

**ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE
DIAPHORINA CITRI EN PRESENCIA DE
TAMARIXIA RADIATA Y OTROS
ENEMIGOS NATURALES**

EDWARD ADRIÁN CRUZ BUILES

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
2024**

**ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE
DIAPHORINA CITRI EN PRESENCIA DE
TAMARIXIA RADIATA Y OTROS
ENEMIGOS NATURALES**

EDWARD ADRIÁN CRUZ BUILES

Código de estudiante 2005057, Plan 7179

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al
título de Magíster en Ciencias con énfasis en Matemáticas

Director:

Héctor Jairo Martínez Romero, Ph.D

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
2024**

A mi padre Reinaldo Cruz, por su apoyo incondicional; a mi madre querida Rosa María Builes, que tanto me ha ayudado en este proceso; a Martha Leyla que por su amor estoy aquí, a mis hermanos y familia. En especial, a mi linda princesita María Camila Cruz Rayo que siempre ha creído en mí, y por ella doy mi vida. Gracias a todos los que en este proceso brindaron un poquito de su cariño y admiración por mí.

Agradecimientos

Agradezco al profesor Héctor Jairo Martínez Romero, quien siempre me ha brindado su apoyo y guía. Su dedicación y acompañamiento han sido fundamentales en mi formación universitaria. Gracias a su conocimiento y paciencia, he adquirido la confianza necesaria para continuar con mi trayectoria académica. Desde mis años de pregrado, ha creído en mí, contribuyendo significativamente a mi desarrollo intelectual y académico.

También quiero expresar mi gratitud a los profesores del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad del Valle, quienes han hecho posible que avance en mis estudios. Finalmente, agradezco a la Universidad del Valle por brindarme la oportunidad de alcanzar un nuevo logro académico.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	6
1. Introducción	8
2. Diaphorina citri Kuwayana	10
2.1. Características generales	10
2.2. Ciclo de vida	11
2.3. Interacción entre <i>Diaphorina citri</i> y brotes	13
3. Enemigos naturales de <i>Diaphorina citri</i>	15
3.1. <i>Tamarixia radiata</i>	15
3.1.1. Características generales	15
3.1.2. Ciclo de vida	17
3.1.3. Desarrollo y comportamiento de <i>Tamarixia radiata</i>	17
3.2. Hongos entomopatógenos (<i>Hirsutella citriformis</i>)	19
3.3. Depredadores	19
3.3.1. <i>Crisopa</i> o <i>Chrysopidae</i>	20
3.3.2. <i>Cycloneda sanguínea</i>	21
4. Modelo Dinámico de interacciones de <i>Diaphorina citri</i> con sus enemigos naturales	22
4.1. Antecedentes	22
4.2. Observaciones	27
5. Modelo propuesto	30
6. Análisis cuantitativo	36
6.1. Puntos de equilibrio	36

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
6.2. Estabilidad del sistema	40
6.3. Simulaciones	43
7. Conclusiones	51
Anexos	53

Resumen

La modelación matemática de la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* resulta fundamental para el diseño de estrategias de control biológico y la prevención de su impacto en la citricultura. Este trabajo de grado desarrolla un modelo mejorado basado en el estudio previo propuesto por investigadores cubanos [11], identificando y corrigiendo inconsistencias en la interpretación y modelación de las interacciones ecológicas del sistema.

A partir de una revisión crítica del modelo propuesto por los investigadores, se detectaron fallas en la definición de variables y en la representación de términos que no reflejan adecuadamente la dinámica biológica de *Diaphorina Citri* y sus enemigos naturales. En este trabajo de investigación se propone un nuevo modelo matemático que incorpora de manera precisa las interacciones del insecto fitófago *Diaphorina Citri* con sus enemigos naturales, la avispa parasitoide *Tamarixia radiata*, el hongo entomopatógeno *Hirsutella citriformis* y los depredadores generalistas, *Cycloneda sanguinea* y *Chrysopidae*.

Este modelo ajustado considera todas las etapas del ciclo de vida de *Diaphorina citri*, su influencia en los brotes sanos de árboles cítricos en su reproducción, y la interacción con sus controladores biológicos; considera también las etapas de vida de *Tamarixia radiata*, y el aporte en el control biológico del insecto fitófago, con hongos y depredadores.

El modelo fue sometido a un riguroso análisis cualitativo determinando sus puntos de equilibrio, algunos de forma analítica, y otros de forma numérica desde el Método Monte Carlo; luego hacemos el respectivo análisis de estabilidad para estos puntos de equilibrio. Los resultados obtenidos permiten establecer una base teórica más robusta para el manejo integrado de *D. citri* y contribuir a estrategias de control biológico más eficientes. Se concluye que la presencia de *Tamarixia radiata*, *H. citriformis* y los depredadores son determinantes en la regulación de *Diaphorina citri*.

Palabras clave: Modelo dinámico, *Diaphorina citri*, *Tamarixia radiata*, *Hirsute-*

lla citrifomis, Control biológico, Análisis de estabilidad, puntos críticos.

Capítulo 1

Introducción

Diaphorina citri Kuwayana (*Hemiptera Psílido*) es un fitófago oriundo de Asia y tiene como principal hospedante las plantas de los cítricos (*Citrus spp.*), de ahí que su nombre común sea psílido asiático de los cítricos [11]. El daño directo a las plantas cítricas es causado por las ninfas y los adultos que extraen grandes cantidades de savia de las hojas y pecíolos, lo cual debilita las plantas.

El daño indirecto que proporciona *Diaphorina citri* es que es el vector más eficiente de transmisión directa y física de la enfermedad conocida como *Greening* o enverdecimiento de los cítricos (*Huanglongbing*), la cual es transmitida por el 4° y 5° estado ninfal y por el adulto. El agente causal de esta enfermedad es la bacteria *Candidatus Liberibacter asiaticus* (forma asiática), *Candidatus Liberibacter africanus* (forma africana) y *Candidatus Liberibacter americanus* (forma americana). Esta enfermedad tiene una alta incidencia en los continentes asiático, africano y americano y es considerada como un factor limitante para la producción de cítricos en esos continentes.

El psílido tiene presencia a nivel mundial y se localiza en Países Bajos de Asia, América del Sur, América del Norte, África y el Caribe. En Colombia, la especie fue reportada oficialmente por el ICA en el año 2007 [7] y se ha establecido en casi toda la zona citrícola del país.

Para el control de esta plaga, se ha utilizado el control químico por varios años, empleando compuestos como *Dimetoato*, *Aldicarb*, *Monocrotofos*, *Metamidofos*, *Imidacloprid* (*Confidor*) y *Acetamiprid* (*Mospilan*), *Temik*, *Ethion*, *Malathion*, *Piretroides*, *Carbamatos* y *Abamectina* [10]. Sin embargo, el uso extensivo y excesivo de estos químicos ha generado la aparición de plagas resistentes y problemas de residualidad de los productos, afectando la salud humana y el medio ambiente.

El control químico implica altos riesgos ambientales, desequilibrios en el complejo de biocontroladores nativos y otras plagas, así como un incremento en el nivel de

residuos en frutas. Por consiguiente, es necesario buscar y desarrollar alternativas de control de plagas insectiles.

Desde su identificación, se han realizado estudios dirigidos a conocer la biología del insecto, determinar sus principales enemigos naturales y evaluar su comportamiento en campo en presencia de otros insectos fitófagos. Particularmente, se han notificado como enemigos naturales de *D. citri* los depredadores *Cycloneda sanguínea*, *Chilocorus cacti*, *Exochomus cubensis* Dimn, *Scymnus distinctus* Casey (Coleóptera: Coccinellidae), *Chrysopa* sp. (Neuróptera: Chrysopidae) y *Ocyptamus* sp. (Díptera: Syrphidae), el parásito *Tamarixia radiata* Waterston (Himenóptera: Eulophidae) y el hongo *Hirsutella citriformis* Speare [11].

De ahí que se establezcan diferentes tipos de relaciones en el mismo ecosistema que conducen a la necesidad de elaborar un modelo dinámico que permita predecir densidades poblacionales.

Los modelos de ecuaciones diferenciales que incorporan todas las etapas del ciclo de vida de las poblaciones y sus interacciones con otros organismos vivos describen un sistema no lineal complejo que, a pesar de simplificar algunos elementos del agroecosistema, pueden simular la dinámica de un insecto a partir del conocimiento de algunos parámetros biológicos.

Con base en estudios realizados y reportados por los cubanos que modelan el problema y lo exponen en el artículo [11], se ha propuesto este modelo teórico a fin de describir las interacciones de *D. citri* con sus enemigos naturales.

En este trabajo, plantearemos y analizaremos una versión mejorada del anterior modelo que describa la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* Kuwayama en interacción con los brotes de la planta hospedante, y sus principales enemigos naturales: la *Tamarixia radiata*, el hongo *Hirsutella citriformis* y algunos depredadores de huevos y ninfas de *D. citri*, donde solo se considerarán daños directos por el psílido en los brotes. Tomaremos como base el trabajo realizado por los científicos cubanos [11], enseguida realizaremos el análisis cualitativo del modelo construido, daremos una interpretación de los resultados obtenidos y obtendremos unas conclusiones sobre el problema tratado.

Diaphorina citri Kuwayana

En este capítulo, se presenta de manera breve algunas características generales importantes de *D. citri*, su origen, el tipo de reproducción, los procesos de oviposición y alimentación, los enemigos naturales más determinantes, el ciclo de vida en sus 5 estadios y su interacción con los brotes.

2.1. Características generales

Diaphorina citri Kuwayana (*D. citri*) es un hemíptero fitófago originario de Asia, conocido por ser el vector del *Candidatus Liberibacter* spp., bacteria causante del *huanglongbing* (HLB), una de las enfermedades más destructivas de los cítricos [10]. Su ciclo de vida consta de huevo, cinco instares ninfales y adulto. Los huevos son pequeños, de color amarillo-anaranjado, y se depositan en los brotes tiernos. Las ninfas, de tonalidad amarilla con ojos rojizos, permanecen en los brotes alimentándose hasta alcanzar la madurez. Los adultos miden entre 3 y 4 mm, presentan un color marrón grisáceo y adoptan una postura inclinada característica al alimentarse.

La reproducción de *D. citri* es altamente eficiente, con hembras capaces de ovipositar hasta 857 huevos en toda su vida, dependiendo de la temperatura y la calidad del hospedante. Puede reproducirse por partenogénesis facultativa, generando machos en ausencia de fecundación. Su desarrollo es rápido, variando entre 15 y 47 días según las condiciones ambientales.

Las poblaciones de *D. citri* están reguladas por diversos enemigos naturales, como depredadores de la familia *Coccinellidae* (*Cycloneda sanguinea*, *Chilocorus cacti*), *Chrysopidae* (*Chrysopa* sp.) y *Syrphidae* (*Ocyrtamys* sp.), además del parasitoide *Tamarixia radiata*, que ataca las ninfas, y el hongo *Hirsutella citriformis*, que infecta ninfas y adultos. Estas interacciones ecológicas son clave para el control

biológico de la plaga.

La dispersión del insecto está directamente relacionada con la disponibilidad de brotes tiernos, que son esenciales para la oviposición y el desarrollo larval. Su movilidad y adaptación a distintos ambientes lo convierten en un organismo difícil de manejar, lo que ha impulsado estudios sobre su dinámica poblacional y estrategias de control biológico para mitigar su impacto en la citricultura.

2.2. Ciclo de vida

El ciclo de vida de este insecto está fuertemente relacionado con las plantas donde se hospeda [10]. El rango de hospedantes incluye veinticinco géneros de la familia *Rutácea*, sin embargo, no todos son buenos hospedantes; la *Diaphorina citri* tiene preferencias en los géneros *Citrus* y *Murraya*. Además, diferentes autores señalan la importancia de la temperatura y humedad en la duración del ciclo. La *Diaphorina citri* presenta un ciclo de vida que inicia en los huevos, pasa por cinco estados ninfales hasta llegar al estado adulto(ver figura 2.1).

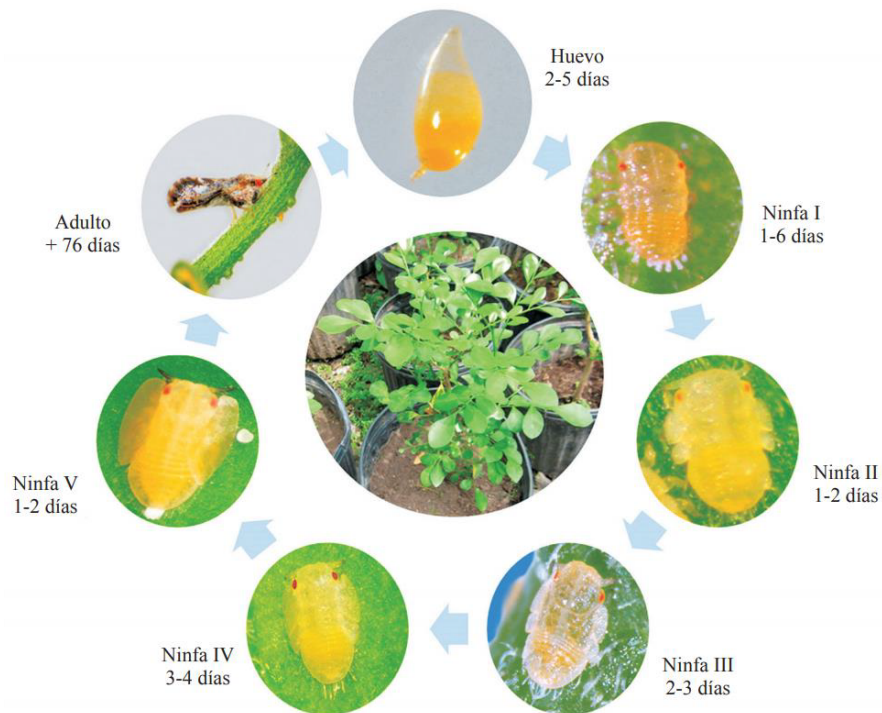


Figura 2.1: Duración de los diferentes estados de desarrollo de *Diaphorina citri*.(García et al., 2016).

Huevos: La hembra de esta especie oviposita los huevos en la base o en las puntas de brotes tiernos. Presentan una forma ovoide con una prolongación alargada

hacia una de las puntas. Recién colocados, son de color amarillo claro y se tornan anaranjados cuando están próximos a eclosionar(ver figura 2.2). Una hembra puede poner más de 800 huevos en su tiempo total de vida. La duración de este estado varía de 2 a 5 días con una temperatura mínima de 25°C y una temperatura máxima de 37.1°C.



Figura 2.2: Huevos de *Diaphorina citri* ovipositados sobre el envés de las hojas tiernas, y en la base foliar y brotes axilares.(Lewis, s/a).

Ninfas: Este insecto pasa por cinco estados ninfales que varían en tamaño según la temperatura a la que se desarrollen. Tienen forma de escama y ojos de color rojo. Las ninfas se alimentan de tejidos tiernos y presentan poca movilidad en los primeros estados de desarrollo(ver figura 2.3). Excretan filamentos cerosos, en forma de espiral que salen del extremo abdominal. Este estado tiene una duración entre 8 y 22 días con una temperatura mínima de 25°C y una temperatura máxima de 37.1°C.

