

DESESTACIONALIZACION DE SERIES TEMPORALES: Un caso de aplicación a variables de clima

Francisco A. Quiroga.
Profesor Emérito Departamento de Información y Sistemas
Universidad del Valle

Bernardo Chávez C.
Estadístico, Centro Nacional de Investigaciones de Café
CENICAFE

RESUMEN

La literatura reporta varios métodos para la desestacionalización de series de tiempo. En este trabajo se plantea un enfoque para la desestacionalización con base en la teoría y métodos de los modelos ARIMA.

Se formula un modelo multiplicativo estacional y se aplica al caso de una variable de clima: el brillo solar observado en una estación meteorológica de la Federación Nacional de Cafeteros (Colombia). Se concluye que este enfoque presenta grandes ventajas para su aplicación en el estudio y análisis de este tipo de variables.

Los modelos ajustados satisfactoriamente para realizar son los siguientes:

1) Para observaciones mensuales:

$$(a) Z_t = -66.33 I + N_t ; \\ (15.11)$$

$$I = \begin{matrix} 1 & \text{si } t = t_0; \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{matrix} \quad t_0 = 4/64; 2/75$$

$$\nabla \nabla_{12} N_t = (1 - 0.618B) (1 - 0.78B^{12}) a_t \\ (0.045) \quad (0.042)$$

$$\hat{\sigma} = 25.17; \quad Q_{24} = 10.54; \\ \text{Probabilidad } (Q > 10.54) = 0.981$$

$$(b) \nabla \nabla_{12} Z_t = (1 - 0.638B) (1 - 0.777B^{12}) a_t \\ (0.044) \quad (0.042)$$

$$\hat{\sigma} = 25.91; \quad Q_{24} = 13.26; \\ \text{Probabilidad } (Q > 13.26) = 0.92$$

2) Para observaciones pentadales:

$$(1 - 0.112B) \nabla \nabla_{73} Z_t = \\ (0.025)$$

$$(1 - 0.900B) (1 - 0.881B^{73}) a_t \\ (0.011) \quad (0.017)$$

$$\hat{\sigma} = 7.7; \quad Q_{24} = 19.11; \\ \text{Probabilidad } (Q > 19.11) = 0.58$$

CONTENIDO

1. Introducción
2. El problema objeto de estudio y la hipótesis de trabajo
3. La formulación de una clase de modelos multiplicativos para el estudio de procesos estacionales
 - 3.1 Definición de la estructura regular y estacional del proceso
 - 3.2 La clasificación de las observaciones
 - 3.3 Una forma de desestacionalización
 - 3.4 El modelo multiplicativo
4. La determinación del modelo específico
 - 4.1 Las funciones de autocorrelación simple (fas) y parcial (fap) de un proceso estacional y la identificación del modelo
 - 4.2 Estimación de parámetros
 - 4.3 La diagnosis del modelo
 - 4.4 Las predicciones con el modelo
5. Otro modelo alternativo
6. Consideraciones finales

Bibliografía

1. INTRODUCCION

El presente trabajo busca ilustrar y aplicar los conceptos y métodos básicos para la obtención de un modelo estacional tomando como objeto de estudio el caso de un proceso estocástico dentro del sistema de las variables de clima registradas en una estación meteorológica de una región cafetera colombiana. Muchos trabajos teóricos y prácticos se han desarrollado sobre el tema de la estacionalidad y la desestacionalización de series temporales exponiéndose en ellos diferentes formulaciones y procedimientos como, por ejemplo, los métodos de análisis espectral y de descomposición. Granger et al (1986) discute las ventajas relativas de varios de estos métodos. En este caso se desarrolla el tema de la estacionalidad bajo el enfoque de la metodología desarrollada por Box y Jenkins (1976) y específicamente referida a la clase de modelos ARIMA estacionales multiplicativos.

El énfasis debe estar en lograr un adecuado modelo sobre la base, cada vez mayor, de consideraciones de tipo teórico y práctico sobre el fenómeno que se estudia.

Por supuesto que en muchos casos solo se tendrán conocimientos teóricos muy incompletos o poca información experimental sobre el proceso que se busca modelar; en estas situaciones se tendrá que hacer uso complementario de ambos tipos de elementos con el fin de aproximarse lo mejor posible a la formulación de una clase de funciones matemáticas que luego deben ajustarse empíricamente y evaluarse de acuerdo a la precisión de los pronósticos.

Las formulaciones teóricas y los procedimientos metodológicos que se plantean y se ilustran en este trabajo se basan principalmente en los desarrollos presentados por Box y Jenkins (1976) y Peña (1987).

2. EL PROBLEMA OBJETO DE ESTUDIO Y LA HIPOTESIS DE TRABAJO

En el proyecto que se ejecuta en el Centro Nacional de Investigaciones de Café (CENICAFE), sobre la modelación del cultivo del café en Colombia, el clima conforma un subsistema de gran importancia; sus variables están relacionadas dinámicamente y se constituyen en un factor determinante del comportamiento del cultivo y de su producción.

Uno de los objetivos específicos del proyecto es el análisis de este subsistema y sus efectos sobre el sistema en su conjunto. Las interacciones del sistema productivo del conjunto de plantas con el medio ambiente, y particularmente el clima, han sido objeto de continuos estudios con métodos de experimentos estadísticos, han sido instrumentos poderosos para estos análisis. Los desarrollos teóricos y prácticos de los modelos de procesos estocásticos, especialmente los modelos ARIMA con sus aplicaciones a los pronósticos y a la región dinámica, han venido facilitando la ejecución de aplicaciones en los campos de la producción y el crecimiento de cultivos agrícolas y forestales, demostrando con los resultados su gran potencialidad para el estudio de este tipo de sistemas complejos. Véase, por ejemplo, los trabajos de Persaud et al (1985), Hancock et al (1978), Pérez et al (1989), Castaño (1990).

Siendo uno de los objetivos del proyecto el pronóstico de la producción, se han planteado como fundamentales las siguientes variables de clima: radiación (brillo) solar, temperatura y precipitación. Estas son variables exógenas para el cultivo y cualquier sistema de pronóstico debe tenerlas en cuenta. En una primera fase se hará el estudio de la estructura y comportamiento individual de estas variables para pasar luego a una segunda fase en la que se estudiarán las relaciones entre ellas y

sus efectos simultáneos sobre el cultivo. Interesa, entonces, también el pronóstico de estas variables. Para ello, se tomará como base los conocimientos teóricos y prácticos que se han venido desarrollando sobre el clima tropical; Jaramillo (1985, 1982, 1980, 1974, 1983), Lhomme (1985), Trojer (1954, 1955, 1960); y la valiosa información recolectada y depurada por la Disciplina de Agroclimatología de toda la red de estaciones meteorológicas de la Federación Nacional de Cafeteros.

Para la ilustración de la temática de este trabajo se ha tomado el caso del brillo solar en la estación de Paraguaicito, municipio de Buenavista, departamento del Quindío.

Las características de su ubicación son las siguientes:

Latitud Norte: 4°23'

Longitud Oeste: 75°44'

Altura (m.s.n.m.): 1250

Hoya hidrográfica: Rioverde

Vertiente: Occidental de la Cordillera Central

Los datos corresponden a una serie diaria de hoyas de brillo solar, recolectada desde el 1º de enero de 1963. Para la construcción del modelo se utilizan los datos desde esa fecha hasta el 31 de diciembre de 1988, dejándose para su validación los correspondientes a los años de 1989, 1990 y parte de 1991.

Trojer (1960) orienta sobre la selección de una posible clase de modelos para el estudio y pronóstico del brillo solar. Plantea que la distribución estacional de períodos secos y lluviosos dependen básicamente de los tres siguientes factores:

- 1) Del desplazamiento del sistema de circulación intertropical sincronizado con el traslado de la posición solar y por consiguiente de la cantidad de radiación que llega a la superficie terrestre, la cual está en función del número de manchas solares que influyen sobre la radiación solar global.
- 2) De la variación estacional de la posición solar y del ángulo de inclinación de los rayos solares respecto a la superficie receptora.
- 3) De la turbidez de la atmósfera.

Por otra parte, Persaud y Chang (1984) concluyen que el ciclo anual con una frecuencia de $2\pi/365$ radianes por día es el que más contribuye a la explicación de la variación del fenómeno.

O sea, se establece que la componente estacional, es decir, el comportamiento periódico del proceso, es una

característica básica del brillo solar y que su período es de un año.

Por último, fundamentados en las mismas consideraciones de Trojer (1960) no se considerará esta estacionalidad exactamente constante y no se tratará, por consiguiente, como una componente determinística de la serie; además, la relación de dependencia estacional se supondrá igual para todos los intervalos básicos, admitiéndose también la existencia de dependencia entre las observaciones contiguas.

Estos aspectos configuran lo fundamental de la hipótesis de trabajo.

3. LA FORMULACION DE UNA CLASE DE MODELOS MULTIPLICATIVOS PARA EL ESTUDIO DE PROCESOS ESTACIONALES

3.1 Definición de la estructura regular y estacional del proceso

Téngase en cuenta que los datos observados corresponden a horas de brillo solar por día y que la hipótesis planteada especifica una estacionalidad anual. Un aspecto que debe definirse es el relacionado con la amplitud del intervalo básico o natural dentro del año; este puede ser el día, la péntada (suma de horas de brillo solar correspondientes a los mismos 5 días contiguos en el calendario), o el mes (suma de horas de brillo solar por mes). Inicialmente se tomará como intervalo básico el mes y posteriormente la péntada. Desde el punto de vista del modelo de producción el mayor interés estaría en la péntada para lograr pronósticos a más corto plazo y con mayor detalle.

De esta forma se define la estructura regular del proceso asociada al mes y la estructura estacional asociada al año con intervalos de amplitud 12.

3.2 La clasificación de las observaciones

Definida la estructura del proceso, las observaciones mensuales pueden organizarse clasificándolas en una sola tabla de doble entrada en la que las filas corresponden a los años o períodos y las columnas a los meses tal como se puede ver en la siguiente página.

Siendo

Z_{ij} : La observación mensual del año o período i y el mes j .

s : Amplitud del período; en este caso 12.

	Meses (dentro de períodos)		
	→		
Años (entre períodos)	$Z_{1,1}$	$Z_{1,2}$	$Z_{1,s}$
	$Z_{2,1}$	$Z_{2,2}$	$Z_{2,s}$
	↓		
	$Z_{r,1}$	$Z_{r,2}$	$Z_{r,s}$

Conforme a la hipótesis de trabajo se supone la existencia de relaciones (a) entre las observaciones para meses sucesivos en un año particular y (b) entre las observaciones para el mismo mes en años sucesivos; es decir, se suponen similitudes o comportamientos parecidos entre observaciones en la misma columna y entre observaciones en la misma fila. Los eneros tienden a ser similares en distintos años, lo mismo los febreros, etc. Esto enfatiza el hecho fundamental de las series de tiempo estacionales con período s , que las observaciones distanciadas s intervalos básicos son de comportamiento similar.

