

ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN MODELO
BIDIMENSIONAL PARA LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN LA
SUPERFICIE DE UN CANAL CON FONDO IRREGULAR

LUIS FERNANDO MEJÍA RODRÍGUEZ



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2019

ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN MODELO
BIDIMENSIONAL PARA LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN LA
SUPERFICIE DE UN CANAL CON FONDO IRREGULAR

LUIS FERNANDO MEJÍA RODRÍGUEZ

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Doctor en
Ciencias Matemáticas

DIRECTOR
JUAN CARLOS MUÑOZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LUIS FERNANDO MEJÍA RODRÍGUEZ, 1982

ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN MODELO
BIDIMENSIONAL PARA LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN LA
SUPERFICIE DE UN CANAL CON FONDO IRREGULAR

PALABRAS CLAVE: MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS, DIFERENCIAS FINITAS,
PROBLEMA VARIACIONAL, ONDAS ACUÁTICAS, MODELOS TIPO BOUSSINESQ

SANTIAGO DE CALI

2019

Nota de Aceptación

Dr. Juan Carlos Muñoz
Director de Tesis

Jurado

Jurado

Santiago de Cali, Agosto de 2019

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que hicieron parte en mi formación académica y personal; sin ninguna duda no estaría aquí de no ser por ellos, agradezco muy especialmente a mi familia que durante este largo camino fue mi apoyo incondicional, a mi mamá y papá por su amor y educación, a mis queridos hermanos por no dejarme sólo y ser una voz de ánimo, a mi hermosa sobrina Nicole que es el sol de mi hogar, a mis amigos que durante toda mi formación me dieron la mano y palabras de fortaleza para enfrentar tantos problemas, a todos los profesores que participaron de mi formación, por su gran esfuerzo. Un agradecimiento muy especial a el profesor Juan Carlos Muñoz por su ayuda, por su paciencia, sus enseñanzas y consejos, su ejemplo arrastra.

Resumen

Implementamos un método de elementos finitos para aproximar numéricamente la solución de un modelo tipo Boussinesq para la propagación de ondas acuáticas en un canal con topografía irregular. Discretizamos primero las variables temporales mediante esquemas de diferencias finitas, en especial el esquema de Crank-Nicholson, luego, en cada paso de tiempo, se discretiza con elementos finitos las variables espaciales. El modelo tipo Boussinesq fue propuesto en el artículo Numerical Investigation of a Two-Dimensional Boussinesq System, Discrete and Continuous Dynamical Systems [1] donde el forzante es desconocido; como parte de este trabajo, hacemos la deducción del modelo y la forma explícita del forzante. Se hace un estudio de existencia y unicidad de soluciones para el modelo tipo Boussinesq. La implementación numérica esta hecha en FEniCS Project, una plataforma de código abierto para resolver numéricamente ecuaciones en derivadas parciales.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	6
1.1. Espacios de Sobolev	6
1.2. El espacio H^{-1}	9
1.3. Espacios que involucran tiempo	10
1.4. El método de los elementos finitos	11
1.4.1. Funciones lineales en un triángulo	14
1.4.2. Triangulación	14
2. Deducción del Modelo	18
2.1. Planteamiento del problema	18
2.2. Adimensionalización del modelo	21
2.2.1. Adimensionalización de la frontera libre	21
2.2.2. Adimensionalización del interior del dominio	23
2.2.3. Adimensionalización de la ecuación de divergencia	28
2.2.4. Adimensionalización de la ecuación del rotacional	28
2.2.5. Adimensionalización de la ecuación del fondo	29
2.2.6. Conjunto de ecuaciones adimensionalizadas	30
2.3. Deducción del modelo	32
2.4. Deducción del sistema Boussinesq 2D para fondo variable	45
3. Existencia y Unicidad	60

4. Formulación variacional y FEM	68
4.1. Semidiscretización en tiempo	68
4.2. Formulación variacional del problema	69
4.3. FEM	73
5. Experimentos Numéricos e Implementación numérica FEniCS Project	75
5.1. Onda solitaria que choca con un obstáculo cilíndrico	76
5.2. Orden de convergencia del método	85
5.3. La resonancia Bragg	86
5.4. Implementación numérica	96
5.5. Onda Gaussiana	102
6. Conclusiones	115
Bibliografía	117

Introducción

A finales del siglo XIX y principios del XX, un joven ingeniero escocés de nombre John Scott Russell (1808-1882) realizaba un descubrimiento científico, la onda solitaria, lo describe en su obra Reporte sobre ondas [2] como: *“Creo que será mejor introducir este fenómeno describiendo las circunstancias de mi primer encuentro con esto. Estaba observando el movimiento de un bote el cual era jalado rápidamente a lo largo de un estrecho canal por un par de caballos, cuando el bote se detuvo repentinamente, mas no así la masa de agua justo delante de la proa del bote en el canal, la cual se había puesto en movimiento en un estado de violenta agitación repentinamente, esta masa en agitación empezó a salir hacia delante con gran velocidad, tomando la forma de una larga elevación solitaria, redonda, suave y bien definida de una masa de agua, la cual continuó su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. La seguí montado en un caballo, y aún la vi pasar a una razón de algunas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original algunos treinta pies de largo y entre un pie y pie y medio de altura. Pasado un tiempo, su altura gradualmente disminuyó, y después de seguirla una distancia de dos millas, la perdí en unos recodos del canal. Así que en el mes de agosto de 1834, fue mi primera oportunidad de encontrarme con ese singular y hermoso fenómeno, al cual he llamado Onda de Translación”.*

Este evento tuvo lugar en el Canal Unión en Hermiston, Escocia, muy cerca del campus Riccarton de la Universidad de Heriot-Watt (Edimburgo)(ver [3]). Fue en el año de 1870, cuando la onda solitaria pudo ser explicada por Boussinesq y Rayleigh, quienes

derivaron expresiones matemáticas para la forma y velocidad de tales ondas de manera independiente. En la actualidad, existen diferentes modelos que describen el fenómeno de la evolución de ondas de agua en términos de la velocidad potencial o la superficie de elevación, entre ellos destacan los sistemas Boussinesq en el estudio de ondas de agua con gran elongación y pequeña amplitud (ver [3]).

En 1960, inicia el uso computadoras digitales, por parte de los científicos, para estudiar la propagación de ondas no lineales. Es Russell quien ve a la onda solitaria como una entidad dinámica autosuficiente, que mostraba propiedades de partícula. Desde el punto de vista moderno, esto es usado como un elemento que permite formular comportamientos dinámicos complejos de sistemas de ondas en toda la ciencia desde óptica no lineal hasta hidrodinámica, desde colisiones de ondas hasta plasmas, desde tornados hasta la gran Mancha Roja de Júpiter (ver [3]).

Problemas de ondas de superficie han interesado a un número considerable de matemáticos, el primero fue Lagrange y continuaron Cauchy y Poisson [4]. Más tarde, la escuela británica de físicos matemáticos dieron notables contribuciones a problemas de onda de superficie hechas por Airy, Stokes, Kelvin, Rayleigh, y Lamb [4]. En la última parte del siglo XIX, los franceses una vez más tomaron el tema con fuerza y el trabajo realizado por St. Venant [5] y Boussinesq [6] en este campo ha tenido un efecto duradero. Más tarde, Poincaré hizo contribuciones sobresalientes particularmente en lo que respecta a las cifras de equilibrio de rotación y gravitación de líquidos; en este mismo campo, se hicieron incluso antes notables contribuciones por Lyapunov. Uno de los logros más destacados de este campo fue la prueba de la existencia de ondas viajeras de amplitud finita hecha por Nekrassov [7]. La literatura sobre las ondas de superficie en el agua es muy extensa. Además de una gran cantidad de memorias y documentos en las revistas científicas, hay una serie de libros que tratan el tema en profundidad. Primero y ante todo, el libro de Lamb [8]. También los libros de Bouasse, Thorade y Sverdrup son dedicados exclusivamente al tema [9]. El libro de Thorade consiste casi en su totalidad de breves reseñas de la literatura hasta 1931. El libro de Sverdrup fue escrito con la especial necesidad de ayudar a los oceanógrafos. El tema de las ondas superficiales de gravedad es Amplio y puede ser considerado desde el punto de vista de la física y la

las matemáticas. Las herramientas matemáticas empleadas comprenden las de la física matemática lineal clásica junto con las ecuaciones diferenciales parciales, así como una buena parte de lo que se ha aprendido acerca de los problemas no lineales. Por lo tanto, la teoría de potencial junto con herramientas tales como el mapeo conforme y métodos de variable compleja, la transformada de Laplace y Fourier, teoría de espacios de Banach y de Hilbert, el cálculo variacional, entre otros, fueron fundamentales en el establecimiento de teorías relacionadas con los modelos antes mencionados. Posteriormente, Korteweg y de Vries [10], Boussinesq [11] y Benney y Luke [12], Dougalis, Mitsutakis, Saut [13] derivaron modelos específicos para la propagación de una onda en la superficie de un canal con fondo raso de las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible y no viscoso.

En las últimas décadas, se han hecho muchos esfuerzos por parte de investigadores tanto en matemáticas puras como aplicadas para entender el mecanismo de deformación de una onda que se propaga en la superficie de una masa de agua contenida en un canal con fondo raso. Se han propuesto diversos modelos para describir la evolución de la onda y entender el efecto sobre ésta de la topografía inmersa o de efectos tales como la tensión superficial en la interfase aire-agua. Diversos fenómenos muy importantes en aplicaciones han sido descubiertos en la interacción onda-topografía aleatoria, tales como la dispersión múltiple de la onda, la estabilización probabilística y la refocalización de la onda incidente, que han sido estudiados muy recientemente utilizando tanto modelos dispersivos del tipo Boussinesq como modelos hiperbólicos de aguas rasas unidimensionales y bidimensional [14–18]. Un tema de interés es la existencia de ondas viajeras (soluciones con energía constante que se propagan con velocidad constante conservando su forma) de estos modelos. El estudio de ondas viajeras ha tenido un gran auge debido a que se encuentran en muy diversos y variados campos de aplicación, tales como la mecánica de fluidos, óptica, acústica, oceanografía, astronomía, etc. Por ejemplo, experimentación reciente ha demostrado que se generan ondas viajeras en medios líquidos, sólidos, gaseosos e incluso en la corriente eléctrica, campos electromagnéticos, atmósferas de planetas, cristales, plasmas, fibras de vidrio y redes nerviosas. En la biología molecular, en la búsqueda de mecanismos que permitan transportar paquetes de energía a través de moléculas biológicas, tales como las proteínas, se sospecha que existen ondas solitarias

atravesando la estructura de las moléculas. De otra parte, se sospecha que, con la ayuda de las ondas viajeras, algún día, se podrían almacenar y transportar informaciones en ordenadores extremadamente rápidos, aprovechando la consistencia y mayor duración de vida de una onda solitaria que la de las ondas normales. También en oceanografía, se investiga la potencial aplicación de estos modelos y de la teoría de ondas viajeras para la predicción y entendimiento de formación de los tsunamis (ondas de pequeña amplitud que se propagan en el océano a gran velocidad). Toda esta amplia gama de aplicaciones justifica nuestra investigación acerca de ondas viajeras de diferentes modelos formulados para el fenómeno de propagación de ondas en el agua. Por otro lado, los modelos considerados no tienen en general soluciones analíticas, lo cual motiva el uso de estrategias numéricas que permitan realizar predicciones acerca de la propagación de las ondas. Aunque han habido abundantes trabajos numéricos acerca de algunos modelos de ondas acústicas, pocos trabajos han explorado la técnica de elementos finitos en modelos del tipo Boussinesq y ecuaciones de teoría de potencial en el caso bidimensional, pues la mayoría en su lugar emplean técnicas de diferencias finitas en dominios acotados o métodos espectrales en dominios espaciales periódicos [13, 19]. Igualmente, el problema de existencia y unicidad de soluciones de modelos de ondas acuáticas superficiales en la presencia de topografía ha sido poco considerado en la literatura disponible. En este trabajo de investigación, se realiza el estudio de existencia y unicidad de la solución del modelo bidimensional tipo Boussinesq para la propagación de ondas superficiales en un canal con topografía irregular, deducido en [20] en el caso unidimensional, y en [1] para el caso bidimensional, donde no se dan los detalles completos de su deducción. La ventaja del tipo de modelos Boussinesq considerado en este trabajo es que los términos de la topografía no afectan los términos dispersivos en el modelo, y además se considera el caso más general en que la topografía depende tanto del espacio como del tiempo (topografía móvil). Los esquemas numéricos generados se pretenden usar para explorar algunos fenómenos asociados a la interacción onda-topografía en el caso bidimensional y la propagación de ondas viajeras en 2D.

En el capítulo primero, se encuentran los preliminares necesarios para la realización de este trabajo, se hace una pequeña descripción de los espacios de Sobolev y los espacios

que involucran tiempo. Junto a los resultados más importantes para la realización de esta investigación, también se hace una pequeña descripción del método de los elementos finitos.

En el capítulo dos, se hace el planteamiento del problema y la deducción del modelo tipo Boussinesq dos dimensional con topografía variable que se estudia en este documento, encontrando de manera explícita el forzante del modelo que no se hace explícito en la literatura disponible.

En el capítulo tres, encontramos el teorema de existencia y unicidad para las soluciones del modelo Bussinesq dos dimensional con topografía variable.

En el capítulo cuatro, se usa el método de elementos finitos y la implementación numérica en FEniCS Project, se muestra la discretización espacial y temporal para el modelo que se estudia en este trabajo.

En el capítulo cinco, se realizan diferentes experimentos numéricos que validan la solución al modelo que se implementó; entre ellos se destaca el fenómeno de resonancia Bragg, el cual se verifica en los experimentos numéricos realizados con el modelo en la presencia de un fondo variable periódico.

En el capítulo seis, encontramos algunas conclusiones que nos deja este trabajo y finalmente, encontramos la bibliografía.

Preliminares

1.1. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev $W^{k,p}$ son subespacios de los espacios L^p que además controlan la regularidad de las derivadas. Su estructura y propiedades los hacen particularmente adecuados para el análisis de ecuaciones diferenciales parciales.

Los espacios son introducidos en 1930 por Sergei Lvovich Sobolev, matemático ruso quien esencialmente influenció en el campo del análisis y soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

Definición 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $k \geq 1$ un número entero y $p \in [1, \infty]$. Se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha, |\alpha| \leq k\}.$$

Para todo $1 \leq p < \infty$, la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ se define como

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, se define

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} \{|D^\alpha f|\}.$$

En el caso especial $p = 2$, podemos escribir $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$.

Definición 1.2. Denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega),$$

la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.1. Para cada $k = 1, \dots$, y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [21].

Teorema 1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $k \geq 1$ un número entero. El espacio de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$, junto al producto escalar

$$(f, g)_{k,2} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha g dx = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)},$$

es un espacio de Hilbert.

La prueba del teorema se puede encontrar en [22].

Teorema 1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada; si $k > \frac{n}{p}$ entonces el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es un álgebra de Banach conmutativa.

La demostración de este teorema puede verse en [23], las condiciones del teorema referente al tipo de frontera cambian en algunos textos, pero [23] prueba también las equivalencias entre ellos.

Definición 1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $0 < \gamma \leq 1$, llamamos a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función Hölder continua si

$$\|u(x) - u(y)\| \leq C \|x - y\|^\gamma \quad (x, y \in \Omega)$$

y denotamos la seminorma de Hölder como

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\gamma}.$$

El espacio de Hölder

$$\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

consiste de todas las funciones $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ para la cual la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \quad (1.1)$$

es finita.

Por tanto el espacio $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste de las funciones u que son k veces continuamente diferenciables y sus derivadas parciales de orden k son acotadas y Hölder continuas con exponente γ .

Teorema 1.4. (*Desigualdades generales de Sobolev*). Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $\mathcal{C}^1$. Suponga que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

1. Si

$$k < \frac{n}{p}, \quad (1.2)$$

entonces $u \in L^q(\Omega)$, donde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n};$$

además,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad (1.3)$$

donde la constante C depende de k, p, n y Ω .

2. Si

$$k > \frac{n}{p}, \quad (1.4)$$

entonces $u \in C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}(\overline{\Omega})$, donde

$$\gamma = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil + 1 - \frac{n}{p}, & \text{si } \frac{n}{p} \text{ no es entero,} \\ \text{cualquier número positivo } < 1, & \text{si } \frac{n}{p} \text{ es entero.} \end{cases}$$

Además,

$$\|u\|_{C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1, \gamma}} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad (1.5)$$

donde la constante C depende solamente de k, p, n, γ y Ω .

La demostración completa del teorema se encuentra en [21, 23, 24].

1.2. El espacio H^{-1}

En esta sección definimos el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$ y realizamos una caracterización del mismo.

Definición 1.4. Se define el espacio $H^{-1}(\Omega)$ como el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$.

En otras palabras f , pertenece a $H^{-1}(\Omega)$ si f es un funcional lineal acotado en $H_0^1(\Omega)$.

Además, observemos que

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Definición 1.5. Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, definimos la norma

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup\{\langle f, u \rangle \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Teorema 1.5. (Caracterización de H^{-1}).

(i) Suponga que $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces existen funciones $f^0, f^1, \dots, f^n$ en $L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} dx, \quad (v \in H_0^1(\Omega)). \quad (1.6)$$

(ii) Más aún,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_{\Omega} \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \mid f \text{ satisface (1.6) para } f^0, \dots, f^n \in L^2(\Omega) \right\}.$$

(iii) En particular,

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \langle v, u \rangle, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega), v \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega). \quad (1.7)$$

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en [21].

Notación. Siempre que (1.6) se cumpla escribimos $f = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i$.

1.3. Espacios que involucran tiempo

Definición 1.6. Sea X un espacio de Banach real, el espacio

$$L^p(0, T; X),$$

consiste de todas las funciones fuertemente medibles $u : [0, T] \rightarrow X$ con

(i)

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

para $1 \leq p < \infty$ y

(ii)

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Definición 1.7. El espacio $C([0, T]; X)$ comprende todas las funciones continuas $u : [0, T] \rightarrow X$ con

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Definición 1.8. Sea $u \in L^1(0, T; X)$; decimos que $v \in L^1(0, T; X)$ es la derivada débil de u , que denotamos como

$$u' = v,$$

si

$$\int_0^T \phi'(t) u(t) dt = - \int_0^T \phi(t) v(t) dt,$$

para toda función de prueba $\phi \in C_c^\infty(0, T)$.

Definición 1.9.

(i) El espacio de Sobolev

$$W^{1,p}(0, T, X),$$

consta de todas las funciones $u \in L^p(0, T, X)$ tal que u' existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(0, T, X)$. Más aún,

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T, X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty), \\ \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|) & (p = \infty). \end{cases}$$

(ii) Escribimos $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$.

1.4. El método de los elementos finitos

Consideremos una situación muy común en el que la solución de un problema físico minimiza algún funcional J (usualmente un funcional de energía) definido en un espacio “bien elegido” de funciones V que tomaremos por el momento como un espacio de Hilbert.

Es decir, consideremos el problema

$$\inf_{v \in V} J(v). \quad (1.8)$$

Si el funcional $J(\cdot)$ es diferenciable, el mínimo (cuando él exista) se caracteriza por una ecuación variacional

$$\langle J'(u), v \rangle_{V' \times V} = 0, \quad \forall v \in V, \quad (1.9)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ denota la dualidad entre V y el dual topológico V' , la derivada $J'(u)$ en un punto u es considerado como una forma lineal en V .

Un método clásico para aproximar la solución de (1.8) es el método de Ritz, el cual consiste en buscar $u_m \in V_m$, donde V_m es un subespacio de dimensión finita de V , que es solución del problema

$$\inf_{v_m \in V_m} J(v_m), \quad (1.10)$$

o

$$\langle J'(u_m), v_m \rangle_{V' \times V} = 0, \quad \forall v_m \in V_m. \quad (1.11)$$

Consideremos, por ejemplo, el funcional cuadrático

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v), \quad (1.12)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal en V , la cual suponemos continua y simétrica y $L(\cdot)$ es una forma lineal en V . La ecuación variacional (1.11) puede entonces escribirse como

$$a(u_m, v_m) = L(v_m), \quad \forall v_m \in V_m. \quad (1.13)$$

Por ejemplo, si tomamos la ecuación $\Delta u = -f$ con condición de frontera tipo Dirichlet homogénea en un dominio Ω , la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ estaría dada por

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)},$$

y

$$L(v) = (-f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Si $w_1, w_2, \dots, w_m$ es una base de V_m , escribimos

$$u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i. \quad (1.14)$$

El problema (1.13) se reduce a resolver el sistema lineal

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i = b_j, 1 \leq j \leq m, \quad (1.15)$$

donde $a_{ij} = a(w_i, w_j)$ y $b_j = L(w_j)$.

Esta formulación se puede extender para el caso donde la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ no es simétrica y el problema (1.13) no corresponde a un problema de minimización. Esto es llamado usualmente método Galerkin. Recordemos que el problema (1.13) tiene solución única si, en particular, la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva, esto es, si existe un número real positivo α tal que para todo $v \in V$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (1.16)$$

La metodología descrita es muy general y clásica, podemos considerar el método de los elementos finitos como un caso especial en el siguiente sentido:

El método de elementos finitos es una técnica general para construir subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert H con el fin de aplicar el método de Ritz-Galerkin a un problema variacional.

Esta técnica se basa en unas pocas ideas. Lo fundamental es la partición del dominio Ω , en el que el problema se plantea, en un conjunto de subdominios “simples”, llamados elementos. Estos elementos suelen ser triángulos, cuadriláteros, tetraedros, etc. Un espacio V de funciones definidas en Ω se aproxima mediante funciones “simples”, definidas en cada subdominio con condiciones apropiadas. Las funciones simples suelen ser polinomios o funciones obtenidas de polinomios por un cambio de variables.

Definición 1.10. *Un método de elementos finitos (FEM por su nombre en inglés) es una terna (K, P, Q) donde K es un simplex de $\mathbb{R}^n$, P es un conjunto de funciones y Q es un conjunto de formas lineales linealmente independientes, conocido como los grados de libertad (DOF).*

En otras palabras, K es un dominio (triángulos o rectángulos en $\mathbb{R}^2$), P son funciones polinómicas y Q nos indica como se obtienen estas funciones.

1.4.1. Funciones lineales en un triángulo

El conjunto de funciones que se usa en el método de elementos finitos son de forma polinomial. Por ejemplo, polinomios de grado 1 de la forma

$$p(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2. \quad (1.17)$$

El conjunto de estas funciones se denota $\mathbb{P}_1$. Esta función está determinada de forma única por el valor de tres puntos distintos no colineales, estos son vértices de un triángulo no degenerado, (ver figura 1.1). Los tres valores de la función en los vértices se llaman grados de libertad.

1.4.2. Triangulación

Hasta el momento, tenemos funciones en un triángulo; ahora vamos a particionar el dominio en triángulos. Una triangulación de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una subdivisión de este dominio en triángulos, (ver figura 1.3). Los triángulos deben cubrir todo, pero no más, y deben cumplir con la siguiente regla:

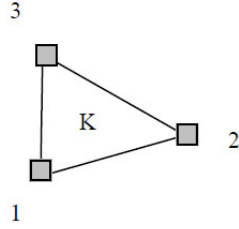


Figura 1.1: Vértices de un triángulo.

- Si dos triángulos tienen alguna intersección esta es un vértice o un borde común. En particular, dos triángulos diferentes no se superponen, no debe pasar lo que ilustra la figura 1.2.

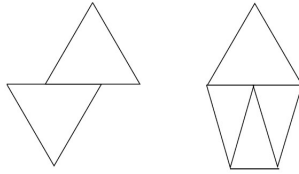


Figura 1.2: Situación no admitida en una triangulación.

El conjunto de los triángulos se denota generalmente T_h , el subíndice h hace referencia al diámetro de la triangulación medida como la longitud del borde más largo de todos los triángulos [25].

Consideremos dos triángulos K y K' que tienen un lado común (ver figura 1.4). Se puede construir una función que pertenece a $\mathbb{P}_1$ en cada triángulo con los valores requeridos en los nodos.

Esta función es única, además, dado que el valor en el lado común sólo depende de los vértices comunes, la función resultante es continua. Lo anterior se puede hacer triángulo por triángulo y terminaríamos con una función lineal en cada triángulo y globalmente continua, el espacio de tal función es

$$V_h = \{u_h \in C(\overline{\Omega}) : u_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_h\}.$$

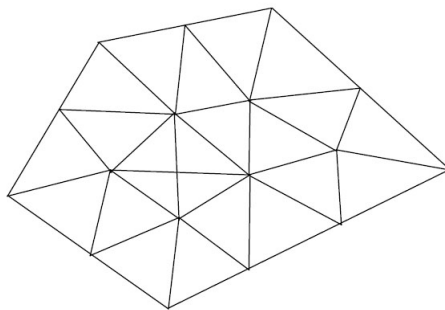
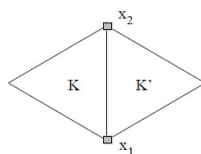
Figura 1.3: Una triangulación de Ω .

Figura 1.4: Lado común.

Si fijamos los valores de los vértices en la triangulación T_h , existe una única $u_h \in V_h$ con esos valores en los vértices [25].

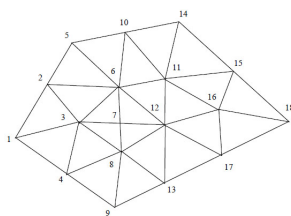


Figura 1.5: Numeración local de nodos.

Los vértices son generalmente denotados por p_i con i variando en el número de vértices que llamamos N (ver figura 1.5). Si fijamos un nodo y el valor asociado a él y cero en todos los demás nodos, existe una única función $\varphi_i \in V_h$ que toma estos valores, (ver figura 1.6).

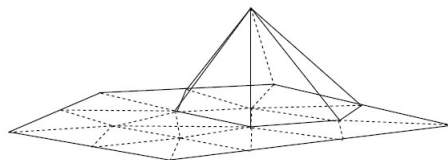


Figura 1.6: Función de bases nodales.

$$\varphi_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases} \quad (1.18)$$

Tomemos $u_h \in V_h$, entonces

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_h(p_i) \varphi_i,$$

donde $\{\varphi_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ es una base de V_h y por lo tanto la dimensión de V_h es igual al número de vértices, es decir, N . Gracias a esto, podemos escribir,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j.$$

Con esta base, los coeficientes son precisamente los valores de u_h en los nodos, esto es, $u_j = u_h(p_j)$.

Deducción del Modelo

2.1. Planteamiento del problema

Consideremos una onda que se propaga en un canal de agua, con largo y ancho L y cuyo fondo es variable. Sean x, y las coordenadas a lo largo y ancho del canal, respectivamente, y z la coordenada vertical con dirección hacia arriba y origen en la superficie libre. Sea $\eta(x, y, t)$ la superficie libre la cual es desconocida, y el fondo del canal descrito por una función $-h(x, y, t)$, la cual depende en general del espacio y el tiempo. Entonces el dominio ocupado por el fluido puede escribirse como el conjunto $\Omega_t = \{(0, L) \times (0, L) \times (-h(x, y, t), \eta(x, y, t))\}$ (ver Figura 2.1). La dependencia del tiempo del dominio del problema Ω_t introduce complicaciones tanto en el tratamiento analítico como numérico de los modelos que describen el fenómeno. Sea a_0 una altura

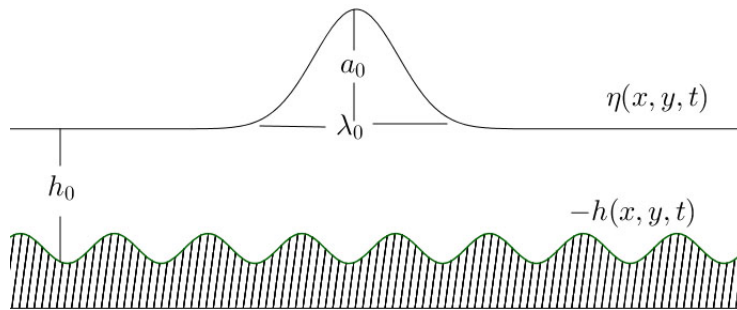


Figura 2.1: Esquema que muestra la geometría del problema considerado.

característica de la onda, λ_0 una longitud de onda característica y h_0 un promedio de la profundidad del agua. Suponiendo que el fluido es incompresible e irrotacional, y los efectos de viscosidad son despreciables, las ecuaciones de Euler [26] que describen el movimiento del fluido se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} U_t + (U \cdot \nabla)U + \frac{1}{\rho} \nabla P &= b, \\ \operatorname{div} U &= 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_t \\ \nabla \times U &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $b = (0, 0, -g)$ denota la fuerza externa (que aquí corresponde a la fuerza de tipo gravitacional), g es la gravedad, $U = (u, v, w)$ denota la velocidad del fluido en el punto (x, y, z) y tiempo t , P denota el campo de presión y ρ la densidad del fluido.

La ecuación que describe el movimiento de la superficie libre (interfase agua-aire) es [20]

$$S(x, y, z, t) = z(t) - \eta(x, y, t) = 0. \tag{2.2}$$

Derivando (2.2) respecto a t y usando regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dz}{dt} - \left(\frac{d\eta}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right) = 0.$$

Ya que $U = (u, v, w)$ es un campo de velocidades, entonces, $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$; remplazando en lo anterior tenemos

$$w - \eta_x u - \eta_y v - \eta_t = 0 \quad \text{en } z = \eta(x, y, t). \tag{2.3}$$

Las condiciones de frontera en el fondo están dadas por

$$F(x, y, z, t) = z(t) + h(x, y, t) = 0. \tag{2.4}$$

Derivando F respecto a t y usando regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{dh}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dh}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dh}{dt} = 0.$$

Remplazando $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$ obtenemos

$$w + h_x u + h_y v + h_t = 0 \quad \text{en } z = -h(x, y, t). \quad (2.5)$$

Recordemos que la presión es conocida en la superficie, por tanto tendremos como condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x u + \eta_y v - w &= 0 & \text{en } z = \eta(x, y, t), \\ P(x, y, t) &= P_0(x, y, t) & \text{en } z = \eta(x, y, t), \\ h_t + h_x u + h_y v + w &= 0 & \text{en } z = -h(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las condiciones en medio del fluido están dadas por las ecuaciones de Euler. Recordemos que [26]

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + b,$$

la $\frac{DU}{Dt}$ es la derivada material, es decir,

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U,$$

donde,

$$\begin{aligned} (U \cdot \nabla)U &= ((u, v, w) \cdot (\partial_x, \partial_y, \partial_z))U = (u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z)U = (u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z)(u, v, w) = \\ &= (u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u, u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v, u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w). \end{aligned}$$

Remplazando en la derivada material y tomando su forma vectorial, tenemos

$$u_t + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u + \frac{\partial_x P}{\rho} = 0, \quad (2.7)$$

$$v_t + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + \frac{\partial_y P}{\rho} = 0, \quad (2.8)$$

$$w_t + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w + \frac{\partial_z P}{\rho} = -g. \quad (2.9)$$

De la ecuación de conservación de masa, tenemos que $\text{div } U = 0$, por tanto

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0;$$

cuando el fluido es irrotacional, se tiene además que $\nabla \times U = 0$, por tanto,

$$w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y = 0; \quad (2.10)$$

una vez tenemos las ecuaciones que describen el comportamiento del fluido, pasamos a adimensionalizarlas.

