciencias, las artes y el sentido común, tanto en la percepción normal como en el discurso cotidiano. Más que maneras opuestas, son maneras complementarias y finalmente entrelazadas. (P.13)

Por consiguiente, la actual pesquisa involucra de forma paralela determinados aspectos de carácter artísticos expresados en múltiples manifestaciones de manera explícita e implícita, en la pintura, en la arquitectura y la escultura; puesto que a partir la literatura, existe un multitud de antecedentes de diferentes épocas y civilizaciones que respaldan estas ideas, así como lo manifiesta Zalaya (2005) afirmando:

Estos vínculos se presentan en alguna medida en el Arte de prácticamente todas las civilizaciones. En efecto, en cada caso el número de estas relaciones y su nivel de complejidad dependen del nivel cultural alcanzado por cada civilización concreta y sobre todo del alcance de sus conocimientos matemáticos. Esto se constata en lo evidentes que son estas relaciones en civilizaciones como la egipcia o especialmente en la griega. (p.271)

Para empezar, se puede rastrear de la historia que muchas de las situaciones experimentadas por el ser humano, aún en la edad primitiva tienen que ver con la necesidad de descubrir y el describir parcialmente el mundo inmediato, en efecto la principal herramienta en aquel entonces se dio a través de los sentidos, permitiéndoles contemplar el medio ambiente que lo rodeaba para enfrentarse a los problemas eventuales que se derivaban en su vida cotidiana. Por lo tanto, ese camino de exploración y adaptación de su entorno

implicó en cierta manera el empleo de algunos conceptos geométricos que se originaron para responder en cierta medida las necesidades presentadas propias del contexto.

1.4.1.1. En la Prehistoria



Figura 1: Arte rupestre

El ser humano, en su inexperiencia, clasificaba de alguna manera todas las formas y objetos de manera intuitiva e informal. Esto hecho se puede observar en algunas pinturas, artilugios de cerámica y utensilios hallados que conciernen a las épocas de la prehistoria.

En el **periodo paleolítico** superior, una de las fase de la prehistoria que se caracterizó por el empleo de piedra tallada y que se extendió cronológicamente a través del año 33.000 a.C. Hasta el año 9.000 a.C. Entre los mejores exponentes del arte, en este periodo según la literatura, se halla en las pinturas rupestres europeas. (**Véase figura1**)

El tema que predominó en ellas fue la representación de animales como se puede apreciar el bisonte plasmado en aquella piedra; de acuerdo a expertos en la materia la elaboración involucró de estas pinturas empleo combinaciones entre minerales, tierras, y carbón mezclados con grasas y sangre de diferentes animales.

En esta pintura, se puede vislumbrar de una u otra forma algunas ideas matemáticas básicas relacionadas con las proporciones entre la figura animal representada con sus partes constituyentes, debido a que se puede percibir un adecuado manejo del tamaño de cada uno de los elementos que lo configuran y también se observa el uso de elementos geométricos como rectas paralelas y curvilíneas, entre otras. Este hecho Zalaya (2005) lo confirma:

Durante el Paleolítico se desarrollaron otras facetas artísticas. La que se considera más importante es el **Arte Rupestre** y, aunque su principal temática fue la representación de figuras animales y antropomórficas, también se realizaron algunas con signos geométricos. En ellas se puede vislumbrar nuevamente la utilización de conceptos geométricos. Además, se realizaron pinturas que son geometrificaciones de figuras de animales o de hombres. (p.20)

Dejando el periodo paleolítico atrás, la presente indagación incursionara someramente en el **periodo Neolítico**, el cual abarcó aproximadamente desde el año 6.000 hasta el año 3.000 a.C. En esta era se pueden rastrear de nuestros antepasados la usanza de conceptos básicos geométricos de forma empírica, un ejemplo es la olla de Tajos de Cacín (**véase figura2**),



Figura 2: Olla de Tajos de Cacín

aquel utensilio se consideró como una de las cerámicas más representativas de Neolítico peninsular, decorada a base de figuras geométricas como círculos, triángulos y rectas. *“En estas cerámicas se utilizaban formas de otras superficies cuádricas, la sencilla esfera, elipsoide, el paraboloide y incluso la del hiperboloide de una hoja. También, tanto en su decoración como en sus formas, se puede ver la aparición de otros conceptos matemáticos más genéricos (...)”* (Zalaya, 2005, p.21)

La olla de Tajos de Cacín se encuentra ubicada actualmente en el museo Arqueológico Nacional de Madrid, hecha arcilla en forma globular con tres asas verticales decorado en impresión cardial, proceso que consistía en una técnica de punzar una concha hasta darle la forma necesaria.

Después de ojear e ilustrar de manera muy breve dos ejemplos pertenecientes a la era Prehistórica, cabe mencionar que no se puede desconocer la multiplicidad de elementos que figuran con características similares a los seleccionados, que por cuestiones meramente de tiempo no se mencionaron. Abandonando la prehistoria, el foco de esta búsqueda se trasladó a Mesopotamia y Egipto, siendo ambas civilizaciones elementos previos y fundamentales por sus aportes intelectuales, artísticos y matemáticos para la evolución posterior de la sociedad occidental y mundial.

1.4.1.2. Mesopotamia

Considerada por varios cronistas como la cuna de la civilización. El término de Mesopotamia en griego hace referencia a tierra entre ríos, debido a la localización de importantes fuentes como el Tigris y el Éufrates hasta el río Nilo, la fortuna natural de estas tierras, siempre ha atraído a pueblos procedentes de las regiones vecinas más pobres, y su tradición cuenta continuas migraciones e invasiones pero entre los diversos pueblos que lo habitaron y que desde luego se situaron cerca de las riveras de los ríos mencionados fueron los sumarios, los persas, los babilonios entre otros, según los historiadores, este hecho se

presentó por la fertilidad y riqueza de dichas tierras. A continuación, se enunciarán brevemente algunos de los trabajos desarrollados por los pueblos mencionados.



Figura 3: *Escritura cuneiforme*

Los sumerios se instalaron en el sur de Mesopotamia los cuales se caracterizaron por su escritura conocida como cuneiforme, debido a la forma acuñada que tenían sus signos. Al principio representaban ideas, luego adquirieron características fonográficas, es decir, sonidos equivalentes a sílabas.

Ahora bien, apreciando aquel prestigio (**véase figura 3**) se puede identificar en esta escritura algunas representaciones de figuras geométricas como diferentes triángulos, rectas paralelas y secantes.

Otro importante pueblo que se desarrolló en estas tierras fueron los persas, quienes según los historiadores se asentaron en la Meseta del Irán, en el Asia Central, logrando también conformar un gran imperio; su economía habitualmente se basaba en cuestiones referidas a la agricultura, a la irrigación de las aguas de las montañas, a la extracción de minerales y al pastoreo.

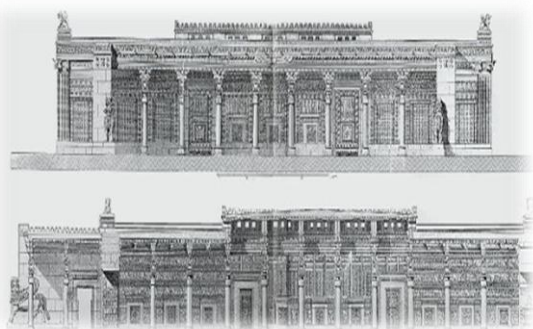


Figura 4: *Ciudad de Persépolis*

Igualmente, los persas demostraron grandes desarrollos en diferentes ámbitos. Entre ellos se destacaron en el área de la arquitectura, de manera que se refleja en la ciudad de Persépolis, en ella se halla el palacio de las 100 columnas, una construcción con planta cuadrada de 60m de lado y 20m de altura, en la que 36

columna en seis filas, que sostenían la cubierta. (**Véase figura 4**)



Figura 5: *Friso encontrado en la ruinas de Persépolis.*

En esta obra, se denota que para su construcción se movilizaban varios conocimientos matemáticos, debido

a que se aprecian diferentes formas geométricas tales como cuadrados, rectángulos, rectas, y también se pueden determinar algunas relaciones simétricas y proporcionales entre todos los elementos que las componen. También germinaron otros aspectos artísticos -matemáticos que según Zalaya (2005) *se observa un detalle de un friso situado en las ruinas de esta ciudad. En esta faceta de la Escultura, la de los relieves, los artistas persas fueron unos verdaderos maestros.* (p.25)

Aquellas ruinas se convierten en un ejemplo palpable en donde se observa transformaciones isométricas, así configurándose en lo que se conoce como un friso⁴.

Continuando con la exploración de los pueblos más representativos de Mesopotamia, tenemos la cultura de Babilonia, puesto que se ha considerado de acuerdo a su infraestructura como la más resplandeciente y monumental de la historia antigua que ocupó a Mesopotamia en el periodo Neobabilónico.

La pretensión de su arquitectura suministró a la humanidad un legado artístico (**véase figura 6**); por consiguiente en aquella urbanización se destacan amplias avenidas rectas y extensas plantas cuadradas, donde se encuentra una gran red de canales que mezclaba a los ríos Tigris y Éufrates, favoreciendo al cultivo y a la navegación. En ese sentido un aspecto realmente interesante para el diseño y construcción de la ciudad Zigurat, fue el empleo de cierta manera de algunas ideas e intuiciones geométricas desarrolladas, aun así de forma rudimentarias, según Peña (2010) afirma

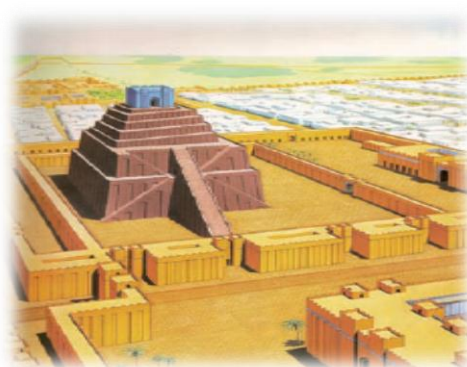


Figura 6: Reconstrucción ideal del Zigurat de Babilonia

También se tiene nociones geométricas en la civilización mesopotámica, constituyendo los problemas de medida el bloque central en este campo: área del cuadrado, del círculo (con una no muy buena aproximación de $\pi = 3$), volúmenes de determinados cuerpos, semejanza de figuras, e incluso hay autores que afirman que esta civilización conocía el Teorema de Pitágoras aplicado a problemas particulares, aunque no, obviamente, como principio general. (p.66)

⁴ Esta figura se recuperó de la misma fuente que la figura 4. En matemáticas y frecuente en arquitectura, arte y decoración es el cubrimiento de la región del espacio de longitud infinita pero de anchura finita, limitada por dos rectas paralelas, derivado a partir del empleo de movimientos en el plano a una determinada figura o agrupación de figuras que combinan algunos movimientos tales como la traslación, rotación y reflexión permiten obtener distintos diseños se les conoce como frisos.

Con referencia a la cita anterior, se puede decir que la geometría desarrollada hasta este entonces se encontraba muy sujeta a necesidades meramente empíricas, lo que le permitió construir su ciudad.

1.4.1.3. La cultura Egipcia

De acuerdo a la tradición de una gran cantidad de historiadores, Egipto data alrededor del año 4000 a.C. Y su máximo esplendor se alcanza en el 2500 a.C

Ahora bien, sin pretender hacer caso omiso a las culturas previamente aludidas, universalmente se ha estimado que el acrecentamiento de la geometría se intensificó en la civilización egipcia, autores al respecto como Parra, C. y otros (2002) mencionan: *“Las historias de la geometría localizan su origen en Egipto, ligado a un problema práctico: la reconstrucción de los límites de los terrenos después de la crecida del río Nilo”* (p.273). En ese sentido, se podría afirmar que posiblemente el uso de nociones geométricas al menos de manera intuitiva, se intensificó en cierta medida desde que probablemente el hombre dejó de ser nómada, para establecerse en regiones específicas y desde luego afrontar la naturaleza que lo envolvía, determinando de alguna forma sus prácticas.

De acuerdo a los argumentos anteriores, el desarrollo de la geometría en la civilización egipcia se dio en parte por los impresionantes métodos empleados en la Agrimensura, debido a la reconstrucción de los linderos ubicados en los terrenos ribereños al río Nilo, en el Antiguo Egipto afectados por las condiciones climáticas asociados a su ubicación geográfica, debido a las crecidas anuales del río referido, que influyó en sus habitantes en el posterior desarrollo y movilización de cuestiones referidas a la medida de áreas y al espacio circundante al momento de restablecerlos, pues al desbordarse borraba las señales que indicaban los límites de las parcelas de cada propietario, entonces la naturaleza de la geometría se surge para este caso como una herramienta útil meramente empírica, con la finalidad de explicarse, controlar y adaptarse los fenómenos que provenían de la naturaleza.

Se destacaron los egipcios en el desarrollo en artes plásticas, por su calidad y variedad de técnicas pero al hablar de Egipto implica hablar de una de las obras más portentosas edificadas y levantadas por el ser humano, las pirámides configurándose en el emblema

principal de esta civilización, las cuales se establecieron como uno de los ejemplos más claros en donde la matemática, la astronomía y el arte se conjugan. Estos monstruos monumentales resaltan por su forma geométrica de “pirámide” las cuales eran templos y tumbas que corresponden a los grandes faraones como por ejemplo *Keops*, *Kefren* y *Micerinos*.



Figura 7: Pirámide de Gizet

La pirámide de Gizeh (**véase figura 7**) fue diseñada y construida con 2,3 millones de bloques de piedra, que tuvieron que ser medidos, cortados, pulidos, transportados y puestos de forma exacta para conformar aquellas titánicas obras, por ende sigue siendo hoy en día un misterio.

Al respecto Zalaya (2005) afirma:

Algunos investigadores han conjeturado con **las medidas geométricas de estas pirámides diversas relaciones matemáticas**. Por ejemplo, los ingleses Taylor y Smith descubrieron que el perímetro dividido entre el doble de la altura resulta 3,14159, esto es el número pi con 5 decimales exactos. Por otro lado, aventuraron que la longitud lateral de la pirámide es la diezmillonésima parte de la mitad del eje terrestre. Estas relaciones y otras siguen en el misterio hoy en día. (p.23)

Debido a la inmensa popularidad y prestigio que alcanzaron en cuanto a la formación matemática se refiere, aquella fama se desplegó por todo el mundo de aquel tiempo y de esta manera, muchos eruditos procedentes de otros países se desplazaron hacia Egipto.

1.4.1.4. La Antigua Grecia

Nación ubicado en el sureste de Europa, gran parte de la cultura occidental se deriva de ellos, quienes sentaron las bases y los más importantes principios de la geometría y la filosofía, el legado de su larga historia se refleja en la matemáticas, literatura, arquitectura, entre otros aspectos culturales.

Un aspecto que cabe destacar y mencionar de acuerdo a los intereses del presente estudio fue la fuerte influencia de la cultura egipcia que llegó al punto de ser parte de la antigua

Grecia, según los historiadores⁵ puede decirse que de alguna manera se empezó a partir del viaje realizado por Thales de Mileto, considerado como uno de los primeros pensadores griegos, quien vivió alrededor del año 600 a.C. Y residiendo una larga temporada de su vida en Egipto, instruyéndose de los escribas y sacerdotes. De hecho, apoyando la idea anterior Parra, C. y otros (2002) comentan: “...*De allí es exportada a Grecia, posibilitando a Thales de Mileto la vuelta a Egipto para calcular la altura de la gran pirámide a partir de la mediación de su sombra...*” (p.273).

Atendiendo la cita previa, los autores hacen referencia a la transferencia de la geometría de Egipto hacia Grecia, a través de Thales, que de cierta manera se configuró como un puente entre la geometría empírica (en la que prevalecían aspectos que generalmente limitaban a cuestiones tangibles y utilitarios, por lo tanto, presentaba en la imposibilidad de decretar diferencias entre lo que es real y lo que es aproximado) y una nueva forma de percibir la geometría, desplegada sustancialmente de referentes tangibles. De nuevo, al respecto Parra, C. y otros (2002) afirman:

Sin embargo, el hecho es que en la geometría griega se razona rigurosamente sobre trazados cualesquiera; no se está hablando de un dibujo en particular sino de cualquier dibujo que posea las propiedades consideradas en el enunciado, Y, de esta manera, constituye un hito fundamental en proceso de separación de lo sensible. (p.274)

Por lo tanto, la geometría adquiere un valor distinto. A continuación se realiza brevemente en la manera que se describe ese cambio.

1.4.1.4.1. Geometría Euclidiana

A pesar de que los egipcios y babilónicos construyeron ciertos conocimientos geométricos particulares ligados a situaciones reales, sin embargo, se puede afirmar que la geometría para los griegos, adquirió un estatus diferente, donde se empezó a considerarse realmente como una ciencia, a partir del quizás matemático más famoso de la antigüedad, Euclides de Alejandría, quien vivió alrededor del año 300 a.C, quien tomó las estructuras de deducción que se evidenciaron en la lógica aristotélica, lo que le permitió recopilar, organizar, argumentar y sistematizar los conocimientos matemáticos de su tiempo y antecesores, utilizando un discurso axiomático en el cual una vez establecida ciertas cosas, de ellas se

⁵ Según Proclo: “Thales fue el primero que, habiendo estado en Egipto, introdujo esa doctrina (de la Geometría) en Grecia”.

sigue otras por necesidad, conectadas estructuralmente mediante la deducción. Para hacer entrega de su obra cumbre consolidada y bautizada en griego $\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$ y en latín *elementa*, por esa razón se la conoce como *Los Elementos*.

Este tratado se encuentra comprendido por 13 libros, 130 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes, 465 proposiciones, 19 porismas y 16 lemas, *Los Elementos* se establecieron como la base y el punto de partida para el desarrollo de los fundamentos de diversos campos de la matemática como por ejemplo la geometría plana, la teoría de la proporción; la teoría aritmética; la conceptualización de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad, la clasificación de rectas expresables y no expresables en términos de razones, y la geometría del espacio.

Esta importante e inmemorable creación, ampliamente conocida y divulgada se convirtió en el ejemplo clásico más antiguo e histórico de una ciencia deductiva sistemática que consecuentemente ha tenido más de 1.000 ediciones traducido a múltiples idiomas desde su primera publicación en imprenta en 1482 y siendo el segundo en número de ediciones publicadas después de la Biblia.



Figura 8: Escuela de Atenas

Bien dice Sarton: Euclides es como Homero; así como todo el mundo conoce la *Ilíada* y la *Odisea*, del mismo modo todo el mundo conoce los *Elementos*. ¿Quién es Homero? El autor de la *Ilíada*. ¿Y Euclides? El autor de los *Elementos*. (Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, p. 29]” citado en Ruiz. A, 2003, p.70)

En resumen, el trabajo riguroso y formal que se contempla en *los Elementos*, por un lado influyó innegablemente en la construcción de la

Geometría Euclidiana consolidando universalmente a Euclides como su fundador (sin embargo, es pertinente enunciar que Euclides no fue su absoluto creador, debido a que muchas de las definiciones, axiomas o postulados empleados en su trabajo datan de tiempos anteriores, no obstante su valor se constituye por la capacidad de sintetizar magistralmente los saberes geométricos de sus antecesores) y además de cierta manera proporcionó luces para el desarrollo de otras ciencias, al respecto Parra, C. y otros (2002) afirman: “*Veinte siglos más tarde Newton toma Los elementos de Euclides como modelo para la organización*

de sus Principia, en los que expone su teoría de gravitación.” (p.275), es decir, que los *Elementos* igualmente influyó y sirvió de prototipo para otros científicos y filósofos.

En cuanto al arte, los griegos marcan un referente importante para la civilización occidental que perdurará hasta nuestros días, en la pintura desarrollaron extraordinario trabajos de belleza y de bastantes matemáticas (**véase figura 8**), al respecto Mariño (2004) afirma:

Esta famosa pintura de Rafael Sanzio (1483-1520), *La Escuela de Atenas* (1510), puede verse como un tributo a la razón y a la filosofía, incluyendo la matemática. En centro vemos a Platón y Aristóteles. Platón pensaba que los objetos matemáticos tiene existencia en sí mismo, independientes de que sean descubiertos por humanos. Aristóteles parece estar más interesado en su propio contorno. En primer plano, a la izquierda, vemos a Pitágoras enseñando un libro. A la derecha a Euclides dando una clase de geometría; en su clase usa un compás. Todo esto sucede dentro de un edificio clásico muy elegante y simétrico, con un artesanado con una bella teselación, y con un piso con un atractivo de diseño (...).El arco superior, primer plano, tiene un patrón de cinta que es muy griego (...) (p.vii)



Figura 9: *Venus de Milo*

En la obra se puede apreciar algunos de los matemáticos y filósofos más ilustres y determinante de la historia del conocimiento, y también el vínculo estrecho entre ambas ramas del saber plasmadas en una pintura, donde la geometría se vincula perfectamente como herramienta de diseño que permitió recrear la famosa Academia de Atenas, en su esplendor. También cabe volver a mencionar que no por nada la geometría adquirió un valor fundamental en este tiempo casi que se convirtió en un requisito indispensable para asistir a dicha academia.

Otro aspecto interesante que se dio en esta cultura fue en el tema relacionado con las esculturas (**véase figura 9**), pues el ideal de divinidad de los griegos estaba impregnado en la armonía de las medidas y proporciones, siendo el cuerpo humano el fundamento esencial de toda belleza y toda proporción por ejemplo **Venus de Milo**. (aprox.130 a 100 a.C.). Es una de las esculturas más representativa del período Helénico, paradigma de la belleza y sensualidad femenina, admirada por todos por la anatomía humana y los rostros ganaron definitivamente en expresividad y realismo.

1.4.1.4.2. El Renacimiento

En el siglo XV y a lo largo del XVI se liberó un conjunto de conocimientos de cualquier orden que se denominaron bajo el nombre de Renacimiento. Esta época se caracterizó, por un acrecentamiento de nuevos espacios históricos y geográficos que quiere decir ante todo, una resurrección de las antiguas civilizaciones de Grecia y de Roma. Así pues, la ideología básica del Renacimiento consiste en la ocupación del hombre en el lugar central del Universo; junto con él el arte, la literatura y el conocimiento de la naturaleza, Martínez (2014) afirma:

Se maneja la idea de que no hay nada más *bello* que la misma representación de la naturaleza, dejando atrás toda representación esquemática de la divinidad. Como se especifica en (Franco, 2003), el artista renacentista se veía atraído por la ciencia, al entender que a través de ella se podía lograr una representación fiel y bella de la naturaleza. De ahí que las matemáticas, explícitamente la geometría, logran ser el elemento principal en la labor del artista. (p.97)

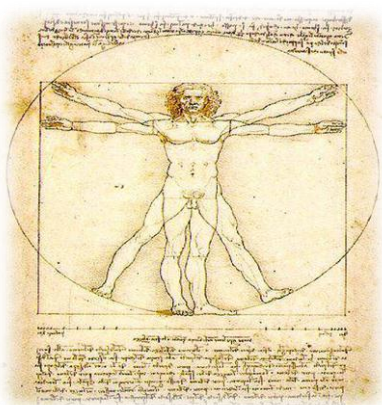


Figura 10: El hombre de Vitrubio

Por la necesidad de representar el mundo real, se presentó en este movimiento grandes personajes que marcaron la historia tales como Leonardo Davinci y Alberto Durero, entre otros grandes maestros en la pintura, los cuales expresaron la idea de que las matemáticas y arte tienen relaciones fuertes y estrechas.

Leonardo Da Vinci (1452-1519), distinguido mayoritariamente por sus creaciones: La Gioconda y La Ultima Cena; también fue científico e ingeniero y artista quien realizó cuantiosas contribuciones en diferentes campos del conocimiento y de las matemáticas, expone una visión del hombre como centro del Universo (**véase figura 10**) el hombre de Vitrubio inscrito en un círculo y un cuadrado. En ese sentido Giménez y otros (2009) afirman:



Figura 11: El Partenón

Las proporciones condesadas en El hombre ideal de Leonardo, las relaciones normales en el cuerpo humano de una persona adulta, se han usado desde la Grecia clásica como canon artístico para la persona ideal (con $\Phi \approx 1.618$): Altura total=brazada (distancia entre las puntas de los dedos con los brazos

abiertos)=8 palmas=6 pies=8 caras=1.618x altura ombligo (distancia del suelo al ombligo) (p.111)

Entonces, el discernimiento del concepto de belleza fue aludido a la proporción aurea, en ese sentido, se estableció esta relación en el cuerpo humano, pues para los antiguos griegos el número “fi” o áurea, denotado con la letra griega minúscula (Φ) los acercaba a la divinidad, igualmente los griegos ha traído la atención de sociólogos, artistas matemáticos, científicos, y filósofos, por lo tanto, este número se ve incluido en otros campos del conocimiento tales como en las pinturas, en algunas partituras musicales y estructuras arquitectónicas.

No existe documentación histórica que señale que el número fue utilizado conscientemente pero en cierta medida se pueden determinar varios ejemplos que en el que el arte griego se relaciones con el numero áurea, un ejemplo claro del empleo se dio en el en el área de la arquitectura, Partenón, en esta obra, se puede vislumbrar la construcción inscrita en un rectángulo áureo donde se puede trazar con regla y compás, (**Véase figura 11**).

El espiral que se dibuja se denomina “espiral de Durero” en honor al considerado por muchos como el artista más representativo del Renacimiento Italiano, Alberto Durero (1471-1528), quien vivió de manera paralela con respecto a Da Vinci.

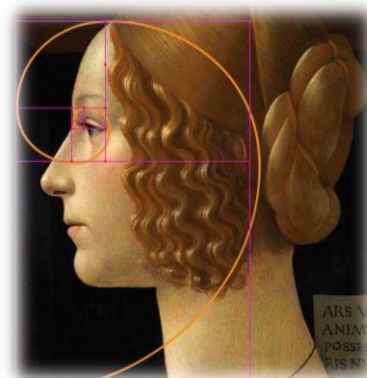


Figura 12: la Giovanna (Mora, 2011 ,p. 93)

El artista Duero, se destacó por indagar y participar en los esfuerzos de incorporar el empleo de proyecciones verticales y horizontales en las proporciones del organismo humano, empleando conocimiento matemático con el fin de instituir una base teórica circunscripta en un tratado artístico que admite obtener un aproximación de tipo real con la geometría, confiriendo los objetos matemáticos de naturaleza abstracta a cuestiones de utilidad palpables, como es el caso del espiral, que inmerso en la Giovanna, quien perduró para la descendencia gracias a Doménico Ghirlandaio. (**Véase figura 12**).

Al respecto de la pintura anterior, Mora (2011) afirma: “*Ordena el rostro del retrato de tal forma que la parte inferior de su rostro se encuentre en el cuadrado más grande, siguiendo con su cabello y en el próximo cuadrado se ubica su frente, para luego seguir con*

el tabique y terminar con sus ojos, su mirada hacia el infinito como un mensaje implícito que transmite la espiral de Durerro.”(p.4)

Así se evidencia una relación entre la pintura y la geometría, vinculando el espiral y la sección áurea con el retrato de la Giovanna, sin embargo Euclides fue el primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo, demostró la proporción que Platón había llamado sección y que más tarde se conocería como sección áurea.

Muchos matemáticos pensaron que la Geometría Euclidiana era la correcta idealización de las propiedades físicas del espacio debido a que se creyó perfecta y consumada durante dos mil años; aún de alguna siguen siendo vigentes sus contenidos en la enseñan. No obstante, a mediados del siglo XIX se emprende uno de los cambios más trascendentales de la historia de las matemáticas, el momento decisivo del descubrimiento de nuevas y fundamentales ramas de las matemáticas que impulso a estudiar absolutamente la visión del mundo corporal con relación a la geometría.

1.4.1.4.3 Geometrías no Euclidianas

La razón principal que se exhibe con respecto a la aparición de nuevos conocimientos desarrolladas surge de las críticas más relevantes hechas del sistema deductivo de los *Elementos* de Euclides, en particular con relación al quinto postulado del libro I, que formula la imposibilidad de que por un punto exterior a una recta pueda ser trazada más de una paralela a dicha recta, que a su vez difiere sustancialmente de los otros postulados, está característica inclinó y generó interés y malestar por parte de una gran comunidad de matemáticos de su tiempo, al respecto Kline (1992) afirma:

(...) El axioma de las paralelas en la forma establecida por Euclides se pensaba que era demasiado complicado. Nadie dudaba realmente de su verdad, y sin embargo carecía de la cualidad obligada de los otros axiomas. Aparentemente, al propio Euclides no le gustaba a su propia versión del axioma de las paralelas, ya que no lo utilizó sino después de que hubo demostrado todos los teoremas que pudo sin él. (p.1139)

Así pues, su forma se asimilaba más a una proposición que a un postulado, además produjo la sensación de no ser auto evidente, al contrario su estructura lo hacía concebir de manera independiente a los demás, por su especial complejidad por lo tanto, germinaron situaciones y acciones que según la Introducción de Luis Vega de los *Elementos* de Euclides, entre su comentarios hace alusión al controversial postulado por parte de los comentaristas y editores.

Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema hechizado de dificultades, que Tolemeo se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere de varias definiciones y teoremas. Más aún: La proposición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema (Proclo, Com.191, 21 ss.).

Después de muchos años de intentos encaminados por demostrar el quinto postulado deducido de los otros postulados o de sustituirlo por otros más sencillos, los geómetras construyeron un nuevo marco teórico que revolucionaría con el tiempo la percepción de las matemáticas, conllevando al surgimiento de un colectivo bajo el nombre de geometrías No Euclidianas. También salen a reducir cuestiones referidas con la misma realidad, por ejemplo Parra, C. y otros (2002) afirman:

La idea de que la geometría euclidiana es el único modelo posible del espacio físico sucumbe, (...). La geometría queda fragmentada en una pluralidad de teorías alternativas, en función de axiomas seleccionados, que puedan dar cuenta de problemas planteados en el espacio físico. (p.276)

Tal vez, en ese sentido por las razones anteriores se generó un movimiento de mayores emanaciones y más revolucionario desde la época de los griegos, el desarrollo otros tipos de geometrías por matemáticos y otros, "*Durante el siglo XIX varios matemáticos, entre ellos Nikolai Lobachevsky (1792-1856), Augustus Ferdinand Mobius (1790-1868), Janos Bolyai (1802-1860) y Georg Riemann (1790-1868), comenzaron a cuestionar que solamente puede haber una geometría, suposición que se había aceptado desde los griegos*"(Mariño, 2002, p.23). Por lo tanto, arrojaron entre sus resultados múltiples geometrías tales como: Geometría Diferencial, Geometría de Riemann, Geometría Proyectiva y métrica, Geometría analítica, Geometría topológica, y Geometría fractal, entre otras.

En un momento, aquellas repercusiones geométricas y derivaciones obtenidas ampliaron y enriquecedoras sin número campos del conocimiento pero ineludiblemente incursiono en los círculos artísticos, aludiendo a la interdisciplinariedad señalada en el corto devenir histórico de la geometría euclidiana que se ha intenta develar, así pues convirtiendo el arte en una especie de trampolín de las geometrías no euclidianas.

Por consiguiente, Las contemplaciones de las nuevas geometrías son apropiadas por buena parte de los artistas del siglo XX, entre los porqués, se matiza sobre el nuevo espacio que supone un rechazo a la perspectiva estática y lineal, en cierta forma contraponiéndose el

concepto de belleza y estética del pensamiento Renacimiento, por lo tanto, surge un momento importante para observar la naturaleza y entender el mismo arte.

1.4.1.4.3.1 *El cubismo*

Este movimiento es un estilo de concepto estético de la pintura contemporánea, además es una se constituyó como una nueva manera de expresar la realidad en aquel tiempo, que se desarrolló inicialmente por artistas como Braque y Picasso en el periodo de 1907 a 1908 y que rápidamente fue adoptado y por muchos otros artistas. Surge así un amplio movimiento artístico que, si bien está originalmente centrado en París y luego se desplegó a niveles internacionales.



Figura 13: *Fábrica de Horta del Ebro" (1909), de Picasso*

El cubismo es la más radical y revolucionaria forma de representación desde el Renacimiento, pues abandona el punto de vista único y fijo que dominó la pintura europea durante siglos por una multiplicidad de puntos de perspectiva que simultáneamente, representan los objetos los en movimiento y figuras deformadas en la misma pintura.

El cubismo, una nueva forma de pintar, por medio de figuras geométricas e incluso representando todas las partes de un objeto en un mismo plano (**véase figura 13**). En esa idea Mariño (2004) afirma:

Una idea básica del cubismo es que a los objetos se les puede ver simultáneamente desde diversos puntos de vista, de manera similar a la teoría de la relatividad de Einstein en la que los eventos son interpretados simultáneamente de maneras diferentes por diversos observadores. (p 8)

Por lo tanto, se opone con el pensamiento renacentista de la perspectiva y la representación fiel de las cosas reales, por ejemplo, en la pintura de Picasso denominada como *Fábrica de Horta del Ebro"* (1909), se puede contemplar formas y figuras geométricas como cubos y paralelepípedos inscritos en un fondo que aparece en primer plano, en la que se puede asociar la idea relatividad.

De manera paralela en el tiempo que se extendió el cubismo, también se destacaron otros artistas con ideas revolucionarias, al respecto Zalaya (2005) afirma:

La sucesión de tendencias y movimientos en las décadas finales del siglo XX ha sido vertiginosa. Algunas de sus obras y artistas sí que han realizado un arte conceptualmente matemático. El ejemplo más conocido de este tipo de arte es Mauricius Cornellius Escher.” (p.101)

1.4.1.4.4. Maurits Cornelius Escher (1898-1972)



Figura 14: *Serpientes, grabado en madera en el 1969*

Nació en Leeuwarden, Holanda. Este artista creativo y que hoy hace que hoy día tenga la divulgación y el consentimiento por parte de algunos matemáticos y de de artistas, posiblemente este hecho se presente porque este hombre penetra el alma de la matemática para procrear extraordinarias obras únicas. Entre sus obras se evidencia un profundo conocimiento matemático y geométrico. En las pinturas realizadas por Escher se logra examinar algunos teselados que tomó como referencia a los números ornamentales mosaicos de Alhambra que se encontró cuando viajó al sur de

España, en los cuales hacen uso del empleo de polígonos regulares e irregulares, en ese sentido, (véase **figura 14**) se puede observar en este cuadro, el traspaso los límites de la realidad y permite que los lagartos pintados salgan de la página y se combinan entre sí movilizand la estructura de la superficie como se interpreta en particular en esta obra *Metamorfosis 1943 reptiles*, que es obtenido a través de una teselación hexagonal.

En las obras de Escher se puede ver de cierta manera aproximaciones al concepto del infinito (**véase figura 15**); en el que se puede apreciar tres serpientes aparentemente idénticas que se enroscan en anillos que crecen a partir del centro hasta lograr su envergadura máximo y luego vuelven a reducir de tamaño hasta hacerse insignificanemente diminuto, en esta obra se puede percibir ideas que aluden a un proceso infinito tanto en el centro como en el contorno de la imagen.

En síntesis, este bosquejo consideró algunas algunos ejemplos que se trazaron, aunque pudieron aún ser más, de alguna manera, queda claro el dinamismo presente en el efímero devenir del desarrollo de la geometría descrita en este documento.



Figura 15: *Metamorfosis, 1943, reptiles*

También se destacó algunos vínculos a lo largo de la historia entre las matemáticas y el arte, en la búsqueda de un ideal de perfección y de la belleza en la exploración del espacio, que parecen ser oportunas en relación al mundo circundante y en cuantiosas ocasiones, las creaciones artísticas son una de las mayores expresiones públicas de los conceptos matemáticos como el caso de Escher que hizo de la geometría un arte consciente o inconscientemente.