3.3 Una forma de desestacionalización: con el operador $1 - B^s = \nabla_s$

La estacionalidad hace a la serie no estacionaria ya que su nivel o valor medio μ_t variará de unos meses a otros. Dado que se ha supuesto, con base en la hipótesis de trabajo, que la estacionalidad es sólo aproximadamente constante, esta puede eliminarse de la serie tomando diferencias entre observaciones separadas por el período estacional, las que se llamarán diferencias estacionales. Veámoslo.

Sea S_t la componente estacional de período s , en el instante t ; $t = 1, 2, \dots$

Si la componente fuera determinista fija, entonces:

$$S_t = S_{t-ks}, \quad K = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

o sea el mismo valor para las observaciones distanciadas s intervalos básicos.

Supóngase ahora que la serie estacional con período s tiene la estructura

$$Z_t = S_t + \eta_t \quad (1)$$

siendo η_t un proceso estacionario.

Al tomar diferencias de observaciones separadas por el período estacional s se tendría:

$$Z_t - Z_{t-s} = (S_t + \eta_t) - (S_{t-s} + \eta_{t-s}) = \eta_t - \eta_{t-s}$$

y la serie se convierte en estacionaria.

La operación anterior puede formalizarse con base en el operador de retardo B^s , donde $B^s Z_t = Z_{t-s}$; por lo tanto:

$$Z_t - Z_{t-s} = (1 - B^s) Z_t = \nabla_s Z_t = \nabla_s \eta_t$$

Si la estacionalidad no es exactamente constante y se supone que:

$$S_t = S_{t-ks} + v_t; \quad K = \pm 1, \dots$$

donde v_t es un proceso estacionario, al aplicar diferencias estacionales en (1) se tendrá:

$$\nabla_s Z_t = v_t + \nabla_s \eta_t$$

y se obtiene de nuevo un proceso estacionario.

Por lo tanto, en general el operador ∇_s convierte un proceso estacional en estacionario, es decir, lo desestacionaliza.

Este operador tiene s raíces $e^{i(2\pi k/s)}$, $k = 0, 1, \dots, s-1$, igualmente espaciadas sobre el círculo unitario.

Además, la función de pronóstico satisface la ecuación:

$$(1 - B^s) \hat{Z}_t(l) = 0 \quad (2)$$

siendo $\hat{Z}_t(l)$ la mejor función de pronóstico para l intervalos adelante con base en el origen t y corresponde a la esperanza condicional de Z_{t+l} fijado t .

La solución de (2) conduce a que la función de pronóstico puede (pero no necesariamente) ser representada por un complemento de senos y cosenos.

$$\hat{Z}_t(1) =$$

$$b_0 + \sum_{j=1}^{\{s/2\}} \left\{ b_{1j} \cos\left(\frac{2\pi j 1}{s}\right) + b_{2j} \sin\left(\frac{2\pi j 1}{s}\right) \right\} \quad (3)$$

donde los b son coeficientes adaptivos; $\{s/2\} = 1/2s$ si s es par y $\{s/2\} = 1/2(s-1)$ si es impar.

3.4 El modelo multiplicativo

Supóngase que se dispone de h años completos con un total de $n = 12h$ observaciones mensuales. Sobre la base de la hipótesis de la estacionalidad se pueden considerar entonces 12 series, una por mes, de h datos cada una; corresponden a las columnas de la tabla.

Denomínese $Y_{\tau}^{(j)}$ con $\tau = 1, \dots, h$; $j = 1, \dots, s$ la serie de cada mes j . Aquí el índice τ indica el año dentro de cada columna j o mes. Por ejemplo, $Y_5^{(2)}$ corresponde al quinto año dentro de la segunda columna o serie del mes de febrero. Ahora, si t indica t meses a partir del origen, se puede entonces establecer la siguiente relación:

$$t = j + s(\tau - 1) \quad (4)$$

Una observación de la tabla puede representarse en términos de las series de cada mes o columna o en términos de la serie primitiva en la que no se tendría en cuenta la clasificación de la observación. La relación entre las series de cada mes y la primitiva se establece de la siguiente forma:

$$Y_t^{(j)} = Z_{j+s(\tau-1)} \quad (5)$$

Si se aplica el operador de retardo se tendría:

$$\begin{aligned} BY_{\tau}^{(j)} &= Y_{\tau-1}^{(j)} = Z_{j+s(\tau-1)-s} = \\ B^s Z_{j+s(\tau-1)} &= B^s Z_t \end{aligned} \quad (6)$$

lo que indica que aplicar B a Y_{τ} es equivalente a aplicar B^s a Z_t .

A continuación se puede proceder a ajustar un modelo ARIMA para cada una de las series correspondientes a cada columna o mes de tal manera que, basados en la hipótesis de la estacionalidad, ésta implica que una observación para un año de un mes particular está relacionada con las observaciones de los otros años anteriores de ese mismo mes. Por ejemplo, para las

observaciones del mes de enero, o columna 1, se ajustaría un modelo de la forma

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (1 - B)^D Y_{\tau}(1) = \\ (1 - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q) \mu_{\tau}^{(1)} \end{aligned} \quad (7)$$

Igualmente se obtendrían otros modelos para cada uno de los meses restantes o columnas, teniendo en total s modelos, 12 en el caso presente.

Se supone entonces en este momento una hipótesis central: La relación de dependencia estacional expresada en (7) es la misma para todos los períodos, es decir, como lo expresa Box (1976) es razonable asumir que los parámetros contenidos en el modelo (7) serían aproximadamente los mismos para cada uno de los meses. Peña (1987) señala que la experiencia indica que esta situación, aunque muy frecuente, no se cumple siempre, y conviene, siempre que se disponga de datos suficientes, contrastarla construyendo los modelos para cada mes y confirmando si presentan la misma estructura.

En el modelo (7) forzozamente si hay estacionalidad $D \geq 1$. En efecto, si $D = 0$ y las series fueran estacionarias su modelo podría escribirse:

$$Y_{\tau}^{(j)} = \mu_j = \psi_j(B) \mu_{\tau}^{(j)}; \tau = 1, \dots, h$$

donde μ_j es la media del mes j y si hay estacionalidad estas medidas son, por hipótesis, diferentes, con lo que las series de las columnas no pueden tener un modelo común.

Examinéase ahora las variables $\mu_{\tau}^{(j)}$ o componentes de error en los modelos tipo (7) con $j = 1, \dots, s$; en general no están incorrelacionadas; la observación de un año correspondiente a una columna o mes, además de estar relacionada a las observaciones de los años anteriores del mismo mes, también estará relacionada con las observaciones de los meses anteriores del mismo año, es decir, con las observaciones de las columnas anteriores de la misma fila. De modo que debe esperarse que las $\mu_{\tau}^{(j)}$ estén relacionadas con las $\mu_{\tau}^{(j-1)}$, las $\mu_{\tau}^{(j-2)}$, etc.

Por lo tanto, para una formulación del modelo deben tenerse estas relaciones. Para ello procédase de la siguiente forma:

Defínase una serie de ruido común, α_t , asignado a cada mes t el ruido del modelo (7) correspondiente a

dicho mes. En consecuencia, α_t , se obtiene de las s series μ mediante la relación:

$$\mu_{\tau}^{(j)} = \alpha_{j+s} \quad (\tau-1); \quad \tau = 1, \dots, h \quad (8)$$

que coincide necesariamente con (5).

Entonces los s modelos tipo (7) pueden expresarse en términos de la serie primitiva de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B^s - \dots - \phi_P B^{Ps}) (1 - B^s)^D \tilde{Z}_t = \\ (1 - \theta_1 B^s - \dots - \theta_Q B^{sQ}) \alpha_t \end{aligned} \quad (9)$$

con base en (4), (5), (6) y (8); donde $t = 1, \dots, n$. Este es el modelo de la estructura estacional.

Queda pues formulado el modelo ARIMA en (7) en términos de B^s , con $s = 12$ ya que se relacionan observaciones correspondientes a meses de distintos años.

Con base en el modelo en (7) las $\mu_{\tau}^{(j)}$ son, por hipótesis, ruido blanco en los procesos de cada columna, pero la serie común α_t con $t = 1, \dots, n$ normalmente no lo será, ya que, como se planteó anteriormente, existirá en general dependencia entre observaciones contiguas.

Se introduce entonces un segundo modelo suponiendo que α_t sigue un proceso ARIMA en la estructura regular. Este modelo es de la forma:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_P B^P) (1 - B)^d \alpha_t = \\ (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_Q B^Q) a_t \end{aligned} \quad (10)$$

siendo a_t ruido blanco.

Sustitúyase este modelo regular (10) en el modelo estacional (9) y se obtiene un modelo general multiplicativo para el proceso observado:

$$\phi_P(B^s) \phi_P(B) \nabla^d \nabla_s^D Z_t = \theta_Q(B) \theta_Q(B^s) a_t \quad (11)$$

Donde:

$$\phi_P(B^s) = (1 - \phi_1 B^s - \dots - \phi_P B^{Ps})$$

es el operador autorregresivo de orden P de la estructura estacional; polinomio en B^s de grado P .

$$\phi_P(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_P B^P)$$

es el operador autorregresivo de orden p de la estructura regular; polinomio en B de grado P .

$$\theta_Q(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_Q B^Q)$$

es el operador de media móvil de orden q de la estructura regular; polinomio en B de grado q .

$$\theta_Q(B^s) = (1 - \theta_1 B^s - \dots - \theta_Q B^{sQ})$$

es el operador de media móvil de orden Q de la estructura estacional; polinomio en B^s de grado Q .

Con base en los supuestos de los modelos ARIMA estos operadores deben satisfacer las condiciones de estacionalidad e invertibilidad.

$$\nabla^d = (1 - B)^d; \quad d: \text{orden de diferenciación regular}$$

$$\nabla_s^D = (1 - B^s)^D; \quad D: \text{orden de diferenciación estacional}$$

$$s: \text{amplitud del período estacional}$$

El modelo (11) se denomina ARIMA $(P,D,Q)_s \times (p,d,q)$.

Esta formulación y su procedimiento puede extenderse de manera similar para estacionalidades múltiples, partiéndose, en ese caso, de tablas de clasificación múltiple de las observaciones y definiendo estructuras estacionales de forma anidada.

Hecha la formulación del modelo con base en las hipótesis de trabajo y conforme a los supuestos requeridos para los modelos ARIMA, tanto para su estructura regular como estacional, se procede a la construcción o determinación específica del modelo desarrollando, en primer término, la etapa de identificación de los órdenes definidos en el modelo (11). Esta identificación se fundamenta en las características o propiedades de las funciones de autocorrelación simple y parcial de un proceso estacional. Posteriormente se estiman los parámetros de acuerdo a las definiciones de la etapa de identificación y conforme a los criterios y métodos desarrollados para los modelos ARMA, sin que se requieran nuevos principios; por último, se hace el chequeo o diagnóstico del modelo ajustado, igualmente, utilizando los criterios y métodos ya establecidos y probados para los modelos ARMA. Si el modelo no se considera lo suficientemente adecuado se procede a una reformulación del mismo y se repite el procedimiento. Para la reformulación se puede apoyar en el análisis de los residuos obtenidos con el modelo ajustado y definir su estructura formulándoles un modelo ARMA, el que se incorpo-

ra, mediante reemplazos, a la estructura del modelo previamente ajustado, conduciéndose así a un nuevo modelo multiplicativo. Estimando este nuevo modelo se obtendrán nuevos residuos y conforme a la diagnosis puede de nuevo repetirse el ciclo procedimental expuesto.