2.2. Adimensionalización del modelo

Es muy importante disponer de las ecuaciones que describen el comportamiento del fluido sin unidades físicas, para lo cual introducimos los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{\lambda_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\lambda_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{h_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \tilde{t} = \frac{C_0 t}{\lambda_0}, \\ \tilde{h} &= \frac{h - h_0}{a_0}, \quad \tilde{u} = \frac{uh_0}{a_0 C_0}, \quad \tilde{v} = \frac{vh_0}{a_0 C_0}, \quad \tilde{w} = \frac{w\lambda_0}{a_0 C_0}. \end{aligned}$$

2.2.1. Adimensionalización de la frontera libre

La ecuación de frontera libre original es

$$\eta_t + \eta_x u + \eta_y v - w = 0; \quad (2.11)$$

de la adimensionalización, sabemos que $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda_0}$, por tanto

$$\eta(x, y, t) = a_0 \tilde{\eta} \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\lambda_0}, \frac{C_0 t}{\lambda_0} \right). \quad (2.12)$$

Primero necesitamos encontrar η_t

$$\eta_t = a_0 \left(\tilde{\eta}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{\eta}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{\eta}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_t \right) = a_0 \tilde{\eta}_{\tilde{t}} \frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{t}},$$

ahora calculamos η_x

$$\eta_x = a_0 \left(\tilde{\eta}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{\eta}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{\eta}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_x \right) = a_0 \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda_0} = \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{x}}.$$

En forma similar calculamos η_y

$$\eta_y = \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{y}}.$$

También necesitamos u , v y w , los cuales conocemos de la adimensionalización:

$$u = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{u}, v = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v}, w = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}.$$

Remplazando en (2.11), obtenemos

$$\frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{u} + \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{y}} \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v} - \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w} = 0;$$

simplificando, vemos que

$$\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \tilde{u} + \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{\eta}_{\tilde{y}} \tilde{v} - \tilde{w} = 0;$$

si definimos

$$\alpha = \frac{a_0}{h_0} \text{ y } \beta = \frac{h_0^2}{\lambda_0^2},$$

y reemplazamos estos valores α y β en la ecuación anterior, tenemos que

$$\tilde{\eta}_t + \alpha \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \tilde{u} + \alpha \tilde{\eta}_{\tilde{y}} \tilde{v} - \tilde{w} = 0; \quad (2.13)$$

como la presión es constante en la superficie, obtenemos que

$$P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = P_0. \quad (2.14)$$

2.2.2. Adimensionalización del interior del dominio

El dominio original del problema es $\Omega_t = \{(0, L) \times (0, L) \times (-h(x, y, t), \eta(x, y, t))\}$. De los cambios de escala introducidos anteriormente, tenemos que

$$z = -h, \quad \tilde{h} = \frac{h - h_0}{a_0} \quad \text{y} \quad \tilde{z} = \frac{z}{h_0},$$

por lo tanto, $h_0 \tilde{z} = -(h_0 + a_0 \tilde{h})$ y $z = -\left(\frac{h_0}{h_0} + \frac{a_0}{h_0} \tilde{h}\right) = -(1 + \alpha \tilde{h})$, es decir, cuando $z = -h$ entonces $\tilde{z} = -(1 + \alpha \tilde{h})$. En forma similar, cuando $z = \eta$, usando las formas de adimensionalización, tenemos que

$$\tilde{z} = \frac{z}{h_0} \quad \text{y} \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{a_0},$$

por tanto, $h_0 \tilde{z} = a_0 \tilde{\eta}$ y $\tilde{z} = \frac{a_0}{h_0} \tilde{\eta} = \alpha \tilde{\eta}$, es decir, $z = \eta$ implica que $\tilde{z} = \alpha \tilde{\eta}$. El nuevo dominio adimensionalizado es por tanto

$$\tilde{\Omega}_{\tilde{t}} = \left(0, \frac{L}{\lambda_0}\right) \times \left(0, \frac{L}{\lambda_0}\right) \times \left(-(1 + \alpha \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})), \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})\right).$$

Ahora bien, de las ecuaciones de Euler, tenemos

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{1}{\rho} P_x = 0, \quad (2.15)$$

y de las fórmulas de adimensionalización, sabemos que $\tilde{u} = \frac{uh_0}{a_0C_0}$, por tanto, se tiene que

$$\tilde{u} = \frac{a_0C_0}{h_0} \tilde{u} \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\lambda_0}, \frac{z}{h_0}, \frac{C_0t}{\lambda_0} \right).$$

Luego, realizado los cálculos respectivos para obtener u_t, u_x, u_y, u_z , a partir de la anterior igualdad, concluimos que

$$u_t = \frac{a_0C_0}{h_0} \left(\tilde{u}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{u}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{u}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_t + \tilde{u}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0t}{\lambda_0} \right)_t \right) = \frac{a_0C_0^2}{h_0\lambda_0} \tilde{u}_t,$$

$$u_x = \frac{a_0C_0}{h_0} \left(\tilde{u}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{u}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{u}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_x + \tilde{u}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0t}{\lambda_0} \right)_x \right) = \frac{a_0C_0}{h_0\lambda_0} \tilde{u}_{\tilde{x}},$$

$$u_y = \frac{a_0C_0}{h_0} \left(\tilde{u}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{u}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{u}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_y + \tilde{u}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0t}{\lambda_0} \right)_y \right) = \frac{a_0C_0}{h_0\lambda_0} \tilde{u}_{\tilde{y}},$$

$$u_z = \frac{a_0C_0}{h_0} \left(\tilde{u}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_z + \tilde{u}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_z + \tilde{u}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_z + \tilde{u}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0t}{\lambda_0} \right)_z \right) = \frac{a_0C_0}{h_0^2} \tilde{u}_{\tilde{z}},$$

$$P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = P(x, y, z, t),$$

$$P_x = P_{\tilde{x}}(\tilde{x})_x = P_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_x = P_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda_0}.$$

Remplazando lo anterior en (2.15), obtenemos

$$\frac{a_0C_0^2}{h_0\lambda_0} \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{a_0C_0}{h_0} \tilde{u} \frac{a_0C_0}{h_0\lambda_0} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{a_0C_0}{h_0} \tilde{v} \frac{a_0C_0}{h_0\lambda_0} \tilde{u}_{\tilde{y}} + \frac{a_0C_0}{\lambda_0} \tilde{w} \frac{a_0C_0}{h_0^2} \tilde{u}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho\lambda_0} P_{\tilde{x}} = 0;$$

sacando factores comunes, tenemos

$$\frac{C_0^2}{\lambda_0} \left(\frac{a_0}{h_0} \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \tilde{v} \tilde{u}_{\tilde{y}} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \tilde{w} \tilde{u}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho C_0^2} P_{\tilde{x}} \right) = 0;$$

por tanto

$$\alpha \tilde{u}_{\tilde{t}} + \alpha^2 \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \alpha^2 \tilde{v} \tilde{u}_{\tilde{y}} + \alpha^2 \tilde{w} \tilde{u}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho C_0^2} P_{\tilde{x}} = 0. \quad (2.16)$$

Por otro lado, para adimensionalizar la segunda ecuación de Euler

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho} P_y = 0, \quad (2.17)$$

introducimos el cambio de escala

$$\tilde{v} = \frac{h_0}{a_0 C_0} v.$$

Por tanto

$$v(x, y, z, t) = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}).$$

De esta fórmula, deseamos calcular v_t , v_x , v_y y v_z y además adimensionalizar la cantidad P_y .

$$v_t = \frac{a_0 C_0}{h_0} \left(\tilde{v}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{v}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{v}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_t + \tilde{v}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_t \right) = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v}_{\tilde{t}} \frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0^2}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_{\tilde{t}},$$

$$v_x = \frac{a_0 C_0}{h_0} \left(\tilde{v}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{v}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{v}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_x + \tilde{v}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_x \right) = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_{\tilde{x}},$$

$$v_y = \frac{a_0 C_0}{h_0} \left(\tilde{v}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{v}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{v}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_y + \tilde{v}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_y \right) = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v}_{\tilde{y}} \frac{1}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_{\tilde{y}}$$

$$v_z = \frac{a_0 C_0}{h_0} \left(\tilde{v}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_z + \tilde{v}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_z + \tilde{v}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_z + \tilde{v}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_z \right) = \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v}_{\tilde{z}} \frac{1}{h_0} = \frac{a_0 C_0}{h_0^2} \tilde{v}_{\tilde{z}},$$

$$P(x, y, z, t) = P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = P\left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\lambda_0}, \frac{z}{h_0}, \frac{C_0 t}{\lambda_0}\right),$$

$$P_y = P_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_y = P_{\tilde{y}} \frac{1}{\lambda_0},$$

luego, en (2.17), tendremos que

$$\frac{a_0 C_0^2}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_t + \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{u} \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_{\tilde{x}} + \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v} \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_{\tilde{y}} + \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w} \frac{a_0 C_0}{h_0^2} \tilde{v}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho} P_{\tilde{y}} \frac{1}{\lambda_0} = 0;$$

factorizando, tenemos

$$\frac{C_0^2}{\lambda_0} \left(\frac{a_0}{h_0} \tilde{v}_t + \frac{a_0^2}{h_0^2} \tilde{u} \tilde{v}_{\tilde{x}} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \tilde{v} \tilde{v}_{\tilde{y}} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \tilde{w} \tilde{v}_{\tilde{z}} + \frac{P_{\tilde{y}}}{\rho C_0^2} \right) = 0,$$

por tanto

$$\alpha \tilde{v}_t + \alpha^2 \tilde{u} \tilde{v}_{\tilde{x}} + \alpha^2 \tilde{v} \tilde{v}_{\tilde{y}} + \alpha^2 \tilde{w} \tilde{v}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho C_0^2} P_{\tilde{y}} = 0. \quad (2.18)$$

Finalmente, adimensionalizaremos la tercera ecuación de Euler

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho} P_z = -g; \quad (2.19)$$

de las fórmulas de adimensionalización, tenemos que

$$\tilde{w} = \frac{w \lambda_0}{a_0 C_0},$$

por tanto, despejando w , tenemos

$$w(x, y, z, t) = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w} \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\lambda_0}, \frac{z}{h_0}, \frac{C_0 t}{\lambda_0} \right);$$

deseamos encontrar w_t , w_x , w_y , w_z a partir de la fórmula anterior además de P_z . Observemos que

$$w_t = \frac{a_0 C_0}{h_0} \left(\tilde{w}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{w}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{w}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_t + \tilde{w}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_t \right) = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{t}} \frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0^2}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{t}},$$

$$w_x = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \left(\tilde{w}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{w}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{w}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_x + \tilde{w}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_x \right) = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{x}} \frac{1}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{x}},$$

$$w_y = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \left(\tilde{w}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{w}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{w}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_y + \tilde{w}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_y \right) = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{y}} \frac{1}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{y}},$$

$$w_z = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \left(\tilde{w}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_z + \tilde{w}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_z + \tilde{w}_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_z + \tilde{w}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_z \right) = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{z}} \frac{1}{h_0} = \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{z}},$$

$$P(x, y, z, t) = P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = P \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\lambda_0}, \frac{z}{h_0}, \frac{C_0 t}{\lambda_0} \right),$$

$$P_z = P_{\tilde{z}} \left(\frac{z}{h_0} \right)_z = P_{\tilde{z}} \frac{1}{h_0},$$

así, remplazando en (2.19), tendremos que

$$\frac{a_0 C_0^2}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{t}} + \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{u} \frac{a_0 C_0}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{x}} + \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v} \frac{a_0 C_0}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{y}} + \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w} \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho h_0} P_{\tilde{z}} = -g;$$

dividiendo por C_0^2 y multiplicando por h_0 , tenemos

$$\frac{a_0 h_0}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{t}} + \frac{a_0^2}{\lambda_0^2} \tilde{u} \tilde{w}_{\tilde{x}} + \frac{a_0^2}{\lambda_0^2} \tilde{v} \tilde{w}_{\tilde{y}} + \frac{a_0^2}{\lambda_0^2} \tilde{w} \tilde{w}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho C_0^2} P_{\tilde{z}} = -\frac{h_0}{C_0^2} g;$$

multiplicando y dividiendo el primer término por h_0 , y el segundo, tercero y cuarto términos por h_0^2 , obtenemos

$$\frac{a_0 h_0^2}{h_0 \lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{t}} + \frac{a_0^2 h_0^2}{h_0^2 \lambda_0^2} \tilde{u} \tilde{w}_{\tilde{x}} + \frac{a_0^2 h_0^2}{h_0^2 \lambda_0^2} \tilde{v} \tilde{w}_{\tilde{y}} + \frac{a_0^2 h_0^2}{h_0^2 \lambda_0^2} \tilde{w} \tilde{w}_{\tilde{z}} + \frac{1}{\rho C_0^2} P_{\tilde{z}} = \frac{-g h_0}{C_0^2};$$

recordando que definimos $\alpha = \frac{a_0}{h_0}$ y $\beta = \frac{h_0^2}{\lambda_0^2}$, tenemos que

$$\alpha\beta\tilde{w}_t + \alpha^2\beta\tilde{u}\tilde{w}_x + \alpha^2\beta\tilde{v}\tilde{w}_y + \alpha^2\beta\tilde{w}\tilde{w}_z + \frac{1}{\rho C_0^2}P_z = \frac{-gh_0}{C_0^2};$$

puesto que $C_0 = \sqrt{gh_0}$ entonces tenemos que

$$\alpha\beta\tilde{w}_t + \alpha^2\beta\tilde{u}\tilde{w}_x + \alpha^2\beta\tilde{v}\tilde{w}_y + \alpha^2\beta\tilde{w}\tilde{w}_z + \frac{1}{\rho C_0^2}P_z = -1.$$

2.2.3. Adimensionalización de la ecuación de divergencia

De la divergencia de U en las ecuaciones de Euler, tenemos que $u_x + v_y + w_z = 0$, luego, reemplazando con los valores antes encontrados para u_x , v_y y w_z , obtenemos

$$\frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{u}_x + \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_y + \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{w}_z = 0.$$

Factorizando, tenemos que

$$\tilde{u}_x + \tilde{w}_y + \tilde{w}_z = 0.$$

2.2.4. Adimensionalización de la ecuación del rotacional

Puesto que el fluido es irrotacional, tenemos que

$$\nabla \times U = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = 0,$$

por tanto, $w_y - v_z = 0$, $u_z - w_x = 0$ y $v_x - u_y = 0$. En primer lugar, reemplazando en $w_y - v_z = 0$ los valores obtenidos para w_y y v_z , obtenemos

$$\frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w}_y - \frac{a_0 C_0}{h_0^2} \tilde{v}_z = 0,$$

luego,

$$\frac{1}{\lambda_0} \tilde{w}_y - \frac{1}{h_0^2} \tilde{v}_z = 0,$$

multiplicando por h_0^2 , tenemos que

$$\frac{h_0^2}{\lambda_0} \tilde{w}_{\tilde{y}} - \frac{h_0^2}{h_0^2} \tilde{v}_{\tilde{z}} = 0,$$

por tanto,

$$\beta \tilde{w}_{\tilde{y}} - \tilde{v}_{\tilde{z}} = 0. \quad (2.20)$$

En segundo lugar, remplazando en $u_z - w_x = 0$ los valores de w_x y u_z , obtenemos

$$\frac{a_0 C_0}{h_0^2} \tilde{u}_{\tilde{z}} - \frac{a_0 C_0}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{x}} = 0;$$

factorizando $a_0 C_0$, tenemos,

$$\frac{1}{h_0^2} \tilde{u}_{\tilde{z}} - \frac{1}{\lambda_0^2} \tilde{w}_{\tilde{x}} = 0,$$

y multiplicando por h_0^2 , tendremos

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} - \beta \tilde{w}_{\tilde{x}} = 0,$$

y, en tercer lugar, remplazando en $v_x - u_y = 0$ los valores de u_y y v_x , obtenemos

$$\frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{v}_{\tilde{x}} - \frac{a_0 C_0}{h_0 \lambda_0} \tilde{u}_{\tilde{y}} = 0;$$

factorizando, tenemos

$$\tilde{v}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}} = 0. \quad (2.21)$$

2.2.5. Adimensionalización de la ecuación del fondo

La ecuación de frontera para el fondo del canal está dada por

$$h_t + u h_x + v h_y + w = 0; \quad (2.22)$$

de las fórmulas de adimensionalización, tenemos:

$$\tilde{h} = \frac{h - h_0}{a_0},$$

por tanto,

$$h(x, y, t) = h_0 + a_0 \tilde{h} \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{y}{\lambda_0}, \frac{C_0 t}{\lambda_0} \right).$$

Así pues,

$$h_t = a_0 \left(\tilde{h}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{h}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_t + \tilde{h}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_t \right) = a_0 \tilde{h}_{\tilde{t}} \frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{h}_{\tilde{t}},$$

$$h_x = a_0 \left(\tilde{h}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{h}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_x + \tilde{h}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_x \right) = \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{h}_{\tilde{x}},$$

$$h_y = a_0 \left(\tilde{h}_{\tilde{x}} \left(\frac{x}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{h}_{\tilde{y}} \left(\frac{y}{\lambda_0} \right)_y + \tilde{h}_{\tilde{t}} \left(\frac{C_0 t}{\lambda_0} \right)_y \right) = \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{h}_{\tilde{y}};$$

reemplazando lo anterior en (2.22), obtenemos

$$\frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{h}_{\tilde{t}} + \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{u} \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{h}_{\tilde{x}} + \frac{a_0 C_0}{h_0} \tilde{v} \frac{a_0}{\lambda_0} \tilde{h}_{\tilde{y}} + \frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \tilde{w} = 0;$$

factorizando, tenemos

$$\frac{a_0 C_0}{\lambda_0} \left(\tilde{h}_{\tilde{t}} + \frac{a_0}{h_0} \tilde{u} \tilde{h}_{\tilde{x}} + \frac{a_0}{h_0} \tilde{v} \tilde{h}_{\tilde{y}} + \tilde{w} \right) = 0,$$

por tanto,

$$\tilde{h}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{u} \tilde{h}_{\tilde{x}} + \alpha \tilde{v} \tilde{h}_{\tilde{y}} + \tilde{w} = 0. \quad (2.23)$$

2.2.6. Conjunto de ecuaciones adimensionalizadas

Después de aplicar el proceso de adimensionalización antes descrito, se obtiene finalmente el siguiente conjunto de ecuaciones:

- Frontera libre

$$\eta_t + \alpha \eta_x u + \alpha \eta_y v - w = 0, \quad (2.24)$$

$$P(x, y, z, t) = P_0(x, y, z, t), \quad (2.25)$$

- Condiciones del fondo

$$h_t + \alpha u h_x + \alpha v h_y + w = 0, \quad (2.26)$$

- Condición de divergencia

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (2.27)$$

- Condición de irrotacional

$$\beta w_y - v_z = 0, \quad (2.28)$$

$$u_z - \beta w_x = 0, \quad (2.29)$$

$$v_x - u_y = 0, \quad (2.30)$$

- Condiciones de conservación

$$\alpha u_t + \alpha^2 u u_x + \alpha^2 v u_y + \alpha^2 w u_z + \frac{1}{\rho C_0^2} P_x = 0, \quad (2.31)$$

$$\alpha v_t + \alpha^2 u v_x + \alpha^2 v v_y + \alpha^2 w v_z + \frac{1}{\rho C_0^2} P_y = 0, \quad (2.32)$$

$$\alpha \beta w_t + \alpha^2 \beta u w_x + \alpha^2 \beta v w_y + \alpha^2 \beta w w_z + \frac{1}{\rho C_0^2} P_z = -1. \quad (2.33)$$

2.3. Deducción del modelo

Una vez tenemos las ecuaciones adimensionalizadas, procedemos con una simplificación asintótica a nivel de las ecuaciones en términos de algunos parámetros pequeños relevantes para generar las nuevas ecuaciones del sistema que puedan ser estudiadas más fácilmente desde el punto de vista teórico y numérico.

Integrando (2.29) entre $z = -(1 + \alpha h)$ y z , obtenemos

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z u_z - \beta w_x dz = 0,$$

luego,

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z u_z dz = \int_{-(1+\alpha h)}^z \beta w_x dz,$$

por tanto,

$$u(x, y, z, t) - u(x, y, -(1 + \alpha h), t) = O(\beta),$$

así que,

$$u - \tilde{u} = O(\beta),$$

donde

$$\tilde{u} = u(x, y, -(1 + \alpha h), t)$$

es la velocidad horizontal en el fondo.

De la ecuación (2.26), tenemos

$$h_t + \alpha u h_x + \alpha v h_y + w = 0 \quad \text{en} \quad z = -(1 + \alpha h),$$

luego,

$$h_t + w(x, y, -(1 + \alpha h), t) = -\alpha (u h_x + v h_y) = O(\alpha),$$

por tanto,

$$h_t + w(x, y, -(1 + \alpha h), t) = O(\alpha). \tag{2.34}$$

Integrando (2.27) respecto a z , obtenemos

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z (u_x + v_y + w_z) dz = 0,$$

luego,

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z (u_x + v_y) dz = \int_{-(1+\alpha h)}^z (-w_z) dz = -(w - w(x, y, -(1 + \alpha h), t)).$$

Por tanto,

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z (u_x + v_y) dz = -(w - w(x, y, -(1 + \alpha h), t)),$$

de donde,

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z (u_x + v_y) dz + w - w(x, y, -(1 + \alpha h), t) = 0.$$

De (2.35), tenemos que $w(x, y, -(1 + \alpha h), t) = -h_t + O(\alpha)$ y remplazando en lo anterior, obtenemos

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z (u_x + v_y) dz + w + h_t = 0 + O(\alpha),$$

luego,

$$w + h_t = - \int_{-(1+\alpha h)}^z (u_x + v_y) dz + O(\alpha).$$

Calculamos el valor de la anterior integral sabiendo que $u = \tilde{u} + O(\beta)$, por tanto $\tilde{u}_x + O(\beta) = u_x$, por consiguiente

$$w(x, y, z, t) + h_t = -\tilde{u}_x(z + (1 + \alpha h)) - \int_{-(1+\alpha h)}^z v_y dz + O(\alpha, \beta), \quad (2.35)$$

de (2.28), $v_z = -\beta w_y$, entonces $\int_{-(1+\alpha h)}^z v_z dz = O(\beta)$, por otra parte,

$$\int_{-(1+\alpha h)}^z v_z dz = v(x, y, z, t) - v(x, y, -(1 + \alpha h), t),$$

por tanto,

$$v(x, y, z, t) = v(x, y, -(1 + \alpha h), t) + O(\beta) = \tilde{v} + O(\beta),$$

así,

$$v(y) = \tilde{v}_y + O(\beta);$$

remplazando en (2.35), tenemos

$$w(x, y, z, t) + h_t = -\tilde{u}_x(z + (1 + \alpha h)) - \tilde{v}_y(z + (1 + \alpha h)) + O(\alpha, \beta), \quad (2.36)$$

por (2.29) sabemos que $u_z = \beta w_x$, luego, remplazando (2.36) en (2.29), tenemos que

$$\begin{aligned} u_z &= \beta (-\tilde{u}_x(z + (1 + \alpha h)) - \tilde{v}_y(z + (1 + \alpha h)) - h_t + O(\alpha, \beta))_x \\ &= \beta (-\tilde{u}_x(z + 1) - \tilde{u}_x \alpha h - \tilde{v}_y(z + 1) - \tilde{v}_y \alpha h - h_t + O(\alpha, \beta))_x \\ &= \beta (-\tilde{u}_x(z + 1) - \tilde{v}_y(z + 1) - h_t)_x + \beta (-\tilde{u}_x \alpha h - \tilde{v}_y \alpha h + O(\alpha, \beta))_x \\ &= \beta (-\tilde{u}_x(z + 1) - \tilde{v}_y(z + 1) - h_t)_x + O(\alpha, \beta, \alpha\beta) \\ &= -\beta ((\tilde{u}_x - \tilde{v}_y)(z + 1) + h_t)_x + O(\alpha, \beta, \alpha\beta) \\ &= -\beta(\tilde{u}_{xx} - \tilde{v}_{xy})(z + 1) - \beta h_{tx} + O(\alpha, \beta, \alpha\beta). \end{aligned}$$

Por (2.30), $v_x = u_y$, entonces $u_z = -\beta(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy})(z + 1) - \beta h_{tx} + O(\alpha, \beta, \beta^2)$. Integrando respecto a z , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-(1+\alpha h)}^z u_z dz &= \int_{-(1+\alpha h)}^z -\beta(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy})(z + 1) - \beta h_{tx} + O(\alpha, \beta, \beta^2) dz \\ &= -\beta(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}) \int_{-(1+\alpha h)}^z (z + 1) dz - \beta h_{tx} \int_{-(1+\alpha h)}^z dz + \int_{-(1+\alpha h)}^z O(\alpha, \beta, \beta^2) dz, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} u - \tilde{u} &= -\beta(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}) \left(\frac{(z+1)^2}{2} - \frac{(-(1+\alpha h)+1)^2}{2} \right) - \beta h_{tx}(z + (1+\alpha h)) + O(\alpha, \beta, \beta^2) \\ &= -\beta(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}) \frac{(z+1)^2}{2} + O(\alpha^2) - \beta h_{tx}z - \beta h_{tx} - \beta \alpha h_{tx} + O(\alpha, \beta, \beta^2), \end{aligned}$$

por tanto,

$$u - \tilde{u} = -\beta(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}) \frac{(z+1)^2}{2} - \beta h_{tx}(z+1) + O(\alpha, \beta, \beta^2, \alpha^2, \alpha\beta). \quad (2.37)$$

Usando (1) y (2), tenemos que $\eta_t + \alpha u \eta_x + \alpha v \eta_y - w = 0$ y $h_t + \alpha u h_x + \alpha v h_y + w = 0$, entonces

$$w = \eta_t + \alpha u \eta_x + \alpha v \eta_y, \quad (2.38)$$

$$-w - h_t = \alpha(u h_x + v h_y), \quad (2.39)$$

ahora veamos que

$$\begin{aligned} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha \eta} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha \eta} v \, dz &= \eta_t + u(x, y, \alpha \eta, t) \alpha \eta_x + u(x, y, -(1+\alpha h), t) \alpha h_x \\ &\quad + \alpha v(x, y, \alpha \eta, t) \eta_y + v(x, y, -(1+\alpha h), t) \alpha h_y; \end{aligned}$$

asociando adecuadamente los anteriores términos, por (2.38) y (2.39), tenemos

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha \eta} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha \eta} v \, dz = w - w - h_t = -h_t,$$

si definimos $\bar{u} = \frac{1}{1+\alpha h+\alpha \eta} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha \eta} u \, dz$ y $\bar{v} = \frac{1}{1+\alpha h+\alpha \eta} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha \eta} v \, dz$ entonces

$$\eta_t + \left(\frac{(1+\alpha h+\alpha \eta)}{\bar{u}} \right)_x + \left(\frac{(1+\alpha h+\alpha \eta)}{\bar{v}} \right)_y = -h_t; \quad (2.40)$$

integrando (2.33) respecto a z , obtenemos

$$\int_z^{\alpha\eta} \alpha\beta w_t + \alpha^2\beta u w_x + \alpha^2\beta v w_y + \alpha^2\beta w w_z + \frac{1}{\rho C_0^2} P_z dz = \int_z^{\alpha\eta} -1 dz; \quad (2.41)$$

como por (2.36) $w = (-\tilde{u}_x - \tilde{v}_y)(z+1) - h_t + O(\alpha, \beta)$, entonces

$$w_t = (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt})(z+1) - h_{tt} + O(\alpha, \beta),$$

luego,

$$\begin{aligned} \int_z^{\alpha\eta} \alpha\beta w_t &= \int_z^{\alpha\eta} \alpha\beta ((-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt})(z+1) - h_{tt} + O(\alpha, \beta)) dz \\ &= \alpha\beta (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt}) \left(\frac{(z+1)^2}{2} \Big|_z^{\alpha\eta} \right) - \alpha\beta h_{tt} (z \Big|_z^{\alpha\eta}) + O(\alpha, \beta) \\ &= \alpha\beta (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt}) \left(\frac{(\alpha\eta+1)^2}{2} - \frac{(z+1)^2}{2} \right) - \alpha\beta h_{tt} (\alpha\eta - z) + O(\alpha, \beta) \\ &= \alpha\beta (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt}) \left(\frac{(\alpha^2\eta^2 + 2\alpha\eta + 1)}{2} - \frac{(z^2 + 2z + 1)}{2} \right) - \alpha^2\beta h_{tt}\eta + \alpha\beta h_{tt}z + O(\alpha, \beta) \\ &= \alpha\beta (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt}) \left(\frac{-(z^2 + 2z)}{2} \right) + \alpha\beta h_{tt}z + O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_z^{\alpha\eta} \alpha\beta w_t dz = -\frac{\alpha\beta}{2} (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt})(z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tt}z. \quad (2.42)$$

Por otra parte

$$\int_z^{\alpha\eta} \frac{1}{\rho C_0^2} P_z = \frac{1}{\rho C_0^2} (P \Big|_z^{\alpha\eta}) = \frac{1}{\rho C_0^2} (P_0 - P), \quad (2.43)$$

luego, de (2.42) y (2.43), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_z^{\alpha\eta} \left(\alpha\beta w_t + \alpha^2\beta u w_x + \alpha^2\beta v w_y + \alpha^2\beta w w_z + \frac{1}{\rho c_0^2} P_z \right) dz = \\ \int_z^{\alpha\eta} \alpha\beta w_t dz + \frac{1}{\rho c_0^2} \int_z^{\alpha\eta} P_z dz + O(\alpha^2\beta) = \\ -\frac{\alpha\beta}{2} (-\tilde{u}_{xt} - \tilde{v}_{yt}) (z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tt} z + \frac{1}{\rho c_0^2} (P_0 - P) + O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta). \end{aligned}$$

Remplazando en (2.41), obtenemos

$$\frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{xt} + \tilde{v}_{yt}) (z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tt} z + \frac{1}{\rho c_0^2} (P_0 - P) - z + \alpha\eta = O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta).$$

Derivando respecto a x , tenemos

$$\frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{xxt} + \tilde{v}_{yxt}) (z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{ttx} z + \frac{1}{\rho c_0^2} (P_{0x} - P_x) + \alpha\eta_x = O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta); \quad (2.44)$$

reemplazando (2.31) en la ecuación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{xxt} + \tilde{v}_{yxt}) (z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{ttx} z + \frac{1}{\rho c_0^2} P_{0x} + \alpha\tilde{u}_t \\ + \alpha^2 (\tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y) + \alpha\eta_x = O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta). \quad (2.45) \end{aligned}$$

De (2.37), tenemos que

$$u - \tilde{u} = -\frac{\beta}{2} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) (z+1)^2 - \beta h_{tx} (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2),$$

y como $u - \tilde{u} = O(\beta)$, entonces

$$\frac{\beta}{2} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) (z+1)^2 = -\beta h_{tx} (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2);$$

multiplicando por α , se tiene que

$$\frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) (z+1)^2 = -\alpha\beta h_{tx} (z+1) + O(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2).$$

Derivando respecto a t , tenemos

$$\frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{yyt} + \tilde{u}_{xxt}) (z+1)^2 = -\alpha\beta h_{ttx} (z+1) + O(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2).$$

Expandiendo, se tiene

$$\frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{yyt} + \tilde{u}_{xxt}) (z^2 + 2z) + \frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{yyt} + \tilde{u}_{xxt}) = -\alpha\beta h_{ttx} z - \alpha\beta h_{ttx} + O(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2).$$

Reemplazando en (2.45), tenemos

$$-\frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{xxt} + \tilde{u}_{yyt}) - \alpha\beta h_{ttx} + \frac{1}{\rho c_0^2} P_{0x} + \alpha \tilde{u}_t + \alpha^2 (\tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y) + \alpha \eta_x = O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2). \quad (2.46)$$

A fin de revelar el efecto del término de la presión en el fluido, en las ecuaciones del modelo, introduzcamos $\tilde{P} = \frac{Ph_0}{\rho g a_0^2}$, entonces $\tilde{P}_0 = \frac{P_0 h_0}{\rho g a_0^2}$, luego $P_0 = \frac{\tilde{P}_0 \rho g a_0^2}{h_0}$. Esta adimensionalización es consistente con los cambios de variables antes introducidos para las variables espaciales y temporales. Derivando con respecto a x , tenemos

$$P_{0x} = \frac{\rho g a_0^2}{h_0} \tilde{P}_{0\bar{x}} = \rho g h_0 \alpha^2 \tilde{P}_{0\bar{x}} = \rho c_0^2 \alpha^2 \tilde{P}_{0\bar{x}}.$$

Entonces

$$\frac{P_{0x}}{\rho c_0^2} = \alpha^2 \tilde{P}_{0\bar{x}}.$$

Reemplazando en (2.46), obtenemos

$$\alpha \tilde{u}_t + \alpha^2 (\tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y) + \alpha \eta_x - \frac{\alpha\beta}{2} (\tilde{u}_{xxt} + \tilde{u}_{yyt}) - \alpha\beta h_{ttx} + \alpha^2 P_{0x} = O(\alpha^3\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2).$$

Dividiendo por α , se obtiene

$$\tilde{u}_t + \alpha (\tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y) + \eta_x - \frac{\beta}{2} (\tilde{u}_{xxt} + \tilde{u}_{yyt}) - \beta h_{tx} + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2\beta, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.47)$$

Recordemos que por (2.37), tenemos

$$u = \tilde{u} - \frac{\beta}{2} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) (z+1)^2 - \beta h_{tx} (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{1}{1+\alpha\eta+\alpha h}$ e integrando respecto a z , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\alpha(\eta+h)} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} u \, dz &= \frac{1}{1+\alpha(\eta+h)} \left(\int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} \tilde{u} \, dz - \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta}{2} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) (z+1)^2 \, dz - \beta \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} h_{tx} \cdot (z+1) \, dz + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right), \end{aligned}$$

Entonces

$$\bar{u} = \tilde{u} + \frac{1}{1+\alpha(\eta+h)} \left(-\frac{\beta}{2} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) \frac{(z+1)^3}{3} \Big|_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} - \beta h_{tx} \frac{(z+1)^2}{2} \Big|_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} \right),$$

De donde

$$\bar{u} = \tilde{u} - \frac{\beta}{6} (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) - \frac{\beta}{2} h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Bajo el supuesto de que $\tilde{u} = \bar{u} + O(\alpha, \beta)$ y $\tilde{v} = \bar{v} + O(\alpha, \beta)$, tenemos

$$\tilde{u} = \bar{u} + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.48)$$

Derivando respecto a x , obtenemos

$$\tilde{u}_x = \bar{u}_x + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yyx} + \bar{u}_{xxx}) + \frac{\beta}{2} h_{txx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Derivando nuevamente con respecto a x y luego con respecto a t , tenemos

$$\tilde{u}_{xxt} = \bar{u}_{xxt} + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yyxxt} + \bar{u}_{xxxxt}) + \frac{\beta}{2} h_{txxt} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Realizando el mismo procedimiento pero ahora con respecto a y tenemos

$$\tilde{u}_t = \bar{u}_t + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yyt} + \bar{u}_{xxt}) + \frac{\beta}{2} h_{tt} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

y

$$\tilde{u}_{yyt} = \bar{u}_{yyt} + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yyyyt} + \bar{u}_{xxyyt}) + \frac{\beta}{2} h_{txyyt} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Por otra parte, tenemos de (3.18) que $v_z = \beta w_y$ y por cálculos anteriores

$$w = -\tilde{u}_x(z+1+\alpha h) - \tilde{v}_y(z+1+\alpha h) - h_t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_z &= \beta (-\tilde{u}_x(z+1+\alpha h) - \tilde{v}_y(z+1+\alpha h) - h_t)_y \\ &= -\beta \tilde{u}_{xy}(z+1) - \beta \tilde{v}_{yy}(z+1) - \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ &= -\beta (\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy})(z+1) - \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Integrando respecto de z , obtenemos

$$v - \tilde{v} = -\beta \cdot (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) \frac{(z+1)^2}{2} - \beta h_{ty} \cdot (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.49)$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
v - \tilde{v} &= \int_{-(1+\alpha h)}^z v_z dz = \int_{-(1+\alpha h)}^z [-\beta \cdot (\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy})(r+1) - \beta h_{ty}] dr \\
&= \left[-\beta \cdot (\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy}) \frac{(r+1)^2}{2} - \beta h_{ty} r \right]_{-(1+\alpha h)}^z \\
&= -\beta \cdot (\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy}) \left(\frac{(z+1)^2}{2} - \frac{(\alpha h)^2}{2} \right) - \beta h_{ty} \cdot (z+1) + O(\alpha\beta) \\
&= -\beta \cdot (\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy}) \frac{(z+1)^2}{2} - \beta h_{ty} \cdot (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).
\end{aligned}$$