Adultos: Se reconocen por la posición que toman durante el reposo. Se inclinan en un ángulo de 45° aproximadamente con la parte posterior del cuerpo hacia arriba. Su coloración es verde cuando están recién emergidos y cambian a color marrón cuando llegan a la madurez. El macho es levemente más pequeño que la hembra. Los adultos pueden vivir varios meses, pueden durar más de 74 días con una temperatura mínima de 25°C y una temperatura máxima de 37.1°C.(ver figura 2.4)



Figura 2.3: Estados ninfales I a V de *Diaphorina citri*.(Hall, 2018b).



Figura 2.4: Especímenes adultos de *Diaphorina citri*.(Cottrell, 2008).

2.3. Interacción entre *Diaphorina citri* y brotes

Cuando hay brotes disponibles, los psílidos adultos se agrupan en ellos donde se alimentan y se aparean. Después del apareamiento, la hembra debe alimentarse de los brotes para madurar los huevos. Las hembras grávidas tienen un abdomen anaranjado que indica que los huevos están listos para ser depositados. Los brotes también son requeridos para depositar los huevos. La hembra inserta los huevos en los pliegues de las hojas sin expandir, en los bordes de las hojas jóvenes, o en la base de las yemas de las hojas que recién se han comenzado a formar. Una vez los brotes se han expandido y ya no son adecuados para depositar los huevos, los psílidos adultos se alimentan de hojas maduras del mismo árbol o salir en busca de otras plantas hospedantes. El psílido tiene piezas bucales perforadoras chupadoras que usan para alimentarse de las plantas extrayendo la savia. Los brotes son necesarios para el desarrollo de las ninfas, y cuando se alimentan de ellos, excretan melaza y producen túbulos cerosos blancos rizados distinguibles con el que se puede identificar rápidamente colonias de *Diaphorina citri*. La alimentación de

ninfas y adultos provoca malformación en las hojas dando un efecto de “escoba de bruja”, además, los nuevos brotes podrán llegar a morir. Las plantas por alimentación y oviposición de *Diaphorina citri*, sufren pérdida de hojas, muerte del meristemo o la abscisión de brotes enteros [14].

Capítulo 3

Enemigos naturales de *Diaphorina citri*

En este capítulo conoceremos de los enemigos naturales más relevantes de *Diaphorina citri* tales como la *Tamarixia Radiata*, el hongo entomopatógeno *Hirsutella Citriformis*, y dos depredadores *crisopa* y *Cycloneda*: características generales, origen, morfología, algunos datos biológicos, la forma de interacción y reducción de *Diaphorina citri* y la importancia ecológica en el control de éste insecto fitófago.

3.1. *Tamarixia radiata*

En esta sección describimos algunas características importantes de *Tamarixia radiata* tales como: origen, morfología, estadios de desarrollo (ciclo de vida) e interacción con *Diaphorina citri* y su importancia en el control biológico.

3.1.1. Características generales

Tamarixia radiata es un ectoparasitoide idiobionte específico de ninfas del psílido asiático de los cítricos, el cual fue descrito a partir de especímenes que emergieron de ninfas parasitadas de *D. citri* sobre hojas de limón recolectadas en Pakistán (Waterston, 1922) [9]. Se trata de avispiditas pequeñas (aproximadamente 1 mm de longitud), de cuerpo color negro y amarillo, con un par de ojos de color rojo, patas amarillas, y alas transparentes que presentan una venación de color amarillo claro (Chen y Stansly, 2014). Existe un marcado dimorfismo sexual entre hembras y machos adultos. Estos últimos son más pequeños y oscuros en comparación con las hembras; sus antenas son 1,5 veces más largas y se componen de nueve segmentos; así mismo, poseen setas más largas en el funículo (ver Figura 3.1 a). En contraparte, las antenas de las hembras tienen ocho segmentos y carecen de setas largas (ver Figura 3.1 b)) (Onagbola et al., 2009). *T. radiata* ha sido exitosamente introducido para el control de *D. citri* en Reunión, Taiwán, Mauricio,

Filipinas, Arabia Saudita, Indonesia (Java Oriental), Guadalupe y Estados Unidos de América (Florida) (Grafton-Cardwell et al., 2013).



Figura 3.1: Macho (a) y hembra (b) de *Tamarixia radiata* (Lewis, s/a).

3.1.2. Ciclo de vida



Figura 3.2: Ciclo de vida *Tamarixia radiata* (Takumasa Kondo, 2008).

Huevos: La hembra adulta de *Tamarixia radiata* por lo general deposita un huevo, aunque raramente, dos, en el lado ventral de las ninfas especialmente de cuarto y quinto estado de *Diaphorina Citri*, con frecuencia en la división entre el tórax y el abdomen, cerca del punto de unión de las coxas posteriores. Generalmente son transparentes, lo que dificulta su observación. Una hembra adulta de *T. radiata* puede depositar hasta 300 huevos.

Larvas: Las larvas recién nacidas succionan el líquido desde el punto de contacto con el hospedero. Durante su desarrollo, las larvas se mueven por toda la parte ventral del cuerpo de la ninfa y consumen su contenido hasta causar la muerte progresiva de su hospedante. Aunque en ocasiones más de un huevo puede ser colocado debajo de la ninfa, una sola larva del parasitoide suele alcanzar el estado adulto, por tal motivo *T. radiata* es considerado un parasitoide solitario (ver figura 3.3).

Pupas: *Tamarixia radiata* pasa por un estado de prepupa y otro de pupa. Estos procesos ocurren dentro de la ninfa parasitada y se hacen evidentes por el cambio de coloración y aspecto. Durante este paso, las ninfas parasitadas reciben el nombre de momias. Finalizada la fase, las avispas adultas emergen a través de un orificio en el tórax o la cabeza de la momia parasitada (ver figura 3.4).

3.1.3. Desarrollo y comportamiento de *Tamarixia radiata*

El estado larval es móvil y se desplaza por toda la parte ventral abdominal y torácica de la ninfa; mantiene la misma coloración casi transparente de los huevos, lo que hace casi imperceptible su presencia. La alimentación no se hace notoria ya que la ninfa de *D. citri* aún permanece móvil. La duración aproximada de este estado es de cuatro a seis días. Cuando el estado larval es avanzado, la coloración



Figura 3.3: Huevo y larva del primer estado de *Tamarixia radiata* en su hospedero *Diapohorina citri*. (Camila Yesenia García Córdoba, 2008)



Figura 3.4: Desarrollo de *Tamarixia radiata* dentro de una ninfa de *D. citri* parasitada. (Camila Yesenia García Córdoba, 2008)

cambia a amarilla y aunque su desplazamiento por el abdomen y tórax se mantiene, comienza a perder movilidad y se dedica solo a alimentarse de la hemolinfa del hospedante. Durante este tiempo, la ninfa de *D. citri* inicia un período de premomificación y su coloración cambia gradualmente a marrón oscuro. Las heces fecales de la larva se acumulan en la parte posterior de la ninfa para formar lo que se conoce como meconio. A los ocho días, la larva pasa al estado de prepupa. Este estado se caracteriza por la forma alargada y delgada que va tomando la larva; ya se puede observar el esbozo del parasitoide, además de la ausencia de movilidad y la apariencia momificada de las ninfas de *D. citri*. Entre los días nueve y once, se hace notorio el estado de pupa. Doce días posteriores a la puesta del huevo, empiezan a emerger los adultos de *T. radiata* que, con la ayuda de las mandíbulas, perforaran un orificio de salida en la parte dorsal del exoesqueleto de la ninfa de *D. citri*.

3.2. Hongos entomopatógenos (*Hirsutella citri-formis*)

Dentro del control biológico de *D. citri*, se ha detectado la presencia de insectos entomófagos y parasitoides, además de diferentes especies de hongos entomopatógenos, entre los que se incluyen: *Hirsutella citriformis*, *Isaria fumosorosea*, *Lecanicillium lecanii* Zimm, *Beauveria bassiana* y *Metarhizium anisopliae*. Se puede decir que el *H. citriformis* es el único hongo que se ha encontrado causando epizootias de manera natural en *D. citri* en diversas regiones del mundo [4]. La manera de control biológico de *D. citri*, en sus estados ninfales de tercer, cuarto y quinto estado y adultos, por el hongo *Hirsutella citriformis* es por medio de la capacidad infectiva de los conidios que producen estos hongos entomopatógenos. Los conidios son esporas asexuales, que son una parte clave de su ciclo de reproducción y se forman generalmente en el exterior del hongo, en estructuras especializadas llamadas conidióforos. Estos se forman sin la necesidad de un proceso sexual, lo que permite que el hongo se reproduzca rápidamente bajo condiciones favorables, por lo general cuando la humedad es mayor al 80 %; son muy ligeros y pueden ser dispersados fácilmente por el viento, el agua o los animales, permitiendo al hongo colonizar nuevas áreas. Estos conidios se producen a partir de las puntas de los conidióforos, que son hifas especializadas, los cuales una vez maduros, se desprenden y germinan en un nuevo organismo cuando encuentran un ambiente adecuado. Las ninfas de *D. citri* son altamente susceptibles a la infección por *H. citriformis*, por su infección el hongo puede matar a las ninfas antes de que alcancen la madurez, interrumpiendo el ciclo de vida del insecto y reduciendo la población. Sobre el mecanismo de infección en los adultos de *D. citri*, el hongo produce conidios que se adhieren a su superficie, una vez adheridos, las esporas germinan y producen hifas que penetran la cutícula del insecto, entrando en su cuerpo, ahí las hifas se ramifican y colonizan los tejidos internos, consumiendo los nutrientes del huésped produciendo toxinas, hasta conseguir la muerte del insecto, generalmente en pocos días. Este proceso de infección por enfermedades causadas por estos hongos se conoce como “micosis”. También por la eficacia infectiva de los conidios de *H. citriformis*, los adultos sanos de *D. citri* entran en contacto con los conidios de insectos infectados, los insectos sanos también se infectan y mueren.

3.3. Depredadores

En esta sección describimos a algunos depredadores de *D. citri*, en especial *Crisopa o chrysopidae* y *Cycloneda sanguínea*, sus hábitos de depredación, y la forma de control o de reducción de la población de *D. citri*.

3.3.1. *Crisopa o Chrysopidae*

Crisopa o chrysopidae, como también se le conoce, es una familia de insectos que pertenecen al orden neuróptera, y pueden recibir diferentes nombres a través del mundo como *crisopa verde*, *crisopa de alas verdes*, *ojos dorados*, *león de áfidos*, *alas de encaje* o *hadas bonitas* [1].



Figura 3.5: *crisopa o chrysopidae*, (ecured.cu, s.a)

Este tipo de insectos son depredadores generalistas, por lo que sus hábitas más habituales suelen ser las cosechas, el campo y los jardines donde haya suficiente vegetación para poder alimentarse. Por su hábito depredador, la *crisopa o chrysopidae* está muy considerado en el sistema agrícola a nivel mundial. La más utilizada para la comercialización es la *crisálida verde* pues ejerce un control biológico natural sobre muchas especies de plagas. Para atacar, usan la embestida contra su presa; una vez lo tienen, inyectan enzimas por sus puntiagudas mandíbulas para que el contenido del cuerpo de la presa se disuelva y así lo succionan con su mandíbula. Tienen una sección larga al final de la cola que sirve como un agarre estabilizador en el momento en el que ataca a su presa. Debido a la voracidad con que los devora, es que a la larva de la *crisopa o chrysopidae* se le conoce como *león de los áfidos* (ver figura 3.5). Pero su menú no se limita solo a ellos, también puede comer cualquier plaga que tenga el cuerpo blando y pueda cazar, como las cochinillas de los cítricos, ácaros, trips, orugas y huevos de insectos, en especial la *Diaphorina citri*. Según [5], identificaron cinco especies de *crisopidae* en huertas de naranja y limón. Estas son la *Chrysoperla comanche* (Banks), *Chrysoperla rufilabris* (Burmeister), *Chrysoperla carnea* s. lat., *Ceraeochrysa valida* (Banks) y *Ceraeochrysa claveri* (Navás). La *Ch. comanche* y *Ceraeochrysa valida* fueron las especies más abundantes; *Ch. comanche* y *Ch. rufilabris* mostraron mayor capacidad de depredación de estados inmaduros: huevos, ninfas chicas (ninfa 1 y ninfa 2) y ninfas grandes (ninfa 4 y ninfa 5) de *D. citri*. La mayor predominancia de

Chrysoperla comanche en cítricos combinada con la capacidad del consumo de presas sugieren que la *Chrysoperla comanche* puede tener mayor posibilidad de éxito contra el spíldido asiático de los cítricos. El empleo de *crisopa* se propone con una alternativa que vendría a reducir la dependencia exclusiva del control químico para el control de *Diaphorina citri*, además evitaría los riesgos inherentes al uso de tóxicos en el ambiente.

3.3.2. *Cycloneda sanguínea*

La familia *Coccinellidae* es uno de los grupos del orden Coleoptera con mayor importancia ecológica, debido a la constante actividad depredadora que ejercen larvas y adultos sobre sus presas; algunas especies son micófagas, otras tienen hábitos fitófagos, y existen, además, especies que se pueden alimentar de polen. Los depredadores coccinélidos se utilizan para el control de plagas de importancia agrícola; las especies consumidoras de áfidos (Hemiptera: Aphididae) son consideradas como los depredadores de mayor conocimiento taxonómico, y su estudio se le asocia únicamente al cultivo y el rango de presas consumidas. *Cycloneda sanguínea* es una de las especies mejor conocidas dentro de los *Coccinellidae*, y es catalogada como uno de los agentes de control más eficientes de insectos fitófagos estacionarios como la *Diaphorina citri* y los pulgones [13]. Su presencia ha sido registrada en diversos cultivos de importancia económica en el mundo y es considerado como uno de los depredadores de áfidos más importantes en la citricultura mexicana, al ejercer un control natural sobre las poblaciones de *Aphis spiraecola* Patch, *Aphis gossypii* Glover, *Toxoptera citricida* Kirkaldy y *Toxoptera aurantii* Boyer de Fonscolombe, vectores del Virus de la Tristeza de los Cítricos (VTC).

Modelo Dinámico de interacciones de *Diaphorina citri* con sus enemigos naturales

En este capítulo, exponemos el modelo propuesto en [11], presentando el diagrama de interacciones entre las poblaciones y la descripción de las variables y parámetros, hacemos una serie de observaciones al anterior modelo y finalmente exponemos nuestra propuesta de dinámica de *Diaphorina citri* con *Tamarixia radiata* y otros enemigos naturales, presentando un diagrama mejorado de las interacciones entre las poblaciones y redefiniendo las variables y parámetros.