Al caso objeto de estudio se le aplicó este procedimiento. A continuación se presentarán sus análisis y resultados.

4. LA DETERMINACION DEL MODELO ESPECIFICO

4.1 Las funciones de autocorrelación simple y parcial de un proceso estacional y la identificación del modelo.

Sea $W_t = \nabla^d \nabla_s^D Z_t$ el proceso estacionario después de diferenciar regular y estacionalmente. Entonces W_t sigue el proceso ARMA estacional multiplicativo.

Peña (1987) y Hamilton y Watts (1978) desarrollan y caracterizan las funciones de autocorrelación simple (fas) y de autocorrelación parcial (fap).

La fas del proceso W_t es una mezcla de sus componentes regulares y estacionales.

Sean:

r_j : coeficientes de autocorrelación de la estructura regular

R_{si} : Coeficientes de autocorrelación en los retardos $s, 2s, \dots$ de la estructura estacional

ρ_j : Coeficientes de autocorrelación del proceso completo

Entonces se verifica que:

$$\rho_j = \frac{r_j + \sum_{i=1}^{\infty} R_{si} (r_{si+j} + r_{si-j})}{1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r_{si} R_{si}} \quad (12)$$

Para el caso de estudio $s = 12$ y si se supone que $r_j \approx 0$ para retardos altos (por ejemplo, para $j \geq 8$), el denominador de (12) es la unidad y la fas tiene las siguientes características:

- (1) En los retardos bajos se observará únicamente la parte regular.

$$\rho_j \approx r_j \quad \text{para } j = 1, \dots, 7$$

- (2) En los retardos estacionales se observará únicamente la parte estacional.

$$\rho_{si} \approx R_{si} (r_{(2s)i} + r_o) + R_{(2s)i} (r_{(3s)i} + r_{si}), \quad (13)$$

y se supone que $r_{si} \approx 0$ para $i \geq 1$, con $r_o = 1$ (13) se reduce a:

$$\rho_{si} \approx R_{si} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

- (3) Alrededor de los retardos estacionales se observará la "interacción" entre la parte regular y estacional que se manifiesta en la repetición a ambos lados de cada retardo estacional de la fas de la parte regular.

La fap en un proceso estacional tiene la estructura siguiente:

- (1) En los primeros retardos aparecerá la fap de la estructura regular y en los estacionales la fap de la estacional.
- (2) A la derecha de cada coeficiente estacional (retardos $js+1, js+2, \dots$) aparecerá la fap de la parte regular. Si el coeficiente estacional es positivo la fap regular aparece invertida, mientras que si este es negativo la fap aparece con su signo.
- (3) A la izquierda de los coeficientes estacionales (retardos $js-1, js-2, \dots$) se observa la fas de la parte regular.

Peña (1987) presenta y desarrolla una excelente síntesis ilustrativa del procedimiento práctico de la aplicación de toda esta teoría.

Para el caso objeto de estudio de la serie de brillo solar en la estación Paraguaicito (Quindío) se tiene lo siguiente:

La representación gráfica de los 9619 datos de brillo solar diario no permite realmente observar una estructura estacional (FIGURA 1); sin embargo, la gráfica de los promedios por día calendario (365 días) con base en los diferentes años observados sí muestra claramente la estacionalidad (FIGURA 2).

Tomando como observación básica para el análisis el acumulado de horas de brillo solar por mes se presenta

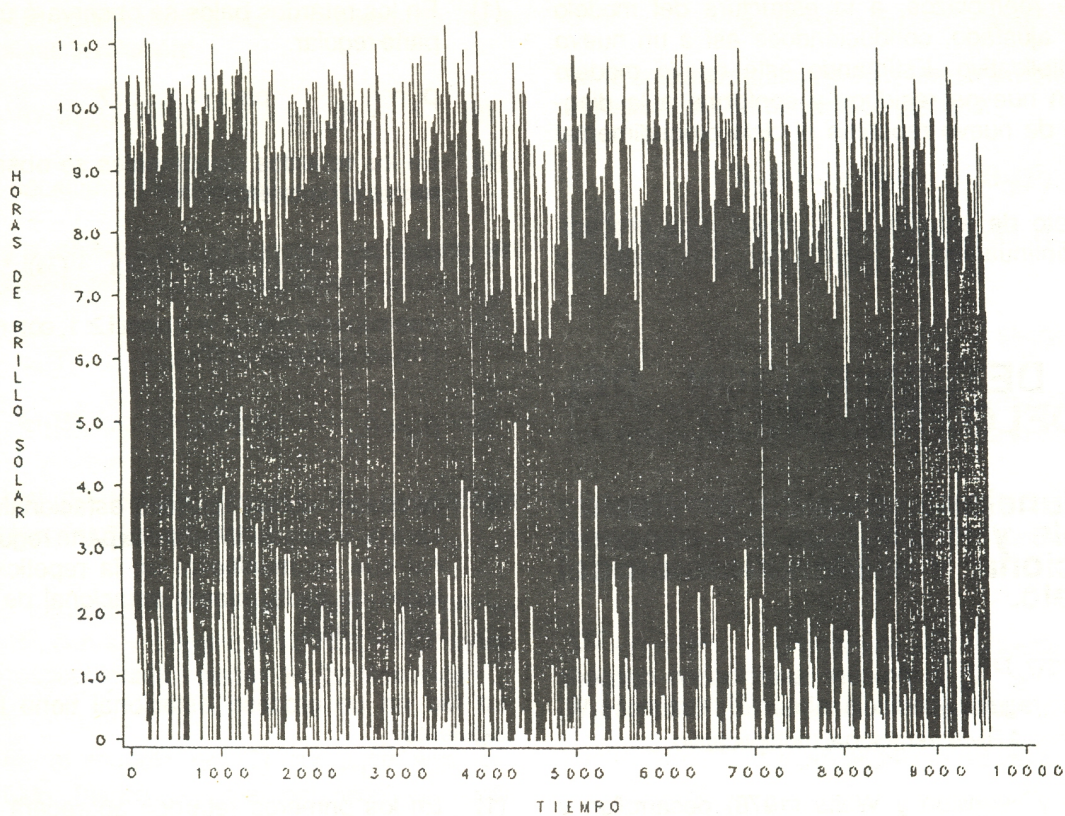


FIGURA 1. Brillo solar diario

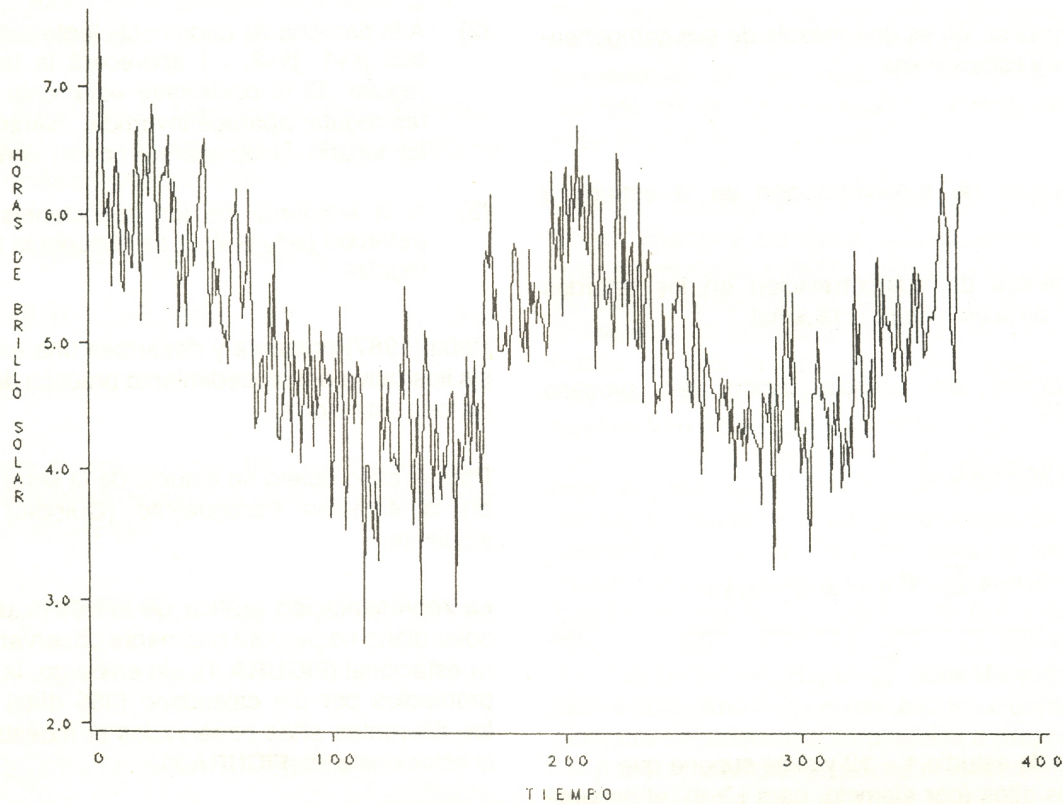


FIGURA 2. Brillo solar promedio diario

una situación similar a la señalada anteriormente (**FIGURAS 3 Y 4**). En esta situación la serie se reduce a 312 observaciones.

Para estudiar la necesidad o no de transformar los datos mensuales se hicieron dos tipos de análisis. El primero (método de Taylor) fue con base en el ajuste de la curva $Y = KX^\alpha$ siendo Y la desviación estándar y X la media de cada uno de los 312 grupos de datos diarios.

El segundo tipo de análisis se hizo con base en el procedimiento señalado por Box y Cox. Los dos análisis permitieron concluir que no era necesaria ninguna transformación, es decir, que el proceso estable en la varianza. (**FIGURA 5**).

Para determinar los órdenes de diferenciación regular y estacional obsérvese lo siguiente:

Por hipótesis de trabajo $s = 12$. Si se diferencia con período 1 la fas correspondiente verifica la estacionalidad en los retardos 12, 24, ... (**FIGURA 6**); se observa también la significancia de los coeficientes en los retardos 6, 18, ... lo que podría sugerir una estacionalidad de período 6; es decir, que el brillo solar en esa región pudiera tener un comportamiento similar por semestres. Conclusiones análogas se obtienen con base en la fas y la fap de la serie sin ninguna diferenciación (**FIGURAS 7 Y 8**). La fas de la serie diferenciada con período 12 muestra la necesidad de diferenciar regularmente (decrecimiento lento alrededor de los retardos 1, 12,...) (**FIGURA 9**). Con diferenciaciones de períodos 1 y 12 simultáneamente, (comportamiento regular y estacional) se busca inducir la estacionalidad y de esta manera desestacionalizar la serie primitiva; desaparece en la fas el decrecimiento lento alrededor de los retardos estacionales (**FIGURA 10**). La serie queda entonces presumiblemente estable en media o nivel, varianza y covarianza.