Despejando v , multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{1+\alpha(\eta+h)}$ e integrando con respecto a z , obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{1}{1+\alpha(\eta+h)} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} \left(\tilde{v} - \beta \cdot (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) \frac{(z+1)^2}{2} - \beta h_{ty} \cdot (z+1) \right) dz = \\
&\quad \tilde{v} - \beta \cdot (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) \frac{1}{1+\alpha(\eta+h)} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} \frac{(z+1)^2}{2} dz - \\
&\quad \beta h_{ty} \frac{1}{1+\alpha(\eta+h)} \int_{-(1+\alpha h)}^{\alpha\eta} (z+1) dz = \tilde{v} - \frac{\beta}{6} (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) - \frac{\beta}{2} h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).
\end{aligned}$$

Bajo el supuesto de que $\tilde{v} = \bar{v} + O(\alpha, \beta)$, entonces

$$\tilde{v} = \bar{v} + \frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.50)$$

Derivando con respecto a y , después con respecto a x , y por último con respecto a t , tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_y &= \bar{v}_y + \frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yyy} + \bar{v}_{xxy}) + \frac{\beta}{2} h_{tyy} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\
\tilde{v}_{yx} &= \bar{v}_{yx} + \frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yyyx} + \bar{v}_{xxyx}) + \frac{\beta}{2} h_{tyyx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\
\tilde{v}_{yxt} &= \bar{v}_{yxt} + \frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yyyxt} + \bar{v}_{xxyxt}) + \frac{\beta}{2} h_{tyyxt} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.47) y despreciando los términos de orden α^2 , $\alpha\beta$ y β^2 , obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yyt} + \bar{u}_{xxt}) + \frac{\beta}{2}h_{ttx} + \alpha\left(\bar{u} + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) + \frac{\beta}{2}h_{tx}\right) \cdot \left(\bar{u}_x + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yyx} + \bar{u}_{xxx})\right. \\ \left. + \frac{\beta}{2}h_{txx}\right) + \alpha\left(\bar{v} + \frac{\beta}{6}(\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) + \frac{\beta}{2}h_{ty}\right)\left(\bar{u}_y + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yyy} + \bar{u}_{xxy}) + \frac{\beta}{6}h_{txy}\right) + \eta_x \\ - \frac{\beta}{2}(\bar{u}_{xxt} + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yyxxt} + \bar{u}_{xxxxt})) + \frac{\beta}{2}h_{txxt} + \bar{u}_{yyt} + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yyyyt} + \bar{u}_{xxyyt}) + \frac{\beta}{2}h_{txyyt} \\ - \beta h_{ttx} + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \frac{\beta}{6}(\bar{u}_{yyt} + \bar{u}_{xxt}) + \frac{\beta}{2}h_{ttx} + \alpha(\bar{u}\bar{u}_x + \bar{v}\bar{u}_y) \\ + \eta_x - \frac{\beta}{2}(\bar{u}_{xxt} + \bar{u}_{yyt}) - \beta h_{ttx} + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Luego,

$$\bar{u}_t - \frac{\beta}{3}(\bar{u}_{yyt} + \bar{u}_{xxt}) - \frac{\beta}{2}h_{ttx} + \alpha(\bar{u}\bar{u}_x + \bar{v}\bar{u}_y) + \eta_x + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.51)$$

Recordemos que integrando (2.33) respecto a z , se obtiene

$$\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{u}_{xt} + \tilde{v}_{yt})(z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tt}z + \frac{1}{\rho c_0^2}(P_0 - P) - z + \alpha\eta = O(\alpha^3\beta, \dots).$$

Derivando con respecto a y y combinando con (2.32), tenemos

$$\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt})(z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tty}z + \frac{1}{\rho c_0^2}(P_{0y} - P_y) + \alpha\eta_y = O(\alpha^3\beta, \dots).$$

De la ecuación (2.32), tenemos que

$$\frac{1}{\rho c_0^2}P_y = \alpha v_t + \alpha^2 uv_x + \alpha^2 vv_y + \alpha^2 v_z w + O(\alpha^2, \beta).$$

Remplazando en la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt})(z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tty}z + \frac{1}{\rho c_0^2}P_{0y} + \alpha v_t + \alpha^2(uv_x + vv_y) + \alpha^2 v_z w + \alpha\eta_y = O(\alpha^2\beta, \dots). \quad (2.52)$$

De la ecuación (2.49) y dado que $v = \tilde{v} + O(\beta)$, entonces

$$\frac{\beta}{2}(\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy})(z+1)^2 = -\beta h_{ty} \cdot (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Multiplicando por α y derivando con respecto a t , tenemos

$$\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt})(z+1)^2 = -\alpha\beta h_{tty}(z+1) + O(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2),$$

que se puede escribir como

$$\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt})(z^2 + 2z) + \alpha\beta h_{tty}z = -\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt}) - \alpha\beta h_{tty} + O(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2).$$

Reemplazando en (2.52) y usando el hecho de que $u = \tilde{u} + O(\alpha, \beta)$ y $v = \tilde{v} + O(\alpha, \beta)$, obtenemos

$$-\frac{\alpha\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt}) - \alpha\beta h_{tty} + \frac{1}{\rho c_0^2}P_{0y} + \alpha\tilde{v}_t + \alpha^2(\tilde{u}\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y) + \alpha^2\tilde{v}_z w + \alpha\eta_y = O(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2). \quad (2.53)$$

Recordando de la adimensionalización de la presión, tenemos que $P_0 = \frac{\tilde{P}_0 \rho g a_0^2}{h}$, entonces

$$P_{0\tilde{y}} = \frac{\rho g a_0^2}{h_0} \tilde{P}_{0\tilde{y}} = \rho g h_0 \alpha^2 \tilde{P}_{0\tilde{y}} = \rho c_0^2 \alpha^2 \tilde{P}_{0\tilde{y}}.$$

Entonces,

$$\frac{P_{0\tilde{y}}}{\rho c_0^2} = \alpha^2 \tilde{P}_{0\tilde{y}}.$$

Dividiendo por α la ecuación (2.53), tenemos

$$-\frac{\beta}{2}(\tilde{v}_{xxt} + \tilde{v}_{yyt}) - \beta h_{tty} + \alpha P_{0y} + \tilde{v}_t + \alpha(\tilde{u}\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y) + \alpha\tilde{v}_z w + \eta_y = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.54)$$

Retomando la ecuación (2.50), tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t &= \bar{v}_t + \frac{\beta}{6}(\bar{v}_{yyt} + \bar{v}_{xxt}) + \frac{\beta}{2}h_{tyt} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ \tilde{v}_x &= \bar{v}_x + \frac{\beta}{6}(\bar{v}_{yyx} + \bar{v}_{xxx}) + \frac{\beta}{2}h_{txx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ \tilde{v}_y &= \bar{v}_y + \frac{\beta}{6}(\bar{v}_{yyy} + \bar{v}_{xxy}) + \frac{\beta}{2}h_{tyy} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ \tilde{v}_{xxt} &= \bar{v}_{xxt} + \frac{\beta}{6}(\bar{v}_{yyxxt} + \bar{v}_{xxxxt}) + \frac{\beta}{2}h_{txxt} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Además por (3.18) tenemos $\alpha v_z w = \alpha \beta w_y w$; reemplazando todo en (2.54), tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{2}(\bar{v}_{yyt} + \bar{v}_{xxt}) - \beta h_{tty} + \alpha P_{0y} + \bar{v}_t + \frac{\beta}{6}(\bar{v}_{yyt} + \bar{v}_{xxt}) \\ + \frac{\beta}{2}h_{tty} + \alpha(\bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y) + \eta_y = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2); \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes, obtenemos

$$-\frac{\beta}{3}(\bar{v}_{yyt} + \bar{v}_{xxt}) - \frac{\beta}{2}h_{tty} + \alpha P_{0y} + \bar{v}_t + \alpha(\bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y) + \eta_y = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.55)$$

2.4. Deducción del sistema Boussinesq 2D para fondo variable

Teniendo en cuenta las ecuaciones deducidas para la elevación de la onda y las componentes del vector velocidad del fluido deducidas anteriormente, tenemos el sistema

$$\eta_t + ((1 + \alpha\eta + \alpha h) \bar{u})_x + ((1 + \alpha\eta + \alpha h) \bar{v})_x = -h_t, \quad (2.56)$$

$$\bar{u}_t - \frac{\beta}{3} (\bar{u}_{yyt} + \bar{u}_{xxt}) - \frac{\beta}{2} h_{ttx} + \alpha (\bar{u}\bar{u}_x + \bar{v}\bar{u}_y) + \eta_x + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2), \quad (2.57)$$

$$\bar{v}_t - \frac{\beta}{3} (\bar{v}_{yyt} + \bar{v}_{xxt}) - \frac{\beta}{2} h_{tty} + \alpha (\bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y) + \eta_y + \alpha P_{0y} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.58)$$

Llamemos $z_\theta = \theta\alpha\eta - (1 - \theta)(1 + \alpha h)$, donde $0 \leq \theta \leq 1$; evaluando en (2.37) y usando (2.48), obtenemos que

$$\begin{aligned} u - \tilde{u} &= -\beta (\tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{xx}) \frac{(\theta\alpha\eta - (1 - \theta)(1 + \alpha h) + 1)^2}{2} \\ &\quad - \beta h_{tx} (\theta\alpha\eta - (1 - \theta)(1 + \alpha h) + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Remplazando (2.48) en la anterior igualdad, tenemos

$$\begin{aligned} u - \left(\bar{u} + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right) &= -\frac{\beta}{2} \left(\left(\bar{u} + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{tx} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right)_{yy} + \left(\bar{u} + \frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right)_{xx} \right) \cdot \left(\theta\alpha\eta \right. \\ &\quad \left. - (1 - \theta)(1 + \alpha h) + 1 \right)^2 - \beta h_{tx} (\theta\alpha\eta - (1 - \theta)(1 + \alpha h) + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Calculemos primero

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta}{2} (\theta\alpha\eta - (1-\theta)(1+\alpha h) + 1)^2 \\
& = -\frac{\beta}{2} ((\theta\alpha\eta)^2 - 2\theta\alpha\eta((1-\theta)(1+\alpha h) - 1) + ((1-\theta)(1+\alpha h) - 1)^2) \\
& = -\frac{\beta}{2} ((1-\theta)^2(1+\alpha h)^2 - 2(1-\theta)(1+\alpha h) + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\
& = -\frac{\beta}{2} ((1-2\theta+\theta^2)(1+2\alpha h+\alpha^2 h^2) - 2(1-\theta) - 2(1-\theta)\alpha h + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\
& = -\frac{\beta}{2} ((1-2\theta+\theta^2)(1+2\alpha h+\alpha^2 h^2) - 2(1-\theta) - 2(1-\theta)\alpha h + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\
& = -\frac{\beta}{2} (1-2\theta+\theta^2) + \beta(1-\theta) - \frac{\beta}{2} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\
& = -\frac{1}{2}\theta^2\beta + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.59), obtenemos

$$\begin{aligned}
u - \bar{u} &= -\frac{\beta}{6} (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) - \frac{\beta}{2} h_{tx} - O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) = -\frac{\beta}{2} \theta^2 (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) \\
&\quad + \beta h_{tx} ((1-\theta) - 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
u &= \bar{u} + \left(\frac{\beta}{6} - \frac{\beta}{2} \theta^2 \right) (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) + \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \beta h_{tx} \\
&= \bar{u} - \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx}) - \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $u = \bar{u} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$, entonces $u_{yy} + u_{xx} = \bar{u}_{yy} + \bar{u}_{xx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$, y en consecuencia

$$\bar{u} = u + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yy} + u_{xx}) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Definamos $u = u^\theta$ y $v = v^\theta$, entonces

$$\bar{u} = u^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yy}^\theta + u_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.61)$$

Ahora, en forma análoga calculamos $\bar{v}$. Por (2.49) tenemos que

$$v - \tilde{v} = -\beta (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) \frac{(z+1)^2}{2} - \beta h_{ty} (z+1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2), \quad (2.62)$$

y por (2.50), tenemos

$$\tilde{v} = \bar{v} + \frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2),$$

reemplazando z_θ en (2.62), tenemos

$$\begin{aligned} v - \tilde{v} &= -\beta (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) \frac{(\theta\alpha\eta - (1-\theta)(1+\alpha h) + 1)^2}{2} \\ &\quad - \beta h_{ty} (\theta\alpha\eta - (1-\theta)(1+\alpha h) + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Entonces por (2.50), tenemos

$$\begin{aligned} v - \left(\bar{v} + \frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) + \frac{\beta}{2} h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right) &= -\frac{\beta}{2} (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) \left(\theta\alpha\eta - (1-\theta) \right. \\ &\quad \left. (1+\alpha h) + 1 \right)^2 - \beta h_{ty} (\theta\alpha\eta - (1-\theta)(1+\alpha h) + 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Por (2.60), tenemos

$$\begin{aligned} v - \bar{v} &= -\frac{\beta}{6} (\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) - \frac{\beta}{2} h_{ty} - O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ &= -\frac{\beta}{2} \theta^2 (\tilde{v}_{yy} + \tilde{v}_{xx}) + \beta h_{ty} ((1-\theta) - 1) + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$v = \bar{v} - \left(\frac{\beta}{6} - \frac{\beta}{2} \theta^2 \right) (\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) - \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \beta h_{ty} - O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2),$$

luego

$$\bar{v} = v + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (\bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx}) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Nuevamente, dado que $v = \bar{v} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$, entonces $v_{yy} + v_{xx} = \bar{v}_{yy} + \bar{v}_{xx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$, y en consecuencia

$$\bar{v} = v + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yy} + v_{xx}) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Cambiando v por v^θ , tenemos

$$\bar{v} = v^\theta \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yy}^\theta + v_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.63)$$

Reemplazando $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en (2.40), tenemos

$$\begin{aligned} \eta_t + \left((1 + \alpha\eta + \alpha h) \left(u^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) \right) (u_{yy}^\theta + u_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} \right. \\ \left. + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right)_x + \left((1 + \alpha\eta + \alpha h) \left(v^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) \right) (v_{yy}^\theta + v_{xx}^\theta) \right. \\ \left. + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \right)_y = -h_t. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \eta_t + \left(u^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yy}^\theta + u_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} + \alpha\eta u^\theta + \alpha h u^\theta \right)_x \\ + \left(v^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yy}^\theta + v_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ty} + \alpha\eta v^\theta + \alpha h v^\theta \right)_y \\ = -h_t + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yyx}^\theta + u_{xxx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{txx} + \alpha (\eta_x u^\theta + \eta u_x^\theta) \\ + \alpha (h_x u^\theta + h u_x^\theta) + v_y^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yyy}^\theta + v_{xxy}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tyy} \\ + \alpha (\eta_y v^\theta + \eta v_y^\theta) + \alpha (h_y v^\theta + h v_y^\theta) = -h_t + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x^\theta + \alpha (\eta u^\theta + h u^\theta)_x + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yyx}^\theta + u_{xxx}^\theta) + v_y^\theta \\ + \alpha (\eta v^\theta + h v^\theta)_y + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yyy}^\theta + v_{xxy}^\theta) \\ = -h_t - \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{txx} - \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tyy} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.64) \end{aligned}$$

Recordemos que por (2), tenemos

$$\bar{u}_t - \frac{\beta}{3} (\bar{u}_{yyt} + \bar{u}_{xxt}) - \frac{\beta}{2} h_{ttx} + \alpha (\bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y) + \eta_x + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Además, por (2.61), tenemos

$$\bar{u} = u^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yy}^\theta + u_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Derivando y haciendo los reemplazos apropiados tenemos

$$\bar{u}_t = u_t^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yyt}^\theta + u_{xxt}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ttx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Pero tenemos que

$$\bar{u}_{yyt} = u_{yyt}^\theta + O(\beta) \quad \text{y} \quad \bar{u}_{xxt} = u_{xxt}^\theta + O(\beta).$$

Además, recordemos que

$$\bar{v} = v^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yy}^\theta + v_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.65)$$

reemplazando $\bar{v} = v^\theta + O(\beta)$, $\bar{u}_x = u_x^\theta + O(\beta)$ y $\bar{u}_y = u_y^\theta + O(\beta)$, en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} u_t^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (u_{yyt}^\theta + u_{xxt}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ttx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ - \frac{\beta}{3} (u_{yyt}^\theta + u_{xxt}^\theta) - \frac{\beta}{2} h_{ttx} + \alpha (u^\theta u_x^\theta + v^\theta u_y^\theta) + \eta_x + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Asociando términos, tenemos

$$u_t^\theta + \frac{\beta}{2} (\theta^2 - 1) (u_{yyt}^\theta + u_{xxt}^\theta) + (\theta - 1) \beta h_{ttx} + \alpha (u^\theta u_x^\theta + v^\theta u_y^\theta) + \eta_x + \alpha P_{0x} = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Y por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} u_t^\theta + \frac{\beta}{2} (\theta^2 - 1) (u_{yyt}^\theta + u_{xxt}^\theta) + \eta_x + \alpha (u^\theta u_x^\theta + v^\theta u_y^\theta) \\ = -\alpha P_{0x} + (1 - \theta) \beta h_{ttx} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Haciendo un procedimiento análogo para $\bar{v}$, tenemos por (3) que

$$\bar{v}_t - \frac{\beta}{3} (\bar{v}_{xxt} + \bar{v}_{yyt}) - \frac{\beta}{2} h_{tty} + \alpha P_{0y} + \alpha (\bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y) + \eta_y = +O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2).$$

Además, por (2.65), tenemos

$$\bar{v} = v^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yy}^\theta + v_{xx}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{ty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2),$$

$$\bar{v}_{xxt} = v_{xxt}^\theta + O(\beta), \quad \bar{v}_{yyt} = v_{yyt}^\theta + O(\beta),$$

$$\bar{u} \bar{v}_x = u^\theta v_x^\theta + O(\beta) \quad \text{y} \quad \bar{v} \bar{v}_y = v^\theta v_y^\theta + O(\beta),$$

luego

$$\begin{aligned} v_t^\theta + \frac{\beta}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (v_{yyt}^\theta + v_{xxt}^\theta) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \beta h_{tty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \\ - \frac{\beta}{3} (v_{yyt}^\theta + v_{xxt}^\theta) - \frac{\beta}{2} h_{tty} + \alpha P_{0x} + \alpha (u^\theta v_x^\theta + v^\theta v_y^\theta) + \eta_y = O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \end{aligned}$$

Asociando términos, tenemos

$$v_t^\theta + \frac{\beta}{2} (\theta^2 - 1) (v_{yyt}^\theta + v_{xxt}^\theta) + \alpha (u^\theta v_x^\theta + v^\theta v_y^\theta) + \eta_y = -\alpha P_{0x} + (1 - \theta) \beta h_{tty} + O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2). \quad (2.67)$$

La relación de orden en las ecuaciones (2.64), (2.66) y (2.67) es

$$v_t^\theta + \eta_y = O(\alpha, \beta), \quad u_t^\theta + \eta_x = O(\alpha, \beta) \quad \text{y} \quad u_x^\theta + v_y^\theta + \eta_t + h_t = O(\alpha, \beta). \quad (2.68)$$

Lo que formalmente implica que

$$u_{xxx}^\theta + v_{xxy}^\theta = -\eta_{xxt} - h_{xxt} + O(\alpha, \beta), \quad (2.69)$$

$$u_{xxx}^\theta + u_{yyx}^\theta = -\eta_{xxt} - h_{xxt} + O(\alpha, \beta), \quad (2.70)$$

$$u_{xyy}^\theta + v_{yyy}^\theta = -\eta_{yyt} - h_{yyt} + O(\alpha, \beta), \quad (2.71)$$

$$v_{xxy}^\theta + v_{yyy}^\theta = -\eta_{yyt} - h_{yyt} + O(\alpha, \beta), \quad (2.72)$$

$$u_{xxt}^\theta = -\eta_{xxx} + O(\alpha, \beta) \quad \text{y} \quad v_{yyt}^\theta = -\eta_{yyy} + O(\alpha, \beta). \quad (2.73)$$

Por consiguiente, para todo $\lambda, \mu, \varphi, \xi \in \mathbb{R}$, tenemos

$$u_{xxx}^\theta + u_{yyx}^\theta = \lambda (u_{xxx}^\theta + u_{yyx}^\theta) - (1 - \lambda) (\eta_{xxt} + h_{xxt}) + O(\alpha, \beta),$$

$$v_{xxy}^\theta + v_{yyy}^\theta = \varphi (v_{xxy}^\theta + v_{yyy}^\theta) - (1 - \varphi) (\eta_{yyt} + h_{yyt}) + O(\alpha, \beta),$$

$$u_{xxt}^\theta = -\mu \eta_{xxx} + (1 - \mu) u_{xxt}^\theta + O(\alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned}
u_{yyt}^\theta &= -\lambda \eta_{yyy} + (1 - \lambda) u_{yyt}^\theta + O(\alpha, \beta), \\
v_{yyt}^\theta &= -\xi \eta_{yyy} + (1 - \xi) v_{yyt}^\theta + O(\alpha, \beta), \\
v_{xxt}^\theta &= -\varepsilon \eta_{xxy} + (1 - \varepsilon) v_{xxt}^\theta + O(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.64), (2.66) y (2.67) y despreciando los términos de orden alto, tenemos una familia de sistemas de parámetros

$$\begin{aligned}
&\eta_t + u_x^\theta + \alpha (\eta u^\theta + h u^\theta)_x + a\beta (v_{yxx}^\theta + u_{xxx}^\theta) - b\beta \eta_{xxt} \\
&\quad + v_y^\theta + \alpha (\eta v^\theta + h v^\theta)_y + c\beta (v_{yyy}^\theta + u_{xyy}^\theta) - d\beta \eta_{yyt} \\
&\quad = -h_t - \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \beta h_{txx} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \beta h_{tyy} + b\beta h_{xxt} + d\beta h_{yyt}.
\end{aligned}$$

Note que

$$-\left(\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) (1 - \lambda) = \frac{1}{2} \left(\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) (1 - \lambda) - 2\theta + 1 \right).$$

De forma análoga,

$$-\left(\theta - \frac{1}{2}\right) \beta h_{tyy} + d\beta h_{yyt} = \frac{\beta}{2} \left((1 - \varphi) \left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) - 2\theta + 1 \right) h_{yyt}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
&\eta_t + u_x^\theta + \alpha (\eta u^\theta + h u^\theta)_x + a\beta (v_{yxx}^\theta + u_{xxx}^\theta) - b\beta \eta_{xxt} \\
&\quad + v_y^\theta + \alpha (\eta v^\theta + h v^\theta)_y + c\beta (v_{yyy}^\theta + u_{xyy}^\theta) - d\beta \eta_{yyt} \\
&= -h_t + \frac{\beta}{2} \left((1 - \lambda) \left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) - 2\theta + 1 \right) h_{xxt} + \frac{\beta}{2} \left((1 - \varphi) \left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) - 2\theta + 1 \right) h_{yyt},
\end{aligned} \tag{2.74}$$

donde se ha utilizado que

$$a = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad b = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (1 - \lambda),$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{2} \right) \varphi \quad \text{y} \quad d = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (1 - \varphi).$$

Obtenemos también que

$$u_t^\theta + e\beta\eta_{xxx} - f\beta u_{xxt}^\theta + g\beta\eta_{yyx} - j\beta u_{yyt}^\theta + \eta_x + \alpha (u^\theta u_x^\theta + v^\theta u_y^\theta) = -\alpha P_{0x} + (1 - \theta) \beta h_{ttx}, \quad (2.75)$$

donde

$$e = -\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) \mu, \quad f = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \mu),$$

$$g = -\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) \lambda \quad \text{y} \quad j = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \lambda).$$

Para la última ecuación, tenemos

$$v_t^\theta + k\beta\eta_{xxy} + l\beta v_{xxt}^\theta + m\beta\eta_{yyy} - q\beta v_{yyt}^\theta + \alpha (u^\theta v_x^\theta + v^\theta v_y^\theta) + \eta_y = -\alpha P_{0x} + (1 - \theta) \beta h_{tty}, \quad (2.76)$$

donde

$$k = -\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) \varepsilon, \quad l = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \varepsilon),$$

$$m = -\frac{1}{2} (\theta^2 - 1) \xi \quad \text{y} \quad q = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \xi).$$

Por otra parte, reemplazando (2.69) y (2.71) en la ecuación (2.74), tenemos

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x^\theta + \alpha (\eta u^\theta + h u^\theta)_x - b\beta \eta_{xxt} + v_y^\theta + \alpha (\eta v^\theta + h v^\theta)_y - d\beta \eta_{yyt} \\ - a\beta \eta_{xxt} - c\beta \eta_{yyt} = -h_t + \frac{\beta}{2} \left((1 - \lambda) \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) - 2\theta + 1 \right) h_{xxt} \\ + \frac{\beta}{2} \left((1 - \varphi) \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) - 2\theta + 1 \right) h_{yyt} + a\beta h_{xxt} + c\beta h_{yyt}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ahora, reemplazando la segunda igualdad de (2.68) y las igualdades de (2.73) en la ecuación (2.75), obtenemos

$$u_t^\theta - e\beta u_{xxt}^\theta - f\beta u_{yyt}^\theta - g\beta u_{yyt}^\theta - j\beta u_{yyt}^\theta + \eta_x + \alpha (u^\theta u_x^\theta + v^\theta u_y^\theta) = -\alpha P_{0x} + (1 - \theta) \beta h_{ttx}.$$

Después de juntar términos equivalentes, llegamos a que

$$u_t^\theta - \beta (e + f) u_{xxt}^\theta - \beta (g + j) u_{yyt}^\theta + \eta_x + \alpha (u^\theta u_x^\theta + v^\theta u_y^\theta) = -\alpha P_{0x} + (1 - \theta) \beta h_{ttx}. \quad (2.78)$$

Por último, de la primera igualdad de (2.68), tenemos

$$\eta_{xy} = -v_{xxt}^\theta + O(\alpha, \beta) \quad \text{y} \quad \eta_{yyy} = -v_{yyt}^\theta + O(\alpha, \beta).$$

Reemplazando en la ecuación (2.76), obtenemos

$$v_t^\theta - k\beta v_{xxt}^\theta + l\beta v_{xxt}^\theta - m\beta v_{yyt}^\theta - q\beta v_{yyt}^\theta + \alpha (u^\theta v_x^\theta + v^\theta v_y^\theta) + \eta_y = -\alpha P_{0y} + (1 - \theta) \beta h_{tty}.$$

Nuevamente, juntando términos equivalentes, llegamos a que

$$v_t^\theta - \beta (k + l) v_{xxt}^\theta - \beta (m + q) v_{yyt}^\theta + \alpha (u^\theta v_x^\theta + v^\theta v_y^\theta) + \eta_y = -\alpha P_{0y} + (1 - \theta) \beta h_{tty}. \quad (2.79)$$

Con la intención de quitar los parámetros α y β , hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = \beta^{1/2}\hat{x}, \quad y = \beta^{1/2}\hat{y}, \quad t = \beta^{1/2}\hat{t}, \quad \eta = \alpha^{-1}\hat{\eta}, \quad u^\theta = \alpha^{-1}\hat{u}^\theta,$$

$$v^\theta = \alpha^{-1}\hat{v}^\theta, \quad h = \alpha^{-1}\hat{h} \quad \text{y} \quad P_0 = \alpha^{-2}\hat{P}_0.$$

De donde obtenemos

$$u^\theta(x, y, t) = \alpha^{-1}\hat{u}^\theta\left(\frac{x}{\beta^{1/2}}, \frac{y}{\beta^{1/2}}, \frac{t}{\beta^{1/2}}\right), \quad u_t^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{u}_t^\theta, \quad u_x^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{u}_x^\theta, \quad u_y^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{u}_y^\theta,$$

$$v^\theta(x, y, t) = \alpha^{-1}\hat{v}^\theta\left(\frac{x}{\beta^{1/2}}, \frac{y}{\beta^{1/2}}, \frac{t}{\beta^{1/2}}\right), \quad v_t^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{v}_t^\theta, \quad v_x^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{v}_x^\theta, \quad v_y^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{v}_y^\theta,$$

$$\eta(x, y, t) = \alpha^{-1}\hat{\eta}\left(\frac{x}{\beta^{1/2}}, \frac{y}{\beta^{1/2}}, \frac{t}{\beta^{1/2}}\right), \quad \eta_t = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{\eta}_t, \quad \eta_x = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{\eta}_x, \quad \eta_y = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{\eta}_y,$$

$$h(x, y, t) = \alpha^{-1}\hat{h}\left(\frac{x}{\beta^{1/2}}, \frac{y}{\beta^{1/2}}, \frac{t}{\beta^{1/2}}\right), \quad h_t = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{h}_t, \quad h_x = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{h}_x, \quad h_y = \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}}\hat{h}_y,$$

$$u_{xtt}^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}^\theta, \quad u_{yyt}^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{u}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}^\theta, \quad v_{xtt}^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{v}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}^\theta, \quad v_{yyt}^\theta = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{v}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}^\theta.$$

$$\eta_{xtt} = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}, \quad \eta_{yyt} = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}, \quad h_{xtt} = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}},$$

$$h_{yyt} = \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}}\hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}, \quad P_{0x} = P_0 = \frac{\alpha^{-2}}{\beta^{1/2}}\hat{P}_{0\hat{x}}.$$

Reemplazando apropiadamente en (2.77), tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} (\hat{\eta}_t + \hat{u}_x^\theta) + \alpha (\eta_x u^\theta + \eta u_x^\theta + h_x u^\theta + h u_x^\theta) - b\beta \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} \\
& \quad + \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} \hat{v}_y^\theta + \alpha (\eta_y v^\theta + \eta v_y^\theta + h_y v^\theta + h v_y^\theta) - d\beta \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} \\
& - a\beta \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} - c\beta \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} = -\frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} \hat{h}_t + \frac{\beta}{2} \left((1-\lambda) \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) - 2\theta + 1 \right) \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} \\
& \quad + \frac{\beta}{2} \left((1-\varphi) \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) - 2\theta + 1 \right) \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} + a\beta \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} + c\beta \frac{\alpha^{-1}}{\beta\beta^{1/2}} \hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}. \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}
\eta_x u^\theta + \eta u_x^\theta + h_x u^\theta + h u_x^\theta &= \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} \left(\hat{\eta}_{\hat{x}} \hat{u}^\theta + \hat{\eta} \hat{u}_{\hat{x}}^\theta + \hat{h}_{\hat{x}} \hat{u}^\theta + \hat{h} \hat{u}_{\hat{x}}^\theta \right) \\
&= \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} \left(\hat{\eta} \hat{u}^\theta + \hat{h} \hat{u}^\theta \right)_{\hat{x}}, \\
\eta_y v^\theta + \eta v_y^\theta + h_y v^\theta + h v_y^\theta &= \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} \left(\hat{\eta}_{\hat{y}} \hat{v}^\theta + \hat{\eta} \hat{v}_{\hat{y}}^\theta + \hat{h}_{\hat{y}} \hat{v}^\theta + \hat{h} \hat{v}_{\hat{y}}^\theta \right) \\
&= \frac{\alpha^{-1}}{\beta^{1/2}} \left(\hat{\eta} \hat{v}^\theta + \hat{h} \hat{v}^\theta \right)_{\hat{y}}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (2.80) y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \hat{\eta}_t + \hat{u}_x^\theta + \left(\hat{\eta} \hat{u}^\theta + \hat{h} \hat{u}^\theta \right)_{\hat{x}} - b\hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} + \hat{v}_y^\theta + \left(\hat{\eta} \hat{v}^\theta + \hat{h} \hat{v}^\theta \right)_{\hat{y}} \\
& - d\hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} - a\hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} - c\hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} = -\hat{h}_t + \frac{1}{2} \left((1-\lambda) \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) - 2\theta + 1 \right) \hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \left((1-\varphi) \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) - 2\theta + 1 \right) \hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} + a\hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} + c\hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}. \quad (2.81)
\end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento análogo con las ecuaciones (2.78) y (2.79), obtenemos

$$\hat{u}_t^\theta - (e + f)\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}^\theta - (g + j)\hat{u}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}^\theta + \hat{\eta}_{\hat{x}} + (\hat{u}^\theta\hat{u}_{\hat{x}}^\theta + \hat{v}^\theta\hat{u}_{\hat{y}}^\theta) = -\hat{P}_{0\hat{x}} + (1 - \theta)\hat{h}_{\hat{t}\hat{t}\hat{x}} \quad (2.82)$$

y

$$\hat{v}_t^\theta - (k + l)\hat{v}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}^\theta - (m + q)\hat{v}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}^\theta + \hat{\eta}_{\hat{y}} + (\hat{u}^\theta\hat{v}_{\hat{x}}^\theta + \hat{v}^\theta\hat{v}_{\hat{y}}^\theta) = -\hat{P}_{0\hat{y}} + (1 - \theta)\hat{h}_{\hat{t}\hat{t}\hat{y}}. \quad (2.83)$$

Tomemos $\theta^2 = \frac{2}{3}$ y $\lambda = \varphi = \mu = \varepsilon = \xi = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.81), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_t + \hat{u}_{\hat{x}}^\theta + \left(\hat{\eta}\hat{u}^\theta + \hat{h}\hat{u}^\theta\right)_{\hat{x}} - \frac{1}{6}(1 - \lambda)\hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} + \hat{v}_{\hat{y}}^\theta + \left(\hat{\eta}\hat{v}^\theta + \hat{h}\hat{v}^\theta\right)_{\hat{y}} \\ - \frac{1}{6}(1 - \lambda)\hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} - \frac{1}{12}\lambda\hat{\eta}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} - \frac{1}{12}\lambda\hat{\eta}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} = -\hat{h}_{\hat{t}} + \frac{1}{6}\lambda\hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} \\ - \frac{1}{6}\lambda\hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}} + \frac{1}{12}\lambda\hat{h}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} + \frac{1}{12}\lambda\hat{h}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}. \end{aligned}$$

