Vol. XVII, № 1, Junio (2009)
Matemáticas: 23–34

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Producto tensorial de medidas radonianas y el teorema de Fubini

Michell Andrés Gómez Leiva
Universidad Icesi

Guillermo Restrepo Sierra
Universidad del Valle

Recibido Agt. 11, 2008 Aceptado Oct. 29, 2008

Abstract

In this article we will prove the existence of the tensor product $\alpha \otimes \beta$ of two radon measures α, β defined in Hausdorff topological spaces X, Y respectively. Besides, a Fubini's type theorem is proved for finite radon measures. Finally, we will prove that $bor(X) \otimes bor(X) \subsetneq bor(X \times X)$ (strict inclusion) if X is a Hausdorff topological space such that $car(X) > \aleph_1$. We note that $bor(X)$ is the σ-algebra of all borel subsets of X.

Keywords: Radon measure, Radon product measure, Fubini's theorem, σ-separated.

MSC(2000): 76M10, 76D03.

Resumen

En este artículo demostraremos la existencia del producto tensorial $\alpha \otimes \beta$ de dos medidas radonianas α, β definidas en espacios topológicos hausdorfianos X, Y respectivamente. Además demostraremos un teorema del tipo Fubini para medidas radonianas finitas. Finalmente, demostraremos que $bor(X) \otimes bor(X) \subsetneq bor(X \times X)$ (inclusión estricta) si X es un espacio topológico hausdorfiano tal que $car(X) > \aleph_1$. Hacemos notar que $bor(X)$ es la σ-álgebra de los borelianos de X.

Palabras y frases claves: Medida radoniana, medida radoniana producto, teorema de Fubini, σ-separante.

1 Introducción

Sea (X, τ) un espacio topológico hausdorfiano y $ab(X)$ la colección de todos los conjuntos τ-abiertos de X. Una medida *boreliana* en X es cualquier medida definida en la σ-álgebra $bor(X)$ de los conjuntos τ-borelianos de X (la σ-álgebra generada por los conjuntos τ-abiertos). Una medida *radoniana* en X es una medida boreliana que satisface las condiciones siguientes:

(rad 1) La medida de cualquier conjunto boreliano es el extremo inferior de las medidas de los abiertos que los contienen. Es decir, si $B \in bor(X)$, entonces

$$\mu(B) = \text{ínf}\{\mu(G) : G \supseteq B, \quad G \quad \text{abierto}\}$$

(Propiedad de regularidad exterior).

(rad 2) La medida de cualquier abierto es el extremo superior de las medidas de los subconjuntos compactos contenidos en él. Es decir, si $G \in ab(X)$, entonces

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq G, \quad K \quad \text{compacto}\}$$

(Propiedad de regularidad interior).

(rad 3) La medida μ es localmente finita. Es decir, todo $x \in X$ posee una vecindad V tal que $\mu(V) < +\infty$.

La propiedad (rad 3) implica que la medida de todo subconjunto compacto es finita. La propiedad de regularidad interior es válida para todo boreliano de medida finita. Es decir, si $B \in bor(X)$ y $\mu(B) < \infty$ entonces $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B,\, K \text{compacto}\}$. La definición de medida radoniana que hemos adoptado es la definición R_2 en [6] (página 13). Para una historia de la teoría de la medida en los espacios topológicos generales el lector puede consultar [1]. En este texto se destaca la importancia que ha tenido en su desarrollo el Cálculo de Probabilidades.

Si $(X, \mathcal{A}, \alpha)$ y $(Y, \mathcal{B}, \beta)$ son espacios de medición dotados de medidas α y β, es bien conocido el procedimiento para definir en la σ-álgebra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times Y$ generada por la colección de subconjuntos de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, una medida μ tal que $\mu(A\times B) = \alpha(A)\beta(B)$. Esta medida es única si α y β son σ-finitas. Cuando X, Y son espacios topológicos y α, β son medidas borelianas en $bor(X)$ y $bor(Y)$ respectivamente, entonces $\alpha \otimes \beta$ es una medida en $bor(X) \otimes bor(Y)$. Uno quisiera que fuera una medida en $bor(X \times Y)$, pero ésto no ocurre en general ya que $bor(X) \otimes bor(Y) \subseteq bor(X \times Y)$ y la inclusión puede ser estricta (ver teorema 4.6). Para ver lo anterior, se observa que $bor(X) \otimes bor(Y)$ es la menor σ-álgebra de subconjuntos de $X \times Y$ que hace medibles a las proyecciones p_X y p_Y. Como estas proyecciones son continuas, entonces son medibles respecto a la σ-álgebra $bor(X \times Y)$, lo cual prueba que $bor(X) \otimes bor(Y) \subseteq bor(X \times Y)$. Si X, Y son espacios topológicos con una base numerable de abiertos, entonces se da la igualdad $bor(X) \otimes bor(Y) = bor(X \times Y)$.

En primer lugar, nos proponemos demostrar en este artículo que si α, β son medidas radonianas entonces existe una y sólo una medida radoniana λ en $bor(X\times Y)$ tal que $\lambda(A\times B) = \alpha(A)\beta(B)$ (teorema 2.1). Este teorema es un poco diferente a un teorema demostrado en [6] (teorema 17, página 63) en el cual la igualdad anterior es en términos de la medida exterior: $\lambda^*(A \times B) = \alpha^*(A)\beta^*(B)$. Además la demostración en este artículo sigue un camino completamente diferente como lo veremos en la sección 2.