4.1. Antecedentes

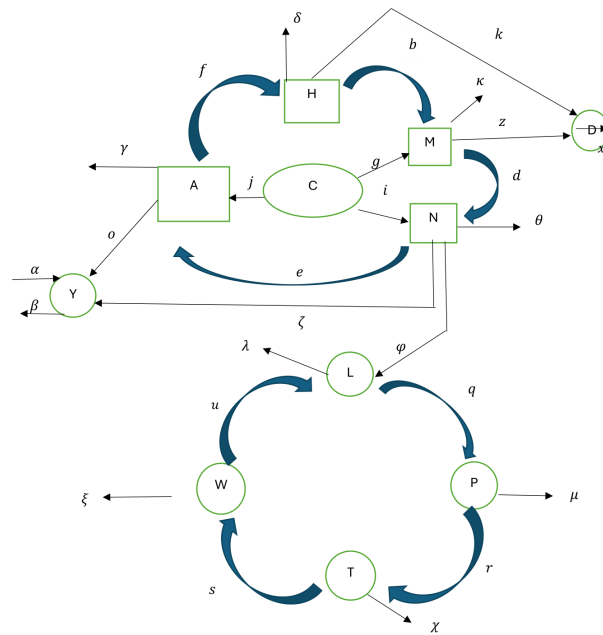
En el artículo [11], los autores proponen un modelo teórico para describir las interacciones de *Diaphorina citri* con sus enemigos naturales. En el modelo, se definieron como variables la densidad poblacional de cada uno de los estados de *D. citri*, de cada estado de *Tamarixia radiata*, de los depredadores, de los hongos *Hirsutella citriformis* y de los brotes sanos existentes.

Concretamente, se tienen en cuenta las siguientes variables:

- H : número de huevos de *D. citri*.
- M : total de ninfas de primer y segundo estado de *D. citri*.
- N : total de ninfas no parasitadas o infectadas de tercer, cuarto y quinto estado de *D. citri*.
- A : total de adultos no infectados de *D. citri*.

- D : total de otros depredadores.
- Y : total de hongos *Hirsutella citriformis*.
- W : número de huevos de *Tamarixia radiata*.
- L : número de larvas de *Tamarixia radiata*.
- P : total de pupas de *Tamarixia radiata*.
- T : total de adultos de *Tamarixia radiata*.
- C : total de brotes sanos.
- t : tiempo de observación.

Las relaciones poblacionales que se establecen en el ecosistema se presentaron en un diagrama diseñado según las interacciones de los niveles tróficos. La *Diaphorina citri* tiene una fase de huevo seguida de cinco estados ninfales, hasta llegar al adulto. Los depredadores se caracterizan por alimentarse de los huevos, y los primeros y segundos estados ninfales de *D. citri*. La *Tamarixia radiata* se asocia al tercer, cuarto y quinto estados ninfales de *D. citri* y el hongo *Hirsutella citriformis* parasita al adulto y al tercer, cuarto y quinto estados del psílido, lo que permite contemplar el control natural de todas las fases de desarrollo de *D. citri*. Por consiguiente, las relaciones poblacionales se pueden representar por el esquema de la figura 4.1.



A partir del diagrama y considerando que el psílido aparece en la fase de brotación y que los brotes sanos pueden perderse por otras causas diferentes a la presencia de plagas, se elabora el modelo teórico que mediante un sistema no lineal de 11 ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= fAC - bH - kHD - \delta H \\
\frac{dM}{dt} &= bH - dM - zMD - \kappa M \\
\frac{dN}{dt} &= dMC - \varphi NL - eN - \theta N - \zeta NY \\
\frac{dA}{dt} &= eNC - oAY - \gamma A \\
\frac{dD}{dt} &= -xD + kHD + zMD \\
\frac{dY}{dt} &= \alpha Y(1 - \beta Y) + oAY + \zeta NY \\
\frac{dW}{dt} &= sT - uW - \xi W \\
\frac{dL}{dt} &= uW + \varphi NL - qL - \lambda L \\
\frac{dP}{dt} &= qL - rP - \mu P \\
\frac{dT}{dt} &= rP - \chi T \\
\frac{dC}{dt} &= \nu C(1 - \eta C) - gCM - iCN - jAC
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Los parámetros biológicos referidos en este modelo se definen en la Tabla 4.1.

Cuadro 4.1: Parámetros poblacionales

Parámetro	Definición
b	Promedio de huevos que eclosionan
d	Promedio de ninfas del 1er y 2do estado que pasan a estados superiores
e	Promedio de ninfas que llegan a adulto
f	Promedio de huevos por adulto de <i>D. citri</i>
δ	Tasa de mortalidad de huevos de <i>D. citri</i>
κ	Tasa de mortalidad de ninfas de <i>D. citri</i> del 1er y 2do estado
θ	Tasa de mortalidad de ninfas de <i>D. citri</i> del 3er, 4to y 5to estado
γ	Tasa de mortalidad de adultos de <i>D. citri</i>
k	Tasa de depredación de huevos de <i>D. citri</i>
z	Tasa de depredación de ninfas del 1er y 2do estado de <i>D. citri</i>
φ	Tasa de parasitismo de <i>Tamarixia radiata</i>
o	Infestación de adultos de <i>D. citri</i> por hongo
ζ	Infestación de ninfas del 3er, 4to y 5to estado de <i>D. citri</i> por hongo
x	Tasa de mortalidad de depredadores
α	Tasa de crecimiento del hongo
β	Tasa de mortalidad del hongo
q	Promedio de larvas de <i>T. radiata</i> que pasan a pupa
r	Promedio de pupas de <i>T. radiata</i> que pasan a adulto
s	Tasa de reproducción de <i>T. radiata</i>
u	Promedio de huevos de <i>T. radiata</i> que eclosionan
λ	Tasa de mortalidad de larvas de <i>T. radiata</i>
μ	Tasa de mortalidad de pupas de <i>T. radiata</i>
χ	Tasa de mortalidad de adultos de <i>T. radiata</i>
ξ	Tasa de mortalidad de huevos de <i>T. radiata</i>
g	Pérdidas atribuidas a la presencia de ninfas de 1er y 2do estado de <i>D. citri</i>
i	Pérdidas atribuidas a la presencia de ninfas de 3er, 4to y 5to estado de <i>D. citri</i>
j	Pérdidas atribuidas a la presencia de adultos de <i>D. citri</i>
ν	Parámetro de la curva de crecimiento logístico de los brotes sanos de la planta
η	Parámetro de la curva de crecimiento logístico de los brotes sanos de la planta

4.2. Observaciones

A pesar de las limitaciones encontradas en el modelo propuesto por investigadores cubanos en [11], particularmente en la definición de variables, la formulación de ciertos términos ecológicos y la correspondencia biológica del sistema, su enfoque inicial representa un valioso punto de partida para nuestra propuesta. La inclusión simultánea de múltiples enemigos naturales (*Tamarixia radiata*, depredadores y hongos entomopatógenos), así como la intención de modelar el ciclo de vida de *Diaphorina citri*, constituyen aspectos destacables. El presente trabajo retoma dicha estructura ecológica básica y la fortalece mediante una reformulación matemática más rigurosa, coherente con la biología de las especies involucradas. Además, se mejora sustancialmente el tratamiento cualitativo del sistema, mediante el análisis de puntos de equilibrio, aspectos que no fueron desarrollados adecuadamente en el modelo original. Por tanto, nuestro modelo no solo corrige y completa la propuesta anterior, sino que también amplía su aplicabilidad en escenarios reales de control biológico.

El modelo referenciado en el trabajo realizado en [11] propuso un sistema de ecuación diferenciales para modelar la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* en interacción con sus enemigos naturales, la *Tamarixia radiata*, depredadores y hongos entomopatógenos. Es una gran ventaja como enfoque inicial pues incorporó múltiples agentes de control biológico de la *Diaphorina citri*, e intentó representar el ciclo de vida del insecto. Propuso una estructura general de interacción trófica, depredadores, parasitoides, hongos y plantas hospedantes.

Observamos unas inconsistencias de interpretación biológica y algunas fallas en el modelo original, el modelo presenta inconsistencia de habilidades importantes como errores en la definición de variables, términos mal planteados biológicamente, falta de coherencia entre la biología real y el modelo matemático.

A pesar de sus fallas el modelo original, es acertado, pues tiene elementos valiosos que se pueden tomar en nuestro estudio, como la estructura ecológica básica, el diagrama de interacciones y la identificación de actores claves como la *Diaphorina citri*, y sus enemigos naturales.

El modelo intentaba integrar varias especies y procesos ecológicos como oviposición, mortalidad, parasitismo, depredación, infección fúngica, los cuales siguen siendo deseables para nosotros.

Sobre el planteamiento inicial de estabilidad el modelo es algo limitado, pues buscaba identificar puntos de equilibrio y entender su significado ecológico, pero esto no se logró, lo que nos motivaba, investigar, remodelar, mejorar y hacer un análisis de estabilidad riguroso, tener mejor estructura matemática, y más realismo.

Ahora desde la estructura del modelo base dado por [11], hicimos las siguientes

modificaciones para obtener nuestro modelo:

1. Reducimos las poblaciones estructurales L y P de *Tamarixia radiata* considerando larvas y pupas en una sola población L , simplemente para eliminar una variable, y reducir el sistema a 10 ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que ajustamos los parámetros q y r a solo r y toma la nueva interpretación de tasa de transición de larvas y pupas a etapa adulta de *T. radiata*.
2. Observamos que hay un problema de interpretación en las tasas de transición a ninfas avanzadas *D. citri*, y después a adultas de *D. citri*, las cuales no tienen en cuenta el contacto con los brotes, los cuales deben ser dMC y eNC .
3. Observamos una mala interpretación biológica en el parámetro k que representa la tasa de depredación de huevos de *D. citri*, en la expresión kH y se utiliza de igual forma después como tasa de crecimiento de depredadores por alimentación de huevos de *D. citri*, por tanto se deja k como tasa de depredación y se define el nuevo parámetro ϵ para tasa de crecimiento de depredadores por alimentación de huevos de *D. citri*. De igual forma sucede con z que representa la tasa de depredación de huevos y se define el nuevo parámetro λ para la tasa de crecimiento de depredadores por alimentación de ninfas jóvenes de *D. citri*. Adicionalmente también sucede con los hongos, las tasas de infección del hongo a las ninfas avanzadas y adulto de *D. citri* y las tasas de incremento del hongo debido a la presencia de ninfas avanzadas y adultos de *D. citri*, nuevos parámetros τ y ρ .
4. También cambiamos en el modelo la interacción entre las larvas con el cuarto y quinto estadio de *Diaphorina citri*, las cuales biológicamente no es así, los adultos de *T. radiata* son los que interaccionan con éstos estadios (comparar figuras 4.1 y 5.1).
5. Debido a la interacción de *T. radiata* con las ninfas avanzadas, en el modelo anterior aparece solo sT , corregimos a sTN en el cual no tuvieron en cuenta esta interacción.
6. Algunos parámetros cambiaron de interpretación, g, i , y j , eran tratadas como pérdidas debido a la presencia de huevos y ninfas (jóvenes y avanzadas) de *Diaphorina citri*, y se redefinieron como pérdidas de brotes debido a la presencia de huevos y ninfas (jóvenes y avanzadas) de *Diaphorina citri*.
7. A ν y $1/\eta$ las definimos de mejor manera teniendo la misma intención en el crecimiento logístico de los brotes, toman su interpretación real, respectivamente, tasa de crecimiento intrínseco de los brotes sanos y capacidad de carga de los brotes sanos.
8. Cambiamos algunos nombres de definición de las variables como H, M, N, A ,

Y, W, se eliminó la variable P y se definió L representando las poblaciones P y L, y C.

Así entramos a la nueva propuesta de simulación de la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* con la presencia de *Tamarixia Radiata* y algunos enemigos naturales desde un modelo matemático que facilitará el trabajo para este estudio de investigación.

Capítulo 5

Modelo propuesto

En este capítulo presentamos nuestro modelo dinámico de *Diaphorina Citri* en presencia de *Tamarixia radiata* y sus enemigos naturales, primero definimos las variables del modelo, enseguida mostramos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representa el modelo, luego mostramos un esquema del modelo con sus poblaciones, también damos la interpretación biológica detallada de cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema, y por último, describimos también cada parámetro con sus unidades respectivas.

Las variables del modelo propuesto son:

- H : total de huevos de *D. citri*
- M : total de ninfas de primer y segundo estado de *D. citri*
- N : total de ninfas de tercer, cuarto y quinto estado de *D. citri*
- A : total de adultos de *D. citri*
- D : total de depredadores
- Y : total de hongos *Hirsutella citriformis*
- W : total de huevos de *Tamarixia radiata*
- L : total de pupas y larvas de *Tamarixia radiata*
- T : total de adultos de *Tamarixia radiata*
- C : total de brotes sanos
- t : tiempo de observación

Nuestro sistema de ecuaciones diferenciales Ordinaria propuesto para el análisis de la dinámica de la *D. citri* en presencia de sus principales enemigos naturales

es:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= fAC - bH - kHD - \delta H \\
\frac{dM}{dt} &= bH - dMC - zMD - \kappa M \\
\frac{dN}{dt} &= dMC - \varphi NT - eNC - \theta N - \zeta NY \\
\frac{dA}{dt} &= eNC - oAY - \gamma A \\
\frac{dD}{dt} &= -xD + \varepsilon HD + \lambda MD \\
\frac{dY}{dt} &= \alpha Y(1 - \beta Y) + \tau AY + \rho NY \\
\frac{dT}{dt} &= rL - \chi T \\
\frac{dW}{dt} &= sTN - uW - \xi W \\
\frac{dL}{dt} &= uW - rL - \mu L \\
\frac{dC}{dt} &= \nu C(1 - \eta C) - gCM - iCN - jAC
\end{aligned}$$

Damos a continuación el esquema que ilustra las interacciones de *Diaphorina citri* con *Tamarixia radiata*, hongos y depredadores en un mismo ecosistema (figura 5.1).

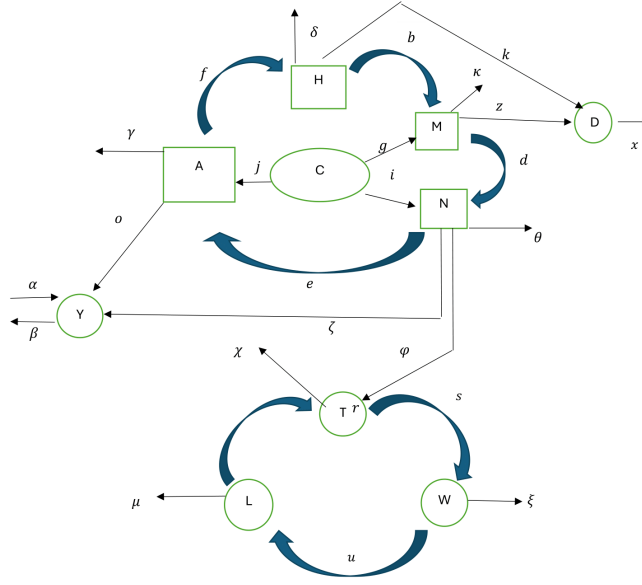


Figura 5.1: Esquema del modelo propuesto.