Pero esta ecuación se puede escribir como

$$\hat{\eta}_t + \hat{u}_{\hat{x}}^\theta + \left(\hat{\eta}\hat{u}^\theta + \hat{h}\hat{u}^\theta\right)_{\hat{x}} - \Delta\hat{\eta}_t + \hat{v}_{\hat{y}}^\theta + \left(\hat{\eta}\hat{v}^\theta + \hat{h}\hat{v}^\theta\right)_{\hat{y}} - \frac{\lambda}{12}\Delta\hat{\eta}_t = -\hat{h}_{\hat{t}} - \frac{1}{6}\lambda\Delta\hat{h}_{\hat{t}}.$$

La anterior ecuación puede escribirse de manera más compacta definiendo $V = (\hat{u}^\theta, \hat{v}^\theta)$

$$\hat{\eta}_t + \nabla \cdot V + \nabla \cdot (\hat{\eta} + \hat{h})V - \frac{1}{6}\Delta\hat{\eta}_t = -\hat{h}_{\hat{t}}. \quad (2.84)$$

Reemplazando estas mismas constantes en las ecuaciones (2.82), obtenemos

$$\hat{u}_t^\theta - \frac{1}{6}\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}^\theta - \frac{1}{6}\hat{u}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}^\theta + \hat{\eta}_{\hat{x}} + (\hat{u}^\theta\hat{u}_{\hat{x}}^\theta + \hat{v}^\theta\hat{u}_{\hat{y}}^\theta) = -\hat{P}_{0\hat{x}} + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\hat{h}_{\hat{t}\hat{t}\hat{x}}.$$

Nuevamente, definiendo $V = (\hat{u}^\theta, \hat{v}^\theta)$, obtenemos que esta ecuación puede escribirse

como

$$\hat{u}_t^\theta - \frac{1}{6}\Delta\hat{u}_t^\theta + \hat{\eta}_{\hat{x}} + \nabla\hat{u}^\theta \cdot V = -\hat{P}_{0\hat{x}} + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\hat{h}_{t\hat{t}\hat{x}}. \quad (2.85)$$

Realizando el mismo procedimiento anterior con la ecuación (2.83), obtenemos

$$\hat{v}_t^\theta - \frac{1}{6}\hat{v}_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}^\theta - \frac{1}{6}\hat{v}_{\hat{y}\hat{y}\hat{t}}^\theta + \hat{\eta}_{\hat{y}} + (\hat{u}^\theta\hat{v}_{\hat{x}}^\theta + \hat{v}^\theta\hat{v}_{\hat{y}}^\theta) = -\hat{P}_{0\hat{y}} + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\hat{h}_{t\hat{t}\hat{y}}.$$

Como pasó en la ecuación anterior, definiendo $V = (\hat{u}^\theta, \hat{v}^\theta)$, esta ecuación puede escribirse como

$$\hat{v}_t^\theta - \frac{1}{6}\Delta\hat{v}_t^\theta + \hat{\eta}_{\hat{y}} + \nabla\hat{v}^\theta \cdot V = -\hat{P}_{0\hat{y}} + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\hat{h}_{t\hat{t}\hat{y}}. \quad (2.86)$$

Nótese también que en general, si $V = (u, v)$ y se tiene que $u_y = v_x$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla|V|^2 &= \frac{1}{2}\nabla\langle(u, v), (u, v)\rangle = \frac{1}{2}\nabla(uu + vv) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (uu + vv)_x \\ (uu + vv)_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} uu_x + vv_x \\ uu_y + vv_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu_x + vv_y \\ uv_x + vv_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos ver que

$$\begin{pmatrix} \nabla\hat{u}^\theta \cdot V \\ \nabla\hat{v}^\theta \cdot V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}^\theta\hat{u}_{\hat{x}}^\theta + \hat{v}^\theta\hat{u}_{\hat{y}}^\theta \\ \hat{u}^\theta\hat{v}_{\hat{x}}^\theta + \hat{v}^\theta\hat{v}_{\hat{y}}^\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\nabla|V|^2.$$

Por consiguiente, reemplazando en las ecuaciones (2.85) y (2.86), y considerando de nuevo la ecuación (2.84), obtenemos finalmente el siguiente sistema de tipo Boussinesq en dos dimensiones para la propagación de ondas con pequeña amplitud y gran elongación, en

la presencia un fondo variable

$$V_t + \nabla \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \nabla |V|^2 - \frac{1}{6} \Delta V_t = -\nabla(P_0) + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) (\nabla \tilde{h})_{tt}, \quad (2.87)$$

$$\tilde{\eta}_t + \nabla \cdot V + \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})V - \frac{\Delta \tilde{\eta}_t}{6} = -\tilde{h}_t, \quad (2.88)$$

donde $V = (u(x, y, t), v(x, y, t))$, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y, t)$ y $\tilde{h} = \tilde{h}(x, t, t)$ provienen de varias adimensionalizaciones y transformaciones de $U = (u, v, w)$, η y h , respectivamente. Este sistema aparece en su versión unidimensional en el trabajo de Chen [27] y en su forma bidimensional en [28], donde los forzantes no son dados en forma explícita. Una ventaja que destacamos en el tipo de formulaciones (2.87)-(2.88) es que la influencia de la topografía aparece como un forzante en el sistema, y no afecta los términos dispersivos lineales de tercer orden (aquellos precedidos por el factor $\frac{1}{6}$), en contraste con otros modelos existentes en la literatura (ver [19, 29]). Este hecho tiene considerables ventajas desde el punto de vista analítico y numérico, ya que el sistema se puede ver en términos del operador $I - \frac{1}{6}\Delta$ el cual es bien conocido en la literatura. Otra ventaja es que este tipo de modelos nos permite considerar el caso más general, donde la topografía depende tanto del espacio como del tiempo.

Existencia y Unicidad

En este capítulo, se demuestra la existencia y unicidad de la solución del sistema (2.87) y (2.88) con condiciones iniciales y de frontera adecuadas. Este estudio es importante a fin de garantizar la existencia de las soluciones del sistema que vamos a aproximar numéricamente. Para la demostración de este teorema, usamos dos lemas en los espacios de Sobolev que escribimos a continuación.

Definimos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado con frontera suficientemente suave.

Lema 3.1. *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces $uv \in L^2(\Omega)$.*

La demostración de este lema puede ser consultada en [30].

Lema 3.2. *Suponga que s_i, s y $1 < p, p_i < \infty$ ($i = 1, 2$) son números reales que satisfacen*

$$(i) \ s_i \geq s,$$

$$(ii) \ \min s_1, s_2 \geq 0 \text{ y } s < 0$$

$$(iii) \ s_i - s \geq n \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p} \right),$$

$$(iv) \ s_1 + s_2 - s > n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p} \right) \geq 0.$$

$$(v) \ s_1 + s_2 > n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \right).$$

Entonces la multiplicación puntual de funciones es una forma bilineal continua

$$W^{s_1, p_1}(\Omega) \times W^{s_2, p_2}(\Omega) \rightarrow W^{s, p}(\Omega).$$

La demostración de este lema puede ser consultada en [31].

Lema 3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado, consideremos el siguiente problema de frontera:

$$u - \frac{1}{6}\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

para $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3.1) y (3.2).

Demostración. Ya que $f \in H^{-1}(\Omega)$, entonces $f = f^0 + \sum_{i=1}^2 f_{x_i}^i$ con $f^i \in L^2(\Omega)$, luego (3.1) y (3.2) se pueden escribir como

$$u - \frac{1}{6}\Delta u = f^0 + \sum_{i=1}^2 f_{x_i}^i \text{ en } \Omega, \quad (3.3)$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega. \quad (3.4)$$

Ahora bien, multiplicando la ecuación (3.3) por $\phi \in H_0^1(\Omega)$, e integrando respecto a Ω , se obtiene que

$$\int_{\Omega} u \phi dx - \frac{1}{6} \int_{\Omega} \Delta u \phi dx = \int_{\Omega} f^0 \phi + \sum_{i=1}^2 f_{x_i}^i \phi dx,$$

así que haciendo integración por partes, obtenemos

$$\int_{\Omega} u \phi dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f^0 \phi + \sum_{i=1}^2 f^i \phi_{x_i} dx.$$

Por la linealidad de la integral, tenemos que la expresión anterior se puede escribir como

$$\int_{\Omega} u\phi + \frac{1}{6}\nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f^0\phi + \sum_{i=1}^2 f^i\phi_{x_i} dx.$$

Si definimos la aplicación $a(u, \phi) = \int_{\Omega} u\phi + \frac{1}{6}\nabla u \cdot \nabla \phi dx$, entonces se puede escribir la ecuación anterior como

$$a(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle, \quad (3.5)$$

donde $\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f^0\phi + \sum_{i=1}^2 f^i\phi_{x_i} dx$. Con el fin de probar que (3.5) tiene una única solución u para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, mediante el teorema de Lax-Milgram [21, pag 315], probaremos que $a(u, \phi)$ es una forma bilineal, continua y coercitiva, es decir, que existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que

$$|a(u, \phi)| \leq \alpha \|u\| \|\phi\| \text{ y}$$

$$\beta \|u\|^2 \leq a(u, u),$$

para $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$. Es claro que $a(u, \phi)$ es una forma bilineal. Veamos primero que $a(u, \phi)$ es continua. En efecto,

$$|a(u, \phi)| = \left| \int_{\Omega} u\phi + \frac{1}{6}\nabla u \cdot \nabla \phi dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} u\phi dx \right| + \frac{1}{6} \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx \right| \quad (3.6)$$

$$\leq \int_{\Omega} |u\phi| dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla \phi| dx \quad (3.7)$$

$$\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.8)$$

$$\leq (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) (\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}) \quad (3.9)$$

$$+ \frac{1}{6} (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) (\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}) \quad (3.10)$$

$$= \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{6} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.11)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{6}\right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} = \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.12)$$

El hecho que $a(\cdot, \cdot)$ es coercitiva se obtiene del siguiente cálculo:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} u^2 + \frac{1}{6} \nabla u \cdot \nabla u dx \quad (3.13)$$

$$= \int_{\Omega} |u|^2 + \frac{1}{6} |\nabla u|^2 dx \quad (3.14)$$

$$= \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (3.15)$$

$$> \frac{1}{6} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (3.16)$$

$$= \beta \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.17)$$

Se concluye del teorema de Lax-Milgram que existe un único $u \in H_0^1$ solución de (3.5) para todo $\phi \in H_0^1$, y por tanto existe una única solución débil de (3.1) y (3.2). $\square$

Observemos que por el teorema anterior se puede concluir que el operador $I - \frac{1}{6}\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ es invertible en estos espacios.

En el siguiente teorema consideramos la existencia y unicidad de soluciones para el modelo tipo Boussinesq que estamos considerando.

Teorema 3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado. Dado $\tilde{\eta}_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{V}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, existe $T > 0$ y una única solución $(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) \in \mathcal{C}([0, T]; H_0^1(\Omega)) \times \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ del problema (2.87) y (2.88) que satisface las condiciones iniciales y de frontera*

$$\tilde{\eta}(x, y, 0) = \tilde{\eta}_0, \quad \mathbf{V}(x, y, 0) = \mathbf{V}_0, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\tilde{\eta} = 0, \quad \mathbf{V} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

donde $\partial\Omega$ es suficientemente suave y las funciones $P_0 \in \mathcal{C}([0, T]; H^1(\Omega))$, $\tilde{h} \in \mathcal{C}([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\Omega))$ y $\tilde{h}_x, \tilde{h}_y \in \mathcal{C}^2([0, T]; L^2(\Omega))$ son conocidas.

Demostración. En adelante, escribiremos $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$ como H^1 , L^2 y H^{-1} ,

respectivamente. Primero escribimos (2.87) y (2.88) como

$$\tilde{\eta}_t = \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})\mathbf{V} - \tilde{h}_t\right) \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_t = \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \tilde{\eta} - \frac{1}{2}\nabla |\mathbf{V}|^2 - \nabla P_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) (\nabla \tilde{h})_{tt}\right). \quad (3.19)$$

En (3.18), el operador $(I - \frac{1}{6}\Delta)^{-1}$ denota la inversa del operador $(I - \frac{1}{6}\Delta)$ con dominio H_0^1 y rango H^{-1} , mientras que en (3.19), el operador $(I - \frac{1}{6}\Delta)^{-1}$ representa la inversa del operador $(I - \frac{1}{6}\Delta)$ con dominio $\mathbf{H}_0^1$ y rango $\mathbf{H}^{-1}$.

Definimos el siguiente operador:

$$F(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) = \left(\left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})\mathbf{V} - \tilde{h}_t\right), \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \tilde{\eta} - \frac{1}{2}\nabla |\mathbf{V}|^2 - \nabla P_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) (\nabla \tilde{h})_{tt}\right) \right),$$

La idea de la demostración consiste en transformar el problema de valor inicial (3.18) y (3.19) en un problema de Cauchy asociado a una ecuación diferencial ordinaria de la forma $U' = F(U)$, donde $U = (\eta, V)$, en el espacio de Banach $H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1$, al cual se le pueda aplicar la teoría de existencia y unicidad conocida en la literatura para este tipo de problema. Para esto, establecemos en primer lugar que el campo $F : H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1 \rightarrow H^1 \times \mathbf{H}^1$ está bien definido y que es diferenciable con derivada continua. Para ver que está bien definido, sea $(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) \in H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1$. Entonces de las hipótesis del teorema se tiene que $\tilde{h}_t \in L^2 \subset H^{-1}$ y $(\nabla \tilde{h})_{tt} \in L^2 \subset \mathbf{H}^{-1}$.

En segundo lugar, como $\tilde{\eta} \in H_0^1$ y $\mathbf{V} \in \mathbf{H}_0^1$, entonces $\tilde{\eta} \in H^1$ y $\mathbf{V} \in \mathbf{H}^1$, por tanto $u_x, v_y \in L^2$. En consecuencia $u_x + v_y \in L^2 \subset H^{-1}$, lo que implica que, $\nabla \cdot \mathbf{V} \in H^{-1}$.

En tercer lugar, por el lema 3.1 $((\tilde{h} + \tilde{\eta})u)$ y $((\tilde{h} + \tilde{\eta})v) \in L^2$, luego $\nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})\mathbf{V} = ((\tilde{h} + \tilde{\eta})u)_x + ((\tilde{h} + \tilde{\eta})v)_y$ tiene sus términos en H^{-1} , por lo tanto, podemos concluir que $\nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})\mathbf{V} \in H^{-1}$. En conclusión, $(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})\mathbf{V} - \tilde{h}_t) \in H^{-1}$ y como

$(I - \frac{1}{6}\Delta) : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ es invertible, entonces

$$\left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta})\mathbf{V} - \tilde{h}_t\right) \in H_0^1 \subset H^1.$$

Por otro lado, observamos lo siguiente:

- i) Por hipótesis, $\tilde{\eta} \in H_0^1 \subset H^1$, entonces $\nabla \tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_x, \tilde{\eta}_y) \in L^2 \times L^2 = \mathbf{L}^2 \subset \mathbf{H}^{-1}$;
 $\nabla |\mathbf{V}|^2 = \nabla \langle (u, v), (u, v) \rangle = \nabla (uu + vv) = ((uu + vv)_x, (uu + vv)_y)$.
- ii) Por el lema 3.1, $(uu + vv) \in L^2$ por tanto, sus derivadas parciales pertenecen a H^{-1} ,
entonces $((uu + vv)_x, (uu + vv)_y) \in \mathbf{H}^{-1}$, luego $\nabla |\mathbf{V}|^2 \in \mathbf{H}^{-1}$.
- iii) Como por hipótesis $P_0 \in H^1$, entonces $\nabla P_0 \in \mathbf{L}^2 \subset H^1$.

En conclusión, de *i*, *ii* y *iii*, $\left(-\nabla \tilde{\eta} - \frac{1}{2}\nabla |\mathbf{V}|^2 - \nabla P_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) (\nabla \tilde{h})_{tt}\right) \in \mathbf{H}^{-1}$ y puesto que $(I - \frac{1}{6}\Delta) : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ es invertible, entonces

$$\left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \tilde{\eta} - \frac{1}{2}\nabla |\mathbf{V}|^2 - \nabla P_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) (\nabla \tilde{h})_{tt}\right) \in H_0^1 \subset H^1.$$

De lo anterior, se concluye que $F(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) : H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1 \rightarrow H^1 \times \mathbf{H}^1$ está bien definido y más aún, que F es C^1 en $H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1$, con derivada $F'(\tilde{\eta}^*, V^*)$ dada por

$$F'(\tilde{\eta}^*, V^*)(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) = \left(\left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{\eta})\mathbf{V}^* - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta}^*)\mathbf{V}\right), \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla (\tilde{\eta} + \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V})\right) \right).$$

Ahora veamos que F' es continua. En efecto,

$$\begin{aligned} & \|F'(\tilde{\eta}_1^*, V_1^*)(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) - F'(\tilde{\eta}_1^*, V_1^*)(\tilde{\eta}, \mathbf{V})\|_{H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1} = \\ & \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{\eta})\mathbf{V}_1^* - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V}\right), \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla (\tilde{\eta} + \mathbf{V}_1^* \cdot \mathbf{V})\right) - \right. \\ & \left. \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\tilde{\eta})\mathbf{V}_2^* - \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta}_2^*)\mathbf{V}\right), \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} \left(-\nabla (\tilde{\eta} + \mathbf{V}_2^* \cdot \mathbf{V})\right) \right\|_{H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Por la linealidad del operador $(I - \frac{1}{6}\Delta)^{-1}$ en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} & \|F'(\tilde{\eta}_1^*, V_1^*)(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) - F'(\tilde{\eta}_1^*, V_1^*)(\tilde{\eta}, \mathbf{V})\|_{H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1} = \\ & \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla \cdot (\tilde{\eta})(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) + \nabla \cdot (\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V}), \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) \cdot \mathbf{V}) \right\|_{H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Tomando la norma $\|(\cdot, \cdot)\|_{H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1} = \|\cdot\|_{H_0^1} + \|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ para productos de espacios de Banach [23] en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla \cdot (\tilde{\eta})(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) + \nabla \cdot (\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V}), \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) \cdot \mathbf{V}) \right\|_{H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1} = \\ & \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla \cdot (\tilde{\eta})(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) + \nabla \cdot (\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V}) \right\|_{H_0^1} + \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) \cdot \mathbf{V}) \right\|_{\mathbf{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Por el teorema de regularidad [32, sección 9.1.4], tenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla \cdot (\tilde{\eta})(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) + \nabla \cdot (\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V}) \right\|_{H_0^1} + \left\| \left(I - \frac{1}{6}\Delta\right)^{-1} (\nabla(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) \cdot \mathbf{V}) \right\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \\ & C_1 (\|(\nabla \cdot (\tilde{\eta})(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) + \nabla \cdot (\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V})\|_{H^{-1}} + \|(\nabla(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) \cdot \mathbf{V})\|_{\mathbf{H}^{-1}}). \end{aligned}$$

A continuación realizamos la estimación en detalle de cada uno de los términos de la expresión anterior. Haciendo el cálculo de la divergencia, el producto de vectores en el lado derecho y luego usando la desigualdad triangular, se tiene

$$\begin{aligned} & C_1 (\|(\nabla \cdot (\tilde{\eta})(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) + \nabla \cdot (\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\mathbf{V})\|_{H^{-1}} + \|(\nabla(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^*) \cdot \mathbf{V})\|_{\mathbf{H}^{-1}}) \leq \\ & C_1 (\|(\tilde{\eta}(u_2^* - u_1^*))_x\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}(v_2^* - v_1^*))_y\|_{H^{-1}} + \|((\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)u)_x\|_{H^{-1}} + \|((\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)v)_y\|_{H^{-1}} \\ & \quad + \|((u_2^* - u_1^*)u)_x\|_{H^{-1}} + \|((v_2^* - v_1^*)v)_x\|_{H^{-1}} + \|((u_2^* - u_1^*)u)_y\|_{H^{-1}} + \|((v_2^* - v_1^*)v)_y\|_{H^{-1}}). \end{aligned}$$

Calculando las derivadas en el lado derecho de la expresión anterior y usando desigualdad

triangular, obtenemos

$$\begin{aligned}
& C_1(\|\tilde{\eta}(u_2^* - u_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}(v_2^* - v_1^*)\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)u\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)v\|_{H^{-1}} \\
& + \|((u_2^* - u_1^*)u)_x\|_{H^{-1}} + \|((v_2^* - v_1^*)v)_x\|_{H^{-1}} + \|((u_2^* - u_1^*)u)_y\|_{H^{-1}} + \|((v_2^* - v_1^*)v)_y\|_{H^{-1}}) \leq \\
& C_1(\|\tilde{\eta}_x(u_2^* - u_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}(u_2^* - u_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}_y(v_2^* - v_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}(v_2^* - v_1^*)\|_{H^{-1}} \\
& + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)xu\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)u_x\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)yv\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)v_y\|_{H^{-1}} \\
& + \|(u_2^* - u_1^*)xu\|_{H^{-1}} + \|(u_2^* - u_1^*)u_x\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)xv\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)xv\|_{H^{-1}} \\
& + \|(u_2^* - u_1^*)yu\|_{H^{-1}} + \|(u_2^* - u_1^*)u_y\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)yv\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)v_y\|_{H^{-1}}).
\end{aligned}$$

Por el lema 3.2, tomando $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s = -1$ y $p_1 = p_2 = p = 2$, para las multiplicaciones de funciones en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
& C_1(\|\tilde{\eta}_x(u_2^* - u_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}(u_2^* - u_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}_y(v_2^* - v_1^*)\|_{H^{-1}} + \|\tilde{\eta}(v_2^* - v_1^*)\|_{H^{-1}} \\
& + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)xu\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)u_x\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)yv\|_{H^{-1}} + \|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)v_y\|_{H^{-1}} \\
& + \|(u_2^* - u_1^*)xu\|_{H^{-1}} + \|(u_2^* - u_1^*)u_x\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)xv\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)xv\|_{H^{-1}} \\
& + \|(u_2^* - u_1^*)yu\|_{H^{-1}} + \|(u_2^* - u_1^*)u_y\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)yv\|_{H^{-1}} + \|(v_2^* - v_1^*)v_y\|_{H^{-1}}) \leq \\
& C_1(C_2\|\tilde{\eta}_x\|_{L^2}\|(u_2^* - u_1^*)\|_{H_0^1} + C_3\|\tilde{\eta}\|_{H_0^1}\|(u_2^* - u_1^*)\|_{L^2} + C_4\|\tilde{\eta}_y\|_{L^2}\|(v_2^* - v_1^*)\|_{H_0^1} + C_5\|\tilde{\eta}\|_{H_0^1}\|(v_2^* - v_1^*)\|_{L^2} \\
& + C_6\|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)x\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1} + C_7\|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\|_{H_0^1}\|u_x\|_{L^2} + C_8\|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)y\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1} + C_9\|(\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*)\|_{H_0^1}\|v_y\|_{L^2} \\
& + C_{10}\|(u_2^* - u_1^*)x\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1} + C_{11}\|(u_2^* - u_1^*)\|_{H_0^1}\|u_x\|_{L^2} + C_{12}\|(v_2^* - v_1^*)x\|_{H_0^1}\|v\|_{L^2} + C_{13}\|(v_2^* - v_1^*)\|_{L^2}\|v_x\|_{H_0^1} \\
& + C_{14}\|(u_2^* - u_1^*)y\|_{H_0^1}\|u\|_{L^2} + C_{15}\|(u_2^* - u_1^*)\|_{L^2}\|u_y\|_{H_0^1} + C_{16}\|(v_2^* - v_1^*)y\|_{H_0^1}\|v\|_{L^2} + C_{17}\|(v_2^* - v_1^*)\|_{H_0^1}\|v_y\|_{L^2}) \leq \\
& C_1 M(\|u_2^* - u_1^*\|_{H_0^1} + \|v_2^* - v_1^*\|_{H_0^1} + \|\tilde{\eta}_2^* - \tilde{\eta}_1^*\|_{H_0^1}),
\end{aligned}$$

donde $C_1, C_2 \dots C_{17}$ y M son constantes.

Finalmente, en virtud del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach [33], podemos concluir que existe $T > 0$ y una única solución $(\tilde{\eta}, \mathbf{V}) \in \mathcal{C}^1([0, T], H_0^1 \times \mathbf{H}_0^1)$ del problema de valor inicial y de frontera (2.87) y (2.88). $\square$

Formulación variacional y FEM

En este capítulo, implementamos un método de elementos finitos para aproximar numéricamente las soluciones del problema (2.87) y (2.88). Como el problema es evolutivo, discretizamos primero la variable temporal, usando diferencias finitas, luego, en cada paso del tiempo, discretizamos las variables espaciales usando elementos finitos (Método de Rothe).

4.1. Semidiscretización en tiempo

Tomando el problema (2.87) y (2.88) en su forma vectorial, tenemos

$$u_t + \tilde{\eta}_x + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)_x - \frac{1}{6}\Delta u_t = -P_{0x} + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) h_{xtt}, \quad (4.1)$$

$$v_t + \tilde{\eta}_y + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)_y - \frac{1}{6}\Delta v_t = -P_{0y} + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) h_{ytt}, \quad (4.2)$$

$$\eta_t + u_x + v_y + ((h + \eta)u)_x + ((h + \eta)v)_y - \frac{1}{6}\Delta u_t = -h_t. \quad (4.3)$$

Deseamos discretizar primero la variable temporal, con tal fin usamos la θ - discretización de diferencias finitas para (4.1), (4.2), (4.3), donde el super índice n indica el número de paso del tiempo y $k = t_n - t_{n-1}$ es el largo del presente paso del tiempo, de esta forma

obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{u^n - u^{n-1}}{k} + \theta \eta_x^n + (1 - \theta) \eta_x^{n-1} + \theta \frac{1}{2} (u^{n^2} + v^{n^2})_x + (1 - \theta) (u^{(n-1)^2} + v^{(n-1)^2})_x - \\ & \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right) + \theta P_{0_x}^n + (1 - \theta) P_{0_x}^{n-1} - \theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{xtt}^n - (1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{xtt}^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{v^n - v^{n-1}}{k} + \theta \eta_y^n + (1 - \theta) \eta_y^{n-1} + \theta \frac{1}{2} (u^{n^2} + v^{n^2})_y + (1 - \theta) (u^{(n-1)^2} + v^{(n-1)^2})_y - \\ & \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{v^n - v^{n-1}}{k} \right) + \theta P_{0_y}^n + (1 - \theta) P_{0_y}^{n-1} - \theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{ytt}^n - (1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{ytt}^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} + \theta u_x^n + (1 - \theta) u_x^{n-1} + \theta v_y^n + (1 - \theta) v_y^{n-1} + \theta (\eta^n u^n)_x + (1 - \theta) (\eta^{n-1} u^{n-1})_x + \\ & \theta (\eta^n v^n)_y + (1 - \theta) (\eta^{n-1} v^{n-1})_y - \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \right) - \theta (h^n u^n)_x - (1 - \theta) (h^{n-1} u^{n-1})_x - \\ & \theta (h^n v^n)_y - (1 - \theta) (h^{n-1} v^{n-1})_y + \theta h_t^n + (1 - \theta) h_t^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Para $0 \leq \theta \leq 1$, tenemos distintos esquemas de diferencias finitas para discretizar la variable temporal, por ejemplo, si $\theta = 0$ obtenemos el esquema de Euler explícito; si $\theta = 1$ obtenemos Euler implícito y con $\theta = \frac{1}{2}$ tenemos el esquema de Crank-Nicholson. Una vez hemos discretizado la variable temporal, el problema evolutivo se ha transformado en un problema estacionario en cada paso del tiempo n . Discretizaremos ahora las variables espaciales usando el método de elementos finitos.

4.2. Formulaci3n variacional del problema

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una regi3n abierta y acotada y $\varphi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$, funciones de prueba en $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, donde $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev

dado por el conjunto de funciones cuadrado integrables con derivadas, hasta orden uno, cuadrado integrables, véase [21]. Si multiplicamos el problema semidiscreto obtenido en la sección anterior por las funciones de prueba φ_i , obtenemos el siguiente problema

$$\begin{aligned} & \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \varphi_1 + \theta \eta_x^n \varphi_1 + (1 - \theta) \eta_x^{n-1} \varphi_1 + \theta \frac{1}{2} (u^{n^2} + v^{n^2})_x \varphi_1 + \\ & (1 - \theta) (u^{(n-1)^2} + v^{(n-1)^2})_x \varphi_1 - \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right) \varphi_1 + \theta P_{0x}^n \varphi_1 + \\ & (1 - \theta) P_{0x}^{n-1} \varphi_1 - \theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{xtt}^n \varphi_1 - (1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{xtt}^{n-1} \varphi_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{v^n - v^{n-1}}{k} \varphi_2 + \theta \eta_y^n \varphi_2 + (1 - \theta) \eta_y^{n-1} \varphi_2 + \theta \frac{1}{2} (u^{n^2} + v^{n^2})_y \varphi_2 + \\ & (1 - \theta) (u^{(n-1)^2} + v^{(n-1)^2})_y \varphi_2 - \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{v^n - v^{n-1}}{k} \right) \varphi_2 + \theta P_{0y}^n \varphi_2 + \\ & (1 - \theta) P_{0y}^{n-1} \varphi_2 - \theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{ytt}^n \varphi_2 - (1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{ytt}^{n-1} \varphi_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \varphi_3 + \theta u_x^n \varphi_3 + (1 - \theta) u_x^{n-1} \varphi_3 + \theta v_y^n \varphi_3 + (1 - \theta) v_y^{n-1} \varphi_3 + \\ & \theta (\eta^n u^n)_x \varphi_3 + (1 - \theta) (\eta^{n-1} u^{n-1})_x \varphi_3 + \theta (\eta^n v^n)_y \varphi_3 + (1 - \theta) (\eta^{n-1} v^{n-1})_y \varphi_3 - \\ & \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \right) \varphi_3 - \theta (h^n u^n)_x \varphi_3 - (1 - \theta) (h^{n-1} u^{n-1})_x \varphi_3 - \theta (h^n v^n)_y \varphi_3 - \\ & (1 - \theta) (h^{n-1} v^{n-1})_y \varphi_3 + \theta h_t^n \varphi_3 + (1 - \theta) h_t^{n-1} \varphi_3 = 0. \end{aligned}$$

Integrando las ecuaciones anteriores en Ω respecto a las variables espaciales y definiendo $b = (x, y)$, tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{u^n - u^{n-1}}{k} \varphi_1 db + \int_{\Omega} \theta \eta_x^n \varphi_1 db + \int_{\Omega} (1 - \theta) \eta_x^{n-1} \varphi_1 db + \int_{\Omega} \theta \frac{1}{2} (u^{n^2} + v^{n^2})_x \varphi_1 db + \\
& \int_{\Omega} (1 - \theta) (u^{(n-1)^2} + v^{(n-1)^2})_x \varphi_1 db - \int_{\Omega} \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right) \varphi_1 db + \int_{\Omega} \theta P_{0_x}^n \varphi_1 db + \\
& \int_{\Omega} (1 - \theta) P_{0_x}^{n-1} \varphi_1 db - \int_{\Omega} \theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{xtt}^n \varphi_1 db - \int_{\Omega} (1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{xtt}^{n-1} \varphi_1 db = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{v^n - v^{n-1}}{k} \varphi_2 db + \int_{\Omega} \theta \eta_y^n \varphi_2 db + \int_{\Omega} (1 - \theta) \eta_y^{n-1} \varphi_2 db + \int_{\Omega} \theta \frac{1}{2} (u^{n^2} + v^{n^2})_y \varphi_2 db + \\
& \int_{\Omega} (1 - \theta) (u^{(n-1)^2} + v^{(n-1)^2})_y \varphi_2 db - \int_{\Omega} \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{v^n - v^{n-1}}{k} \right) \varphi_2 db + \int_{\Omega} \theta P_{0_y}^n \varphi_2 db + \\
& \int_{\Omega} (1 - \theta) P_{0_y}^{n-1} \varphi_2 db - \int_{\Omega} \theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{ytt}^n \varphi_2 db - \int_{\Omega} (1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{ytt}^{n-1} \varphi_2 db = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \varphi_3 db + \int_{\Omega} \theta u_x^n \varphi_3 db + \int_{\Omega} (1 - \theta) u_x^{n-1} \varphi_3 db + \int_{\Omega} \theta v_y^n \varphi_3 db + \\
& \int_{\Omega} (1 - \theta) v_y^{n-1} \varphi_3 db + \int_{\Omega} \theta (\eta^n u^n)_x \varphi_3 db + \int_{\Omega} (1 - \theta) (\eta^{n-1} u^{n-1})_x \varphi_3 db + \\
& \int_{\Omega} \theta (\eta^n v^n)_y \varphi_3 db + \int_{\Omega} (1 - \theta) (\eta^{n-1} v^{n-1})_y \varphi_3 db - \int_{\Omega} \frac{1}{6} \Delta \left(\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \right) \varphi_3 db - \\
& \int_{\Omega} \theta (h^n u^n)_x \varphi_3 db - \int_{\Omega} (1 - \theta) (h^{n-1} u^{n-1})_x \varphi_3 db - \int_{\Omega} \theta (h^n v^n)_y \varphi_3 db - \\
& \int_{\Omega} (1 - \theta) (h^{n-1} v^{n-1})_y \varphi_3 db + \int_{\Omega} \theta h_t^n \varphi_3 db + \int_{\Omega} (1 - \theta) h_t^{n-1} \varphi_3 db = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando integraci3n por partes en los t3rminos que contienen derivadas de orden superior y recordando que la funci3n de prueba es cero en la frontera de Ω , se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right), \varphi_1 \right) - (\theta \eta^n, \varphi_{1x}) - ((1 - \theta) \eta^{n-1}, \varphi_{1x}) - \\
& \left(\theta \frac{1}{2} (u^{n2} + v^{n2}), \varphi_{1x} \right) - \left((1 - \theta) (u^{(n-1)2} + v^{(n-1)2}), \varphi_{1x} \right) + \\
& \left(\frac{1}{6} \nabla \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k} \right), \nabla \varphi_1 \right) - (\theta P_0^n, \varphi_{1x}) - ((1 - \theta) P_0^{n-1}, \varphi_{1x}) + \\
& \left(\theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{tt}^n, \varphi_{1x} \right) + \left((1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{tt}^{n-1}, \varphi_{1x} \right) = 0, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{v^n - v^{n-1}}{k} \right), \varphi_2 \right) - (\theta \eta^n, \varphi_{2y}) - ((1 - \theta) \eta^{n-1}, \varphi_{2y}) - \\
& \left(\theta \frac{1}{2} (u^{n2} + v^{n2}), \varphi_{2y} \right) - \left((1 - \theta) (u^{(n-1)2} + v^{(n-1)2}), \varphi_{2y} \right) + \\
& \left(\frac{1}{6} \nabla \left(\frac{v^n - v^{n-1}}{k} \right), \nabla \varphi_2 \right) - (\theta P_0^n, \varphi_{2y}) - ((1 - \theta) P_0^{n-1}, \varphi_{2y}) + \\
& \left(\theta \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{tt}^n, \varphi_{2y} \right) + \left((1 - \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) h_{tt}^{n-1}, \varphi_{2y} \right) = 0, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \right), \varphi_3 \right) - (\theta u^n, \varphi_{3x}) - ((1 - \theta) u^{n-1}, \varphi_{3x}) - (\theta v^n, \varphi_{3y}) - ((1 - \theta) v^{n-1}, \varphi_{3y}) - \\
& (\theta (\eta^n u^n), \varphi_{3x}) - ((1 - \theta) (\eta^{n-1} u^{n-1}), \varphi_{3x}) - (\theta (\eta^n v^n), \varphi_{3y}) - ((1 - \theta) (\eta^{n-1} v^{n-1}), \varphi_{3y}) + \\
& \left(\frac{1}{6} \nabla \left(\frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k} \right), \nabla \varphi_3 \right) + (\theta (h^n u^n), \varphi_{3x}) + ((1 - \theta) (h^{n-1} u^{n-1}), \varphi_{3x}) + (\theta (h^n v^n), \varphi_{3y}) + \\
& ((1 - \theta) (h^{n-1} v^{n-1}), \varphi_{3y}) + (\theta h_t^n, \varphi_3) + ((1 - \theta) h_t^{n-1}, \varphi_3) = 0, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto interno clásico de $L^2(\Omega)$.