En segundo lugar, nos proponemos demostrar un teorema de Fubini para medidas radonianas finitas y funciones borelianas positivas. Es el teorema 3.3 que expresa lo siguiente. Si X, Y son espacios topológicos hausdorfianos y α, β son medidas radonianas finitas definidas en $bor(X)$ y $bor(Y)$ respectivamente y f es una función boreliana positiva, entonces

$$\int\limits_{X\times Y} f\, d(\alpha\otimes\beta)(x,y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f_x(y)\, d\beta(y)\Big)\, d\alpha(x) = \int\limits_Y \Big(\int\limits_X f_y(x)\, d\alpha(x)\Big)\, d\beta(y)$$

Es parte del teorema demostrar que las funciones $y \mapsto f(x,y)$ (x fijo) y $x \mapsto u(x) = \int_Y f(x,y)d\beta(y)$ son funciones borelianas, lo mismo que $x \mapsto f(x,y)$ (y fijo) y $y \mapsto v(y) = \int_X f(x,y)d\alpha(x)$. Este teorema se demuestra en la sección 3, así como el teorema de Fubini para las funciones $\alpha\otimes\beta$-integrables no necesariamente positivas.

El teorema anterior es similar a un teorema de Fubini demostrado en [6] (teorema 18, página 63), en el cual interviene la llamada integral superior. Si $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medición dotado de una medida, la integral superior de $f : \omega \to [0, +\infty]$ es

$$\int_\Omega^* f(x) d\mu(x) = \text{ínf}\{\mu(g) : \ g \, \text{es escalonada y } \ g \geq f\}.$$

En [4] (proposición 3.3, página 105), Y. Kawabe también demuestra un teorema similar al que demostramos en este artículo. Supone que las medidas α, β son τ-smooth y demuestra la existencia de una medida $\lambda = \alpha \otimes \beta$ en $bor(X \times Y)$ que es τ-smooth y $\lambda(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$ si A y B son conjuntos borelianos en X y Y respectivamente.

Finalmente, en la sección 4 demostraremos que si X es un espacio topológico hausdorfiano y $car(X) > \aleph_1$, entonces $bor(X) \otimes bor(X) \subsetneq bor(X \times X)$ (inclusión estricta). Este teorema se basa en la noción de conjunto separante de subconjuntos de un conjunto Ω estudiada en [7].

2 Medida radoniana producto

Teorema 2.1. *Supongamos que α y β son medidas radonianas en los espacios topológicos X y Y respectivamente. Entonces existe una y sólo una medida radoniana λ en $bor(X \times Y)$ que satisface $\lambda(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$ para todo $A \in bor(X)$ y todo $B \in bor(Y)$ tales que $\alpha(A), \beta(B) < \infty$.*

La medida radoniana λ del enunciado del teorema definida en $bor(X \times Y)$ se llama *medida radoniana producto* de α y β y se denota por $\alpha \otimes \beta$.

Demostración. Llamaremos conjunto básico a cualquier conjunto de la forma

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \times F_k) \quad \text{(unión disjunta)},$$

donde $E_k \in bor(X)$ y $F_k \in bor(Y)$. La colección $\mathcal{R}$ de todos los conjuntos básicos es un anillo llamado anillo de los conjuntos básicos.

Consideremos la función σ-aditiva ν definida en el anillo $\mathcal{R}$ de los conjuntos básicos definida por

$$\nu(R) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(E_k)\beta(F_k)$$

i. Definimos para todo conjunto abierto G

$$\lambda(G) = \sup\{\nu(R) : R \subseteq G, \quad R \quad \text{básico}, \quad \nu(R) < \infty\}$$

ii. Como α y β son medidas radonianas, entonces

$$\lambda(G) = \sup\{\nu(R) : R \subseteq G, \quad R \quad \text{básico y compacto}\}$$

En efecto, sea $r < \sup\{\nu(R) : R \subseteq G, \quad R \quad \text{básico}, \quad \nu(R) < \infty\}$. Existe un $R \subseteq G$ tal que $r < \nu(R) < \infty$. Como $R = \bigcup_{k=1}^{n}(E_k \times F_k)$, existen para cada k compactos $S_k \subseteq E_k$ y $T_k \subseteq F_k$ tales que $r < \nu(\bigcup_{k=1}^{n} S_k \times T_k) < \nu(R)$.

iii. Si $(G_t)_{t\in T}$ es una red no decreciente de abiertos tal que $G_t \uparrow G$, G abierto, entonces $\lambda(G_t) \uparrow \lambda(G)$. Para demostrar este enunciado, sea $r < \lambda(G)$. Existe un $K \in \mathcal{R}$ compacto tal que $K \subset G$ y $r < \nu(K)$. También existe un t tal que $K \subset G_t$ ya que $(G_t)_{t\in T}$ es un recubrimiento abierto de K y es una familia no decreciente. Por consiguiente, $\lambda(G_t) \geq \nu(K) > r$.