Este sistema modela la interacción entre *Diaphorina citri*, el parasitoide *Tamarixia Radiata*, depredadores y el hongo *Hirsutella citriformis*, junto con la dinámica de los brotes sanos en el ecosistema.

Tenemos la descripción de cada ecuación diferencial en el sistema:

1. $\frac{dH}{dt} = fAC - bH - kHD - \delta H$

La tasa de cambio de huevos de *Diaphorina Citri* depende de la oviposición de los adultos *D. citri* en los brotes sanos (fAC), menos la eclosión a ninfas jóvenes (bH), la depredación por los depredadores (kHD), y la mortalidad natural de huevos (δH).

2. $\frac{dM}{dt} = bH - dMC - zMD - \kappa M$

La tasa de cambio de ninfas jóvenes (primer,segundo estadio) de *D. citri* depende de la eclosión de sus huevos (bH), menos la transición a ninfas avanzadas (dMC), la depredación por depredadores (zMD), y la mortalidad natural (κM).

3. $\frac{dN}{dt} = dMC - \varphi NT - eNC - \theta N - \zeta NY$

La tasa de cambio de ninfas avanzadas (tercer, cuarto y quinto estado) de *Diaphorina Citri* depende de la transición de ninfas jóvenes (dMC), menos la parasitación por *Tamarixia radiata* (φNT), la transición a adultos (eNC),

la mortalidad natural (θN), y la infección por el hongo *Hirsutella citriformis* (ζNY).

4. $\frac{dA}{dt} = eNC - oAY - \gamma A$
La tasa de cambio de adultos de *Diaphorina Citri* depende de la transición de ninfas avanzadas (eNC), menos la mortalidad inducida por el hongo *Hirsutella citriformis* (oAY) y la mortalidad natural (γA).
5. $\frac{dD}{dt} = -xD + \varepsilon HD + \lambda MD$
La tasa de cambio de depredadores depende del crecimiento de la población por depredación de huevos (εHD) y ninfas jóvenes (λMD), menos la mortalidad natural (xD).
6. $\frac{dY}{dt} = \alpha Y(1 - \beta Y) + \tau AY + \rho NY$
La tasa de cambio del hongo *Hirsutella citriformis* depende de su crecimiento logístico ($\alpha Y(1 - \beta Y)$), del crecimiento de hongos por alimentación de adultos de *Diaphorina citri* (τAY) y del crecimiento de hongos por alimentación de ninfas avanzadas de *Diaphorina citri* (ρNY).
7. $\frac{dW}{dt} = sTN - uW - \xi W$
La tasa de cambio de huevos de *Tamarixia radiata* depende de la oviposición en ninfas avanzadas (sTN), menos la eclosión a larvas, después pupas (uW) y la mortalidad natural (ξW).
8. $\frac{dL}{dt} = uW - rL - \mu L$
La tasa de cambio de larvas y pupas de *Tamarixia radiata* depende de la eclosión de huevos (uW), menos la transición a adultos (rL) y la mortalidad natural (μL).
9. $\frac{dT}{dt} = rL - \chi T$
La tasa de cambio de adultos de *Tamarixia radiata* depende de la transición de larvas y pupas (rL), menos la mortalidad natural (χT).
10. $\frac{dC}{dt} = \nu C(1 - \eta C) - gCM - iCN - jAC$
La tasa de cambio de brotes sanos sigue una dinámica logística ($\nu C(1 - \eta C)$) limitada por la depredación de ninfas jóvenes (gCM), ninfas avanzadas (iCN), y adultos (jAC).

Descripción de cada parámetro

Parámetros relacionados con *D. citri*

- b : Tasa de eclosión de los huevos de *D. citri*. (1/día)
- d : Tasa de transición de ninfas jóvenes a ninfas avanzadas de *D. citri*. (1/día)
- e : Tasa de transición de ninfas avanzadas a adultos de *D. citri*. (1/(brote · día))

- f : Tasa de oviposición de adultos de *D. citri* en brotes sanos. (huevos/(día · adulto · brote))
- δ : Tasa de mortalidad natural de huevos de *D. citri*. (1/día)
- κ : Tasa de mortalidad natural de ninfas jóvenes de *D. citri*. (1/día)
- θ : Tasa de mortalidad natural de ninfas de avanzadas de *D. citri*. (1/día)
- γ : Tasa de mortalidad natural de adultos de *D. citri*. (1/día)

Parámetros relacionados con depredación y parasitismo

- k : Tasa de depredación de los huevos de *D. citri* por depredadores. (1/(día · depredador))
- z : Tasa de depredación de ninfas jóvenes de *D. citri* por depredadores. (1/día)
- φ : Tasa de mortalidad de ninfas avanzadas de *D. citri* debido al parasitoide *Tamarixia radiata*. (1/(día · Tamarixia))
- o : Tasa de mortalidad de adultos de *D. citri* debido a la infección por el hongo *Hirsutella citriformis*. (1/(día · hongo))
- ζ : Tasa de mortalidad de ninfas avanzadas de *D. citri* debido a la infección por el hongo *Hirsutella citriformis*. (1/(día · hongo))
- ε : Tasa de crecimiento de depredadores por alimentación de huevos de *D. citri*. (1/(día · depredador))
- λ : Tasa de crecimiento de depredadores por alimentación de ninfas jóvenes de *D. citri*. (1/(día · depredador))

Parámetros relacionados con depredadores y parasitoides

- u : Tasa de eclosión de los huevos en larvas y luego en pupas de *Tamarixia radiata*. (1/día)
- x : Tasa de mortalidad natural de los depredadores. (1/día)
- χ : Tasa de mortalidad natural de adultos de *Tamarixia radiata*. (1/día)
- ξ : Tasa de mortalidad natural de huevos de *Tamarixia radiata*. (1/día)
- μ : Tasa de mortalidad de larvas y pupas de *Tamarixia radiata*. (1/día)
- s : Tasa de huevos por adulto de *Tamarixia radiata*. (huevos/(día · adulto · ninfa))
- r : Tasa de transición de larvas y pupas a adultos de *Tamarixia radiata*. (1/día)

Parámetros relacionados con *Hirsutella citriformis*

- α : Tasa de crecimiento intrínseco del hongo *Hirsutella citriformis*. (1/día)
- $1/\beta$: Capacidad de carga del hongo *Hirsutella citriformis*. (hongos)
- τ : Tasa de incremento del hongo debido a la alimentación de adultos de *D. citri*. (1/(día · adulto))
- ρ : Tasa de incremento del hongo debido a la alimentación de ninfas avanzadas de *D. citri*. (1/(día · ninfa))

Parámetros relacionados con la vegetación (brotes sanos)

- g : Pérdida de brotes debido a ninfas jóvenes de *D. citri*. (1/(día · ninfa))
- i : Pérdida de brotes debido a ninfas avanzadas de *D. citri*. (1/(día · ninfa))
- j : Pérdida de brotes debido a adultos de *D. citri*. (1/(día · adulto))
- ν : Tasa de crecimiento intrínseco de los brotes sanos. (1/día)
- $1/\eta$: Capacidad de carga de los brotes sanos. (brotes)

Capítulo 6

Análisis cuantitativo

En este capítulo primero mostramos los procedimientos utilizados para hallar los puntos de equilibrio del sistema, luego describimos éstos puntos de equilibrio encontrando las soluciones constantes al sistema, algunas de forma directa (o forma analítica) utilizando la manipulación algebraica, y otras demostrando su existencia por un enfoque por simulación, dándoles a todos una interpretación biológica; después determinamos la estabilidad del sistema, ésto es, estudiando estabilidad de cada uno de éstos puntos de equilibrio, y por último hacemos unas simulaciones para estudiar el comportamiento de las poblaciones en presencia de *D. citri* y los brotes.

6.1. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio o soluciones constantes del sistema propuesto son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 fAC - bH - kHD - \delta H &= 0 \\
 bH - dMC - zMD - \kappa M &= 0 \\
 dMC - \varphi NT - eNC - \theta N - \zeta NY &= 0 \\
 eNC - oAY - \gamma A &= 0 \\
 -xD + \varepsilon HD + \lambda MD &= 0 \\
 \alpha Y(1 - \beta Y) + \tau AY + \rho NY &= 0 \\
 sTN - uW - \xi W &= 0 \\
 uW - rL - \mu L &= 0 \\
 rL - \chi T &= 0 \\
 \nu C(1 - \eta C) - gCM - iCN - jAC &= 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

De las ecuaciones (7), (8) y (9) del sistema (6.1), obtenemos:

$$L = \frac{\chi}{r}T, \quad (6.2)$$

$$W = \left(\frac{\chi}{u} + \frac{\mu\chi}{ru} \right) T, \quad (6.3)$$

$$T(sN - (u + \xi) \left(\frac{\chi}{u} + \frac{\mu\chi}{ur} \right)) = 0 \quad (6.4)$$

De la ecuación (6.4) obtenemos que $T = 0$ o $N = \frac{1}{su}(u + \xi)(1 + \frac{\mu}{r})\chi \equiv a$.

Si $T = 0$, entonces $L = 0$ y $W = 0$, reduciendo el sistema (6.1) a:

$$\begin{aligned} fAC - (b + kD + \delta)H &= 0 \\ bH - (dC + zD + \kappa)M &= 0 \\ dMC - (eC + \theta + \zeta Y)N &= 0 \\ eNC - (oY + \gamma)A &= 0 \\ D(-x + \varepsilon H + \lambda M) &= 0 \\ Y(\alpha(1 - \beta Y) + \tau A + \rho N) &= 0 \\ C(\nu(1 - \eta C) - gM - iN - jA) &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Si $N = a$, entonces $L = \frac{\chi}{r}T$, $W = \left(\frac{\chi}{u} + \frac{\mu\chi}{ru} \right) T$, y el sistema (6.1) se reduce a:

$$\begin{aligned} fAC - (b + kD + \delta)H &= 0 \\ bH - (dC + zD + \kappa)M &= 0 \\ dMC - (\varphi T + eC + \theta + \zeta Y)a &= 0 \\ eaC - (oY + \gamma)A &= 0 \\ D(-x + \varepsilon H + \lambda M) &= 0 \\ Y(\alpha(1 - \beta Y) + \tau A + \rho a) &= 0 \\ C(\nu(1 - \eta C) - gM - ia - jA) &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

De las últimas tres ecuaciones del sistema (6.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} D = 0 & \quad \text{o} \quad -x + \varepsilon H + \lambda M = 0, \\ Y = 0 & \quad \text{o} \quad \alpha(1 - \beta Y) + \tau A + \rho N = 0, \\ C = 0 & \quad \text{o} \quad \nu(1 - \eta C) - gM - iN - jA = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ahora de la segunda ecuación del sistema (6.6), obtenemos

$$H = \frac{1}{b}(dC + zD + \kappa)M. \quad (6.8)$$

Sustituyendo H en la primera y quinta ecuación del sistema (6.6), tenemos:

$$\begin{aligned}
 fAC - \frac{1}{b}(b + kD + \delta)(dC + zD + \kappa)M &= 0, \\
 dMC - (\varphi T + eC + \theta + \zeta Y)a &= 0, \\
 eaC - (oY + \gamma)A &= 0, \\
 D(-x + \frac{\varepsilon}{b}(dC + zD + \kappa)M + \lambda M) &= 0, \\
 Y(\alpha(1 - \beta Y) + \tau A + \rho a) &= 0, \\
 C(\nu(1 - \eta C) - gM - ia - jA) &= 0
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

De las últimas tres ecuaciones del sistema (6.9) tenemos

$$\begin{aligned}
 D = 0 \quad \text{o} \quad -x + \frac{\varepsilon}{b}(dC + zD + \kappa)M + \lambda M &= 0 \\
 Y = 0 \quad \text{o} \quad \alpha(1 - \beta Y) + \tau A + \rho a &= 0 \\
 C = 0 \quad \text{o} \quad \nu(1 - \eta C) - gM - ia - jA &= 0
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Para la búsqueda de los puntos de equilibrio, se analizaron las distintas combinaciones en (6.7) y (6.10), que correspondían a los sistemas (6.5) y (6.9) respectivamente. De ahí obtuvimos algunos puntos de equilibrio de manera directa. En ciertos casos los sistemas que resultaron de las combinaciones no fueron fácil de resolver de manera algebraica por lo cual nos llevó a encontrar sus soluciones por *Wolfram Mathematica*, pero las soluciones algunas veces no tenían sentido biológico (por ejemplo, una variable en términos de los parámetros con valor negativo), o eran soluciones con expresiones demasiado largas en términos de los parámetros. Pensando en que no teníamos sino 4 puntos de equilibrio, optamos por el método de *Monte Carlo*, y así demostrar la existencia de esas soluciones. Este método consistía en asignar rangos reales a los parámetros del sistema, y generar combinaciones aleatorias de éstos (ver cuadro 6.1). Para cada conjunto de parámetros se resolvió un sistema de ecuaciones no lineales, y se ejecutaron ciclos de 1000 iteraciones por combinación, registrando si las soluciones correspondían a cero, uno o varios puntos de equilibrio. Para referenciar los datos que muestra el cuadro (6.1) los cuales usamos en *Monte Carlo*, son datos extraídos de varios artículos, mas específicamente: los parámetros relacionados con *D. citri* se extraen de los artículos [7], [12] y [15], los parámetros relacionados con *T. Radiata* se extraen de los artículos [2], [9] y [11], los parámetros relacionados con *H. citrififormis* extraen de los artículos [4], [8] y [14], y los parámetros relacionados con los depredadores generalistas, *Chrysopidae o crisopa* y *cycloneda*, se extraen de los artículos [5] y [13].

Parámetro	Rango	Estimativo	Parámetro	Rango	Estimativo
b	[0.51, 0.71]	0.61	f	[0.0537, 0.0935]	0.0736
k	[0.1, 0.9]	0.5	δ	[0.07, 0.11]	0.09
d	[0.0138, 0.0178]	0.0158	z	[0.1, 0.9]	0.5
κ	[0.09, 0.13]	0.11	φ	[0.095, 0.285]	0.19
e	[0.0166, 0.0194]	0.018	θ	[0.01, 0.03]	0.02
ζ	[0.05, 0.15]	0.1	o	[0.1, 0.2]	0.15
γ	[0.02, 0.04]	0.03	x	[0.0286, 0.04]	0.0343
ε	[0.01, 0.09]	0.05	λ	[0.02, 0.18]	0.10
α	[0.05, 0.10]	0.075	β	[0.001, 0.003]	0.002
τ	[0.1, 0.3]	0.2	ρ	[0.1, 0.2]	0.15
s	[0.1, 0.3]	0.2	u	[0.33, 0.5]	0.415
ξ	[0.1, 0.2]	0.15	r	[0.0833, 0.1]	0.09165
μ	[0.02, 0.04]	0.03	χ	[0.067, 0.143]	0.105
ν	[0.10, 0.14]	0.12	η	[0.0167, 0.025]	0.02085
g	[0.0001, 0.0009]	0.0005	i	[0.001, 0.009]	0.005
j	[0.000001, 0.000009]	0.000005			

Cuadro 6.1: Rangos y estimativos de los parámetros del modelo.