Formulación Variacional: Sea $V = [H_0^1(\Omega)]^3$. Encontrar $(\eta, u, v) \in V$ tales que (4.4), (4.5), (4.6) se cumplan para todo $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in V$.

4.3. FEM

Necesitamos definir el método de elementos finitos que usaremos para aproximar las soluciones del problema semidiscreto en cada paso del tiempo; para esto, definimos nuestra terna (K, P, Q) . Tomamos como elementos los triángulos y las funciones con las que aproximaremos las soluciones, funciones lineales afín y los grados de libertad serán el valor de las funciones lineales afín en los nodos (ver figura 4.1) de los elementos; es decir,

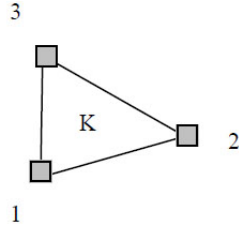


Figura 4.1: nodos

$$P = \mathbb{P}_1 = \{\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Una vez hemos definido nuestro método de elementos finitos y teniendo la formulación variacional del problema semidiscreto, procedemos con la aproximación de las soluciones de la formulación variacional en espacios de dimensión finita $V_h \subset V$.

Supondremos en lo sucesivo que Ω es unión de triángulos, es decir, $\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^N k_i$ es una partición del dominio Ω en triángulos.

Sea el conjunto $\{\phi_1(x), \phi_2(x) \cdots \phi_m(x)\}$ una base del espacio de dimensión finita

$$V_h = \{(u_{1_h}, u_{2_h}, u_{3_h}) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : u_{i_h}|_k \in \mathbb{P}_1, \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } \forall k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Realizamos la siguiente aproximación,

$$u^n \approx u_h^n(x) = \sum_{i=1}^m u_i^n \phi_i(x), \quad (4.7)$$

$$v^n \approx v_h^n(x) = \sum_{i=1}^m v_i^n \phi_i(x), \quad (4.8)$$

$$\eta^n \approx \eta_h^n(x) = \sum_{i=1}^m \eta_i^n \phi_i(x), \quad (4.9)$$

y reemplazamos en (4.4), (4.5) y (4.6) para obtener un sistema de ecuaciones no lineales, donde las incógnitas del sistema son los grados de libertad. Una vez se encuentran los grados de libertad, se reemplazan en (4.7), (4.8), (4.9) y obtenemos soluciones aproximadas a la formulación variacional.

Experimentos Numéricos e Implementación numérica FEniCS Project

En éste capítulo, presentamos resultados de experimentos numéricos para nuestro modelo de ondas acuáticas con topografía irregular; algunos de ellos nos sirven para validar los resultados del modelo ya que son conocidos en la literatura especializada. Para la discretización temporal del sistema (2.87) y (2.88), usamos el esquema de diferencias finitas de segundo orden Crank-Nicholson, para la discretización espacial, usamos elementos finitos. Se calcula el orden de convergencia del esquema de diferencias finitas y el del método de elementos finitos para verificar que concuerden con la teoría. Para los experimentos que se presentan, en ésta sección, se usó un equipo ASUS K550DP el cual consta de un procesador AMD A10 5750M Elite Quad Core de 2.5 GHz, memoria RAM de 15GB DDR3 1600 Mhz, disco duro 1 TB SATA 5400 RPM y tarjeta de video ATI radeon HD 8670M 2GB DDR3 VRAM. El sistema operativo que se usó es Ubuntu 18.04.1 LTS (Bionic Beaver); sobre éste sistema operativo, se instaló FEniCS Project 2018.1 el cual corre sobre Python3; FEniCS es una popular plataforma informática de código abierto para resolver ecuaciones diferenciales parciales. FEniCS se estableció en 2003 con la idea de automatizar la solución de modelos matemáticos basado en ecuaciones diferenciales. Inicialmente, FEniCS consistía en dos bibliotecas: DOLFIN y FÍAT.

Desde entonces, el proyecto ha crecido y ahora consta de los componentes principales DOLFIN, FFC, FIAT, Instant, UFC y UFL. FEniCS permite a los usuarios traducir rápidamente modelos científicos a un código de elementos finitos eficiente con las interfaces de alto nivel de Python y C++. Cada componente de la plataforma FEniCS ha sido diseñado fundamentalmente para el procesamiento paralelo. FEniCS está disponible para una variedad de plataformas (Linux, Mac, Windows).

5.1. Onda solitaria que choca con un obstáculo cilíndrico

En éste primer experimento, consideramos un dominio rectangular $\Omega = [-15, 15] \times [-30, 50]$ en el que se coloca un cilindro vertical impenetrable centrado en $(0, 10)$ con radio de 1,5. Suponemos condiciones de frontera reflectivas normales en la frontera del cilindro y a lo largo de las rectas $y = -30$ y $y = 50$, además suponemos condición de frontera Dirichlet homogénea para u y condiciones de frontera Neumann homogéneas para η y v en las fronteras laterales $x = \pm 15$ (ver Figura 5.1). Las condiciones iniciales que usamos son

$$\begin{aligned}\eta_0(x, y) &= A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3A}{c_s}} (y + 10) \right), \\ u_0(x, y) &= 0, \\ v_0(x, y) &= \eta_0(x, y) - \frac{1}{4} \eta_0^2(x, y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $A = 0,2$ y $c_s = 1 + \frac{A}{2}$ [34]. Para este experimento, tomamos la topografía variable $h(x, y, t) = 0$ con el fin de comparar los resultados con los obtenidos para modelos Boussinesq con fondo plano [35], [34]. El modelo de ondas acuáticas con topografía variable (2.87) y (2.88) es discretizado espacialmente con elementos finitos, usamos funciones lineales afín para la aproximación de la solución, la partición del dominio se hace con elementos triangulares. La malla fue construida usando el programa GMSH, el cual es un

generador de mallas para elementos finitos tridimensionales; GMSH es un programa de código abierto que permite la fácil creación de mallas en dominios cuya geometría puede ser complicada. La cantidad de elementos triangulares que se usaron para la partición del dominio fueron 29.984 y la cantidad de nodos es de 15.466. La variable temporal se discretizó usando diferencias finitas y se implementó el método Crank-Nicholson de orden dos con $\Delta t = 0,4$. La onda solitaria es centrada en $y = -10$ en $t = 0$, se propaga en la dirección positiva del eje y , viajando a una velocidad c_s de aproximadamente 1,05. La mayor parte de la onda solitaria que viaja en la dirección positiva de y pasa el cilindro, mientras que se producen ondas de menor amplitud por la interacción de la onda con el obstáculo que viajan en sentido contrario, (ver Figura 5.10a, 5.10b y 5.11). En la Figura 5.2a, podemos ver un corte sobre el eje y de la Figura 5.2b, la cual muestra el impulso inicial de la onda solitaria; los colores en la Figura indican el valor numérico que toma la función; la Figura 5.3 muestra la superficie libre η tridimensionalmente, cuya imagen es un levantamiento de las capas de nivel. En las Figuras 5.4 - 5.15, podemos observar como la onda solitaria avanza por el canal y su interacción con el obstáculo cilíndrico.

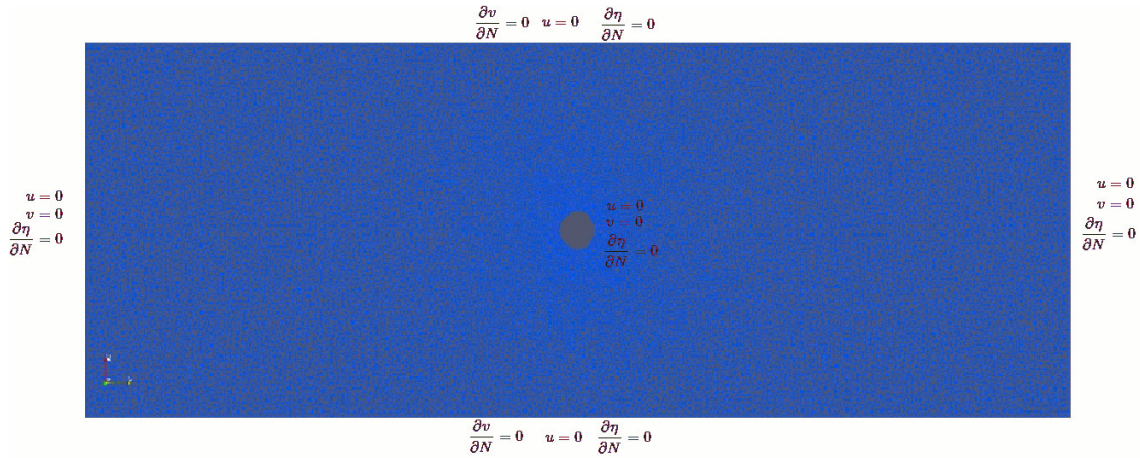


Figura 5.1: Condiciones de frontera para el dominio especificado

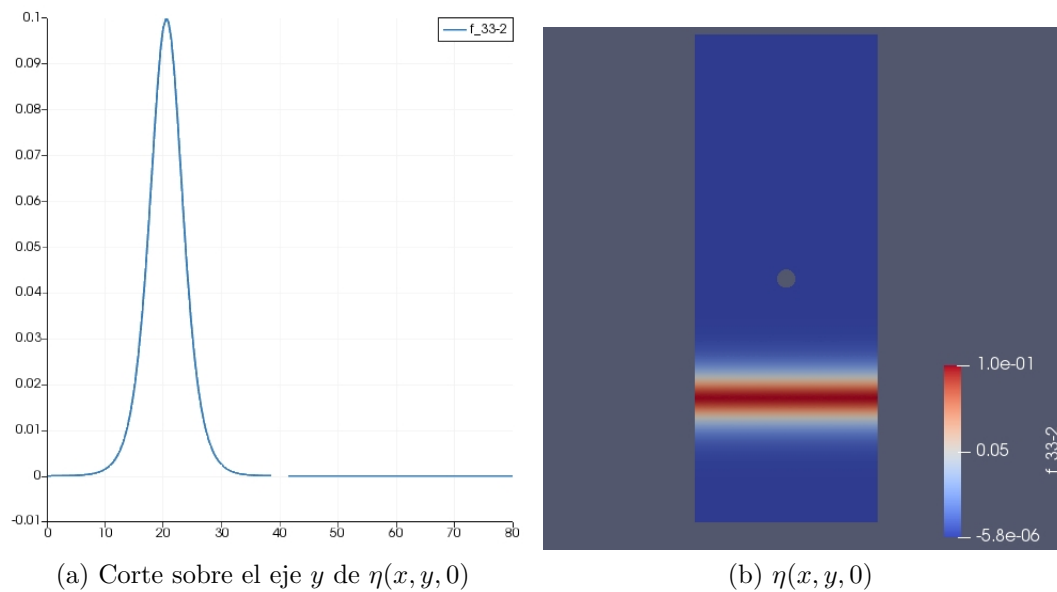


Figura 5.2: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

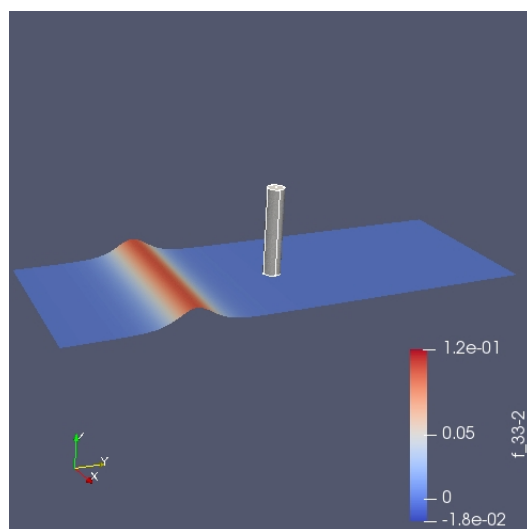


Figura 5.3: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 0)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

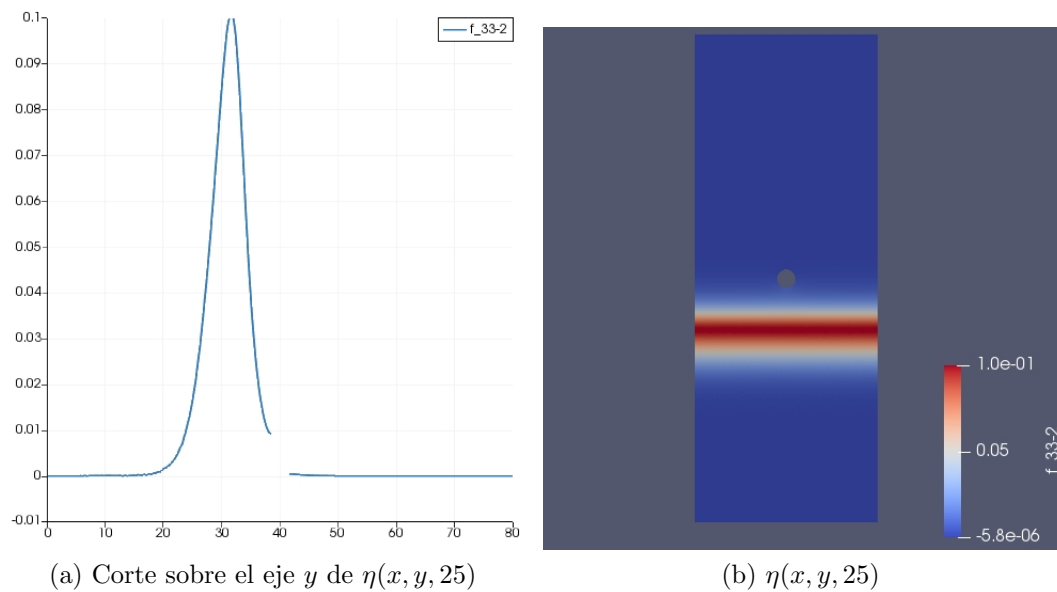


Figura 5.4: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

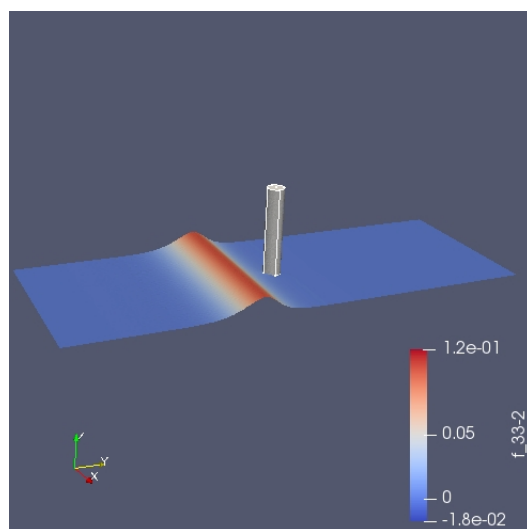


Figura 5.5: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 25)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

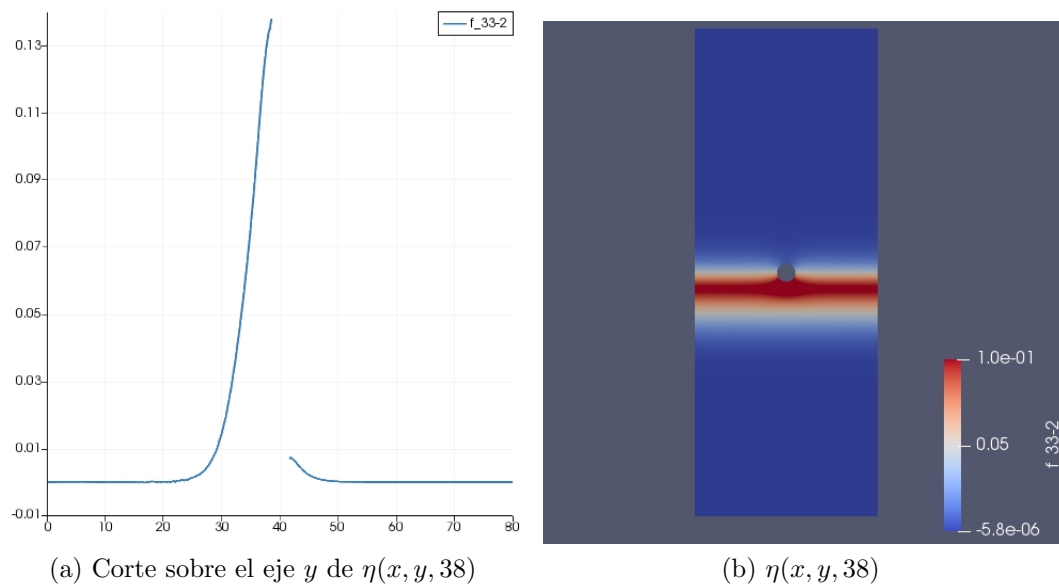


Figura 5.6: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

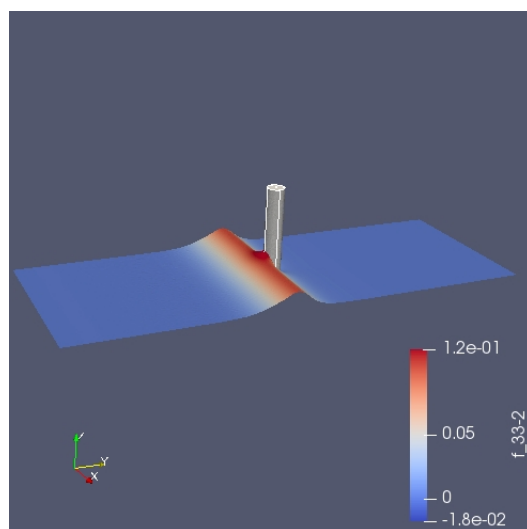


Figura 5.7: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 38)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

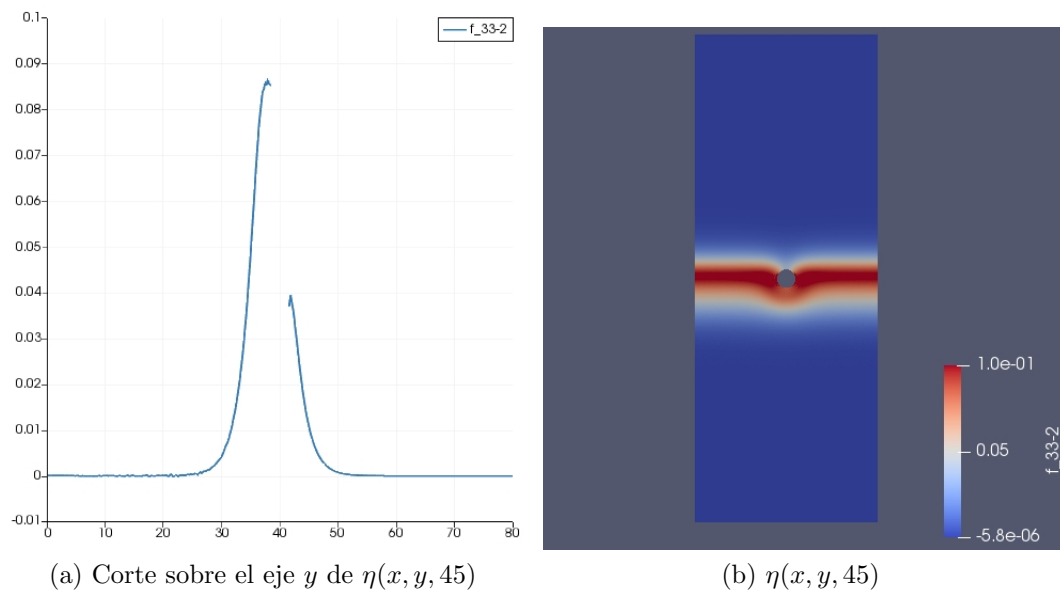


Figura 5.8: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

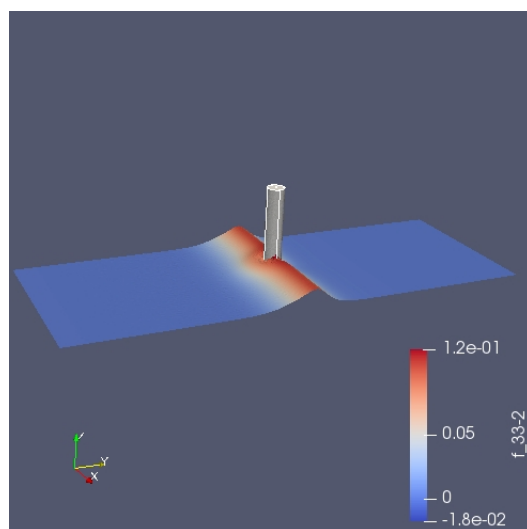


Figura 5.9: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 45)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

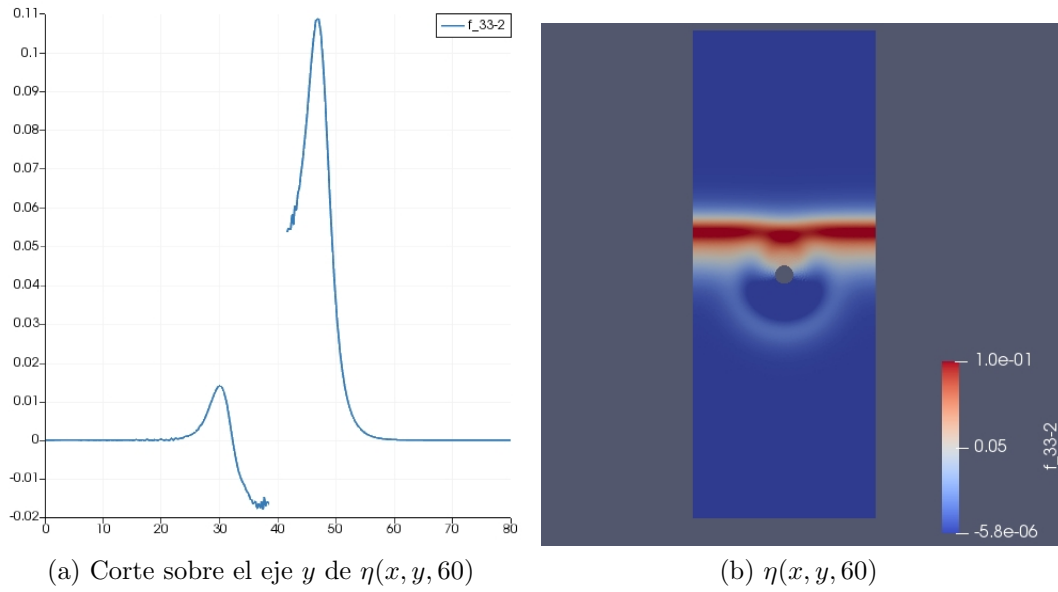


Figura 5.10: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

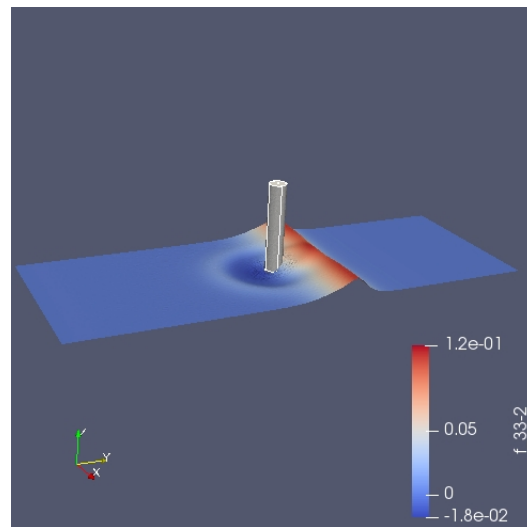


Figura 5.11: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 60)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

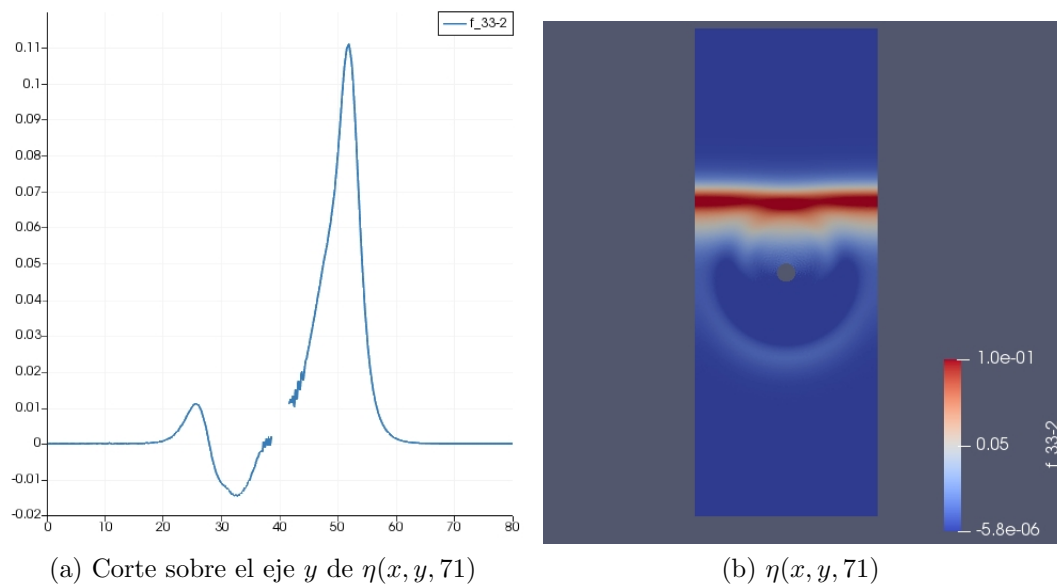


Figura 5.12: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

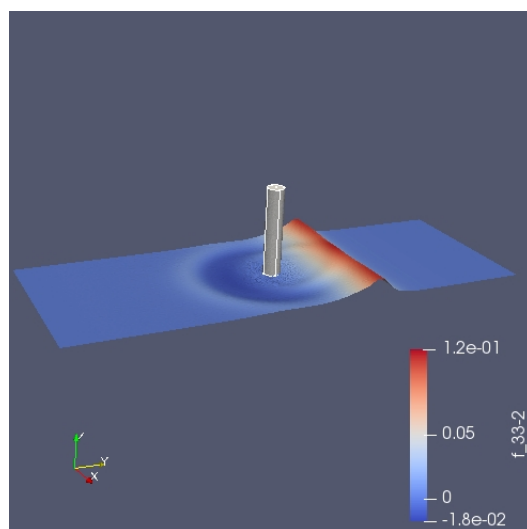


Figura 5.13: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 71)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

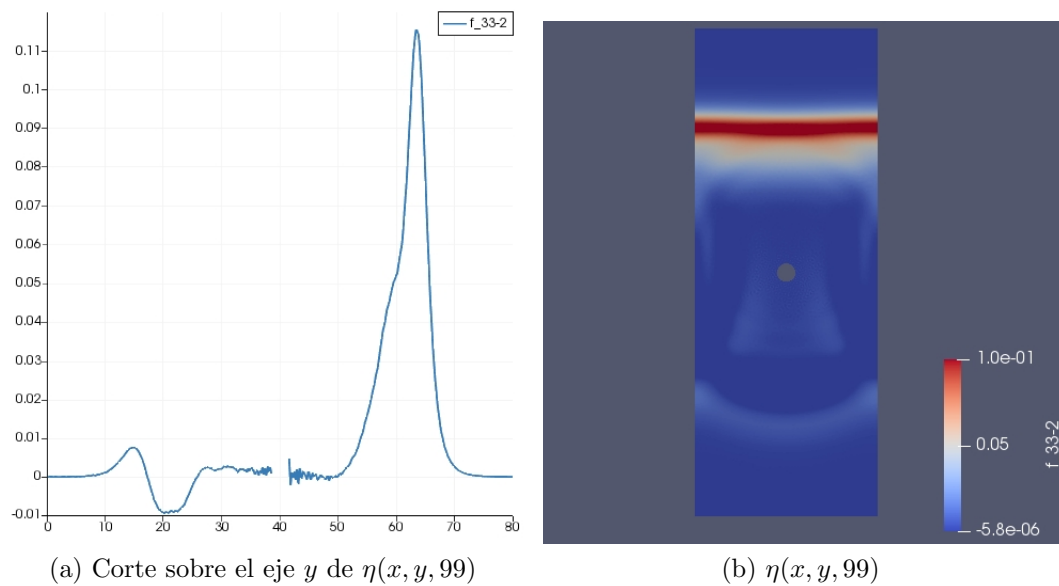


Figura 5.14: Superficie libre η en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

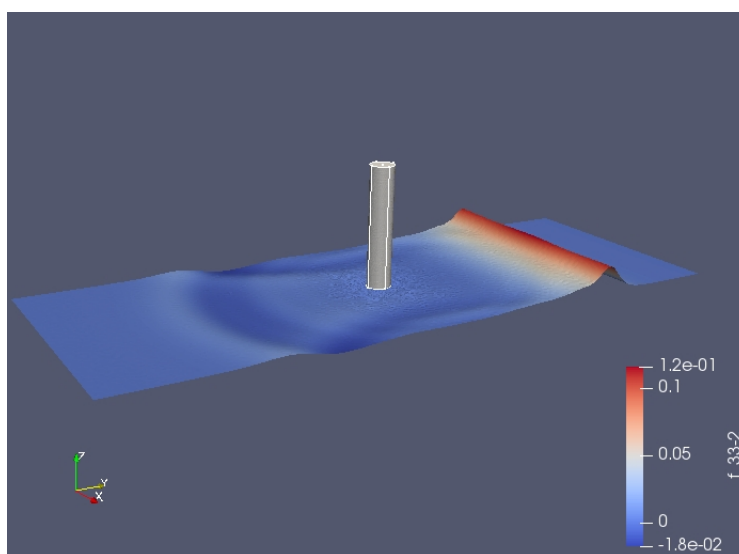


Figura 5.15: Vista tridimensional de la superficie libre $\eta(x, y, 99)$ en canal con fondo plano y un obstáculo cilíndrico, donde el impulso inicial es una onda solitaria

5.2. Orden de convergencia del método

En ésta sección, se desea verificar que el método de elemento finitos implementado para discretizar el espacio y el método de diferencias finitas con el que se discretiza el tiempo tienen orden dos; para ello, consideramos un dominio rectangular $\Omega = [-15, 15] \times [-30, 50]$, donde suponemos condiciones de frontera reflectivas normales a lo largo de las rectas $y = -30$ y $y = 50$, y condiciones de frontera Neumann homogéneas para η y v en las fronteras laterales $x = \pm 15$. Las condiciones iniciales que usamos son

$$\begin{aligned}\eta_0(x, y) &= A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3A}{c_s}} (y + 10) \right), \\ u_0(x, y) &= 0, \\ v_0(x, y) &= \eta_0(x, y) - \frac{1}{4} \eta_0^2(x, y),\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde $A = 0,2$ y $c_s = 1 + \frac{A}{2}$ [34]; para este experimento, tomamos la función $h(x, y, t)$ que describe la topografía del fondo como cero.

El error en la aproximación de la solución con elementos finitos está dada por

$$\|\eta - \eta_h\|_{L_2(\Omega)} = O(h^{k+1}),$$

donde k es el grado de la función de elementos finitos con la que vamos a aproximar [36], [37] ; por tanto, el error numérico con relación a distintas mallas esta dado por

$$\begin{aligned}\|e_{h_1}\|_{L_2(\Omega)} &\approx \|\eta_1 - \eta_2\|_{L_2(\Omega)} = Ch^\lambda, \\ \|e_{h_2}\|_{L_2(\Omega)} &\approx \|\eta_2 - \eta_3\|_{L_2(\Omega)} = C\left(\frac{h}{2}\right)^\lambda,\end{aligned}$$

luego la tasa de Convergencia λ está dada por

$$\lambda = \log_{10} \left(\frac{\|\eta_1 - \eta_2\|}{\|\eta_2 - \eta_3\|} \right) \frac{1}{\log_{10} 2},$$

h	$\ \eta_h - \eta_{\frac{h}{2}}\ _2$	$\log_{10} \frac{\ \eta_h - \eta_{\frac{h}{2}}\ _2}{\ \eta_{\frac{h}{2}} - \eta_{\frac{h}{4}}\ _2}$	λ
4	...	...	...
2	0.122385010182305	0.512468652487528	1.70238401444739
1	0.0376062107735721	0.599026314215177	1.98992234276822
0.5	0.00946745526319973	0.60029654033521	1.99414194260322
0.25	0.00237649399520187	0.601560158545432	1.99833959143697
0.125	0.000594807673634965	...	...