iv. La función de conjuntos λ es finitamente aditiva en los abiertos. Para ver esto, sean G_1, G_2 abiertos y disjuntos. Sea $\mathcal{R}_k$ la colección de todos los abiertos básicos de medida finita contenidos en G_k con $k = 1, 2$. Sea $\mathcal{U} = \{U = A \cup B : A \in \mathcal{R}_1, B \in \mathcal{R}_2\}$ ordenado por la relación de inclusión. Como G_1 y G_2 son disjuntos y $U \uparrow G = G_1 \cup G_2$, entonces por *iii* se concluye que

$$\lambda(G) = \sup\{\lambda(U) : U \in \mathcal{U}\} = \sup\{\lambda(A) + \lambda(B) : A \in \mathcal{R}_1, B \in \mathcal{R}_2\} =$$

$$\sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{R}_1\} + \sup\{\lambda(B) : B \in \mathcal{R}_2\} = \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$$

Por inducción se prueba que el enunciado es cierto para toda unión finita y disjunta de abiertos.

v. La función λ definida en los abiertos de $X \times Y$ es σ-aditiva. En efecto, sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia disjunta de abiertos. Como $(\bigcup_{k=1}^{n} G_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente de abiertos que converge a $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, entonces por *iii* y *iv* se tiene que $\lambda(G) = \sup_n\{\lambda(\bigcup_{k=1}^{n} G_k)\} = \sup_n\{\sum_{k=1}^{n} \lambda(G_k))\} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k)$.

La función σ-aditiva λ permite definir la semimedida exterior λ^* de Caratheodory, la cual es σ-aditiva en la σ-álgebra de los conjuntos λ^*-medibles. Recordemos que

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\{\lambda(G) : G \supseteq E, \quad G \quad \text{abierto}\}$$

porque los conjuntos abiertos se conservan bajo uniones arbitrarias y en particular numerables. También recordemos que E es λ^*-medible si para todo $D \subseteq X \times Y$ se cumple

$$\lambda^*(D) \geq \lambda^*(D \cap E) + \lambda^*(D - E)$$

Observemos que si G es abierto entonces $\lambda^*(G) = \lambda(G)$. Además, $\nu(K) \leq \lambda^*(K)$ para todo subconjunto básico y compacto K, ya que si G es un abierto que contiene a K, entonces $\nu(K) \leq \lambda(G)$ por *ii* y por tanto $\nu(K) \leq \lambda^*(K)$.

vi. Si G es abierto, $K \in \mathcal{R}$ es compacto y $G \cap K = \emptyset$, entonces

$$\lambda^*(G \cup K) = \lambda(G) + \lambda^*(K)$$

Para demostrar lo anterior, sea A un abierto que contiene a $G \cup K$. Por ser K compacto, existe un abierto $B \supset K$ tal que $B \cap G = \emptyset$. Si $A' = A \cap B$, entonces A' es un abierto que contiene a K y tiene intersección vacía con G. Además, $A' \cup G$ es un abierto que contiene a $G \cup K$ y está contenido en A. Por consiguiente

$$\lambda^*(G \cup K) = \text{ínf}\{\lambda(G \cup H) : \quad H \supset K \quad \text{abierto}, \quad H \cap G = \emptyset\}$$

$$= \text{ínf}\{\lambda(G) + \lambda(H) : \quad H \supset K \quad \text{abierto}, \quad H \cap G = \emptyset\} = \lambda^*(G) + \lambda^*(K)$$

vii. Todo subconjunto abierto G es λ^*-medible. Sea D un subconjunto abierto de $X \times Y$. Si $\lambda^*(D) = \infty$, es obvio que $\lambda^*(D) \geq \lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D - G)$. Supondremos que $\lambda^*(D) < \infty$. Sea K un subconjunto compacto básico de $G \cap D$. Entonces $K \subseteq D$, $D = K \cup D - K$ y por *vi*

$$\lambda^*(D) = \lambda^*(K) + \lambda^*(D - K).$$

Podemos, pues, escribir

$$\lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D - G) \leq \lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D - K) =$$

$$\lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D) - \lambda^*(K) \leq \lambda(D \cap G) + \lambda(D) - \nu(K)$$

Como $\lambda(D \cap G) - \nu(K)$ se puede hacer arbitrariamente pequeño, entonces

$$\lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D - K) \leq \lambda(D) = \lambda^*(D)$$

Si D es arbitrario, sea A un abierto que contiene a D. Entonces, por lo que acabamos de demostrar

$$\lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D - G) \leq \lambda^*(A \cap G) + \lambda^*(A - G) \leq \lambda^*(A)$$

y por consiguiente, $\lambda^*(D \cap G) + \lambda^*(D - G) \leq \lambda^*(D)$. Luego G es λ^*-medible.

En resumen, la colección de los conjuntos abiertos de $X \times Y$ está contenida en la σ-álgebra de los conjuntos λ^*-medibles. Por tanto todo conjunto boreliano es λ^*-medible. Seguiremos denotando por λ a la medida $\lambda^*|bor(X \times Y)$.

viii. Si $A \in bor(X)$, $B \in bor(Y)$ y $\alpha(A), \beta(B) < \infty$, entonces

$$\lambda(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$$

Para demostrar este enunciado, sea G un abierto que contiene a $A \times B$, entonces $\nu(A \times B) \leq \lambda^*(G) = \lambda(G)$. Por consiguiente

$$\alpha(A)\beta(B) = \nu(A \times B) \leq \lambda^*(A \times B) = \lambda(A \times B)$$

Como α y β son medidas radonianas, existen sucesiones decrecientes de abiertos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $A_n \supseteq A$ y $B_n \supseteq B$ para todo n, $\alpha(A_n) \longrightarrow \alpha(A)$ y $\beta(B_n) \longrightarrow \beta(B)$. Como $A_n \times B_n \supseteq A \times B$, entonces

$$\alpha(A_n)\beta(B_n) = \lambda(A_n \times B_n) \longrightarrow \alpha(A)\beta(B) \geq \lambda(A \times B)$$

En suma, $\lambda(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$.

ix. La medida λ que hemos definido es una medida radoniana en $X \times Y$. Esto es consecuencia del proceso mismo de construcción de λ. En efecto, por definición de la medida exterior λ^*, siempre que $B \in bor(X \times Y)$, se tiene $\lambda(B) = \lambda^*(B) = \inf\{\lambda(G) : G \quad \text{abierto}, \quad G \supseteq B\}$ y por tanto λ satisface (rad 1). Si G es abierto entonces $\lambda(G) = \sup\{\lambda(R) : R \in \mathcal{R} \quad \text{compacto y} \quad \lambda(R) < \infty\}$ por *ii*, lo que demuestra (rad 2). Resta demostrar que λ es localmente finita. Sea $(x, y) \in X \times Y$. Como α y β son localmente finitas, existen vecindades V_x de x y W_y de y tales que $\alpha(V_x), \beta(W_y) < \infty$. Por consiguiente $\lambda(V_x \times W_y) = \alpha(V_x)\beta(W_y) < \infty$.

x. Si μ es otra medida radoniana en $bor(X \times Y)$ tal que $\mu(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$ para todo $A \in bor(X)$ y todo $B \in bor(Y)$ tales que $\alpha(A), \beta(B) < \infty$, entonces $\mu(R) = \nu(R)$ para todo conjunto R básico y compacto. Luego μ coincide con λ en los abiertos de $X \times Y$ por *ii* y (rad 2). Entonces $\mu(B) = \lambda(B)$ para todo $B \in bor(X \times Y)$ por (rad 1). □

3 Teorema de Fubini

En esta sección se enuncian y demuestran teoremas similares a los de las secciones y de Fubini para medidas radonianas.

Teorema 3.1. (de las secciones para medidas radonianas) *Sean X y Y espacios topológicos hausdorfianos, α y β medidas radonianas finitas en $bor(X)$ y $bor(Y)$ respectivamente, y $Q \in bor(X \times Y)$. Entonces*
1. $Q_x = \{y \in Y : (x, y) \in Q\}$ (x-sección de Q) $\in bor(Y)$ y $Q_y = \{x \in X : (x, y) \in Q\}$ (y-sección de Q) $\in bor(X)$.
2. Las funciones $x \mapsto \beta(Q_x)$ y $y \mapsto \alpha(Q_y)$ son borelianas.

Demostración. 1. La función $x \mapsto \theta_y(x) = (x, y)$ de X en $X \times Y$ (y fijo) es continua y por tanto boreliana. Como $Q \in bor(X \times Y)$ entonces χ_Q es boreliana. Luego $\chi_{Q_y} = \chi_Q \circ \theta_y$ es boreliana y por tanto $Q_y \in bor(X)$. De manera análoga se prueba que $Q_x \in bor(Y)$.

2. Sea $\mathcal{H} = \{Q \in bor(X \times Y) : x \mapsto \beta(Q_x) \quad \text{es boreliana}\}$. Mostremos que la colección $ab(X \times Y)$ de los subconjuntos abiertos de $X \times Y$ está contenida en $\mathcal{H}$. Sean $a \in X$ y G abierto en $X \times Y$. Entonces G_a es abierto en Y. Sea $r < \beta(G_a)$. Como β es radoniana, existe un compacto $K \subset G_a$ tal que $r < \beta(K)$. Para cada $y \in K$ existen vecindades abiertas V_y de a y W_y de y tales que $V_y \times W_y \subset G$. Existen un número finito $W_{y_1}, W_{y_2}, \ldots, W_{y_n}$ de dichos abiertos que cubren a K. Si $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ entonces V es abierto y $V \times K \subset G$. Para todo $x' \in V$ se tiene

que $K \subset G_{x'}$. Por tanto $r < \beta(G_{x'})$ para todo $x' \in V$. Hemos mostrado que $x \mapsto \beta(G_x)$ es semicontinua inferiormente y entonces es boreliana.