Se concluye, por lo tanto, que los órdenes de diferenciación son $d = 1$ y $D = 1$ con $s = 12$.

Para identificar la estructura ARMA de esta serie presumiblemente estacionaria (W_t), se toma como base las características señaladas anteriormente sobre la fas y fap de un proceso multiplicativo (**FIGURAS 10 Y 11**).

En la fas se observan coeficientes significativos en los retardos 1, 12 y 13 y no se observa un comportamiento sistemático de alternación de signos. Estas características permiten plantear la siguiente hipótesis:

(a) Suponer que la parte regular es un ARIMA de orden $(0,1,1)$ con $\theta > 0$.

Obsérvese que en los retardos bajos sólo se presenta un coeficiente significativo de signo negativo de que determinaría la naturaleza MA de orden 1 y el signo del parámetro θ . Esto en parte se confirma porque alrededor del retardo estacional $K = 12$ sólo se tiene un coeficiente significativo que según el literal (c) de las características de la fas, debe mostrar la estructura de la parte regular. Observando la fap esta hipótesis toma mayor fuerza, ya que en los primeros retardos no se observa un corte abrupto sino un decrecimiento paulatino; algo análogo se tiene a la derecha del retardo estacional. A la izquierda de este coeficiente estacional se observa de nuevo un solo coeficiente significativo que según el literal (c) de las características de la fap debe mostrar la estructura de la fas de la parte regular.

(b) Suponer que la parte estacional es un ARIMA $(0,1,1)_{12}$ con $\Theta > 0$.

Obsérvese que en la fas solo se presenta un coeficiente significativo en el retardo 12 y de signo negativo. En la fap se observa decrecimiento lento en 12, 24, ... compatible con la estructura $MA(1)_{12}$.

De modo que la hipótesis más plausible sobre la identificación del modelo es la de un ARIMA estacional multiplicativo de orden

$$(0,1,1)_{12} \times (0,1,1) \\ MA(1)_{12} \times MA(1) \text{ con parámetros positivos.}$$

El modelo sería entonces:

$$(1 - B)(1 - B^{12})Z_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^{12})a_t \quad (14)$$

El modelo escrito explícitamente es:

$$Z_t = \\ Z_{t-1} + Z_{t-12} - Z_{t-13} + a_t - \theta a_{t-1} - \Theta a_{t-12} + \theta \Theta a_{t-13} \quad (15)$$

La región de invertibilidad para este modelo, requerida por la condición de que las raíces de:

$(1 - \theta B)(1 - \Theta B^{12}) = 0$ deben estar fuera del círculo unidad, está definida por las inecuaciones siguientes:

$$-1 < \theta < 1 \quad -1 < \Theta < 1$$

El orden del operador de media móvil es $q + sQ = 13$. El número de valores de W que pueden obtenerse es $N = n - d - sD = 299$.

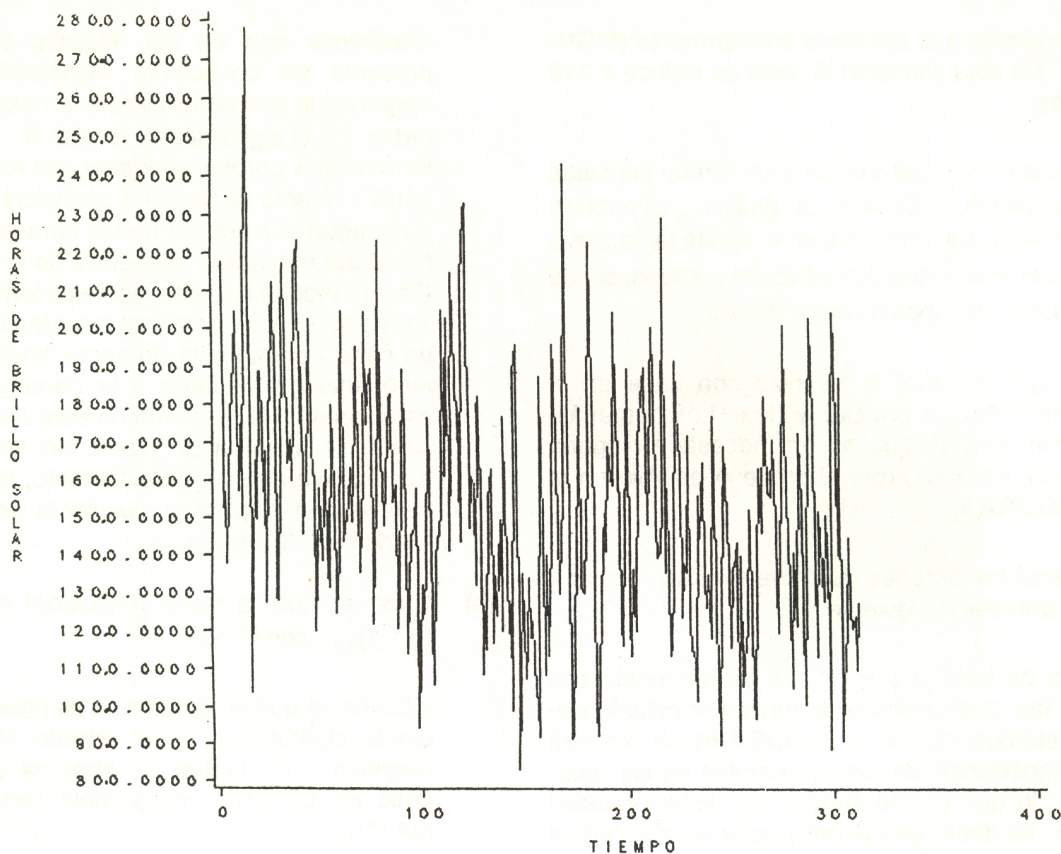


FIGURA 3. Brillo solar mensual

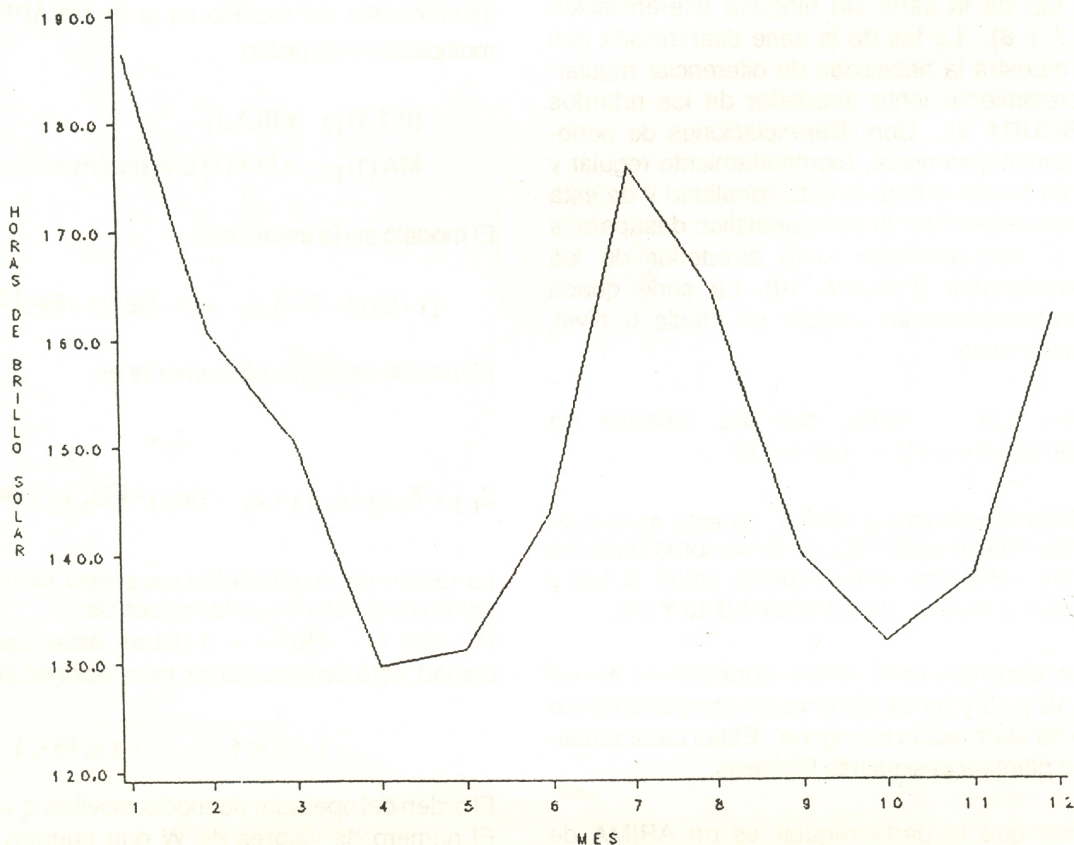


FIGURA 4. Brillo solar promedio mensual observado

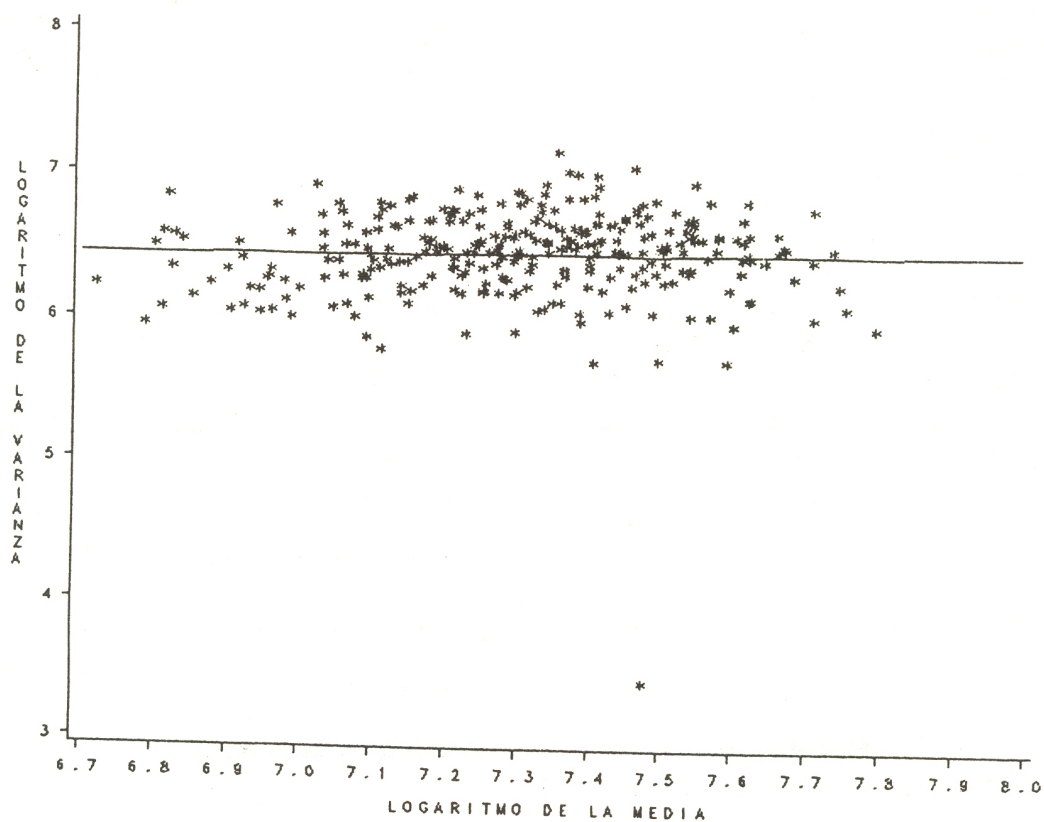


FIGURA 5. Brillo solar mensual. Método de Taylor

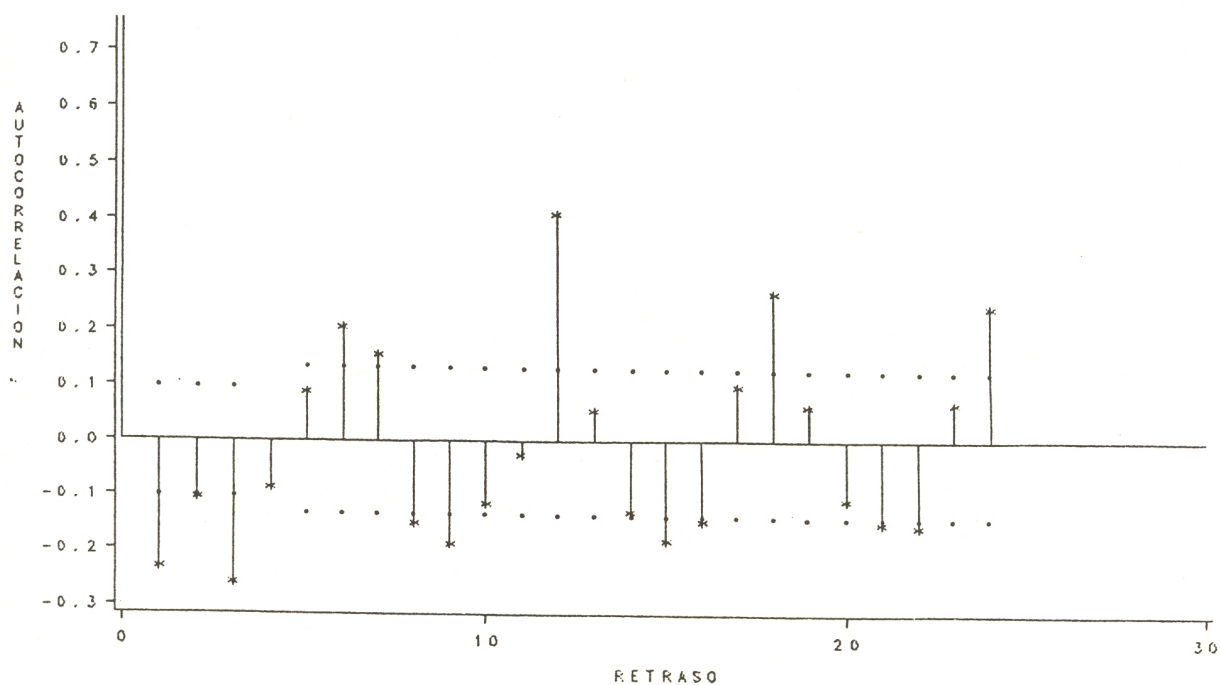


FIGURA 6. Función de autocorrelación brillo solar mensual.
Diferencia de un período

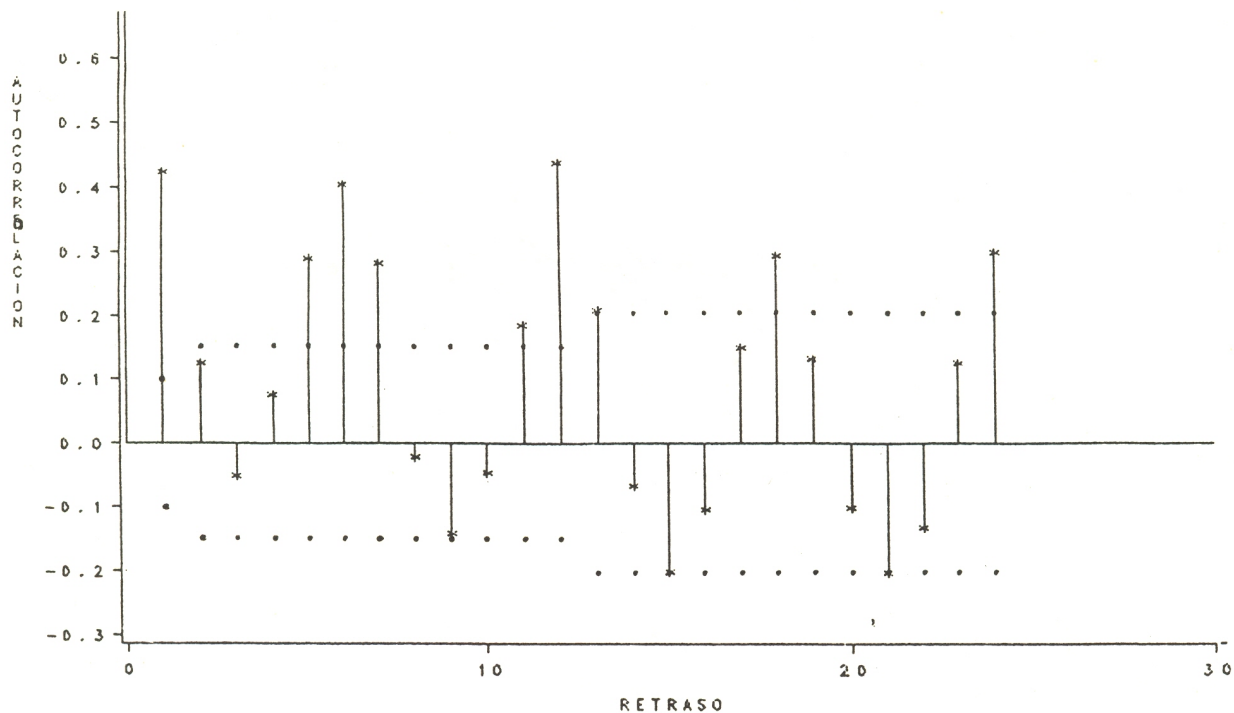


FIGURA 7. Función de autocorrelación brillo solar mensual

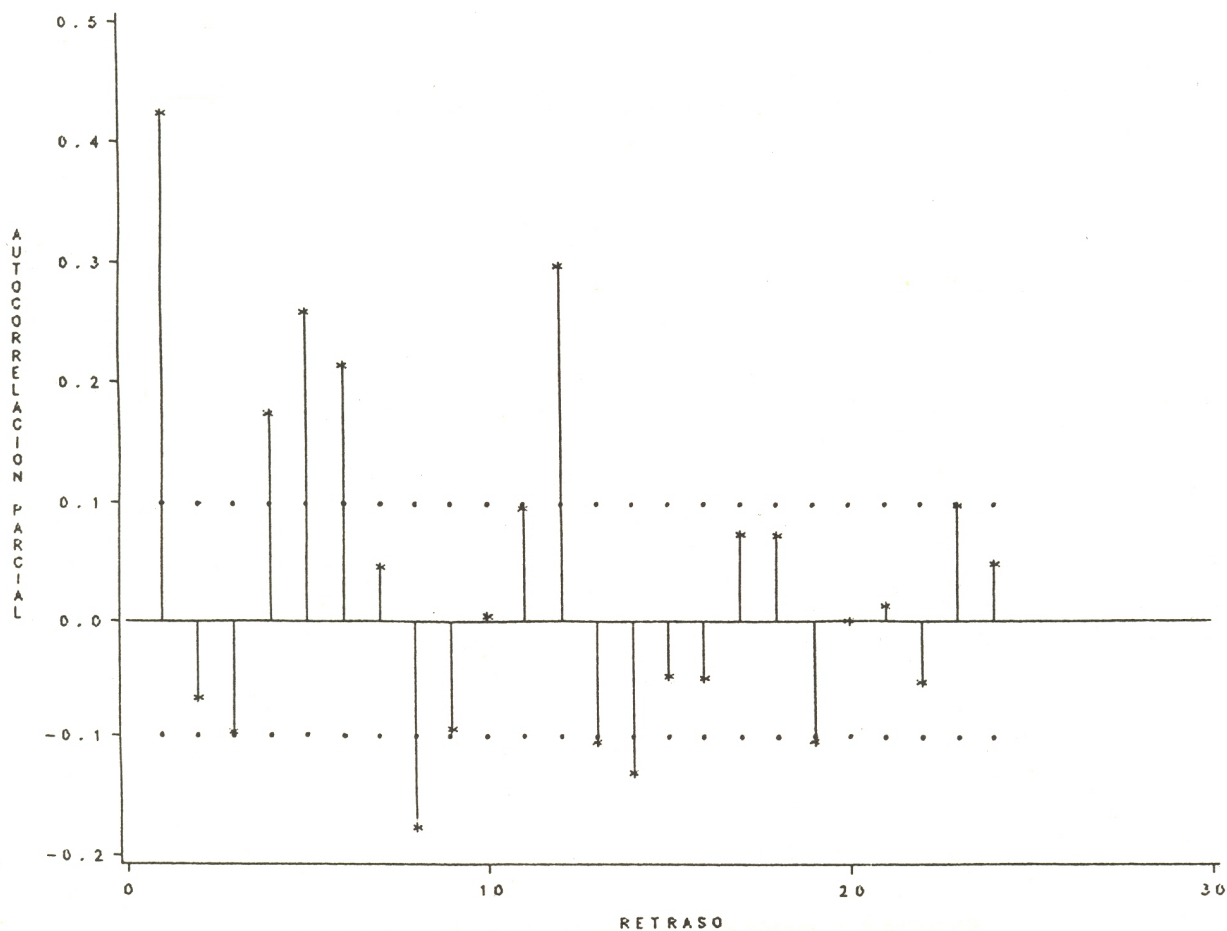


FIGURA 8. Función de autocorrelación parcial brillo solar mensual

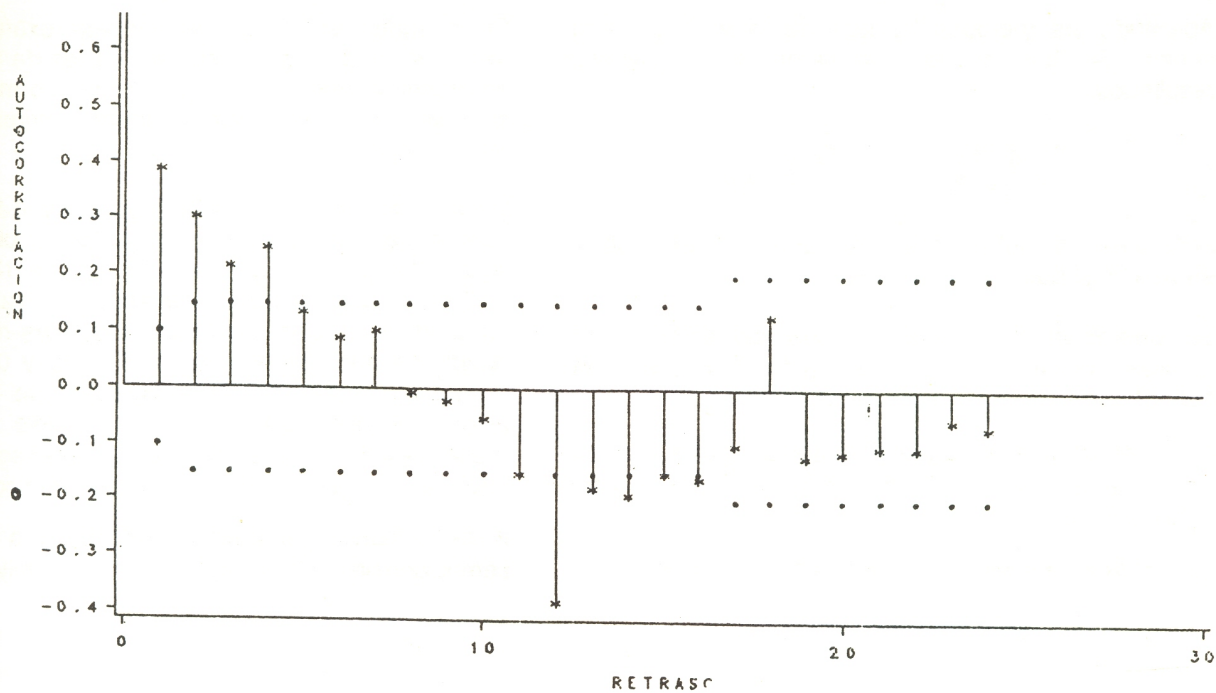


FIGURA 9. Función de autocorrelación brillo solar mensual.
Diferencia de doce periodos

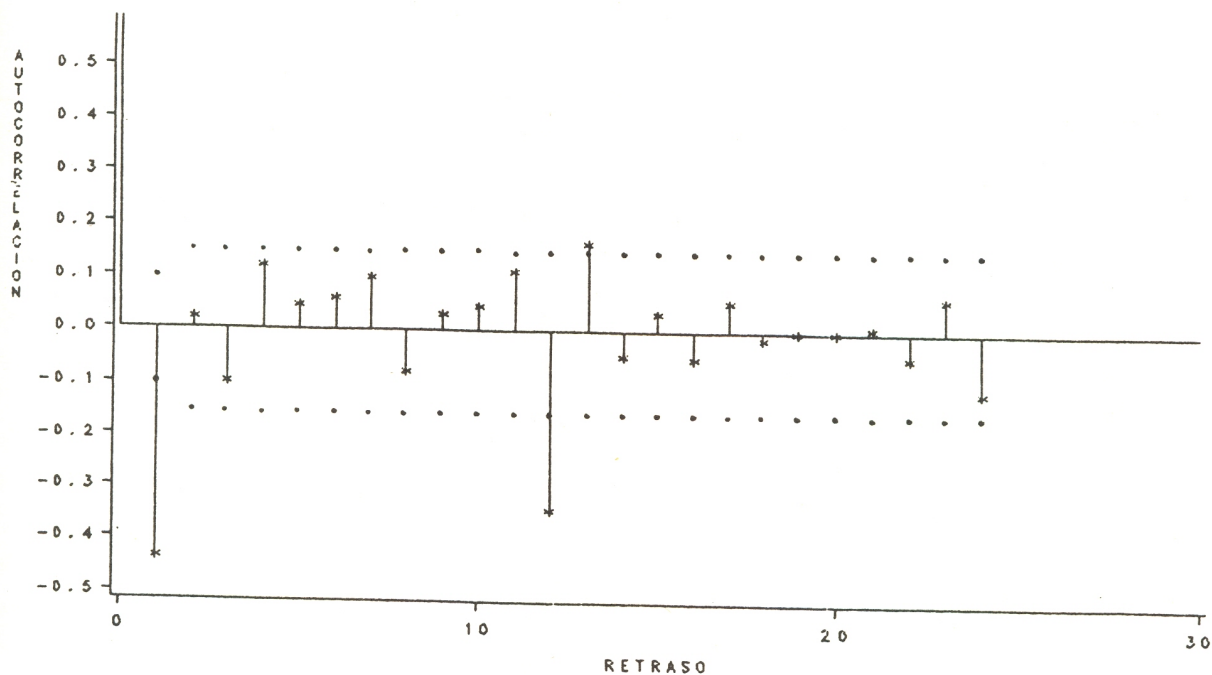


FIGURA 10. Función de autocorrelación brillo solar mensual
Diferencia de uno y doce periodos

4.2 Estimación de parámetros

Aplicando los métodos básicos de la estimación en series de tiempo se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\hat{\theta} = 0.638 \quad (0.044) \quad ; \quad \hat{\Theta} = 0.777 \quad (0.042)$$

Los números entre paréntesis son sus respectivos errores estándar.

La correlación entre estas dos estimaciones es -0.115, lo que indica que no hay problema grave de especificación.

La estimación de la desviación estándar de los residuos es $\alpha = 25.91$, que es el error de predicción a un intervalo adelante.

La desviación estándar de la variable W_t es 36.68.

4.3 La diagnosis del modelo

Se chequea el ajuste del modelo examinando los residuos del proceso ajustado. La fase de los residuos no presenta ningún valor significativo, lo mismo la fap, lo que indica que los residuos estimados están incorrelados.

Realizando el contraste de Ljung - Box a través de la estadística Q en diferentes retrasos, se obtienen los siguientes valores: $Q_{12} = 8.39$, $Q_{24} = 13.26$, $Q_{30} = 26.35$ con probabilidades de encontrar valores mayores a estos, bajo la hipótesis de que los residuos son realmente ruido blanco, de 0.59, 0.92 y 0.55 respectivamente. Estas pruebas indican que no existen evidencias que muestren que el modelo ajustado es inadecuado. Las pruebas de normalidad sobre los residuos también confirman la anterior aseveración.

Inspeccionando los residuos estimados a lo largo del tiempo con base en los límites $\pm 3\alpha$ se identificaron

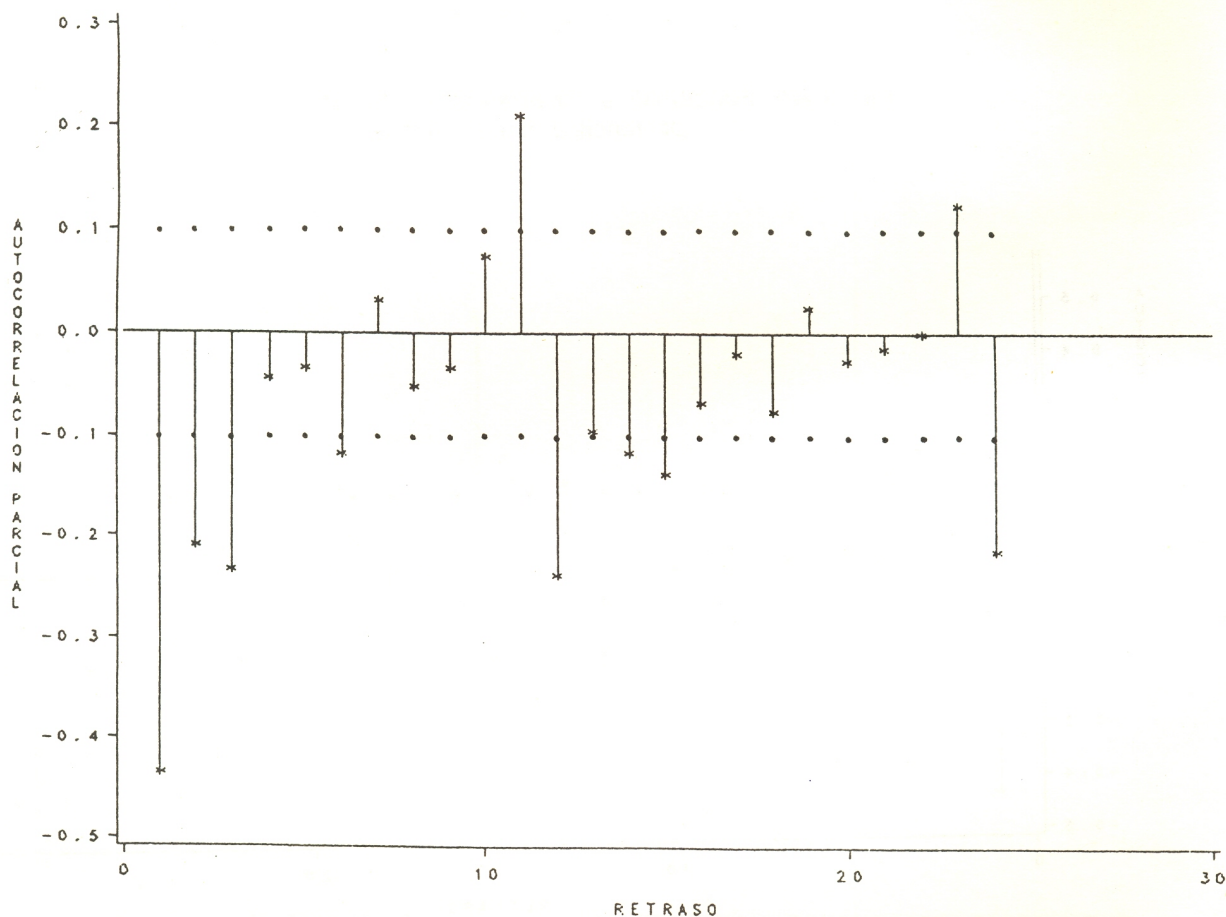


FIGURA 11. Función de autocorrelación parcial brillo solar mensual
Diferencia de uno y doce periodos

dos valores que están por fuera de estos límites. Se formuló entonces un modelo con intervención considerando dichos valores como atípicos. Las estimaciones de este nuevo modelo son las siguientes:

$$\hat{\theta} = 0.618; \quad \hat{\Theta} = 0.780; \quad \hat{W}_0 = -66.33$$

(0.045) (0.042) (15.11)

Las correlaciones entre estas estimaciones fueron menores que las encontradas en el anterior modelo.

La estimación de la desviación estándar de los residuos es $\alpha = 25.17$.

La estadística Q en diferentes retrasos presenta los siguientes valores, con sus respectivas probabilidades presentadas entre paréntesis:

$$Q_{12} = 7.46, (0.68);$$

$$Q_{24} = 10.54, (0.981) \text{ y}$$

$$Q_{30} = 23.92, (0.686)$$

Se concluyó que el nuevo modelo no mejora substancialmente el ajuste con relación al primero y que puede utilizarse para los pronósticos cualquiera de los dos.

El error de predicción a un período adelante de ≈ 25 horas para el acumulado del mes se ha considerado bastante aceptable.

Comparando los promedios por mes durante los años

observados con los promedios por mes calculados con el modelo se obtienen los resultados de la tabla que se muestra en la parte inferior.

Véase también la FIGURA 12.

Se puede apreciar que el ajuste dado por el modelo es de gran aceptabilidad con una subestimación promedia, sobre la base de estos promedios mensuales, de aproximadamente un 2.5%. Los pronósticos a un intervalo adelante tendrán en general con el modelo una subestimación que en promedio no sobrepasará el 20%, aspecto que contribuye a considerar el modelo suficientemente bueno para pronosticar el brillo solar mensual. Obsérvese, además, el nivel de concordancia de la estimación de la desviación estándar de los residuos con las observaciones estándar en cada mes, tanto observadas como calculadas por el modelo.

4.4 Las predicciones con el modelo

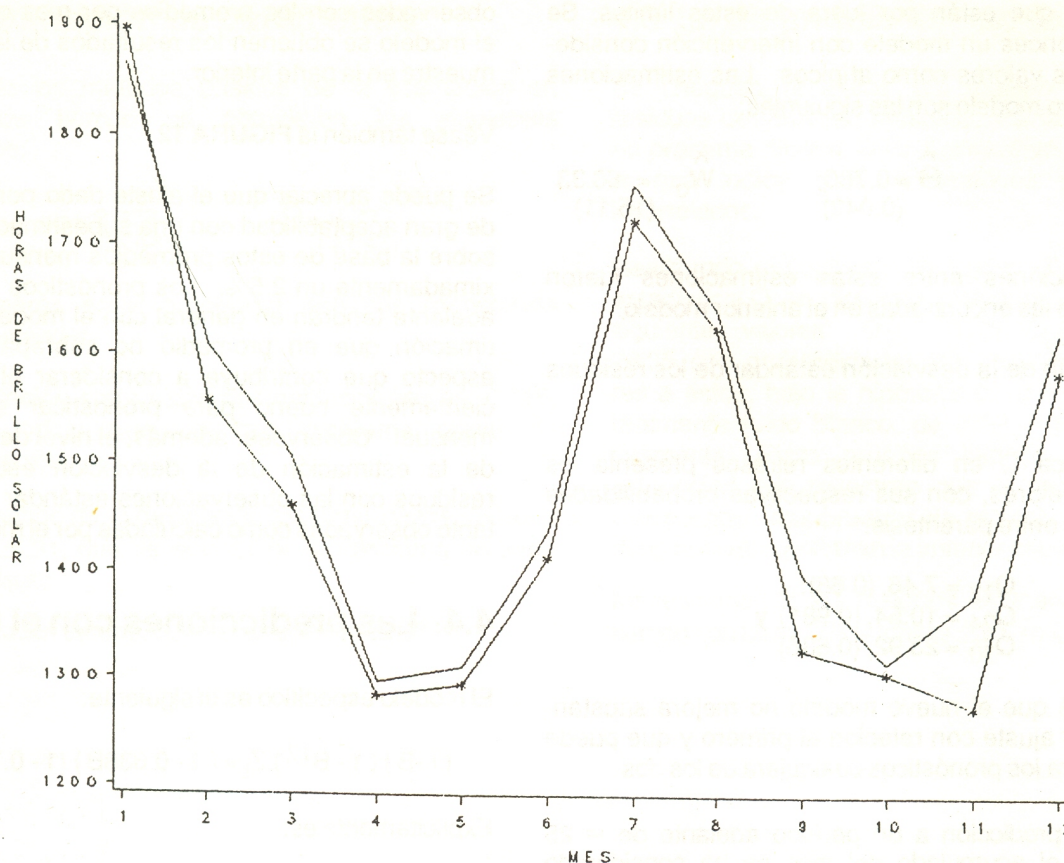
El modelo específico es el siguiente:

$$(1 - B)(1 - B^{12})Z_t = (1 - 0.638B)(1 - 0.777B^{12})a_t$$

Explícitamente es:

$$Z_t = Z_{t-1} + (Z_{t-12} - Z_{t-13}) + a_t - 0.638a_{t-1} \\ - 0.777a_{t-12} + 0.496a_{t-13}$$

MES	PROMEDIO OBSERVADO	PROMEDIO CALCULADO CON EL MODELO	DIFERENCIAS	DESVIACIONES ESTANDAR	
				Observadas	Calculadas
Enero	186.6	189.6	-3	28.5	24.7
Febrero	160.9	155.7	5.2	38.3	26.3
Marzo	150.5	146.1	4.4	28.5	27.2
Abril	129.8	128.4	1.4	30.5	23.6
Mayo	131.2	129.4	1.8	21.7	27.6
Junio	143.9	141.5	2.4	21.3	22.9
Julio	175.8	172.3	3.5	25.3	16.6
Agosto	164.2	162.5	1.7	23.7	21.6
Septiembre	140.0	132.9	7.1	21.7	18.0
Octubre	131.7	130.7	1.0	23.1	23.6
Noviembre	137.9	127.5	10.4	19.6	15.2
Diciembre	162.1	158.4	3.7	29.1	18.9



LINEA = OBSERVADO ASTERISCO = MODELO

FIGURA 12. Brillo solar promedio mensual

La función de pronóstico para l periodos adelante con origen en t es:

$$\hat{Z}_t(l) =$$

$$E \left[Z_{t+l} \mid \Theta, \Theta, Z_t, Z_{t-1}, \dots \right] = [Z_{t+l}]$$

valor esperado condicional

Donde:

$$\{ Z_{t+j} \} = \begin{cases} Z_{t+j} & \text{para } j \leq 0 \\ \hat{Z}_t(j) & \text{para } j > 0 \end{cases}$$

$$\{ a_{t+j} \} = \begin{cases} a_{t+j} & \text{para } j \leq 0 \\ 0 & \text{para } j > 0 \end{cases}$$

Para obtener pronósticos, se reemplazan las Z desconocidas por pronósticos y las a desconocidas por ceros. Las a conocidas son los errores de pronóstico un período adelante, esto es, $a_t = Z_t - Z_{t-1}(1)$

La función de pronóstico para un período adelante con origen en t es:

$$\hat{Z}_t(1) = 0.362Z_t + 0.223Z_{t-11} - 0.504Z_{t-12} + 0.638\hat{Z}_{t-1}(1) + 0.777\hat{Z}_{t-12}(1) - 0.496\hat{Z}_{t-13}(1) \quad (16)$$

Es decir, el pronóstico de brillo solar, por ejemplo, para julio de un año cualquiera, con base en junio del mismo año, estará basado en las observaciones de junio de ese año, de junio y julio del año anterior y en los pronósticos de junio con origen en mayo de ese año y de junio y julio, con orígenes en mayo y junio respectivamente, del año anterior; todos ellos con las ponderaciones dadas en (16).

De manera análoga se construye el pronóstico a dos o más periodos adelante con origen en t .

Las ponderaciones ψ : Para determinar la fórmula de actualización y obtener la varianza del error de pronóstico se requieren las estimaciones de las ponderaciones Ψ cuando el modelo se expresa en la forma:

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t-j} \quad (17)$$

Sea $\lambda = 1 - \theta$ y $\Lambda = 1 - \Theta$

Box y Jenkins (1976) desarrollaron un método para encontrar estas estimaciones de Ψ_j en términos de λ y Λ

La fórmula de actualización es:

$$\hat{Z}_{t+1}(1) = \hat{Z}_t(1) + \Psi_1 a_{t+1} \quad (18)$$

Por ejemplo, supóngase que acaba de observarse el brillo solar de junio y se desea pronosticar el brillo solar de septiembre teniendo en cuenta esta nueva observación de junio que acaba de producirse. Entonces, el nuevo pronóstico para septiembre, actualizado, se basa en el pronóstico anterior para ese mismo mes de septiembre pero con origen en mayo y en el error de pronóstico de junio con base en mayo, debidamente ponderado con el Ψ_1 .

La varianza del error de pronóstico para l períodos adelante es:

$$V(l) = \left[1 + \Psi_1^2 + \dots + \Psi_{l-1}^2 \right] \sigma a^2 \quad (19)$$

Las desviaciones estándar de errores de pronóstico para meses sucesivos adelante durante un año son las siguientes:

l	$\sigma(l)$
1	25.9
2	27.5
3	29.0
4	30.5
5	31.9
6	33.3
7	34.5
8	35.8
9	37.0
10	38.2
11	39.3
12	40.4

Si se expresa el modelo en la forma invertida,

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j Z_{t-j} + a_t \quad (20)$$

Se observa que el primer término a la derecha del signo igual es una media móvil ponderada de los valores previos observados del proceso. La expresión en (20) puede escribirse así:

$$Z_t = \bar{Z}_{t-1}(\Pi) + a_t$$

Para un modelo ARIMA (0,1,1) se puede demostrar que

$$\Pi_j = \lambda (1 - \lambda)^{j-1}; \quad \text{con } \lambda = 1 - \theta$$

$$\text{Entonces, } \bar{Z}_{t-1}(\Pi) = \bar{Z}_{t-1}(\lambda)$$

y es en este caso una media móvil ponderada exponencialmente (MVPE). Obsérvese que las ponderaciones de las observaciones previas son:

$$\lambda, \lambda(1 - \lambda), \lambda(1 - \lambda)^2, \lambda(1 - \lambda)^3, \dots$$

las que van decreciendo exponencialmente.

En el caso que se estudia se tienen las siguientes ponderaciones para la estructura regular y estacional:

regular: 0.36, 0.23, 0.14, 0.09, 0.03, 0.02, 0.01, 0.009, ...

estacional: 0.22, 0.17, 0.13, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01, ...

Esta MVPE mide la localización o nivel del proceso en la fecha t , y cada nuevo nivel se obtiene interpolando entre la nueva observación y los previos niveles:

$$\bar{Z}_t(\lambda) = \lambda Z_t + (1 - \lambda) \bar{Z}_{t-1}(\lambda)$$

Si $\lambda = 1$, el nuevo nivel ignora completamente el nivel previo; si λ tiende a cero, el nuevo nivel depende mucho del nivel anterior con una ponderación cercana a uno.

Para el caso del brillo solar los nuevos niveles, tanto en la parte regular como en la estacional, dependen en gran parte de los niveles previos.

Box et al (1976) presentan las siguientes expresiones

$$Z_t = \bar{Z}_{t-1}(\lambda) + a_t$$

$$\bar{Z}_t(\lambda) = \bar{Z}_{t-1}(\lambda) + \lambda a_t$$

lo que indica que cada nuevo valor Z_t del proceso se obtiene con base en el nivel anterior y en un efecto a_t , pero que solo una proporción λ de ese efecto aleatorio es realmente absorbido en el nuevo nivel; el resto de ese efecto aleatorio en proporción $1 - \lambda$ se diluye. Para el caso del brillo solar, en la parte regular, los efectos aleatorios se diluyen en un 64% y en la parte estacional en un 78% aproximadamente.

Para el modelo construido, dada su estructura MA tanto en su parte regular como estacional, el pronóstico una fecha adelante se puede obtener con base en la siguiente expresión (Box y Jenkins(1976)):

$$\hat{Z}_t(1) = MVPE_{\lambda}(Z_t) + MVPE_{\Lambda} (Z_{t-11} - MVPE_{\lambda} Z_{t-12})$$

Lo que indica que si se desea pronosticar el brillo solar del mes de julio con origen en junio, ese pronóstico es una media móvil ponderada exponencialmente, con ba-

se en λ , de los meses anteriores hasta junio, corregida por una segunda media móvil ponderada exponencialmente en los años anteriores, con base en Λ , de las diferencias entre el brillo solar real de julio y la correspondiente media móvil ponderada exponencialmente, con base en λ , de los meses anteriores en esos años. Esta es una importante característica de este tipo de modelos para captar especialmente picos. La FIGURA 13 muestra los datos correspondientes a las observaciones y a los valores obtenidos con base en el modelo.

5. OTRO MODELO ALTERNATIVO

Tomando como intervalo básico las pentadas, el nuevo valor de s es 73, sobre la base de una estacionalidad anual. Siguiendo el procedimiento anterior, ahora con 1898 observaciones, se ajustó un primer modelo ARIMA de orden

$$(0,1,1)_{73} \times (0,1,1)$$

$$MA(1)_{73} \times MA(1)$$

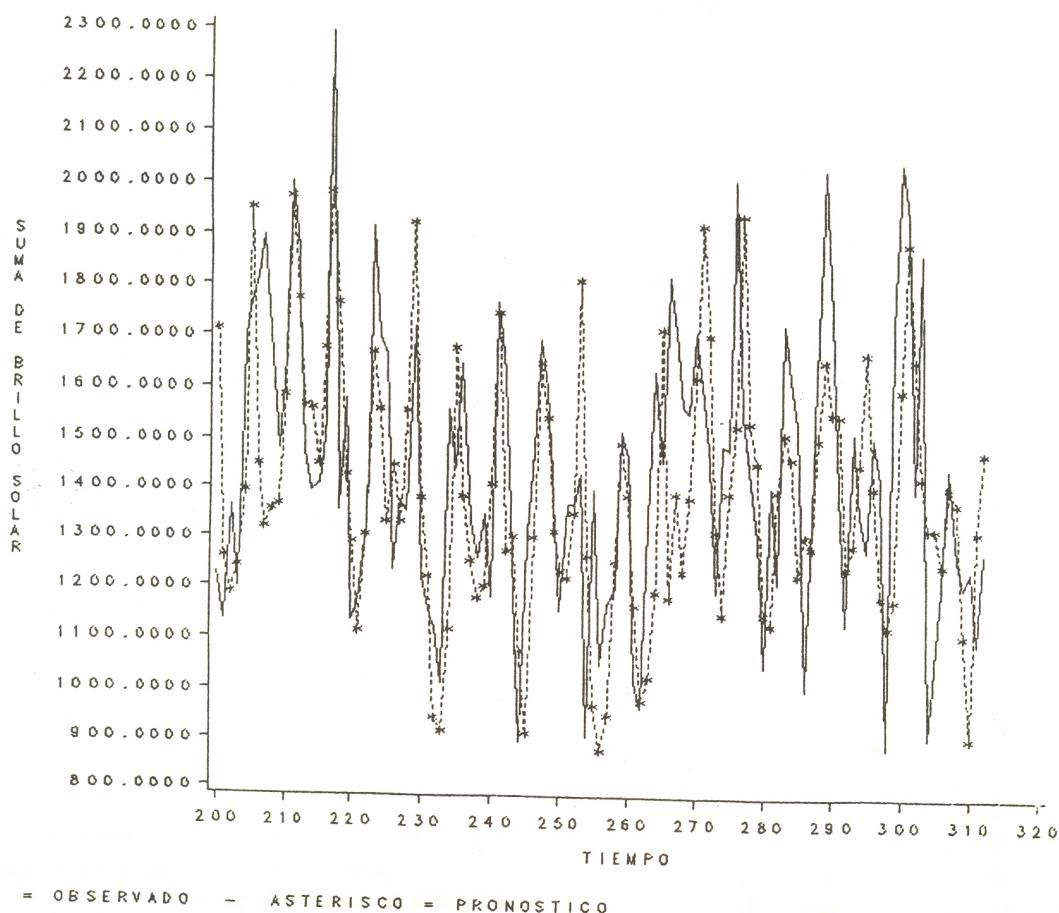


FIGURA 13. Brillo solar mensual - $Q = (1)(12)$

Este resultó inadecuado; la prueba de Ljung-Box a través de la estadística Q dio valores muy altos y probabilidades que no superaron el 2%. Con base en la estructura de los residuos se hizo una reformulación obteniéndose un modelo satisfactorio de la siguiente forma:

$$(1 - \phi B)(1 - B)(1 - B^{73})Z_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^{73})a_t$$

No se requirió ninguna transformación de los datos originales.

Las estimaciones son:

$$\hat{\phi} = 0.112; \quad \hat{\theta} = 0.900; \quad \hat{\Theta} = 0.881$$

(0.025) (0.011) (0.017)

Las estimaciones de los coeficientes de correlación son:

$$r(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = 0.481;$$

$$r(\hat{\phi}, \hat{\Theta}) = -0.053;$$

$$r(\hat{\theta}, \hat{\Theta}) = -0.183$$

La desviación estándar de los residuos es $\hat{\sigma} = 7.70$

La estadística Q con sus probabilidades a diferentes retrasos es:

$Q_6 = 1.46$, $Q_{12} = 10.48$, $Q_{24} = 19.11$, $Q_{36} = 35.53$ con probabilidades 0.69, 0.31, 0.58, 0.35 respectivamente. Las fas y las fap de los residuos no presentan coeficientes significativos y se acepta bajo la prueba el supuesto de ruido blanco de los residuos.

6. CONSIDERACIONES FINALES

- (1) La desestacionalización con este enfoque es un procedimiento que, apoyado en una importante base teórica y con una metodología relativamente sencilla, lo hace que sea de gran aplicación práctica en muchos casos o fenómenos del mundo real.
- (2) Para el caso estudiado resultó de gran efectividad, lo que permite concluir que debe esperarse que también lo será para el resto de variables del clima que presentan características análogas.
- (3) El primer modelo ajustado con base en observaciones mensuales es muy satisfactorio y se espera que su aplicación para los pronósticos lo caracteri-

ce como un instrumento de gran potencialidad. El segundo modelo con base en observaciones pentadales resultó también satisfactorio, lo que permitirá realizar pronósticos a intervalos más cortos y con mayor detalle ajustándose mejor a las condiciones del modelo general de simulación que se construye para el cultivo del café en Colombia.

- (4) Esta teoría con sus correspondientes métodos abre un gran camino para el estudio multivariante y dinámico de las relaciones entre las variables de clima y de éstas con las variables de crecimiento y producción del cultivo del café. Es, por lo tanto, una potente herramienta para el análisis y simulación de sistemas complejos. 🍏

BIBLIOGRAFIA

1. BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, San Francisco: Holden - Day.
2. BOX, G.E.P. and TIAIO, G.C. (1975). *Intervention analysis with applications to economic and environmental problems*. Journal of American Statistical Association, 70, 70-79.
3. CASTAÑO, O. (1990). *Análisis estadístico de fenómenos atmosféricos por series de tiempo para la sabana de Bogotá*. Tesis de grado, Magister en Ingeniería Eléctrica. Universidad Nacional, Bogotá.
4. CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIONES DEL CAFE, CENICAFE. (1991). *Anuario Meteorológico 1988*. Chinchiná, Caldas, Colombia.
5. GRANGER, C.W.; NEWBOLD, P. (1986). *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press, Inc. New York.
6. HANCOCK, D.J.; YARGER, D.N. (1979). *A cross-spectral analysis of sunspots and monthly mean temperatures and precipitation for the contiguous United States*. Journal of the Atmospheric Sciences, 36, 746-756.
7. INSTITUTO COLOMBIANO DE HIDROLOGIA - METEOROLOGIA Y ADECUACION DE TIERRAS - HIMAT e INSTITUTO DE ASUNTOS NUCLEARES (1986). *Estudio de Radiación Solar en Colombia*.
8. JARAMILLO R., A. (1974). *Análisis de los vientos en Cenicafe y Naranjal Avances Técnicos*. Cenicafe, Colombia N° 36. 1974.

9. **JARAMILLO R., A. (1982).** *Balance Hídrico de la Zona Cafetera Colombiana.* Cenicafé. Colombia 33(1):15-34.
10. **JARAMILLO R., A. (1985).** *Continuidad de los períodos húmedos de la zona cafetera.* Cenicafé. Colombia 36(4):125-138.
11. **KUHL, R.; BUXTON, D.; BRIGGS, R. (1976).** *Application of Time Series Analysis to Investigate Crop and Environment Relationships.* Agronomy Journal 68(3):491-495.
12. **LJUNG, G.M.; BOX, G.E.P. (1978).** *On a measure of lack of fit in time series models.* Biometrika, 65, 297-303.
13. **LHOMME, J.; GOMEZ, L.; JARAMILLO R., A. (1985).** *Evaluación de un modelo para caracterizar las condiciones hídricas de la zona cafetera colombiana.* Cenicafé, Colombia 36(2):64-76.
14. **MADDEN, R.A. (1977).** *Estimates of the autocorrelations and spectra seasonal mean temperatures over North America.* Monthly Weather Rivew, 105, 9-18.
15. **MAKRIDDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S.; MCGEE, V. (1978).** *Forecasting: Methods and Applications.* Second Edition. John Wiley and Sons. New York.
16. **MONTGOMERY, D.; JOHNSON, L. (1976).** *Forecasting and Time Series Analysis.* McGraw-Hill Book Company. New York.
17. **PANDIT, S.M.; WU S.M. (1983).** *Time series and system analysis with applications.* John Wiley. New York.
18. **PEÑA, D. (1987).** *Estadística. Modelos y Métodos. 2. Modelos lineales y series temporales.* Alianza Editorial. Madrid.
19. **PEÑA, D. (1989).** *Influential observations in time series.* Journal of Business and Economic Statistics.
20. **PEREZ, S.; GALLEGO, J.; CASTILLO, E. (1989).** *Modelos ARIMA para la temperatura media anual en seis ciudades españolas.* Revista de Meteorología. A.M.E.
21. **PERSAUD, N.; CHANG, A.C. (1984).** *Time series analysis of daily solar radiation and air temperature measurements for use in computing potencial evapotranspiration.* Transactions of the A.S.A.E. (U.S.A.) 28, 2, 462-470.
22. **PRUSCHA, H. (1986).** *A note on time series analysis of yearly temperature data.* Journal Royal Statistical Soc., A. 149, 174-185.
23. **TROJER, H. (1954).** *El tiempo reinante en Colombia, sus características y su desarrollo. I Parte. Estudios básicos para una climatología dinámica de Colombia.* Boletín Técnico Cenicafé, Colombia 2(13):1-43.
24. **TROJER, H. (1960).** *Una posibilidad para pronósticos del tiempo a largo plazo para la agricultura tropical.* Cenicafé, Colombia 11(6):161-171.
25. **URIEL, E. (1985).** *Análisis de series temporales. Modelos ARIMA,* Madrid.