Tabla 5.1: Orden de convergencia para el FEM

El esquema de diferencias finitas Crank-Nicholson que se implementó para discretizar el tiempo es de orden dos [38]. La siguiente tabla muestra la aproximación numérica a la tasa de convergencia del esquema de diferencias finitas en el cual se verifica el orden del esquema.

Δt	$\ \eta_1 - \eta_2\ _2$	$\log_{10} \frac{\ \eta_1 - \eta_2\ _2}{\ \eta_2 - \eta_3\ _2}$	λ
1	...	...	...
0.5	0.0876669697643128	0.557494821634687	1.85195771074249
0.25	0.0242851714375552	0.589532669916595	1.95838513904989
0.125	0.00624897092124598	0.598827284884188	1.9892611816419
0.0625	0.00157391479876362	0.601245167103079	1.99729321251496
0.03125	0.000394217638241205	0.601855609401987	1.99932105793802
0.015625	0.0000986008008484188	0.602007583917141	1.99982590634961
0.0078125	0.0000246531749934383	...	...

Tabla 5.2: Orden de convergencia para el esquema de diferencias finitas

5.3. La resonancia Bragg

En onda acuáticas, la resonancia Bragg surge cuando la longitud de onda es el doble del período de la topografía. La reflexión de la onda en este caso es el doble del periodo de

la topografía [39]. Para ésta simulación, la topografía considerada está dada por

$$h(x, y, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sin(\frac{4}{10}(y - 100)) & \text{si } 100 \leq y \leq 179 \text{ y } -15 \leq x \leq 15, \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad (5.3)$$

En un dominio rectangular $\Omega = [-15, 15] \times [-400, 600]$, suponemos condiciones tipo Dirichlet homogéneas para u, v , y Neumann homogéneas para η en el dominio Ω (ver Figura 5.16). Las condiciones iniciales que usamos son

$$\begin{aligned} \eta_0(x, y) &= \frac{1}{100} e^{\frac{-y^2}{60}}, \\ u_0(x, y) &= 0, \\ v_0(x, y) &= \frac{1}{100} e^{\frac{-y^2}{60}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para este experimento, se usan elementos lineales afín y el esquema Crank-Nicholson para la discretización del espacio y tiempo, respectivamente; la cantidad de elementos triangulares que se usaron fue de 120.000 y el número de nodos es de 61.248, $\Delta t = 1$ y $h = 1, 1$.

La forma lineal y dispersiva del modelo tipo Boussinesq dos dimensional con topografía variable puede ser controlada con la geometría del problema; en el capítulo 2, se definió $\alpha = \frac{a_0}{h_0}$ y $\beta = \frac{h_0^2}{\lambda_0^2}$. Con $a_0 = 0,01$, $h_0 = 1$ y $\lambda_0 = 30$, tendremos que $\alpha = 0,01$ y $\beta = 0,00111111$, aunque en el modelo Bussinesq dos dimensional con topografía variable, que estamos interesados en este trabajo, los parametros α y β no están presentes; tomar la amplitud, longitud de la onda y la profundidad con los valores dados anteriormente permiten controlar la linealidad y dispersión del modelo.

En éste experimento, tenemos un periodo de $15,7 = \frac{1}{Frecuencia} = \frac{2\pi}{0,4}$ para la topografía y una longitud de onda de 30 para la onda Gaussiana que sirve de impulso inicial, por tanto la onda que se refleja debe tener un periodo de 30; en la Figura 5.23, podemos observar la onda Gaussiana en el tiempo $t = 499$ junto a la forma de la topografía. En promedio, el periodo en la onda reflejada para los cinco primeros máximos es de 32.7.

Se observa un error en el periodo esperado de 0.27. En la Figuras 5.24-5.31, podemos observar en diferentes valores de t la resonancia Bragg (color azul) junto a la misma onda gaussiana que usamos para la resonancia Bragg pero con el fondo plano (color rojo); se puede observar el momento en que la onda pasa por la topografía variable y la dispersión en ambas ondas; de esta forma, podemos distinguir cuales ondas reflejadas son efecto de la topografía. En las Figuras 5.17-5.21, podemos notar el avance de la onda gaussiana por el canal en distintos valores del tiempo, se observa la dispersión de la onda propia del modelo y la resonancia Bragg.

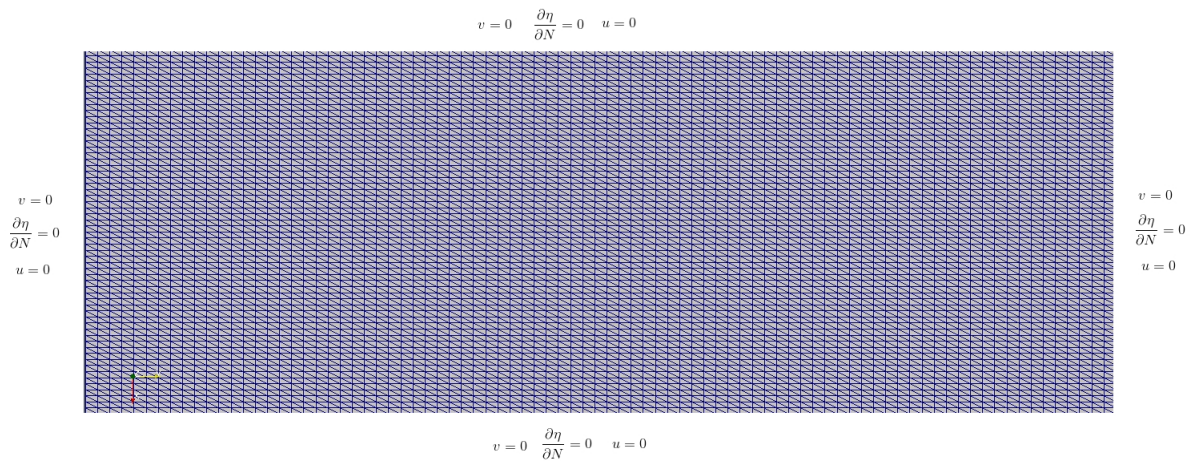
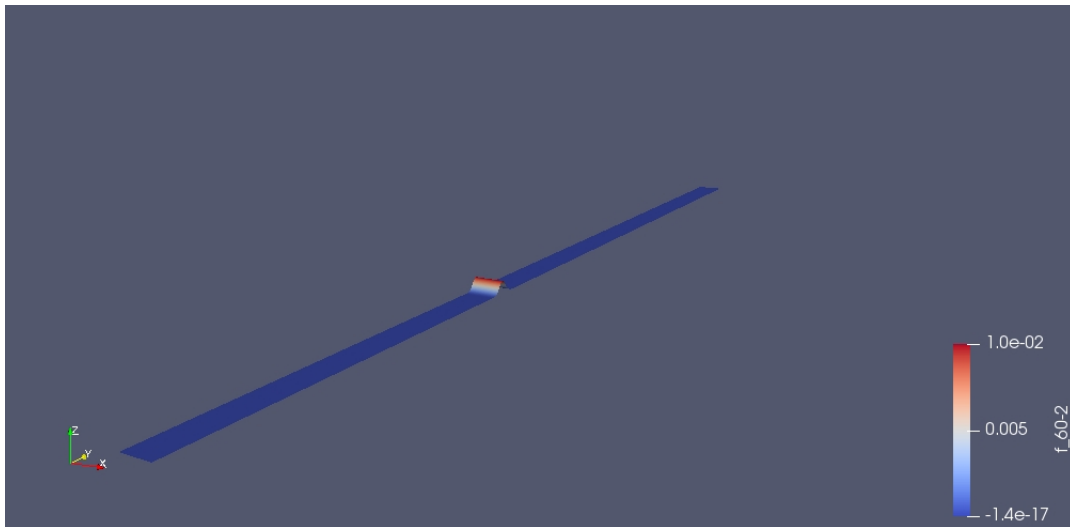
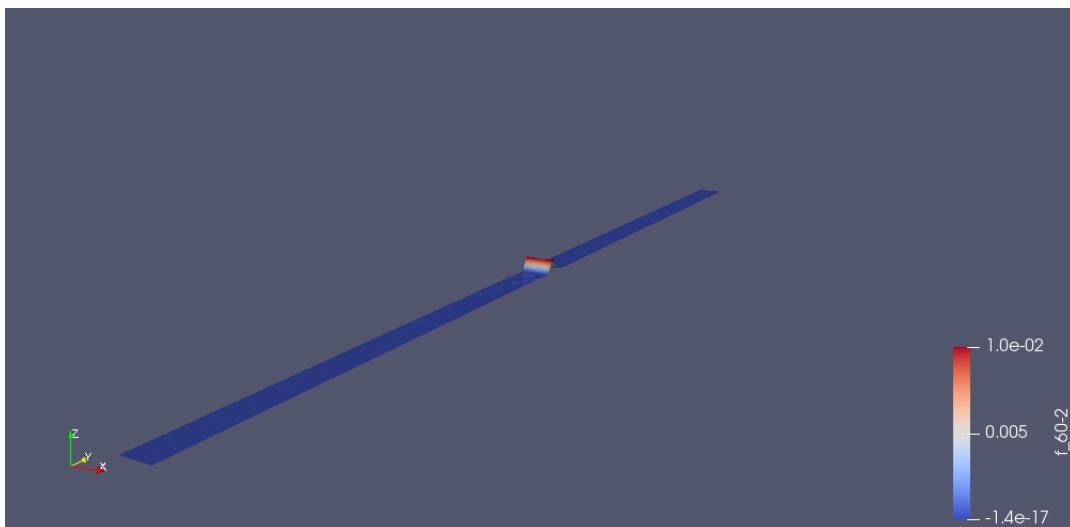
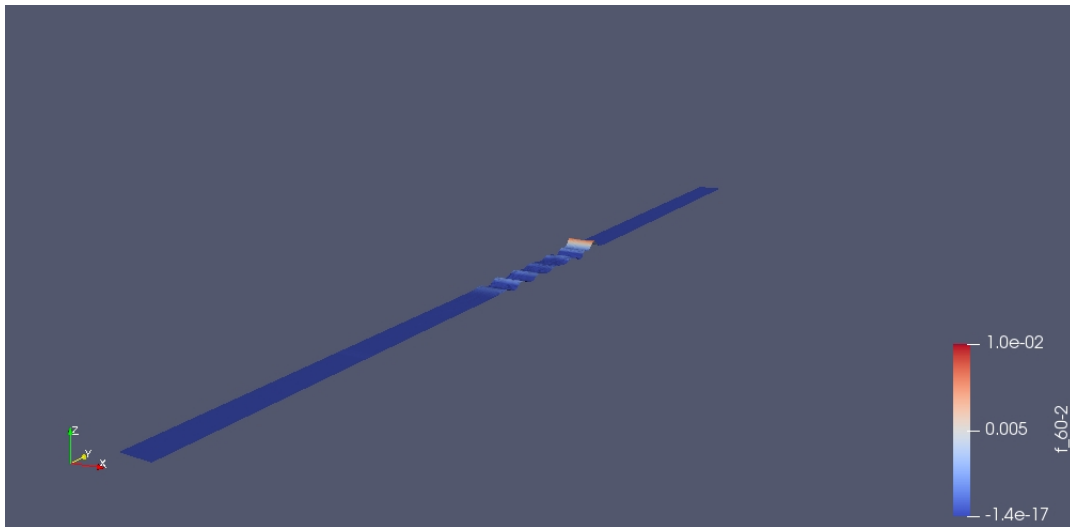
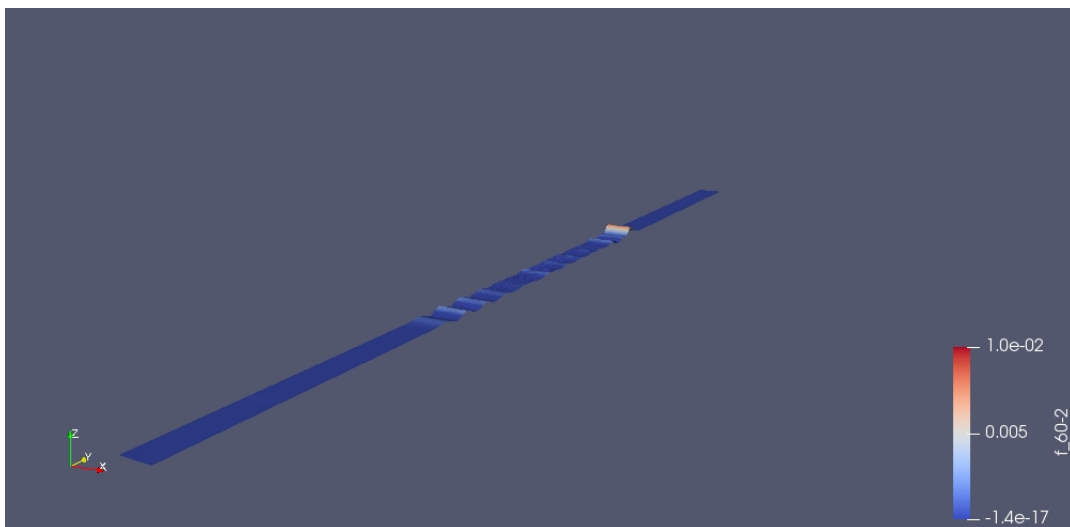
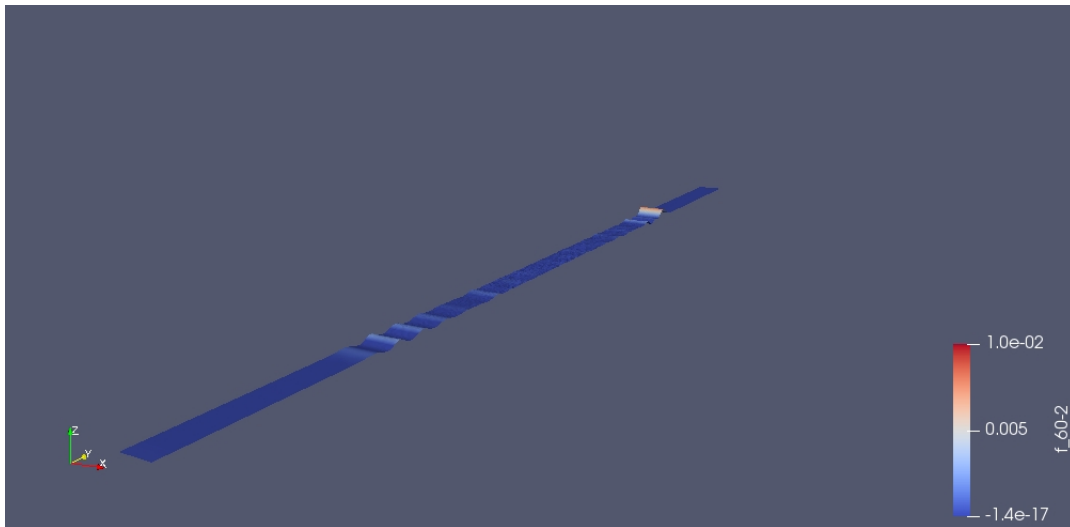
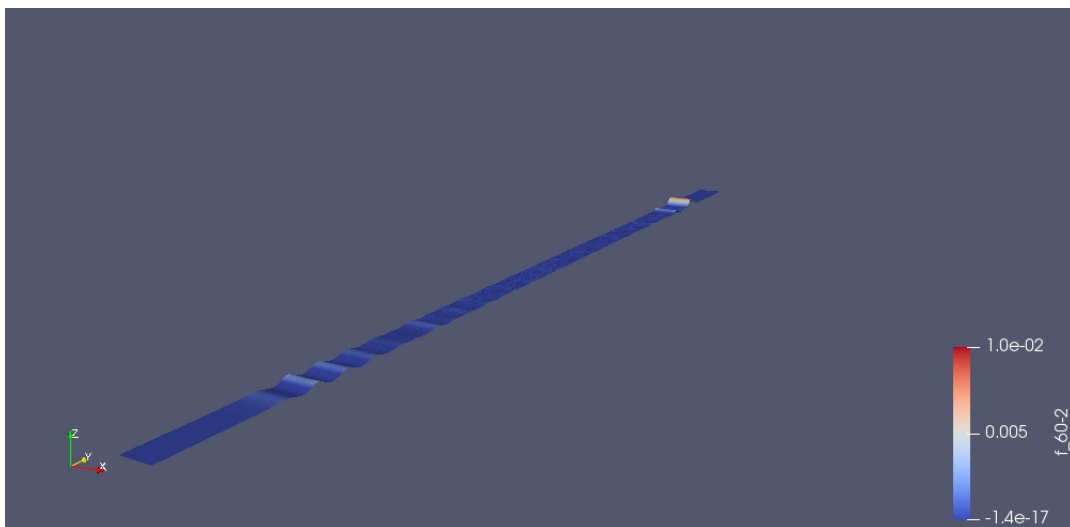
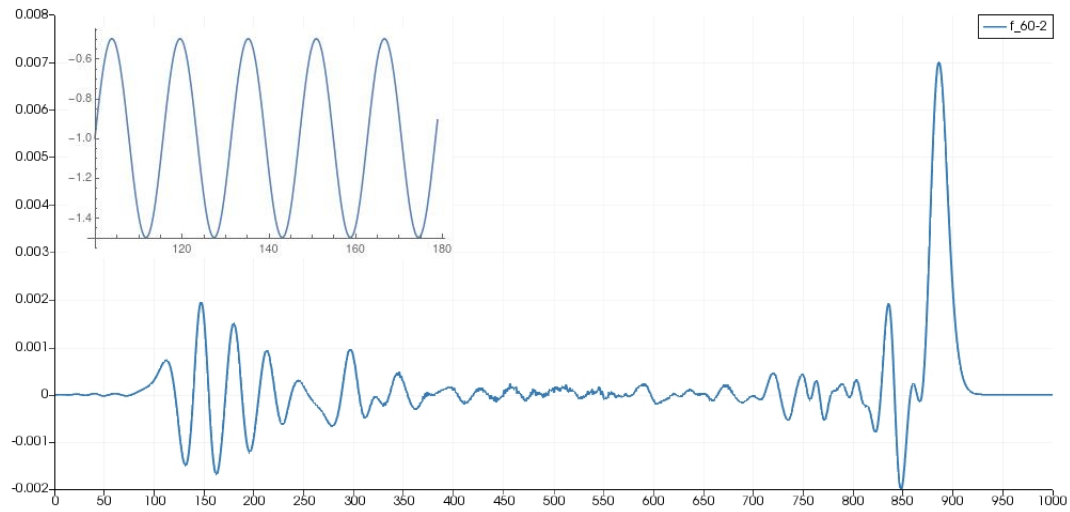
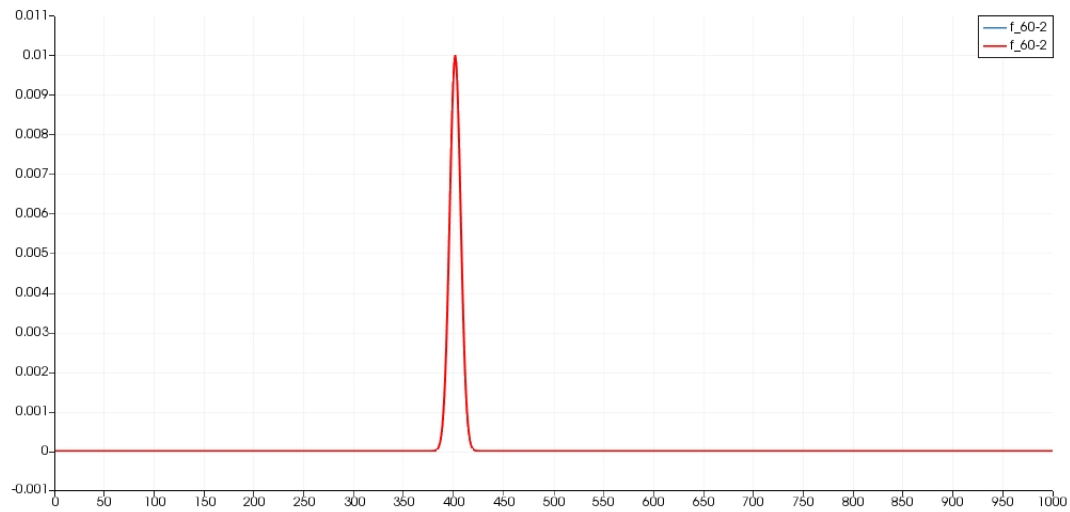


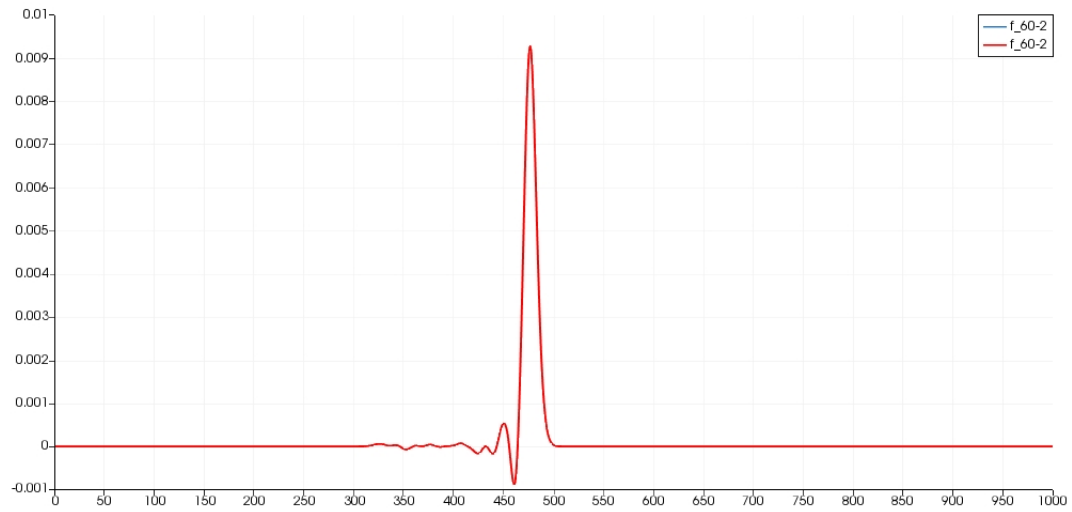
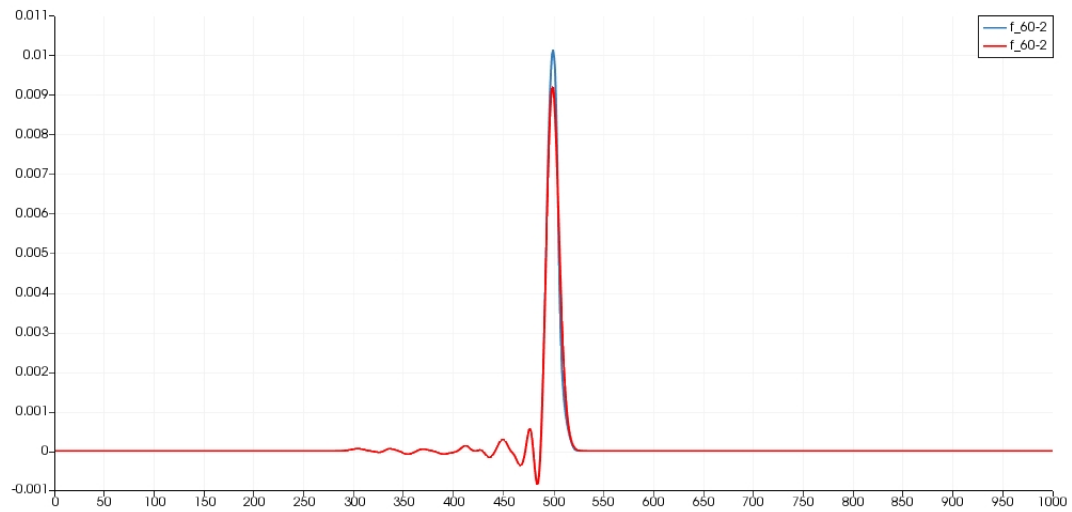
Figura 5.16: Condiciones de frontera para el dominio especificado

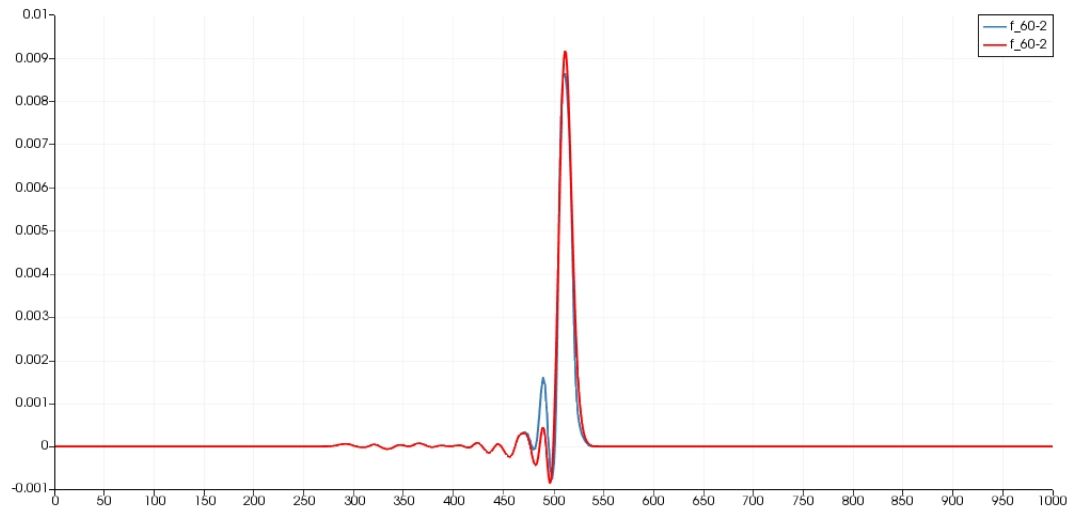
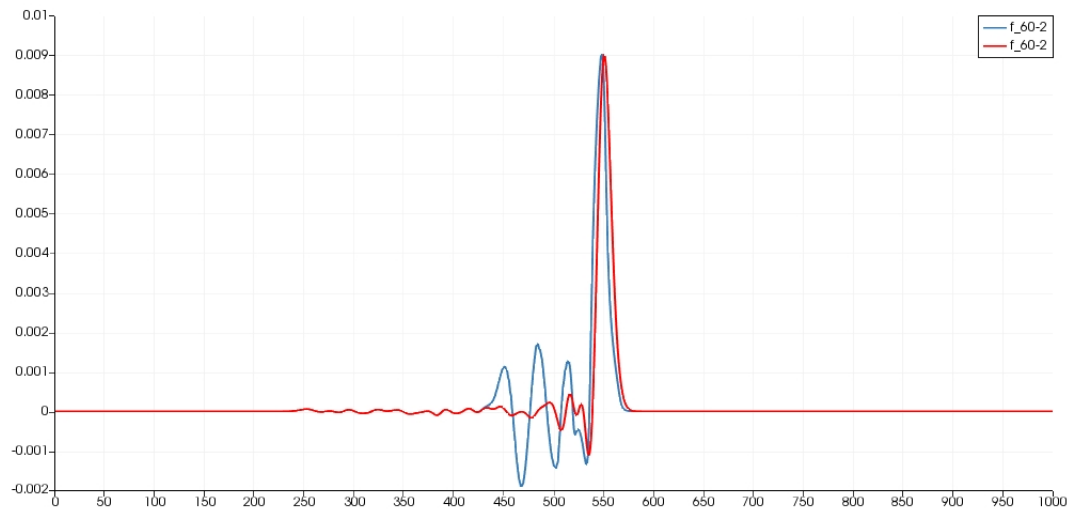
Figura 5.17: La resonancia Bragg en $t=0$ Figura 5.18: La resonancia Bragg en $t=100$

Figura 5.19: La resonancia Bragg en $t=200$ Figura 5.20: La resonancia Bragg en $t=300$

Figura 5.21: La resonancia Bragg en $t=400$ Figura 5.22: La resonancia Bragg en $t=499$

Figura 5.23: La resonancia Bragg y topografía en $t=499$ Figura 5.24: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=0$

Figura 5.25: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=77$ Figura 5.26: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=100$

Figura 5.27: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=133$ Figura 5.28: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=153$

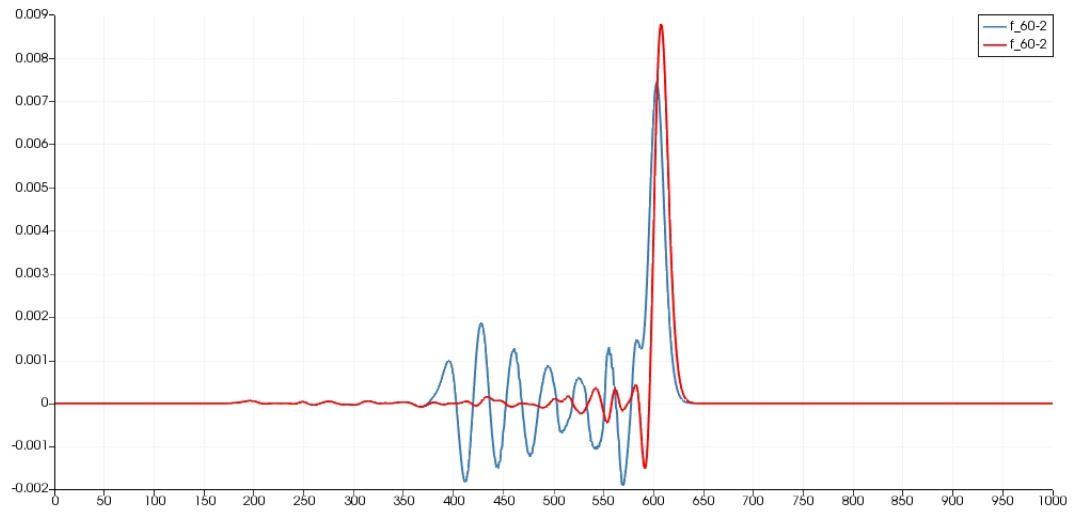


Figura 5.29: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=211$

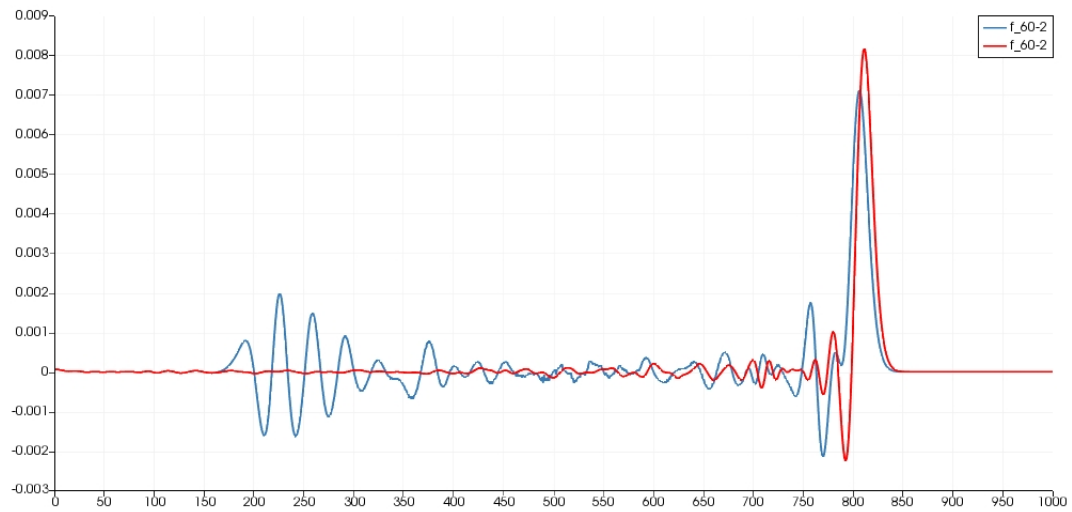


Figura 5.30: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=418$

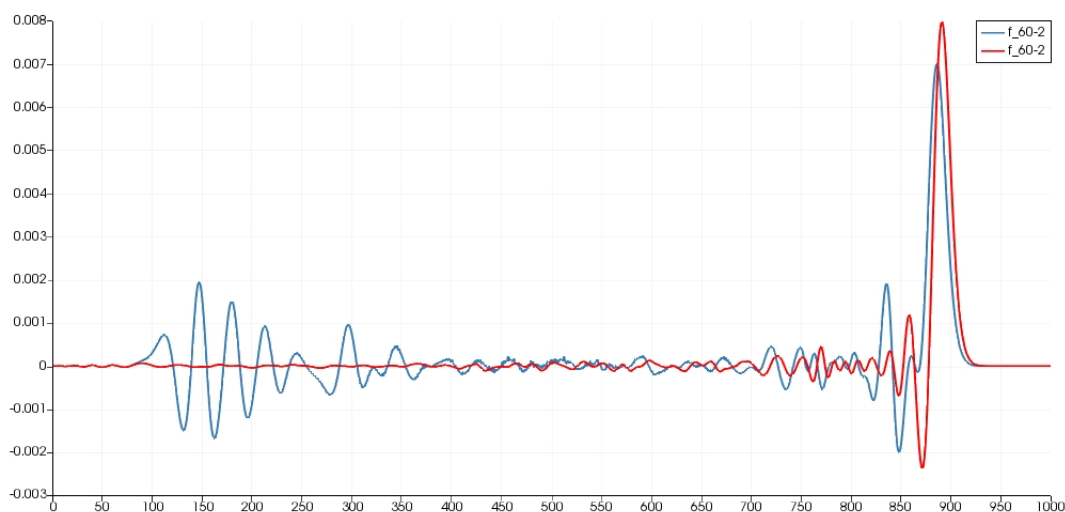


Figura 5.31: La resonancia Bragg y onda gaussiana con fondo plano en $t=499$

5.4. Implementación numérica

La implementación numérica se realizó en Python usando las rutinas del paquete FEniCS Project, que es un conjunto de librerías de C++ y Python dirigido a la solución numérica de las ecuaciones en derivadas parciales utilizando elementos finitos. El objetivo principal de FEniCS Project es permitir el rápido desarrollo de modernos códigos de elementos finitos, utilizando entre otros aspectos las mallas de adaptación y una amplia variedad de clases de herramientas de uso frecuente en el programa de elementos finitos. Escribir este tipo de programas es una tarea no trivial, y programas exitosos tienden a ser muy grandes y complejos. Se cree que esto se hace mejor con una biblioteca de programas que se encarga de los detalles del manejo de la malla y el refinamiento, la manipulación de los grados de libertad, de las mallas de entrada y salida de los resultados en formatos gráficos, etc. Para éste trabajo, se usa la versión 2018:1; para más información sobre FEniCS Project consulte la presente dirección <http://www.fenicsproject.org>