Despues de conocer como deducir los puntos de equilibrio se identificaron un total de siete puntos de equilibrio en el sistema, cuatro de éstos se obtuvieron por un análisis directo de las ecuaciones del modelo y tres se demostró su existencia mas no se tenían definidos de manera explícita utilizando el enfoque numérico del método de *Monte Carlo*.

Puntos de equilibrio obtenidos analíticamente:

A través del análisis directo de las ecuaciones diferenciales del sistema, se identificaron los siguientes tres puntos de equilibrio:

1. $E_1=(0,0,0,0,0,0,0,0,0)$: Ausencia total de las poblaciones: todas las variables poblacionales son cero.
2. $E_2=(0,0,0,0,0,0,0,0,\frac{1}{\eta})$: Presencia exclusiva de brotes: con $C = \frac{1}{\eta}$, el resto de las poblaciones se extingue.
3. $E_3=(0,0,0,0,0,\frac{1}{\beta},0,0,0)$: Presencia exclusiva de hongos: $Y = \frac{1}{\beta}$, el resto de las poblaciones se extingue.
4. $E_4=(0,0,0,0,0,\frac{1}{\beta},0,0,\frac{1}{\eta})$: Coexistencia de brotes y hongos: con $C = \frac{1}{\eta}$ y $Y = \frac{1}{\beta}$, mientras las demás poblaciones se extinguen.

Puntos de equilibrio por simulación (método de Monte Carlo):

A partir de este procedimiento, se demostró la existencia de los siguientes tres puntos de equilibrio adicionales:

5. $E_5=(H_*,M_*,N_*,A_*,0,0,0,0,C_*)$: Coexistencia de brotes y *Diaphorina citri*: el sistema permite una población persistente del insecto plaga junto con

brotos sanos. Aclaremos que cuando hablamos de la población de *Diaphorina citri* significa que están presentes todos los estadíos de su desarrollo de vida (huevos, ninfas jóvenes, ninfas avanzadas y adultos).

6. $E_6=(H_*,M_*,N_*,A_*,D_*,0,0,0,0,C_*)$: Coexistencia de brotes, *Diaphorina citri* y depredadores: El sistema permite las poblaciones del insecto Plaga de los brotes sanos y sus depredadores naturales.
7. $E_7=(H_*,M_*,N_*,A_*,0,0,T_*,W_*,L_*,C_*)$: Coexistencia de brotes, *Diaphorina citri* y *Tamarixia radiata*: El sistema permite las poblaciones del insecto plaga de los brotes sanos y el parasitoide específico de la plaga. También aclaramos que la población de *Tamarixia radiata* significa que están presente los tres estadíos de desarrollo de su vida(huevos, larvas y pupas, y adulto).

Estas soluciones reflejan configuraciones ecológicamente viables del sistema en estudio, y serán analizadas posteriormente en términos de estabilidad local y comportamiento dinámico.

6.2. Estabilidad del sistema

Estudiemos ahora la estabilidad del sistema, analizando cada punto de equilibrio en el jacobiano, y sus valores propios; para los puntos de equilibrio conseguidos de manera directa, trabajamos con un análisis simbólico, es decir con los parámetros sin valores fijos, y para los puntos de equilibrio, para los cuales demostramos su existencia por el método *Monte Carlo*, trabajamos con valores reales para las variables deducidos con parámetros arbitrarios determinados dentro del rango que sugerimos para ellos.

Revisemos primero de nuevo el modelo propuesto;

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= fAC - bH - kHD - \delta H \\
\frac{dM}{dt} &= bH - dMC - zMD - \kappa M \\
\frac{dN}{dt} &= dMC - \varphi NT - eNC - \theta N - \zeta NY \\
\frac{dA}{dt} &= eNC - oAY - \gamma A \\
\frac{dD}{dt} &= -xD + \varepsilon HD + \lambda MD \\
\frac{dY}{dt} &= \alpha Y(1 - \beta Y) + \tau AY + \rho NY \\
\frac{dT}{dt} &= rL - \chi T \\
\frac{dW}{dt} &= sTN - uW - \xi W \\
\frac{dL}{dt} &= uW - rL - \mu L \\
\frac{dC}{dt} &= \nu C(1 - \eta C) - gCM - iCN - jAC
\end{aligned}$$

El modelo propuesto presentado en es un sistema no lineal de 10 ecuaciones diferenciales, en el cual, las variables en su orden son $H, M, N, A, D, Y, T, W, L$ y C , y para estudiar su estabilidad debemos conocer su Jacobiano evaluado en cada uno de los puntos de equilibrio. Recordemos que un punto de equilibrio es asintóticamente estable si todos los valores propios del Jacobiano del sistema de EDO evaluado en el punto tienen parte real negativa, de lo contrario si al menos un valor propio tiene parte real positiva, consideraremos punto de equilibrio inestable; éstos valores propios también se conseguirán por *Wolfram Mathematica*. Damos a continuación el Jacobiano del sistema propuesto:

$$J = \begin{bmatrix}
-Dk - b - \delta & 0 & 0 & Cf & -Hk & 0 & 0 & 0 & 0 & Af \\
b & -Cd - Dz - \kappa & 0 & 0 & -Mz & 0 & 0 & 0 & 0 & -Md \\
0 & Cd & -Ce - T\varphi - Y\zeta - \theta & 0 & 0 & -N\zeta & -N\varphi & 0 & 0 & Md - Ne \\
0 & 0 & Ce & -Yo - \gamma & 0 & -Ao & 0 & 0 & 0 & Ne \\
D\varepsilon & D\lambda & 0 & 0 & H\varepsilon + M\lambda - x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & Y\rho & Y\tau & 0 & A\tau + N\rho - Y\alpha\beta + \alpha(1 - Y\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\chi & 0 & r & 0 \\
0 & 0 & Ts & 0 & 0 & 0 & Ns & -u - \xi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & -r - \mu & 0 \\
0 & -Cg & -Ci & -Cj & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Aj - C\eta\nu - Mg - Ni + \nu(1 - C\eta)
\end{bmatrix}$$

Estudiemos ahora la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio obtenidos: Para los puntos de equilibrio, ya conseguidos, $E_1=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ (ausencia de poblaciones), $E_2=(0,0,0,0,0,0,0,0,\frac{1}{\eta})$ (exclusivo brotes), $E_3=(0,0,0,0,0,\frac{1}{\beta},0,0,0,0)$

(exclusivo hongos), $E_5=(H_*,M_*,N_*,A_*,0,0,0,0,C_*)$ (coexistencia brotes y *D. citri*) y $E_7=(H_*,M_*,N_*,A_*,0,0,T_*,W_*,L_*,C_*)$ (coexistencia brotes, *D. citri* y *T. radiata*), los puntos de equilibrio son inestables, así lo muestran los resultados de los programas(Ver Anexos): para cada uno de éstos, al evaluarlos en el jacobiano, al menos un valor propio tenía parte real positiva. El punto de equilibrio $E_6=(H_*,M_*,N_*,A_*,D_*,0,0,0,0,C_*)$ (coexistencia brotes, *D. citri* y depredadores) tiene un estudio especial, pues dependiendo de los parámetros generados aleatoriamente puede haber o no solución al sistema de ecuaciones relacionado con este punto de equilibrio, esto quiere decir que para algunos sistemas no siempre se tiene solución positiva, esto es, no hay punto de equilibrio, la existencia de este punto de equilibrio debe requerir una condición que deben cumplir los parámetros. Ahora, mientras haya punto de equilibrio el sistema es inestable, así lo muestra el programa(Ver Anexos). Para el punto de equilibrio $E_4=(0,0,0,0,0,\frac{1}{\beta},0,0,0,\frac{1}{\eta})$ (coexistencia brotes y hongos) es asintóticamente estable: en este punto de equilibrio, al evaluarlo en el jacobiano, todos sus valores propios tenían parte real negativa. En la siguiente sección hacemos varias simulaciones para ver el comportamiento de las poblaciones, generamos unos comentarios sobre cada simulación, incluyendo siempre los brotes y *D. citri* con sus enemigos naturales, para después obtener unas conclusiones y concluir nuestra investigación.

6.3. Simulaciones

En esta sección, mostramos algunas simulaciones realizadas en matlab, donde estudiamos el comportamiento de las poblaciones en presencia de brotes y *D. citri* con sus enemigos naturales.

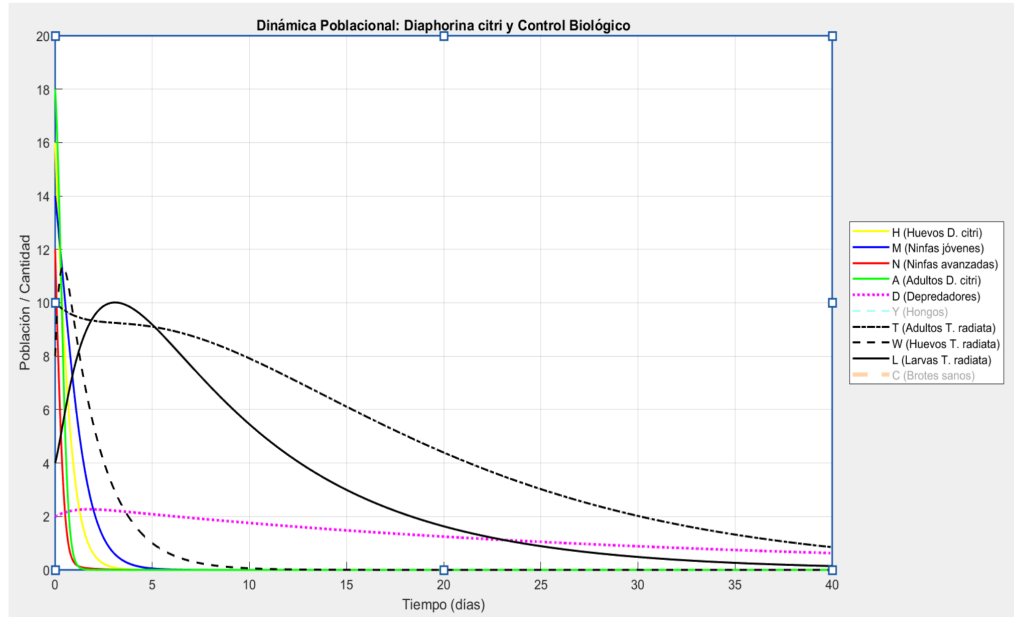


Figura 6.1: Poblaciones que se extinguen en Simulación 1: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=2$, $Y=5$, $T=10$, $W=8$, $L=4$, $C=5$.

Para todas las simulaciones los valores iniciales para las poblaciones de *Diaphorina Citri*, y brotes son fijos, variamos las demás poblaciones solamente; esto es, dejamos fijos: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, y $C=5$. Para empezar, en las figuras 6.1 y 6.2 mostramos la Simulación 1: $D=2$, $Y=5$, $T=10$, $W=8$, $L=4$. Por motivos de escala, en la figura 6.1 mostramos solamente las poblaciones de *Diaphorina Citri*, Depredadores, y *Tamarixia Radiata*, y en la figura 6.2 mostramos solamente brotes y hongos. Podemos ver en la figura 6.1 que al actuar todas las poblaciones, *Diaphorina Citri* se extingue en los primeros 4 días, y al pasar el tiempo(días) también se extinguen las poblaciones de *Tamarixia Radiata* y Depredadores debido a la no presencia de *D. citri*.

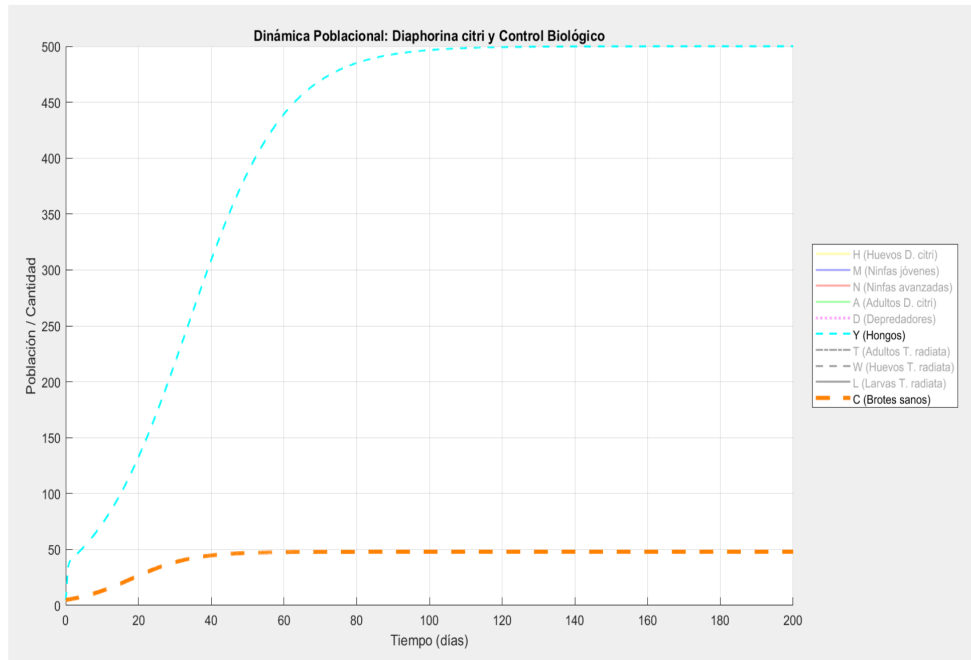


Figura 6.2: Poblaciones que permanecen en Simulación 1: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=2$, $Y=5$, $T=10$, $W=8$, $L=4$, $C=5$.

Mientras tanto vemos en la figura 6.2, que los brotes alcanzan su capacidad máxima (capacidad de carga) de aproximadamente 48 unidades, alrededor de 70 días y los hongos de igual forma alcanzan su capacidad máxima (capacidad de carga) de 500 unidades, alrededor de 100 días.

En la figura 6.3 vemos la Simulación 2: $D=2$, $Y=0$, $T=0$, $W=0$, $L=0$. Recordemos que los depredadores, consumen huevos y ninfas jóvenes de *D. citri*, aquí vemos que no se extingue *Diaphorina Citri*, los depredadores prevalecen con el tiempo controlando las ninfas de *D. citri* lo cual permite que los brotes crezcan y lleguen a su capacidad de carga, esta lo alcanzan a los 84 días.