No es difícil ver que $\mathcal{H}$ es un sistema de Dynkin (ver [5] página 99) cerrado para intersecciones finitas porque β es finita. Por lo tanto $bor(X\times Y) = \mathcal{A}(ab(X\times Y)) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{D}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \subseteq bor(X \times Y)$. Luego $bor(X \times Y) = \mathcal{H}$ y $x \mapsto \beta(Q_x)$ es boreliana para todo $Q \in bor(X \times Y)$. $\square$

Lema 3.2. *Sea α una medida radoniana finita en el espacio topológico X. Si $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es una red no decreciente de funciones positivas semicontinuas inferiormente que converge puntualmente a f, entonces f es semicontinua inferiormente y $\int\limits_X f_\gamma(x)d\alpha(x) \uparrow \int\limits_X f(x)d\alpha(x)$.*

Demostración. La función f es s.c.i por ser el supremum de funciones s.c.i. Sea $\epsilon > 0$. Existe una función elemental positiva $u = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k\chi(B_k)$, donde $\{B_k : 1 \leq k \leq n\}$ es una familia finita y disjunta de borelianos, tal que $u \leq f$ y

$$\int_X f(x)d\alpha(x) - \int_X u(x)d\alpha(x) < \frac{\eta}{2}$$

donde $\eta = \eta(\epsilon)$ se escogerá después. Como α es radoniana, existe para cada B_k un compacto $H_k \subseteq B_k$ tal que $\alpha(B_k) - \alpha(H_k) < \frac{\eta}{2t}$, donde $t = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k$. La función elemental $v = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k\chi(H_k)$ es semicontinua superiormente porque cada H_k es cerrado y

$$\int_X u(x)d\alpha(x) - \int_X v(x)d\alpha(x) < \frac{\eta}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_X f(x)d\alpha(x) - \int_X v(x)d\alpha(x) < \eta.$$

Todo consiste ahora en demostrar que existe un γ tal que $f_\gamma(x) \geq v(x) - \eta$ para todo $x \in X$. Para cada $a \in K = \bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k$ existe un γ_a tal que $f_{\gamma_a}(a) > v(a) - \frac{\eta}{2}$. Como f_{γ_a} es semicontinua inferiormente, existe una vecindad abierta W_a de a tal que $f_{\gamma_a}(x) > v(a) - \frac{\eta}{2}$ para todo $x \in W_a$. Por ser v semicontinua superiormente, existe una vecindad abierta W'_a de a tal que $v(x) < v(a) + \frac{\eta}{2}$ para todo $x \in W'_a$. Si $V_a = W_a \cap W'_a$, entonces $x \in V_a$ implica $f_{\gamma_a}(x) > v(x) - \eta$. Existe un subrecubrimiento finito $\{V_{a_k} : 1 \leq k \leq n\}$ de K por ser compacto. Sea γ tal que $\gamma \succeq \gamma_{a_k}$ si $1 \leq k \leq n$. Entonces, $x \in K$ implica $x \in V_{a_k}$ para algún k y por tanto $f_\gamma(x) \geq f_{\gamma_{a_k}}(x) > v(x) - \eta$. Puesto que $v(x) = 0$ si $x \notin K$, entonces $f_\gamma(x) \geq v(x) - \eta$ para todo $x \in X$. Podemos concluir la demostración porque

$$\int_X f(x)d\alpha(x) - \int_X f_\gamma(x)d\alpha(x) \leq \int_X f(x)d\alpha(x) - \int_X (v(x) - \eta)d\alpha(x)$$

$$\leq \eta + \eta\alpha(X) = \eta(1+\alpha(X)) < \epsilon$$

al escoger $\eta < \frac{\epsilon}{1+\alpha(X)}$. $\square$

Teorema 3.3. (de Fubini para medidas radonianas finitas y funciones borelianas positivas) *Sean X y Y espacios topológicos hausdorfianos, α y β medidas radonianas finitas en $bor(X)$ y $bor(Y)$ respectivamente y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función boreliana ≥ 0. Entonces*
1. $f_x : Y \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x,y)$ (x fijo) y $f_y : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_y(x) = f(x,y)$ (y fijo) son funciones borelianas.
2. Las funciones $x \mapsto u(x) = \int\limits_Y f_x(y)d\beta(y)$ y $y \mapsto v(y) = \int\limits_X f_y(x)d\alpha(x)$ son borelianas.
3.

$$\int\limits_{X\times Y} f\,d(\alpha\otimes\beta)(x,y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f_x(y)d\beta(y)\Big)d\alpha(x) = \int\limits_Y \Big(\int\limits_X f_y(x)d\alpha(x)\Big)d\beta(y).$$

Demostración. 1. Las funciones $x \mapsto \theta_y(x) = (x,y)$ de X en $X\times Y$ (y fijo) y $y \mapsto \theta_x(y) = (x,y)$ de Y en $X\times Y$ (x fijo) son continuas y por tanto medibles. Así que $f_x = f\circ\theta_x$ y $f_y = f\circ\theta_y$ son funciones numéricas borelianas.

2. El resultado es cierto si $f = \chi_Q$ con $Q \in bor(X\times Y)$ ya que $f_x = \chi_{Q_x}$ y $u(x) = \int\limits_Y f_x(y)d\beta(y) = \int\limits_Y \chi_{Q_x}(y)d\beta(y) = \beta(Q_x)$ y por el teorema anterior de las secciones, u es boreliana. Por la linealidad de la integral el resultado es cierto si $f = \sum\limits_{k=1}^h t_k\chi_{Q_k}$ porque $f_x = \sum\limits_{k=1}^h t_k\chi_{Q_{kx}}$ y $u(x) = \int\limits_Y f_x(y)d\beta(y) = \sum\limits_{k=1}^h t_k\beta(Q_{kx})$ es boreliana. Si f es una función boreliana ≥ 0, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales no negativas tales que $f_n \uparrow f$. Luego $f_{nx}\uparrow f_x$ y si $u_n(x) = \int\limits_Y f_{nx}(y)d\beta(y)$ entonces $u_n \uparrow u$. Así que u es boreliana. Similarmente se demuestra que v es boreliana.

3. Notemos que la función $Q \mapsto \nu(Q) = \int\limits_X(\int\limits_Y \chi_{Q_x}(y)d\beta(y))d\alpha(x)$ es una medida finita en $bor(X\times Y)$. Nos proponemos demostrar que ν y $\mu = \alpha\otimes\beta$ son iguales. Verifiquemos primero por inducción que ν y μ coinciden en los conjuntos de la forma $R = \bigcup\limits_{i=1}^n V_i\times W_i$ con $V_i \subset X$ y $W_i \subset Y$ abiertos. Si $R = V_1\times W_1$ entonces $\nu(V_1\times W_1) = \alpha(V_1)\beta(W_1) = \mu(V_1\times W_1)$. Si $R = V_1\times W_1 \cup V_2\times W_2$, entonces $\chi_R = \chi_{V_1\times W_1} + \chi_{V_2\times W_2} - \chi_{V_1\cap V_2\times W_1\cap W_2}$ y por la linealidad de la integral $\nu(R) = \mu(R)$. Supongamos que el resultado es cierto para $\bigcup\limits_{i=1}^n V_i\times W_i$ y sea $R = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} V_i\times W_i$. Como $R = \Big(\bigcup\limits_{i=1}^n V_i\times W_i\Big)\cup V_{n+1}\times W_{n+1}$ entonces se sigue el resultado.

Sea $G \subseteq X\times Y$ abierto. Para cada $(x,y)\in G$, existen vecindades abiertas V_x de x y W_y de y tales que $V_x\times W_y \subseteq G$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de G con el orden de inclusión y si $F \in \mathcal{F}$ definimos $R_F = \bigcup_{(x,y)\in F} V_x \times W_y$. Entonces $(R_F)_{F\in\mathcal{F}}$ es una red de abiertos tal que $R_F \uparrow G$. Hemos pues mostrado que existe una red no decreciente $(R_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de conjuntos abiertos de la forma $R_\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \times W_i$ que converge a G. Sea $r < \mu(G)$. Existe un compacto $K \subset G$ tal que $\mu(K) > r$ por ser μ radoniana. Sean $\{R_{\gamma_k} : 1 \leq k \leq n\}$ un subrecubrimiento finito de K y $\gamma \succeq \gamma_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Entonces $R_\gamma \supseteq K$ y $\mu(R_\gamma) > r$, lo cual muestra que $\mu(R_\gamma) \uparrow \mu(G)$. Como $(R_{\gamma,x})_{\gamma\in\Gamma}$ es una red no decreciente de abiertos y $R_{\gamma,x} \uparrow G_x$, entonces $\beta(R_{\gamma,x}) \uparrow \beta(G_x)$. Las funciones $x \mapsto \beta(R_{\gamma,x})$ y $x \mapsto \beta(G_x)$ son semicontinuas inferiormente como se demostró en una parte del teorema de las secciones. Por el lema anterior con $f_\gamma(x) = \beta(R_{\gamma,x})$,

$$\nu(G) = \int_X \beta(G_x)\, d\alpha(x) = \int_X (\lim_\gamma \beta(R_{\gamma,x}))\, d\alpha(x) =$$

$$\lim_\gamma \Big(\int_X (\beta(R_{\gamma,x})\, d\alpha(x) \Big) = \lim_\gamma \nu(R_\gamma) = \lim_\gamma \mu(R_\gamma) = \mu(G)$$

Como las medidas finitas μ y ν coinciden en los abiertos de $X \times Y$ entonces $\nu(Q) = \mu(Q)$ para todo $Q \in bor(X \times Y)$ ya que los abiertos generan los borelianos.

De lo demostrado hasta ahora se tiene que la primera igualdad del enunciado es cierta si $u = \sum_{k=1}^{n} t_k \chi_{Q_k}$ es una función elemental. En efecto, como $u_x(y) = \sum_{k=1}^{n} t_k \chi_{Q_{k,x}}(y)$ entonces

$$\int_X \Big(\int_Y u_x(y)\, d\beta(y) \Big) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} t_k \int_X \Big(\int_Y \chi_{Q_{k,x}}(y)\, d\beta(y) \Big) d\alpha(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \nu(Q_k) = \sum_{k=1}^{n} t_k \mu(Q_k) = \int_{X\times Y} u(x,y)\, d\mu(x,y)$$

En el caso general, existe una sucesión no decreciente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales tal que $u_n \uparrow f$. Luego $u_{n,x} \uparrow f_x$ y por el teorema de Levi se tiene

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \lim_n \int_{X\times Y} u_n(x,y)\, d\mu(x,y) =$$

$$\lim_n \int_X \Big(\int_Y u_{n,x}(y)\, d\beta(y) \Big) d\alpha(x) = \int_X \Big(\lim_n \int_Y u_{n,x}(y)\, d\beta(y) \Big) d\alpha(x) =$$

$$\int_X \Big(\int_Y f_x(y)\, d\beta(y) \Big) d\alpha(x)$$

La otra igualdad es similar. □

Teorema 3.4. (de Fubini para medidas radonianas finitas y funciones integrables) *Sean X y Y espacios topológicos hausdorfianos, α y β medidas radonianas finitas en $bor(X)$ y $bor(Y)$ respectivamente y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\alpha \otimes \beta$-integrable. Entonces*
1. $f_x : Y \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ (x fijo) es β-integrable α-c.t.p y $f_y : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_y(x) = f(x, y)$ (y fijo) es α-integrable β-c.t.p.
2. La función $x \mapsto u(x) = \int\limits_Y f_x(y)d\beta(y)$ (definida α-c.t.p) es α-integrable y la función $y \mapsto v(y) = \int\limits_X f_y(x)d\alpha(x)$ (definida β-c.t.p) es β-integrable.
3.

$$\int\limits_{X\times Y} f\,d(\alpha \otimes \beta)(x, y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f_x(y)d\beta(y)\Big) d\alpha(x) = \int\limits_Y \Big(\int\limits_X f_y(x)d\alpha(x)\Big) d\beta(y).$$

Demostración. Este teorema se deduce del teorema anterior y su demostración sigue los lineamientos generales de la teoría de la integración. Ver, por ejemplo, [5] (página 191). □

4 Condición suficiente para que $bor(X) \otimes bor(X) \subsetneq bor(X \times X)$

Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω con más de dos elementos, *separa puntos* si para todo $\{a, b\} \subset \Omega$, con $a \neq b$, existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $\chi_F(a) \neq \chi_F(b)$. Es decir, $a \in F$ y $b \notin F$ o $a \notin F$ y $b \in F$. Una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en Ω es *σ-separante* si contiene un subconjunto numerable $\mathcal{F}$ que separa puntos. Una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en Ω es *σ-generada* si existe una colección numerable $\mathcal{U} = \{U_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}$ que genera a $\mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ (σ-álgebra generada por $\mathcal{U}$) $= \mathcal{M}$.

Proposición 4.1. *1. Sean $a, b \in \Omega$, con $a \neq b$. La colección $\mathcal{A}_{a,b} = \{E \subseteq \Omega : \chi_E(a) = \chi_E(b)\}$ es una σ-álgebra y $\{a, b\} \in \mathcal{A}_{a,b}$.*
2. $\mathcal{F}$ separa puntos si y sólo si $\mathcal{F}$ no está contenido en $\mathcal{A}_{a,b}$ para todo conjunto con dos puntos $\{a, b\} \subset \Omega$, con $a \neq b$.
3. Si $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ separa puntos, entonces $\mathcal{F}$ también separa puntos.

Demostración. 1. Es claro que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}_{a,b}$. Si $E \in \mathcal{A}_{a,b}$ entonces $\chi_E(a) = \chi_E(b)$. Por lo tanto $\chi_{E^c}(a) = \chi_{E^c}(b)$ y $E^c \in \mathcal{A}_{a,b}$. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de elementos en $\mathcal{A}_{a,b}$ y $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Entonces $\chi_{E_n}(a) = \chi_{E_n}(b)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si existe p tal que $\chi_{E_p}(a) = \chi_{E_p}(b) = 1$ entonces $\{a, b\} \subset E_p \subset E$, $\chi_E(a) = \chi_E(b) = 1$ y en consecuencia $E \in \mathcal{A}_{a,b}$. Si $\chi_{E_n}(a) = \chi_{E_n}(b) = 0$ para todo n, entonces $\chi_E(a) = \chi_E(b) = 0$ y $E \in \mathcal{A}_{a,b}$. Luego $\mathcal{A}_{a,b}$ es una σ-álgebra. Por último, puesto que $\chi_{\{a,b\}}(a) = \chi_{\{a,b\}}(b) = 1$ se tiene que $\{a, b\} \in \mathcal{A}_{a,b}$.

2. Supongamos que $\mathcal{F}$ separa puntos y sea $\{a, b\}$ un subconjunto de Ω, con $a \neq b$. Existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $a \in F$ y $b \notin F$ o $a \notin F$ y $b \in F$, en cualquier caso $\chi_F(a) \neq \chi_F(b)$. Luego F no pertenece a $\mathcal{A}_{a,b}$. Para demostrar el enunciado recíproco argumentemos por contradicción suponiendo que $\mathcal{F}$ no separa puntos. Entonces existen a y b distintos tales que para todo $F \in \mathcal{F}$ se cumple que $a, b \in F$

o $a, b \notin F$. Entonces $\chi_F(a) = \chi_F(b)$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Luego $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_{a,b}$, lo que es una contradicción.

3. Supongamos que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ separa puntos y $\mathcal{F}$ no separa puntos. Por 2, existen un par de puntos a y b distintos tales que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_{a,b}$. Como $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}_{a,b}$, entonces $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ no separa puntos. □

Lema 4.2. ([7]; lemma 7.1, p. 28) *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (partes de Ω), entonces $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \bigcup\limits_{\mathcal{N}} \mathcal{A}(\mathcal{N})$ donde $\mathcal{N}$ recorre la colección de todos los subconjuntos numerables de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{\mathcal{N}} \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Mostremos que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra. Es claro que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$ y si $B \in \mathcal{B}$ entonces $B^c \in \mathcal{B}$. Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de elementos de $\mathcal{B}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una familia numerable $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ tal que $B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_n)$. Entonces $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ es numerable y está contenida en $\mathcal{F}$. Como $B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ para todo n entonces $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{B}$. Luego $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{F})$. □

Teorema 4.3. ([7]; theorem 7.1, p. 27) *Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ espacios de medición y $f : X \to Y$ una función $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-medible sobreyectiva. Entonces $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{B}$ es σ-separante.*

Demostración. Supongamos que $Gr(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Entonces por el lema anterior con $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ como sistema de generadores de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, existe una colección numerable $\mathcal{N} = \{A_k \times B_k : k \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $\mathcal{F}$ tal que $Gr(f) \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Si $\mathcal{A}'$ es la σ-álgebra generada por $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}'$ es la σ-álgebra generada por $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{A}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$. Luego $Gr(f) \in \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$ y por tanto la x-sección $Gr(f)_x = \{y \in Y : (x, y) \in Gr(f)\} = \{f(x)\} \in \mathcal{B}'$. Si $y \in Y$ entonces $\{y\} \in \mathcal{B}'$ puesto que f es sobreyectiva. Luego $\mathcal{B}'$ separa puntos y por 4.1.3 se sigue que $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ separa puntos. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es σ-separante.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es σ-separante y sea $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$ una colección numerable que separa puntos. Para cada n se tiene que χ_{F_n} es medible y en consecuencia la función numérica ϕ definida en $X \times Y$ por $\phi(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\chi_{F_n}(f(x)) - \chi_{F_n}(y)|$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-medible porque $(x, y) \mapsto x$ es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{A})$-medible, $(x, y) \mapsto y$ es $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B})$-medible y f y χ_{F_n} son medibles. Luego $\phi^{-1}(0) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pero $(x, y) \in \phi^{-1}(0)$ significa que para todo n se tiene $\chi_{F_n}(f(x)) = \chi_{F_n}(y)$ de donde resulta $f(x) = y$. Es decir $\phi^{-1}(0) = Gr(f)$ y por tanto $Gr(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. □

Corolario 4.4. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medición. La diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es σ-separante.*

Demostración. Por el teorema anterior con $f = \iota_X$ la identidad. □

Proposición 4.5. *Sea X un espacio topológico y $car(X) > \aleph_1$ (se acepta la hipótesis del continuo). Entonces $bor(X)$ no es σ-separante.*

Demostración. Supongamos que $bor(X)$ es σ-separante y sea $\mathcal{F} = \{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset bor(X)$ una colección numerable de borelianos que separa puntos. La función $\psi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ definida por $\psi(x) = \{E_n \in \mathcal{F} : x \in E_n\}$ es inyectiva porque si $x \neq y$, existe E_n tal que $x \in E_n$ y $y \notin E_n$ o $x \notin E_n$ y $y \in E_n$, lo que implica $\psi(x) \neq \psi(y)$. Por tanto $car(X) \leqslant car\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \aleph_1$, lo que es una contradicción. □

Teorema 4.6. *Si X es un espacio topológico hausdorfiano y $car(X) > \aleph_1$, entonces $bor(X) \otimes bor(X) \subsetneq bor(X \times X)$.*

Demostración. Por la proposición anterior $bor(X)$ no es σ-separante y por el corolario 4.4, $\Delta \notin bor(X) \otimes bor(X)$. Pero Δ es un subconjunto cerrado de $X \times X$ porque X es hausdorfiano, así que $\Delta \in bor(X \times X)$. □

Un problema interesante sería saber si cuando $car(X) = \aleph_1$ es posible que $bor(X) \otimes bor(X) \subsetneq bor(X \times X)$. Por ejemplo, si $X = [0, \omega_1]$ con la topología ordinal.

Referencias

[1] Bourbaki, N.: Elementos de la historia de las matemáticas. Alianza universidad, 1976.

[2] Bourbaki, N.: Elements of Mathematics, Integration II, chap. 7,8,9. Springer, 2004.

[3] Gómez, M.: Convergencia débil de medidas radonianas y conjuntos Haarnulos. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, 2005.

[4] Kawabe, J.: Borel injective tensor product and convolution of vector measures and their weak convergence. Contemporany Mathematics, Vol 321, 2003, pp. 101-113.

[5] Restrepo, G.: Teoria de la Integración. Programa Editorial Universidad del Valle, 2004.

[6] Schwartz, L.: Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Oxford University Press, 1973.

[7] Yamasaki, Y.: Measures on infinite dimensional spaces. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1985.

Dirección de los autores
Michell Andrés Gómez Leiva — Universidad Icesi, Cali-Colombia
e-mail: `gomez_math@yahoo.com`
Guillermo Restrepo Sierra — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia
e-mail: `guireste@yahoo.com`