En la primera parte del código, importamos algunas galerías necesaria; la primera línea habilita la función de imprimir de Python 3 en Python 2, la segunda línea es la más importante: llama de la biblioteca de FEniCS las clases para mallas, el espacio de funcio-

nes, funciones, etc. La tercera línea proporciona acceso a las funciones matemáticas y en la cuarta línea importamos el paquete de cómputo científico de Python con el comando `np`.

```
from __future__ import print_function
from fenics import *
from math import *
import numpy as np
```

Definimos ahora el tiempo total de la simulación, número de pasos y el tamaño de paso del tiempo. También definimos el dominio, y la cantidad de elementos para la malla.

```
T = 500.0
num_steps = 500
dt = T / num_steps
nx = 60
ny = 1000
mesh = RectangleMesh(Point(-15, -400), Point(15, 600), nx, ny)
```

Se define los elementos finitos que vamos usar para aproximar las soluciones del modelo, el espacio de las funciones de prueba V_h .

```
P1 = FiniteElement('P', triangle, 1)
element = MixedElement([P1, P1, P1])
V = FunctionSpace(mesh, element)
v_1, v_2, v_3 = TestFunctions(V)
W = FunctionSpace(mesh, P1)
```

Marcamos las fronteras del dominio.

```
inflow    = 'near(x[1], -400)'
outflow   = 'near(x[1], 600)'
wall1     = 'near(x[0], -15)'
wall2     = 'near(x[0], 15)'
```

Definimos las condiciones de frontera tipo Dirichlet para u .

```
bcu_inflow = DirichletBC(V.sub(0), Constant(0), inflow)
bcu_wall1 = DirichletBC(V.sub(0), Constant(0), wall1)
bcu_wall2 = DirichletBC(V.sub(0), Constant(0), wall2)
bcu_outflow = DirichletBC(V.sub(0), Constant(0), outflow)
```

Definimos las condiciones de frontera tipo Dirichlet para v .

```
bcb_inflow = DirichletBC(V.sub(1), Constant(0), inflow)
bcb_wall1 = DirichletBC(V.sub(1), Constant(0), wall1)
bcb_wall2 = DirichletBC(V.sub(1), Constant(0), wall2)
bcb_outflow = DirichletBC(V.sub(1), Constant(0), outflow)
```

```
bcs = [bcu_inflow, bcu_outflow, bcu_wall1, bcu_wall2]
bcs = [bcb_inflow, bcb_outflow, bcb_wall1, bcb_wall2]
bcs = bcs+bcb
```

En esta parte del código, se define la condición inicial del problema

```
u_0 = Expression(( '0.0', '0.1*exp(-(x[1]*x[1])/1500)',
                    '0.1*exp(-(x[1]*x[1])/1500)' ), degree=1)
```

Ahora se define la función hE que describe la topografía variable del modelo al igual que su derivada de primer y segundo orden respecto al tiempo. La ultima linea define la presión, la cual también es conocida.

```
hE = Expression( '(x[1]<=179 && x[1]>=100 ?
                  -0.5*sin(0.4*(x[1]-100)):0.0)', degree=1, t=0)
hE_1 = Expression( '(x[1]<=179 && x[1]>=100 ?
                  -0.5*sin(0.4*(x[1]-100)):0.0)', degree=1, t=0)
hE_t = Expression( '0.0', degree=1, t=0)
hE_t_1 = Expression( '0.0', degree=1, t=0)
hE_t_t = Expression( '0.0', degree=1, t=0)
hE_t_t_1 = Expression( '0.0', degree=1, t=0)
p_0E = Expression( '0.0', degree=1)
```

Una vez se han definido las funciones hE , la presión y la condición inicial, se procede a interpolar éstas funciones en el espacio de dimensión finita.

```
h_t_t_n = interpolate(hE_t_t, W)
h_t_t_n_1 = interpolate(hE_t_t_1, W)
h_n_t = interpolate(hE_t, W)
h_n_t_1 = interpolate(hE_t_1, W)
h_n = interpolate(hE, W)
h_n_1 = interpolate(hE_1, W)
p_0n = interpolate(p_0E, W)
u_n = interpolate(u_0, V)
```

Se define el vector donde se van a guardar las soluciones aproximadas que son solución del problema variacional semidiscreto.

```
u = Function(V)
u_1, u_2, u_3 = split(u)
u_n1, u_n2, u_n3 = split(u_n)
```

Definimos algunas constantes que vamos a usar al implementar la formulación variacional del problema semidiscreto

```
k = Constant(dt)
KK = Constant((1.0+sqrt(2.0/3.0)))
tt = Constant(1./2.)
```

Esta parte del código implementa la formulación variacional del problema semidiscreto.

```
F = ((u_1 - u_n1)/k)*v_1*dx + ((1./6.)*(1/k))* dot(grad(u_1-u_n1),
grad(v_1))*dx-tt*u_3*grad(v_1)[0]*dx-(1-tt)*u_n3*grad(v_1)[0]*dx
-(tt/2.)*(u_1**2+u_2**2)*grad(v_1)[0]*dx-((1-tt)/2.)*(u_n1**2+
u_n2**2)*grad(v_1)[0]*dx -(tt*p_0n*grad(v_1)[0])*dx-((1-tt)*p_0n*
grad(v_1)[0])*dx+tt*KK*h_t_t_n*grad(v_1)[0]*dx+(1-tt)*KK*h_t_t_n_1*
grad(v_1)[0]*dx\
+((u_2 - u_n2)/k)*v_2*dx + ((1./6.)*(1/k))* dot(grad(u_2-u_n2),
```

```

grad(v_2))*dx-tt*u_3*grad(v_2)[1]*dx-(1-tt)*u_n3*grad(v_2)[1]*dx
-(tt/2.)*(u_1**2+ u_2**2)*grad(v_2)[1]*dx-((1-tt)/2.)*(u_n1**2+
u_n2**2)*grad(v_2)[1]*dx -(tt*p_0n*grad(v_2)[1])*dx-((1-tt)*p_0n
*grad(v_2)[1])*dx+tt*KK*h_t_t_n*grad(v_2)[1]*dx+(1-tt)*KK*h_t_t_n*
grad(v_2)[1]*dx\
+((u_3 - u_n3)/k)*v_3*dx +((1./6.)*(1/k))* dot(grad(u_3-u_n3),
grad(v_3))*dx-tt*u_1*grad(v_3)[0]*dx-(1-tt)*u_n1*grad(v_3)[0]*dx
-tt*u_2*grad(v_3)[1]*dx -(1-tt)*u_n2*grad(v_3)[1]*dx-(tt*u_3*u_1*
grad(v_3)[0])*dx-((1-tt)*u_n3*u_n1*grad(v_3)[0])*dx-(tt*u_3*u_2*
grad(v_3)[1])*dx-((1-tt)*u_n3*u_n2*grad(v_3)[1])*dx-(tt*h_n*u_1*
grad(v_3)[0])*dx-((1-tt)*h_n_1*u_n1*grad(v_3)[0])*dx-(tt*h_n*u_2*
grad(v_3)[1])*dx-((1-tt)*h_n_1*u_n2*grad(v_3)[1])*dx+(tt*h_n_t*
v_3*dx)+((1-tt)*h_n_t_1*v_3*dx)

```

Las soluciones se guardan en formato VTK para su visualización.

```

vtkfile_u_1 = File('Boussinesq1/u_1.pvd')
vtkfile_u_2 = File('Boussinesq2/u_2.pvd')
vtkfile_u_3 = File('Boussinesq3/u_3.pvd')

```

Iniciamos el tiempo en $t = 0$ y corremos un bucle sobre n para el número de pasos que se van a realizar, el cual tiene como objetivo resolver en cada paso del tiempo la formulación variacional del problema semidiscreto. El problema variacional F con las condiciones de frontera bcs es no lineal y su solución con el método de Newton se almacena en u

```

t = 0
for n in range(num_steps):
    t += dt
    h_t_t_n.t = t
    h_n_t.t = t
    h_n.t = t
    h_n_1.t = t-dt

```

```
J = derivative(F, u)
problem = NonlinearVariationalProblem(F, u, bcs, J)
solver = NonlinearVariationalSolver(problem)
solver.solve()
```

Una vez tenemos la solución u en cada paso del tiempo, sacamos las componentes `_u_1`, `_u_2`, `_u_3`, que representan las aproximaciones de u , v , y η de la formulación variacional para el problema semidiscreto y las almacenamos en los correspondientes archivos VTK. Por ultimo, asignamos la aproximación u de la formulación variacional del problema semidiscreto a `u_n`, el cual tenia anteriormente asignada la condición inicial del modelo.

```
_u_1, _u_2, _u_3 = u.split()
vtkfile_u_1 << (_u_1, t)
vtkfile_u_2 << (_u_2, t)
vtkfile_u_3 << (_u_3, t)
u_n.assign(u)
```

5.5. Onda Gaussiana

En éste experimento, consideramos un dominio rectangular $\Omega = [-40, 40] \times [-40, 40]$ con condiciones de frontera $\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$ y $u = v = 0$ en $\partial\Omega$ (ver Figura 5.32). Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned}\eta_0(x, y) &= 3e^{-(x^2+y^2)/5}, \\ u_0(x, y) &= 0, \\ v_0(x, y) &= 0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

El número de elementos que usamos fue de 51.200 y la cantidad de nodos fue de 26.271. Las funciones de aproximación para el método de elementos finitos son lineales afín y los elementos que usamos son triángulos; la discretización temporal se hizo usando diferencias finitas: el método de Crank-Nicholson. Las Figuras 5.33a-5.44a muestran la superficie libre η , mientras que las Figuras 5.33b-5.44b muestran un corte sobre el eje y de la superficie libre η . Dadas las condiciones de frontera, podemos observar como la superficie libre rebota en las fronteras de Ω , (ver Figuras 5.45-5.56)

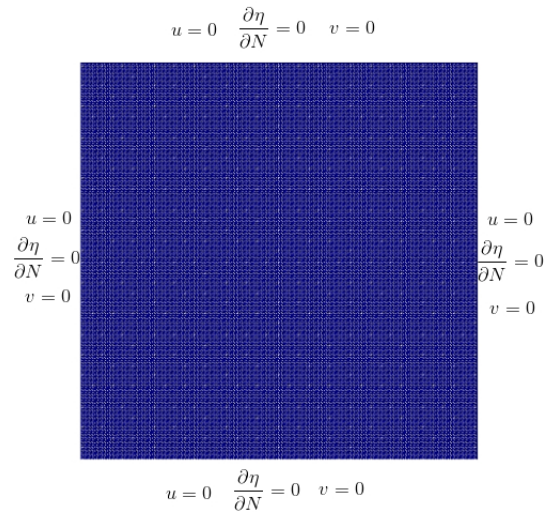


Figura 5.32: Condiciones de frontera para el dominio especificado

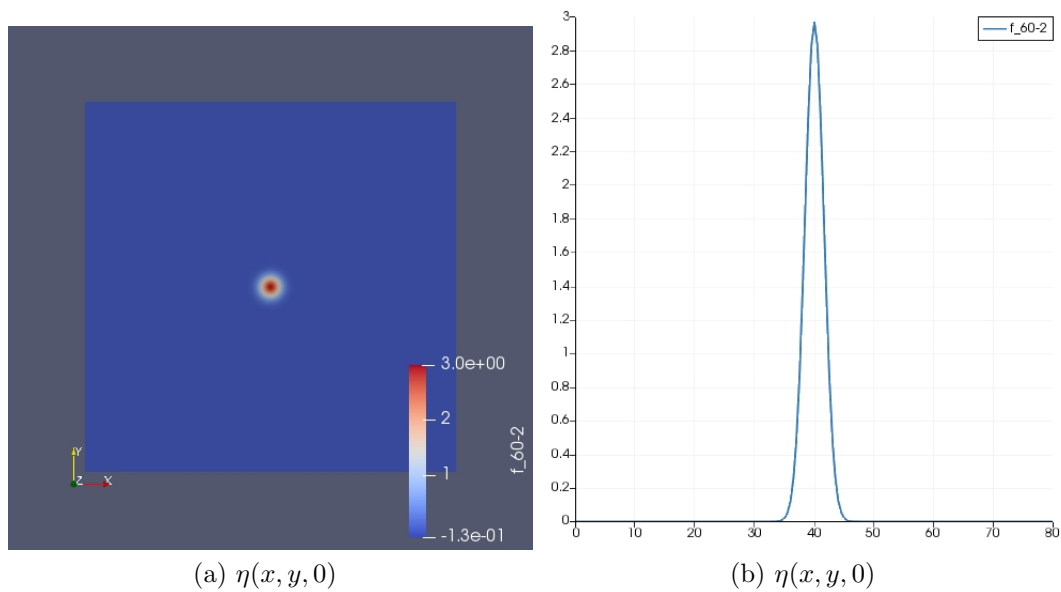


Figura 5.33: Superficie libre η , en $t = 0$, con condición inicial en η de onda gaussiana

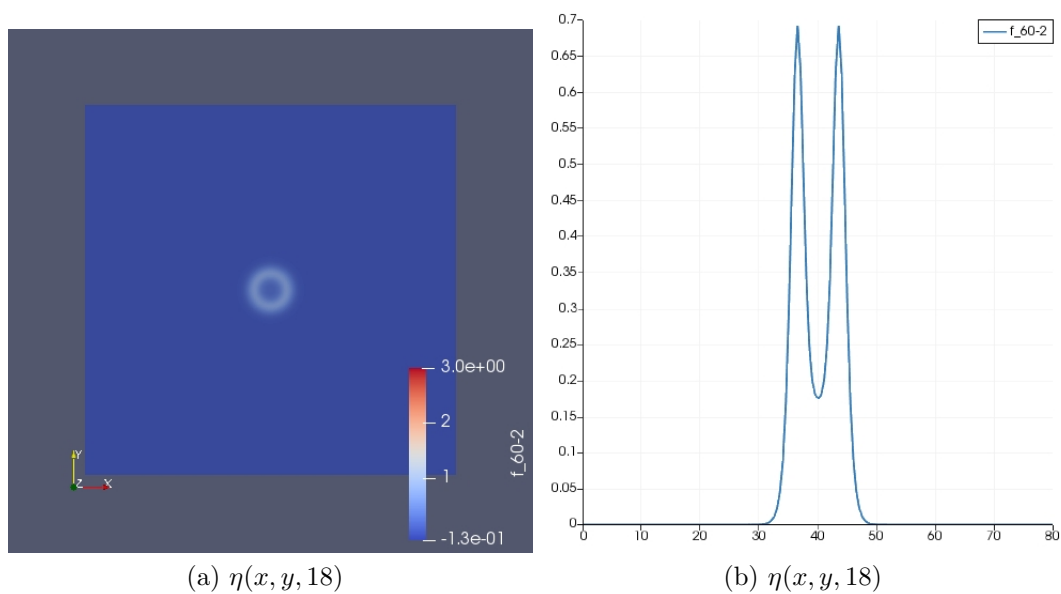


Figura 5.34: Superficie libre η , en $t = 18$, con condición inicial en η de onda gaussiana

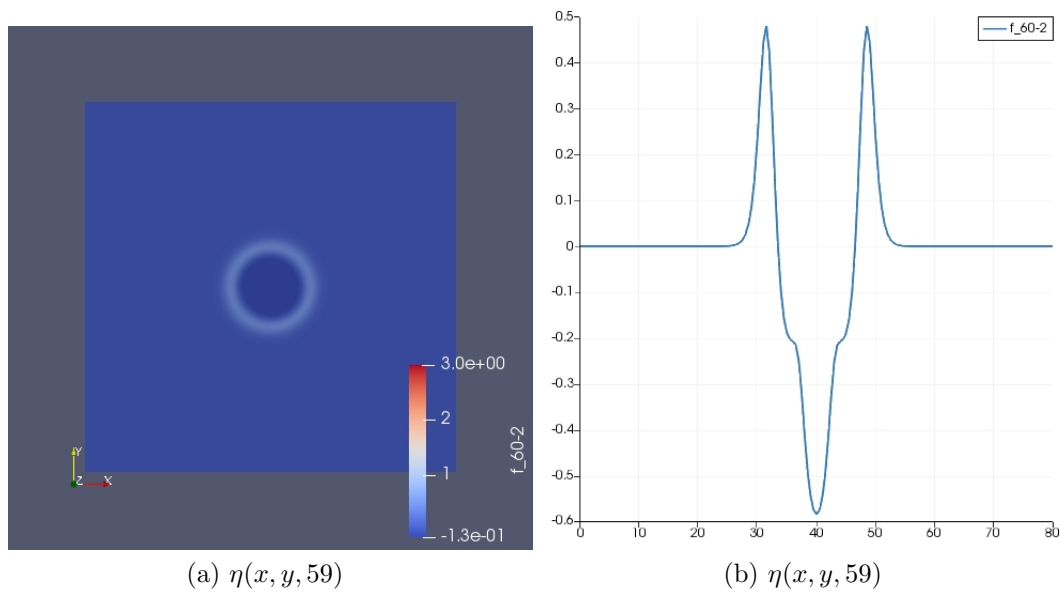


Figura 5.35: Superficie libre η , en $t = 59$, con condición inicial en η de onda gaussiana

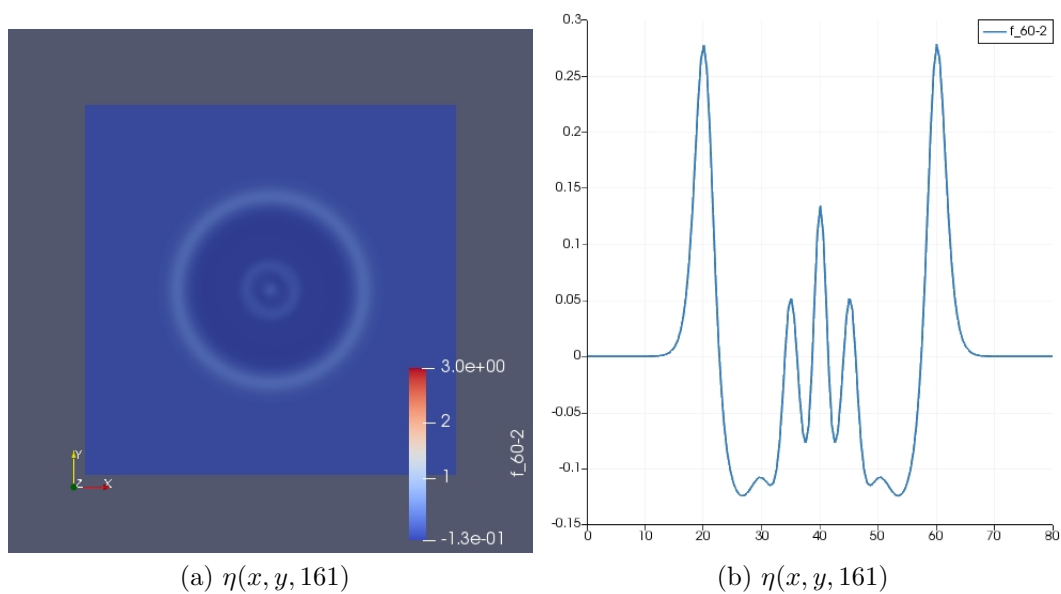


Figura 5.36: Superficie libre η , en $t = 161$, con condición inicial en η de onda gaussiana

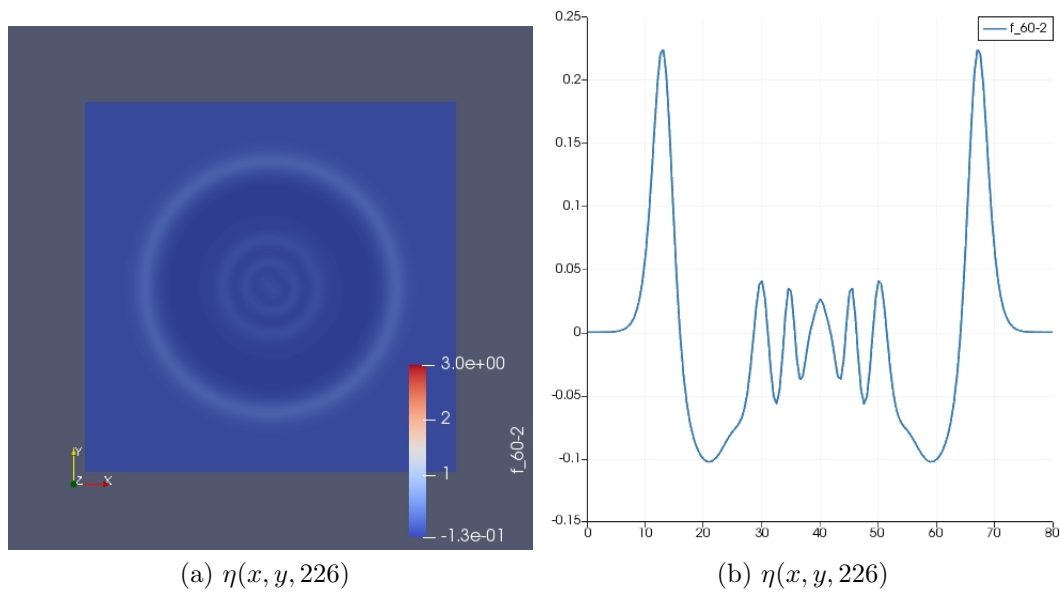


Figura 5.37: Superficie libre η , en $t = 226$, con condición inicial en η de onda gaussiana

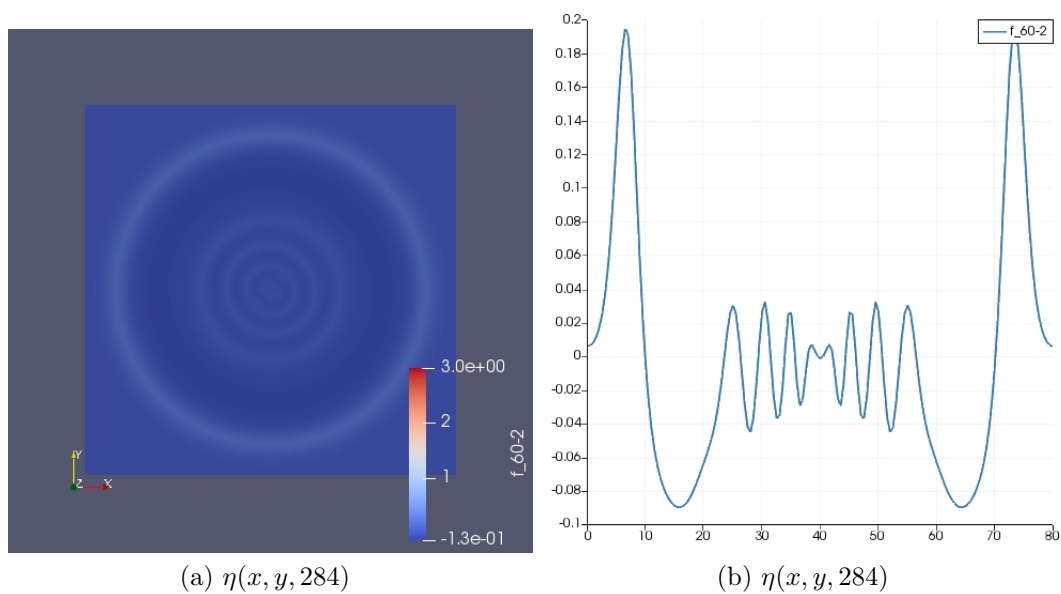


Figura 5.38: Superficie libre η , en $t = 284$, con condición inicial en η de onda gaussiana

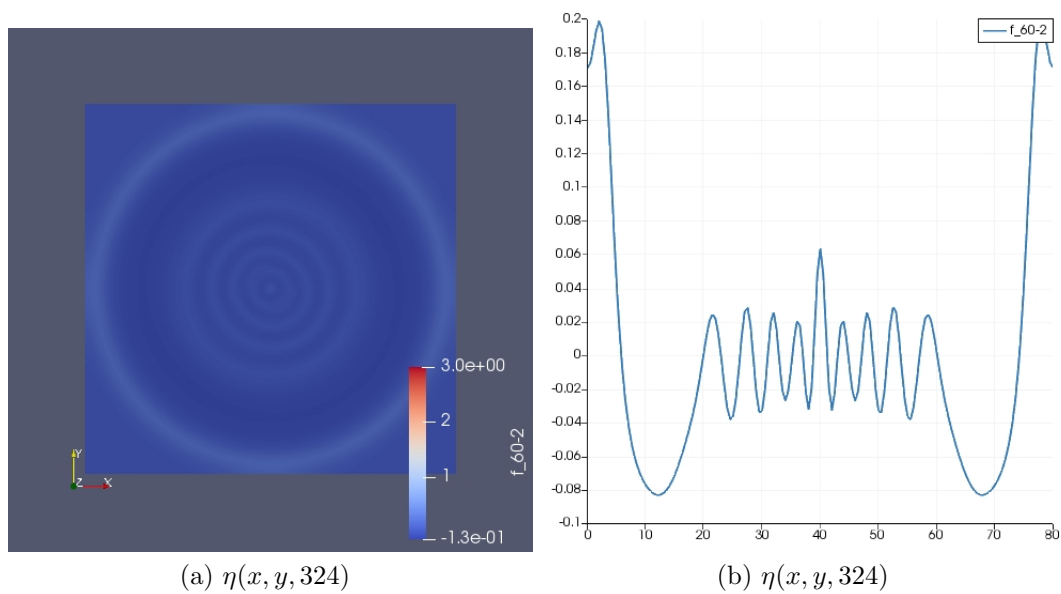


Figura 5.39: Superficie libre η , en $t = 324$, con condición inicial en η de onda gaussiana

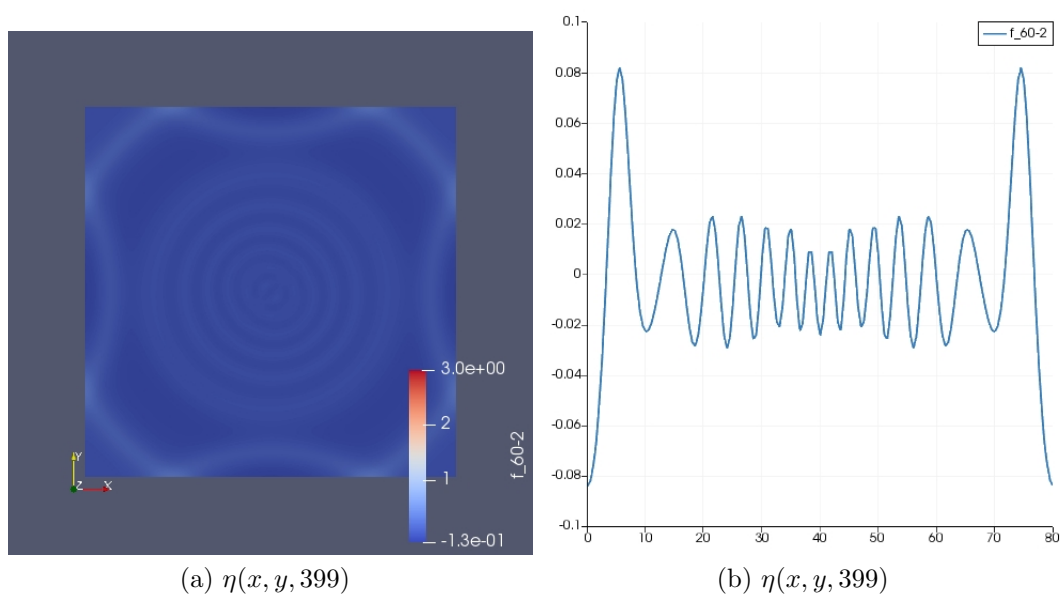


Figura 5.40: Superficie libre η , en $t = 399$, con condición inicial en η de onda gaussiana

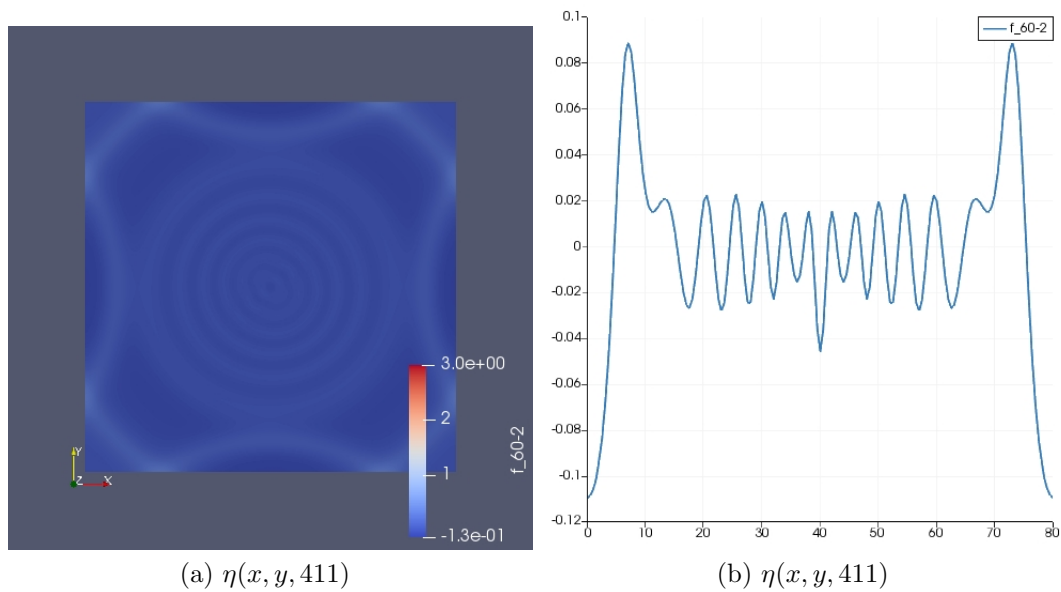


Figura 5.41: Superficie libre η , en $t = 411$, con condición inicial en η de onda gaussiana

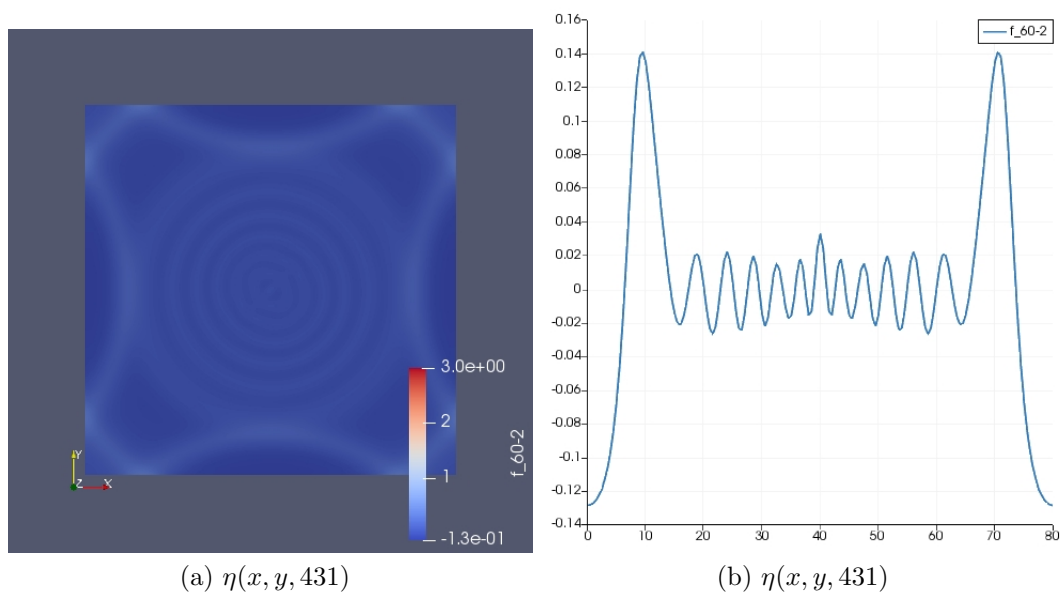


Figura 5.42: Superficie libre η , en $t = 431$, con condición inicial en η de onda gaussiana

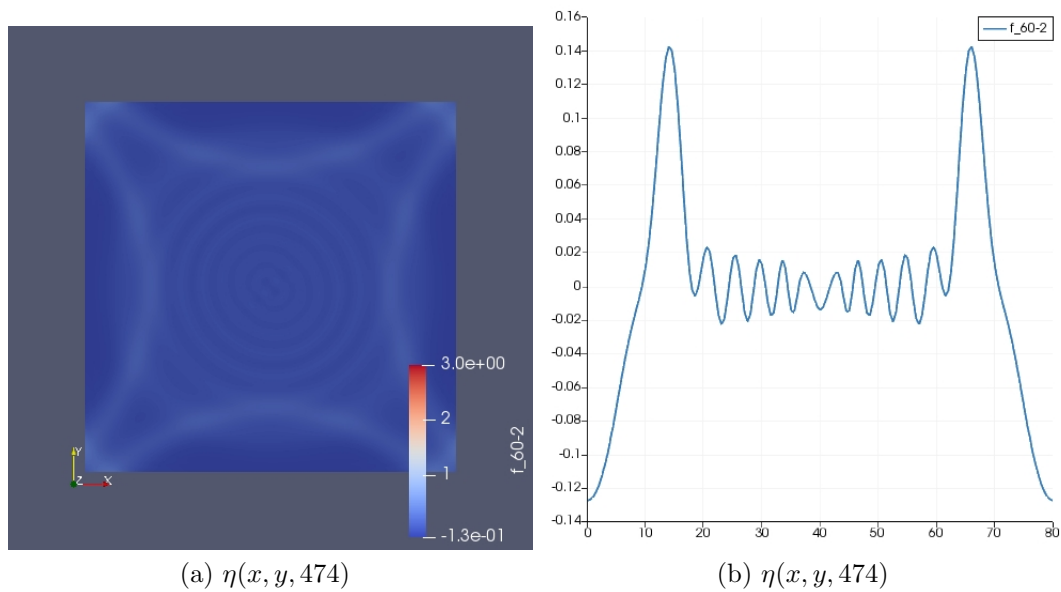


Figura 5.43: Superficie libre η , en $t = 474$, con condición inicial en η de onda gaussiana