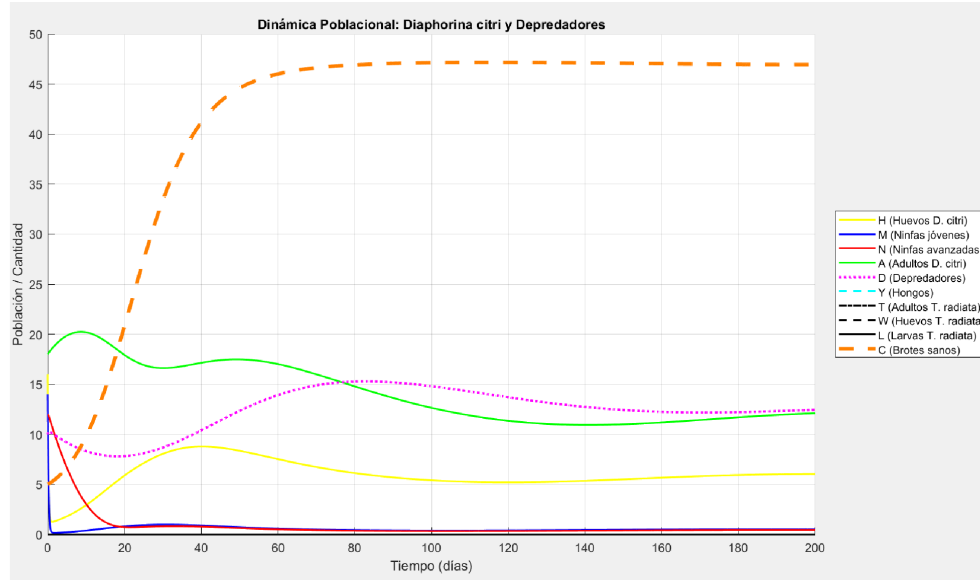


Figura 6.3: Simulación 2: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=2$, $Y=0$, $T=0$, $W=0$, $L=0$, $C=5$.

En la figura 6.4 mostramos la Simulación 3: $D=0$, $Y=2$, $T=0$, $W=0$, $L=0$. Recordemos que los hongos infestan ninfas avanzadas y a adultos de *D. citri*, en la simulación podemos ver que los hongos extinguen a *D. citri* entre los 2 y 22 días radicalmente, y permiten el crecimiento normal de los brotes, alcanzando su capacidad de carga de 48 unidades en 54 días.

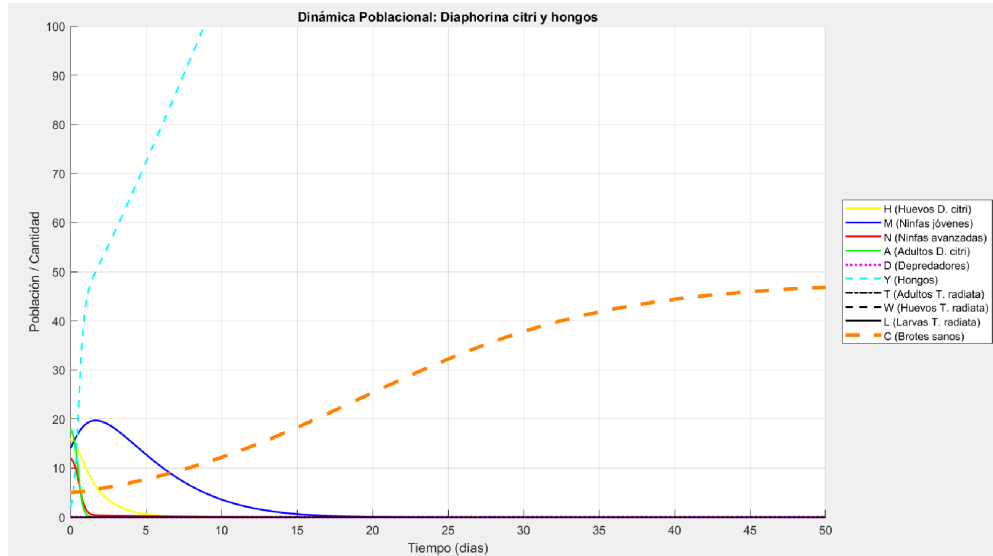


Figura 6.4: Simulación 3: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=0$, $Y=2$, $T=0$, $W=0$, $L=0$, $C=5$.

En la figura 6.5 mostramos la Simulación 4: $D=0$, $Y=0$, $T=5$, $W=4$, $L=3$. Recordemos que *Tamarixia Radiata* infecta a las ninfas avanzadas de *D. citri*, en la simulación podemos notar que *D. citri* no se extingue radicalmente, pero *T. radiata* prevalece y controla la diaphorina, y lo que más nos importa salen afectados los brotes pues no alcanzan su capacidad de carga con el tiempo, sólo alcanzan 33 unidades, a los 120 días, lo que quiere decir que pueden convivir las poblaciones pero se arriesga la población de brotes, y si aumentamos la población de *T. radiata* no hay cambio, de todas formas conviven las poblaciones.

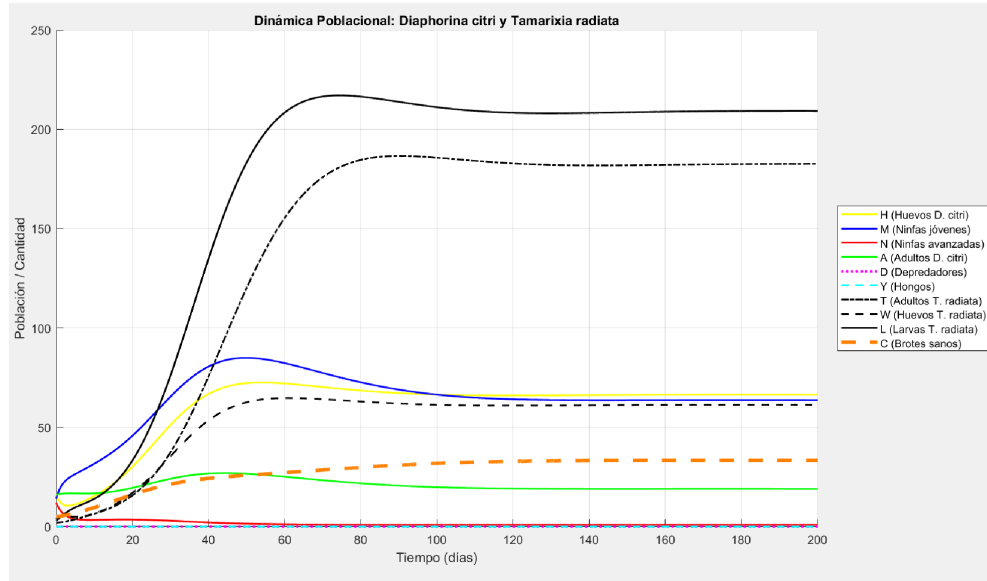


Figura 6.5: Simulación 4: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=0$, $Y=0$, $T=5$, $W=4$, $L=3$, $C=5$.

En la figura 6.6 mostramos la Simulación 5: $D=2$, $Y=2$, $T=0$, $W=0$, $L=0$. En la simulación podemos ver que las dos poblaciones extinguen radicalmente *D. citri*, se permite el crecimiento normal de los brotes, éstos alcanzan su capacidad de carga a los 100 días aproximadamente y así mismo los hongos alcanzan su capacidad de carga de 500 unidades, aunque los depredadores se extinguen al no tener presencia de *D. citri*.

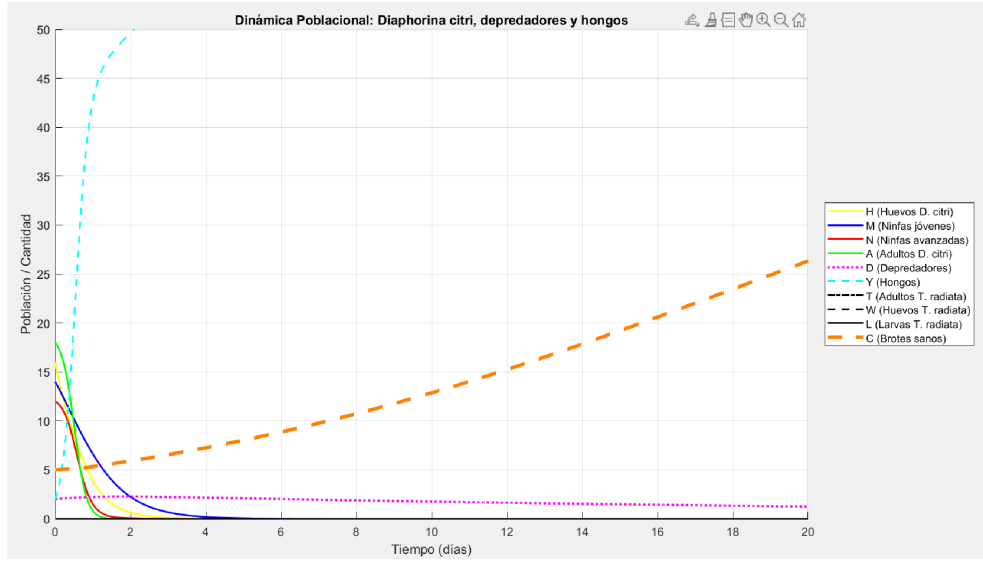


Figura 6.6: Simulación 5: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=2$, $Y=2$, $T=0$, $W=0$, $L=0$, $C=5$.

En la figura 6.7 mostramos la Simulación 6: $D=2$, $Y=0$, $T=10$, $W=6$, $L=8$. En la simulación podemos ver que las dos poblaciones no extinguen *D. citri*, los depredadores solos controlan *D. citri*, pues *Tamarixia Radiata* no sobrevive ni aumentando la cantidad de ninfas avanzadas, las infecta pero no las extermina por completo, al final prevalecen todas las poblaciones de *D. citri*, aunque muy baja población de ninfas avanzadas, pero los brotes si alcanzan su capacidad de carga de 48 unidades alrededor de los 100 días.

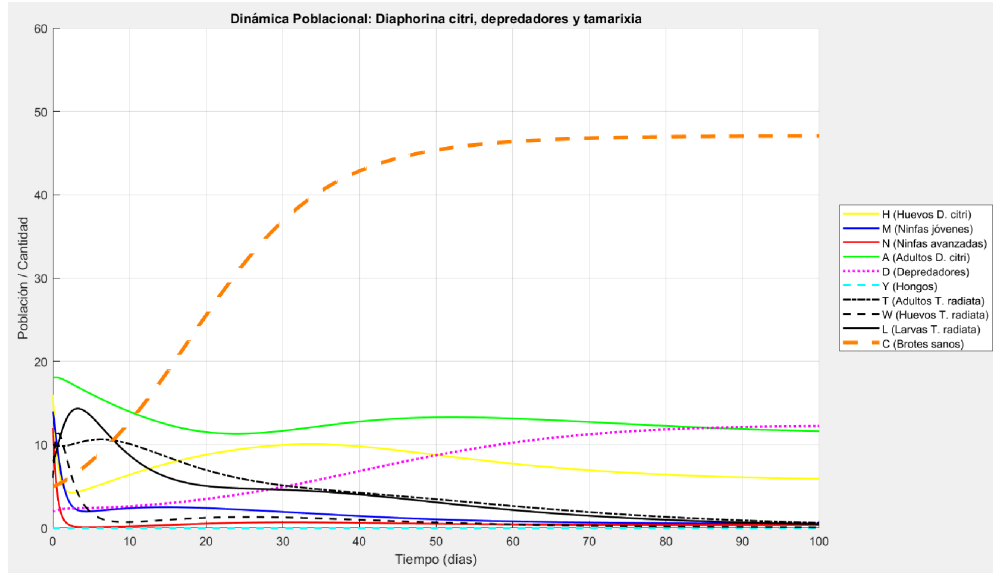


Figura 6.7: Simulación 6: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=2$, $Y=0$, $T=10$, $W=6$, $L=8$, $C=5$.

En la figura 6.8 mostramos la Simulación 7: $D=0$, $Y=2$, $T=10$, $W=6$, $L=8$. En la simulación podemos ver que las dos poblaciones si extinguen *D. citri*, aunque al no haber población de ninfas jóvenes se extingue *T. radiata*, los brotes alcanzan su capacidad de carga, al igual que los hongos.

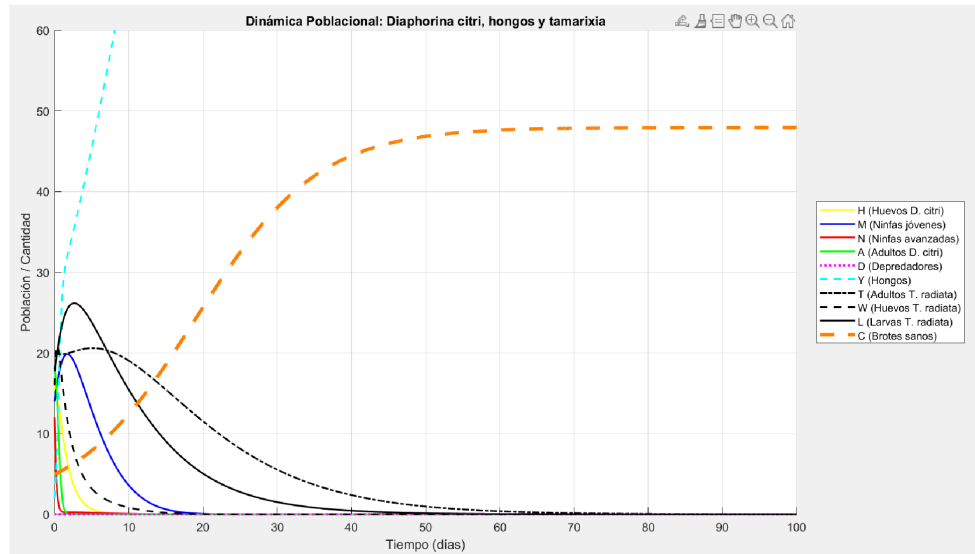


Figura 6.8: Simulación 7: $H=16$, $N=14$, $M=12$, $A=18$, $D=0$, $Y=2$, $T=10$, $W=6$, $L=8$, $C=5$.

Conclusiones

A continuacion presentamos los logros alcanzados en este estudio junto a un resumen de los principales resultados obtenidos.

1. Análisis del modelo propuesto en [11] para el estudio de la dinámica poblacional de *Diaphorina Citri* en interacciones con los brotes de su planta hospedante, y sus enemigos naturales más conocidos, como lo son *Tamarixia Radiata*, el hongo *Hirsutella Citriiformis* y los depredadores generalistas *Cycloneda sanguínea* y *Chrysopidae*.
2. Reformulación del modelo mencionado anteriormente incluyendo precisión en la definición de variables y parámetros, y la relaciones entre ellos.
3. Análisis cuantitativo del modelo propuesto del cual se encontraron 7 puntos de equilibrio: cuatro determinados analíticamente (ausencia de poblaciones, existencia solo de brotes, existencia solo de hongos y coexistencia de brotes y hongos). Para los otros tres (Coexistencia de brotes y *Diaphorina Citri*, Coexistencia de brotes, *Diaphorina Citri* y Depredadores, y coexistencia de brotes, *Diaphorina Citri* y *Tamarixia Radiata*), se demostró su existencia mediante el método de Monte Carlo. Además, explícitamente y usando el Método de Monte Carlo, se demostró que solo el punto de equilibrio de coexistencia de brotes y hongos es asintóticamente estable; los otros puntos de equilibrio son asintóticamente inestables.
4. De los tres enemigos naturales de la *Diaphorina Citri*, los hongos son la población más eficiente para el control de la *Diaphorina Citri*. Rápidamente extingue esta plaga permitiendo que los brotes alcancen su nivel máximo en pocos días.
5. La población de depredadores logra controlar la plaga de *D. citri* pero al no haber presencia de *D. citri* también se exterminan.