En cuanto al proceso que desembocó en el surgimiento de otro tipos de geometrías, que permiten expresar cierto tipo de formas que no son expresables mediante la geometría euclidiana, en ese sentido, en este escenario puede acontecer (aún no está muy claro) que el espacio físico esta más de acuerdo con alguna geometría no euclidiana que con la elemental, pues la abstracción que efectúa la geometría Euclidiana no es la única manera de entender la complejidad del mundo natural. Por lo tanto, el siguiente apartado se localizará en un tipo de geometría no euclidiana.

1.5. Una aproximación al concepto de fractal

Desde los inicios de la humanidad misma, el hombre ha buscado caminos y métodos para comprender y descifrar los fenómenos de la naturaleza, y así desenvolverse en ella; sujeto aquel fin, por ejemplo, el famoso físico y matemático Galileo Galilei en 1923 escribió:

La Filosofía está escrita en ese gran libro del universo, que está continuamente abierto ante nosotros para que lo observemos. Pero el libro no puede comprenderse sin que antes aprendamos el lenguaje y alfabeto en que está compuesto. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto.

Según lo anterior, desde lo más cotidiano hasta lo más trascendental, resulta indescifrable sin las matemáticas; sin embargo en aquella descripción de la naturaleza, se puede contemplar la existencia y creencia de aquellas figuras regulares que obedecía a

explicaciones en términos de la clásica geometría euclidiana, generalmente en muchos de los casos estos esfuerzos simplificaban y consideraban situaciones realmente ideales y abstractas, los cuales no reflejan la perfecta armonía de un mundo sencillo y ordenado, en el cual pareciera que predomina la irregularidad y el caos.

En consecuencia, florecen argumentos que evidencian la adecuada manera de considerar nuestro alrededor “(...) *Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son circunferencias y la corteza de un árbol no es lisa, como tampoco es cierto que la luz viaje en línea recta. (...).*” (Mandelbrot, 1984 citado en Talanquer, 2002, p.25)

Con referencia a la ejemplificación anterior, que trata de ilustrar algunas situaciones reales, en las que se puede afirmar que muchos de los fenómenos naturales presentan formas irregulares, que la geometría tradicional es incapaz de describirlas, por ende, fue surgiendo una nueva forma de ver el mundo escrita en la geometría fractal, la cual se desarrolló plenamente en la década de los años setenta, en pleno siglo XX como una disciplina capaz de mirar la realidad a través de unos fabulosos lentes geométricos; la idea de uno de los pioneros e investigadores del tema Barnsley (1948), en su libro *Fractals Everywhere*, leída en la publicación de Redondo, A. y Haro, M. J. (2004), para inmiscuirse en el mundo de los fractales, caracterizándolo de la siguiente manera:

La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Se arriesga uno a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas. Jamás volverá a pensar lo mismo de todos estos objetos. (p.47)

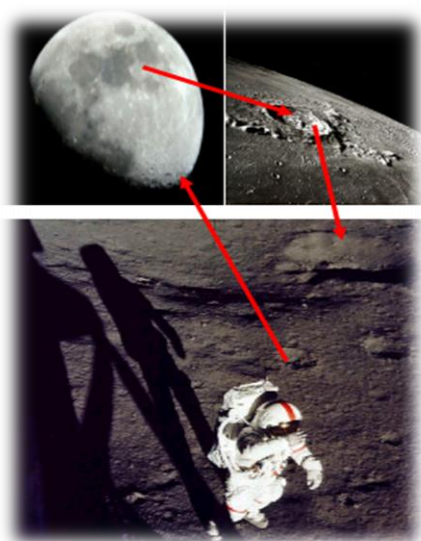


Figura 16: La luna vista cada vez ms cerca

En ese sentido, se puede inferir que la mayoría de figuras que presentan la naturaleza guardan relaciones íntimas con la geometría fractal. Por ejemplo, asimismo la luna presenta una estructura fractal, observe estas secuencia de tres ilustraciones donde se percibe cada vez más cerca los mismos cráteres. (**Véase figura 16**).

Sin duda alguna, al hablar de aquella geometría, se hace indispensable, el mencionar al matemático Benoit Mandelbrot (**véase figura 17**), considerado como su

fundador, gracias a sus grandes aportes, y al estudio de distintos objetos semigeométricos descubiertos y trabajados por notables matemáticos, en la segunda mitad del siglo XIX y principios del siglo XX, los cuales fueron tomados del olvido y clasificándolos bajo el nombre de fractales.



Figura 17: Benoit Mandelbrot

Otro aspecto que cabe resaltar, es que *Mandelbrot*, no fue el único que trabajó estos curiosos entes, al contrario, ya existían un determinado número de matemáticos que aportaron en cierta manera a la construcción de lo que se conoce como la geometría fractal.

No existe una definición única y absoluta de los objetos fractales pertenecientes la geometría fractal, debido a que está esta rama es multidisciplinaria en muchos campos científicos, artísticos, psicólogos, sociólogos, entre otros. Por esta razón, posiblemente es el principal motivo que hace difícil contener una definición unánime que abarque a todos los tipos de fractales, no obstante, los matemáticos estudian estas figuras altamente irregulares, que se pueden obtener mediante una interacción infinita de un proceso geométrico reiterativo.

Entonces ¿Qué es un objeto fractal? *“En 1975 Mandelbrot denomino fractales (del latín fractus irregular), al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y exhibir dimensión fraccional.” (Peitegen, 1986; citado en Talenquer, 2002, p.25)*

Según la definición anterior, se puede interpretar que los objetos que componen la geometría fractal, son figuras altamente dominadas por las formas irregulares que difícilmente pueden ser descritas en términos no euclidianos, los fractales son objetos geometricos denotados por una reiteración indefinida y “automática” (de sí misma). Por lo tanto, las partes que lo integra se asemeja al todo, y el total a sus partes constituyentes, en ese sentido se hacen auto similares o en otras palabras, que no sean diferenciables.

Desde la perspectiva matemática, un fractal es un objeto que consta de fragmentos geométricos de tamaño y ubicación inconstante, pero de aspecto semejante, por tanto, los fractales poseen dos características fundamentales.

El primer aspecto que caracteriza a todos los fractales, se localiza en lo que denomino Hausdorff en 1919, quien hace alusión a este término por primera vez, el cual significa que un objeto geométrico no necesariamente debe poseer las dimensiones usualmente enteras, como las que se acostumbran a tratar en la geometría euclidiana, como por ejemplo, la de la línea que es uno (1); la del plano es dos (2); y la del espacio, es tres (3), si acaso cero dimensiones, es decir, que hay otras figuras que pueden habitar en espacios intermedios. Por ejemplo, encontrarse en el plano y en el espacio; y tener una dimensión no entera.

La segunda propiedad de los fractales, la auto semejanza, hace alusión a una propiedad invariante bajo el cambio de escala. Por ejemplo, si enfocamos una porción cualquiera de un objeto fractal, se notará que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal. Un ejemplo de la naturaleza lo encontramos al observar la estructura de la rama de un árbol, que está compuesta por pequeñas ramas que tienen una forma muy parecida a la totalidad de la rama. Sin embargo, no todos los fractales son auto semejantes, pero es necesario mencionarlo, aunque estos tipos de fractales no harán parte del estudio del presente trabajo de grado. Un ejemplo de ellos, son los fractales plasmáticos, los cuales tienen una forma muy indefinida.

En este momento se exteriorizaran algunos objetos pertenecientes de la geometría fractal, que serán seleccionados, estudiados, diseñados y contruidos, permitiendo cumplir los objetivos propuestos en la presente indagación.

1.5.1. Conjunto de Cantor:

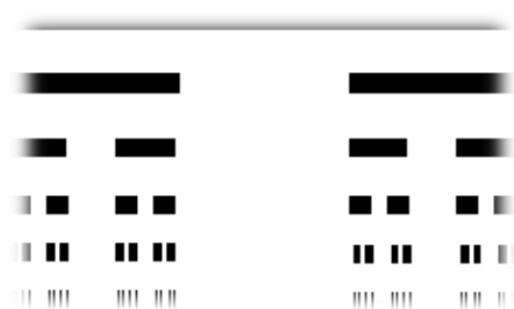


Figura 18: Esbozo aproximado del Conjunto de Cantor

El Conjunto de Cantor toma su nombre en honor a su autor, el prodigioso matemático alemán Georg Cantor, matemático célebre por desarrollar la teoría de conjuntos y de los números transfinitos, según Aponte (2014): “Podemos decir que en los trabajos de Georg

Cantor, se encuentra un punto culminante dentro de la historia de las matemáticas y es la fundamentación de los números transfinitos, los cuales se presentan como una extensión autónoma y sistemática de los números naturales.”(pp.9-109). además fue pionero en el estudio de los fractales debido a que los insinuó por primera vez en 1883, por lo tanto, se considera como el más antiguo fractal de carácter matemático. En principio se utilizó como herramienta de investigación para el estudio de lo continuo y más adelante se presentó utilidad en el campo de la ingeniería, apoyando la idea según Talenquer (2002):

Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de *ruido* en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital (Peterson, 1988); esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación (del tipo de las que estamos acostumbrados a oír cuando hablamos por teléfono o escuchamos el radio). El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían como por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguía una estructura intermitente, y dentro de ésta...ya podemos imaginar la historia. (p.26)

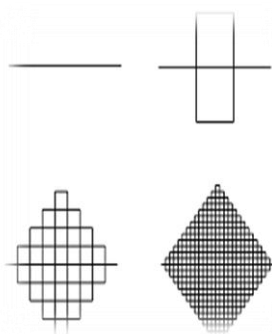


Figura 19; Esbozo aproximado de La Curva de Peano

El famoso y sencillo Conjunto de Cantor (**Véase figura 18**) se conoce hoy en día como un objeto de la geometría fractal compuesto por segmentos proporcionales que cumplen la propiedad de ser auto semejantes .Si bien, a medida que se está construyendo, la cantidad de segmentos aumentan y a la vez la longitud de ellos disminuye, por lo tanto, se le denomina también como el Polvo de Cantor. Al inicio del presente párrafo se le adjudico el adjetivo de sencillo por la facilidad para conseguirlo, ya que se procedede la siguiente manera:

Trace un segmento de longitud L , luego dibuja de nuevo un segmento de longitud equivalente al anterior y divídelo en tres partes, iguales inmediatamente borra el segmento de la sección central, quedando así dos segmentos. De acuerdo a la longitud y a la cantidad de segmentos obtenidos en el paso anterior, dibújalos de nuevo otra vez y divídelos en tres partes iguales borrando el segmento ubicado en la posición central de cada uno. Seguido el procedimiento anterior a toda se obtiene una aproximación al Conjunto de Cantor.

1.5.2. La curva de Peano y de Hilbert

Giuseppe Peano (1858-1932), en 1890 esbozo una curva que alcanza a través de una secuencia de curvas continuas sin intersecciones una curva límite, la cual pasa por todos y

cada uno de los puntos en el plano, a partir de su construcción se logra crear un objeto auto semejante, mediante el siguiente método:

Iniciamos de un segmento de longitud L . Deducimos 9 nuevos segmentos, cada uno de longitud $1/3$. Comenzando con un intervalo, este se remplaza por una curva poligonal que se intercepta formada por nueve segmentos congruentes. Este proceso se redunda en cada uno de estos nueve segmentos continuando el proceso interminablemente. **(Véase figura 19).**

Aproximadamente un año después, en 1891 David Hilbert (1862-1943) dibujó también otro tipo de Curva fractal **(véase figura 20)** con propiedades idénticas que la anterior, cuya propiedad notable es el de también rellenar el plano pero con una elaboración más sencilla, donde primero trazamos un cuadrado de lado L , luego lo fraccionamos en cuatro partes congruentes. Posteriormente unimos los centros de los cuatro cuadrados. Volvemos a dividir cada cuadrado en cuatro cuadrados idénticos y unimos de nuevo los centros de todos los cuadrados mediante una curva continua. Repetimos el procedimiento infinitamente.

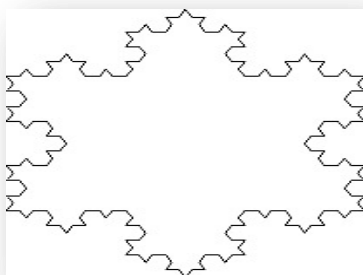


Figura 21: Esbozo del Copo de nieve

1.5.3. La curva de Von Koch

En 1904, surge otra curva fractal **(ver figura 21)** con características igualmente fabulosas, que encierra un área finita y un perímetro infinito, se le denominó de acuerdo su afamado compositor, el sueco Niels Helge Von Koch (1870-1924).

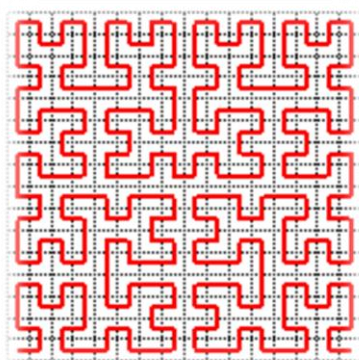


Figura 20: Esbozo aproximado de La Curva de Hilbert

A continuación se describirá brevemente una de las propiedades más interesantes de los conjuntos fractales: la auto semejanza; “Cada punto sobre ella, si lo exploramos con una lupa, nos revelaría siempre los mismos secretos; triangulo sobre triangulo, indefinidamente” (Talenquer, 2002, p.13)

Para ilustrar la idea será oportuno mencionar la manera en como se construye, comprobando con facilidad que la curva

posee la propiedad aludida anterior, a todas las escalas de observación.

Así pues, para obtener la curva Koch primero se procede a dibujar un triángulo equilátero de longitud L . Luego divide en tercios iguales cada lado y se borra el segmento del centro y levantamos un triángulo equilátero de lado $l/3$. El procedimiento se irá repitiendo teóricamente en cada en cada lado se ejecuta el procedimiento que surja hasta el infinito.

Esta curva también se le suele indicar como copo de nieve y trae a la mente el perfil de la costa de una isla como lo afirma Talenquer(2002) comenta:

¿Cuál será la longitud para un viajero que decida recorrer todos los cabos y bahías? Para efectos prácticos, ilimitada. El problema es muy similar al que encontramos al intentar determinar la longitud de la curva de de Koch, de hecho, fractales como este resultan modelos más adecuados para representar el perfil de la costa que el trazo de una línea zigzagueante. (p.27)

Por lo tanto, esta entidad geométrica una vez mas describe sin duda alguna del reino de las formas que caracterizan el mundo sin realizar simplificaciones regulares que ofrece por ejemplo la geometría euclídea.

1.5.4. La curva del Dragón

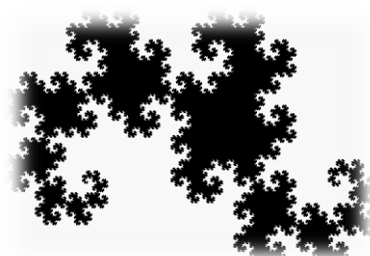


Figura 22: Esbozo aproximado de la Curva del Dragón

Otro ejemplo de un sencillo algoritmo capaz de producir segmentos lineales o curva fractales, a partir de una simple figura euclídea que igualmente llenan de manera compacta todo el espacio en el que se traza es la **La curva del Dragón** (véase figura 22) de Heighway.

1.5.5. Triángulo de Sierpinski

Hablar de los primeros fractales implica aludir quizás al ejemplo más representativo de ellos, el triángulo de Sierpinski que data de 1916, y es considerado por muchos como la construcción más famosa de la geometría fractal.

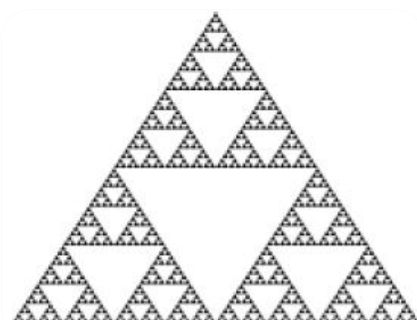


Figura 23: Esbozo aproximado del Triángulo de Sierpinski

El Triángulo de Sierpinski es quizás el ejemplo más representativo de la geometría fractal, desarrollado por uno de los matemáticos de origen polaco más influyente de su época Maclaw Sierpinski.

Este objeto es el resultado de seccionar a toda escala un triángulo equilátero de lado L , en cuatro particiones a partir de los puntos medios de cada lado. Una vez realizado lo anterior, el proceso se repite con los triángulos restantes actuando de la misma manera. **(Véase figura 23)**

Pero a mediados del siglo XXI, afloran otros tipos de fractales que ya no se ubican en el plano Real, estos “nuevos” fractales fueron creados por los matemáticos franceses Gastón Julia y Pierre Fatou, quienes consideraron el empleo de variables complejas⁶. En ese sentido, se lograron clasificar las múltiples formas fractales de acuerdo a las propiedades que los describen. A partir de la propiedad de auto semejanza, pueden ser divididos en tres categorías, y de acuerdo a la linealidad, se describen también en dos tipos de fractales. *“En ambos lenguajes, lineal o no lineal, el número de algoritmos básicos que puede construirse es infinito, pero mientras las reglas del primer dialecto son mucho más sencillas, la riqueza de posibilidades del segundo lo hace especialmente atractivo.”* (Talanquer, 2002, p.25)

1.6. Acercamiento a la propiedad de auto semejanza

A continuación, en la siguiente **tabla 1**, se pretende clasificar algunos fractales de acuerdo a dos categorías: la auto semejanza y a su linealidad explicados anteriormente.

CLASIFICACIÓN DE FRACTALES	
De acuerdo a la auto semejanza	De acuerdo a la linealidad
Auto semejanza exacta: Sus partes son versiones idénticas del objeto completo. Ejemplos de este tipo: El conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Peano, la curva de Koch, entre otros.	Los fractales lineales Respectan las líneas rectas que constituyen la forma geométrica sobre las que se le aplica. Son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito.

⁶ Su dominio se localiza en los números imaginarios, estos junto a la curva de Peano y de Hilbert solo se mencionaron y no se tendrán en cuenta para la elaboración de las actividades que desarrollarán los estudiantes.

Cuasi auto semejanza: No se parecen aproximadamente idénticos a diferentes escalas pues solo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Ejemplos de este tipo: El conjunto de Mandelbrot, conjunto de Julia, entre otros.	Fractales no lineales: fractales que presentan una estructura similar, pero no son exactamente igual a su original. Se generan a partir de distorsiones complejas, creando alteraciones no tan solo de posición, tamaño y orientación.
Auto semejanza estadística: Son los fractales de la naturaleza, es posible que no son idénticos, en su totalidad pero si similar a algún miembro de la colección	

Tabla 1: Clasificación de fractales

1.6.1. La propiedad de auto semejanza aplicada en las artes



Figura 24: La pintura Polos Azules

La geometría fractal, recientemente puede interpretarse como un instrumento útil de diseño que por sus cualidades complejas que permite realizar mejores aproximaciones y acercamientos a modelos reales de la naturaleza, en ese sentido han despertado y llamado la atención no solo de algunos matemáticos, si no de público general, cada vez más, su atractivo radica en gran parte ya que puede ser aplicado a diversos campos disciplinarios.

Por otro lado, no es menos cierto que debido a las características derivadas de la propiedad de auto semejanza, es un terreno fértil para la exploración y creación artística (véase **figura 24**). En la revista Suma N°35 al respecto se afirma: “El término fractal evoca algo de insólita belleza, irregular, intrincado en que las partes más pequeñas son similares al todo, y que se genera por la repetición de procesos muy simples.”(Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti, 2000, p.47)

Ahora bien, se pueden encontrar vestigios desde el Arte, que hacen alusión a objetos fractales previos a la formalización matemática como tal, al respecto Mariño (2004) afirma:

La auto similitud también ocurre en el arte. La pintura Polos Azules: Número 11 de Jackson Pollock tiene una auto similitud estadística. (...) el artista parece haberse anticipado a la matemática, ya que el cuadro de Pollock es de 1952 y los fractales se desarrollaron en las décadas de los años 1960 y 1970.

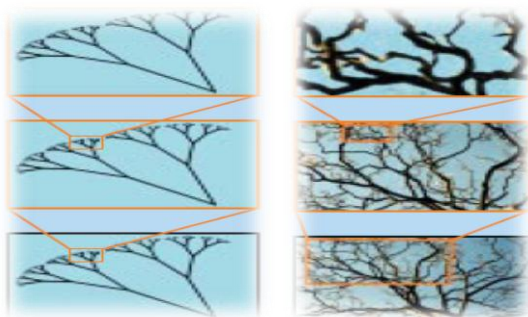


Figura 25: En el lado izquierdo se encuentra el árbol fractal mientras que en lado derecho se aprecia un árbol real.

Se puede apreciar la técnica de goteos y remolinos que empleó el artista Jackson Pollock, *Blue Poles: Number 11* sobre un lienzo de 210 cm por 486,8 cm. (Véase figura 25) Richard Taylor en el 2002, relacionó estas pinturas con patrones fractales a diferentes escalas, observando en detalle desde lo más pequeño hasta el rango de tamaño el más grande y por tanto, afirmó que poseen características visuales

homologas. En consecuencia, concluye que veinticinco años antes de su descubrimiento en la naturaleza, Pollock ya realizaba pinturas fractales (p.118)

De acuerdo a los resultados, expuesto por Taylor, se puede corroborar que los árboles fractales están dentro de los objetos fractales más fáciles de entender, además se perciben en un árbol de la naturaleza, que igualmente obedece a la idea de auto semejanza. Conforme a la idea expuesta Zalaya (2005) plantea algo similar:

A lo largo de la historia el ser humano, a veces se han utilizado patrones geométricos repetitivos, o recursivos, como elementos para la decoración de vasijas, la ilustración de libros, y similares. También existen otras expresiones artísticas como la Arquitectura que se pueden relacionar con estructuras fractales (...) (p.208)



Figura 26: Mándalas tibetanos

Desde la antigüedad, el hombre ha edificado sucesiones de monumentos y templos relacionados por ejemplo con la astrología, la armonía (el todo en la parte), así pues de manera consciente o inconsciente la adjudicación la auto semejanza, propiedad matemática que caracteriza los objetos fractales ha proporcionado una aparentemente estética que aparezcan en diversas manifestaciones artísticas.

Por ejemplo, en algunos mándalas, término sánscrita que refiere a un “circulo” de origen ancestral que representa la eternidad y el cosmos, se encuentran generalmente presente en casi todas las culturas desde la azteca, la maya, la egipcia, entre otras.



Figura 27: Mosaico de la catedral de Anagni

Revisando algunos mándalas (véase figura 26), se puede señalar coincidencias de carácter recursivo similar a los fractales, debido a que se logra identificar elementos aparentemente semejantes entre las partes que lo constituyen (una serie de rectángulos uno dentro del otro que da la percepción de que se replica este proceso de manera indefinida). Por lo tanto, se puede afirmar que de acuerdo a este estudio realizado, los fractales son creaciones universales empleados para representar la naturaleza y sus ideas pueden ser utilizadas como medios creativos para explorar y crear arte, entre ellos no muy lejos a los mándalas

En cuanto a la decoración alrededor del año 1041 en Italia fue edificada la catedral de Anagni, y dentro de ella se encuentra un mosaico (Se denomina mosaico a un recubrimiento total del plano a través de figuras geométricas, de tal modo que no se solapen ni queden huecos entre ellas. Las piezas que se utilizan reciben el nombre de baldosas o teselas) (véase figura 27), que además de adornar el suelo posee una característica muy peculiar, el contener inscrito unos triángulos de manera similar a los Triángulos de Sierpinski aproximadamente ochocientos años antes de que el matemático polaco W.Sierpinski los señalará como objetos matemáticos. Por lo tanto, esta pintura se puede considerar el fractal más antiguos delineado por el hombre.

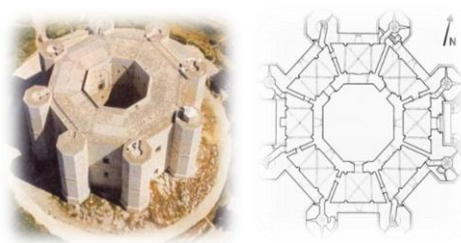


Figura 28: En el lado derecho se aprecia el Castillo del Monte y su lado izquierdo se encuentra su estructura arquitectónica

También se manifiesta una delgada frontera entre los fractales y la arquitectura. Se puede inferir el lenguaje manejado en la arquitectura y de la geometría fractal, teniendo considerable particularidades en común, por ejemplo, el castillo del Monte que encuentra ubicado al sur-este de Italia fue construido por ordenes del emperador Francisco II, en aquella construcción se vislumbra un estilo fractal basado en octógonos como el patrón y en el cual se puede apreciar simetría, orden y similitud estructural debido a la reiteración de patrones de octágonos que se repiten a niveles más pequeños. (Véase figura 28)

Añadiendo más elementos que pruebe relaciones entre la arquitectura y los fractales, en el caso con la torre Eiffel (Véase **figura 29**); está se localiza en París y tiene una altura aproximada de 335 m. Esta obra revela una imagen cercana a una curva fractal, como Sarmiento y Silva (2008) lo afirman: “La estructura de la

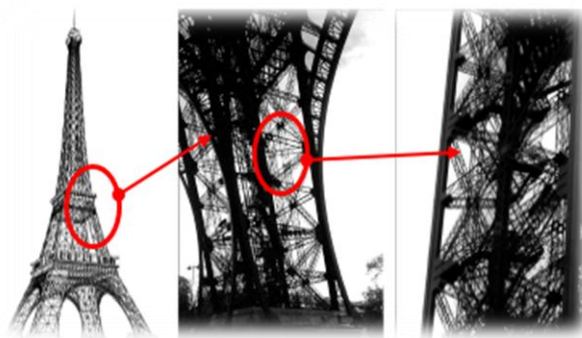


Figura 29: La torre Eiffel

torre Eiffel se acerca a una esponja de Menger(...). Además, se trata de una estructura muy ligera, igual que en el caso de Sierpinski” (p.90), este hecho se manifiesta debido a que esta construcción se encuentra llena de puntos de ramificaciones en los cuatro lados que la conforman. “A” su vez, cada lado se encuentra colmada de otras ramales que revelan la misma forma de “A”, y así sucesivamente se descubre esta estructura armada de cierta forma que presenta una similar estructura auto semejante al triángulo Sierpinski pero en tres dimensiones, lo que se conoce como una esponja de Menger.

Otro ejemplo en el arte en el cual también se han explorado algunas concepciones de la geometría fractal, han sido algunas escultura. Por ejemplo en la exposición de esculturas del arquitecto Alan St. George en Lisboa, que las denomino como *La forma del número*, la cual se empleó algunas variaciones e ideas fractales. Al respecto Giménez & otros (2009) retomando el trabajo (Sewart, 1996) afirma:

Que la generación de estas esculturas obedece a ciertos principios fractales de ir agregando a cada uno de los cinco sólidos platónicos -el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro -versiones reducidas del mismo sólido. De este modo, agregando a cada interacción versiones auto semejantes de configuración original, se obtienen variaciones fractales de los sólidos regulares. (p.55)

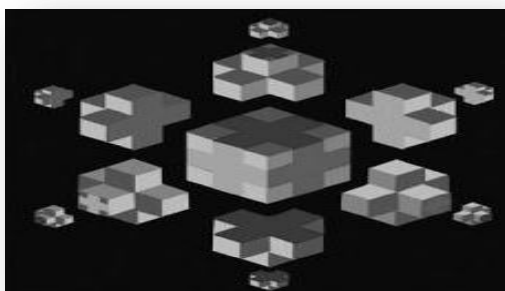


Figura 30: Giménez & otros (2009, p.55), *La proporción: arte y matemáticas*, en la cual se contempla el modo de generar un octaedro en la pag.55

De manera que el modo de generar un octaedro a partir de un cubo que alude a un proceso reiterativo (que caracteriza los fractales), juntando a éste seis cubos de dimensiones menores en forma de cruz (cinco forman la cruz mencionada y el sexto encima del cubo central). (Véase **figura 30**)

Así pues, junto al ingeniero Daniel Goeritz el escultor Enrique Carvajal, (conocido bajo el pseudónimo Sebastián) de orígenes mexicano, quienes proporcionaron elementos en la exploración de figuras fractales hallados en el campo de la escultura. Influenciados por la geometría euclidiana y posteriormente sobre la geometría moderna, hasta llegar a la teoría de los fractales, que se incorporó a su propio lenguaje para la creación de grandes obras monumentales, las cuales se puede hallar en más de 15 países como esculturas catalogadas de naturaleza geométricas, que emanan la emoción del artista en su creaciones. Por tanto, en la culminación de un proceso en el que se vincula el arte y la ciencia, entre sus obras se tiene el Cubo fractal de dimensiones 99 x 93 x 93 cm (**véase figura 31**); la cual hizo parte de en una serie de estructuras metálicas que fueron sumergidas en el mar, y previamente conectadas a la corriente eléctrica con el objetivo de que los minerales marinos se adhirieran a las piezas.



Figura 31: Cubo fractal (1993-1995) que hizo parte de la exposición titulada "Escultura cultivada"

Finalmente, con el ánimo de ampliar el panorama se tiene claro que todas las manifestaciones humanas consideradas artísticas se apoyan de algunas herramientas, tales como el martillo y el cincel (para la escultura y la arquitectura), los pinceles (para la pintura), instrumentales musicales (para la música), entre otros. Sin embargo a partir de la incorporación de los ordenadores y de programas informáticos, matemáticos y artistas han generado nuevas tendencias a causa de un creciente acrecentamiento en la calidad de las resultas y las respuestas, por tanto, algunas comunidades científicas y artísticas, introdujeron el concepto conocidas como el Arte Fractal, e incluso el propio Mandelbrot en varias ocasiones subrayó la importancia de los fractales en la conformaron ha dado lugar a una nueva categoría de arte. De hecho, un apoyo de esta idea aparece en la revista Sigma N° 26, Barallo (2005) afirmo:

En 1995 la exposición de Arte Fractal por parte del grupo The Frontier between Art and Science en la prestigiosa Galería Rio Centro en Río de Janeiro presenta una exposición rompedora con el pasado, basada en los nuevos algoritmos de color. Esta exposición conmociona la forma de diseñar imágenes fractales y se consolida como la más importante jamás realizada en su género, con exhibiciones en España, Francia, Japón, Austria, Yugoslavia, Alemania, Argentina, Brasil y Bélgica. La muestra contiene obras de gran formato realizadas por Linda Allison (EE. UU.), Domenick Annuzzi (EE.UU.), Javier

Barrallo (España), Michael Field (EE.UU.), Sylvie Gallet (Francia), Earl Hinrichs (EE.UU.), Damien Jones (EE.UU.), Klaus-Peter Kubik (Alemania), Daniel Kuzmenka (Ucrania), Mario Markus (Chile), Kerry Mitchell (EE.UU.), Samuel Monnier (Suiza), Luke Plant (Inglaterra), Janet Parke (EE.UU.), Iñigo Quilez (España), Frederik Slijkerman (Holanda), Mark Townsend (Australia) y Sharon Webb (EE.UU.) (p.2003)



Figura 32: Imágenes de la exposición *The Frontier between Art and Science* tomada de la revista *Sigma* Nº 26(p.104)

Entonces, la exposición artística de objetos científicos, o dicho de otra manera, una exposición científica de objetos artísticos (véase **figura 32**), a grueso modo, estas imágenes

fractales instauradas con ayuda de computadores y programas, se convirtieron en una muestra itinerante en el que a través de algoritmos sencillos, su minuciosa complejidad se ocasiona a partir de una regla matemática simple: la reiteración de una operación donde también se vincula se técnicas de algoritmos de color, según Barallo (2005) *“Típicamente, algoritmo de color causa un único valor para cada píxel. Dado que el colores interpretado en los ordenadores como un espacio tridimensional RGB (Red Green Blue–Rojo, Verde Azul), este valor unidimensional debe ser expandido para poder producir un color.”*(p.104), efectos de luminosidad y de texturas que se armonizan hasta obtener pinturas fractales. *Con el aumento de la velocidad de computación y la llegada de las pantallas a color, los fractales se han convertido en una de las fuentes de pintura contemporánea más atractivas y exquisitas (....)”* (Vasco, C; 2006, p.17)

Dado que el mundo que conocemos está lleno de diseños fractales, como se ha venido relatando, en la exhibición de algunos antecedentes que refieren a ejemplos claros y sencillos puede permitir el corroborar el vínculo solido entre la naturaleza, la geometría fractal y el arte en sus diferentes expresiones a través de los tiempos.

1.6.2. Breve fundamentación teórica del concepto matemático involucrado

De manera intuitiva, un modo de entender la propiedad de auto semejanza, es relacionarla a un proceso interactivo, para describir lo anterior, se ilustrara en términos asociados a obtener una fotocopia de una imagen.

Para empezar, es preciso definir una unidad de entrada que contiene cierta información inicial (entiéndase como el patrón inicial o la imagen X que se va a fotocopiar), y esta a su vez ingresa a una unidad de proceso dinámico Y (el proceso que genera la fotocopidora en reducir o ampliar la imagen), en donde se opera la información y se produce una nueva que constituye la unidad de salida: la imagen X_1 (con características semejantes a la inicial). Posteriormente, esta nueva información (X_1) se emplea de nuevo en la unidad de entrada Y (la misma fotocopidora) y así para obtener una imagen X_2 (con características similares a X_1 y por ende, también a X); y así sucesivamente se repite este proceso.

Lo anterior describe un proceso simple, inagotable e instintivo de interacción infinita que caracteriza a los objetos fractales. Por otro lado, para lograr una mejor comprensión del concepto de auto semejanza que caracteriza la geometría fractal, es importante emplear la propiedad de semejanza.

El estudio de la semejanza se encuentra estipulado por los Estándares básicos en matemáticas (2006) desde primero de primaria hasta el grado noveno, por lo tanto este concepto es importante para la construcción del pensamiento matemático, así pues en ese sentido surge la necesidad de generar trabajos que fortalezcan este conocimiento, en consecuencia esta propuesta acoge algunas investigaciones arrojadas por Castro y Céspedes (2009) quienes emplearon los fractales como un recurso para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje entorno al concepto de semejanza y también realizó una revisión bibliográfica tomando de referencia entre otros autores, los trabajos de (Gualdron,2006) y Lemonidis (1991) quienes consideraron el tema como objeto de enseñanza.

1.6.3. Algunas definiciones básicas de la semejanza

A continuación se expondrán algunas definiciones y determinadas posturas sobre el concepto de semejanza.

a) Marco (1991) comenta:

Como muchos otros objetos matemáticos el concepto de semejanza ha ido evolucionado a lo largo de la historia, desde las primeras aplicaciones puramente prácticas en la Época Antigua hasta el objeto matemático muy elaborado que se estudia actualmente en niveles universitarios de Geometría. (p.16)

b) Una idea de Godino (2003), leída en la publicación de Castro, C y Céspedes, N (2009) mencionan:

La noción informal de figuras semejantes como las que tienen la misma forma y que puede ser precisada utilizando las transformaciones del plano que se conocen como homotecias y semejanzas.

...Dos figuras son semejantes si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

...Dos figuras son semejantes si una de ellas es un modelo a escala de la otra definición de semejanza exige dos condiciones:

- La primera: ángulos correspondientes congruentes.
- La segunda: lados correspondientes proporcionales. (p.26)

c) Una idea de Gualdrón (2006) publicada de Freudenthal (2001) menciona:

Se plantean estos pasos que según el deben tenerse en cuenta en el recorrido para lograr el objeto mental de semejanza

- Reconocer la conservación o no conservación de la razón bajo aplicaciones.
- Construir aplicaciones que conservan la razón.
- Resolver conflictos en la construcción de aplicaciones que conserva la razón,
- Manejar operativamente
- Formular, relacionar con otros:
- Criterios para la conservación de la razón, tales como:

Conservación de la igualdad de longitudes, conservación de la congruencia, conservación de la razón internas, constancia de la razón externa, conservación de ángulos, y decidir de la necesidad y suficiencia de los criterios (p.121-122)

d) Escudero (2005) afirma:

La definición actual de semejanza, que puede figurar en cualquier tratado de geometría o de matemáticas generales para universitarios (Coxeter, 1971; Berger, 1990) es un objeto muy elaborado como consecuencia de las numerosas generalizaciones realizadas a lo largo de los siglos. La semejanza como objeto matemático es una transformación geométrica (en el plano o en el espacio), cumpliendo una serie de propiedades, tal y como se expresa en las siguientes definiciones:

Semejanza: Transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación $|A'B'| = k |AB|$, donde k es un número positivo llamado razón de semejanza» (Vinogradov, Tomo 9-2, p. 53).

«La Semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento, $S=H \cdot M$ » (Martínez et al., 1984, p. 364), considerando definidas previamente las transformaciones de homotecia y de movimiento. (p.380)

e) Parafraseando a Lemonidis (1991) quien afirmó que para alcanzar un acercamiento al concepto de semejanza se puede desarrollarse en dos momentos distintos:

- I. Relación intrafigural: Prevalece la correspondencia entre elementos de figuras y los correspondientes de su semejante, carente de la posibilidad de transformar una figura en otra (teorema de Tales, homotecias y criterios de semejanza de triángulos)

- II. Transformación geométrica: aplicación del conjunto de puntos en el plano y la transformación de dos o más transformaciones desde dos perspectivas:

De acuerdo a las distintas posturas planteadas anteriormente, se puede determinar que se acopló para el diseño y evaluación de las actividades centrar la atención para el a través del camino intrafigural que plantea Lemonidis para desarrollar el concepto de semejanza, así pues, se ha asumido para la elaboración de las actividades algunos conceptos que se relacionan en el siguiente esquema. (Véase figura 33)

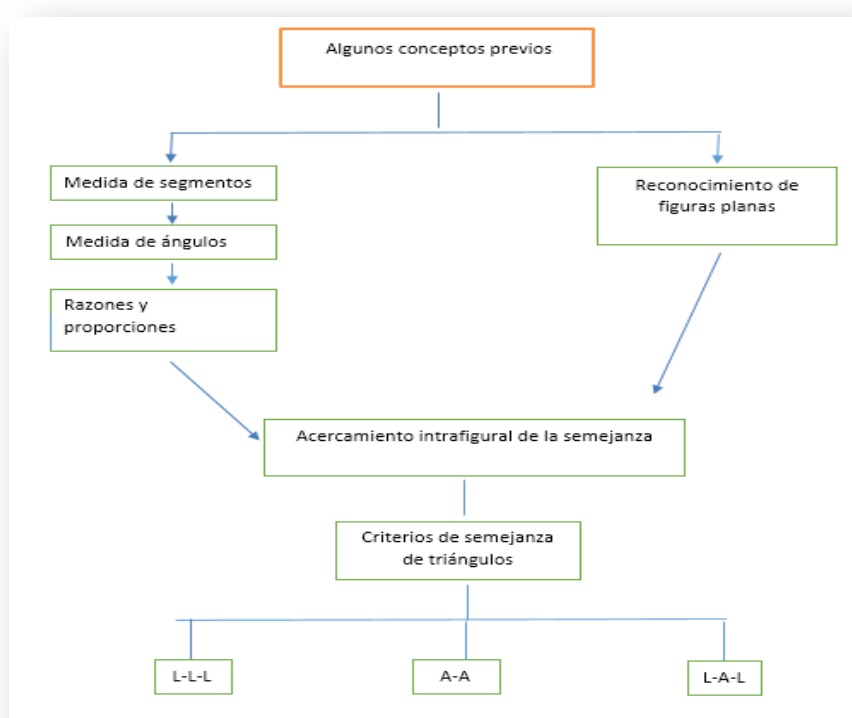


Figura 33: Tomado y adaptado Castro y Céspedes (2009; p.41)

Donde las siglas L-L-L se refieren el criterio lado, lado y lado, asimismo las siglas A-A describe el criterio ángulo y ángulo; finalmente L-A-L alude el criterio lado, lado y lado.

1.6.3.1. Algunos conceptos relacionados con el estudio de la semejanza

A continuación se presentaran algunas definiciones aproximadas de los conceptos que se involucran en a la hora del estudiar la semejanza, según Castro, C; Díaz, L y Palacios, R. (2011) afirman:

Al hacer la revisión teórica del concepto de semejanza se encontró que es necesario que los estudiantes tengan nociones acerca de proporcionalidad, caracterización de figuras planas, medida de ángulos y lados, lo cual permitirá construir, según Lemonidis (1991), una aproximación al concepto de semejanza. (p.1)

Entonces. Partiendo de los conceptos de razón y proporción de lados y congruencia de ángulos, hasta los criterios de semejanza. El referente que se tomó para realizar una aproximada definición de los conceptos: fue a través del trabajo Caleño (2014), en su tesis de maestría.

1.6.3.2. Razón y Proporción.

Razones: Ocurre cuando se compara dos magnitudes a través de una división. Por ejemplo, sea **a** y **b** dos cantidades siendo b diferente a cero, entonces una razón a y b se simboliza:

$$a:b = \frac{a}{b} \text{ y se lee "a es b"}.$$

Proporción: Tenemos una relación de proporcionalidad cuando igualamos dos o más razones. Por ejemplo, sean **a, b, c** y **d** cuatro magnitudes, entonces una proporción entre ambas razones se simboliza de la manera siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ y se lee "a es a b como c es a d" }$$

El concepto de **semejanza** está vinculado al concepto de proporcionalidad por ello se dice que dos figuras son semejantes si existe una proporción entre estos.

1.6.3.2. Criterios de semejanza de triángulos

A partir de la construcción de los diferentes fractales propuestos, probablemente influirá en establecer semejanza de triángulos en las construcciones comparadas por medio de los criterios de semejanza de triángulos “*El uso del Triángulo de Sierpinski, permite visualizar dentro de un contexto*” (Castro, C; Díaz, L y Palacios, R. 2011, p.4) A continuación se enuncian los criterios de semejanza de triángulos:

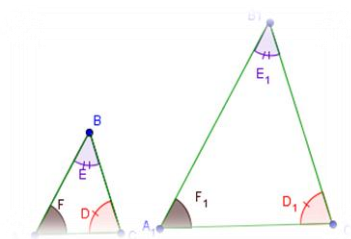
Criterio 1:

Figura 34: Ángulo, Ángulo (A-A)

Sea dos triángulos, por ejemplo: El ΔABC y el $\Delta A_1B_1C_1$.

Si ambos triángulos tienen dos ángulos de igual amplitud, es decir que los ángulos ($D=D_1$) y ($E=E_1$), entonces implica que los ángulos ($F=F_1$). Por lo tanto, los triángulos: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (Véase figura 34)

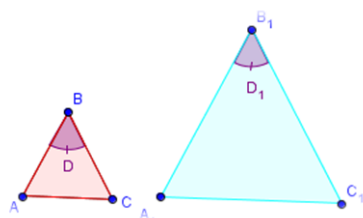
Criterio 2:

Figura 35: Lado, Ángulo, Lado (L-A-L)

Sea dos triángulos, el ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ (Ver figura 35)

Si ambos triángulos tienen dos lados proporcionales: $\frac{\overline{BC}}{B_1C_1} = \frac{\overline{AC}}{A_1C_1}$; y el ángulo comprendido de aquellos lados de igual amplitud ($D=D_1$). Entonces, los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

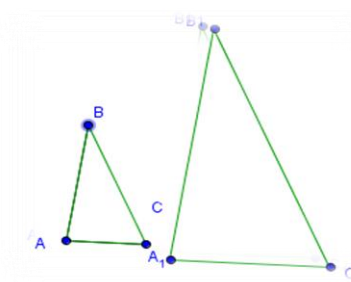
Criterio 3:

Figura 36: Lado, Lado, Lado (L-L-L)

Sea dos triángulos, el ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ (Véase figura 36)

El cociente obtenido de comparar los lados homólogos entre sí, se le denomina razón de semejanza o constante de semejanza.

$$\frac{\overline{BC}}{B_1C_1} = \frac{\overline{AC}}{A_1C_1} = \frac{\overline{AB}}{A_1B_1} = K$$

Por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

A modo de resumen en la siguiente **tabla 2** se presentará las categorías (C) conceptuales Adaptadas de (Castro y Céspedes; 2009. p.39) involucradas en la presente indagación.

Tabla 2: Categorías conceptuales

Auto	Semejanza			
Repetición intuitiva	Proporcionalidad	Criterio de semejanza de triángulos		
C5: Identifica figuras que siguen un patrón reiterativo	Razones y proporciones	A-A	L-A-L	L-L-L
	C1: Compara la longitud de segmentos			
	C2: Encuentra relación numérica entre la medida de segmentos			
	C3: Compara la amplitud de dos diferentes ángulos			
	C4: Encuentra relación proporcional entre figuras			

Significado de categorías:

(C1) Categoría 1. Compara longitud de segmentos

Los estudiantes realizan una primera acercamiento al noción de semejanza a través de las consideraciones de proporcionalidad entre segmentos.

(C2) Categoría 2. Encuentra relación numérica entre la medida los segmentos

Los estudiantes expresan proporciones y relaciones de equivalencia y semejanzas dividiendo las longitudes entre segmentos.

(C3) Categoría 3. Compara la amplitud de diferentes ángulos

Los estudiantes reconocen que los ángulos correspondientes entre figuras semejantes son congruentes.

(C4) Categoría 5 Encuentra relación proporcional entre figuras

Los estudiantes determinan la relación existente entre los lados de la figura y su longitud.

(C5) Identifica figuras que siguen un patrón reiterativo

Los estudiantes discernen una relación esquemática de recursividad auto semejante entre las figuras.

1.7. Los fractales vistos como un recurso pedagógico

El sector educativo no ha sido ajeno al creciente interés de enseñar la geometría fractal, como lo menciona Vasco (2006) “la geometría fractal es la geometría del futuro.”(p.18). A

partir de considerables esfuerzos y experiencia de países como España en su Enseñanza de la Secundaria Obligatoria (ESO), estos objetos se han ido incorporando a sus currículos, esta razón, en cierta manera ha motivado el florecimiento de este trabajo, debida a sus múltiples beneficios, convirtiéndose en un medio eficaz para reforzar conocimientos matemáticas, y precisamente Figueiras y otros (2000) afirman:

Entre los muchos argumentos que podemos citar a favor de utilizar los fractales, en la clase de Matemáticas como recurso metodológico, posiblemente el más importante sea que nos permite volver a hablar de *Geometría* en el aula desde una perspectiva moderna. Ya que el proceso de construcción de los fractales auto semejante favorece la adquisición de las *técnicas básicas para dibujar con precisión* figuras geométricas y nos permite diseñar actividades para desarrollar en el alumnado *procesos de inferencia*, descubriendo leyes generales, a partir de la observación de casos particulares. Además su análisis induce al estudio de las *semejanzas* y por consiguiente los *movimientos* y las *homotecias* en el plano, y podemos utilizarlos para profundizar en el concepto de *límite* y en los procedimientos que nos facilitan su cálculo. (P.47)

En vista de lo anterior, es importante observar que el trabajo con estos entes geométricos, enriquece la clase y posiblemente aporta nuevos contextos para el aprendizaje de la geometría, en ese sentido se puede afirmar que el propósito de esta investigación, es precisamente manipular los fractales y sus características de auto semejanza como un potencial e interesante recurso pedagógico.

En ese sentido, un referente teórico base para argumentar la idea anterior, es a través del documento titulado *Recursos pedagógicos y enseñanza de la geometría*. Una perspectiva al estudio del desarrollo profesional del profesor de matemáticas, en cual Garzón, D., Vega, M., Pabón, O., Hernando, & J., Castrillón, G., (2013) aluden al término de recurso, la siguiente interpretación:

En nuestra perspectiva, los entendemos en términos del uso en el contexto de la enseñanza de las matemáticas de todo aquello que llega al aula luego de una búsqueda intencional orientada por un interés específico del profesor y que, en el contexto de su gestión didáctica en clase, toma un sentido particular con base en la práctica discursiva con la cual se le da presencia en el aula. (p.18)

La incursión de la geometría fractal como recurso, proporcionara nuevas posibilidades y elementos que enriquecen la actividad matemática en el aula de clase, asimismo favorece el

reconocimiento de algunos nuevos avances de la disciplina que aparentemente se muestra como estática y al mismo tiempo benefician a un ejercicio relacionado con una práctica real.

Por lo tanto, el presente trabajo se encuentra enmarcado en un proyecto interdisciplinario, en el que se pretende involucra algunos elementos artísticos en el diseño y construcción de ciertos fractales, para lo cual se llevara a cabo a través del empleo de del tradicional lápiz y papel, y de algunos materiales manipulativos. A continuación, se explorara este último concepto para justificar su pertenencia.

1.7.1. Materiales manipulativos

El superar algunas dificultades que generalmente se presentan en el proceso de abordar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas; es un reto latente, debido a que usualmente se hace uso de una única estrategia limitada al trabajo rutinario a lápiz y papel, la cual poco se estima las diferencias que existen entre los alumnos en el transcurso de adquirir y construir sus propias ideas.

Por tanto, es importante en ese sentido, reconocer esos aspectos tan básicos y significativos como la vista y el tacto siendo parte de algunos de sentidos sensoriales, que cumplen entre sus múltiples funciones permitir de forma natural, la oportunidad de experimentar e investigar el mundo para luego gradualmente adquirir información y conocimiento.

En consecuencia, es evidente el interés suscitado por la creación de contextos matemáticos significativos haciéndose forzoso el recurrir a otros medios como el uso de materiales perceptibles. Ahora bien, se hace necesario delimitar que se entiende por material. *“Se define <<material>> como todos aquellos objetos, juegos, medios técnicos, aparatos y medios de comunicación, que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje”* (Alsina, C. Y Otros. (1991) Citado en Arce, 2004, p.32)

De esta manera el material manipulativo facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los alumnos experimentan situaciones de aprendizaje de forma concreta, que les permite conocer, comprender e interiorizar las nociones estudiadas, por medio de sensaciones (Área, 2010; citado en Valenzuela, 2012, p.25).

Esta idea se ha visto enriquecida a partir de trabajos como el de Arce, J. & Pabón, O. (2012) sostienen que:

En la perspectiva del trabajo experimental uno de los contextos de mayor tradición es el asociado al trabajo con materiales y recursos manipulativos. Así, se considera que la manipulación, el trabajo con modelos visuales, esquemas y diagramas, pueden ser usados como elementos para la construcción de un puente entre las nociones intuitivas de los alumnos y las estrategias informales, de un lado, y los conceptos y procedimientos de las matemáticas formales, del otro. Los alumnos mismos deben, tanto como sea posible, jugar un papel central en el desarrollo y refinamiento de estos modelos y herramientas.

De acuerdo a la cita anterior, es fundamental el asumir que el protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje es el estudiante, por tanto, su trabajo en las clases debe ser activo, inmerso en situaciones donde cobra importancia el uso de materiales tangibles y concretas que posiblemente ofrecerá mejores herramientas tanto para el aprendizaje como para la adaptación a nuevas circunstancias potencializando la creatividad en el aula, de igual forma aportando experiencia de visualización que le permitan competencias *espaciales*, necesarias para la vida.

Al respecto entre la pluralidad de materiales manipulativos que abundan, se puede retomar el papel sin ir tan lejos y aprovechando su bajo y asequible costo, claro está dependiendo del tipo, sin embargo se puede promover su uso a través múltiples formas, que habitualmente poco se acostumbra a trabajar en las clases de matemáticas, en ese sentido Guzmán, M. (1986) manifiesta:

Euclides no tenía para sus clases en Alejandría la abundancia de papel que nosotros hoy disfrutamos. Pero seguro que de haber dispuesto de papel lo hubiera utilizado bien a fondo. ¿Qué se puede hacer plegando papel? Muchas cosas, como verás, y muy interesantes. (p.3)

Un ejemplo claro y conciso, puede hacerse empleando la técnica denominada papiroflexia; su uso adecuado puede constituirse como un excelente material manipulativo para enseñanza de la geometría. Permitiendo mejora la comprensión y la visión espacial a través del diseño y representación física de figuras. Por lo tanto, se hace importante que el docente busque de alternativas que permitan en el estudiante una mejor apropiación de los conceptos que se pretendan enseñar, en ese sentido Arce (2004) propone::

Las Matemáticas aparecen ligadas a problemas del mundo real y a otras disciplinas que la nutren, la obstaculizan o la viabilizan. Se puede mencionar algunas en particular, las cuales a lo largo de la Historia de las Matemáticas aparecen vinculadas a los procesos de génesis, evolución y recepción de los conceptos matemáticos: la Filosofía, la Física, la Astronomía y la Religión. (p.8)

Por el argumento anterior, una de las opciones es crear algunos puentes entre arte y matemáticas en clase, permitirá el palpar y manipular simultáneamente una construcción, en consecuencia, generar métodos de aprendizaje experimentales, reconociendo a quien aprende para caminar desde la intuición hasta llegar al dominio de los conceptos matemáticos.

1.7.1.1. Breve caracterización de la papiroflexia:

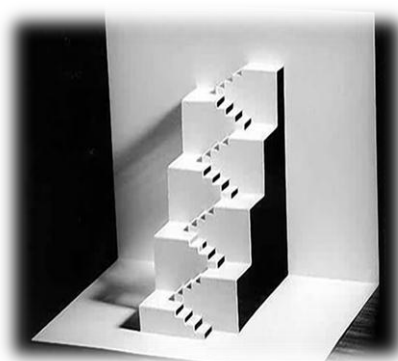


Figura 37: Un ejemplo de Kirigami

Es el arte considerado por excelencia de hacer figuras fácilmente identificadas a partir de una hoja de papel, sin cortar ni pegar. *Papiroflexia* es una palabra de procedencia latina que deriva de “papiro” (papel) y “flectere” (doblar); o mejor conocida por el término de origami, “ori” (doblar), “kami” (papel), técnica ligada a la invención del papel, y orígenes se remontan hasta China, hace alrededor de del siglo I o II d. C ; y

posteriormente siglos después, se difundió a Japón que influyó demasiado en su desarrollo, pues se impregnó en su cultura estableciendo refinadas formas de origami desde hace más de 1000 años, las cuales adquirirían significados simbólicos y ceremoniales.

Existen algunas variantes del origami que admiten el recorte del papel, son las siguientes: el "kirigami" y el "maquigami". En este trabajo girara en torno al arte denominado kirigami (**véase figura 37**), de procedencia igualmente oriental, el termino etimológicamente proviene de la palabras japonesas “kiru” (cortar) y “gami” (papel). Eventualmente el Kirigami, es el arte de cortar el papel a través de las tijeras, por tanto las figuras no se forman solamente doblando papel, sino cortándolo.

El kirigami tiene más complejidad que el origami, talvez es la razón que sea menos conocido, pero a su vez brinda los mismos beneficios que el origami. En la actualidad una

gran comunidad de personas siguen recortando el papel con gran maestría, en especial se destacan artistas orientales contemporáneos quienes difunden su trabajo alrededor del mundo. La regla para construir estructuras fractales es sencilla, incluye dobleces y cortes, que definen una sucesión interactivamente a diferentes escalas para obtener diseños artísticos solo hasta que las propiedades físicas del papel ya no den a la aplicación.

1.8. Algunos referentes curriculares y didácticos

Como referentes curriculares se han tomado los establecidos por el MEN, de acuerdo a las regulaciones planteadas en Colombia. En ese sentido, los educadores de matemáticas cuentan con referentes curriculares concernientes a su área tales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998).

1.8.1. Desde los Lineamientos Curriculares

De acuerdo a algunos documentos emanados por el Ministerio de Educación Nacional, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) se contempla lo siguiente:

Los cinco tipos de pensamiento matemático enuncados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio (...) (p.58)

La afirmación anterior, considera los distintos tipos de pensamientos asociados para la enseñanza de las matemáticas, sin embargo es importante no pensarlos tan solo como ramas fragmentadas, al contrario, en el mismo documento se enuncia algunos elementos similares que relacionan los pensamientos mencionados.

Ahora bien, de acuerdo al interés de la presente propuesta de trabajo de grado, se consideró la idea anterior para el diseño de las actividades que puedan permitir el diseño de situaciones que articulan puentes y asociaciones de manera lógica entre algunos de los pensamientos, en ese sentido, la propuesta es acentuada o hace mayor énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, pero de igual manera se considera que no se olvidan los otros pensamientos los cuales serán implícitos a lo largo del trabajo.

Un aspecto igualmente importante se encuentra una alternativa fundamentada en es la **geometría activa**, convirtiéndose en una herramienta de exploración y representación del espacio, donde se vinculan procesos que refieren a los pensamientos aludidos previamente, por tanto es pertinente tener en cuenta las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional, referente a este enfoque a través de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998):

Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de *geometría activa* que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de ‘hacer cosas’, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente contruidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales. (p.37)

De acuerdo al cómo se describe la geometría activa, debido a que se infiere que el protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje es el estudiante, y por lo tanto su trabajo en las clases debe ser dinámico, partiendo de una situación contextualiza, en donde pueda manipular objetos concretos y operar sobre ellos. Con respecto a la idea anterior, un famoso proverbio chino a porta lo siguiente: “*oigo y olvido. Veo y recuerdo. Hago y aprendo*”. Confucio (551-479) a.C.

De alguna manera, se asocia explícitamente la pedagogía que implica la geometría activa con el proverbio mencionado, pues ambos refieren al continuo soporte en el aprendizaje a partir de percepciones directas con lo palpable. En ese sentido, aquel cambio significativo ubicará estudiante en el rol principal, permitiéndole una participación laboriosa de su propio conocimiento, dejando a un lado ese tradicional función de un simple espectador, que no aprende solamente de lo que ve y oye, sino, de lo que el fabrique con sus propias manos.

1.8.2. Algunos Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas relacionados con la problemática

En este trabajo, a través algunas consideraciones teóricas estipuladas por el MEN, se busca estimular y desarrollar el Pensamiento espacial y sistemas geométricos, consignado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998).

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, orientan sobre lo que deben aprender los estudiantes en la clase de matemática según el grado en el que se encuentren cursando. En estos estándares se puede encontrar una claro referente al estudio de la geometría:

Los sistemas geométricos pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos, con los cuales se pueden precisar los distintos modelos del espacio y formular teorías más y más rigurosas. Estos modelos con sus teorías se suelen llamar “geometrías. (p.62)

En ese sentido, para incorporar la enseñanza de algunos aspectos de geometría fractal, se debe empezar por considerar, en primer sentido, se debe reconocer que es un tema considerablemente nuevo en contextos escolares. Luego, se debe reconocer que esta geometría es lenguaje matemático, que permite expresar de cierta de forma, lo que no son expresables mediante la geometría euclidiana. Y finalmente, otro aspecto igualmente a considerar, es el concepto de fractal, aunque no estén presente en los estándares como un concepto específico, se pueden articular de acuerdo a otros conceptos que sin lo son. Un descriptor de los fractales sin duda, es la propiedad de auto semejanza, un caso particular de la semejanza, este concepto hace parte del el Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Entre los estándares que hacen alusión, son siguientes:

- Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir). *(Al terminar tercer grado)*
- Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. *(Al terminar quinto grado)*
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. *(Al terminar séptimo grado)*
- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. *(Al terminar noveno grado)*

Otro aspecto central en esa investigación, es la búsqueda de relaciones entre la geometría con el arte y el diseño, las cuales se pueden enfatizar, por un lado, en la necesidad de orientar la enseñanza de la geometría hacia el desarrollo de la percepción espacial. Según Celia, A., Urquina, H; Camargo; L; & Acosta; M; (2004) afirman:

Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida. (p.3)

Entonces, se puede inferir que las representaciones de una y dos dimensiones de las figuras, y el estudio de los invariantes, sus relaciones y sus propiedades le ofrecen al estudiante herramientas para potencializar la visualización y por ende determinar el efecto que producen las diferentes transformaciones sobre ellas, en especial las referidas, la auto semejanza.

En cuanto, al tema en cuestión del trabajo con las dimensiones, en los Estándares Básicos de Matemáticas, el MEN (2006) emanan:

El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, **semejanza** y congruencia, entre otras. (p.62)

Por lo tanto, utilizar el conocimiento geométrico para la construcción de figuras artísticas mediante la técnica del Karigami, se encuentra sustentado desde un determinado número de estándares.

Los estándares que hacen alusión a la idea reseñada están consignados en la siguiente **tabla 3**. En la primera columna se hace referencia a los estándares que relacionan con el concepto de arte mientras la tercer columna se refiere a los que aluden a las dimensiones, ambas columnas se correlacionan con respecto a los grados en que se ubiquen, mientras que en la tercer columna se refiere ideas inscritas en los estándares que aluden a los materiales manipulativos.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Con relación a...			
El Arte	↻	Los Materiales Manipulativos	↻

		Recursos Físicos	las Dimensiones	
Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.	1 ^a a 3 ^a	El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos (...). Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. En los	-Diferencio atributos y propiedades de objetos tridimensionales. -Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras Geométricas bidimensionales.	1 ^a a 3 ^a
Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones Bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte , diseño y arquitectura.	4 ^o a 5 ^o	grados superiores, el razonamiento se va independizando de estos modelos y materiales, y puede trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos.	-Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades -Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características	4 ^o a 5 ^o
Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras	6 ^o a 7 ^o		Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.	6 ^o a 7 ^o

bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte				
--	--	--	--	--

Tabla 3: *Determinadas relaciones que se puede encontrar entre algunos estándares con respecto a los materiales manipulativos.*

Cabe anotar, que no se tendrán en cuenta los conceptos de simetrías y las transformaciones rígidas en el plano, sin embargo se enunciaron para evidenciar su vínculo explícito con el arte.

Por lo tanto, la innovación y la creatividad, son asuntos en el que se transitaron para la planeación de las actividades, entonces en aras de proporcionar alternativas para trabajar en la clase también se consideró suponer el empleo de algunas tecnologías y sus implicaciones en el aula.

1.9. Tecnologías y Currículo de Matemáticas

Paulatinamente algunos profesores e investigadores, han promovido, un sinnúmero de conocimientos, experiencias significativas, y reflexiones en torno a la matemática escolar, especialmente, reconociendo el impacto de las nuevas tecnologías, en los procesos de enseñanza y aprendizaje tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.

Este importante hecho, ha sido evidenciado por muchos académicos, por ejemplo, una idea de Rodolfo Llinás, leída en una publicación en Gonzales (2007), “(...) *El futuro de Colombia va estar profunda y directamente relacionada con la capacidad que los colombianos tengamos de organizar la educación; la hija de la educación: la ciencia; y la hija de la ciencia: tecnología.*” (Llinás, 1996, citado en Gonzales, p.15)

Teniendo en cuenta la cita anterior, se hace fundamental el reconocer, el aceptar y el valorar estas tecnologías, en ese sentido, no ajena de esta situación el MEN (1999) afirma:

El Ministerio quiere incentivar la incorporación de calculadoras y computadores en la educación matemática. Para apoyar el proceso pedagógico correspondiente presentamos el documento ***Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas***, que constituye, a la vez, un complemento de los lineamientos curriculares de dicha área, entregados al país en julio de 1998. Nos proponemos continuar la reflexión sobre la educación matemática y al mismo

tiempo atender la necesidad de explicitar criterios y orientaciones compartidos en el empleo de nuevas tecnologías, para que se haga de los equipos un uso creativo que lleve a los estudiantes a comprender lo que hacen y a desarrollar comprensiones y capacidades cuyo logro se dificulta cuando los materiales se reducen al cuaderno, el texto o el tablero. (p.3)

Como resultado, desde hace varios años el Ministerio de Educación Nacional, viene trabajando en el replanteamiento de la Educación en Tecnología para la Educación Básica y Media, en una propuesta sugerida por el MEN (1996), Sobre la Educación en Tecnología, elaborado por el Equipo de Tecnología del MEN, así mismo acordaron unos Lineamientos para la Integración de las Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas, algunas de las siguientes orientaciones emanadas por el MEN, pertenecen al área de Educación en Tecnología, algunas son:

- Entender la tecnología como un campo de naturaleza interdisciplinar que constituye un poderoso factor de integración curricular, lo cual se concreta al abordar las actividades tecnológicas escolares que enfrentan a los estudiantes a problemas concretos de su entorno cuya solución no puede darse desde el marco de una sola disciplina.
- Capacitar a los estudiantes en la vida y para la vida, es decir, en el manejo de principios y valoraciones inherentes a la tecnología sobre los que se basan y fundamentan los distintos desarrollos tecnológicos como preparación para el mundo del trabajo en procura de su desempeño social exitoso.
- Asumir la Educación en Tecnología como un proceso permanente y continuo de adquisición y transformación de los conocimientos, valores y destrezas inherentes al diseño y producción de artefactos, procedimientos y sistemas tecnológicos.
- Apuntar a la preparación de las personas en la comprensión, uso y aplicación racional de la tecnología para la satisfacción de las necesidades individuales y sociales.
- Identificar en esta área dos componentes discriminados: La tecnología y la informática, reconociendo la informática como una expresión particular de la tecnología.
- La informática no se restringe al uso del computador únicamente, sino que también hace referencia a procesos integrales para el manejo de la información. Se ha de diferenciar igualmente entre computación e informática; la primera de carácter instrumental y la segunda, de carácter estructural.

- De esta manera, el estudiante aprenderá a procesar información y será capaz de ejecutar operaciones básicas en un computador (manejo de paquetes para computador), pero se espera que estas actividades estén enmarcadas por la necesidad de resolver problemas, tanto relacionados con las actividades tecnológicas, como los generados por las distintas áreas curriculares.

En vista de los argumentos expuestos por MEN entre otros, la presentación del siguiente apartado propone la incursión de la tecnología con respecto a los objetos fractales para fecundar y potencializar la enseñanza de las matemáticas.

1.9.1. Empleo de la tecnología para la enseñanza de los fractales

A lo largo de la Historia de la Matemática, se ha reflejado una de relaciones afines a la evolución de la humanidad y así mismo en los últimos años, ha proporcionado importantes aportes a otros campos disciplinares y tecnológicos, en ese sentido, la introducción de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (en adelante TIC) en la sociedad actual, también ha contribuido en el progreso de la Matemática y por supuesto, ha producido avances importantes en la geometría.

La utilización de las nuevas tecnologías es cada vez más frecuente en el mundo actual y dicho panorama poco a poco ha generado ciertas necesidades que deben ser atendidas desde la Educación Matemática. Por ejemplo, una idea de Barrantes, L y Balletbo, F. (2012) sostienen:

Los medios audiovisuales de comunicación están provocando en los alumnos, y en la sociedad en general, grandes cambios en sus formas de percibir y en sus procesos mentales debido al paso de una cultura escrita a una cultura audiovisual. Destacamos la importancia de los modelos visuales para la adquisición de conceptos geométricos y para fomentar la habilidad de los alumnos a la hora de dar razones lógicas que expliquen y le hagan comprender la validez de las fórmulas geométricas. (p.38)

De esta manera se puede entender que el uso de las tecnologías en el campo educativo no es algo pasajero, por ende esa transición que se comenta en la cita anterior, de la cultura escrita a la cultura audiovisual hace referencia a permutar el uso del papel y el lápiz a otras maneras de desarrollar las clases, a través de actividades que implementen las TIC, las cuales ofrecen también posibilidades de influir en cierta manera las prácticas en el aula sin abandonar los métodos convencionales.

Sin embargo, se es imprescindible resaltar que ese cambio o “ese paso” referido por Barrantes, no es espontáneo, aquellas herramientas puedan aportar realmente en función de la enseñanza de la matemática, de ahí se exige un buen manejo de los recursos utilizados a la hora de reconocer la relación entre la herramienta, el docente, estudiante y conocimiento, entre otros desafíos, que da cuenta de algunas dificultades, limitaciones y ciertos factores que hasta el día de hoy pareciera no estar del todo resueltos.

Un ejemplo negativo que ilustra la situación actual de la implementación de las TIC, por parte de muchos docentes de matemáticas, es mencionada por Peña, A. (2012) quien afirma: “Uso casi nulo de recursos multimedia para que alumno visualice, deduzca propiedades, se motive y trabaje a su ritmo.”(p.38)

Si bien es cierto, desde la experiencia personal se puede conjeturar que aún existen en pleno siglo XXI, una comunidad de profesores de matemáticas, los cuales exponen una actitud de rechazo frente a las tecnologías, más aun en las clases de matemáticas. En contraste, del panorama anterior, también es evidente que cada día se hace más frecuente el uso de las mismas en el diario vivir, por parte del estudiantado y todas las personas que configuran la sociedad, en ese camino, el profesorado tiene un abanico de posibilidades de recurso a su alcance, por ejemplo través del uso de la web, de fotografías, de videos, de presentaciones y películas, el uso de computadores y sobre todo con software particulares que le permitirá presentar propuestas novedosas y oportunas, propiciando preferiblemente a los estudiantes mejores resultados en su desempeño académico.

Tal como es sugerido, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas por el MEN (2006): *“El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional.”* (p.62)

Conforme a las ideas planteadas anteriormente y con respecto a los estándares expuestos, la presente propuesta se enmarca en incorporar la enseñanza de la geometría fractal, siendo un área de investigación moderna en matemática en comparación con otros tipos de geometría; de igual manera, se ha visto involucrada en ese proceso, debido a la implementación de los computadores, los cuales han implicado su crecimiento vertiginoso.

Al respecto, considerar la propuesta de incorporar ambientes informáticos en la enseñanza de la geometría fractal, se respalda casi que automáticamente observando su desarrollo e historia, pues su existencia enmarca nexos estrechos y fuertes entre los ordenadores y los fractales, pues autores como por ejemplo Talenquer, V., (2002) sostiene:

La construcción de un fractal, la posibilidad de utilizarlo para producir, almacenar o transmitir una imagen se simplifica considerablemente haciendo uso de la computadora. De hecho, el efecto y la utilidad que ha demostrado tener la Geometría Fractal no se hubiera manifestado sin las facilidades de cálculo y representación gráfica que proporciona el trabajo en computadora; parecen estar hechos el uno para el otro. Los fractales se generan a través de procesos en los que una misma operación se repite un sin número de veces, y eso es precisamente lo que una computadora sabe hacer mejor. (p.50)

De igual manera, sumando en la situación el MEN (2004) afirma:

Otro desarrollo interesante de los últimos años es la geometría fractal, que consiste en el estudio de objetos geométricos “auto semejantes” de dimensiones fraccionarias. Este campo de trabajo se desarrolló proveniente de los estudios en ciencias naturales pues muchos objetos de la naturaleza como las nubes, las líneas costeras, las hojas de helecho, las cadenas montañosas, los árboles, los cristales, etc. tienen propiedades fractales. La compresión fractal de imágenes es imposible sin el apoyo de la tecnología computacional. (p.7)

Con referencia a las sustentaciones que hacen algunos autores, sobre la importancia de los computadores, se entiende que se constituyen como una herramienta, que pueden proporcionar nuevos ambientes de trabajo a tener cuenta, para aprender matemáticas, a través de manipulaciones que permiten a los estudiantes "la experimentación", convirtiéndose de alguna manera la clase en un laboratorio matemático, donde los conceptos y propiedades geométricas se constituyen, se construyen y principalmente se muestran vivos, con el fin de facilitar un aspecto importante en las matemáticas, relacionada con la percepción espacial y la visualización.

En ese sentido, la visualización siendo un proceso mental demasiado útil, que no sólo se reduce a la geometría, ni los computadores, sino que también se despliega a otros campos científicos; para tal efecto, en los últimos años, una gran cantidad de investigadores en el campo de las ciencias de la educación han manifestado el uso de aplicaciones informáticas para observar, hacer predicciones, lograr representaciones, transformar, y representar información que pueda despertar el interés y la motivación de los estudiantes.

Así pues, de acuerdo al preámbulo anterior, para el desarrollo de la presente investigación se pretende implementar entre los múltiples software educativos de matemáticas, por sus

potencialidades, y por su carácter libre, un medio como geogebra, el cual aglomera para trabajar, la aritmética, el álgebra, el cálculo y por su puesto la geometría.

Siendo geogebra, un Software de Geometría Dinámica (en ahora de adelante SGD), fue diseñado con capacidades gráficas, que permite favorecer esos procesos iterativos que caracterizan la geometría fractal de forma dinámica, es decir, mediante el movimiento y situaciones que contribuyan especialmente al estudiante a reflexionar y comprobar aspectos visuales, sobre todo relacionados con conceptos que requieran un mayor nivel de abstracción, en esa medida suplir algunas dificultades a la hora de tratarla en ambientes habituales; en ese sentido el MEN (2004) afirma:

La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla. Decimos entonces que en la base de cualquier uso de la geometría dinámica deben estar dos principios fundamentales: *dudar de lo que se ve, y ver más de lo que se ve.*

- ***Dudar de lo que se ve*** significa no tomar por verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad durante el arrastre.

- ***Ver más de lo que se ve*** significa estudiar una figura para tratar de descubrir relaciones que no están presentes a simple vista. Esto es posible enriqueciendo la figura con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación. (p.25)

Según la cita anterior, en ese sentido, emplear las TIC, le permitirá a los estudiantes resolver esa falta de dinamismo que caracteriza los ambientes tradicionales, debido a que geogebra posibilita la construcción de algunos fractales de una forma no muy compleja de hacerlo, así mismo favorece al proceso de explorar y el examinar la auto semejanza a través del “arrastre” (Se entiende por arrastre de figuras construidas, cuando se desplaza o se la deforma una figura o un punto, para observar las propiedades que la caracterizan), para hacer visible, el reconocimiento y la conservación de sus propiedades, a escalas extremadamente muy grandes o muy pequeñas, que muy difícilmente se pueden originarse en el ambiente a lápiz y papel, debido a que es poco probable realizarse, ya sea por su dificultad, o por la imprecisión y errores de medida, debido a que los fractales se caracterizan precisamente, por generarse a través de un proceso que implica la concepción del infinito. Por lo tanto, dicha experiencia, complementa y favorece una mejor interpretación dinámica del tema.

1.10. Diseño metodológico

Este trabajo se justifica una exploración de las diferentes técnicas y métodos de investigación. De las cuales, por conveniencia y características, de los propósitos planteados, el desarrollo de este documento, se enmarca en el paradigma cualitativo, porque este tipo de trabajos en este estilo son más flexibles que los cuantitativos, por ende no existe una única forma de exhibirlos y en cuanto al tipo diseño que se seleccionó fue la investigación-acción. Al respecto Murillo, F; Rodríguez, S; Herraiz, N; Prieto; Martínez, M; Picazo, M; Castro, I; y Bernal, S (2010-2011) afirman:

El propósito fundamental de la investigación-acción no es tanto la generación de conocimiento como el cuestionar las prácticas sociales y los valores que la integran con la finalidad de explicarlos. La investigación-acción es un poderoso instrumento para reconstruir las prácticas y los discursos sociales. Así pues la investigación-acción propone:

- Mejorar y/o transformar la práctica social t/o educativa; a la vez que procurar una mejor comprensión de dicha práctica.
- Articular de manera permanente la investigación, la acción y la formación.
- Acercarse a la realidad vinculando el cambio y el conocimiento.
- Convertir a los practicantes en investigadores. (p.6)

En ese sentido, la finalidad a grandes rasgos de esta metodología es identificar una problemática social a la que se procura mejorar o en su defecto buscar posibles soluciones o transformaciones de carácter social y/o educativa, a partir de implementar ciertas alternativas prácticas inmediatas a todos los participantes inmersos en el contexto investigativo. En efecto Hernández y otros (2010) afirman:

La mayoría de los autores la ubica en los marcos referenciales interpretativo y crítico (2003). Mckerman (2001) fundamenta a los diseños de investigación-acción en tres pilares:

- Los participantes que están viviendo un problema son los que están mejor capacitados para abordarlos en un entorno naturalista.
- La conducta de estas personas está influenciadas de manera importante por el entorno natural en que se encuentran.
- La metodología cualitativa es la mejor para el estudio de entornos naturalista, puesto que es uno de sus pilares epistemológicos. (p.510-511)

Sobre el asunto, un aspecto clave en este proceso es el carácter social y cultural en el que se propone, por lo tanto, las teorías que se validan se hacen paralelamente al desarrollo de las mismas prácticas; de alguna manera este proceso se convierte en un camino entrecruzado

entre la teoría conceptual y la práctica, en otras palabras se pretende teorizar de manera reflexiva y más precisa sobre la realidad; en ese orden de ideas el presente diseño metodológico más que generar un conocimiento científico, su función radica principalmente en suministrar un instrumento que genera por parte de los participantes de la investigación un trabajo reflexivo y de cambio en la actividad escolar.

Así parafraseando a Hernández y otros (2010) afirma que este tipo de metodología compromete absolutamente la cooperación de los integrantes en la detección de los menesteres, pues son ellos quienes realmente conocen mejor que nadie la problemática a resolver o a mejorar, y eventualmente la implementación de los resultados del estudio. (p.510). Al respecto, una idea de Nixon (1981) leída en la publicación de (Cohen y Manion; 1990) quienes afirma:

Un rasgo que hace de la investigación un procedimiento muy adecuado para trabajar en aulas y escuelas (al igual que en otros campos) en su flexibilidad y adaptabilidad. Se relevan estas cualidades en los cambios que pueden tener lugar durante su aplicación, y en la forma de la experimentación e innovación que caracteriza el método. Aparece particularmente fuerte cuando se compara con el conocimiento de las limitaciones usuales en las escuelas, que tienen que ver con organización, recursos, horarios, despliegue del personal y actitudes de los maestros, por ejemplo, al igual que las presiones procedentes de otros organismos involucrados y del interés de competencia (p.281)

Por lo tanto, es necesario realizar estudio en donde se describe el contexto social de la institución, tenido en cuenta los integrantes que la conforman., la ubicación geográfica y demás elementos importantes, para desarrollar una adecuada caracterización de la situación.

1.10.1. Marco contextual

El contexto institucional que se eligió para llevar a cabo la fase de experimentación y materialización en el presente trabajo, fue en la Institución Educativa Normal Superior De Cali (sede principal).

Los criterios de selección de la institución fueron:

- ✓ La facilidad para aplicar las actividades debido a que cuenta con una gran cantidad de materiales y equipos (computadores) que suministrados para la implementación de las actividades.
- ✓ Por ser reconocida como una de las más importantes y prestigiosas instituciones en el Departamento, debido a su excelente nivel académico y la pertinencia de la propuesta, de acuerdo los estándares en educación básicos en educación matemática.
- ✓ Motivo personales, que refieren a la colaboración prestada de un docente de la institución, ayudando en cuestiones administrativas en desarrollo del proyecto.

1.10.2. Algunas cuestiones de la Normal Superior Santiago de Cali

Para la desarrollar una breve descripción de la institución es importante analizar ciertas cuestiones que la particularizan y la difieren de otros establecimientos educativos.

- Se encuentra localizada en la dirección Carrera 34 No.12-60, barrio Colseguros Andes, en la comuna 10.
- Aquella institución pertenece al sector público y se originó con el objetivo de proporcionar solo cupo a estudiantes de sexo masculino con vocación de maestro, sin embargo hoy en día es una institución que también tiene entre sus estudiantes se encuentra personal femenino, es decir que actualmente es de carácter mixta.

Para la tipificación propuesta, se consideró a los dos docentes encargados de las áreas de Educación Matemática y de Educación Artística, los cuales se consignada en la **tabla 4**.

Datos	Del área de educación artística	Del área de educación matemática
Nivel Académico	Licenciada	Normalista- Licenciado- Magister
Categoría académica	Titular	Titular
Grados que enseña	9° y 10 °	9° , 10 ° y 11 °

Tabla 4: Tipificación de los docentes partícipes en el proyecto

De alguna manera ambos docentes evidenciaron afinidad y aceptación a la propuesta debida a que aportaron algunos comentarios y reflexiones en su desarrollo y además hicieron las veces de observadores.

1.10.3. Poblacion objeto del estudio: caracterización de los estudiantes

De acuerdo al Manual de convivencia, se tiene que para los diferentes grados existe una ubicación escolar preestablecida según la edad. (*Ver tabla 5*)

Cronología	
Grado	Edad
Sexto	Hasta los 12 años
Séptimo	Hasta los 13 años
Octavo	Hasta los 14 años
Noveno	Hasta los 15 años
Decimo	Hasta los 16 años
Once	Hasta los 17años

Tabla 5: Cronología de edades instaurada en el Manual de Convivencia

1.10.3.1. Grado específico de trabajo.

De acuerdo a la naturaleza del paradigma cualitativo de esta investigación, entonces es necesario ejecutarla en entornos reales, por tanto definir algunos aspectos claves. En ese sentido un aspecto importante a mencionar es que aquella institución atienden estudiantes de estrato 1° hasta 5°.

Las muestras son homogéneas por lo tanto, el proyecto se aplicó a estudiantes de la jornada de la mañana del nivel de escolaridad de grado noveno en el que se encuentra constituido por estudiantes cuyas edades oscilan entre 13 y 16 años, de los cuales 11 son hombres y 31 mujeres. Para la realización de este trabajo se contó con la receptividad y aprobación por parte de los estudiantes.

1.11. Fases en el proceso de investigación

La investigación en la acción reposa esencialmente sobre datos de observación y comportamiento, en este sentido, esta metodología se fundamenta de rasgo tanto de corte empíricos como de científicos.

Ahora bien, para la implementación de la metodología propuesta se tomó de referencia el modelo que propone Whihead en 1991, un diseño alternativo del método acción-participación que relaciona la teoría aún más la teoría educativa, y el desarrollo profesional por parte de los profesores e investigadores debido a que este método es más flexible y recursivo, no obstante es importante estructurar un directriz que oriente el trabajo, por lo tanto, el siguiente esquema **(Véase figura 38)** se enuncian de manera ordenada las fases o los momentos más importantes de la investigación (una versión libre); que tomó de referente el modelo mencionado previamente; sin embargo es importante el tener en cuenta las especificidades y el ajuste propio de la situación del contexto.

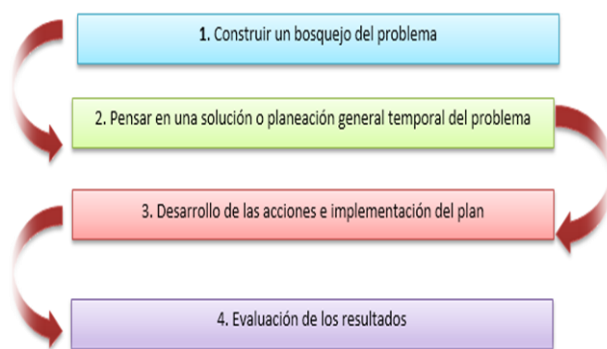


Figura 38: Esquema general de las fases de la investigación

planteados.

Con referencia al esquema general trazado, se pueden apreciar en un formato muy general las cuatro fases que se llevaron a cabo, en la implementación y materialización que suponen el proceso respectivo, en una especie de espiral continuo de acción-participación para validar los objetivos

Un elemento que singulariza este diseño cualitativo es la manera de presentar el documento final, Hernández y otros (2010) plantea:

El reporte del diagnóstico (...) la descripción y situación del contexto, las categorías y temas vinculados al problema, debe incluir un análisis de los puntos de vista de todos los involucrados en el problema (por grupo global)

El reporte de los resultados de la implementación del plan contendrá la acciones llevadas a cabo (con detalles), dónde y cuándo se realizaron tales acciones, quienes la efectuaron, de qué forma, y con qué logros y limitantes; así como una descripción de experiencias en torno a la implementación por parte de los actores y grupos que intervinieron o se beneficiaron del plan. (p.537)

Frecuentemente se constituyen los trabajos de grados en capítulos, de acuerdo a las apreciaciones anteriores, este proyecto se estructuró en los siguientes reportes:

Reporte I: Documentación y literatura de la problemática

Reporte II: Diagnóstico de la población y análisis preliminar de las actividades.

Reporte III: Análisis y reflexión de los resultados

Para tal fin, es necesario cuáles serán los elementos que proporcionan las diferentes fases que los establecen y la manera de cómo se recolectará la información. Entonces a continuación en la siguiente **tabla 6**, en donde se evidenció la planeación específica de cada fase.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA	
FASES	DESCRIPCIÓN
1º	En esta fase se distinguen dos momentos importantes: El primero hace referencia a la investigación documental (revisión de biografía) y la segunda procede de una investigación del entorno cultural de los participantes. Recolección de la información en la literatura Corresponde a la revisión de la teoría concerniente a la problemática planteada (sin embargo la revisión bibliográfica es transversal en todas las fases planteadas) ofreciendo una fundamentación teórica para argumentar y soportar, la posibilidad de llevar a cabo la introducción del concepto fractal en la clase de matemáticas a través de uno lente artístico –geométrico. Recolección de la información en el contexto educativo: Encuesta: para los estudiantes, para el docente de matemática y la docente de artística. <i>Terminando esta fase, se puede afirmar que se cumple el objetivo específico 1.</i>

2°	En esta fase influye dos momentos importantes: I. De acuerdo a la información recogida en la institución, en la fase anterior, se procede con ella a organizar y analizar la información, para luego contrastar los resultados con respecto a la documentación obtenida en la primera fase II. A partir de las evidencias anteriores, se dio lugar al diseño de las actividades que se desarrollaron con los estudiantes tomando de referencia la documentación registrada en la primera fase, además de criterios propios, de selección que fueron surgiendo permitiendo adaptaciones a efectos imprevistos
3°	Aquí se realizará la implementación y ejecución de las actividades propuesta para los estudiantes, estas actividades se secuencian en tres etapas o momentos que se exponen a continuación 1. Contextualización histórica y artística de la geometría fractal. 2. Taller de construcción de algunos fractales sencillos y significativos en diferentes ambientes: los tradicionales, en el software de ambiente de geometría dinámico (geogebra) y mediante la técnica del Kirigami 3. Realizar una feria de matemáticas optativamente denominada <i>pincelando fractales</i>, en la cual los estudiantes que hicieron partícipes en el conjunto de actividad estipuladas, darán a conocer a toda la comunidad del plantel educativo sus resultados, a través de una explosión artística, donde se pretende que compartan las ideas y experiencia de trabajar con aquellos objetos geométricos. <i>Terminando esta fase, se puede afirmar que se cumple el objetivo específico 2.</i>
4°	Reflexionar y evaluar críticamente las evidencias y las acciones inscritas en el proceso de observación que se obtuvieron después de haber implementado el plan, ósea el conjunto de actividades estipuladas para conducir a una valoración de la propuesta y su interacción en una situación social <i>Terminando esta fase, se puede afirmar que se cumple el objetivo específico 3. Por tanto, se alcanza a corroborar el objetivo general.</i>

Tabla 6: Descripción de cada fase de la investigación

1.11.1. Formas de recolección de la información

Este proceso se encamino a proveer un mayor entendimiento de los significados de la experiencia y de participación de los integrantes que colaboraron en la realización de este trabajo de grado.

Para recolectar la información de la propuesta se ayudó de varios registros que fueron tomados a lo largo de la práctica, es decir, las observaciones realizadas, al igual que las

producciones de los estudiantes en las actividades y de los registros visuales tales como fotografías.

Los datos se completan con la información que arrojaron las encuestas a la población de interés. Estas encuestas giraron en torno a tres categorías:

- I. Con respecto al gusto por la geometría,
- II. Con respecto a las diferentes aplicaciones de la geometría
- III. Con respecto al concepto de semejanza

Con esta indagación recolectada, se elaboró un análisis en donde se describió la propiedad de auto semejanza evidenciada por los estudiantes a partir de la construcción de diferentes fractales, teniendo en cuenta, las investigaciones de Castro y Céspedes (2009) en este tema, y Lemonidis (1991) quien manifestó dos relaciones o vías para adquirir el concepto de semejanza, pero por cuestiones de tiempo solo se abordó una de ellas, la relación intrafigural. Y también se reflexionó sobre los distintos materiales manipulativos y el empleo del arte para generar un ambiente significativo y contextual de la geometría y las matemáticas en general.

REPORTE II:

DIAGNÓSTICO Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Para el diseño y ejecución de las actividades que se presentaran a continuación, se tuvieron presente dos momentos importantes: La documentación teórica que se encuentra inscrita en *el reporte I.* y los resultados arrojados de las encuestas obtenidos tanto de la encuesta de los y docentes involucrados en el trabajo.

2.1 Breve descripción de los instrumentos en esta fase

En este apartado se tiene la intención de presentar unos de los instrumentos empleados para adquirir una indagación significativa propia del contexto en que se realizaron las actividades, por esta razón empleo la encuesta que tal vez la técnica descriptiva manipulada con mayor frecuente en las distintas investigaciones educativas. Según Cohen y Manion (1990) quienes aluden al vocablo de la siguiente manera:

Adoptamos el termino << Encuestas>> como traducción de << Surveys >> para referirnos genéricamente a los amplios estudios descriptivos que recopilan gran número de datos en un momento determinado (trasversales, por tanto), mediante diversos tipos de instrumentos, de los que el cuestionario es el más utilizado. Diversos autores los denominan <<estudios de conjunto>> o << método de conjunto>>, pero entendemos que la acepción del término << Encuestas>>, como procedimiento, ha sido incorporado a lo largo del tiempo, es válida y funcional para este caso. (p.230)

Así, se adoptó la encuesta entre sus instrumentos para conseguir información, del mismo modo se consideró al autor mencionado, el siguiente discernimiento, si las la encuestas son pequeñas, entonces se puede acoplar a una de las siguientes técnicas para recolectar los datos: entrevista estructurada, entrevista semi-estructurada entrevista abierta, cuestionarios postales o de auto-cumplimentación, pruebas normalizadas de logros o prestaciones y escalas de actitudes.

De acuerdo al listado anterior, se seleccionó el tipo de entrevista *estructurada* (de manera escrita). Ahora bien, a la hora de la planeación y diseño de la misma, Cohen y Manion (1991)

exponen algunas cuestiones o factores preliminares que son importantes a considerar, tales como:

- a) La finalidad de la investigación; b) población en la que se centra la encuesta y c) los recursos disponibles.

Entonces, los factores tratados anteriormente son pautas que expresan la manera en cómo se planearon las encuestas, cabe destacar que no se realizó un profundo énfasis en la manera en cómo se diseñaron, debido a que este instrumento solo se consideró como un elemento previo para adquirir información tomando de referencia los diferentes puntos de vista que permitieron proporcionar algunos elementos para la elaboración de las actividades.

El objetivo de las encuestas consiste básicamente en argumentar la problemática planteada en *el reporte I*, de acuerdo a las especificidades de cada uno de los integrantes que conforman el proceso de formación de la Educación Matemática, en aquella institución, para tal efecto, a continuación se presentaran a manera resumida la estructura y la intención de las preguntas que la integran las distintas encuestas.

2.1.1. Encuesta para los estudiantes

A continuación se presentará la siguiente encuesta que fue aplicada a los 42 estudiantes de grado noveno, jornada de la mañana de la Institución Educativa Normal Superior.

ENCUESTA A ESTUDIANTES		
Nombre _____ Grado _____ Fecha _____		
Por favor seleccione la opción que creas que mejor se ajuste a su respuesta con una equis (x)		
CON RESPECTO AL GUSTO DE LA GEOMETRIA	Si	No
¿Te agrada la clase de geometría?		
¿Entiendes generalmente la clase de geometría?		

¿Cree usted que el tiempo de la clase de geometría es el adecuado?		
CON RESPECTO A LAS DIFERENTES APLICACIONES DE LA GEOMETRIA		
¿Empleas la geometría en tu vida diaria?		
¿Encuentras algunas relaciones entre la geometría con otras áreas del conocimiento?		
CON RESPECTO AL CONCEPTO DE SEMEJANZA		
¿Entiendes lo que significa una semejanza en geometría?		

Por favor responda con la mayor claridad posible la siguiente pregunta.
De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por semejanza. Puedes ilustrar a través de un ejemplo.

Estructura general

Se encuentra compuesta de dos partes diferenciables, la naturaleza de la primera es a modo de sondeo, se presentó seis preguntas organizadas en una tabla en la que se solicita señalar con una X, la opción que mejor se ajuste a las respuestas, (las posibles elecciones consistían en la dualidad de un sí o un no); mientras que la segunda parte, se constituye de un pregunta que admite múltiples respuestas, lo que comúnmente se conoce como una pregunta abierta.

Ahora, en cuanto a las intencionalidades de la entrevista se tiene lo siguiente:

En **la primera parte**, giran en torno a las siguientes categorías:

1) Con respecto al gusto por la geometría:

La intención general consistió en explorar que opiniones tienen los estudiantes frente a la clase de matemática, especialmente en actividades que involucren el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, en relación al interés, al entendimiento y al tiempo de dedicación de los contenidos de enseñanza en el aula de clase.

2) *Con respecto a las diferentes aplicaciones de la geometría:*

Aquí el objetivo es escrudiñar que percepción tiene los estudiantes frente a la manipulación de conceptos especialmente geométricos en la su cotidianidad.

3) *Con respecto al concepto de semejanza*

Este se diferencia de los anteriores porque en este caso expone una propiedad matemática con la razón de averiguar si se reconoce su presencia en la actividad en el aula de clase.

En **la segunda parte**, el propósito consiste en ampliar la tercera categoría mencionada, indagando sobre el significado que tienen construido los estudiantes frente al objeto matemático de interés de este trabajo de grado, la semejanza.

2.1.2. Encuesta para los docentes

En cuanto a los docentes, se elaboraron dos encuestas con el objetivo de indagar la información que se tiene acerca de las matemáticas y el arte. A continuación se presentarán las encuestas destinadas a la población de estudio, al docente de la institución del área de educación matemática y a la docente del área educación artística

Encuesta para el docente de matemáticas:

	UNIVERSIDAD DEL VALLE INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ENFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA AGOSTO-DICIEMBRE DE 2015		
ENCUESTA DIRIGIDA AL DOCENTE DE MATEMATICAS. Nombre de la Institución: Fecha Grado(s) que enseña:			
Objetivo: Explorar algunas nociones e ideas que vinculen el arte con la Geometría, en especial la propiedad de auto semejanza. Por favor seleccione la opción con una equis (X) que mejor se ajuste a su respuesta			
NIVEL	Normalista ()	Licenciado ()	Magister

ACADÉMICO	Doctor ()	Otro ()	¿Cuál?
CATEGORÍA ACADÉMICA	Titular ()	Asistente ()	Auxiliar ()

Responda las siguientes preguntas de manera sintética:

1. De acuerdo a su punto de vista como docente en Educación Matemáticas para tí
¿Qué es la Geometría?
2. ¿Cómo cree usted que se puede enseñar la geometría?
3. ¿Cree usted que le dedica el tiempo suficiente para la enseñanza de la
geometría? Sí___ No___ ¿Por qué?
4. ¿Qué tipo de materiales, recursos o contextos usted emplea para la enseñanza
de la Geometría?
5. ¿Encuentras o conoces algunas relaciones entre la Matemática y el Arte?
6. ¿Crees que tu formación como docente en Educación Matemática le permite
tener una buena construcción del pensamiento geométrico a sus estudiantes?
Sí___ No___ ¿Por qué?
7. ¿Qué aspectos considera que son necesarios para enseñar el concepto de
Semejanza?
8. ¿Cómo evidencia que el estudiante ha adquirido el concepto de Semejanza?
9. ¿Conoce algunas teorías sobres el aprendizaje de Semejanza? SI___ NO___
¿Cuáles?
10. ¿Qué aspectos curriculares influyen en su clase durante este proceso de
construcción del concepto de Semejanza?
11. ¿Tiene usted en cuenta la evolución y el desarrollo histórico de la Geometría
Euclidiana y las No Euclidianas?
12. ¿Alguna vez has escuchado hablar acerca de la Geometría Fractal o del Arte
Fractal? .Sí ___ No___ ¿Qué?
13. ¿Conoce usted la geometría fractal? ¿Qué entiendes si una de sus principales
propiedades es la auto semejanza?

14. ¿Qué piensas al respecto de emplear algunas nociones artísticas para generar un contexto en una clase de geometría o de matemáticas?

Estructura general

Esta encuesta se encuentra compuesta de catorce preguntas, las cuales se sitúan en torno a las categorías mencionadas anteriormente con la intención de examinar otros puntos de vista sobre los mismos temas, claro está, que se abordaron otras cuestiones particulares y de más profundidad que en la encuesta de los estudiantes, sin olvidar que en este momento centra la atención en el docente de matemáticas. Atendiendo a estas consideraciones, las preguntas inscritas en la encuesta poseen las siguientes finalidades:

1) Con respecto al gusto de la geometría

Preguntas	Intención
1	Indagar sobre lo que entiende cómo geometría
2	Consultar la manera en cómo enseña la geometría
3	Conocer su consideración personal sobre el tiempo que dedica a la enseñanza de la Geometría
4	Averiguar sobre los materiales, recursos o contextos que emplea para la enseñanza de la Geometría
6	Preguntar sobre formación como docente en Educación Matemática le permite tener una buena construcción del pensamiento geométrico a sus estudiantes
11	Rastrear si tiene usted en cuenta la evolución y el desarrollo histórico de la Geometría Euclidiana y las No Euclidianas

2) Con respecto a las diferentes aplicaciones de la geometría:

Preguntas	Intención
5	Rastrear si conoce algunos vínculos entre la Matemática y el Arte
12	Registrar si alguna vez has escuchado hablar acerca de la geometría fractal o del Arte Fractal

13	Sondear si se conoce usted la geometría fractal y su propiedad de auto semejanza
14	Analizar la consideración de emplear algunas nociones artísticas para generar un contexto en una clase de geometría o de matemáticas

3) Con respecto al concepto de semejanza

Preguntas	Intención
7	Averiguar sobre los aspectos que considera necesarios para su enseñanza
8	Captar el como evidencia que el estudiante ha adquirido el concepto
9	Conocer que teorías reconoce sobre su aprendizaje
10	Indagar sobre aspectos curriculares que influyen en su clase durante su proceso de construcción.

Encuesta para la docente de arte:

 UNIVERSIDAD DEL VALLE INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ENFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA AGOSTO-DICIEMBRE DE 2015													
ENCUESTA DIRIGIDA AL DOCENTE DE ARTE. Fecha: Nombre de la Institución: Grado que enseña: Objetivo: Explorar algunas ideas que vinculen el arte con la Geometría. Por favor seleccione la opción con una equis (X) que mejor se ajuste a su respuesta <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="text-align: center;">NIVEL ACADÉMICO</td> <td style="text-align: center;">Normalista ()</td> <td style="text-align: center;">Licenciado ()</td> <td style="text-align: center;">Magister</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Doctor ()</td> <td style="text-align: center;">Otro ()</td> <td style="text-align: center;">¿Cuál?</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">CATEGORÍA ACADÉMICA</td> <td style="text-align: center;">Titular ()</td> <td style="text-align: center;">Asistente ()</td> <td style="text-align: center;">Auxiliar ()</td> </tr> </table> Responda las siguientes preguntas de manera sintética:		NIVEL ACADÉMICO	Normalista ()	Licenciado ()	Magister		Doctor ()	Otro ()	¿Cuál?	CATEGORÍA ACADÉMICA	Titular ()	Asistente ()	Auxiliar ()
NIVEL ACADÉMICO	Normalista ()	Licenciado ()	Magister										
	Doctor ()	Otro ()	¿Cuál?										
CATEGORÍA ACADÉMICA	Titular ()	Asistente ()	Auxiliar ()										

1. Desde tu punto de vista como docente de Educación Artística de manera breve para ti ¿Qué es el Arte?
2. ¿Qué piensas acerca de la Matemática y la Geometría?
3. ¿Alguna vez has escuchado hablar acerca de la Geometría Fractal o del Arte Fractal? Sí ___ No___ ¿Qué?
4. Encuentras o conoces alguna relación entre el Arte y La Geometría? Sí ___ No___ Justifique tu respuesta.
5. ¿Conoces artistas que hicieron uso de las Matemáticas y la Geometría para construir sus obras, Sí___ No___ ¿Quiénes?
6. En tu trabajo diario como docente de Arte, ¿Alguna vez has utilizado en la clase el origami? ¿Cómo fue esa experiencia?
7. ¿Qué entiendes por el término de Origami?
8. ¿Conoces la técnica del Kirigami?
9. ¿Qué piensas al respecto de emplear algunas nociones artísticas para generar un contexto en una clase de geometría o de matemáticas?

Estructura general

Esta encuesta, compuesta de nueve preguntas dirigida al docente de educación artística, con el objetivo de explorar algunas consideraciones que aportaran sobre los temas tratados, añadiendo elementos relevantes en la consolidación de la propuesta educativa, un aspecto que merece mencionarse sobre la encuesta, interés en develar lazos entre las matemáticas y el arte y viceversa. Atendiendo a estas consideraciones, las preguntas inscritas en la encuesta poseen las siguientes finalidades:

Preguntas	Intención
1	Indagar sobre lo que entiende cómo arte a manera de introducción para las demás preguntas.
2	Consular la opinión tiene al frente de las matemáticas
3	Registrar si alguna vez has escuchado hablar acerca de la geometría fractal o arte fractal

4	Rastrear si conoce algunos vínculos entre la Matemática y el Arte
5	Sondear si reconoce artistas que emplearon propiedades matemáticas y geométricas en sus obras.
6	Averiguar si alguna vez ha utilizado con los estudiantes la técnica del Origami y captar como resultado aquella experiencia
7	Consultar qué entiende por el término de Origami
8	Examinar qué concibe de la técnica del Kirigami
9	Analizar la consideración de emplear algunas nociones artísticas para generar un contexto en una clase de geometría o de matemáticas

A continuación, se abordará el estudio de los resultados de cada una de las encuestas en el mismo orden que se presentaron.

2.2. Análisis de los resultados

Este apartado, ha tratado tres aspectos importantes que hicieron parte del estudio a lo largo del reporte I, en el reflejo ciertas dificultades que con respecto al interés y aplicaciones de la geometría, y también el concepto de semejanza.

2.2.1. Encuesta dirigida a los estudiantes

De acuerdo a la estructura explicada con anterioridad, se logró realizar el posterior análisis:

En la primera parte

De acuerdo al conjunto de preguntas inscritas en la misma, se consiguió cuantificar las respuestas del total de la población objeto de estudio, a partir algoritmos estadísticos básicos, identificando la variable en cada caso (o sea, las posibles opciones de respuesta a las preguntas enunciada en los tres categorías), la frecuencia absoluta (la cantidad veces que aparece una respuestas a las preguntas planteadas en cada nivel) y la frecuencia relativa (cociente expresado, entre la frecuencia absoluta de los resultados y el número total de casos apreciados, el cual se puede escribir ya sea como un fraccionario o como un decimal o de forma porcentual).

Por lo tanto, en la **tabla 7** se evidencia una organización de los resultados obtenidos expresados como datos, los cuales se incorporan los elementos mencionados estadísticos anteriormente en términos de cantidad y porcentaje.

Categorías	Preguntas	Tipo de respuesta			
		SI	%	NO	%
Con respecto al gusto de la geometría:	¿Te agrada la clase de geometría?	12	35.7	30	71.4
	¿Entiendes generalmente las clases de geometría?	10	23.8	32	76.2
	¿Cree usted que el tiempo de las clases de geometría es el adecuado?	9	21.4	33	78.6
Con respecto a las diferentes aplicaciones de la geometría	¿Empleas la geometría en tu vida diaria?	30	71.4	12	28.6
	¿Encuentras algunas relaciones entre la geometría con otras áreas del conocimiento?	21	50.0	21	50.0
Con respecto al concepto de semejanza	¿Entiendes lo que significa una semejanza en geometría?	10	23.8	32	76.2

Tabla 7: Cuantificación de los datos

Como se mencionó previamente, con referencia a la información de la tabla anterior, se logró a continuación elaborar la siguiente y en la **tabla 8**, en la que se inscribe una interpretación de aquellos resultados.

Categorías	De acuerdo a las preguntas
Con respecto al gusto de la geometría:	La mayoría de los estudiantes determinaron de manera negativa a las preguntas, es decir que el 71.4% del total de estudiantes no les gusta las clases de matemáticas donde se abordan conceptos que refieren a cuestiones de naturaleza geométrica. De manera semejante al panorama anterior, el 76,2 % manifiestan que no la entiende y además el 78.5% consideran que el tiempo de dedicación de actividades de corte geométrico en la clase, no es el adecuado.

Con respecto a las diferentes aplicaciones de la geometría.	El 71.4%, de los estudiante, (o sea la mayoría) reconocen de manera afirmativa el empleo de la geometría en la vida diaria. La mitad de los entrevistados (el 50%); exhiben el empleo de la geometría en otras áreas del conocimiento diferente a las clases de matemáticas.
Con respecto al concepto de semejanza	La mayoría de estudiantes expresaron que no entendían el concepto de semejanza y por ende tan solo el 24% de los de los entrevistados, contestaron de manera afirmativa a la pregunta.

Tabla 8: Interpretación de los datos

El ideal del proceso de enseñanza de las matemáticas en general, debería ser un asunto que implique creatividad en la planeación de las actividades, más allá de los formalismos planteados en los currículo y de las rutinas escolares, está es una de las preocupaciones actuales que deliberan en la educación matemática, por ejemplo Vasco (2006) exhibe: *“reflexiona sobre el estatus epistemológico de las matemáticas, sobre su preocupación frente al lugar de la geometría en el vasto universo matemático, y por la pertinencia, así como por los retos y riesgos que encarna”* (p.19)

En ese sentido, uno de los retos que se puede inferir según lo que menciona el profesor Vasco, se traduce en la búsqueda de alternativas que susciten la motivación del estudiante frente a las diversas actividades dentro y fuera de la escuela relacionadas al pensamiento geométrico, por ejemplo, una idea de Johnson (1975) leída en la publicación de Gallo, O y otros (2007): *“todo buen profesor de matemáticas se esfuerza constantemente por mejorar la comprensión de sus alumnos y por suscitar en ellos intereses y actitudes”*(p.86)

En contraste lo anterior, la mayoría de estudiantes (71.4 %) encuestados evidenciaron un cierto rechazo hacia la geometría como también se contempló en el estudio emprendido, según las diferentes fuentes bibliográficas este hecho tal vez se justifica por la ausencia del docente encargado del área, al no hacer evidentes algunos vínculos esclarecedores con la realidad tenidos en cuenta a la hora de su enseñanza, sirviendo de apoyando al argumento expuesto, por Figueiras, L.; Molero, M.; Salvador, A. y Zuasti, N.,(2000) en la revista Suma N° 35, quienes afirman:

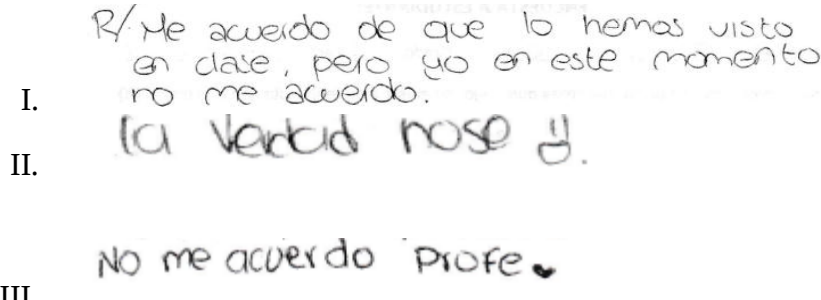
La enseñanza de la Geometría debe estar vinculada al entorno para que su estudio y sistematización pueda conseguirse mediante la manipulación de objetos y la observación de los espacios y las formas más cercanas. (...). Las aportaciones de la Geometría a estas áreas son fundamentales para la asimilación de conocimientos y procedimientos básicos. (p.46)

De las evidencias anteriores, la causa que mejor explica este hecho, es quizás los efectos latentes de la reformas a las matemáticas escolares de los años setenta donde se eliminó a la geometría como curso paralelo al álgebra.

En los resultados de las encuestas el 76 % de los estudiantes reconocen en sus actividades dárías (lejos del contexto escolar) el empleo de nociones geométricas, sin embargo no se vincula con otras áreas del conocimiento, manifiesta la mitad de los encuestado, quizás este hecho se experimenta por la siguiente razón: la encuesta arrojó que el 78.5% consideran que el tiempo de dedicación de actividades de corte geométrico en la clase, no es el adecuado, lo que también puede implicar en el aprendizaje de los conceptos, en caso particular la propiedad de semejanza, por tanto, este trabajo surge como un propuesta para proporcionar elementos a esa cuestión.

En la segunda parte:

La resolución de esta pregunta se suministró en términos de una cantidad pequeña con respecto al total de entrevistados, debido que 12 de los 42 estudiantes la respondieron (consecuencia clara que se evidenció en la última pregunta de la primera parte de esta encuesta), ahora bien en términos de porcentaje equivale al 28% de los estudiantes entrevistados, en ese sentido, observando los resultados, se puede distinguir diferentes tipos de respuestas catalogadas en la posterior en **tabla 9**, a la hora de dar una definición (así sea aproximada) de lo que entendían por semejanza.

Tipos de respuestas	Por ejemplo
A	 I. R/ Me acuerdo de que lo hemos visto en clase, pero yo en este momento no me acuerdo. II. la verdad nose y. III. No me acuerdo Profe.
B	I. Para mi la semejanza significa, algo igual o parecido. 

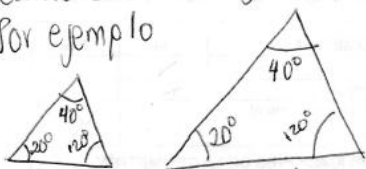
	II. La Semejanza para mi es algo igual o parecido a lo que se habla. III. Semejanza Para mi es algo que se parece a otra IV. la semejanza es una similitud que hay entre dos o mas cosas. V. Para mi semejanza es algo similar o que se parece a otra cosa. VI. semejanza es algo que es igual,
C	I. Semejanza es igual a algo Esta casa es semejante a esta 
D	I.  Tiene que ver cuando se relacionan triángulos. creo que cuando comparten características iguales. Por ejemplo  Todos los ángulos, de los dos triángulos son congruentes, por eso los dos triángulos son semejantes II. * Creo que con los lados ocurre algo similar, pero no estoy segura.

Tabla 9: Tipificación de las respuestas de los estudiantes

De acuerdo al tipo de respuesta **(B)**, se puede afirmar que se tiende a confundir el concepto de semejanza con el lenguaje cotidiano, parafraseando a Gallo, O y otros (2007) afirma que entre esas formas de argumentaciones se encuentra el lenguaje natural (o cotidiano), usualmente se emplea para nombrar, para describir o argumentar algo “(p.19) Aquí es importante realizar un paréntesis, debido a que algunos estudiantes hicieron referencia a un

razonamiento muy general, empleando términos asociados a la forma, tales como “parecido” o “similar”. Por lo tanto, no existe una idea clara de semejanza en el contexto matemático, ya que erróneamente se relaciona con ser igual a algo. Un argumento que evidencia lo anterior es el siguiente: *“primero vienen las comparaciones que ligan clases de figuras que a los niños les parecen “iguales”, es decir de “igual forma”, o “de la misma forma” (“semejantes” parece demasiado débil (...))”* (Vasco, C; 2006, p.64)

Entonces, la respuesta de los estudiantes similares al argumento anterior, obedecen a una descripción considerada a un razonamiento informal, según Duval, en este proceso se involucra ideas naturales que surgen en el lenguaje cotidiano, a través de la enunciación y la elucidación de argumentos, de tipo narrativo, frutos del establecimiento de asociaciones u oposiciones de un discurso sin recurrir para nada a las definiciones o teoremas matemáticos.

Debido a la complejidad que subyace en la actividad geométrica, se entiende el por qué también se obtuvieron respuestas que aludieron a objetos reales (concretos) y matemáticos, volviendo la mirada, hacia lo que se entiende por visual, pues a partir de los planteamientos de Duval, se puede explicar en estas expresiones a través de unos niveles del razonamiento visual:

Visualización Global:

Se considera como el nivel más elemental de la visualización y permite asociar figuras a objetos físicos o en el campo de las matemáticas tiene que ver con los reconocimientos de formas o figuras prototípicas y en torno a las cuales se asocian aspectos no matemáticos tales como posición, cercanía o vecindad. Este nivel debe ser rápidamente superado para dar paso a una mirada más geométrica de las figuras centrada en la identificación de relaciones.

En este nivel también pueden visualizarse las figuras como componentes de otros objetos como en el caso de las figuras anteriores, la rueda de un carro, la tapa de una caja, la superficie de una mesa en perspectiva o el techo de una casa.

Nivel de la percepción de elementos constituidos:

La observación de los objetos se centra no ahora sobre aspectos generales de las figuras geométricas sino sobre los elementos constitutivos (...) que se hacen difíciles de expresar en el nivel de las palabras y que se hacen más evidentes a través de las figuras (MEN, 2004, citado en Gallo, O y otros; 2007)

Analizando la teoría de los niveles mencionados con relación a los resultados de las encuestas del tipo (C), se puede afirmar que por un lado, se logró observar aspectos del nivel de visualización global, en donde se hace referencia los dibujos que representan “dos casas

semejantes”, este argumento le permitió explicar lo que entiende por semejanza (Tipo de respuesta c).

Por el otro lado, se aprecia la utilización de aspectos geométricos que caracterizan a las figuras, lo que les permitió establecer asociaciones para la comparación entre ellas, a partir de sus elementos o partes constituyentes, en consecuencia, se puede interpretar en las respuestas tipo **(D)**, en el que observó el concepto de semejanza a partir de la misma cantidad de vértices en los dos polígonos dibujados, al respecto Vasco (2006) menciona: *Nótese que la palabra “semejanza” es muy vaga; es bastante difícil encontrar dos objetos que no sean semejantes en algo (...)*. (p.63). También se aprecia un intento de exponer el concepto de semejanza empleando dos triángulo, explorando los conceptos de ángulos y lados.

En síntesis, los resultados arrojados de la encuesta aplicada y dirigidas a los estudiantes sirvieron de referencia y de apoyo palpable a la luz de una realidad en la cual se revelan ciertos datos tangibles que cumplen la función de comprobar o validar en un contexto escolar y particular, algunas dificultades que yacen con relación a la enseñanza de e interés por parte de los estudiantes de la geometría.

A modo de resumen, tomando de referencia los resultados se puede afirmar que logró comprobar algunas dificultades planteadas en *el reporte I* tales como:

Con respecto al gusto por la geometría, se puede apreciar una falta de motivación por parte la mayoría de los estudiantes cuando se mencionan el término de geometría.

Con respecto a las diferentes aplicaciones de la geometría, salen a relucir cuestiones como que ellos reconocen en cierto modo el empleo de la geometría con la realidad, sin embargo no se establecen en el aula de clase conexiones de la geometría con otras áreas del conocimiento.

Con respecto al concepto de semejanza, existe dificultad en su enseñanza-aprendizaje y tan solo se evidenciaron lograron identificar dos de los tres tipos de razonamiento que Duval menciona, el visual, el informal y no se evidencia un argumento formal cuando se trabaja con el concepto de semejanza.

Ahora bien, aunando en la situación otro foco importante en el proceso de formación del pensamiento matemático por parte del estudiante, es efectivamente el rol que cumple los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En ese sentido igualmente se indago algunas cuestiones relacionadas al tema tanto a los docentes.

2.2.2. Encuesta dirigida a los docentes

En las siguientes tablas se incluyeron algunas de las preguntas con sus respectivas respuestas tomadas de la encuesta, con el fin de elaborar algunos comentarios que igualmente validan la problemática que generó la presente investigación frente a las categorías que se trabajaron en las encuesta para los estudiantes.

Con respecto al gusto de la geometría se obtuvo la posterior información inscripta en la siguiente **tabla 10**.

Preguntas	Respuestas
¿Cómo cree usted que se puede enseñar la geometría?	De forma dinámica si dejando la formulación y la abstracción, utilizando actualmente distintos recursos físicos y virtuales como la tecnología
¿Qué tipo de materiales, recursos o contextos usted emplea para la enseñanza de la Geometría?	Hojas de block, regla, escuadra, compás, alfileres, lecturas, talleres, cartulina, cartón, programas de geometría dinámica
¿Cree usted que le dedica el tiempo suficiente para la enseñanza de la geometría? Sí___ No___ ¿Por qué?	Sí___ No ☒ ¿Por qué? Porque no se valora su real importancia y trascendencia en ella la construcción del pensamiento métrico y espacial, y como modelo de razonamiento

Tabla 10: Tipificación de las respuestas del docente de matemáticas 1

Se aprecia una brecha entre las ideas del docente y de los estudiantes, pues estos últimos reflejan una falta de motivación por parte la mayoría, cuando se trabaja con temas concernientes al área de la geometría, mientras que el docente manifiesta que su enseñanza puede ser a través del empleo de diferentes recurso o materiales (tanto las tecnologías tradicionales como la nuevas tecnologías) para presentar la clase de forma dinámica y luego

se alcancé abstracción. En otras palabras, se evidencia en la respuesta del docente una incongruencia entre la realidad lo que él cree con la realidad que piensa los estudiantes (por lo menos, en cuanto a la población objeto de estudio).

En cuanto a la consideración del tiempo de trabajo en actividades geométricas tanto los estudiantes como el docente de matemáticas, coincidieron en que el tiempo en clase no es el adecuado.

Con respecto al concepto de semejanza se obtuvo la siguiente información clasificada en la **tabla 11**.

Preguntas	Respuestas
¿Qué aspectos considera que son necesarios para enseñar el concepto de Semejanza?	Tener claro las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, de congruencia, de correspondencia de ángulos y proporcionalidad.
¿Cómo evidencia que el estudiante ha adquirido el concepto de Semejanza?	Cuando reconoce los criterios básicos para establecer si dos figuras son semejantes.
¿Qué aspectos curriculares influyen en su clase durante este proceso de construcción del concepto de Semejanza?	Influyen procesos de comprensión final, de visualización y de resolución de problemas.

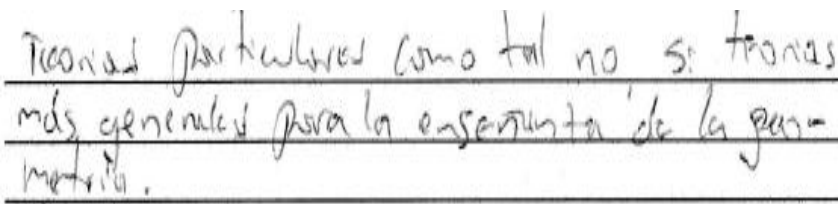
¿Cómo evidencia que el estudiante ha adquirido el concepto de Semejanza?	
--	--

Tabla 11: Tipificación de las respuestas del docente de matemáticas 2

De acuerdo a las preguntas, se puede apreciar en las respuestas del docente el empleo de ideas y conceptos relacionados con el estudio del concepto de semejanza contemplado por Castro y Céspedes (2009), debido a que menciona aspectos relevantes como las razones y las proporciones, que permiten la construcción del concepto de semejanza a partir de la relación intrafigural, sin embargo alude al término de congruencia, tal vez pensando en los criterios de semejanza de triángulos).

Otro aspecto que cabe destacar en la respuesta, es la consideración de los procesos de visualización y resolución de problemas como actividades matemáticas que pueden presentarse en la construcción del concepto enseñanza de la semejanza, sin embargo el docente no hace alusión a ninguna teoría en particular frente al tema abordado.

De las evidencias anteriores, se puede afirmar que considerar la perspectiva del docente de matemáticas frente al tema tratado fue importante en el proceso para validar las necesidades manifestadas por parte de los estudiantes que de cierto modo ya se habían planteado en *el reporte I*. También se reflejó algunos de los recursos o materiales manipulativos que reconoce el docente de matemáticas a la hora de emplearlos en la clase, los cuales se mencionaron en *el reporte I*.

En la revisión de literatura estipulada en *el reporte I*, se reflexionó como una probable solución a la problemática mencionada, es la intervención de algunas cuestiones derivadas de la aplicación de la geometría en el arte y viceversa, así pues en este sentido, para la implementación de la propuesta también se involucró el papel de la docente de arte.

A continuación, en el siguiente diagrama (véase figura 39) se aprecia una somera percepción sobre las matemáticas y el arte desde los puntos de otorgados en las encuestas elaboradas a los dos docentes.

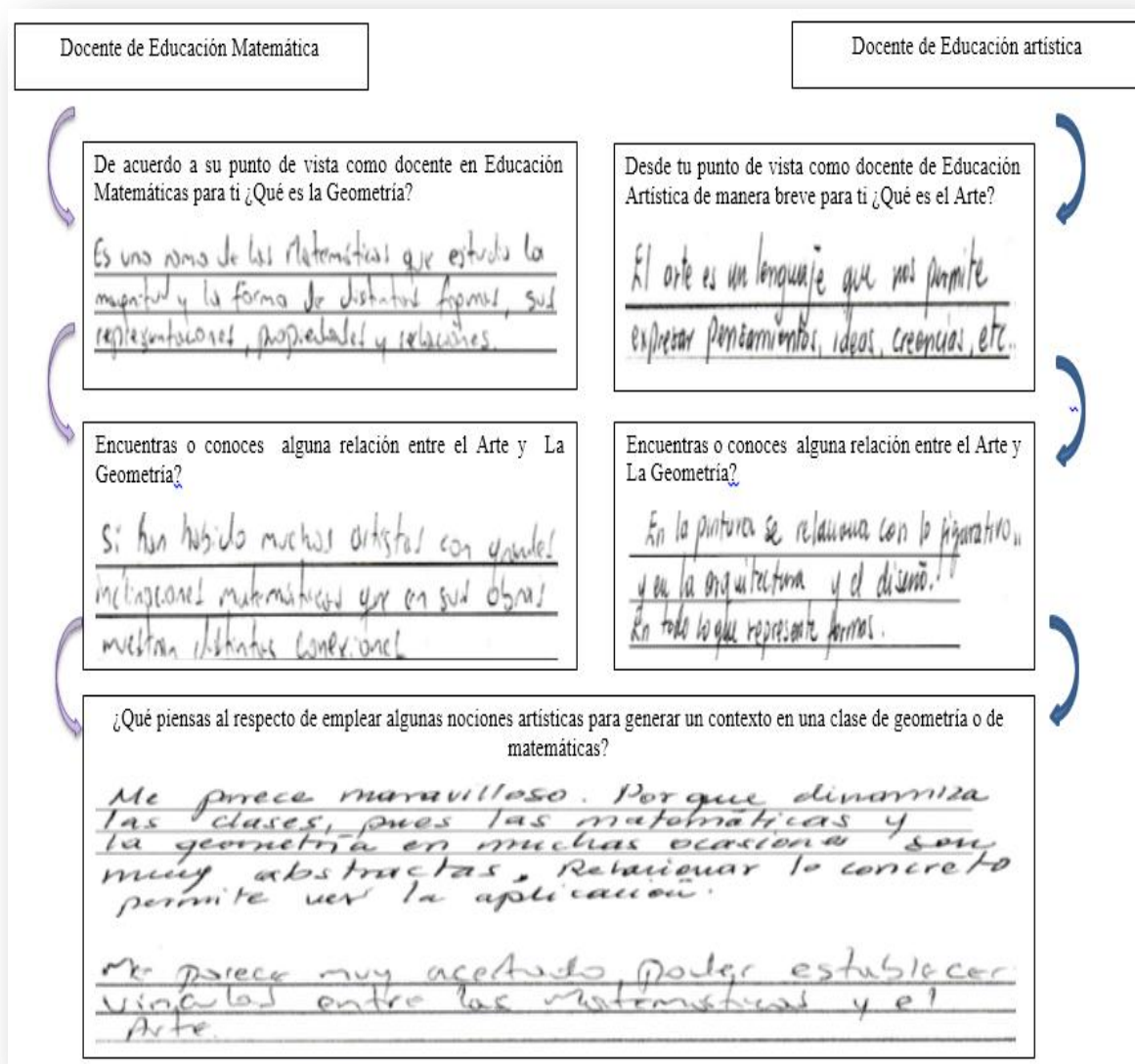


Figura 39: Algunas perspectivas frente a las matemáticas y al arte

La importancia y el interés de esta investigación se ve enmarcado en la necesidad de diseñar e implementar una propuesta alternativa que pueda resignificar la enseñanza de la geometría, a través del empleo de algunos recursos que permite una nueva mirada más dinámica que la habitual, por lo tanto, se consideró fortalecerla por medio a de enfoques artísticos.

Se le preguntó a la docente de arte ¿Conoces artistas que hicieron uso de las Matemáticas y la Geometría para construir sus obras? Sí___ No___ ¿Quiénes?

Maurice Echer, Omar Rayo, Picaso (cubismo)
y en la mayoría de pintores figurativos.'

La respuesta de la docente reafirma el vínculo que se quiere restablecer entre las matemáticas y el arte (estipulado en *el reporte I*). Aterrizando las ideas de manera concreta, la propuesta conduce emplear la técnica artística y milenaria, conocida como el origami o en términos latinos papiroflexia, en particular el Kirigami, en ese sentido, se elaboró la siguiente **tabla 12**, en donde se muestra algunos comentarios realizados por la docente de educación artística con respecto al tema tratado.

¿Qué entiendes por el término de Origami?	Arte del papel - doblar el papel
¿Conoces la técnica del Kirigami?	No. Creo, debe ser una variación del origami.
¿Alguna vez has utilizado en la clase el origami? ¿Cómo fue esa experiencia?	Sí, excelente, los estudiantes les fascina y se generan muchas figuras y alegría

Tabla 12: Tipificación de las respuestas de la docente de arte.

De nuevo, la docente manifiesta el conocer la técnica del origami, sin embargo no sucede lo mismo cuando se le pregunto sobre el Kirigami (probablemente su respuesta se dio por la etimología del término).

Otro aspecto encontrado radica en la experiencia del trabajo de la docente con las técnicas indicadas, por lo tanto, de cierta forma respalda la intención de propiciar en el proceso de

enseñanza de las matemáticas, en especial para potencializar la construcción de sistemas y pensamiento geométrico en los estudiantes, utilizar diferentes ambientes, materiales y recursos manipulativos.

Sobre las bases e ideas expuestas se justifica la pertinencia de tratar el concepto de semejanza en el aula, explorando algunos objetos que pertenecen a la geometría fractal. En la siguiente **tabla 13**; en la que se relacionan las respuestas de ambos los docentes, extraídas de las encuestas:

Docente de educación :	Pregunta: ¿Alguna vez has escuchado hablar acerca de la Geometría Fractal o del Arte Fractal? .Sí __ No__ ¿Qué?
artística	Sí __ No <u>x</u> ¿Qué? <u>Aunque ahora he aprendido un poco</u>
matemáticas	Sí <u>x</u> No __ ¿Qué? <u>Si, he leído sobre la aparición de la geometría fractal, sus precursores y sus características.</u>

Tabla 13: Tipificación del docente de matemáticas 3

De acuerdo a las dos respuestas se entiende que el docente de matemáticas conocía previamente sobre el tema, mientras que la docente de arte, expresa que lo desconoce aunque manifiesta que gracias a la vinculación en el proyecto y desarrolló del mismo, se ha generado algunas ideas al respecto.

Volviendo la mirada hacia las respuestas del docente de matemáticas, también se indagaron por cuestiones particulares del tema, por tanto, se realizaron las siguientes preguntas: ¿Conoce usted la Geometría Fractal? ¿Qué entiendes si una de sus principales propiedades es la auto semejanza? ¿Tiene usted en cuenta la evolución y el desarrollo histórico de la Geometría Euclidiana y las No Euclidianas?

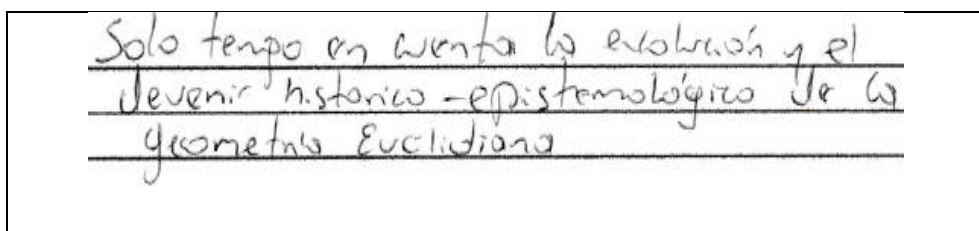
Efectivamente cada pregunta tuvo su correspondiente respuesta, para la primera se obtuvo la siguiente:

Si, he leído algunos documentos sobre geometría fractal y sus dos principales características (prop. de autosemejanza y la dimensión fractal)

Esta respuesta no refleja mucho sobre el concepto de auto semejanza pero si evidencia otra propiedad igualmente que caracteriza esta geometría, la dimensión fractal, según Mariño

(2004): “la dimensión fractal de una figura es un número d tal que si al expandir la figura con un factor de expansión de e , la figura que resulta se puede ver como si estuviera formada por n figuras idénticas (incluyendo el tamaño) a la figura original, de tal manera que $e^d = n$. Para figuras de la geometría tradicional, el número de dimensiones es igual a su dimensión fractal. (p.135); sin embargo esta última no hace parte de los intereses u objetivos de la presente investigación.

En la segunda pregunta respondió:



En esta respuesta se aprecia dos aspectos, el primero de ellos es de orden epistemológico, pues el docente manifiesta la importancia de la historia en el desarrollo de la geometría. El segundo, se relaciona con el proceso de enseñanza, debido a que se aprecia a modo general que en la actualidad las instituciones educativas de educación matemática (al menos en la Educación Básica y Media en Colombia) no se tienen en cuenta los nuevos saberes y se tiende a replicar lo que se nos enseñó las generaciones anteriores.

En resumen, tanto las entrevistas realizadas a los estudiantes y a los docentes implicados en el desarrollo del trabajo de grado, quienes manifestaron algunas dificultades que se presentan a la hora de la enseñanza de la geometría, con respecto al concepto de semejanza que además la revisión de literatura lo respalda, en ese sentido, se logró justificar la pertinencia de construir una propuesta educativa para fortalecer el concepto de semejanza a través de situaciones que se desarrollaron en torno a la geometría fractal y al arte. A continuación, se propone una serie de actividades para iniciar su estudio en el siguiente apartado.

2.3. Presentación de la propuesta de enseñanza

En este apartado se realizó una descripción de la propuesta considerando los siguientes elementos:

- ✓ Generalidades de las situaciones en términos de propósitos, materiales a utilizar, conceptos matemáticos y desempeños involucrados en el proceso
- ✓ Consignas de las tareas
- ✓ Análisis a priori de las mismas
- ✓ Resultados esperados

DISEÑO DE LA SITUACIÓN 1

A continuación en la siguiente tabla se consignaran los elementos más importantes:

Propósitos	-Aproximación intuitiva del concepto de auto semejanza. -Utilizar los conceptos de proporción y medida de segmentos para deducir condiciones de semejanza.
Descripción	Actividad 1:Aproximación a la propiedad de auto semejanza <i>Tarea1: “Zoom en algunas imágenes”</i> <i>Tarea2: “Zoom en algunos textos”</i> Actividad 2: A lápiz y papel <i>Tarea 1: “Construcción del conjunto de Cantor”</i>
Desempeños	-Construye figuras geométricas siguiendo un patrón. -Encuentra la relación numérica entre la medida de los segmentos. -Compara la longitud de segmentos -Reconoce proporcionalidad entre figuras semejantes.
Conceptos matemáticos	Magnitud, Razón, Proporción, semejanza y Auto semejanza.
Materiales	-Lápiz, borrador, colores, reglas y hojas de block

Al final de la actividad 1, se presentó un video que permitió realizar dos preguntas con diferentes propósitos cada una, la intención de la primera básicamente fue indagar sobre lo que entendieron acerca de la geometría fractal y la otra, a manera de reflexión vinculando sus experiencias en clases de matemáticas frente a este tipo de geometría.

De acuerdo al video presentado en clase:

Fractales- la dimensión oculta-1 de 4. Recuperado en el siguiente link:

<https://www.youtube.com/watch?v=oCdole7Fmpw>

Responde las siguientes preguntas:

¿Qué caracteriza a los objetos denominados como fractales?

¿La geometría que generalmente estudias en las clases, representan este tipo de situaciones vistas anteriormente? ¿Sí o no? Justifica tu respuesta.

COSIGNAS DE LA SITUACIÓN 1

Actividad 1

Tarea 1: “Zoom en algunas imágenes”⁷

Para la elaboración de la presente actividad por favor leer las siguientes consideraciones:

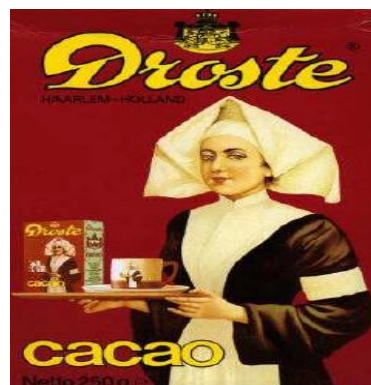
- ✓ Es importante conformar grupos entre 5 a 6 estudiantes.
- ✓ Cada grupo establecido debe elegir a un representante al que se le entregará el siguiente material:
 1. El dossier de la **tarea 1**.
 2. Una **hoja para el título**
 3. Una **tabla de puntos**.
 4. Una **imagen** seleccionada de manera aleatoria, la cual de ninguna manera puede ser observada por los otros grupos.
- ✓ De acuerdo a su imagen otorgada, el paso a seguir es dotarle de un título que mejor la represente o la describa. Recuerde anotarlo en la **hoja para el título** y posteriormente entregárselo al docente anexándole junto a la imagen que le correspondió.
- ✓ Inmediatamente el docente exhibirá todas las imágenes y los títulos de forma anónima es decir omitiendo la identidad de los trabajos de cada grupo. A su vez a cada título se le asignará un número, el cual se deberá escribir en la primera columna de la **tabla de puntos**.
- ✓ A partir de las asignaciones numéricas que se le atribuyeron a cada título y con referencia a sus criterios se deberá suponer la imagen corresponda a los distintos

⁷ Actividad tomada y adaptada según la investigación <http://moebius.dm.uba.ar/files/LaPrimeraPincelada.pdf>

Una imagen a llamar 1.(T1)



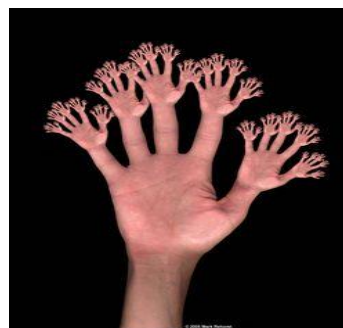
Una imagen a llamar 2.(T1)



Una imagen a llamar 3.(T1)



Una imagen a llamar 4.(T1)



Una imagen a llamar 5.(T1)



Imagen Una imagen a llamar 6.(T1)



Una imagen a llamar7. (T1)



Una imagen a llamar 8. (T1)



Tarea 2 “Zoom en algunos textos”

- ✓ Es importante conservar para esta actividad los mismos grupos constituidos en la tarea 1.
- ✓ A cada representante de los diferentes grupos se le entregará el siguiente material:
 1. El dossier de la **tarea 2**.
 2. Dos **hojas para dibujar**
- a) Leer con atención los siguientes textos y luego seleccionen dos de ellos para representarlos cada uno, a través de dos dibujos. Recuerde desarrollarlo en las **hojas para dibujar**.

TEXTO 1. Al mirar un río:

Garrido, H y García, R⁸ (2009) afirman: “*Un río es un cauce de agua al que llegan afluentes, y un afluente es un cauce de agua al que llegan arroyos, y un arroyo es un cauce de agua al que llegan riachuelos, y un riachuelo es un cauce de agua al que llegan barrancos, y un barranco es un cauce ocasional de agua al...*” (p.27)

TEXTO 2. Al mirar un brócoli:

Las plantas en general son una fuente de ejemplos casi inagotable de reiteración en la naturaleza, por ejemplo en el brócoli, se observa que es una verdura que posee un tronco constituido por un grupo de "florecillas" en la parte superior. Pero curiosamente, al mirar con más detalle, se aprecian tallos más delgados con sus respectivas "florecillas" que a su vez se componen por tallos aún más delgado y florecillas más pequeñas.

TEXTO 3. Al mirar la ramificación de los pulmones humanos:

La tráquea sufre una primera división en dos tubos, los bronquios, que a su vez se dividen cada uno en dos bronquiolos y así sucesivamente, hasta llegar al nivel de los alveolos. La superficie alveolar equivale a la superficie de una pista lisa de tenis en el interior de los dos pulmones de una persona.

⁸ Tomado el 5 de Junio de 2015 desde: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj4yYsMHKAhUGFx4KHZ-RD2oQFghCMAc&url=http%3A%2F%2Flibros.csic.es%2Fdownload.php%3Fid%3D748%26pdf%3Dproducts_pdfpreview&usg=AFQjCNF4GsMsj0hDnbvD_9BoPsabzHg0ug&bvm=bv.112454388,d.dm

TEXTO 4. Al mirar escritos sobre pulgas:

“Hobbes probó claramente que cada criatura vive en estado de guerra por naturaleza: Así, los naturalistas observan que una pulga tiene pulgas más pequeñas que viven a su costa, y que estas tienen aún más pequeñas que las muerden y así hasta el infinito” Swift. Poetry: aRhapsody

TEXTO 5. Al mirar una gota de agua:

Braun, E., (2003) afirma: “el pensador alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) propuso que una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua más pequeñas; cada una de estas pequeñas gotas encerraba a su vez un universo que tenía en su interior otras gotas de agua, todavía más pequeñas y cada una de ellas. (p.35)

TEXTO 6. Al mirar una palma:

"Si vuelvo a batir palmas, ¿sabes lo que ocurrirá? Se iluminarán los números pares en todo el triángulo, y los impares seguirán oscuros. ¿Quieres que lo haga? Lo que Robert vio entonces fue una auténtica sorpresa. ¡Es una locura! Un dibujo. Triángulos dentro del triángulo, sólo que cabeza abajo." Enzensberger, 1997

TEXTO 7. También por fuera de la naturaleza encontramos lo siguiente:

Braun, E., (2003) afirma: “Las famosas muñecas rusas están formadas por una muñeca grande en cuyo interior se halla otra muñeca, similar a la grande, pero de menor tamaño. Dentro de esta segunda muñeca hay otra similar, pero de tamaño aún menor. Un conjunto contiene cinco o seis muñecas, todas similares, pero cada una de menores dimensiones. Al pasar de una muñeca a la otra se está cambiando la escala. Al cambiar de escala, las muñecas en conjunto son similares.”

Actividad 2***Tarea 1: “Construcción del Conjunto de Cantor”***

Para la elaboración de la presente actividad por favor leer las siguientes consideraciones:

- ✓ Es importante conservar para esta actividad los mismos grupos constituidos en las actividades anteriores.
- ✓ A cada representante de los diferentes grupos se le entregará el siguiente material:
 1. El dossier de la **tarea 1**

2. Una *hoja para la construcción del Conjunto de Cantor*

Leer atentamente la siguiente situación:

Entre las múltiples dificultades que se presentaron a varios técnicos de sistemas de comunicaciones fue un cierto ruido que surgió en las líneas telefónicas, que se emplearon para transferir la información, como lo menciona Talenquer (2003):

“Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de *ruido* en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital (Peterson, 1988); esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación (del tipo de las que estamos acostumbrados a oír cuando hablamos por teléfono o escuchamos el radio). El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían como por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguía una estructura intermitente, y dentro de ésta...ya podemos imaginar la historia.”(p.26)

¿Pueden imaginarse gráficamente como eran aquellas interferencias? A continuación se presentará una manera de representar e ilustrar el modelo anterior, que dio lugar a un patrón similar al que se obtiene cuando se realiza el siguiente procedimiento:

PASO A PASO DE LA CONSTRUCCIÓN:

Se sugiere leer y realizar los siguientes pasos de manera ordenada, iniciando con trazos suaves con el lápiz y luego de terminar las instrucciones de la construcción, decóralo de forma creativa.

Es fundamental que a medida que se construyan los nuevos segmentos, estos se deberán ubicar inmediatamente debajo del anterior, empezando con la misma cantidad de segmentos obtenidos en el paso previo y además que sean equivalentes (de igual magnitud).

Paso 1: Trace un segmento de longitud L que sea múltiplo de 9 cm. (*No considerar el caso $L = 9$ cm*)

Paso 2: Dibuja de nuevo un segmento de longitud equivalente al anterior y divídelo en tres partes iguales ($l = L/3$); luego borra el segmento de la sección central, quedando así dos segmentos.

Paso 3: De acuerdo a la longitud y a la cantidad de segmentos obtenidos en el paso anterior, dibújalos de nuevo otra vez y divídelos en tres partes iguales borrando el segmento ubicado en la posición central de cada uno.

Paso 4: Repite en cada uno de los nuevos segmentos obtenidos el paso 3.

Después de realizar los pasos anteriores, responde las siguientes preguntas:

- Si se continúa con el mismo procedimiento indefinidamente ¿cuántas veces se puede realizar?
- ¿Qué se puede decir de la cantidad de los segmentos a medida que se van construyendo?
- ¿Qué ocurre con la medida de los segmentos a medida que se van construyendo?
- Halla la longitud de cada uno de los segmentos obtenidos en todos los pasos y luego completa las siguientes tablas, seleccionando con una equis (X) en las casillas Si o No de acuerdo a la pregunta.

El segmento obtenido en el **Paso 1°** tienen una longitud equivalente a ____ cm

¿Los segmentos obtenidos en el Paso 2° tienen la misma longitud?	Si	No
Si tu respuesta es afirmativa (Si), entonces la longitud de todos los segmentos equivale a ____ cm.		
Si tu respuesta es negativa (No), entonces obtuvieron diferentes medidas de longitud ¿cuáles?		

¿Los segmentos obtenidos en el Paso 4° tienen la misma longitud?	Si	No
Si tu respuesta es afirmativa (Si), entonces la longitud de todos los segmentos equivale a ____ cm.		
Si tu respuesta es negativa (No), entonces obtuvieron diferentes medidas de longitud ¿cuáles?		

Para tener en cuenta:

Si marcaron todas las opciones en la casilla (Si) por favor continuar con las preguntas. Si al contrario obtuvieron uno o diferentes resultados en cada paso, seleccione una medida y con ella realiza el ejercicio ¿Cómo explicas la causa que justifica que se presente diversas medidas en un mismo paso?

Compara la longitud de uno de los segmentos obtenidos en el **paso 2º**, con otro segmento obtenido en el **paso 1º**, para determinar:

- e) ¿Cuál es el segmento de mayor y de menor medida?
- f) ¿Cuántas veces está contenido el segmento de menor longitud en el segmento de mayor longitud?

Compara la longitud de uno de los segmentos obtenidos en el **paso 3º**, con otro segmento obtenido en el **paso 2º**, para determinar:

- g) ¿Cuál es el segmento de mayor y de menor medida?
- h) ¿Cuántas veces está contenido el segmento de menor longitud en el segmento de mayor longitud?

Compara la longitud de uno de los segmentos obtenidos en el **paso 4º**, con otro segmento obtenido en el **paso 3º**, para determinar:

- i) ¿Cuál es el segmento de mayor y de menor medida?
- j) ¿Cuántas veces está contenido el segmento de menor longitud en el segmento de mayor longitud?
- k) Completa la tabla de acuerdo a las magnitudes de los segmentos de tu actividad para determinar el valor de verdad del siguiente enunciado, (v) si es verdadero o (f) si es falso de acuerdo a tu construcción.

Razones	Simbolización	Proporción	Simbolización

✓ Los segmentos de tu construcción son auto semejantes. ()

Un poco de historia...

La construcción que realizaste pertenece a la Geometría Fractal, conocido como el Conjunto de Cantor (Peitgen, 1992) en honor a su creador, el matemático alemán Georg Cantor; famoso por su desarrollo de la teoría de conjuntos. Este "monstruo" fue presentado al público por primera vez en 1883.

- I) Completa el enunciado a partir de la experiencia de construir el Conjunto de Cantor, con algunos de sus términos caracterizadores: **aumentan**, **decrecen**, y **auto semejantes**.

El conjunto de Cantor, es un objeto fractal compuesto por segmentos proporcionales que cumplen la propiedad de ser _____. Si bien, a medida que se está construyendo, la cantidad de segmentos _____, y a la vez la longitud de ellos _____, por lo tanto, se le denomina también como el Polvo de Cantor

Diseño de la situación 2

A continuación en la siguiente tabla se consignaran los elementos más importantes:

Propósitos	-Evidenciar algunas manifestaciones presentes de la geometría fractal-vinculadas en torno al arte y la tecnología.
Descripción	- Actividad 1: En el papel <i>Tarea1: “Crea tu obra artística”</i> - Actividad 2: En el computador <i>Tarea 1: “Construcción del Triángulo de Sierpinski”</i>
Desempeños	-Identifica algunos polígonos. -Emplea el ordenador y geogebra como una herramienta para construcción de figuras. -Analiza la proporción de los lados de una figura plana y encuentra constante de proporcionalidad. -Comprueba criterios de semejanza de triángulos.
Conceptos matemáticos	Auto semejanza, Figuras planas, criterios de semejanza de triángulos y medida de ángulos.
Materiales	Fotocopias, colores, diapositivas, PC y geogebra.

A manera de conclusión los estudiantes contestaran las siguientes preguntas, al final del desarrollo de la actividad, teniendo de referencia la breve exposición donde se evidenciaron algunos de los resultados trabajados en la exploración de conexiones entre el arte y la geometría fractal.

Preguntas iniciales:

- I. ¿La relación entre matemáticas y arte ha sido trabajada en tu colegio por parte de tus profesores? Justifica tu respuesta.
- II. ¿Qué piensan acerca de la relación entre el arte y las matemáticas?

Preguntas Finales

- III. ¿Qué aspectos o características puedes decir acerca de los mándalas?
- IV. ¿Cómo crees que fue la experiencia de vincular algunos aspectos geométricos en contextos artísticos?

Actividad 1

Para la elaboración de la presente actividad por favor leer las siguientes consideraciones:

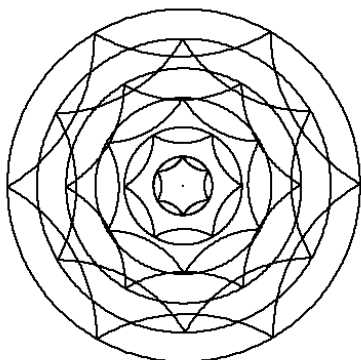
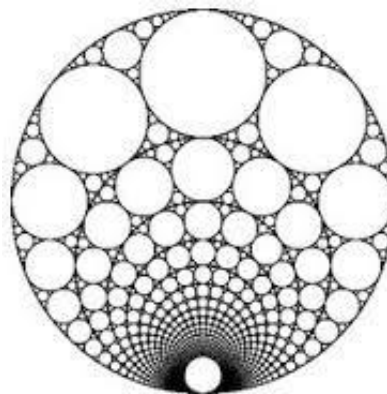
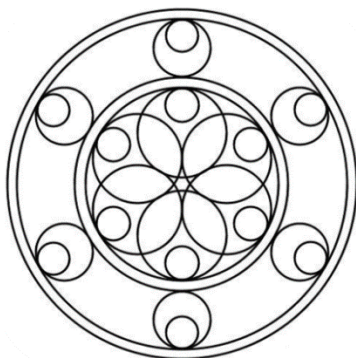
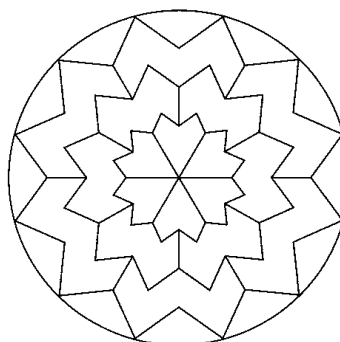
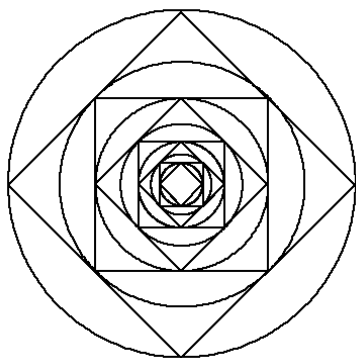
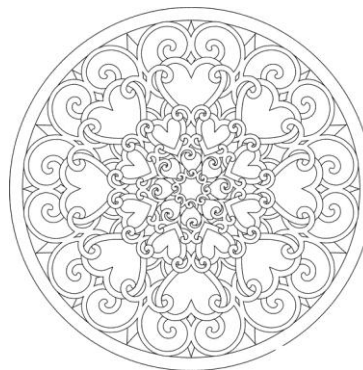
- ✓ Tener en cuenta la presentación previa realizada en clase titulada: ***Una mirada artística a la geometría fractal en contextos escolares.***
- ✓ Es importante conservar para esta actividad los mismos grupos constituidos.
- ✓ A cada representante de los diferentes grupos se le entregará el siguiente material:

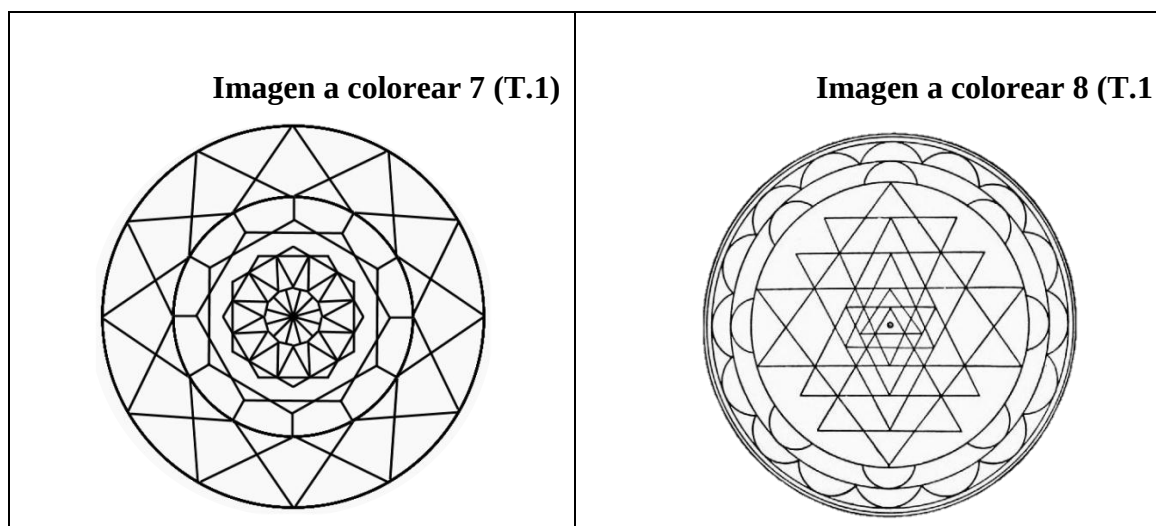
1. El dossier de la ***tarea 1.***
2. Una ***imagen a colorear*** seleccionada de manera aleatoria.
3. Una ***hoja para crear tu propio diseño.***

Tarea 1. “Crea tu obra artística”

De acuerdo a su imagen otorgada el paso a seguir es transformarla en una obra de arte, coloreando tú mándala. No olvides que en no debes dejar espacios sin pintar y cuánto más colores utilices mejor quedará tu trabajo.

- a) ¿Qué figuras geométricas conforman tu obra?
- b) ¿Puedes reconocer la propiedad de auto semejanza en tu obra? Justifique su respuesta
- c) Elabora tu propio diseño combinando algunas características que posean los fractales y los mándalas.

Imagen a colorear 1.(T.1)**Imagen a colorear 2.(T.1)****Imagen a colorear 3.(T.1)****Imagen a colorear 4.(T.1)****Imagen a colorear 5. (T.1)****Imagen a colorear 6. (T.1)**



Actividad 2

Para la elaboración de la presente actividad por favor leer las siguientes consideraciones:

- ✓ Es importante conformar un grupo de dos (2) estudiantes por computador.
- ✓ Emplear geogebra para la construcción.
- ✓ A cada grupo se le entregará el siguiente material:

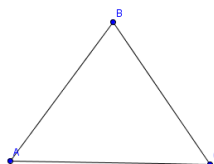
1. El dossier de la **tarea 1**.
2. Una **imagen a colorear** seleccionada de manera aleatoria.
3. Una **hoja para crear tu propio diseño**

Tarea 1 “Triángulo de Sierpinski”

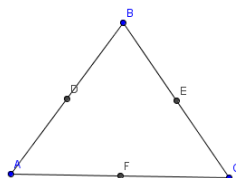
A continuación se presentará una alternativa para la construcción del Triángulo Sierpinski.

Reproduce el siguiente paso a paso:

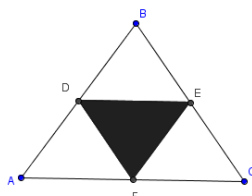
Paso 1: Trace los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ utilizando la opción segmento  >>



Paso 2: Determine los puntos medio D, E y F con opción  >> Sea D el punto medio de $\overline{AB}$, Sea E el punto medio de $\overline{BC}$ y Sea F el punto medio de $\overline{AC}$.



Paso 3: Tracé los segmentos $\overline{DE}$; $\overline{EF}$ $\overline{DF}$ y luego construya un triángulo ΔDEF con la opción polígono <<  >>



De acuerdo a la construcción anterior, respondan lo siguiente:

- a) Calcule el valor de la longitud de cada uno de los lados de los triángulos ΔABC y el ΔDEF . Posteriormente compruebe que son semejantes empleando el criterio de semejanza **(L-L-L)**.

Para justificar tu respuesta complete el siguiente cuadro:

Triángulo ΔABC		Triángulo ΔDEF		Razón entre lados homólogos (k)
Lado	Longitud	Lado	Longitud	
$\overline{AB}$		$\overline{EF}$		$k = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} =$
$\overline{BC}$		$\overline{DF}$		$k = \frac{\overline{BC}}{\overline{DF}} =$
$\overline{AC}$		$\overline{DE}$		$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} =$

Sugerencia: La longitud de un segmento se obtiene seleccionando la opción distancia o longitud <<  >> sobre los puntos que limitan el segmento que necesite medir

- b) Halle el perímetro de los triángulos ΔABC y ΔDEF y Halle la razón entre ambos perímetros.

$$\frac{\text{Perímetro del } \Delta ABC}{\text{Perímetro del } \Delta DEF} =$$

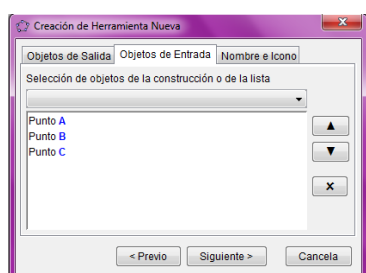
- c) ¿Qué relación existe entre la razón de semejanza y la razón de los perímetros de los triángulos estudiados?

A continuación se generará una nueva herramienta:

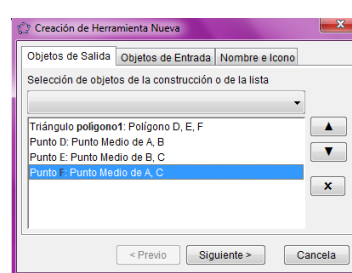
Paso 1: Despliegue la opción de herramientas para la creación de una nueva herramienta.

Paso 2: Indique los puntos A, B y C como **Objetos de entradas** y luego seleccione el punto D (punto medio de A y B); el punto E (punto medio de B y C) y el punto F (punto medio de A y C) como **Objetos de salida**.

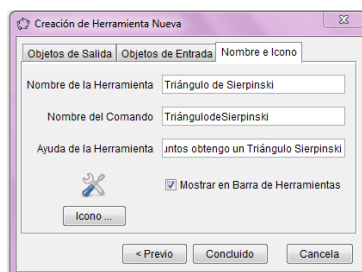
Objetos de entrada



Objetos de Salida

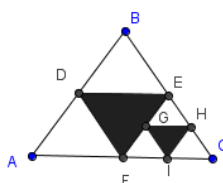


Paso 3: Posteriormente nombra la nueva herramienta como **Triángulo de Sierpinski** y en la casilla ayuda escribe por ejemplo: *Un triángulo Sierpinski a partir de tres puntos.*



Paso 4: Inmediatamente después haber concluido, emerge una nueva opción en la barra de herramientas <<  >>

Paso 5: Selecciona la opción **Triángulo de Sierpinski** sobre los puntos del triángulo $\triangle FEC$ para obtener una construcción similar a la siguiente:



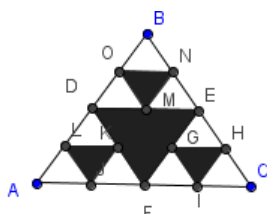
- d) Determina si los triángulos $\triangle DEF$ y el $\triangle GHI$ son semejantes. Emplee alguno de los dos criterios (**L-A-L**) ó (**A-A**) **Sugerencia:** la amplitud de un ángulo se obtiene

seleccionando la opción <<  >> sobre los tres puntos o las dos rectas que necesite medir.

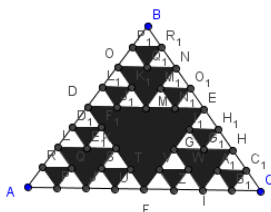
Conteste las siguientes preguntas de acuerdo a los triángulos ΔABC y ΔCEF .

- e) ¿Existe un ángulo en común entre los triángulos anteriormente mencionados? Especifíquelo y halle su amplitud
- f) ¿Determina si los triángulos son semejantes? Empleando el criterio (**A-L-A**)

Paso 6: Selecciona de nuevo la opción de **Triangulo de Sierpinski** sobre los puntos de ADF y BDE, resultando una construcción como la siguiente ilustración:



Paso 7: Repite el procedimiento anterior en todos los triángulos posibles, construirás algo similar a lo siguiente:



- g) ¿Qué sucede si “arrastras” o “mueves” los vértices del triángulo ABC?
- h) Explora con la ayuda de la herramienta zoom de alejamiento y acercamiento ¿Cómo son las partes del triángulo con respecto al total?

Un poco de historia...

El Triángulo Sierpinski es quizás el ejemplo más representativo de la Geometría Fractal, desarrollado por uno de los matemáticos de origen polaco más influyente de su época Maclaw Sierpinski que data de 1916.

Diseño de la situación 3

A continuación en la siguiente tabla se consignaran los elementos más importantes:

Propósitos	-Construir algunos fractales en tres dimensiones mediante la técnica de Kirigami.
-------------------	---

	-Realizar apreciaciones y aproximaciones de semejanza en figuras tridimensionales
Descripción	Se compone de una sola actividad. Actividad 1: Manos a la obra <i>Tarea1: “Producción en el espacio”</i>
Desempeños	-Reconocer algunos polígonos. -Identifica la repetición de figuras. -Construye objetos tridimensionales.
Conceptos matemáticos	auto semejanza
Materiales	Fotocopias, cartulina de colores, tijeras, regla y transportador.

Después de la elaboración de los fractales presupuestos en tres dimensiones, se realizó la siguiente encuesta, con la finalidad de preguntar los aspectos que lograron apreciar en cuanto a la construcción de los fractales a lo largo del trabajo y a la vez informarles sobre la feria.

Responde brevemente las siguientes preguntas:

- I. ¿Qué aspectos comunes o diferentes encontraste a la hora de construir algunos fractales en diferentes contextos?

La fase final del nuestro trabajo es realizar una feria de matemáticas optativamente denominada **PINCELANDO FRACTALES**, en la cual se compartirán algunas ideas de estos objetos geométricos a toda la comunidad estudiantil

¿Estás de acuerdo con ese nombre? Sí _____ No _____

Si _____ tienes _____ en _____ mente _____ otro _____ ¿Cuál _____ podría ser? _____

Consigna de la situación 3

Para la elaboración de la presente actividad⁹ por favor leer las siguientes consideraciones:

- ✓ Es importante conformar los mismos grupos establecidos en las actividades anteriores, entre 5 a 6 estudiantes.

⁹ Tomada y modificado de los siguientes páginas web: <http://mates5y6.blogspot.com/p/fractales-de-papel.html> y también <http://tallermatematicasfuentealta.blogspot.com/2010/12/fractales-con-papel-y-tijera-2-el.html>

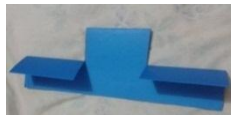
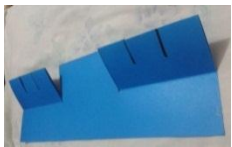
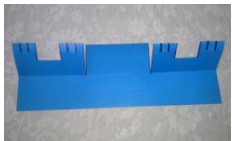
✓ Cada grupo establecido se le entregará el siguiente material:

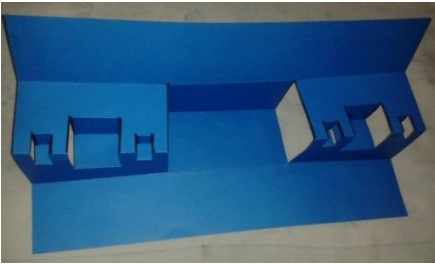
1. El dossier de la **tarea 1**.
- 2.

Tarea 1 “Producción en el espacio”

A continuación se presentará una alternativa para la construcción del **.CONJUNTO DE CANTOR**.

Reproduce el siguiente paso a paso:

PASO A PASO DE LA CONSTRUCCIÓN	ILUSTRACIONES
Paso 1 .Doblamos la cartulina a lo largo y luego por el lado donde se originó el dobléz, trazamos dos líneas paralelas que lo dividan en tres partes iguales hasta la mitad del ancho de la cartulina.	
Paso 2: Realizamos dos cortes sobre las líneas que se trazaron y luego marcamos los dobleces como se aprecia en la ilustración.	
Paso 3: A partir de los dos dobleces que se originaron en el paso anterior, sin incluir el del medio, volvemos a trazar dos líneas paralelas que lo dividan en tres partes iguales como se observa en la ilustración.	
Paso 4: Realizamos dos cortes sobre las líneas que se trazaron y luego marcamos el doblez, en sentido contrario, de manera cómo se dobló en el paso 2.	
Paso 5: En cada una de las cuatro nuevas solapas, repetimos el procedimiento de trazar dos líneas paralelas que lo dividan en tres partes iguales hasta su mitad.	

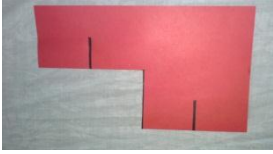
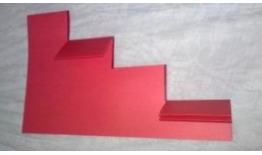
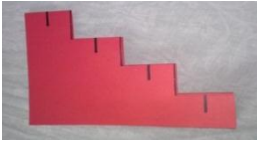
Paso 6: Se realizan los cortes sobre las líneas que se trazaron en el paso anterior y luego marcamos los dobleces en el mismo sentido del paso 4, como se aprecia en la ilustración.	
Paso 7: Ahora sólo hay que ir orientando los dobleces en el sentido que nos interesa. El doblez más grande queda hacia adentro, dejando hacia afuera el doble del medio como se muestra en la ilustración.	
Paso 8: Repetimos de nuevo el paso anterior, en los dos extremos de nuestra construcción como se aprecia en la ilustración.	
Paso 9. De nuevo repetimos el mismo procedimiento que se realizó en el paso 7, en cada uno de las partes de nuestra construcción.	
Paso 10: Así llegamos a nuestro modelo del Conjunto de Cantor desdoblamos los dobleces extremos. 	

A partir de la construcción del fractal elaborado en clase, responde la siguiente pregunta:
¿Qué aspectos puedes determinar que lo caracterizan?

Tarea 1 “Producción en el espacio”

A continuación se presentará una alternativa para la construcción del **TRIÁNGULO SIERPINSKI**

Reproduce el siguiente paso a paso:

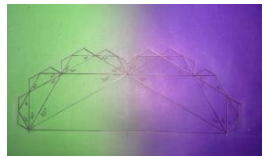
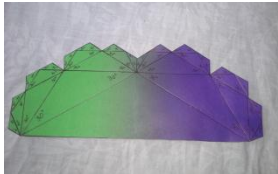
PASO A PASO DE LA CONSTRUCCIÓN	ILUSTRACIONES
Paso 1: Doblamos la cartulina transversalmente en dos partes iguales. Luego trazamos una línea por el lado del dobléz que pase por el punto medio hasta la mitad del ancho de la cartulina como se muestra en la ilustración.	
Paso 2: Realizamos el corte sobre la línea que se trazó y luego marcamos el dobléz.	
Paso 3: Una vez marcado el dobléz, lo metemos hacia dentro, como se puede observar en la ilustración, quedándonos así una especie de escalera de dos peldaños.	
Paso 4: En cada uno de los peldaños, trazamos líneas hasta la mitad como se observa en la ilustración.	
Paso 5: Repetimos la operación de corte al medio sobre las líneas que se trazaron en el paso anterior y luego se marcan los dobleces como se aprecia en la ilustración.	
Paso 6: Una vez marcado los dobleces los metemos hacia adentro como se puede apreciar en la ilustración, quedándonos una especie de escalera de cuatro peldaños.	
Paso 7: Ahora realizamos el mismo procedimiento en cada uno de los 4 peldaños. Marcamos punto medio, trazando una línea hasta la mitad de cada uno.	

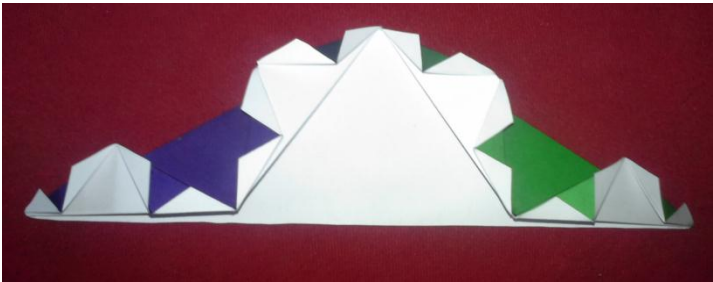
Paso 8: Realizamos los respectivos cortes y marcamos los dobleces como se aprecia en la ilustración.	
Paso 9: Una vez marcado los dobleces, los metemos hacia adentro como se puede apreciar en la ilustración, quedándonos una especie de escalera de ocho peldaños.	
Paso 10: Realizamos el mismo procedimiento en cada uno de los 8 peldaños. Marcamos punto medio, trazando una línea hasta la mitad de cada uno.	
Paso 10: Repetimos la operación de corte al medio sobre las líneas que se trazaron en el paso anterior y luego se marcan los dobleces como se aprecia en la ilustración.	
Paso 11: Una vez marcado los dobleces, los metemos hacia adentro como se puede apreciar en la ilustración, quedándonos una especie de escalera de ocho peldaños.	
Ahora contempla el Triangulo Siespinski 	

Tarea 1 “Producción en el espacio”

A continuación se presentará una alternativa para la construcción de **LA CURVA DE KOCH**.

Reproduce el siguiente paso a paso:

Paso 1: En una hoja de cartulina preferiblemente de caras de distinto color, trazamos dos rectas de la siguiente manera: la primera, que divida la cartulina en dos partes iguales y la segunda que se perpendicular a la anterior	
Paso 2: Construimos un triángulo isósceles, el cual tenga dos ángulos congruentes de 30° y el desigual de 120°	
Paso 3: Haciendo uso del transportador toma los dos lados iguales y repite los ángulos de 30° en cada vértice	
Paso 4: Repite este proceso trazando todos los triángulos posibles hasta obtener una construcción similar a la ilustración.	
Paso 6: Recorte por el borde de la construcción que realizaste	
Paso 7: Toma los últimos triángulos y dóblalos hacia el	

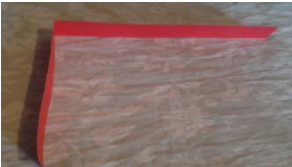
interior, toma los siguientes y dóblalos hacia el exterior	
Paso 8: Repite el procedimiento anterior varias veces, como se muestra en la ilustración.	
Ahora contempla La curva de Koc 	

Tarea 1 “Producción en el espacio”

A continuación se presentará una alternativa para la construcción de. **LA CURVA DEL DRAGON.**

Reproduce el siguiente paso a paso:

PASO A PASO DE LA CONSTRUCCIÓN	ILUSTRACIONES
Paso 1: Corta una tira a lo largo de la cartulina, la cual puede ser de unos 2 o 3 centímetros de ancho.	
Paso 2: Dobla la tira por la mitad, tomando el extremo	

izquierdo y llévalo hacia el extremo derecho. Los siguientes dobleces se deben hacer en igual sentido.	
Paso 3: Es importante que el doblez que se genere forme un ángulo recto como se muestra en la ilustración..	
Paso 4: Realiza de nuevo un doblez por la mitad de la tira de manera similar al paso 2, ahora la tira queda dividida en cuatro partes iguales:	
Paso 5:Al desdoblar la tira, cuida que todos los dobleces sean aproximadamente como ángulos rectos.	
Paso 6: Vuelva a doblar la tira como estaba hasta el paso 4, y luego realice otro doblez a la mitad. La tira queda ahora dividida en ocho partes iguales:	
Paso 7:Al desdoblar la tira tenemos una construcción similar a la siguiente:	
Paso 8: Nuevamente regrese a los dobleces del paso 6, y realiza otro doblez por la mitad. Ahora la tira queda	

dividida en dieciséis partes iguales:	
Paso 9: Desdoblamos la tira por última vez para obtener la primera curva.	
Paso 10: Realiza otras 7 curvas de manera análoga al anterior, como se muestra en la ilustración., teniendo presente emparejarlas de acuerdo a un color.	
Paso 11: Junta las curvas como se muestra en la ilustración. Repita el procedimiento para los otros tres colores.	
Después de Añadir las otras curvas, ahora contempla la Curva del Dragon. 	

A partir de la construcción del fractal elaborado en clase, responde la siguiente pregunta:
¿Qué aspectos puedes determinar que lo caracterizan?

2.4. Resultados esperados

Se espera que las diferentes situaciones planteadas sean aceptadas por los estudiantes debido a que se tomó de referencia los reportes descritos anteriormente para diseño de la propuesta, en donde se contemplaron algunas características del arte como un contexto probablemente motivador que reedifique el quehacer geométrico para su enseñanza en el aula de clase, en ese sentido ante la riqueza y diversidad de las distintas geometrías contemporáneos, en particular a los objetos denominados como fractales, los cuales hicieron parte fundamental en el diseño de estas actividades se parte del hecho desde la misma etimología de la palabra geometría, como se ha venido mencionando a lo largo de este trabajo, desde sus inicios se relacionó directamente con características prácticas (medida de la tierra), por tanto, lo sensorial juega un rol relevante.

Para tal efecto, se elaboraron un conjunto de actividades que permitieron abordar una de las características que describe la geometría fractal, la propiedad de auto semejanza, una alternativa para estudiar el concepto la semejanza. La planeación de cada una de las tareas estipuladas, demandó ciertas particularidades como se explicita continuación a modo general:

Situación 1. Actividad 1

Tarea 1:

Ventajas: La presentación de esta tarea se espera que sea atractiva y motivadora para los estudiantes, porque se les muestran diferentes imágenes situadas principalmente en el arte y otros contextos, que les permitirá a ellos experimentar una forma no convencional de emplear las matemáticas, promoviendo la curiosidad por diversas cualidades geométricas y visuales. Esta idea reposa en el argumento de Gallo, O y otros (2004) quienes afirman:

La movilización del pensamiento espacial se ha de lograr mediante actividades de percepción visual a través de la manipulación de materiales que constituyen en los mediadores que facilitan el aprendizaje creativo, permiten redescubrir las propiedades geométricas, y preparan al estudiante, dándole la competencia necesaria para demostrar teoremas y formular generalizaciones, en los cursos posteriores. (p.38)

Cabe destacar que el objetivo principal del diseño de esta tarea es lograr que el estudiante aprecie y descubra de manera intuitiva la recursividad, o el patrón que se replica indefinidamente en cada una de las imágenes.

Desventajas: Quizás un aspecto que influya en la percepción de las imágenes, puede originarse por la característica física de la hoja y por efectos de impresión, probablemente este hecho afecte este proceso e implique que no se logre interpretar el modelo reiterativo e infinito que lo caracteriza.

Tarea 2:

Ventajas: Mediante la resolución de esta tarea se procura estimular en los estudiantes la lectura y la interpretación de la misma, pues a partir de la exposición de breves textos pluridisciplinarios escritos, factiblemente les concederá a los estudiantes apreciar de modo sutil un proceso reiterativo concurrente en cada uno de ellos.

Esta actividad en particular, en cierta medida se argumenta en el siguiente pensamiento: *“se trata, pues, de actuar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales.”* (Vasco, C, 2006, p.33). De esta manera, el desarrollo de esta consigna permitirá elaborar algunos dibujos (con ciertas características similares a las imágenes presentadas en la tarea 1), los cuales servirán como modelos de representación y construcción de los diferentes contextos descritos en los textos.

Desventajas: Es probable que el bajo desempeño de la lectura pueda afectar el desarrollo y resolución de esta tarea a la hora de intuir la característica de una repetición indefinida.

Situación 1. Actividad 2

Tarea 1:

Ventajas: Mediante el proceso de desarrollo de esta actividad, se intenta que los estudiantes construyan el Conjunto de Cantor siguiendo un patrón sencillo expresado en forma de instrucciones escritas, para luego ser representado a través de un modelo gráfico. Siguiendo las estipulaciones emanadas por el MEN (2003) afirman:

Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos. (p.51)

De acuerdo a las breves instrucciones, lo más probable es que la mayoría logren generar el cambio a partir de una representación escrita a uno gráfico y posteriormente puedan derivar la propiedad auto semejantes en términos matemáticos.

Desventajas: Es posible que la mayor dificultad se presente en el momento de describir la propiedad de auto semejanza entre los segmentos que conforman el fractal, pues a medida que se elabore se deberá establecer la longitud y la relación numérica de los segmentos, para luego emplear conceptos tales como razones y proporciones conceptos previos al abordaje de la semejanza (tratados en el *reporte I*)

Situación 2.Actividad 1

Tarea 1:

Ventajas: Se proyecta que la resolución de esta tarea sea bastante dinámica, de hecho algunos estudiantes y la docente de arte propusieron su inmersión en el proyecto, en ese sentido, su realización le permitirá identificar algunas figuras geométricas empleadas con fines artísticos, en particular cuando se trabaja con los mandalas, explorando algunas similitudes que caracterizan la auto semejanza presente en la geometría fractal y en el arte en general, por lo tanto, la expectativa de este ejercicio es favorecer el progreso del pensamiento creativo y estética, para la obtención de diferentes producciones de carácter libre, que vinculan nexos entre las matemáticas y el arte.

Desventajas: Puede ser que algunos estudiantes no logren identificar ninguna figura geométrica en los mándales, por ende, elaboren dibujos que no orienten a los objetivos planteados.

Situación 2.Actividad 2

Tarea 1:

Ventajas: Al planear esta actividad se tiene en cuenta que geogebra es un programa libre y gratuito, y además que los estudiantes en situaciones anteriores habían explorado este programa¹⁰, en consecuencia, se espera que la construcción del fractal conocido como Triángulo de Sierpinski sea una actividad amena y significativa para los estudiantes. “*Con el acceso a la manipulación directa, la enseñanza de la geometría ofrece un interesante desarrollo hacia una nueva conceptualización de ésta, como el estudio de las propiedades invariantes de las figuras geométricas.*”(Men, 1999, p.56). Debido al uso de algunas herramientas que tiene software mencionado, lo que posiblemente concederá justificar la auto

¹⁰ Una manifestación explícita del docente de matemáticas.

semejanza a partir de las bondades que suministra el arrastre y el zoom. Al respecto de Gallo, O y otros (2004) afirman:

(...) la herramienta arrastre permite ver que las características de una figura así construida no solo son para el caso particular que se observa inicialmente en la pantalla sino que lo son para toda una familia, es decir que son generales para todas las figuras del mismo tipo. Esto favorece al avance hacia la generalización. (p.42)

En cuanto a la herramienta zoom, el Men (1999) propone: “*mediante la función ZOOM se pueden hacer acercamientos, tanto como se quiera, y observar qué pasa*” (p.56)

Por lo tanto, se tiene la expectativa que los estudiantes fuesen capaces de llegar a una verificación de la propiedad de auto semejanza mediante argumentos visuales a través de gráficos de la computadora, lo que les ayudará a modificar y manipular los objetos fractales

Desventajas: Podrían presentarse por dos cuestiones, la primera puede salir a relucir por la ausencia de computadores en muchas instituciones educativas, lo que se considera como un obstáculo para trabajar con estos tipos de software y por otro lado, existen docentes que posiblemente sean reacios a su utilización.

Situación 3.Actividad 1

Tarea 1: A través de la elaboración de esta actividad, se pretende que los estudiantes desarrollen una conciencia del trabajo en grupo, además de la creatividad y el sentido estético a partir de la construcción y experimentación de algunos fractales, con ello extraer cualidades y características (la auto semejanza) que emergen cuando se emplean materiales manipulativos como la cartulina, el cual es muy ligero, económico y, por tanto, de fácil manejo para los estudiantes. Al respecto de Gallo, O y otros (2004) afirman:

El contacto del estudiante con su entorno a través de los sentidos de la vista y del tacto, mediante la observación y manipulación de objetos reales constituyen las primeras experiencias espaciales euclidianas y son el punto de contacto entre la cotidianidad y el inicio del Pensamiento Matemático. (p.38)

Entonces se espera que la culminación de esta tarea, logre la construcción de todos fractales propuestos reconociendo empleo de la técnica de Kirigami y vez evidenciar en una de las relaciones entre arte con aspecto geométricos tridimensionales, por tanto se aspira que el docente reconozca el doblado de papel como herramienta para la enseñanza de conceptos

de la geometría de manera innovadora diferente al manejo de la regla y del compás y para el estudiante, el doblado de papel se convertirá en una actividad practica y lúdica

Desventajas: Es posible que los estudiantes al momento de leer las instrucciones no sean muy claras y efectivamente al intentar elaborar el fractal asignado, no logren realizar las medidas y los cortes adecuados a la hora de construirlo.

Otro aspecto a mencionar porque los estudiantes desconocen la técnica del Kirigami y en consecuencia, se deberá asumir este ejercicio considerando el manejo de las tijeras para evitar algún accidente que pueda surgir entre los estudiantes.

REPORTE III.

MACRO-RELATO DE LA EXPERIENCIA, TRABAJO DE CAMPO Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

De acuerdo a la inmersión en el contexto previamente singularizado (en el *reporte I* y *reporte II*), a continuación se realizará una descripción de la vivencia, con el fin de determinar e identificar algunas reflexiones y recomendaciones en términos de dificultades, limitaciones y potencialidades entre los diferentes elementos y materiales empleados, con la intención de presentar algunos vínculos entre el arte y las matemáticas, en un proyecto pensado para la Educación Matemática.

En cada una de las situaciones presentadas se planteó una metodología de trabajo participativo con el propósito de que los estudiantes a través de la comunicación e interacción, planeen estrategias de solución en las diferentes problemáticas que emergen a la hora de crear y caracterizar algunos objetos fractales, principalmente centrando la atención en la propiedad de auto semejanza.

A continuación, se elaboró un esquema (*véase figura 40*) en el que se muestra la manera en cómo se relaciona y se desarrollaron las actividades:

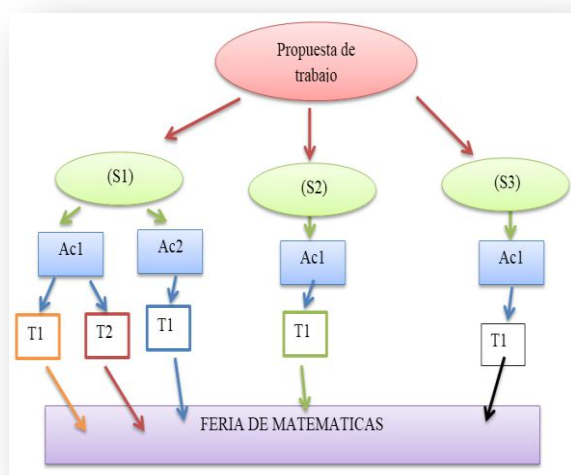


Figura 40: Propuesta de trabajo en el aula de clase

Para la comprensión del esquema anterior y con el relato descriptor de la práctica de los estudiantes se hace relevante presentar la siguiente notación necesaria:

En el mayor porcentaje del tiempo del trabajo para los estudiantes se contempló llevarlo a cabo en grupos (mas de 4 integrantes). Para tal efecto, se denotaron de la siguiente forma: grupo 1 (G 1), grupo 2 (G 2), grupo 3 (G3), grupo 4 (G 4), grupo 5 (G 5); grupo 6 (G 6); grupo 7 (G 7) y el grupo 8 (G 8). El restante tiempo del trabajo de los estudiantes fue en parejas.

En cuanto a la propuesta de trabajo se encuentra conformada por tres situaciones se denotaron de la siguiente manera situación 1 (S1); situación 2 (S2) y situación 3 (S3). Cada situación se encuentra conformadas por unas actividades: actividad 1 (Act1) y actividad 2 (Act2).

Otro aspecto a destacar, radica en la importancia de ampliar el relato mediante los diferentes datos recolectados durante el mismo proceso, convirtiéndose esta información obtenida en un insumo palpable obtenida de los distintos participantes.

Antes de iniciar la descripción de cada una de las sesiones en donde participaron los estudiantes, se consideró importante describir en la que se denominó como sesión 1, algunas cuestiones que se abordaron con los docentes.

3.1 Sesión 1

3.1.1. Información general

Fecha y hora: 2 Octubre de 2015 (viernes 8:00 a.m. 11:00 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Sala de profesores.

Participantes: Investigador-Docentes.

Asunto: Presentación de algunas generalidades y contextualización del proyecto de trabajo frente a los docentes de las áreas de educación artística y matemática.

3.1.2. Observaciones de la puesta en práctica

En esta sesión preliminar, se destinaron las encuesta diseñadas para cada uno de los docentes y además se les comunicó sobre la intencionalidad de encuestar a los estudiantes para abordar los temas tratados desde diferentes puntos de vista. Posteriormente, se realizó una breve presentación personal en la que se incluyó la exposición de los objetivos planteados del proyecto junto a la propuesta “tipo borrador” de las diferentes situaciones que afrontaron los estudiantes.

A continuación en el siguiente **tabla 14**, se consignaron algunas de las recomendaciones realizadas por los docentes en donde se discutieron aspectos conceptuales y de orden metodológico tanto de la organización del tiempo y de los materiales a emplear.

Docente	Algunas recomendaciones
De matemáticas	Por motivo de carácter administrativo de la institución propone que con anterioridad se le informe a los estudiantes la labor de descargar geogebra portable en sus respectivas memorias USB para evitar la gestión de solicitud del permiso e instalación de los equipos para desarrollar la S1AC2
	Sugerencia de cambio el grado (inicialmente se había acordado el curso de 9-3 pero a lo último se decidió por 9-5), por motivos de tiempo y posible aceptación del trabajo.
	Planteó emplear en una de sus clases la encuesta para los estudiantes ¹¹ .
De artística	Sugirió para el trabajo emplear la técnica de los mándales y el uso de retahílas en la SI.Act1 .

Tabla 14: Algunas recomendaciones

A partir de los argumentos e ideas de los profesores se decidió incluir por un lado, todas las recomendaciones del profesor de matemáticas, y por otro lado, algunas recomendaciones realizadas por la profesora de arte, en cuanto al empleo los mándalas, (el uso de las retahílas sonó interesante pero opto como una futura tarea para posteriores trabajos de esta índole).

3.2. Sesión 2

3.2.1. Información general

Fecha y hora: 15 de Octubre de 2015 (jueves 7:30 a.m. 9:30 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Salón (9-5).

Participantes: Investigador-Docente de matemáticas-estudiantes.

Asunto: Presentación de algunas generalidades y contextualización del proyecto de trabajo frente a los estudiantes y Aplicación de la S1.Act1.

El docente de matemáticas solicitó a los estudiantes que establecieran 8 grupos (entre 5 a 6 integrantes), para elaborar cada una de las actividades estipuladas durante todo el proceso, exceptuando la S2.Act2.

¹¹ Antes de dar inicio a la descripción de la segunda sesión, el docente de matemáticas previamente proporciono las encuestas que contestaron los estudiantes, aquel análisis se encuentra explicitado en el reporte I.

3.2.2. Observaciones de la puesta en práctica

Tarea 1 “Zoom en algunas imágenes”

Se puede afirmar que la realización de esta tarea se dio en buenos términos, debido a la participación activa de los estudiantes en la manera en como los estudiantes deliberaban en sus grupos conformados, permitiendo enriquecer los resultados obtenidos a la hora de titular la imágenes presentadas, como se evidencia la siguiente fotografía (*Véase figura 41*)



Figura 41: Títulos e imágenes

En aquella fotografía, se puede apreciar en el lado derecho del tablero dos columnas de imágenes, mientras que en el lado izquierdo se puede observar los títulos asignados por los estudiantes en hojas. A continuación, en la siguiente **tabla 15**, a modo de resumen se relacionaron los diferentes grupos con el título que describe la imagen que se fue asignada.

Grupos	Títulos
G1	<i>“Espejismos e Ilusiones”</i>
G2	<i>“Los productos de la monja”</i>
G3	<i>“El infinito afilado”</i>
G4	<i>“Más allá de la mano”</i>
G5	<i>“Lente tras lente, refleja tu mente”</i>
G6	<i>“Espiral infinito”</i>
G7	<i>“Secuencias de mano”</i>
G8	<i>“Sentimientos reprimidos”</i>

Tabla 15: Correlación entre las imágenes y los títulos

A través de la resolución de esta tarea se logró la noción de repetición a diferentes escalas a partir de ilustraciones artísticas y de otras índoles, por lo tanto, resultaron comentarios como los siguientes,

“En nuestro grupo logramos observar que la imagen se repite consecutivamente.” (G3)

“Si, en la imagen podemos apreciar que de un objeto surge otro y así sucesivamente formando una cadena repetida” (G4)

Otra cuestión interesante que se observó fue el empleo del concepto del infinito potencial, al respecto Aponte (2014) expresa: La visión de infinito en la mayoría de los hombres está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente (infinito es lo que no tiene fin), es decir, la noción de infinito potencial. (pp.71.72), aludido tanto por el G3 y el G6 (el infinito es una característica básica e inherente de los objetos fractales, a la cual en este estudio no se le realizó mayor énfasis sin embargo no se desconoce su presencia).

Ahora bien, cuando se les preguntó que determinaran la cantidad de veces que se repetían los objetos o personajes de cada una de las imágenes, se tuvieron dos tipos de respuestas que fueron clasificadas de la siguiente manera:

Por un lado, las respuestas que aluden a una cantidad que se repite de manera finita expresable en un número natural, por ejemplo: “6 veces” (G5), “5 veces” (G1), “4 veces” (G6)

En contraste al tipo de respuesta anterior, se obtuvieron otras que describen un proceso de duplicación indefinida, por ejemplo: *“Se hace evidente la dificultad y limitaciones que proporciona los objetos físicos con relación a procesos que se repiten de manera indeterminada”* (G3). *No, porque a medida que el objeto se repite se hace menos visible y se hace más complicado el contarlos”* (G4)

Tarea 2: “Zoom en algunos textos”



Se observó en el desarrollo de esta tarea, el interés de los estudiantes en la elaboración como se evidencia en la fotografía (**véase figura 42**), en donde se aprecia el interés en la realización de sus trabajos. Sin embargo, no

Figura 42: Trabajo en clase

todos los grupos lograron representar la propiedad de auto semejanza de manera intuitiva (de acuerdo a los resultados esperados) debido al nivel interpretativo y a aspectos de los textos que desviaron la atención e intención de los mismos, ya que en términos medios se obtuvieron dos tipos respuestas que se ilustraran por medio de dos producciones de los estudiantes que participaron.

Por un lado, los que se enfocaron en aspectos particulares de los textos, reflejando en sus dibujos perfilados ideas como las siguientes

Ejemplo 1 (se relacionó los textos 1 y 5): *“Los dos textos tiene en común, que es sobre el agua ya que es importante para la vida de los seres vivos”* (G2); entonces, aquellos grupos que representaron las situaciones contenidas en los textos de esta manera, se puede afirmar que no consiguieron percatarse de la encadenamiento y auto reproducción de sí mismo, es decir de la auto semejanza de a modo intuitivo.

Por otro lado, también se aprecia en otros grupos de estudiantes una idea de repetición de manera intuitiva presente en los documentos que aluden a la naturaleza.

Ejemplo 2: (se relacionó los textos 7 y 5): *“Que en cada elemento (gota de agua y las muñecas rusas) tienen en su interior una versión de ellas mismas más pequeño que se repite y se repite y se repite, una de la otra”* (G6)

Entre las producciones de los grupos que permitieron dar cuenta de la idea de repetición abordada en el ejemplo 2. (**Véase figura 43**)

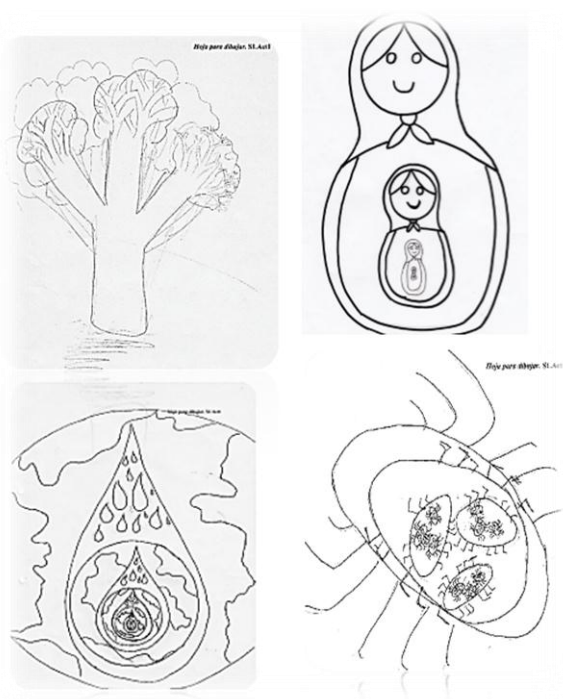


Figura 43: Algunos dibujos realizados por los diferentes grupos

Entonces, los estudiantes apuntaron a un proceso recursivo que se repite o que avanza perpetuamente como se observa en el tallo del coliflor nace tres tallos de coliflor, en estos a su vez florecen otros, así como en la muñeca que dentro de ella hay una contenida más pequeña, por no mencionar el dibujo de la pulga en el que se observa un proceso análogo, que describe un principio instintivo de auto semejanza

Al final de la sesión con la ayuda del docente de matemáticas se efectuaron los respectivos cálculos y se socializó a los estudiantes que grupo obtuvo la mayor puntuación de acuerdo a los criterios establecidos de la tarea 1.

3.3. Sesión 3

3.3.1. Información general

Fecha y hora: 19 de Octubre de 2015 (lunes 6:30 a.m. 8:30 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Salón (9-5).

Participantes: Investigador-Docente de arte-estudiantes.

Asunto: Presentación del Video denominado Fractales- la dimensión oculta-1 de 4. Y aplicación de la S1.Act1

3.2.2. Observaciones de la puesta en práctica:

La inclusión de este tema se llevó a cabo a partir de la **Presentación del video (véase figura 44)**, a través de esta, se evidenciaron aspectos importantes del tema proporcionando la familiarización del mismo. Así pues, se tuvo la oportunidad inmediatamente que finalizó la transmisión del video realizar las siguientes preguntas:



Figura 44: Fotografía tomada mientras los estudiantes ven el video

- a) ¿Qué caracteriza a los objetos denominados como fractales?

Analizando las múltiples respuestas, en general se evidencio las siguientes apreciaciones a modo de síntesis:

Se reveló en términos reales de acuerdo a su versatilidad en cuantiosas aplicaciones, por lo tanto, en general los estudiantes asociaron la geometría fractal con los siguientes términos más frecuentes:

repetición infinita, naturaleza, arte, arquitectura, objetos semejantes, vida diaria, auto similitud (auto semejanza)

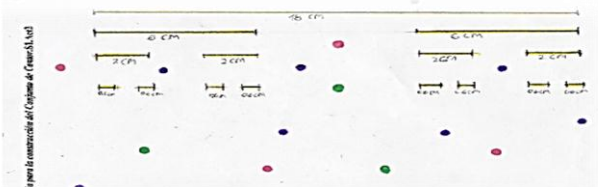
b) ¿La geometría que generalmente estudias en las clases, representan este tipo de situaciones vistas anteriormente? ¿Sí o no? Justifica tu respuesta

Se puede aseverar de acuerdo a las respuestas de todos los estudiantes, quienes contestaron a la pregunta de manera negativa, es decir que ningún grupo conformado manifestó el hecho de evidenciar las situaciones presentadas en el video, en una clase de matemáticas, por tanto, entres sus argumentos exponen “que no han visto geometría este año lectivo”, “siempre se tratan temas básicos”, “pues sólo se hablan de figuras, triángulos lejos de la realidad”.

Tarea1: “Construcción del conjunto de Cantor”



Figura 45: Elaboración del Conjunto de Cantor por los estudiantes



Todos los grupos lograron construir el Conjunto de Cantor de manera similar como se muestra en las fotografías (**ver figura 45**)

Este fractal tiene ciertas propiedades que lo caracterizan, que desde luego hicieron parte del análisis del presente documento (**ver tabla 16**)

Preguntas y categorías	Acciones y respuestas de los estudiantes
a) Si se continúa con el mismo procedimiento indefinidamente ¿cuántas veces se puede realizar?	De acuerdo a la elaboración del Conjunto Cantor, tres (3) de los grupos (G1, G3 y el G6) manifestaron el hecho de no poderse determinar una cantidad finita de pasos para lograr su construcción mientras que cinco (5) grupos (G2,64,G5,67 y G8) presentan que aquel proceso puede hacerse infinitamente aunque por el ejemplo el G8 argumenta que la realidad física no lo permite: “Podríamos decir infinitamente, aunque de acuerdo a las proporciones de la hoja y la línea habría un

	<i>punto limite”</i>
b) ¿Qué se puede decir de la cantidad de los segmentos a medida que se van construyendo?	Cinco (5) de los ocho (8) grupos afirman que la cantidad de segmentos aumenta, de estos grupos que determino aquel incremento dos (2) de los grupos (G3 y G8) fueron aún más precisos, evidenciando que ese crecimiento se presenta en forma de un par. De los tres (3) grupos restantes, dos (2) grupos (G2, G7) manifiesta erróneamente que disminuye el número de segmentos a medida que se construye y solo el grupo (G2) evidenciando una respuesta no acorde a la pregunta, quizás la redacción de la misma no permitió una clara interpretación por todos.
c) ¿Qué ocurre con la medida de los segmentos a medida que se van construyendo?	Todos los grupos determinaron que a medida que se construye nuevos segmentos, la magnitud de ellos disminuye, así como lo menciona el G5 <i>“van disminuyendo su medida pero cada vez son más segmentos”</i>
d) Halla la longitud de cada uno de los segmentos obtenidos en todos los pasos	Todos los grupos optaron por construir el primer segmento con una longitud de 18 cm, tal vez por la dimensión de la hoja. Igualmente la totalidad de estudiantes expresaron que los segmentos obtenidos en un determinado paso, no son equivalentes debido al margen de error que surgió con el empleo de los instrumentos para la elaboración del fractal. <i>“ Porque medimos mal”</i>G2 <i>“Porque la medida llega a tal punto que ya no es divisor de 3 y hace que quede un número exacto o capaz de hacer con la regla”</i> G6
e) ¿Cuál es el	Los grupos G1,G2,63,64,65,G6 y G8 no presentaron ninguna

segmento de mayor y de menor medida? f) ¿Cuántas veces está contenido el segmento de menor longitud en el segmento de mayor longitud?	dificultad en comparar la longitud entre los segmentos, pues ellos decretaron que cada segmento obtenido en un nuevo paso esta contenido tres (3) veces en el segmento del paso anterior, pues se evidenciaron respuestas como las siguientes: “3 veces, porque $0,6666 \times 3 = 2 \text{ cm}$” (G7) “3 veces, porque el del paso 3 mide 2cm y el paso 4 mide 0,6 cm y $2 \div 0,6 = 3$”(G)3 Tal vez la razón que el grupo G7 no haya realizado la tarea, se explica por motivos de tiempo y falta de organización del grupo.
g) Completa la tabla de acuerdo a las magnitudes de los segmentos de tu actividad para determinar el valor de verdad del siguiente enunciado, (v) si es verdadero o (f) si es falso	La mayoría de los grupos (G1, G2, G3, G4, G5 y G8) expresaron matemáticamente la auto semejanza de algunos segmentos que estructura el Fractal de Cantor, logrando establecer proporciones y razones. (Véase figura 46)

Tabla 16: Descripción de los resultados obtenidos por los estudiantes en la S2AC2

Razones	Simbolización	Proporción	Simbolización
Si la longitud del segmento inicial del paso N° 1 es el segmento del paso N° 3	$\frac{18 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 9$	Si la longitud del segmento del inicial del paso 1 es el segmento del paso 3 como la longitud del segmento del paso 2 es el segmento del paso 4	$\frac{18}{2} = \frac{6}{\frac{2}{3}}$ $9 = 9 \dots$
Si la longitud del segmento del paso 2 es el segmento del paso 4	$\frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{18}{2} = 9$		

Figura 46: Procedimiento empleados por los estudiantes para detallar las proporciones en el Conjunto de Cantor

El tratamiento de esta tarea se desplegó de acuerdo a los resultados esperados, debido a que los estudiantes, le costó interpretar la información consignada en los pasos, pero poco a poco con ayuda de otros compañeros que conformaban los grupos de trabajo, lograron construir el Conjunto de Cantor, sin embargo, se les presentaron algunas dificultades tales como:

Una de las principales dificultades que influyó en el desarrollo de esta tarea hace referencia al manejo la regla como instrumento de medida para la obtención de las longitudes de los segmentos. Por otro lado, a la hora de efectuar las relaciones de proporciones para perpetrar los cálculos necesarios y establecer en términos matemáticos, la descripción de la auto semejanza, lo que les permitió justificar que a medida que se elabora tiende a desaparecerse o “hacerse polvo” debido a su reducción en cada paso de $\frac{1}{3}$ de longitud en comparación del segmento anterior.

Para todas las actividades que requerían esta consigna se piensa que no se le adjudicó a este ejercicio, un tiempo oportuno, no obstante, la mayoría consiguió desarrollar adecuadamente las tareas estipuladas.

3.4. Sesión 4

3.4.1. Información general

Fecha y hora: 29 de Octubre de 2015 (jueves 7:30 a.m. 9:30 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Salón (9-5).

Participantes: Investigador-Docente de matemáticas-estudiantes.

Asunto: Presentación de las diapositivas (versión libre) y Aplicación de la S2.Act1.

Un aspecto que caracterizó esta actividad consistió en que se reelaboró por comentarios de algunos estudiantes y de la docente de arte, los cuales propusieron involucrar los mándalas, así pues se tuvo en cuenta y antes y después de la presentación, en donde se realizaron dos preguntas iniciales y dos finales, paralelamente a la tarea estipulada.

3.4.2. Observaciones de la puesta en práctica

Antes de dar inicio de la descripción de la actividad, se decidió indagar algunas ideas y concepciones que tienen los estudiantes frente a las matemáticas y al arte, por tanto, a modo de resumen aquellas opiniones se encuentran condensadas en la siguiente **tabla 17**:

Preguntas iniciales	Ideas de los estudiantes
I. ¿La relación entre matemáticas y arte ha sido trabajada en tu colegio por parte de tus profesores? Justifica tu respuesta.	Solo el grupo (G5) afirmó que si se había trabajado en algún tiempo esta relación, sin embargo expresan que en la actualidad no se tiene en cuenta. Por otro lado, los grupos restantes manifiestan que nunca han sido participes en actividades que involucren tanto las matemáticas como el arte pues entre sus argumentos mencionan que son “materias opuestas”, “no se contextualiza las matemáticas” y que al contrario “solo se hace énfasis en las operaciones matemáticas” o tal vez “los profesores desconocen que existen esas relaciones”
II. ¿Qué piensan acerca de la relación entre el arte y las matemáticas?	

Tabla 17: Relación entre matemáticas y arte según los estudiantes



Figura 47: Una fotografía de la presentación.

De acuerdo a la sesión anterior, en la que socializaron algunos aspectos de la geometría fractal frente a los estudiantes, se consideró importante antes de llevar a cabo las tareas estipulas para la presente sesión, realizar una breve exposición (**véase figura 47**) de algunos elementos que lo vinculan con el arte en diferentes épocas y en distintas manifestaciones que de alguna manera responde ante la necesidad establecida por los estudiante consignada en la tabla anterior (**ver tabla 17**).

“

Tarea1: “Crea tu obra artística”

Durante el desarrollo de esta sesión, se tuvieron cuenta los siguientes aspectos:

-Admitir que los estudiantes piensen en lo que quieren construir

-Recorrer por cada uno de los grupos inculcando el dialogo entre sus integrantes sobre lo que piensan para que lo compartan entre ellos.



Figura 48: Fotografía en donde se observa el momento donde decora los mándalas.

-Manifestar el hecho de que observen las figuras geométricas que tienen a su disposición para elaborar los mándalas.

Ahora bien, la realización de esta tarea por parte de los estudiantes fue todo un éxito debido el empeño y a la aceptación de la misma, pues se evidencio en los distintos trabajos producto de las acciones de cada uno de los grupo en el salón de clase a la hora de decorar los diferentes mándalas adjudicados, dejando ver la creatividad de ellos a la hora de emplear diferentes colores. (*Véase figura 48*).

En cuanto a las apreciaciones de los estudiantes frente a los mándales evidenciaron cuestiones como las siguientes:

En general (excepto el grupo G3) reconocieron distintas figuras geométricas que conforman los diferentes mándalas y entre las respuestas de frecuente fueron la circunferencia y los triángulos.

Todos los grupos identificaron de alguna manera un patrón reiterativo de auto semejanza de modo intuitivo argumentándolo con expresiones como las siguientes: “*Se forman una especie de hexágonos con círculos concéntricos más pequeños*”, “*se repiten círculos tangentes dentro de otros círculos tangentes*”, “*secuencia repetitiva que conforman las figuras pequeñas en el interior de las más grandes*” “*secuencia de corazones pequeños que se agrandan cada vez más*” “*se repiten los círculos y los triángulos muchas veces*”

Las ideas anteriores se vieron reflejadas en el momento de elaborar sus construcciones geométricas, combinando algunas características que posean los fractales y los mándalas.

A continuación se exhibirán las producciones logradas por los estudiantes, (desde *la figura 49* a la *56*) en el lado izquierdo se ubican los mándalas que se les entregaron a cada grupo y en el lado derecho se encuentran los diseños y creaciones propias de cada grupo de trabajo.

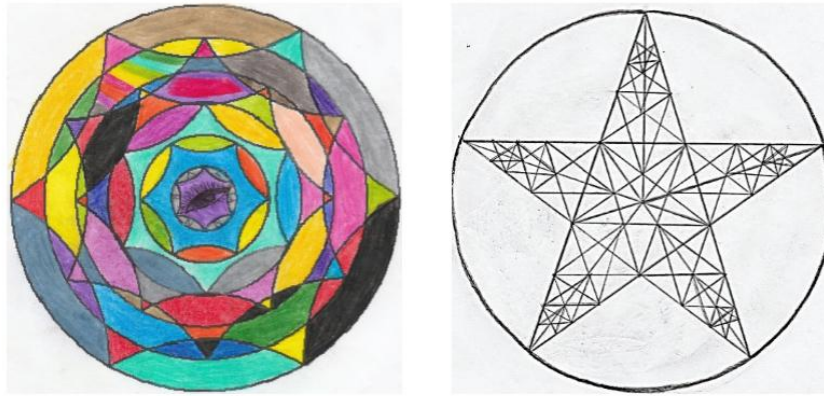


Figura 49: Mándalas de grupo 1

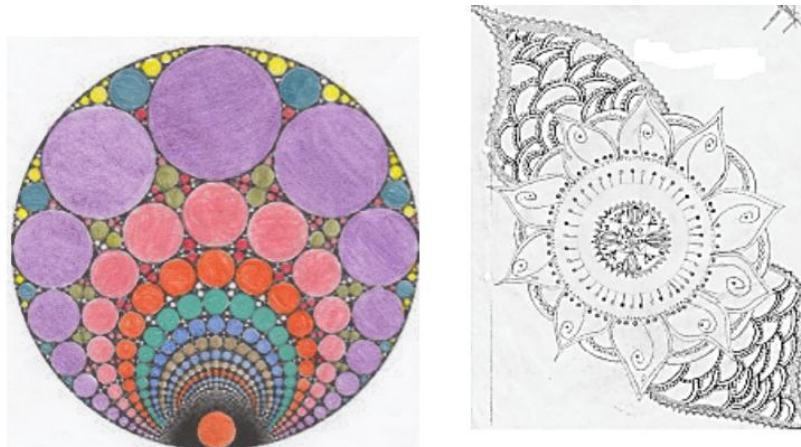


Figura 50: Mándalas de grupo 2

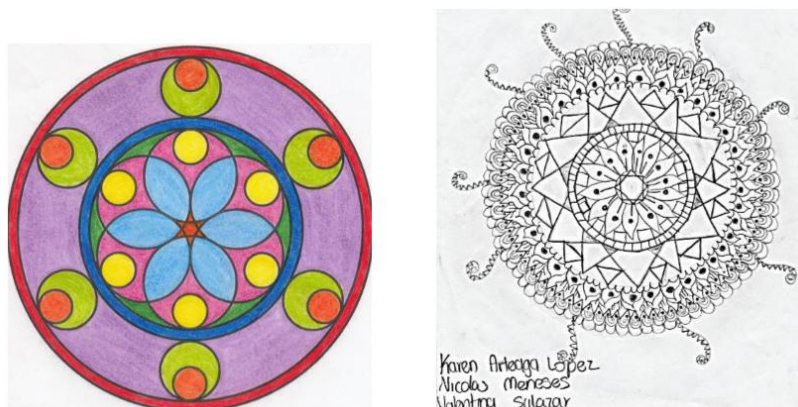


Figura 51: Mándalas de grupo 3

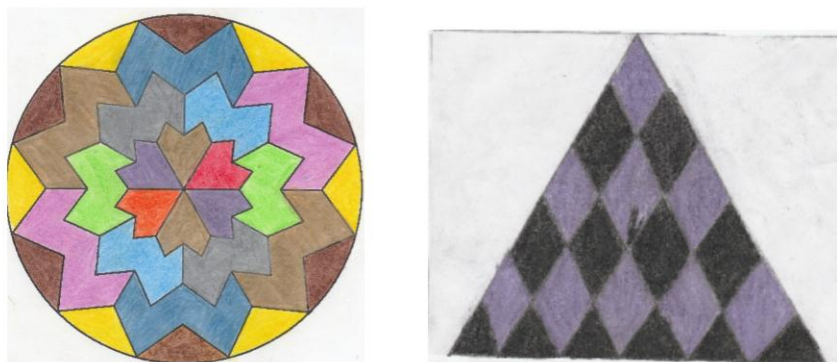


Figura 52: *Mándalas de grupo 4*

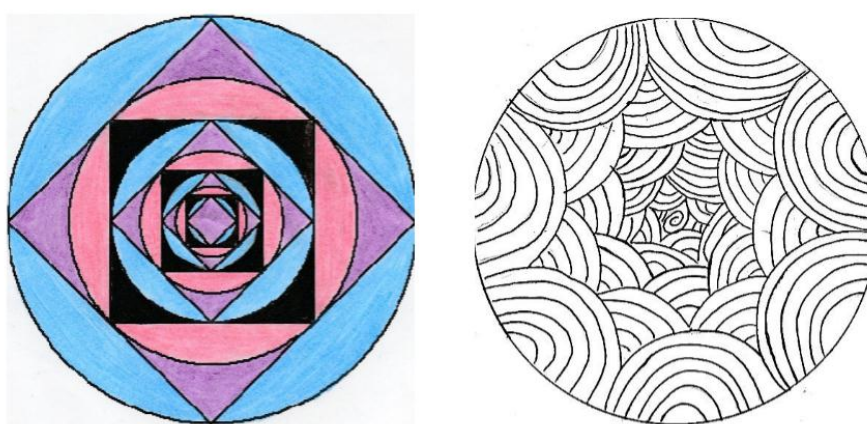


Figura 53: *Mándalas de grupo 5*



Figura 54: *Mándalas de grupo 6*

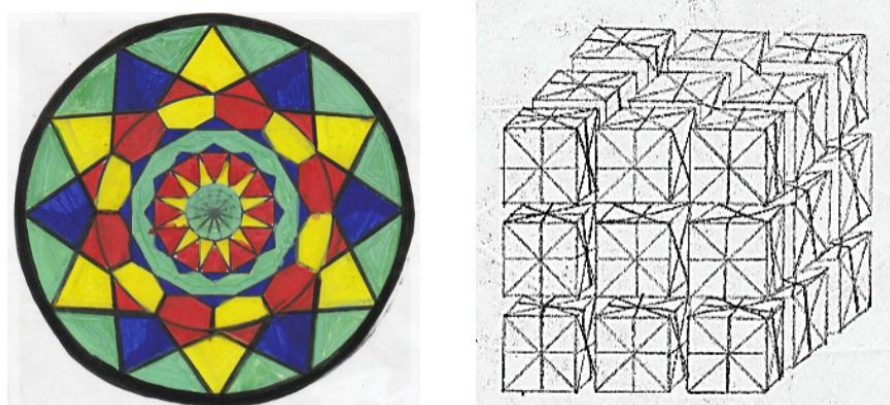


Figura 55: Mándalas de grupo 7

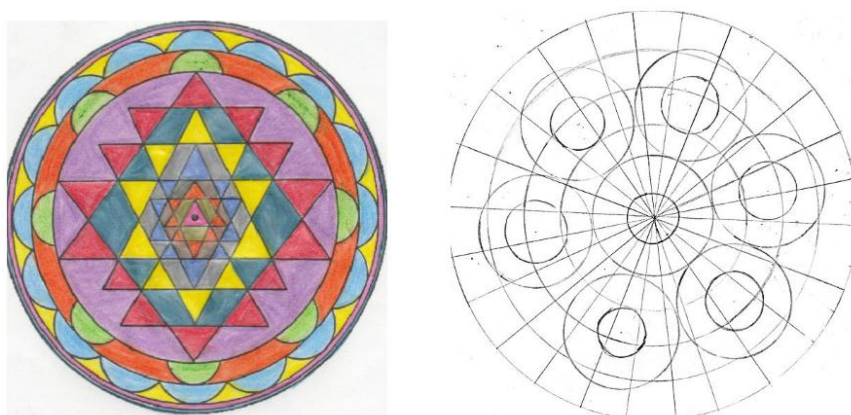


Figura 56: Mándalas de grupo 8

De acuerdo a la experiencia de manipular mándalas, se realizaron unas preguntas al final de la sesión sobre el tema, lo que conllevó a realizar la siguiente **tabla 18**:

Preguntas Finales	Respuestas
I. ¿Qué aspectos o características puedes decir acerca de los mándales?	5 de los 8 grupos (G3, G4, G6, G7, G8) reconocieron que los mándales cumple la propiedad de repetición ¹² que caracteriza la geometría fractal. Y los restantes grupos manifestaron el hecho de que son figuras geométricas circulares que aluden a cuestiones culturales y religiosas

¹²Por mencionar un ejemplo, se observa en el mandala elaborado por el grupo 1, en donde se reconoce una estrella de cinco puntas sesionada en seis partes claramente diferenciables, cinco triángulos y un pentágono, a su vez cada una de estas partes también contienen otras estrellas con las mismas características.

II. ¿Cómo crees que fue la experiencia de vincular algunos aspectos geométricos en contextos artísticos?	Entre las múltiples respuestas se destacaron las siguientes: “Fue un tema muy interesante, nos gustó mucho ya que nos permitió a nosotros ser creativos y nos dejan expresar nuestras ideas e imaginación” (G3) “Las matemáticas son importantes para la vida y el arte” (G4) “Las experiencias es muy buena ya que es más creativo, más dinámica pues nos salimos de la misma rutina”(G7)
---	--

Tabla 18: Descripción de los estudiantes frente a la técnica de los mandálas

A manera de conclusión, esta actividad se convirtió en alternativa pedagógica que permitió integrar los mandálas con un campo particular de la geometría, específicamente la fractal, logrando mostrar algunas características que refieren al pensamiento espacial y sistemas geométricos, por ejemplo se dio con relación al acoplamiento de las figura en cuanto a la percepción de la posición y relaciones espaciales y visuales, también a la construcción de nociones topológicas que refieren a aspectos como “adentro”, “afuera”, “interior” y “superior”. Asimismo los estudiantes emplearon términos euclidianos tales como líneas, circunferencias, cuadrados, triángulos, entre otros, que les permitió explorar compendios de la expresión artística como el manejo del color debido a que pintaron con el mismo color sesiones o áreas congruentes entre las partes que configuran la obra

3.5. Sesión 5

3.5.1. Información general

Fecha y hora: 3 de Noviembre de 2015 (martes 7:30 a.m. 9:30 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Salón (9-5).

Participantes: Investigador-Docente de matemáticas-estudiantes.

Asunto: Aplicación de la S2.Act2. (Esta actividad se llevó a cabo en parejas)

3.5.2. Observaciones de la puesta en práctica

Tarea1: “Triangulo de Sierpinski”

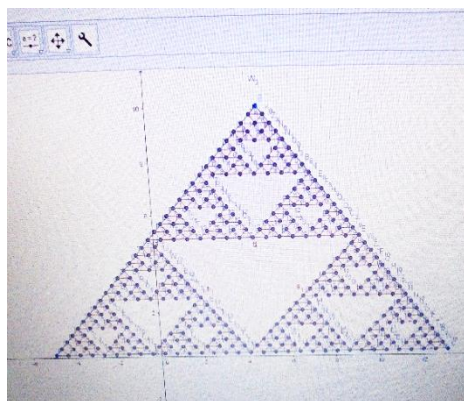


Figura 57: Un ejemplo de Triángulo de Sierpinski construido en la clase

Todos los grupos lograron construir el Triángulo de Sierpinski, (véase figura 57), sin embargo, se presentó diferentes dificultades en su construcción.

Al momento de iniciar la sesión, la gran mayoría de estudiantes no tenían ni la memoria y el programa instalado en ella, entonces se optó por compartir a cada una de las parejas el archivo.

También se generaron algunos impedimentos en torno a la metodología del trabajo, debido a que este se alternó entre el empleo del taller respectivo en hojas y el uso del computador.

Otro aspecto que intervino, se justificó con relación al tiempo establecido para la resolución de la actividades, porque no todas las parejas conformadas lograron elaborar el fractal, entonces se solicitó ante el rector por medio del docente de matemáticas una hora más para culminar la sesión adecuadamente. Sin embargo, también se presentaron cuestiones que favorecieron en el desarrollo de la actividad concernientes a aspectos técnicos como la cantidad de ordenadores que facilitó la actividad como se había estipulado.

Ahora bien entrando en materia, en cuanto a la elaboración fractal se evidenciaron ciertas propiedades que lo caracterizan, que hicieron parte del análisis del presente documento.

Preguntas	Acciones y de los estudiantes
i) Calcule el valor de la longitud de cada uno de los lados de los triángulos ΔABC y el ΔDEF . Posteriormente compruebe que son semejantes empleando el criterio de semejanza (L-L-L).	El 87 % (17 de las 21 parejas) emplearon la herramienta longitud que proporciona geogebra para medir y comparar los segmentos correspondientes de los triángulos ΔABC y ΔEDF , y encontrar una constante una proporcionalidad ($k=2$), logrando así determinar que son semejantes, a través del criterio (L-L-L)
j) Halle el perímetro de los triángulos Δ	El 76,2 % (17 de las 21 parejas) identificaron una

ABC y Δ DEF y Halle la razón entre ambos perímetros. k) ¿Qué relación existe entre la razón de semejanza y la razón de los perímetros de los triángulos estudiados?	relación proporcional entre la constante de semejanza de los triángulos Δ ABC y Δ DEF con la razón entre los perímetros pues ambos razones poseen en el mismo valor numérico igual a 2.
l) Determina si los triángulos Δ DEF y el Δ GHI son semejantes. Emplee alguno de los dos criterios (L-A-L) ó (A-A) <i>Sugerencia:</i> la amplitud de un ángulo se obtiene seleccionando la opción <<  >> sobre los tres puntos o las dos rectas que necesite medir. Conteste las siguientes preguntas de acuerdo a los triángulos Δ ABC y Δ CEF. m) ¿Existe un ángulo en común entre los triángulos anteriormente mencionados? Especifíquelo y halle su amplitud n) ¿Determina si los triángulos son semejantes? Empleando el criterio (A-L-A)	El 71,4 % (15 de las 21 parejas) precisaron que los triángulos Δ DEF y Δ GHI son semejantes, y de los que lograron establecer dicha relación el 40 % (6 parejas) emplearon correctamente el criterio (L-A-L), mientras que el 60 % restante (9 parejas) aplicaron de modo adecuado el criterio (A-A), por tanto, se puede afirmar que este último criterio fue el más utilizado, tal vez por tener la cantidad mínima de hipótesis a comprobar. De acuerdo a lo anterior, de manera similar también el 42 % (9 las 21 parejas) emplearon el criterio (L-A-L) para afirmar que los triángulos Δ ABC y Δ CEF son semejantes y solo (13 de las 21 parejas) lograron determinar que el ángulo ECF (o simplemente C), es común en ambos triángulos. Un aspecto relevante en el desarrollo de la actividad fue la manipulación de la herramienta de amplitud de ángulo que ofrece geogebra, que como su nombre lo indica permitió medir y comparar la amplitud de los ángulos correspondientes en el momento de determinar que los triángulos estudiados son semejantes, sin embargo, el uso de esta herramienta evidencio las dificultades que presentaron algunos de los estudiantes a la hora de reconocer y denominar vértices o ángulos.

o) ¿Qué sucede si “arrastras” o “mueves” los vértices del triángulo ABC? p) Explora con la ayuda de la herramienta zoom de alejamiento y acercamiento ¿Cómo son las partes del triángulo con respecto al total?	El 81 % (17 de las 21 parejas) dispusieron de la herramienta de arrastre que les permitió apreciar que el fractal conserva las propiedades si se mueve, igualmente lograron realizar un zoom de acercamiento y alejamiento que les permitió comprobar la propiedad de auto semejanza que posee el Triángulo de Sierpinski
---	--

Tabla 19: Caracterización de Triángulo Sierpinski

Es claro, que se debe asumir la Educación en Matemática como un proceso continuo y permanente de transformaciones en el conocimiento, ateniendo está consideración abordada en el *reporte I* y expresada como resultados esperados en el *reporte II*, entonces, aproximadamente en el 1999, el MEN viene expresando este hecho en la Educación Básica y Media en Colombia, a través de la incorporación de calculadoras y computadores para a enseñanza, así mismo asociaron unos lineamientos para la integración de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas. No ajeno a este panorama el presente trabajo de grado, logró concebir la tecnología como un campo de naturaleza interdisciplinario e integrador curricular entere las áreas de educación aludidas.

Por lo tanto, la interacción de los estudiantes a través de las TIC, según los resultados observados mediante la manipulación del software de geogebra, les permitió explorar y visualizar la propiedad de auto semejanza a través de la herramienta zoom y así mismo desplazar la posición de los fractales, aquella experiencia evidenció una mancomunada participación de los alumnos lo que se reflejó en los distintos ritmos de trabajo. Igualmente restableció el papel del docente como un orientador y no tan solo como un simple transmisor del conocimiento

3.6. Sesión 6

3.6.1. Información general

Fecha y hora: 9 de Noviembre de 2015 (lunes 10:30 a.m. 11:30 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Salón (9-5).

Participantes: Investigador-Docente de arte-estudiantes.

Asunto: Aplicación de la S3.Act1.

3.6.2. Observaciones de la puesta en práctica

Se observó en el desarrollo de esta tarea, un trabajo colaborativo entre los integrantes de cada grupo a la hora de administrar el tiempo y elaborar los fractales propuestos, mediante actividades fundamentales como la interpretación de la información presentada, en ese sentido, en ocasiones fue inevitable hacerlos detener en la repetición de los pasos, que les permitió a los estudiantes recrear los fractales pero adaptándolos en tercera dimension (otra forma de verlos), y su vez conocer otros tipos de fractales que no se habían socializado en las actividades anteriores. En consecuencia, emergieron comentarios como el siguientes:

“Este fractal se caracterizó, por poseer autosimilitud, se determina por el criterio de ángulo y ángulo, el cual establece una relacion entre cada uno de los triangulos, isocelos construido. La Curva de Koch se puede caracterizar desde el punto de vista matemático y artístico ,pues su construccion requiere de importantes reglas de precision y cálculos, que se pueden expresar en medio de dibujos y la técnica del kirigami en otras dimensiones, lo que brindó un aspecto más dinámico y claro” (G8)



Figura 58: Trabajando la técnica del Kirigami

La expresion anterior, es un ejemplo que permitió afirmar que los estudiantes lograron estimar los fractales en tercera dimensión y que a su vez estos conservan al menos la propiedad de auto semejanza tanto en ambientes tradicionales como el lápiz y papel como con el empleo de los ordenadores.

Por lo tanto, el medir, el cortar y doblar, características básicas de la técnica milenaria del Kirigami originó en los estudiantes acciones concretas para potencializar el pensamiento

espacial y de sistemas geométricos, en la manera en como se indica en la geometría activa inscrita en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas. *(Véase figura 58)*

Al final de la sesión se realizó una socialización del tema incluyendo los siguientes aspectos:

Tópicos tratados	Acciones y respuestas de los estudiantes
Con respecto a los diferentes contextos y materiales para la construcción de los fractales	En general todos coincidieron que tanto el trabajo en hoja y lápiz como en el computador y mediante la técnica de Kirigami favorecieron en el tratamiento de la propiedad de auto semejanza al menos presente en los fractales construidos. Sin embargo, determinaron que el trabajo en geogebra fue el que presentó más dificultades en su desarrollo.
Con respecto a la feria	Todos los estudiantes estuvieron de acuerdo con la realización de la feria y con el nombre que se les sugirió PINCELANDO FRACTALES.

A modo de síntesis, a continuación en la siguiente **tabla 20**, se describe la propiedad de auto semejanza empleada por los estudiantes al momento de caracterizar algunos fractales utilizando diferentes recursos y ambientes empleados para dicho fin.

Significado de categorías:

(C1) *Categoría 1. Compara longitud de segmentos*

(C2) *Categoría 2. Encuentra relación numérica entre la medida los segmentos*

(C3) *Categoría 3. Compara la amplitud de diferentes ángulos* **(C4)** *Categoría 4 Encuentra relación proporcional entre figuras*

(C5) *Identifica figuras que siguen un patrón reiterativo*

S	A c t	T	Ítem	Categoría Conceptual					Propiedad de auto semejanza					Ambientes y recursos empleados		
				C1	C2	C3	C4	C5	Reconocimiento				Descripción	tradiciones	Artísticos	Virtuales
									si	%	no	%				
1	1	1	a, b					X	Todos los grupos	100	-	0	Repetición intuitiva	-Papel y lápiz -Dosier	Imágenes artísticas	Video
		2	a, b					X	G3,G4,G6,G7	50	G1,G2,G5 G8	50	Repetición intuitiva	-Textos y documentos -Papel y lápiz -Dosier		
	2	1	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l	X	X		X		G1,G2,G3,G4,G5 y G8	87.5	G7	12.5	Proporcionalidad: Razones y proporciones	-Papel y lápiz -Regla -Dosier	No cumple	
2	1	1	a, b, c					X	G1,G4,G5,G7,G8	62.5	G2,G3,G6	37.5	Repetición intuitiva	-Papel y lápiz -Dosier -Colores	Mándales	Diapositivas
	2	1	a, b, c, d, e, f, g, h	X	X	X	X		14 parejas	66.6	7 parejas	33.3	Criterio de triángulos semejantes (LLL)-	Papel y lápiz -Dosier	No cumple	geogebra

													(AA) (LAL)	-calculadora		
3	1	1	a			X		X	Todos los grupos	100	-	0	-Repetición intuitiva -Criterio de triángulos semejantes (AA)	-Papel y lápiz -Dosier -Reglas -Cartulina - Tijeras	Kirigami	No cumple

Tabla 20: Descripción de la propiedad de auto semejanza considerando las materiales y recursos manipulativos empleados por los estudiantes a lo largo del trabajo

3.7. Sesión 7

3.7.1. Información general

Fecha y hora: 13 de Noviembre de 2015 (viernes 9:30 a.m. 10:30 a.m.)

Lugar: Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali-Salón (9-5).

Participantes: Investigador-Docente de arte-estudiantes.

Asunto: Feria de matemáticas

3.7.2. Observaciones de la puesta en práctica

Según los ideales de la institución, en cuanto su filosofía concebida e inscrita en el Manuel de convivencia, en el título (o capítulo), I: *Doctrina Constitucional sobre el derecho de la educación* encontramos lo siguiente:

Artículo 4 .Su filosofía institucional: Es esencial para la Institución Educativa Normal Superior Santiago de Cali, formar una persona que estructure integralmente su personalidad, con sentido de investigador, que le permita proyectarse a la comunidad, orientarla en su desarrollo, enfatizarla en el respeto de los derechos humanos y en la democracia participativa.

El estudiante es el protagonista en su proceso educativo. En este proceso debe intervenir activa y eficientemente la familia y toda la comunidad normalista. (p.10)

En ese sentido, la institución articuló la idea del proyecto en conjunto a lo que aquellos denominaron como “viernes cultural” donde se mezclaron diferentes expresiones artísticas y gastronómicas.

De igual manera, la feria sirvió para materializar la filosofía institucional y difundir algunos aspectos intuitivos de la geometría fractal favoreciendo un espacio lúdico para que los estudiantes compartieran algunas ideas de estos objetos geométricos, en especial la propiedad de auto semejanza a toda la comunidad estudiantil, fomentando y estimulando la interacción de materiales concretos para potenciar el aprendizaje activo y la investigación del conocimiento científico aplicado en la enseñanza de la matemáticas.

El interés de los estudiantes fue más allá de lo planeado pues se tomaron la labor de profundizar en el tema y así elaboraron carteleras de diferentes matemáticos precursores

de la geometría fractal, también puntualizaron algunos vínculos entre el arte con las matemáticas no solo con lo que se trabajó en la situaciones (arte Kirigami y los mándales) también realizaron indagaciones llevándolos a Escher y algunas de sus obras.

Otro aspecto que cabe mencionar es que los estudiantes lograron reconocer si un objeto es de tipo fractal o no, e incluso contribuyeron al enriquecimiento de la feria con ejemplos de fractales naturales como el brócoli y como la rama de un árbol, para revelar de forma más directa la relación de este tipo de geometría con la naturaleza.

Por lo tanto, la realización de esta feria un éxito debido a que a través de cada una de las situaciones se logró crear una experiencia de investigación educativa como una alternativa que incursionó en el aula de clase para pensar de otro modo las matemáticas construir una en la media hora de explosión mostrar algunas cosa que se abordaron durante todo el proyecto. *(Véase figura 59)*



Figura 59: Algunas fotos de la feria

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En muchas ocasiones se puede conjeturar un aislamiento cultural y social que se percibe habitualmente cuando se trabaja con los estudiantes temas concernientes al pensamiento geométrico y matemático, como se puntualiza en el *reporte I* (en la descripción y justificación de la problemática) al igual en el *reporte II* (en los análisis de los resultados de la encuestas); en ese sentido, surge este trabajo de grado, inscrito en la Licenciatura en Educación Básica, con Énfasis en matemáticas ubicado en la línea de Historia de las Matemáticas para contribuir al desarrollo de alternativas que les permitan a los educadores en ejercicio tener acceso a una propuesta alternativa de intervención en el aula, lo cual no es común en este tipo de línea de formación, debido a que se presentan generalmente un análisis teórico desarrollado con ausencia de actividades que lo aprueben.

El sustento metodológico flexible que favoreció en la materialización del trabajo de grado fue la investigación acción, una vía de naturaleza cualitativa que facilitó de manera paralela la fundamentación teórica, el diseño e implementación de la propuesta que de cierta manera es diferente a las frecuentes actividades que se valen de ejercicios algorítmicos y descontextualizados, en el que se consideró la participación activa tanto del investigador como de los estudiantes y finalmente de los docentes involucrados en el desarrollo.

Por lo tanto, el estudio realizado arrojó algunas reflexiones sobre las prácticas pedagógicas descritas en el macro-relato descrito en el *reporte III*, que implicaron validar el objetivo general fijado, ***al reconocer la propiedad de auto semejanza a través de una mirada a la geometría fractal en contextos escolares***, acertando de manera gradual cada uno de los objetivos particulares planteados, en este sentido, se hace fundamental anotar algunos aspectos concluyentes de esta indagación.

Teniendo en cuenta el primer objetivo particular, ***el caracterizar algunas relaciones históricas entre las matemáticas y el arte, dentro de la geometría fractal***, de ahí se formularon inicialmente algunas conclusiones de tipo genérico en torno a las matemáticas y al arte en general:

- ✓ A lo largo del presente trabajo se involucraron algunos elementos históricos que permitieron comprobar que desde los orígenes de la humanidad, se ha dado lugar a la convergencia y múltiples encuentros casuales o previstos de diversas disciplinas como las matemáticas y el arte, los cuales se han mostrado en diferentes civilizaciones dependiendo del nivel de expresión cultural y matemático alcanzado en su tiempo; que a medida que se han desarrollado tienden a intensificarse aquellas conexiones, tal es el caso del devenir de geometría, pues se puede aseverar que fue influida por la expresividad artística y que también algunos artistas emplearon ideas matemáticas en sus trabajos.
- ✓ A manera personal, se consideró que el mejor modo de explicar e ilustrar algunos momentos en el breve recorrido histórico mostrado, fue hacerlo de manera visual, incluyendo diferentes imágenes y fotografías correlacionadas a la mayoría de las manifestaciones artísticas, tomando la definición de ésta en su sentido más amplio asociado a la pintura, la escultura, la arquitectura, que sirvieron de apoyo de lo que se explicaba, sin dejar a un lado el lenguaje matemático inscrito (evidentes y otros no tanto) en las diferentes construcciones y diseños de cada uno de los múltiples ejemplos exhibidos.
- ✓ A medida que se elaboró el documento, se puede notar el empeño por dar cuenta de orientaciones e intenciones de carácter educativo desde un enfoque que hace parte de las temáticas de la actualidad en la Educación Matemática, en la medida que se propone un estudio interdisciplinario histórico- artístico como una opción para evitar la idea generalizada de ver las matemáticas como una ciencia rigurosa y sin posibles emociones, que paulatinamente se ha promulgado en su enseñanza.

Después de estas conclusiones de tipo genérico sobre algunas relaciones de las Matemáticas y el Arte, a continuación se evidenciarán otras, con respecto a la geometría fractal:

- ✓ Al finalizar de este proyecto, se reconoce el importante estatus que ha alcanzado la geometría fractal en la actualidad, atribuido por su desarrollo teórico-matemático y sus aportes a diferentes campos como la ingenierías, la biología, la medicina entre otros, en ese sentido, este tipo de geometría conecta diferentes áreas del conocimiento, convirtiéndose en un tema que puede promover la interdisciplinariedad si se incluye como un recurso pedagógico alternativo para la enseñanza de temas áridos de la geometría, pues analizando los resultados de la inversión en contexto escolar, esta experiencia aporta elementos para fomentar el estudio de contenidos transversales relacionados entre las matemáticas y el arte, generando nuevas posibilidades de solución a diferentes necesidades a partir de elementos de nuestro alrededor lo que justifica la analogía de la naturaleza y la geometría fractal.
- ✓ En cuanto al barrido histórico y artístico de la geometría fractal elaborado se puede ampliar en el futuro por ejemplo introduciendo otros prototipos de fractales que involucren distintas propiedades matemáticas que tal vez no se contemplaron. Por tal motivo, la construcción de un trabajo como este, vaticina buenas perspectivas para futuras investigaciones que hoy en día son pocas las que presenta relaciones como las que causaron la elaboración de este informe.

Ahora bien, con referencia al segundo objetivo particular, ***el construir y explorar algunos fractales en distintos ambientes y materiales***, de ahí se formularon las siguientes conclusiones:

- ✓ De tipo organizativo, es evidente que se necesita más tiempo y recursos económicos con respecto a una clase tradicional si se quiere emplear materiales manipulativos, por lo tanto, esto lo debe tener en cuenta todos los docentes a la hora de planear las clases. Según lo expresado, para la realización de este trabajo de grado, fue necesario tomar varias sesiones del calendario académico de la franja de los docentes participantes.
- ✓ Cabe destacar que la geometría activa proporcionó elementos contundentes para la realización del estudio, al respecto se relacionó con afirmaciones como la

siguiente: “*Pero ahora no se trata de “mostrar cosas”, sean triángulos o círculos, ángulos o segmentos, sino de “hacer cosas”, de moverse, dibujar, construir, producir (...)*” (Vasco, C; 2006,p.34), esta idea se acopló al diseño metodológico empleado, permitiendo proveer en las actividades planteadas el reflejo de las acciones y características que se puede interpretar de la geometría activa. Por esta razón, a lo largo del proceso se generó un clima participativo de los estudiantes, los cuales tomaron el rol protagónico en el desarrollo de su propio conocimiento, en donde no solo se revelaron distintas construcciones de fractales, si no que en cada situación presentada a los estudiantes determinaron conjeturas, también adquirieron mayor destreza con el manejo de los distintos materiales manipulativos utilizados y a la vez suscitaron el interés por la resolución de las tareas propuestas.

✓ En cuanto a los materiales recurridos se tiene lo siguiente:

- a) Uso del tradicional lápiz y papel.
- b) Una de las situaciones presentadas, sirvió de justificación para emplear el ordenador y el software geogebra para construir el Triángulo de Sierpinski, en general los estudiantes manifestaron el cumplimiento de las expectativas que tenían al manejarlo. No obstante, se reconoce que faltó mejorar la manera de explicitar la relación entre el fractal elaborado en un contexto dinámico, con un contexto artístico y también se pudo replantear esta actividad considerando otros fractales.
- c) La presentación de video y diapositivas influyó a los estudiantes de manera renovadora sobre el aprendizaje de la geometría y por ende, favoreció en el desarrollando una actitud crítica convirtiendo su empleo en un punto de partida para el desarrollo de la clase.
- d) Los estudiantes lograron recrear en tercera dimensión algunos fractales mediante la técnica del kirigami que implicó el uso de tijeras, cartulinas entre otros elementos.

Con respecto al tercer objetivo particular, ***el describir la propiedad de auto semejanza en la geometría fractal***, se derivaron las siguientes conclusiones:

- ✓ La elaboración de este trabajo de grado suministró como resultado para la educación matemática una propuesta de innovación para la enseñanza de la

semejanza, a través de la presencia de una de las principales características de los fractales, la auto semejanza. Este hecho fue evidenciado por los estudiantes tanto en el conjunto de Cantor, en el Triángulo de Sierpinski y en la Curva del Dragón, mediante el empleo de los materiales manipulativos aludidos anteriormente, que les permitió determinar cuestiones como las siguientes:

- a) Lograron reconocer y diseñar mándalas, al menos de manera intuitiva reconociendo auto semejanza y figuras geométricas.
 - b) Verificar la propiedad de auto semejanza a partir de la herramienta zoom e igualmente validar la propiedad de invarianza cuando se arrastra el objeto que ofrece geogebra.
 - c) A medida que los estudiantes resolvían las actividades, entre sus argumentos lograron establecer relaciones del semejanza de tipo intrafigural, debido a que concluyeron circunstancias en las que fue preciso hallar razones y constantes de proporcionalidad a partir de elaborar proporciones entre las medidas de los lados y congruencia de ángulos, permitiéndoles también instaurar criterios de semejanza (ver tabla 20). Sin embargo, para futuras indagaciones es importante desarrollar el concepto semejanza a través de la relación transformacional, vinculando relaciones traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias.
- ✓ Una recomendación a futuras investigaciones que decidan seguir el camino trazado, seria mirar otras posibilidades didácticas de los fractales como la noción de límite y sucesiones, entre otros, para abrir la posibilidad de realizar un currículo secuencial entre diferentes grados de la educación en matemática.

Finalmente, frente a la pregunta que originó este trabajo de grado: **¿Cómo a partir del diseño matemático y artístico de algunos fractales, se puede reconocer la propiedad de auto semejanza, en contextos escolares?**

La manera en cómo se pretendió abordar la solución a la pregunta problema de este trabajo, fue a partir de la elaboración de una feria de matematicas, donde se expuso frente a la comunidad educativa todos los diseños trabajados durante el proceso que por un lado, esta investigacion contribuyó a la cualificacion de la practica profesional docente, y por el otro lado, los estudiantes lograron reconocer un lenguaje geometrico

de una nueva geometría que no se encontraba en su contexto escolar, en consecuencia, la incursión de la geometría fractal, logro ampliar y reforzar conceptos vistos y a la vez, reevaluar y actualizar el papel de la pensamiento geométrico en el desarrollo de la sociedad al modelar diferentes fenómenos de la naturaleza.

Con el desarrollo de las situaciones presentadas, se observó que en general los estudiantes ante la introducción de estos temas nuevos se observó un interés, en el momento que se socializaron resultados encontrados en el primer objetivo particular, en particular al barrido histórico de la presencia de la auto semejanza en el arte, y en diferentes ejemplos ampliando la visión de aplicabilidad de los fractales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aponte, M., (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática*. Maestría en Educación énfasis en educación matemática. Colombia: Universidad del Valle.
- Arce, J y Pabón, O., (2004). Laboratorio de matemática para la Educación Matemática. Escuela Normal Superior Farallones. Instituto de Educación y pedagogía. Universidad del Valle. Colombia.
- Arce, J y Pabón, O., (2012). Laboratorio de matemáticas (LabMatUV) como estrategia de acompañamiento al diseño y uso de recursos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas. Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y pedagogía. Universidad del Valle. Colombia.
- Barallo, J (2005). *Arte Fractal. Las matemáticas más bonitas*. Sigma 26,99-116
- Barrantes., M y Balletbo, F., (2012). *Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria*. Rev. Int. Investig. Cienc. Vol. 8 n°1. P. 25-42.
- Barrentos, L y Balletbo ,T.,(2012). *Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria*. Campo Abierto, vol. 31, n° 2 .P.139-153.
- Braun, E., (2003). *Caos, fractales y cosas raras. La ciencia para todos*. 3d.Mexico: Fondo de cultura Económica.
- Caleño, M. (2014) . *Apropiación de los criterios de semejanza a partir de los conceptos de proporcionalidad y congruencia de triángulos utilizando el software geogebra y algunas aplicaciones applet en la web*. Tesis Magíster. Colombia: Universidad nacional de Colombia
- Castro, C. y Céspedes, Y., (2009). *Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza*. Tesis de maestría, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.
- Castro, C; Díaz, L; Palacios, R. (2011). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales*. En Perry, Patricia (Ed.), *Memorias 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 181-188). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Ceballos, M; Higita; Rivera, G; Hernández y Arias, L., (2001). Proyecto pedagógico. La enseñanza y aprendizaje de la geometría para 4° y 5° grado. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Celia, A., Urquina, H; Camargo; L; y Acosta; M;(2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Ministerio de Educación Nacional .Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.
- Cohen, L y Manion, L., (1990). Metodos de investigación educativa. Editorial, La muralla.
- Comas, J.R y Herrera, M.P., (2010).*Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria*. Suma 44, 23-32.
- Edo, M., (2003). Intuir y construir nociones geométricas desarrollando sentimientos y emociones estéticas. Ponencia núcleo temático 3, en *Actas de las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM). Las Palmas de Gran Canaria. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.
- Escudero., (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo xx. Departamento de didáctica de las matemáticas facultad de ciencias de la educación universidad de villa
- Figueiras, L.; Molero, M.; Salvador, A. y Zuasti, N.,(2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Suma* 35, 45-54
- Gallardo, S., Martínez, J., Molina, M., Peñas, M., Consuelo, M., Crisóstomo E., (2006). *Experiencia en el aula de secundaria con fractales*. En Lupiáñez, José Luis; Cardeñoso, José María; García, M. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: la geometría* (pp. 213-221). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/1602/>
- Gallo, O; Gutierrez, J; Badillo, E., Balbás, S., Monsalve, O., Múnera, J., Obando, G., Posada, F., Vanegas, M.,(2007). *Diploma en desarrollo de Competencias Basicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de*

Antioquia. Pensamiento espacial y sistemas geométricos. Medellín, Colombia. Editorial: Prensa Libre.

Giménez, J; Abdounur, O; Jaramillo, C., Balbás, S., Corbalán, F., Dos Santos J., Edo, M., García, J., Masip, A., J., *Spinadel, W.,*(2009). *La proporción: arte y matemáticas..* Barcelona, España: GRAÓ.

Gonzales, N., (2007). *Conocimiento ética y lenguaje. Modelo de la acción investigativa.* Colección Libros de Investigación. Editorial Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, D.C.

Gualdrón, É., (2006). *Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza.* Universidad de Pamplona, Colombia. Universidad de Valencia, España.

Guzmán, M., (1986). *Matemáticas. Construcciones Geométricas Con Materiales Diversos. Experimentos De Geometría.* Extraído el 17 de Enero de 2016 de: <http://www.mat.uc.pt/~delfos/experimentos%20de%20geometria.pdf>

Hernández, S, y otros (2010.). *Metodología de la investigación*, Mexico: Mc.Graw Hill.

Hidalgo, A., Maroto, A., Palacios, A.,(2004)¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. Extraído el 21 de Septiembre de 2015 desde http://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CCEQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.revistaeducacion.educacion.es%2Fre334%2Fre334_06.pdf&ei=LBReVc2rKu3_sATu44OIAQ&usg=AFQjCNGgiwoD8ki9yM-GvlzhLJMLV-P6cg&bvm=bv.93990622,d.cWc

Kline, M., (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, III.* Versión española de Alejandro García Diego.

Marco, H; (2014). *Una propuesta didáctica para 2º de ESO.* España. Universidad Zaragoza.

Mariño, R., (2004). *La geometría en el Arte y el diseño.* Bogotá, D.C. Universidad Nacional de Colombia.

Martínez, R (2014). *Algunas anotaciones históricas sobre arte y matemáticas: una herramienta didáctica en perspectiva, expone dicho vínculo, entre la relación*

entre las matemáticas y la pintura a partir de un análisis histórico. Tesis de grado. Colombia: Universidad del Valle. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

_____ (1999). *Serie de Lineamientos curriculares. Nuevas Tecnologías y Currículo de matemáticas. Áreas Obligatorias y fundamentales*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

_____ (MEN) (2004). *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Ministerio de. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

_____ (MEN) (2006). *Estándares Básicos de Competencias de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Mora, J. (2011). *Alberto Durero: relación geometría y experiencia*. Tesis de grado. Colombia: Universidad del Valle.

Murillo, F; Rodríguez, S; Herraiz, N; Prieto; Martínez, M; Picazo, M; Castro, I; y Bernal, S (2010-2011). *Investigación Acción. Métodos de investigación en Educación Especial*. 3 Edición Especial.

Parra, C., Saiz, I., (comps.). Santaló, L., Gálvez., Charnay, R., Brousseau, G., Lerne, D & Sadovovsky. (2002). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la Geometría en la escuela elemental. Quinta reimpresión. Buenos Aires, Argentina.

Peña, A., (2012). *Las tic en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO*. Suma 69, 37-48.

Redondo, A. y Haro, M. J. (2004). *Actividades de geometría fractal en el aula de Secundaria (I)*. Suma 47, 19-28.

Redondo, A y Haro, M. J. (2005). *Actividades de geometría fractal en el aula de Secundaria (II)*. Suma 48, 15-21.

Ruiz, Z. A., (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

- Sarmiento y Silva (2008). *Sistema modular y didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la geometría fractal. Diseño y construcción de un modelo funcional*. Universidad industrial del Santander. Bucaramanga, Colombia
- Talenquer, V., (2002). *Fractus, Fracta, Fractal. Fractales, de laberintos y espejos. La ciencia para todos. Segunda edición*. México
- Taylor, R. ., (2002). *Order in Pollock's Chaos*. Scientific American, 117-121. Extraído el 21 de Septiembre de 2015 desde http://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCIQFjAA&url=http%3A%2F%2Fmaterialsscience.uoregon.edu%2Ftaylor%2Fart%2Fscientificamerican.pdf&ei=191gVc6lG4KYNuXmg_gG&usg=AFQjCNHsd-t_qoFL1H4yFaP1WyBW-FVT1A&bvm=bv.93990622,d.eXY
- Toro, R(2013). Las matemáticas: fundamento de disciplinas y profesiones. Recuperado el 5 de Abril de 2015 desde http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-189357_archivo_pdf_matematica_1A.pdf
- Vasco, C., (2006). *Didáctica de las matemáticas. Artículos selectos*. Universidad Pedagógica Nacional. Impreso en Dvinni Ltda. Bogotá, Colombia.
- Vega, L., (1991). *Los elementos Euclides. Libros de I-IV. Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos, S.A*
- Venezuela, M., (2012). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile*. Universidad de Granada .Departamento de Didáctica de la Matemática. Santiago de Chile
- Zalaya, R., (2005). *Escultura matemática: antecedentes en la historia del arte, desarrollo, perspectivas de evolución y clasificación por conceptos matemáticos*. Universidad de la Politécnica de Valencia. Valencia, España

Referencias bibliográficas de las figuras

- [Arte rupestre]. Recuperado el 20 de Abril de 2015 de <http://www.estecha.com/imagen/reproducciones-rupestres/arte-rupestre-altamira.jpg>
- [Olla de Tajos de Cacín]. Recuperado el 19 de Abril de 2015 de http://recursostic.educacion.es/kairos/web/enseanzas/bachillerato/espana/img/imagenes_comentadas/emergente_olladetajos.html

[*Escritura cuneiforme*]. Recuperado el 21 de Abril de 2015 de <http://definicion.de/wp-content/uploads/2011/12/cuneiforme.jpg>

[*Ciudad de Persépolis*]. Recuperado el 23 de Abril de 2015 de Tomado el 24 de Abril de 2015 desde <http://tectonicablog.com/?p=23339>

[*Reconstrucción ideal del Zigurat de Babilonia*]. Recuperado el 23 de Abril de 2015 <http://www.epapontevedra.com/arte/L%C3%A1minas/Zigurat%20y%20templo%20de%20Babilonia.jpg>

[*Pirámide de Gizet*]. Recuperado el 25 de Abril de 2015 de 2015 <http://sietemaravillas.tripod.com/pages/uno.htm>

[*Escuela de Atenas*]. Recuperado el 25 de Abril de https://marisolroman.files.wordpress.com/2014/01/rafael_vaticano_sala_sello_escuela_de_atenas_01.jpg

[*El Partenón*]. Recuperado el 26 de Abril de 2015 de http://www.tunuevainformacion.com/images/%C3%89tica_y_Filosof%C3%ADa_de_Vida/partenon.jpg

[*Escuela de Atenas*]. Recuperado el 23 de Abril de 2015 de https://marisolroman.files.wordpress.com/2014/01/rafael_vaticano_sala_sello_escuela_de_atenas_01.jpg

[*El hombre de Vitrubio*]. Recuperado el 26 de Abril de 2015 de <http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/imagenes/Vitruvianp.jpg>

[*Fábrica de Horta del Ebro” (1909), de Picasso*]. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de <https://mariainescarvajal.files.wordpress.com/2011/12/fabrica-de-horta-del-ebro-1909-pablo-picasso-custom.jpg>

[*Serpientes, grabado en madera en el 1969- Metamorfosis, 1943, reptiles*]. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de <http://unadocenade.com/una-docena-de-obras-de-m-c-escher/>

[*Benoit Mandelbrot*]. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de <http://users.math.yale.edu/mandelbrot/BBM-2000-hires.jpg>

[*Esbozo aproximado del Conjunto de Cantor*]. Recuperado el 15 de Mayo de 2015 de <https://topologia.files.wordpress.com/2008/11/cantor.jpg>

[*Esbozo aproximado de La Curva de Peano*]. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 <http://www.avaad.ufsc.br/moodle/file.php/27/Fractal/peano.jpg>

[*Esbozo aproximado de La Curva De Hilbert*]. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de http://1.bp.blogspot.com/_NuhZx1YZ2-M/TLK_F4Bd-VI/AAAAAAAAAa4/IbfBkpJx1eI/s1600/Hilbert_curve.png

[*Esbozo aproximado de La Curva Del Dragón*].Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de https://www.google.com.co/search?q=curva+del+dragon&biw=1280&bih=655&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwiMqYyL5LHKAhULHT4KHf4QBaQQ_AUIBigB&dpr=1#imgsrc=rlgTtWn8XEWJVM%3A

[*Mosaico de la catedral de Anagni*].Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de https://www.google.com.co/search?q=:+Mosaico+de+la+catedral+de+Anagni&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj77-yW47HKAhULHT4KHf4QBaQQ_AUIBygB&biw=1280&bih=655#imgsrc=PqGM6Y2-xLn6TM%3A

[*En el lado derecho se aprecia el Castillo del Monte y su lado izquierdo se encuentra su estructura arquitectónica*].Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de <http://static2.absolutitalia.com/wp-content/uploads/2009/04/castel-delmonte-br.jpg>