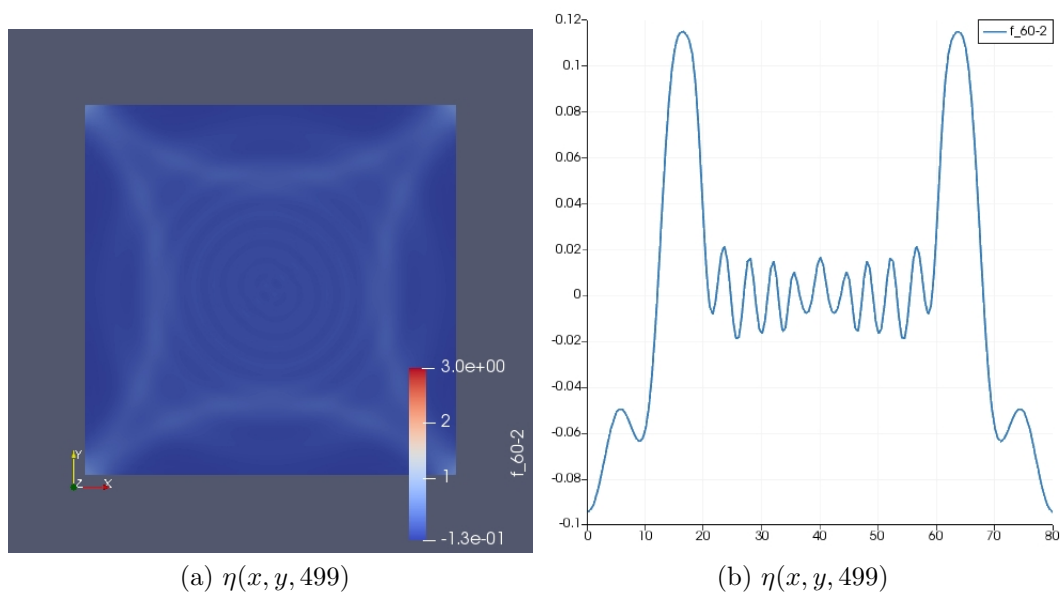
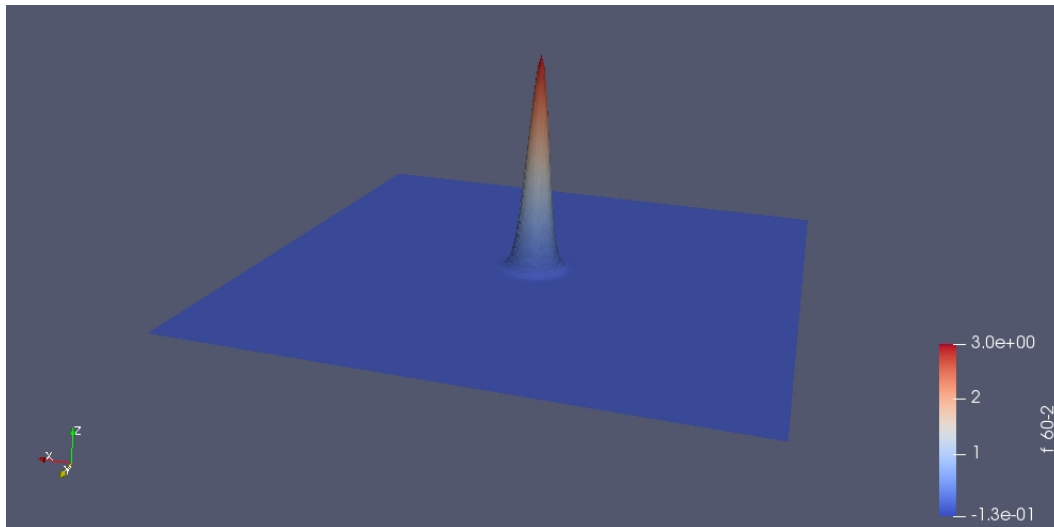
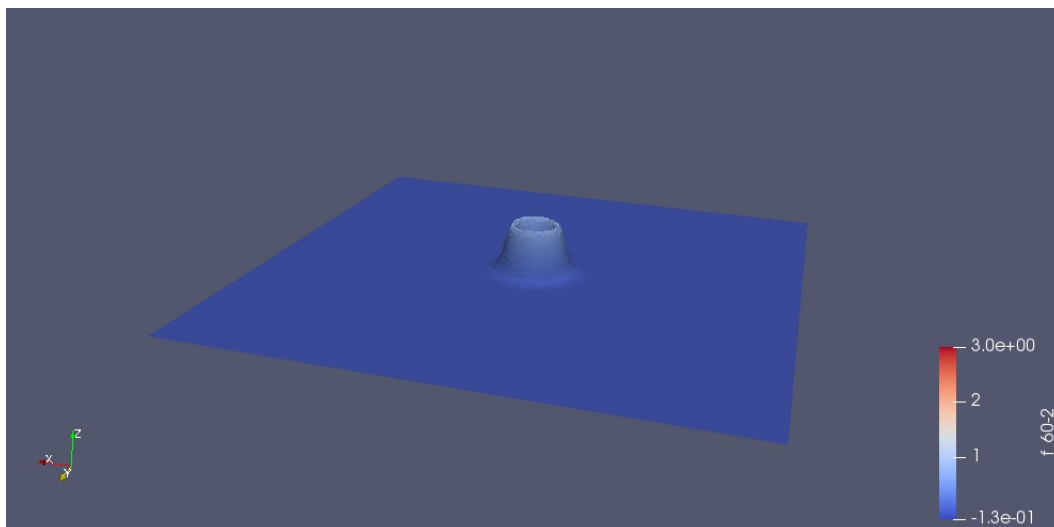
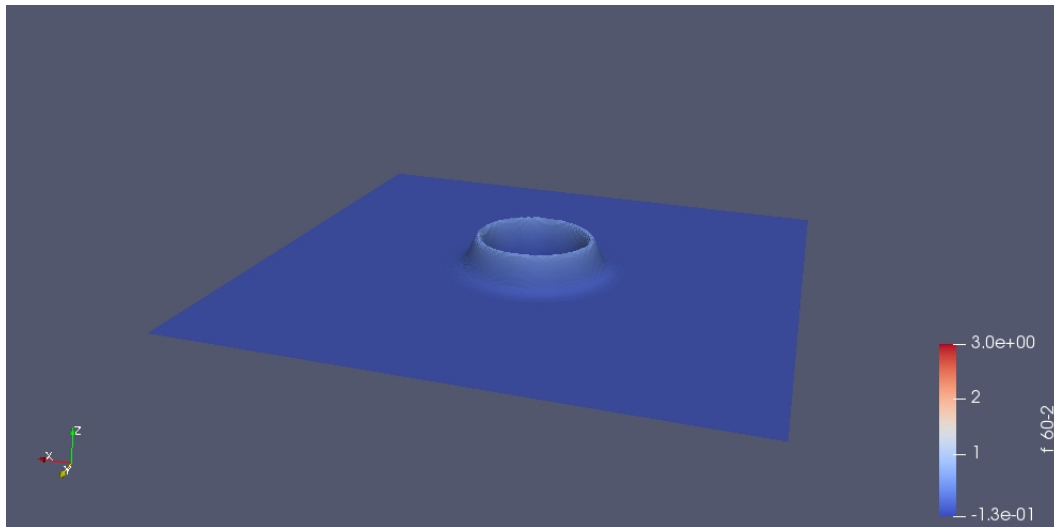
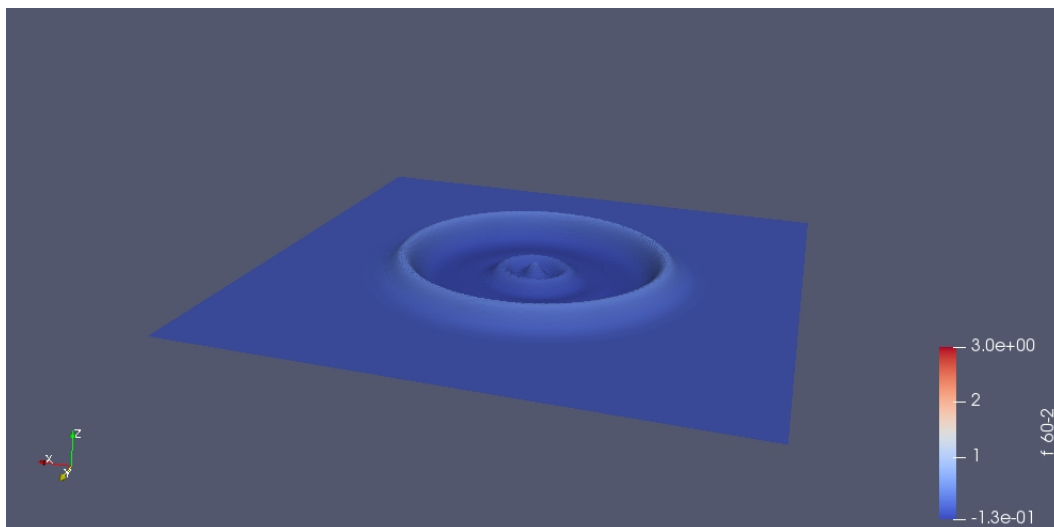
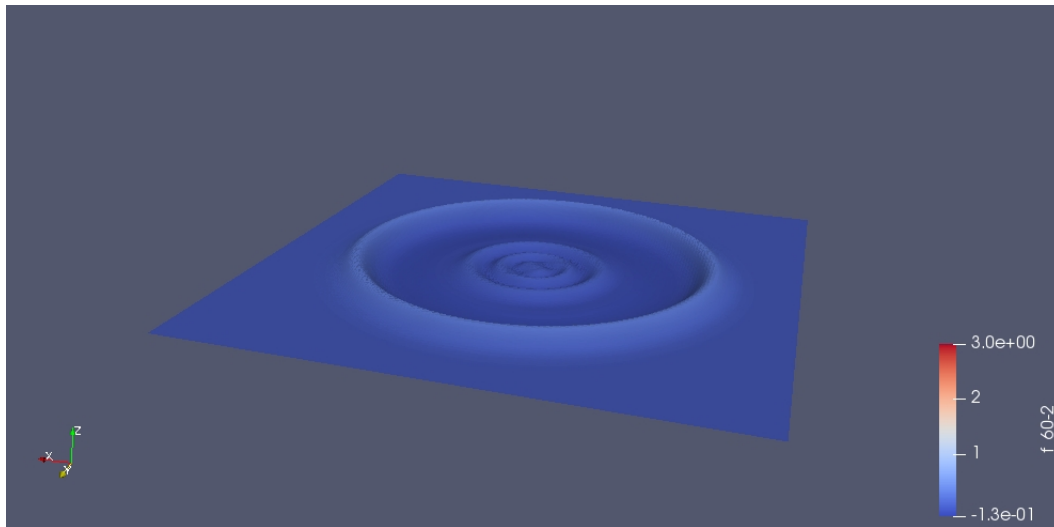
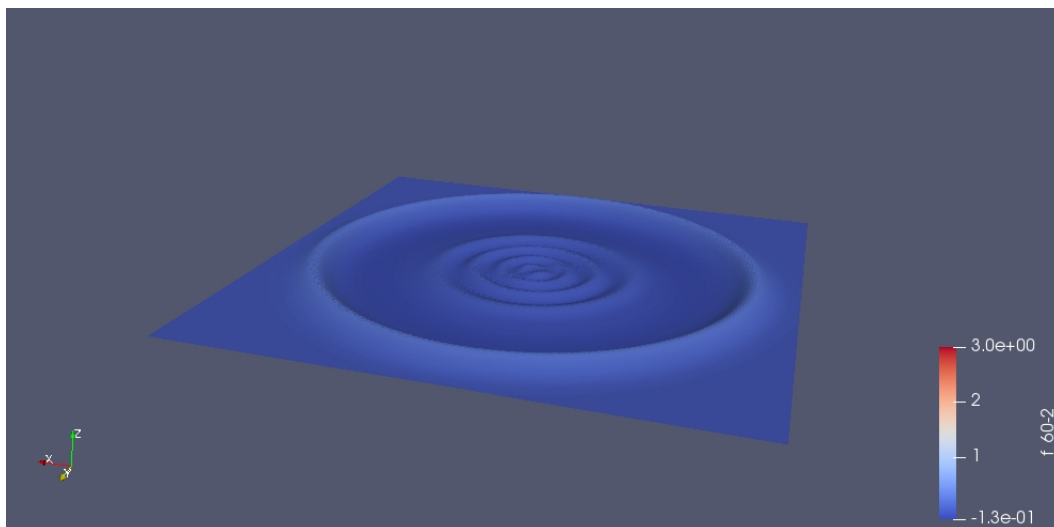
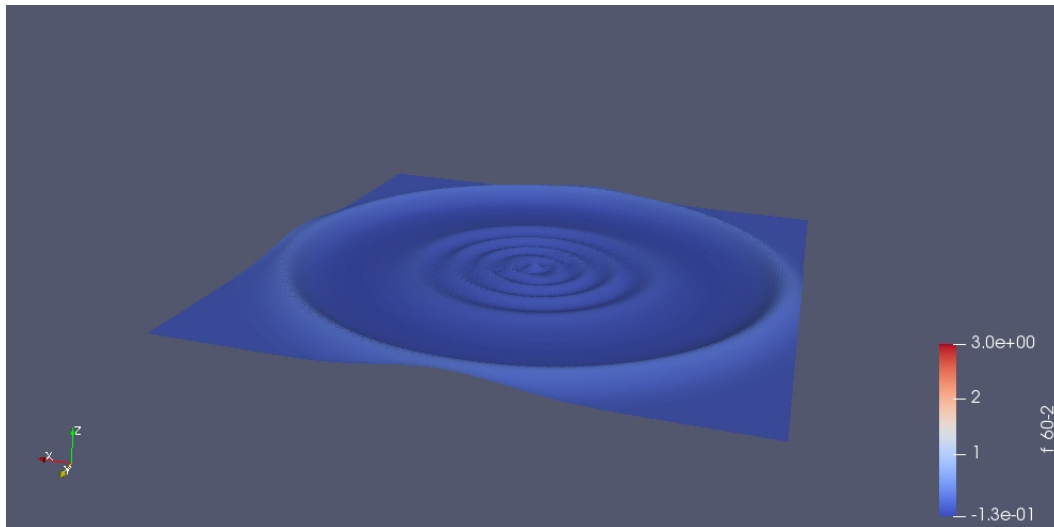
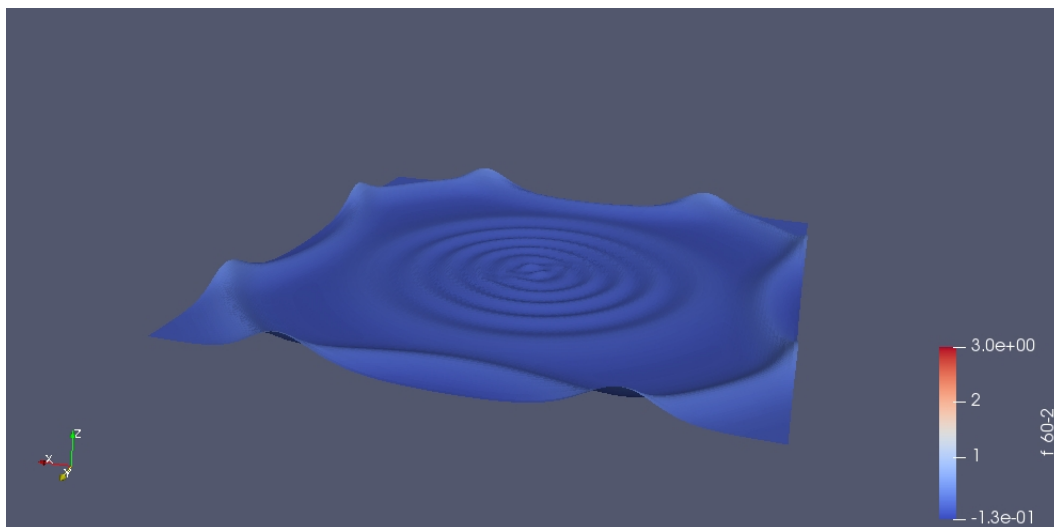


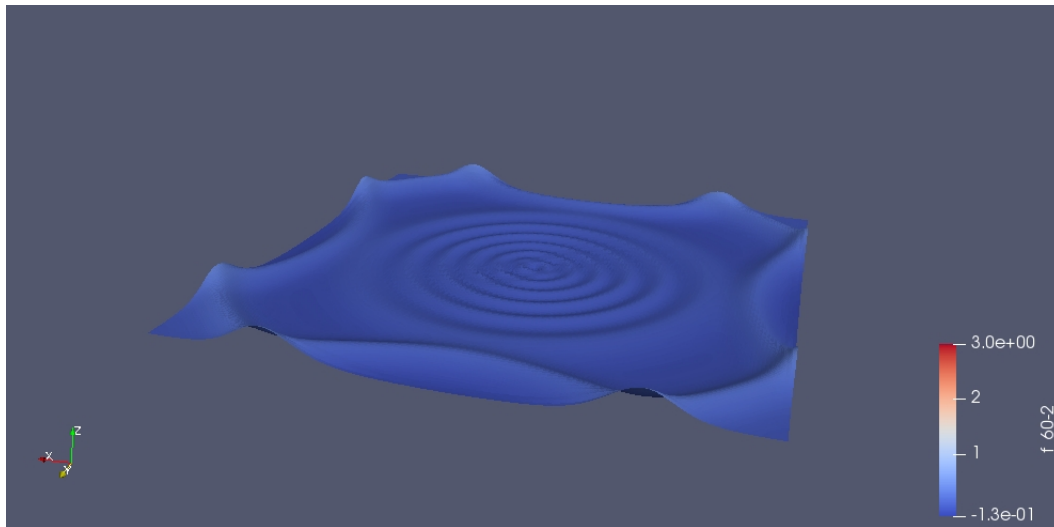
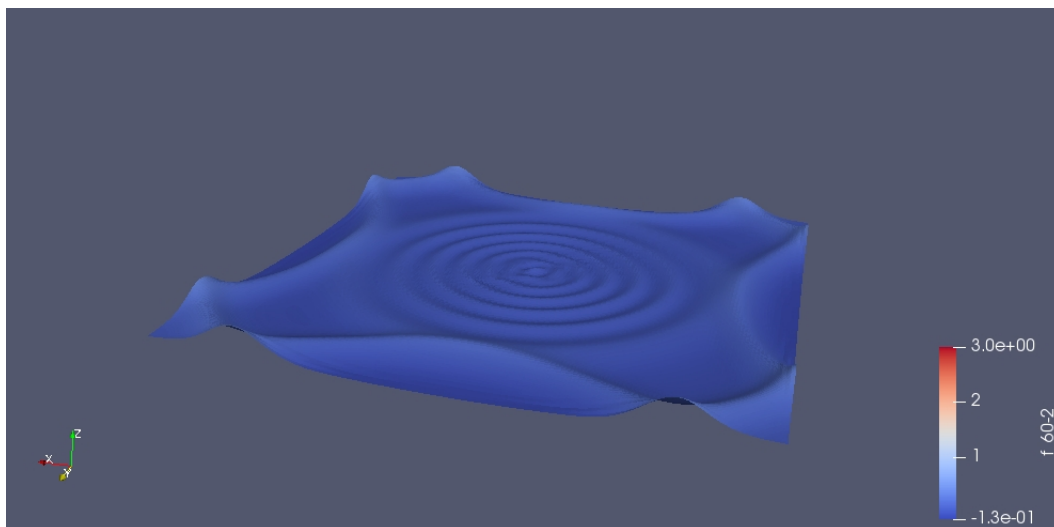
Figura 5.44: Superficie libre η , en $t = 499$, con condición inicial en η de onda gaussiana

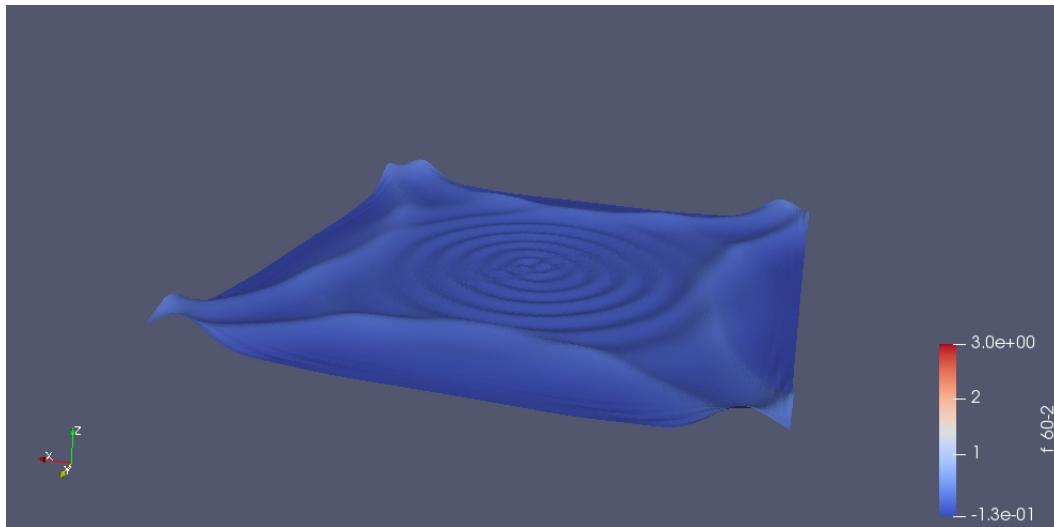
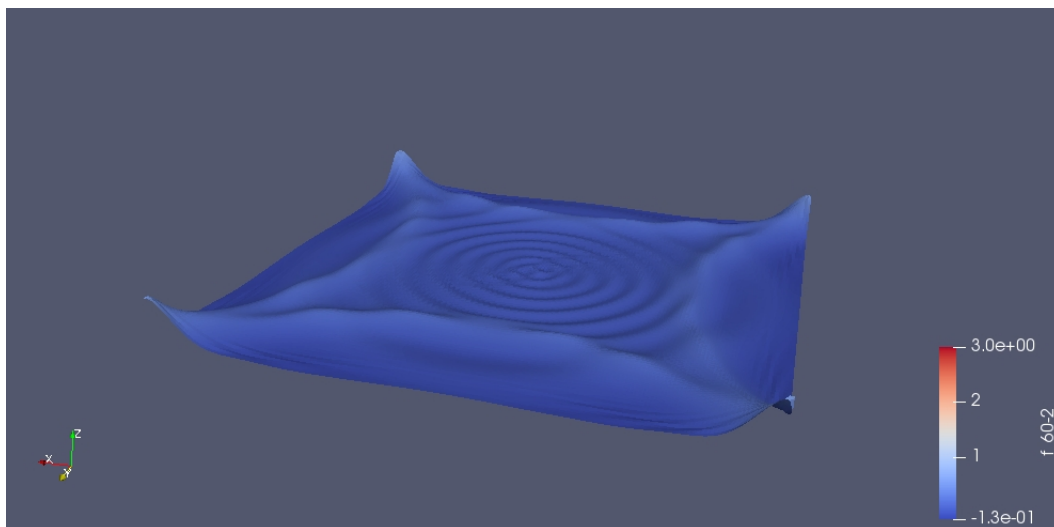
Figura 5.45: Onda gaussiana en $t=0$ Figura 5.46: Onda gaussiana en $t=18$

Figura 5.47: Onda gaussiana en $t=59$ Figura 5.48: Onda gaussiana en $t=161$

Figura 5.49: Onda gaussiana en $t=226$ Figura 5.50: Onda gaussiana en $t=284$

Figura 5.51: Onda gaussiana en $t=324$ Figura 5.52: Onda gaussiana en $t=399$

Figura 5.53: Onda gaussiana en $t=411$ Figura 5.54: Onda gaussiana en $t=431$

Figura 5.55: Onda gaussiana en $t=474$ Figura 5.56: Onda gaussiana en $t=499$

Conclusiones

1. El modelo (2.87) y (2.88) para ondas acuáticas tipo Boussinesq dos dimensional con topografía variable tiene ventajas desde el punto de vista numérico ya que la influencia de la topografía aparece como un forzante en el sistema y no afecta los términos dispersivos lineales de tercer orden (aquellos precedidos por el factor $\frac{1}{6}$). También presenta ventajas analíticas puesto que el modelo se puede presentar en términos del operador $(I - \frac{1}{6}\Delta)u = f$, el cual ha sido estudiado tanto analítica como numéricamente.
2. La linealidad y dispersividad del modelo puede ser controlado con la geometría del problema, es decir, con la longitud, amplitud y profundidad característica.
3. La implementación numérica para modelos evolutivos usando FEniCS Project es muy eficiente; convierte el problema evolutivo a problemas estacionarios en cada paso del tiempo (Método de Rothe). Este método puede ser preferible al método de líneas usualmente implementado si se desea implementar métodos de elementos finitos adaptativos.
4. La tasa de convergencia se alcanza rápidamente tanto espacial como temporalmente, aun cuando los valores Δt y h de las triangulaciones no son muy pequeños.
5. Los resultados de este trabajo son validados con resultados de otros modelos de ondas acáticas, con las cuales se han realizado experimentos iguales o similares.

Se observa que para otros trabajos y modelos no se da a conocer el código de sus programas lo que permitiría hacer más comparaciones numéricas; para aportar un cambio en esta metodología, este trabajo imprime como anexo el código en Python, el cual es un resultado del trabajo de tesis.

6. La implementación de la θ discretización para la variable temporal permite la implementación de varios esquemas de diferencias finitas como lo son el método de Euler explícito ($\theta = 0$), Euler implícito ($\theta = 1$) y Crank-nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$). En lo experimentos mostrados en este trabajo, se usó Crank-nicholson por el orden de convergencia.
7. El método de elementos finitos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales es robusto; si se desea obtener muy buenas aproximaciones en problemas donde el dominio es grande, el costo computacional puede ser alto en cuestión de tiempo y memoria, pero la implementación de nuevas tecnologías (servidores) y la programación en paralelo hacen que el problema del tiempo y la memoria disminuyan notablemente

Bibliografía

- [1] Chen, M. NUMERICAL INVESTIGATION OF A TWO-DIMENSIONAL BOUSSINESQ SYSTEM. *Discrete Contin. Dyn. Syst* **2009**, *28*, 1169–1190.
- [2] Scott Russell, J. REPORT ON WAVES. REPT. 14TH MEETINGS OF THE BRITISH ASSOC. FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE, 1844.
- [3] Agüero Granados, M.; Fujioka, J.; Ceciliano, L. LA ANTISOLEDAD DE LA ONDA SOLITARIA. *CIENCIA ergo sum* *9*, 197–201.
- [4] Craik, A. D. THE ORIGINS OF WATER WAVE THEORY. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **2004**, *36*, 1–28.
- [5] Casey, J.; Kaplan, A. ADHEMAR-JEAN-CLAUDE BARRE DE SAINT-VENANT: 23 AUGUST 1797-6 JANUARY 1886. *Mathematics and Mechanics of Solids* **1997**, *2*, 371–378.
- [6] Boussinesq, J. V. THEORY OF WAVES AND SURGES WHICH PROPAGATE THE LENGTH OF A HORIZONTAL RECTANGULAR CANAL, IMPARTING TO THE FLUID CONTAINED WITHIN THE CANAL VELOCITIES THAT ARE SENSIBLY THE SAME FROM THE TOP TO THE BOTTOM; Texas A & M University, College of Geosciences, 1976.
- [7] Nekrasov, A. I. THE EXACT THEORY OF STEADY STATE WAVES ON THE SURFACE OF A HEAVY LIQUID; Technical Report, 1967.
- [8] Lamb, H. HYDRODYNAMICS; Cambridge university press, 1993.
- [9] Stoker, J. J. WATER WAVES: THE MATHEMATICAL THEORY WITH APPLICATIONS; John Wiley & Sons, 2011; Vol. 36.
- [10] Toda, M. NONLINEAR WAVES AND SOLITONS (MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS (JAPANESE SERIES) VOL 5), 1989.

-
- [11] Boussinesq, J. THÉORIE DE L'INTUMESCENCE LIQUIDE APPELÉE ONDE SOLITAIRE OU DE TRANSLATION SE PROPAGEANT DANS UN CANAL RECTANGULAIRE. *CR Acad. Sci. Paris* **1871**, 72, 755–759.
 - [12] Xu, Z.; Hu, G.-h.; Wang, Z.-l.; Zhou, Z.-w. WATER STRUCTURES INSIDE AND OUTSIDE SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES UNDER PERPENDICULAR ELECTRIC FIELD. *Applied Mathematics and Mechanics* **2014**, 35, 1–12.
 - [13] Dougalis, V.; Mitsotakis, D.; Saut, J.-C. BOUSSINESQ SYSTEMS OF BONA-SMITH TYPE ON PLANE DOMAINS: THEORY AND NUMERICAL ANALYSIS. *Journal of Scientific Computing* **2010**, 44, 109–135.
 - [14] Nachbin, A.; Grajales, J. C. M. DISPERSIVE WAVE ATTENUATION DUE TO OROGRAPHIC FORCING. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **2004**, 64, 977–1001.
 - [15] Grajales, J. C. M.; Nachbin, A. STIFF MICROSCALE FORCING AND SOLITARY WAVE RE-FOCUSING. *Multiscale Modeling & Simulation* **2005**, 3, 680–705.
 - [16] Garnier, J.; Grajales, J. C. M.; Nachbin, A. EFFECTIVE BEHAVIOR OF SOLITARY WAVES OVER RANDOM TOPOGRAPHY. *Multiscale Modeling & Simulation* **2007**, 6, 995–1025.
 - [17] Fouque, J.-P.; Garnier, J.; Nachbin, A. SHOCK STRUCTURE DUE TO STOCHASTIC FORCING AND THE TIME REVERSAL OF NONLINEAR WAVES. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **2004**, 195, 324–346.
 - [18] Nachbin, A.; Sølna, K. APPARENT DIFFUSION DUE TO TOPOGRAPHIC MICROSTRUCTURE IN SHALLOW WATERS. *Physics of Fluids* **2003**, 15, 66–77.
 - [19] Mitsotakis, D. BOUSSINESQ SYSTEMS IN TWO SPACE DIMENSIONS OVER A VARIABLE BOTTOM FOR THE GENERATION AND PROPAGATION OF TSUNAMI WAVES. *Mathematics and Computers in Simulation* **2009**, 80, 860–873.
 - [20] Chen, M. EQUATIONS FOR BI-DIRECTIONAL WAVES OVER AN UNEVEN BOTTOM. *Mathematics and Computers in Simulation* **2003**, 62, 3–9.
 - [21] Evans, L. C. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS; American Mathematical Society, 2010.
 - [22] Šolin, P. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE FINITE ELEMENT METHOD; Wiley Online Library, 2006.
 - [23] Adams, R. A. SOBOLEV SPACES; Academic Press, 1975.
 - [24] Kesavan, S. TOPICS IN FUNCTIONAL ANALYSIS AND APPLICATIONS; New Age International (P) Ltd, Publishers, 2003.

- [25] Sayas, F.-J. A GENTLE INTRODUCTION TO THE FINITE ELEMENT METHOD. *Lecture notes, University of Delaware* **2008**.
- [26] Chorin, A. J.; Marsden, J. E.; Marsden, J. E. A MATHEMATICAL INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS; Springer, 1990; Vol. 3.
- [27] Chen, M. EQUATIONS FOR BI-DIRECTIONAL WAVES OVER AN UNEVEN BOTTOM. *Mathematics and Computers in Simulation* **2003**, 62, 3–9.
- [28] Chen, M. NUMERICAL INVESTIGATION OF A TWO-DIMENSIONAL BOUSSINESQ SYSTEM. *Discrete Contin. Dyn. Syst* **2009**, 28, 1169–1190.
- [29] Milewski, P. A. A FORMULATION FOR WATER WAVES OVER TOPOGRAPHY. *Studies in Applied Mathematics* **1998**, 100, 95–106.
- [30] Wong, W. W.-Y. LECTURE NOTES ON SOBOLEV SPACES FOR CCA **2010**.
- [31] Behzadan, A.; Holst, M. MULTIPLICATION IN SOBOLEV SPACES, REVISITED. *arXiv preprint arXiv:1512.07379* **2015**.
- [32] Hackbusch, W. ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS: THEORY AND NUMERICAL TREATMENT; Springer, 2017; Vol. 18.
- [33] Li, T.-Y. EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES. *Journal of Differential Equations* **1975**, 18, 29–40.
- [34] Dougalis, V. A.; Mitsotakis, D. E.; Saut, J.-C. ON SOME BOUSSINESQ SYSTEMS IN TWO SPACE DIMENSIONS: THEORY AND NUMERICAL ANALYSIS. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **2007**, 41, 825–854.
- [35] Kampanis, N. A.; Dougalis, V.; Ekaterinaris, J. A. EFFECTIVE COMPUTATIONAL METHODS FOR WAVE PROPAGATION; Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [36] Ciarlet, P. G. THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ELLIPTIC PROBLEMS. *Classics in applied mathematics* **2002**, 40, 1–511.
- [37] Johnson, C. NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE FINITE ELEMENT METHOD; Courier Corporation, 2012.
- [38] Strikwerda, J. C. FINITE DIFFERENCE SCHEMES AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS; Siam, 2004; Vol. 88.
- [39] Andrade, D.; Nachbin, A. A THREE-DIMENSIONAL DIRICHLET-TO-NEUMANN OPERATOR FOR WATER WAVES OVER TOPOGRAPHY. *Journal of Fluid Mechanics* **2018**, 845, 321–345.