6. La población de *Tamarixia Radiata* también logra controlar a *D. citri* y sobreviven las poblaciones pero sale afectados, los brotes, éstos sobreviven pero no alcanzan su máxima capacidad.
7. Al haber grandes cantidades de *Diaphorina citri* comparados con las otras poblaciones, los hongos la exterminan por completo y los brotes alcanzan su capacidad máxima, *Tamarixia Radiata* prevalece y controla *Diaphorina citri* aunque los brotes no llegan a su capacidad máxima, pero actuando solo los depredadores no pueden controlar *Diaphorina citri*.
8. Este trabajo no solo propone un modelo matemático sólido, sino que también ofrece una base conceptual y metodológica que puede ser extendida a otros agroecosistemas afectados por plagas similares. La integración de fundamentos biológicos con herramientas matemáticas avanzadas fortalece el papel de la modelación en la toma de decisiones agronómicas y en el diseño de programas sostenibles de manejo integrado de plagas.
9. A futuro se puede trabajar un análisis de sensibilidad del sistema, y también se podría hacer un estudio más detallado en la determinación de los valores de los parámetros.

Anexos

Programas

Programa Estabilidad Punto de equilibrio 4

```
(*MONTE CARLO VALORES PROPIOS CUARTO PUNTO DE EQUILIBRIO*)
(*ASINTOTICAMENTE ESTABLE*)
Clear[D1];
(*definimos el jacobiano*)
J = {{-D1*k - b - \[Delta], 0, 0, C1*f, -H*k, 0, 0, 0, 0,
      A*f}, {b, -C1*d - D1*z - \[Kappa], 0, 0, -M*z, 0, 0, 0,
      0, -M*d}, {0, C1*d, -C1*e - T*\[CurlyPhi] - Y*\[Zeta] - \[Theta],
      0, 0, -N1*\[Zeta], -N1*\[CurlyPhi], 0, 0, M*d - N1*e}, {0, 0,
      C1*e, -Y*\[Omicron] - \[Gamma], 0, -A*\[Omicron], 0, 0, 0,
      N1*e}, {D1*\[CurlyEpsilon], D1*\[Lambda], 0, 0,
      H*\[CurlyEpsilon] + M*\[Lambda] - x, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0,
      Y*\[Rho], Y*\[Tau], 0,
      A*\[Tau] + N1*\[Rho] -
      Y*\[Alpha]*\[Beta] + \[Alpha]*(1 - Y*\[Beta]), 0, 0, 0, 0}, {0,
      0, 0, 0, 0, 0, -\[Chi], 0, r, 0}, {0, 0, T*s, 0, 0, 0,
      N1*s, -u - \[Xi], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, -r - \[Mu],
      0}, {0, -C1*g, -C1*i1, -C1*j1, 0, 0, 0, 0,
      0, -A*j1 - C1*\[Eta]*\[Nu] - M*g - N1*i1 + \[Nu]*(1 - C1*\[Eta])}};

puntosEquilibrio = {H -> 0, M -> 0, N1 -> 0, A -> 0, D1 -> 0,
  Y -> 1/\[Beta], T -> 0, W -> 0, L -> 0, C1 -> 1/\[Eta]};

(*Evaluar la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio*)
Jevaluado = J /. puntosEquilibrio;
Jevaluado // MatrixForm;
CuentaEstable = 0;
```

```

CuentaInestable = 0;
For[i = 1, i <= 1000, i++,
  (*Definir los parámetros y asignar valores aleatorios dentro de sus r\
angos*)parametros = {b -> RandomReal[{0.51, 0.71}],
    f -> RandomReal[{0.0537, 0.0935}],
    k -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
    \[Delta] -> RandomReal[{0.07, 0.11}],
    d -> RandomReal[{0.0138, 0.0178}],
    z -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
    \[Kappa] -> RandomReal[{0.09, 0.13}],
    \[CurlyPhi] -> RandomReal[{0.095, 0.285}],
    e -> RandomReal[{0.0166, 0.0194}],
    \[Theta] -> RandomReal[{0.01, 0.03}],
    \[Zeta] -> RandomReal[{0.05, 0.15}],
    \[Omicron] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
    \[Gamma] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
    x -> RandomReal[{0.0286, 0.04}],
    \[CurlyEpsilon] -> RandomReal[{0.01, 0.09}],
    \[Lambda] -> RandomReal[{0.02, 0.18}],
    \[Alpha] -> RandomReal[{0.05, 0.10}],
    \[Beta] -> RandomReal[{0.001, 0.003}],
    \[Tau] -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
    \[Rho] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
    s -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
    u -> RandomReal[{0.33, 0.5}],
    \[Xi] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
    r -> RandomReal[{0.0833, 0.1}],
    \[Mu] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
    \[Chi] -> RandomReal[{0.067, 0.143}],
    \[Nu] -> RandomReal[{0.10, 0.14}],
    \[Eta] -> RandomReal[{0.0167, 0.025}],
    g -> RandomReal[{0.0001, 0.0009}],
    i1 -> RandomReal[{0.001, 0.009}],
    j1 -> RandomReal[{0.000001, 0.000009}]}];

    Jfinal = Jevaluado /. parametros;
  (*Calcular los valores propios (autovalores)*)
    Jfinal // MatrixForm;
  valoresPropios = Eigenvalues[Jfinal];
  inestable = Or @@ Thread[Re[valoresPropios] >= 0];

  (*Resultado*)
  If[inestable, CuentaInestable = CuentaInestable + 1,

```

```

CuentaEstable = CuentaEstable + 1]];
Print["Casos estables ", CuentaEstable];
Print["Casos inestables " , CuentaInestable];

```

```

Casos estables 1000
Casos inestables 0

```

Programa Inestabilidad Punto de Equilibrio 5

```

(*MONTE CARLO QUINTO PUNTO DE EQUILIBRIO*)
(*INESTABLE*)
Clear[Y, T, W, L];
ClearAll["Global'"]
(*definimos el jacobiano*)
J = {{-D1*k - b - \[Delta], 0, 0, C1*f, -H*k, 0, 0, 0, 0,
      A*f}, {b, -C1*d - D1*z - \[Kappa], 0, 0, -M*z, 0, 0, 0,
      0, -M*d}, {0, C1*d, -C1*e - T*\[CurlyPhi] - Y*\[Zeta] - \[Theta],
      0, 0, -N1*\[Zeta], -N1*\[CurlyPhi], 0, 0, M*d - N1*e}, {0, 0,
      C1*e, -Y*\[Omicron] - \[Gamma], 0, -A*\[Omicron], 0, 0, 0,
      N1*e}, {D1*\[CurlyEpsilon], D1*\[Lambda], 0, 0,
      H*\[CurlyEpsilon] + M*\[Lambda] - x, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0,
      Y*\[Rho], Y*\[Tau], 0,
      A*\[Tau] + N1*\[Rho] -
      Y*\[Alpha]*\[Beta] + \[Alpha]*(1 - Y*\[Beta]), 0, 0, 0, 0}, {0,
      0, 0, 0, 0, 0, -\[Chi], 0, r, 0}, {0, 0, T*s, 0, 0, 0,
      N1*s, -u - \[Xi], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, -r - \[Mu],
      0}, {0, -C1*g, -C1*i1, -C1*j1, 0, 0, 0, 0,
      0, -A*j1 - C1*\[Eta]*\[Nu] - M*g - N1*i1 + \[Nu]*(1 - C1*\[Eta])}};

eqs = {\[Nu]*(1 - \[Eta]*C1) - g*M - i1*N1 - j1*A == 0,
      f*A*C1 - (b + \[Delta])*H == 0,
      b*H - (d*C1 + \[Kappa])*M == 0, d*M*C1 - (e*C1 + \[Theta])*N1 == 0,
      e*N1*C1 - \[Gamma]*A == 0, D1 == 0, Y == 0, T == 0, W == 0, L == 0};

(*Definimos la función que genera parámetros aleatorios*)
generarParametros[] := {b -> RandomReal[{0.51, 0.71}],
      f -> RandomReal[{0.0537, 0.0935}],
      k -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
      \[Delta] -> RandomReal[{0.07, 0.11}],
      d -> RandomReal[{0.0138, 0.0178}],
      z -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
      \[Kappa] -> RandomReal[{0.09, 0.13}],
      \[CurlyPhi] -> RandomReal[{0.095, 0.285}],

```

```

e -> RandomReal[{0.0166, 0.0194}],
\[Theta] -> RandomReal[{0.01, 0.03}],
\[Zeta] -> RandomReal[{0.05, 0.15}],
\[Omicron] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
\[Gamma] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
x -> RandomReal[{0.0286, 0.04}],
\[CurlyEpsilon] -> RandomReal[{0.01, 0.09}],
\[Lambda] -> RandomReal[{0.02, 0.18}],
\[Alpha] -> RandomReal[{0.05, 0.10}],
\[Beta] -> RandomReal[{0.001, 0.003}],
\[Tau] -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
\[Rho] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
s -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
u -> RandomReal[{0.33, 0.5}],
\[Xi] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
r -> RandomReal[{0.0833, 0.1}],
\[Mu] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
\[Chi] -> RandomReal[{0.067, 0.143}],
\[Nu] -> RandomReal[{0.10, 0.14}],
\[Eta] -> RandomReal[{0.0167, 0.025}],
g -> RandomReal[{0.0001, 0.0009}],
i1 -> RandomReal[{0.001, 0.009}],
j1 -> RandomReal[{0.000001, 0.000009}]];

j = 0;
CuentaEstable = 0;
CuentaInestable = 0;
For[j = 1, j <= 1000, j++,
  params = generarParametros[];
  eqsNum =
    Join[eqs /. params, {H > 0, M >= 0, N1 >= 0, A >= 0, D1 >= 0,
      Y >= 0, T >= 0, W >= 0, L >= 0, C1 >= 0}];

  (*Resolver el sistema con los parámetros numéricos*)
  sol = Quiet[NSolve[eqsNum, {H, M, N1, A, D1, Y, T, W, L, C1}, Reals]];

  (*Evaluar la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio*)
  Jevaluado = J /. sol;
  Jfinal = Jevaluado /. params;
  (*Calcular los valores propios (autovalores)*)
  valoresPropios = Eigenvalues[Jfinal];
  (*Verificar si alguno tiene parte real>=0*)
  umbral = 10^-10; (*Para ignorar errores numéricos mínimos*)
  inestable = AnyTrue[Re[valoresPropios], # > umbral &];

```

```

(*Resultado*)
If[inestable, CuentaInestable = CuentaInestable + 1,
  CuentaEstable = CuentaEstable + 1]];
Print["Casos estables ", CuentaEstable];
Print["Casos inestables " , CuentaInestable];

Casos estables 0
Casos inestables 1000

```

Programa Inestabilidad Punto de Equilibrio 6

```

(*MONTE CARLO SEXTO PUNTO DE EQUILIBRIO*)
(*INESTABLE*)
Clear[Y, T, W, L];
ClearAll["Global'"]
(*definimos el jacobiano*)
J = {{-D1*k - b - \[Delta], 0, 0, C1*f, -H*k, 0, 0, 0, 0,
  A*f}, {b, -C1*d - D1*z - \[Kappa], 0, 0, -M*z, 0, 0, 0,
  0, -M*d}, {0, C1*d, -C1*e - T*\[CurlyPhi] - Y*\[Zeta] - \[Theta],
  0, 0, -N1*\[Zeta], -N1*\[CurlyPhi], 0, 0, M*d - N1*e}, {0, 0,
  C1*e, -Y*\[Omicron] - \[Gamma], 0, -A*\[Omicron], 0, 0, 0,
  N1*e}, {D1*\[CurlyEpsilon], D1*\[Lambda], 0, 0,
  H*\[CurlyEpsilon] + M*\[Lambda] - x, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0,
  Y*\[Rho], Y*\[Tau], 0,
  A*\[Tau] + N1*\[Rho] -
  Y*\[Alpha]*\[Beta] + \[Alpha]*(1 - Y*\[Beta]), 0, 0, 0, 0}, {0,
  0, 0, 0, 0, 0, -\[Chi], 0, r, 0}, {0, 0, T*s, 0, 0, 0,
  N1*s, -u - \[Xi], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, -r - \[Mu],
  0}, {0, -C1*g, -C1*i1, -C1*j1, 0, 0, 0, 0,
  0, -A*j1 - C1*\[Eta]*\[Nu] - M*g - N1*i1 + \[Nu]*(1 - C1*\[Eta])}};

eqs = {-x + \[CurlyEpsilon]*H + \[Lambda]*M ==
  0, \[Nu]*(1 - \[Eta]*C1) - g*M - i1*N1 - j1*A == 0,
  f*A*C1 - (b + k*D1 + \[Delta])*H == 0,
  b*H - (d*C1 + k*D1 + \[Kappa])*M == 0,
  d*M*C1 - (e*C1 + \[Theta])*N1 == 0,
  e*N1*C1 - \[Gamma]*A == 0, Y == 0, T == 0, W == 0, L == 0};

(*Definimos la función que genera parámetros aleatorios*)
generarParametros[] := {b -> RandomReal[{0.51, 0.71}],
  f -> RandomReal[{0.0537, 0.0935}],
  k -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
  \[Delta] -> RandomReal[{0.07, 0.11}],

```

```

d -> RandomReal[{0.0138, 0.0178}],
z -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
\[Kappa] -> RandomReal[{0.09, 0.13}],
\[CurlyPhi] -> RandomReal[{0.095, 0.285}],
e -> RandomReal[{0.0166, 0.0194}],
\[Theta] -> RandomReal[{0.01, 0.03}],
\[Zeta] -> RandomReal[{0.05, 0.15}],
\[Omicron] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
\[Gamma] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
x -> RandomReal[{0.0286, 0.04}],
\[CurlyEpsilon] -> RandomReal[{0.01, 0.09}],
\[Lambda] -> RandomReal[{0.02, 0.18}],
\[Alpha] -> RandomReal[{0.05, 0.10}],
\[Beta] -> RandomReal[{0.001, 0.003}],
\[Tau] -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
\[Rho] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
s -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
u -> RandomReal[{0.33, 0.5}],
\[Xi] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
r -> RandomReal[{0.0833, 0.1}],
\[Mu] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
\[Chi] -> RandomReal[{0.067, 0.143}],
\[Nu] -> RandomReal[{0.10, 0.14}],
\[Eta] -> RandomReal[{0.0167, 0.025}],
g -> RandomReal[{0.0001, 0.0009}],
i1 -> RandomReal[{0.001, 0.009}],
      j1 -> RandomReal[{0.000001, 0.000009}]];

j = 0;
CuentaEstable = 0;
CuentaInestable = 0;
NoHaypuntodeEquilibrio = 0;
For[j = 1, j <= 1000, j++,
  params =
    generarParametros[];
  eqsNum =
    Join[eqs /. params, {H >= 0, M >= 0, N1 >= 0, A >= 0, D1 >= 0,
      Y >= 0, T >= 0, W >= 0, L >= 0, C1 >= 0}];

  (*Resolver el sistema con los parámetros numéricos*)
  sol = Quiet[NSolve[eqsNum, {H, M, N1, A, D1, Y, T, W, L, C1}, Reals]];
  If[sol == {}, NoHaypuntodeEquilibrio++; Continue[]];
  (*Evaluar la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio*)
  Jevaluado = J /. sol;

```

```

Jfinal = Jevaluado /. params;
(*Calcular los valores propios (autovalores)*)
valoresPropios = Eigenvalues[Jfinal];
(*Verificar si alguno tiene parte real>=0*)
umbral = 10^-10; (*Para ignorar errores numéricos mínimos*)
inestable = AnyTrue[Re[valoresPropios], # > umbral &];

(*Resultado*)
If[inestable, CuentaInestable = CuentaInestable + 1,
  CuentaEstable = CuentaEstable + 1]];
Print["Casos estables ", CuentaEstable];
Print["Casos inestables " , CuentaInestable];
Print["sistema sin puntos de equilibrio " , NoHaypuntodeEquilibrio];
total = CuentaEstable + CuentaInestable + NoHaypuntodeEquilibrio;
Print["total iteraciones ", total];

Casos estables 0
Casos inestables 850
sistema sin puntos de equilibrio 150
total iteraciones 1000

```

Programa Inestabilidad Punto de Equilibrio 7

```

(*MONTE CARLO SÉPTIMO PUNTO DE EQUILIBRIO*)
(*INESTABLE*)
Clear[Y, T, W, L];
ClearAll["Global'"]
(*definimos el jacobiano*)
J = {{-D1*k - b - \[Delta], 0, 0, C1*f, -H*k, 0, 0, 0, 0,
  A*f}, {b, -C1*d - D1*z - \[Kappa], 0, 0, -M*z, 0, 0, 0,
  0, -M*d}, {0, C1*d, -C1*e - T*\[CurlyPhi] - Y*\[Zeta] - \[Theta],
  0, 0, -N1*\[Zeta], -N1*\[CurlyPhi], 0, 0, M*d - N1*e}, {0, 0,
  C1*e, -Y*\[Omicron] - \[Gamma], 0, -A*\[Omicron], 0, 0, 0,
  N1*e}, {D1*\[CurlyEpsilon], D1*\[Lambda], 0, 0,
  H*\[CurlyEpsilon] + M*\[Lambda] - x, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0,
  Y*\[Rho], Y*\[Tau], 0,
  A*\[Tau] + N1*\[Rho] -
  Y*\[Alpha]*\[Beta] + \[Alpha]*(1 - Y*\[Beta]), 0, 0, 0, 0}, {0,
  0, 0, 0, 0, 0, -\[Chi], 0, r, 0}, {0, 0, T*s, 0, 0, 0,
  N1*s, -u - \[Xi], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, u, -r - \[Mu],
  0}, {0, -C1*g, -C1*i1, -C1*j1, 0, 0, 0, 0,
  0, -A*j1 - C1*\[Eta]*\[Nu] - M*g - N1*i1 + \[Nu]*(1 - C1*\[Eta])}};

```

```

eqs = {\[Nu]*(1 - \[Eta]*C1) - g*M - i1*a - j1*A == 0,
      f*A*C1 - (b + \[Delta])*(d*C1 + \[Kappa])*M/b == 0,
      d*M*C1 - (\[CurlyPhi]*T + e*C1 + \[Theta])*a == 0,
      e*a*C1 - \[Gamma]*A == 0, D1 == 0, Y == 0, L == \[Chi]*T/r,
      W - (1 + \[Mu]/r)*\[Chi]*(T/u) == 0,
      H == (d*C1 + z*D1 + \[Kappa])*M/b, N1 == a};

```

(*Definimos la función que genera parámetros aleatorios*)

```

generarParametros[] := {b -> RandomReal[{0.51, 0.71}],
  f -> RandomReal[{0.0537, 0.0935}],
  k -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
  \[Delta] -> RandomReal[{0.07, 0.11}],
  d -> RandomReal[{0.0138, 0.0178}],
  z -> RandomReal[{0.1, 0.9}],
  \[Kappa] -> RandomReal[{0.09, 0.13}],
  \[CurlyPhi] -> RandomReal[{0.095, 0.285}],
  e -> RandomReal[{0.0166, 0.0194}],
  \[Theta] -> RandomReal[{0.01, 0.03}],
  \[Zeta] -> RandomReal[{0.05, 0.15}],
  \[Omicron] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
  \[Gamma] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
  x -> RandomReal[{0.0286, 0.04}],
  \[CurlyEpsilon] -> RandomReal[{0.01, 0.09}],
  \[Lambda] -> RandomReal[{0.02, 0.18}],
  \[Alpha] -> RandomReal[{0.05, 0.10}],
  \[Beta] -> RandomReal[{0.001, 0.003}],
  \[Tau] -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
  \[Rho] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
  s -> RandomReal[{0.1, 0.3}],
  u -> RandomReal[{0.33, 0.5}],
  \[Xi] -> RandomReal[{0.1, 0.2}],
  r -> RandomReal[{0.0833, 0.1}],
  \[Mu] -> RandomReal[{0.02, 0.04}],
  \[Chi] -> RandomReal[{0.067, 0.143}],
  \[Nu] -> RandomReal[{0.10, 0.14}],
  \[Eta] -> RandomReal[{0.0167, 0.025}],
  g -> RandomReal[{0.0001, 0.0009}],
  i1 -> RandomReal[{0.001, 0.009}],
  j1 -> RandomReal[{0.000001, 0.000009}]}];

j = 0;
CuentaEstable = 0;
CuentaInestable = 0;

```

```

For[j = 1, j <= 1000, j++,
  params = generarParametros[];
  (*Calcular a usando la fórmula*)
  aVal = (1/(s*u))*(u + \[Xi])*(1 + \[Mu]/r)*\[Chi] /. params;

  (*Agregar a a los parámetros*)
  params = Append[params, a -> aVal];
  eqsNum =
    Join[eqs /. params, {H >= 0, M >= 0, N1 >= 0, A >= 0, D1 >= 0,
      Y >= 0, T >= 0, W >= 0, L >= 0, C1 >= 0}];

  (*Resolver el sistema con los parámetros numéricos*)
  sol = Quiet[NSolve[eqsNum, {H, M, N1, A, D1, Y, T, W, L, C1}, Reals]];

  (*Evaluar la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio*)
  Jevaluado = J /. sol;
  Jfinal = Jevaluado /. params;
  (*Calcular los valores propios (autovalores)*)
  valoresPropios = Eigenvalues[Jfinal];
  (*Verificar si alguno tiene parte real>=0*)
  umbral = 10^-10; (*Para ignorar errores numéricos mínimos*)
  inestable = AnyTrue[Re[valoresPropios], # > umbral &];

  (*Resultado*)
  If[inestable, CuentaInestable = CuentaInestable + 1,
    CuentaEstable = CuentaEstable + 1]];
Print["Casos estables ", CuentaEstable];
Print["Casos inestables " , CuentaInestable];

Casos estables 0
Casos inestables 1000

```

Programa Modelo para Simulaciones

```

function modelo_diaphorina()
  % Condiciones iniciales
  X0 = [416; 414; 412; 416; 0; 0; 2; 4; 3; 5];
  % [H, M, N, A, D, Y, T, W, L, C]

  % Intervalo de simulación (días)
  tspan = [0 200];

  % Resolver el sistema

```

```

[t, X] = ode45(@modelo, tspan, X0);

% Configuración de la figura
figure;
hold on;

% Estilos personalizados para cada variable
plot(t, X(:,1), 'y-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'H (Huevos D. citri)')
plot(t, X(:,2), 'b-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'M (Ninfas jóvenes)')
plot(t, X(:,3), 'r-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'N (Ninfas avanzadas)')
plot(t, X(:,4), 'g-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'A (Adultos D. citri)')
plot(t, X(:,5), 'm:', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'D (Depredadores)');
plot(t, X(:,6), 'c--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'Y (Hongos)');
plot(t, X(:,7), 'k-.', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'T (Adultos T. radiat)')
plot(t, X(:,8), 'k--', 'MarkerIndices', 10:20:length(t), 'LineWidth', 1.5,
'DisplayName', 'W (Huevos T. radiata)');
plot(t, X(:,9), 'k-', 'MarkerIndices', 10:20:length(t), 'LineWidth', 1.5,
'DisplayName', 'L (Larvas T. radiata)');
plot(t, X(:,10), '--', 'Color', [1 0.5 0], 'LineWidth', 3, 'DisplayName', '
C (Brotes sanos)');

hold off;

% Ajustes de la gráfica
xlim([0 100]);
ylim([0 50]);
legend('Location', 'eastoutside');
xlabel('Tiempo (días)');
ylabel('Población / Cantidad');
title('Dinámica Poblacional: Diaphorina citri y Tamarixia radiata');
grid on;
end

% Sistema de ecuaciones diferenciales
function dXdt = modelo(t, X)
    % Parámetros (valores sugeridos)
    f      = 0.0736;
    b      = 0.61;
    k      = 0.5;
    delta  = 0.09;
    d      = 0.0158;
    z      = 0.5;
    kappa  = 0.11;

```

```

phi      = 0.19;
e        = 0.018;
theta    = 0.02;
zeta     = 0.1;
o        = 0.15;
gamma    = 0.03;
x        = 0.0343;
epsilon  = 0.005;
lambda   = 0.01;
alpha    = 0.075;
beta     = 0.002;
tau      = 0.2;
rho      = 0.15;
r        = 0.09165;
chi      = 0.105;
s        = 0.2;
u        = 0.415;
xi       = 0.15;
mu       = 0.03;
nu       = 0.12;
eta      = 0.02085;
g        = 0.0005;
i1       = 0.005;
j1       = 0.000005;

```

```
% Variables de estado
```

```

H = X(1); M = X(2); N = X(3); A = X(4); D = X(5);
Y = X(6); T = X(7); W = X(8); L = X(9); C = X(10);

```

```
% Ecuaciones
```

```
% Ecuaciones diferenciales
```

```

dHdt = f*A*C - b*H - k*H*D - delta*H;
dMdt = b*H - d*M*C - z*M*D - kappa*M;
dNdt = d*M*C - phi*N*T - e*N*C - theta*N - zeta*N*Y;
dAdt = e*N*C - o*A*Y - gamma*A;
dDdt = -x*D + epsilon*H*D + lambda*M*D;
dYdt = alpha*Y*(1 - beta*Y) + tau*A*Y + rho*N*Y;
dTdt = r*L - chi*T;
dWdt = s*T*N - u*W - xi*W;
dLdt = u*W - r*L - mu*L;
dCdt = nu*C*(1 - eta*C) - g*C*M - i1*C*N - j1*A*C;

```

```
dXdt = [dHdt; dMdt; dNdt; dAdt; dDdt; dYdt; dTdt; dWdt; dLdt; dCdt];
```

end

Bibliografía

- [1] Baños, H., Martínez, M., Miranda, I., Martínez, J., Rodríguez, H., Moraima, M., Sánchez, A. (2014). *Bases ecológicas para el desarrollo de Tamarixia radiata W. (Hymenoptera: Eulophidae), biorregulador del vector del Huanglong-bing en Cuba*. Centro Nacional de Sanidad Agropecuaria (CENSA), Cuba.
- [2] Baños Díaz, H. L., Miranda, I., Martínez, M. A. (2013). *Biología y tabla de vida de Tamarixia radiata Waterston bajo condiciones controladas*. Revista de Protección Vegetal, 28(2), 120-127.
- [3] Cantú Bernal, M. C. S. H. (2024). *Estrategias para el biocontrol de Diaphorina citri Kuwayama (Hemiptera: Liviidae) con Hirsutella citriformis Speare*
- [4] Cantú Bernal, S. H. (2024). *Estrategias para el biocontrol de Diaphorina citri Kuwayama (Hemiptera: Liviidae) con Hirsutella citriformis Speare* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León.
- [5] Cortez-Mondaca, E., López-Arroyo, J. I., Rodríguez-Ruiz, L., Partida-Valenzuela, M. P., Pérez-Márquez, J. (2010). *Especies de Chrysopidae asociadas a Diaphorina citri Kuwayama en cítricos y capacidad de depredación en Sinaloa, México*
- [6] Fernández, M., Miranda, I. (2005). *Comportamiento de Diaphorina citri Kuwayama (Hemiptera: Psyllidae). Parte I: Características morfológicas, incidencia y enemigos naturales asociados*. Revista Protección Vegetal, 20(1), 27-31
- [7] García, Y., Ramos, Y. P., Sotelo, P. A., Kondo, T. (2016). *Biología de Diaphorina citri (Hemiptera: Liviidae) bajo condiciones de invernadero en Palmira, Colombia*
- [8] Hernández, M. S. (2010). *Producción semi-industrial del hongo Hirsutella citriformis (Speare) y su evaluación en adultos de Diaphorina citri (Kuwa-*

- yama) en el municipio de Tuxpan, Veracruz, México [Tesis de licenciatura, Universidad Veracruzana]
- [9] Kondo, T. (2017). *Protocolo de cría y liberación de Tamarixia radiata (Waterston) (Hymenoptera: Eulophidae)*. Mosquera, Colombia
- [10] Lotz, J. (2018), López-Collado, J. (2010), Rogers, S. (s/a), Lewis, S. (s/a). *Psílido asiático de los cítricos Diaphorina citri Kuwayama. Ficha Técnica No. 77*
- [11] Miranda, I., Baños, H., Martínez, M., Alemán, J. (2008). *Modelo teórico de la interacción de Diaphorina citri Kuwayana (Hemiptera: Psyllidae) con sus enemigos naturales*. Grupo Plagas Agrícolas, Centro Nacional de Sanidad Agropecuaria (CENSA), Cuba
- [12] Pérez-Artiles, L., Busoli, A. C., Sotelo, P. A., y Arcila, Á. M. (2017). *Biología y parámetros reproductivos de Diaphorina citri (Hemiptera: Liviidae) en diferentes hospederos de Rutaceae*. Revista Colombiana de Entomología, 43(2), 141–150.
- [13] Rodríguez-Palomera, M., Luna-Esquivel, G., Robles-Bermúdez, A., Coronado-Blanco, J. M., Cambero-Nava, K. G., Cambero-Campos, O. J. (2019). *Aspectos biológicos y parámetros poblacionales de Cycloneda sanguinea L. (Coleoptera: Coccinellidae) sobre Aphis aurantii Boyer de Fonscolombe (Hemiptera: Aphididae)*
- [14] Santiago Hernández, M. (2010). *Producción semi-industrial del hongo Hirsutella citriformis (Speare) y su evaluación en adultos de Diaphorina citri (Kuwayama) en el municipio de Tuxpan, Veracruz, México*
- [15] Valderrama, M. (2020). *Interacción poblacional de Diaphorina citri y los brotes de la planta hospedante*. Universidad del Valle, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia