

INFLACIÓN Y ENERGÍA OSCURA EN UN MODELO ESCALAR-TENSORIAL CON ACOPLAMIENTOS CINÉTICO, NO MÍNIMO Y DE GAUSS-BONNET

DIEGO FERNANDO JIMÉNEZ TORRES



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN CIENCIAS-FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2019

INFLACIÓN Y ENERGÍA OSCURA EN UN MODELO ESCALAR-TENSORIAL CON ACOPLAMIENTOS CINÉTICO, NO MÍNIMO Y DE GAUSS-BONNET

DIEGO FERNANDO JIMÉNEZ TORRES

TESIS DOCTORAL PRESENTADA AL PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN
CIENCIAS-FÍSICA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS-FÍSICA

DIRECTOR
LUIS NORBERTO GRANDA VELÁSQUEZ, PH.D.
DOCTOR EN FÍSICA



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN CIENCIAS-FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2019

Título del trabajo

Inflación y energía oscura en un modelo escalar-tensorial con acoplamientos cinético, no mínimo y de Gauss-Bonnet

Resumen: Los datos observacionales más recientes ponen de manifiesto la existencia de dos fases de expansión acelerada del universo, las cuales son asociadas a la inflación cósmica y a la energía oscura. A pesar de los esfuerzos teóricos por explicar la expansión acelerada, su naturaleza exacta aún sigue siendo un misterio que desafía a cosmólogos y físicos en general. Una línea de trabajo que ha buscado resolver este problema está basada en las teorías de campo escalar-tensorial, las cuales permiten la descripción de fases de expansión acelerada y, por tanto, constituyen una alternativa promisoría para el estudio del universo temprano y tardío. En este trabajo se estudian soluciones de inflación y energía oscura para un modelo de campo escalar con acoplamientos cinético, no mínimo (NMC) y de Gauss-Bonnet (GB). Las ecuaciones de campo de dicho modelo se calculan bajo la hipótesis de un universo isótropo, homogéneo y espacialmente plano. Con estas ecuaciones se desarrolla un mecanismo de reconstrucción que permite obtener el potencial y los acoplamientos para cualquier escenario cosmológico. En particular se estudia el modelo en ausencia de potencial, donde se obtienen soluciones de tiempo tardío que pueden ser ajustadas apropiadamente para describir escenarios con fase de quintaesencia y phantom. Adicionalmente, se obtiene el sistema autónomo y se analiza las propiedades de estabilidad de los puntos críticos correspondientes a comportamientos del universo tanto en épocas tempranas como tardías. En la última parte se presenta el formalismo de perturbaciones cosmológicas utilizando la relación de este modelo con las teorías más generales de segundo orden conocidas como Galileones Generalizados, y se estudia el papel de los acoplamientos en el espectro de potencias de perturbaciones escalar y tensorial. Además, se introduce el formalismo de multiplicadores de Lagrange en el contexto de gravedad modificada y se obtienen soluciones inflacionarias viables. La compatibilidad con los datos observacionales provenientes de diferentes fuentes (Planck y BICEP2/Keck-Array data) es obtenida en varios rangos de parámetros libres del modelo.

Palabras clave: Acoplamiento cinético, Acoplamiento no mínimo (NMC), Acoplamiento Gauss-Bonnet (GB), Energía oscura, Inflación

Índice general

Índice general	II
Introducción	IV
1. Fundamentos	1
1.1. Modelo estándar de la cosmología	1
1.2. Inflación	3
1.2.1. Dinamica Inflacionaria: Inflatón	4
1.2.2. Perturbaciones cosmológicas	7
1.3. Evidencia observacional de la energía oscura	12
2. Acoplamientos cinetico, no minimo y de Gauss-Bonnet	15
2.1. El modelo	16
2.2. Mecanismo de reconstrucción	18
2.2.1. Solución tipo ley de potencias en fase de quintaesencia	19
2.2.2. Solución tipo ley de potencias en fase phantom	21
2.2.3. Solución de De Sitter	22
2.2.4. Solución Little Rip	23
2.3. Soluciones en ausencia de potencial	23
3. Análisis del sistema autónomo	26
3.1. Introducción a la teoría de sistemas autónomos	26
3.2. Ecuaciones del sistema autónomo, puntos críticos y estabilidad de las soluciones	28
3.2.1. Sistema autónomo correspondiente a un modelo con $V(\phi) \sim \phi^n$, $h(\phi) \sim \phi^N$, $F_1(\phi) \sim \phi^m$, $F_2(\phi) \sim 0$	29
3.2.2. Sistema autónomo correspondiente a el modelo exponencial	32

4. Perturbaciones e Inflación generalizada	35
4.1. Espectro de potencias slow-roll	35
4.1.1. Perturbaciones escalares	36
4.1.2. Perturbaciones tensoriales	38
4.1.3. Ejemplos explícitos	39
4.2. Velocidad de propagación de los modos tensoriales en presencia de acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet	46
4.3. Implicaciones cosmológicas del formalismo de multiplicadores de Lagrange en presencia de acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet	49
4.3.1. Acción y ecuaciones de campo	49
4.3.2. Cosmología FRW y reconstrucción	50
4.3.3. Índices observacionales inflacionarios	52
4.3.4. Discusión	55
5. Conclusiones	57
A. Conceptos basicos de geometría	59
B. Identidades adicionales del tensor de curvatura	61
C. Cálculo de los tensores $T_{\mu\nu}^{GB}$, $T_{\mu\nu}^K$ y $T_{\mu\nu}^{NM}$	65
D. Acción a segundo orden de perturbaciones cosmológicas	72
Bibliografía	78

Introducción

El gran suceso observacional, contrario a toda expectativa, de una disminución inesperada en el brillo proveniente de supernovas del tipo Ia [1, 2, 3, 4], abrió uno de los problemas más importantes en la cosmología moderna. Estas observaciones han sido interpretadas como evidencia sólida de que la expansión actual del universo es acelerada por algo que genéricamente se ha denominado energía oscura. De hecho, diferentes fuentes observacionales provenientes del fondo cósmico de microondas (CMB) [5, 6], catálogos de distribución de galaxias a gran escala (LSS) y oscilaciones barionicas acusticas en el espectro de potencias de materia [7], han confirmado que el universo está compuesto de un 4 % de materia bariónica, un 26 % de materia oscura y un 70 % de energía oscura. Así pues, actualmente el universo se expande aceleradamente y con abundancia de un contenido de materia y energía que aún se desconoce.

Además de la aceleración de tiempo tardío, el universo experimentó otra fase de aceleración durante sus primeras etapas de evolución, llamada inflación, la cual ha sido objeto de restricciones observacionales, cada vez más precisas, provenientes de diferentes fuentes de datos astrofísicos (Planck [8, 9] y BICEP2/Keck-Array data [10]). Durante la era inflacionaria, el universo aumento su tamaño a una tasa exponencial, por lo que se expandió muy rápido y adquirió un gran tamaño en un tiempo relativamente pequeño. Desde un punto de vista teórico, la descripción inflacionaria del universo temprano resolvió muchas cuestiones teóricas que tenía el modelo estándar del Big Bang, por ejemplo, los problemas del horizonte, planitud, homogeneidad y densidad de monopolos [11, 12, 13, 14]; aunque la característica más relevante de esta fase es que ella provee un mecanismo causal para generar las inhomogeneidades primordiales a partir de las cuales se generan las estructuras que observamos actualmente [15, 16, 17, 18]. El paradigma inflacionario estándar utiliza un campo escalar homogéneo, llamado inflatón, cuyo potencial domina la densidad de energía del universo y decrece lentamente con el tiempo a medida que el campo escalar rueda lentamente por la pendiente del potencial (para revisiones, ver [19, 20, 21]). Aunque la inflación estándar es producida por un campo escalar mínimamente acoplado, es posible tener fase inflacionaria con modelos no canónicos, por ejemplo, inflación cinética [22], e inflación en teoría de cuerdas [23].

Una simple explicación al fenómeno de la energía oscura es proporcionada por el modelo de constante cosmológica (Λ CDM) [24], sin embargo, no es una buena alternativa en el ámbito de la inflación, entre otros motivos porque no es posible revertir el proceso de aceleración cósmica que conduzca a un final del régimen inflacionario. Si bien el modelo Λ CDM goza de un gran éxito gracias a la precisión increíble con que las observaciones más recientes se han llevado a cabo, la teoría cuántica de campos predice un valor de Λ que llega a ser 120 órdenes de magnitud mayor que el valor observado, lo que constituye

uno de los enigmas que desafía a cosmólogos y físicos en general y se le ha dado el status de problema de la constante cosmológica [25, 26]. Otro inconveniente relacionado con este modelo es el llamado problema de la coincidencia cósmica, el cual tiene que ver con el hecho de que el período de transición entre la dominación del universo por parte de la materia y la dominación por la constante cosmológica es muy corto comparado a otras escalas temporales cosmológicas y parece haber sucedido, en términos del corrimiento al rojo, en épocas recientes [24].

Paralelamente, existe una variante que ha despertado mucho interés: La evidencia de la expansión acelerada puede ser la primera señal de un entendimiento incompleto de la propia interacción gravitatoria, más que el resultado de la presencia de alguna forma de materia o energía. Modificar la relatividad general puede llevarse a cabo a través de las teorías de gravedad modificada [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33], las cuales modifican el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein para describir la dinámica tanto de la inflación como de la energía oscura. La primera descripción unificada de estas épocas usando modificaciones de gravedad fue propuesta en [29], y fue desarrollada detalladamente en versiones realistas de gravedad $f(R)$ en [34, 35, 36, 37]. Otra versión de cosmología unificada también ha sido propuesta en [38], donde la dinámica en épocas tempranas y tardías son controladas por la gravedad $f(R, \mathcal{G})$, mientras que las épocas intermedias de radiación y materia son aproximadamente idénticas en comparación con la gravedad estándar Einstein-Hilbert. Para una revisión general de los últimos desarrollos en la descripción de la época inflacionaria, aceleración de tiempo tardío y representación unificada de inflación con energía oscura, particularmente en el contexto de gravedad $f(R)$ y $f(R, \mathcal{G})$, ver [39]. Sin embargo, existe una controversia sobre cuales propuestas satisfacen cotas existentes en el régimen de campos gravitatorios débiles o superan los llamados tests de sistema solar [40, 41].

Otras formas de gravedad modificada utilizadas ampliamente para describir la expansión acelerada son conocidas en la literatura como teorías escalar-tensor, las cuales contienen acoplamientos no minimales entre la curvatura y un campo escalar, lo que en principio permite evadir el problema de la coincidencia y superar tests de sistema solar [42, 43, 44, 45]. En el presente trabajo consideraremos un modelo de campo escalar con acoplamientos cinético, no mínimo y de Gauss-Bonnet (GB). La motivación fundamental para considerar modelos escalares con estos acoplamientos tiene que ver con el hecho de que estos acoples aparecen naturalmente en el límite de bajas energías de teorías de gravitación en altas dimensiones como la teoría de supercuerdas [46, 47, 48, 49, 50, 51], cuantización de espacios curvos [52], o como parte de la anomalía de Weyl en supergravitación conforme $N = 4$ [53, 54].

Aunque el termino GB es un invariante topológico [55], su presencia afecta la dinámica cosmológica cuando es acoplado a un campo escalar, contribuyendo así a los términos diferenciales de segundo en las ecuaciones de movimiento. Este acoplamiento con el campo escalar ha sido propuesto como fuente de energía oscura en numerosos estudios, en los cuales se han analizado aspectos como la expansión acelerada tipo ley de potencias [56, 57], estabilidad de soluciones de energía oscura [58], ecuaciones de estado variables en el tiempo [59], existencia de fases de quintaesencia y phantom [60] y mecanismos para evadir singularidades en diferentes límites asintóticos [61]. En cuanto al contexto inflacionario, este acoplamiento también ha sido propuesto en varios estudios, por ejemplo, en [62] se propuso este acoplamiento para estudiar cosmología inflacionaria slow-roll, encontrándose una fenomenología viable para un amplio rango de parámetros libres de la teoría y un novedoso esquema de reconstrucción a partir de los índices observacionales. Muchos modelos de infla-

ción con este tipo de acoples aparecen en la literatura, y para una revisión detallada de los últimos estudios relacionados con este tópico, ver [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73].

Otro de los acoplamientos que ha sido ampliamente utilizado para dar cuenta de la expansión acelerada tanto en épocas tempranas como tardías es el acoplamiento no mínimo con la curvatura NMC [74, 75]. El papel de este acople en los problemas de la inflación y la energía oscura ha sido estudiado en diferentes trabajos, en los cuales se analiza restricciones paramétricas por test de sistema solar [76], existencia y estabilidad de soluciones Scaling [77, 78], atractores asintóticos de De Sitter [79], comportamientos phantom y super aceleración [80, 81, 82, 83], aspectos perturbativos e incidencia sobre el CMB [84, 85], restricciones observacionales [86, 87] y el problema de coincidencia [88].

En cuanto al acoplamiento cinético, varios modelos lo han incluido en el estudio de la inflación y la energía oscura [89, 90, 91, 92]. Particularmente, en [89] se muestra que una inflación viable puede ser generada incorporando este acople al modelo estándar del Boson Higgs, evitando de esta manera problemas de gravedad cuántica. Este acoplamiento también ha sido empleado en [93, 94] como un mecanismo para salir de forma natural del régimen inflacionario, con soluciones exactas que tienen un comportamiento quasi-de-sitter controlado por el termino cinético. En [90] se estudian las condiciones slow-rolling en un modelo con acoplamiento cinético generalizado y potenciales cuadrático y de Higgs, obteniéndose una época inflacionaria fenomenológicamente viable. En cuanto a la energía oscura, en [95] se estudia el efecto combinado de los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet en el universo tardío, donde se obtienen soluciones que unifican la dominancia de materia (o radiación) en etapas tempranas con transiciones a fases de quintaesencia y fantasmas en tiempo tardío, además se reconstruyen la cosmología del gas Chaplygin y del gas Chaplygin generalizado. Adicionalmente, el efecto de estos acoplamientos en la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales es estudiado [96, 97], donde se muestran condiciones para satisfacer la restricción obtenida del GW170817 [98, 99, 100].

En el presente trabajo de tesis se estudia de la dinámica cosmológica del campo escalar con los acoplamientos mencionados anteriormente, con el fin de encontrar restricciones y soluciones que muestren una correspondencia con la fenomenología de la inflación y la energía oscura. Este documento se ha estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se introducirán algunos elementos de la cosmología estándar y se presentará el contexto fenomenológico de la inflación y la energía oscura. En la segunda parte se explicará el modelo correspondiente y se obtendrán las ecuaciones de reconstrucción, las cuales serán aplicadas a escenarios cosmológicos compatibles con la evolución del universo tardío. Además, se obtendrán soluciones exactas en ausencia de potencial y se encontrarán restricciones paramétricas de tal manera que dichas soluciones describan un comportamiento acorde a los datos observaciones. La dinámica cosmológica se estudia a través de las ecuaciones de Friedmann modificadas en el formalismo de este modelo. En la tercer capítulo se obtendrá el sistema autónomo de modelos correspondientes a acoplamientos tipo ley de potencias y exponencial [101], y se analizarán las implicaciones de estabilidad de los puntos críticos en las diferentes épocas del universo. En el cuarto capítulo se estudiará la viabilidad del modelo desde el punto de vista de las perturbaciones cosmológicas y se mostrará el papel de cada acoplamiento en el espectro primordial de fluctuaciones escalares y tensoriales [102, 103, 104]. Los cálculos de perturbaciones son efectuados con los paquetes de algebra tensorial xTras [105], xPand [106] y xPert [107]. Finalmente, con base en los resultados obtenidos se escribieron algunas conclusiones.

CAPÍTULO 1

Fundamentos

1.1. Modelo estándar de la cosmología

La cosmología es el estudio del universo en su conjunto, en el que se incluyen teorías sobre su origen, su evolución, su estructura a gran escala y su futuro. El contexto teórico de la cosmología moderna es la Teoría de la Relatividad General, cuya descripción de la gravitación se formula a partir de las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.2)$$

es el tensor de Einstein, κ^2 es la constante gravitacional de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico correspondiente y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía impulso asociado a la presencia de materia. Asumiendo que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala, la métrica (conocida como la métrica FRW) puede escribirse como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y k es una constante que determina la curvatura espacial del universo. Esta constante puede tomar los valores de 0, 1 ó -1 para espacios de geometría plana, cerrada y abierta respectivamente. Existe un gran número de evidencia experimental que sugiere que el universo actual es espacialmente plano [108, 25, 6]. En vista de ello, en el contexto del universo tardío se supondrá que $k = 0$.

La hipótesis de homogeneidad e isotropía permite además escribir el tensor energía impulso en la forma de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

donde u_μ es la cuadrivelocidad comóvil del fluido con densidad de energía ρ y presión P . Reemplazando (1.3) y (1.4) en las ecuaciones de Einstein se obtienen las ecuaciones de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P) \quad (1.5)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{k^2}{a^2} \quad (1.6)$$

donde $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble. Combinando las ecuaciones (1.5) y (1.6), puede escribirse la ecuación de conservación:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.7)$$

De la primera ecuación de Friedmann se concluye que una expansión acelerada tiene lugar solo cuando $\rho + 3P < 0$. Sin embargo, para lo que podemos llamar materia ordinaria (radiación, polvo, etc) se espera que tanto la densidad de energía ρ como la presión P sean positivas y satisfagan la Condición Fuerte de Energía que dice que $\rho + P > 0$ y que $\rho + 3P > 0$ [109]. Por lo tanto, si el universo está constituido por materia ordinaria, una vez que asumimos la positividad de ρ y P junto con la validez de la Condición Fuerte de la Energía, la gravitación siempre es atractiva y la expansión del universo debe ser siempre desacelerada a partir de un evento inicial singular. Tanto este evento inicial como el modelo mismo que describe la evolución forman parte de lo que conocemos hoy como modelo cosmológico estándar.

Un parámetro adimensional usado con frecuencia para clasificar la aceleración del universo es la ecuación de estado (EoS), la cual se define como:

$$w = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6), junto a alguna ecuación de estado w determinan completamente la dinámica del factor de escala $a(t)$ y las funciones $\rho(t)$ y $P(t)$. Por ejemplo, para una ecuación de estado de un fluido barotrópico lineal, $P = w\rho$ donde $w = cte$, la integración de las ecuaciones de Friedmann con $k = 0$ dan como resultado $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ y $a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$. De acuerdo al modelo cosmológico estándar el universo evoluciona a través de fases cosmológicas en que la ecuación de estado w está bien definida. La fase de dominancia de radiación corresponde a $w = 1/3$, por lo tanto la evolución de la densidad de energía y el parámetro de escala están dados por $\rho \propto a^{-4}$ y $a \propto t^{1/2}$. Para la fase de dominancia de materia, la presión es despreciable y por lo tanto la densidad de energía y el factor de escala evolucionan como $\rho \propto a^{-3}$ y $a \propto t^{2/3}$.

El modelo cosmológico estándar es bastante eficiente en determinar la temperatura de la radiación cósmica de fondo y las abundancias de los elementos ligeros [110, 111, 112]. Sin embargo, con el correr de los años el modelo comenzó a enfrentarse con algunos problemas. A principio de 1970, E. R. Harrison y P. J. E. Peebles sugirieron que la radiación cósmica de fondo debería presentar inhomogeneidades de orden de 10^{-5} [113], las cuales serían necesarias para la construcción de un modelo capaz de describir una formación de estructuras en el universo. Además de no poder justificar la presencia de estas inhomoge-

neidades fundamentales en la radiación cósmica de fondo, el modelo cosmológico estándar tampoco resuelve el problema de las condiciones iniciales, que incluye el problema de la planitud, horizonte y abundancia de reliquias cosmológicas. Estas dificultades llevaron a A. Guth, A. Linde, A. Albrecht y P. Steinhardt [11, 12, 13], al inicio de la década de los 80, a proponer modificaciones al modelo estándar, que incluía una fase inicial de expansión acelerada denominada inflación.

Con el fin de establecer un nexo más próximo entre las funciones que aparecen en los modelos cosmológicos y las observaciones, conviene escribir la primera ecuación de Friedmann de la siguiente forma:

$$\Omega_i + \Omega_k = 1 \quad (1.9)$$

donde

$$\Omega_i = \frac{\kappa^2 \rho}{3H^2} \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.10)$$

El subíndice i es un símbolo genérico que incorpora las diferentes componentes de materia. Tanto Ω_i como Ω_k son cantidades medibles observacionalmente y es conocido que en la presente época $\Omega_k^{(0)} = -0.0027^{+0.0039}_{-0.0038}$ [108]. En la cosmología estándar el término $a^2 H^2$ siempre decrece, lo que implica que el universo tuvo que haber sido extremadamente plano en el pasado, por ejemplo, en la época de la nucleosíntesis se requiere $\Omega_k \sim 10^{-16}$ [112]. Esto significa que las condiciones iniciales para la geometría del universo deben ser ajustadas muy finamente, lo que resulta desfavorable para el modelo.

Como mencionamos anteriormente, otro de los problemas que tuvo que enfrentar la cosmología estándar es el llamado problema del horizonte, el cual cuestiona la homogeneidad e isotropía del universo a gran escala. Para entender esto, considérese una longitud comovil λ que está dentro del radio de Hubble comovil $(aH)^{-1}$, es decir, $\lambda \lesssim (aH)^{-1}$. Debido a que $(aH)^{-1}$ siempre crece, la longitud λ será mucho más que pequeña que el radio de Hubble en tiempo tardío. Por el contrario, en épocas tempranas cualquier escala comovil de longitud será mucho más grande que el radio de Hubble. Esto implica que solo una pequeña fracción del radio de Hubble puede estar causalmente conectada, lo cual constituye una discrepancia con la homogeneidad e isotropía observadas en la radiación cósmica de fondo.

1.2. Inflación

Una alternativa de solución para estos problemas es presentada a partir de la teoría de inflación cósmica, que propone la inclusión de una fase de expansión acelerada en la evolución del universo primordial [114]. Esto esencialmente significa que el radio de Hubble comovil, $(aH)^{-1}$, decrece durante la inflación. Esta propiedad es clave para resolver la problemática de la cosmología estándar. La idea es la siguiente: asumiendo que en el régimen inflacionario el parámetro de Hubble es constante, $H(t) = H_I$, el factor de escala evoluciona exponencialmente y la ecuación de estado es $w = -1$ (constante cosmológica). Considerando que la inflación ocurre antes de la era de radiación, teniendo su inicio en el instante t_i y final en el instante t_f , podemos escribir el factor de escala como

$$a = a_i e^{H_I(t-t_i)} \quad (1.11)$$

siendo $t_i < t < t_f$. Con esto $a_f/a_i = e^N$, donde $N \equiv H_I(t_f - t_i)$ es el número de e-foldings, un parámetro adimensional usado como medida de duración de inflación cósmica. Veamos como estimar la cantidad de inflación necesaria para resolver el problema de la planitud. De acuerdo a las observaciones, se requiere que justo después del final de la inflación $\Omega_k^f \sim 10^{-60}$. Combinando las ecuaciones (1.10) y (1.11) se ve que

$$\frac{\Omega_k^f}{\Omega_k^i} = \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \quad (1.12)$$

Considerando que el universo no es plano en el inicio de la inflación, por ejemplo $\Omega_k^i \approx 1$, el número de e-foldings requerido para resolver el problema de la planitud es $N \gtrsim 60$, el cual es tomado como una cota mínima estándar para cualquier modelo inflacionario.

Ahora veamos como la inflación ataca el problema del horizonte. Debido a que el factor de escala crece exponencialmente durante la inflación, la longitud física, $a\lambda$, crece más rápido que el radio de Hubble (constante). Por lo tanto, la longitudes físicas saldrán del radio de Hubble en la inflación, lo que significa que las regiones causalmente conectadas pueden ser mucho más grandes que el radio de Hubble, lo que resuelve potencialmente el problema del horizonte. En otras palabras, en el régimen inflacionario, el horizonte de partícula diverge cuando $a(t_*) \rightarrow 0$ [114].

1.2.1. Dinamica Inflacionaria: Inflatón

Presentado inicialmente por A. Guth [17], el inflatón consiste en un campo escalar, asociado a una transición de fase en teorías de gran unificación, que controla la dinámica inflacionaria y es el responsable de la expansión acelerada primordial que incrementa el tamaño del universo a una tasa exponencial. En el paradigma inflacionario estándar, el campo escalar esta mínimamente acoplado a la gravedad, en otras palabras, el lagrangiano del inflatón está dado por $L_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$, siendo $V(\phi)$ un potencial escogido para lograr el efecto de presión negativa que le permita tomar el papel dominante en la evolución temprana del universo. En este contexto, la densidad de energía y presión del universo primordial están dadas por:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1.13)$$

Sustituyendo estas expresiones en (1.5), (1.6) y (1.7), se obtiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{3} \left(\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \quad (1.15)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (1.16)$$

donde se ha omitido el término de curvatura debido a que su contribución es despreciable en comparación al campo escalar. La ecuación (1.15) establece que una expansión acelerada en la época inflacionaria requiere $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, lo que en términos clásicos implica que la energía potencial del inflatón domina sobre la energía cinética. Para cuantificar mejor la

expansión acelerada, nótese que la ecuación de estado asociada al inflatón está dada por

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (1.17)$$

De aquí se ve que en el límite $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ se obtiene un periodo de expansión acelerada caracterizado por una ecuación de estado $w \approx -1$. De hecho, si el campo escalar es constante, es decir $\dot{\phi} \equiv 0$, se tiene exactamente el caso de la constante cosmológica, pero si $\dot{\phi}$ varia con el tiempo, la ecuación de estado también evoluciona con el tiempo y puede tomar valores dentro del rango $[-1, 1]$. Por tanto, en principio es posible obtener un periodo de inflación caracterizado por la condición $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ y un mecanismo de ruptura del régimen inflacionario controlado por la forma del potencial.

Podemos aplicar la condición $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ para entender el comportamiento aproximado del universo en el régimen inflacionario. Este límite funciona muy bien en las primeras etapas de la inflación, sin embargo, dicha aproximación deja de funcionar a medida que se acerca al fin de la era inflacionaria. Entonces, en inflación temprana, la ecuación de Friedmann (1.14) puede ser aproximada por

$$\frac{3H^2}{\kappa^2} \approx V(\phi) \quad (1.18)$$

Aunque esta aproximación hace que la solución del sistema sea más manejable, ya que elimina la no linealidad en $\dot{\phi}$, es posible hacer un progreso adicional imponiendo una condición complementaria que garantice un periodo inflacionario lo suficientemente largo como para resolver los problemas de la cosmología estándar. Este requerimiento es importante, ya que aunque $\dot{\phi}$ sea pequeño inicialmente, un valor grande de $\ddot{\phi}$ puede cambiar rápidamente esta situación, conduciendo a un final prematuro de la era inflacionaria. Por lo tanto, para una época inflacionaria fenomenológicamente viable, se requiere también la condición $\dot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$, lo que implica que la ecuación (1.16) puede escribirse de forma aproximada como

$$3H\dot{\phi} + V'(\phi) \approx 0 \quad (1.19)$$

Este tipo de enfoque es conocido como la aproximación slow-roll, la cual puede ser formalizada definiendo los siguientes parámetros [115, 21]

$$\epsilon_0 = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \epsilon_1 = \frac{\dot{\epsilon}_0}{H\epsilon_0} \quad (1.20)$$

El parámetro ϵ_0 permite parametrizar el progreso inflacionario, tomando valores de 0 hasta 1 desde el inicio de la inflación hasta el fin de la expansión inflacionaria. Valores de este parámetro por encima de 1 representan una expansión no inflacionaria. Usando las ecuaciones de Friedmann en el caso del campo escalar inflacionario, dicho parámetro puede reescribirse en las formas

$$\epsilon_0 = \frac{3\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \approx \frac{3\dot{\phi}^2}{2V(\phi)} \approx \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (1.21)$$

Al inspeccionar estas expresiones se ve que la pequeñez de ϵ_0 está vinculada a la validez de la aproximación slow-roll, es decir, $\epsilon_0 \ll 1$ implica $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Por la tanto, ϵ_0 también es

un indicador útil para expresar el régimen slow-roll. En cuanto al parámetro ϵ_1 , se puede mostrar que

$$\epsilon_1 = 2 \left(\epsilon_0 + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right)$$

De esta expresión se ve que $\epsilon_{0,1} \ll 1$ implica también que $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$. Por tanto, la pequeñez de $\epsilon_{0,1}$ asegura un periodo de expansión acelerada viable.

Para un potencial dado, la última expresión de (1.21) permite calcular de forma aproximada el parámetro ϵ_0 . Esto se utiliza para determinar el campo escalar cuando la inflación termina (resolviendo $\epsilon_0 = 1$). Tomando, por ejemplo, un potencial monomial arbitrario $V = V_0\phi^n$, se obtiene

$$\epsilon_0 = \frac{n^2}{2\kappa^2\phi^2} \Rightarrow \phi_{end} = \frac{n}{\sqrt{2}\kappa}$$

Conociendo el campo en el fin de la inflación y usando el hecho de que se requieren 60 e-folds para tener un periodo inflacionario viable, también es posible calcular el valor del inflatón en el inicio de la expansión inflacionaria. Entonces, partiendo de la expresión integral del número de e-folds y asumiendo el régimen slow-roll, se obtiene

$$N = \int_{t_1}^{t_2} H dt \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{\kappa}{\sqrt{2}\epsilon_0} d\phi' = \int_{\phi_{end}}^{\phi} \kappa^2 \frac{V(\phi')}{V'(\phi')} d\phi' = \frac{(\kappa\phi)^2}{2n} - \frac{n}{4}$$

lo que implica que para un valor dado de N se requiere un campo inicial de

$$\phi_{ini} \approx \frac{1}{\kappa} \sqrt{2n \left(N + \frac{n}{4} \right)} \quad (1.22)$$

En particular, si $N = 60$ y $n = 2$, entonces $\phi_{ini} \approx 16\kappa^{-1}$. De esta forma, dado un modelo inflacionario se puede determinar la condición inicial necesaria para producir la cantidad de inflación deseada en el régimen slow-roll. Cabe mencionar que este enfoque tiene limitaciones: ciertos potenciales o modelos más complicados que el campo escalar canónico pueden ser intratables analíticamente. Sin embargo, este ejemplo utiliza un modelo sencillo para demostrar que en principio es posible analizar la física de la inflación con algunas restricciones simples. Para finalizar la discusión sobre inflación slow-roll, resolvamos las ecuaciones (1.18) y (1.19) para obtener aproximadamente la evolución temporal del campo escalar. Por integración directa de estas ecuaciones, se obtiene

$$\kappa\phi = \sqrt{(\kappa\phi_{ini})^2 - 2nN} \quad (1.23)$$

Para una mejor visualización, en la Fig. 1.1 se compara el resultado anterior con la solución numérica de la ecuación de movimiento exacta. De aquí se puede ver que las soluciones slow-roll son aproximaciones notablemente cercanas a la solución numérica, y solo comienzan a diferir significativamente en los últimos e-folds de la inflación.

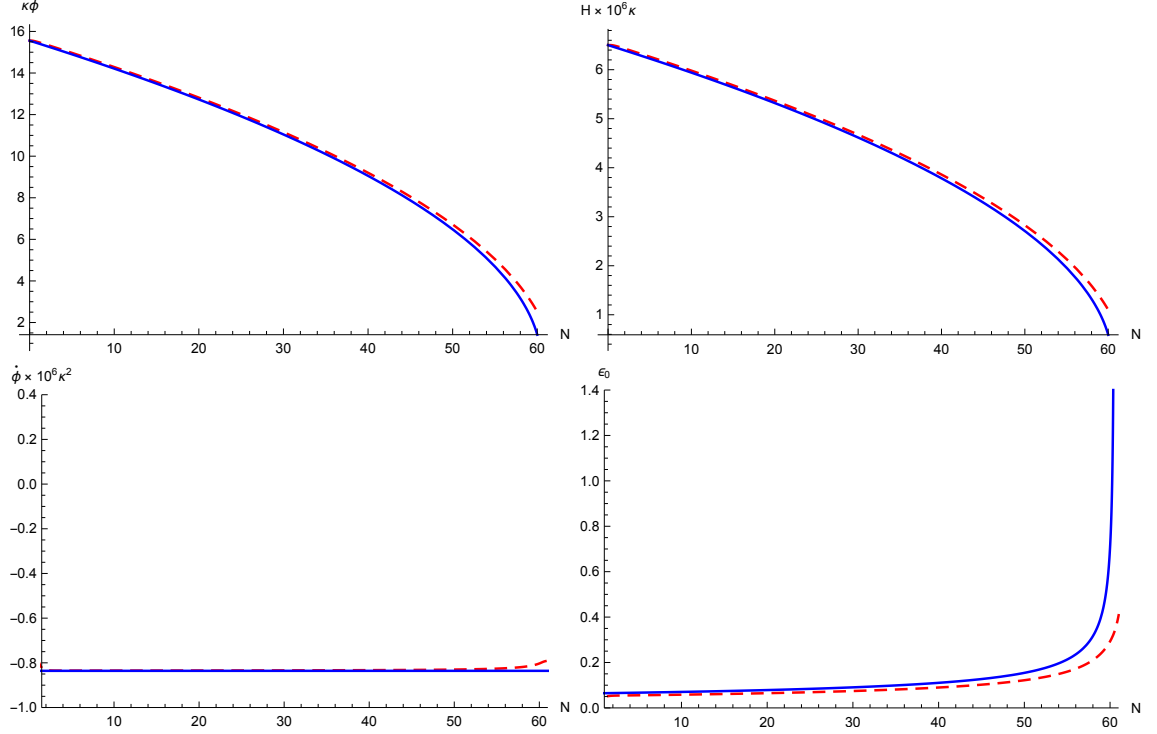


FIGURA 1.1. Soluciones de las ecuaciones de movimiento slow-roll (azul) y sus correspondientes valores numéricos exactos (línea roja discontinua) en función del número de e-folds N . Para producir 60 e-folds de inflación se tomó la condición inicial $\phi_{ini} \approx 16\kappa^{-1}$, la cual fue escogida de acuerdo a (1.22). Las gráficas de la parte superior muestran que las soluciones aproximadas de H y ϕ coinciden con las soluciones exactas salvo en los últimos e-folds. La solución slow-roll (1.23) implica que $\dot{\phi}$ es constante, lo cual es mostrado en la gráfica inferior izquierda, donde además se ve que este comportamiento es similar al resultado exacto hasta poco antes de finalizar la inflación. Finalmente el comportamiento de ϵ_0 se ilustra en la gráfica inferior derecha, mostrando de nuevo que las expresiones analíticas slow-roll constituyen una muy buena aproximación.

1.2.2. Perturbaciones cosmológicas

Las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) proporcionan evidencia de las fluctuaciones en la densidad de materia primordial [115]. Se supone que estas variaciones de densidad se producen debido a las fluctuaciones en el inflatón, el cual transfiere su inhomogeneidad a la materia convencional durante el recalentamiento. Por consiguiente, es de interés considerar las variaciones espaciales del campo inflacionario. Podemos modelar esto como una perturbación lineal de la forma

$$\phi(t) + \delta\phi(t, x^i),$$

donde la corrección inhomomogenea, $\delta\phi(t, x^i)$, depende de las coordenadas espaciales. Debido a que las anisotropías observadas en el CMB son pequeñas, podemos asumir que $|\delta\phi| \ll |\phi(t)|$.

Estas fluctuaciones en el inflatón conducirán a fluctuaciones del tensor energía impulso, que a su vez originan pequeñas perturbaciones en la curvatura a través de la ecuación de Einstein $\delta G_{\mu\nu} = \kappa^2 \delta T_{\mu\nu}$. Por tanto, es necesario que la métrica tenga correcciones pertur-

bativas que generen los términos necesarios en el lado izquierdo de dicha ecuación. Como la métrica espacio-temporal es simétrica, entonces las perturbaciones del tensor métrico tiene 10 grados de libertad. Para estudiar esto más a fondo [116], es útil descomponer la perturbación métrica en componentes escalares, vectoriales y tensoriales, de manera que

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2A & a(t) [B_i + \partial_i B] \\ a(t) [B_i + \partial_i B] & a^2(t) [2C g_{ij} + 2\partial_i \partial_j E + \partial_i E_j + \partial_j E_i + h_{ij}] \end{pmatrix}$$

donde A , B , C y E son cantidades escalares, los vectores B_i y E_i tienen divergencia nula, y el tensor h_{ij} satisface $h_{ii} = 0$ y $\partial_i h_{ij} = 0$. En consecuencia, podemos descomponer las 10 perturbaciones en 4 escalares (4×1 grados de libertad), dos vectores de divergencia nula (2×2 grados de libertad), y un tensor de traza y divergencia nulas (2 grados de libertad). La importancia de esta descomposición es que las ecuaciones de movimiento de los modos escalares, vectoriales y tensoriales, pueden desacoplarse.

Sin embargo, no todos estos grados de libertad son físicos, ya que la covariancia general origina libertades gauge, las cuales pueden ser escogidas con el fin de simplificar las ecuaciones de movimiento. Para nuestros propósitos, trabajaremos en el gauge Newtoniano [116], en el cual fijamos los modos gauge de tal manera que $B = E = 0$ y $B_i = 0$. A menudo, los potenciales escalares restantes en este gauge se renombran como $A = \Phi$ y $C = -\Psi$, debido a su estrecha relación con el potencial gravitacional Newtoniano de la teoría clásica. Por consiguiente, la corrección perturbativa de la métrica en el gauge Newtoniano toma la forma

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Phi & 0 \\ 0 & a^2(t) [-2\Psi g_{ij} + h_{ij}] \end{pmatrix}$$

donde se ha despreciado el modo vectorial E_i , ya que su amplitud decrece como a^{-2} [116]. Por tanto, solo nos enfocaremos en el estudio de las perturbaciones escalares y tensoriales.

Ecuaciones escalares

Tomando las componentes espaciales no diagonales ($\mu = i$, $\nu = j \neq i$) de la ecuación de Einstein, obtenemos

$$\Phi = \Psi,$$

por lo tanto, en lo que sigue, no distinguiremos entre estos potenciales escalares. Teniendo en cuenta esto, la componente temporal ($\mu = 0$, $\nu = 0$) conduce a

$$\frac{\partial_i \partial^i \Phi}{a^2} - 3H\dot{\Phi} = \kappa^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\phi} \delta \dot{\phi} + \frac{1}{2} V'(\phi) \delta \phi + V\Phi \right]$$

De las componentes $\mu = 0$, $\nu = i$, obtenemos

$$\dot{\Phi} + H\Phi = \frac{\kappa^2}{2} \dot{\phi} \delta \dot{\phi}$$

Finalmente, tomando las componentes espaciales diagonales ($\mu = i$, $\nu = i$), podemos obtener

$$\ddot{\Phi} + 4H\dot{\Phi} + 2(2\dot{H} + 3H^2)\Phi = \frac{\kappa^2}{2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi} \delta \dot{\phi} - \frac{1}{2} V'(\phi) \delta \phi + V\Phi - \dot{\phi}^2 \Phi \right]$$

La conservación covariante del tensor energía impulso produce una ecuación escalar adicional

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\partial_i\partial^i\Phi}{a^2} + V''(\phi)\delta\phi - 2\ddot{\phi}\Phi - 6H\dot{\phi}\Phi - 3\dot{\phi}\dot{\Phi} = 0.$$

Estas cuatro ecuaciones no son totalmente independientes, ya que solo hay dos cantidades perturbativas para resolver, $\delta\phi$ y Φ . Estas perturbaciones pueden combinarse para formar cantidades invariantes gauge. Por ejemplo, la variable Mukhanov-Sasaki [117] es un combinación invariante gauge definida por

$$Q = \delta\phi + \frac{\dot{\phi}}{H}\Phi$$

Para finalizar, otra cantidad escalar que consideraremos aquí, es la curvatura escalar de Ricci sobre la parte espacial de la variedad espacio-temporal, ${}^{(3)}R$. Esto puede ser trabajado en términos de una cantidad invariante gauge conocida como perturbación de curvatura comovil, la cual es denotada por $\mathcal{R}$. Después de un largo calculo [116], se llega a la siguiente expresión que la relaciona la perturbación de curvatura con las perturbaciones escalares,

$$\mathcal{R} = -\Psi - \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi = -\frac{H}{\dot{\phi}}Q$$

Estas fluctuaciones en la curvatura son de especial interés, ya que generan la anisotropía del CMB. Una propiedad notable de $\mathcal{R}$ es su conservación a gran escala [116, 115]. Mas precisamente, un modo de Fourier $\mathcal{R}_k$, con numero de onda k , tiene un comportamiento cuasi-constante en el límite $k \ll aH$ (superhorizonte). En otras palabras, los modos con longitudes de onda mucho más grandes que el tamaño del horizonte, se conservan en el tiempo.

Ecuaciones tensoriales

Por otro lado, la ecuación de movimiento de los modos tensoriales es

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{\partial_k\partial^k h_{ij}}{a^2} = 0$$

Esta es una ecuación de onda en un espacio-tiempo en expansión y, por lo tanto, establece la idea de ondas gravitacionales. En consecuencia, podemos interpretar las fluctuaciones tensoriales como ondas propagándose en el espacio-tiempo mismo. Estas pequeñas distorsiones de naturaleza tensorial pueden considerarse completamente independientes de las fluctuaciones escalares, dado que a orden lineal en perturbaciones, las ecuaciones de movimiento de los modos escalar y tensorial están desacopladas. Vale la pena mencionar que las anisotropías en la polarización de CMB permiten detectar indirectamente las perturbaciones tensoriales [115].

Cuantización

Necesitamos tener en cuenta la naturaleza cuántica de las fluctuaciones microscópicas en el campo inflacionario. Esto significa que debemos identificar la variable cuantizable canónicamente, y asignar el correspondiente operador cuántico [118]. Para lograr esto, se debe encontrar la variable para la cual la acción sea similar a la de un campo escalar

canónico, cuya cuantización sigue los lineamientos estándar de la teoría de campos [119]. Si definimos la variable $v = zR$, donde $z = a\dot{\phi}/H$, y trabajamos en tiempo conforme, definido por $dt = ad\eta$, obtenemos que la acción a segundo orden en perturbaciones puede escribirse como

$$\delta S^2 = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left[(v')^2 - \partial_i v \partial_i v + \frac{z''}{z} v^2 \right],$$

donde la prima indica diferenciación con respecto a η . En esta forma, la acción para v es equivalente a la de un campo escalar canónico (en el espacio de Minkowski) con un término de masa dependiente del tiempo. Con esto, podemos realizar el proceso de cuantización canónica a través de los operadores de creación y aniquilación, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k}}$, los cuales satisfacen las reglas de conmutación usuales [115]. Así, la expansión del operador cuántico asociado a v puede escribirse de la siguiente forma:

$$\hat{v} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[v_k a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^* a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right],$$

donde v_k es un modo de Fourier, cuya dependencia del tiempo es determinada por la ecuación

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0, \quad (1.24)$$

la cual puede escribirse de la forma

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{\eta^2} \right) v_k = 0 \quad (1.25)$$

donde $\nu^2 = 1/4 + \eta^2 z''/z$. Asumiendo que ν es constante (se justificara más adelante), la solución de esta ecuación puede ser escrita en términos de las funciones de Hankel de primer y segundo tipo, $H_\nu^{(1)}$ y $H_\nu^{(2)}$. Más específicamente,

$$v_k = \sqrt{-\eta} \left(c_1 H_\nu^{(1)}(-k\eta) + c_2 H_\nu^{(2)}(-k\eta) \right)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración, las cuales son determinadas por la condición de frontera. Requiriendo que la solución se comporte como el vacío de Minkowski en escalas de subhorizonte ($k \gg aH$), la solución debe satisfacer la siguiente condición

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}$$

Esta restricción es conocida en la literatura como condición de Bunch-Davies [118]. Con esto, las constantes de integración son determinadas, de modo que la solución final es

$$v_k = \frac{\sqrt{-\eta\pi}}{2} e^{i(\nu+1/2)\pi/2} H_\nu^{(1)}(-k\eta)$$

Espectro de potencias de perturbaciones de curvatura

A partir de este campo canónico, podemos obtener la perturbación de curvatura $\mathcal{R}$, la cual es más fácil de interpretar físicamente. Luego, podemos calcular un espectro de potencias de esta perturbación. Por espectro de potencias, nos referimos a una función de k que describe la variación en el campo perturbativo $\mathcal{R}$. Se define convencionalmente en términos

de la función de correlación estadística entre dos puntos, esto es [115]

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\frac{2\pi^2}{k^3} P_{\mathcal{R}}(k) \right)$$

donde el espectro de potencias, $P_{\mathcal{R}}$, solo depende de la magnitud del vector número de onda, ya que hemos asumido la hipótesis de homogeneidad e isotropía. Usando los resultados de la cuantización canónica, es posible obtener la siguiente relación:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k}{z} \right|^2$$

Esta es la cantidad que nos permite confrontar un modelo inflacionario con las restricciones observacionales. Teniendo en cuenta la conservación de $\mathcal{R}$ en escalas de superhorizonte, es usual evaluar la expresión anterior en el cruce del horizonte, el cual es calculado con $k = aH$. Para cuantificar la dependencia P_R con la escala, se define el índice espectral escalar, n_S , como sigue

$$n_S - 1 = \left[\frac{d \ln P_R}{d \ln k} \right]$$

Haciendo un proceso equivalente para perturbaciones tensoriales, obtenemos que el espectro de ondas gravitacionales es

$$P_T(k) = \frac{4k^3}{\pi^2} \left| \frac{v_k^{(t)}}{z_t} \right|^2$$

donde z_t está dado por $z_t = a/\kappa$, y el modo de Fourier $v_k^{(t)}$, correspondiente a otra variable canónica, satisface la misma ecuación (1.24). El factor numérico adicional en esta expresión surge de la suma sobre las polarizaciones de las ondas gravitacionales. Para finalizar, definamos la relación escalar-tensor, r , como sigue

$$r \equiv \frac{P_T}{P_{\mathcal{R}}}$$

Tanto esta relación, como el índice espectral escalar, deben satisfacer las siguientes restricciones de los últimos datos del Planck y del BICEP2/Keck-Array [8, 9, 10]:

$$n_S = 0.9650 \pm 0.00661, \quad r < 0.1 \quad (\text{Planck 2018})$$

$$r < 0.07 \quad (\text{BICEP2/keck - Array})$$

Espectro primordial en inflación slow-roll

Para ejemplificar como surge el espectro de potencias en inflación, asumiremos que el inflatón satisface las condiciones de rodadura lenta (slow-roll). De la definición de los parámetros slow-roll, obtenemos que el tiempo conforme puede ser aproximado como

$$\eta \approx -\frac{1}{aH} (1 + \epsilon_0)$$

Teniendo en cuenta esto, podemos obtener la siguiente aproximación

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \approx \frac{1}{\eta^2} \left(2 + 3\epsilon_0 + \frac{3}{2}\epsilon_1 \right)$$

De aquí se ve claramente que

$$\nu \approx \sqrt{\frac{9}{4} + 3\epsilon_0 + \frac{3}{2}\epsilon_1} \approx \frac{3}{2} + \epsilon_0 + \frac{1}{2}\epsilon_1$$

Esto justifica el hecho de haber asumido que ν es una constante en la ecuación (1.25), ya que en el régimen slow-roll, los parámetros ϵ_i producen variaciones despreciables en comparación al valor $3/2$. Teniendo en cuenta el comportamiento de la función de Hankel en el límite $k \rightarrow 0$, obtenemos que el espectro de potencias en escalas de superhorizonte es

$$P_{\mathcal{R}} \approx \left[2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \frac{H^2}{8\pi^2 M_p^2 \epsilon_0} (k|\eta|)^{3-2\nu}$$

donde la masa de Planck, M_p , es definida por $M_p \equiv 1/\kappa$. Convencionalmente, esta expresión es evaluada en el cruce del horizonte. En consecuencia, se obtiene

$$P_{\mathcal{R}} \approx \frac{H^2}{8\pi^2 M_p^2 \epsilon_0}$$

Adicionalmente, es notable que la dependencia de escala del espectro de potencias está dada por $P_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{3-2\nu}$, lo cual conlleva a

$$n_S - 1 = \left[\frac{d \ln P_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \right] \approx 3 - 2\nu \approx -2\epsilon_0 - \epsilon_1$$

Esto significa que la invariancia de escala puede ser corregida a primer orden en ϵ_i . Es decir, los parámetros slow-roll pueden ajustarse para producir correcciones compatibles con los datos observacionales. Por otro lado, repitiendo un proceso muy similar para perturbaciones tensoriales, obtenemos

$$P_T = \frac{2H^2}{\pi^2 M_p^2}, \quad r \equiv \frac{P_T}{P_{\mathcal{R}}} = 16\epsilon_0$$

Nótese que los parámetros slow-roll pueden ser usados para bajar los valores de r , de tal manera que se satisfaga las restricciones observacionales del Planck y del BICEP2/Keck-Array.

1.3. Evidencia observacional de la energía oscura

Para describir la evidencia observacional de la energía oscura es necesario introducir algunos elementos básicos de cosmometría. Un parámetro empleado habitualmente en cosmología es el redshift (z) [25, 109, 120], el cual representa el cambio en la longitud de onda de un fotón debido a la expansión del universo. Es decir,

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{a} \tag{1.26}$$

donde λ_0 es la longitud de onda observada en el tiempo t_0 y λ es la longitud de onda emitida en un tiempo $t < t_0$. Otro aspecto fundamental en la cosmometría se refiere a la medición de distancias. Una de las formas más útiles de estimar una distancia es a través de la luminosidad de un objeto estelar. Suponiendo conocida la luminosidad absoluta L de la fuente luminosa y midiendo el flujo de la energía F que nos llega a un detector en la Tierra podemos calcular su distancia luminosa d_L a través de la sencilla relación [25]:

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F} \quad (1.27)$$

De forma equivalente, conocida la magnitud absoluta M de la estrella y observada la magnitud aparente m , la distancia de luminosidad puede inferirse a partir del módulo de distancia μ , el cual está dado por [25]:

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (1.28)$$

La relación entre luminosidad absoluta y flujo de energía en un universo FRW espacialmente plano ($k = 0$) conduce a que la distancia luminosa a una fuente puntual con un corrimiento al rojo z viene dada por:

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H} \quad (1.29)$$

donde en el parámetro de Hubble H están contenidas las contribuciones a la densidad total del universo (materia, radiación, etc).

Cuando dos grupos de trabajo, liderados por Saul Perlmutter [1] y Adam Riess [2] midieron y analizaron los flujos de energía de un objeto astrofísico muy peculiar, supernovas del tipo Ia, para diferentes valores de corrimiento al rojo z se encontraron con un panorama como el que se muestra en la Figura 1.2. En dicho esquema se grafican algunos datos observacionales de μ vs z junto a algunas curvas teóricas obtenidas a partir de las ecuaciones (1.29) y (1.28).

Al comparar los datos observacionales con las curvas teóricas se encuentra que dichas observaciones no pueden ser ajustadas con modelos cosmológicos que solo contemplen la existencia de átomos y materia. Sin embargo, al agregar una contribución del estilo de una constante cosmológica Λ , los datos pueden ser perfectamente ajustados. En la Figura 1.2 la curva que mejor ajusta es la línea verde, que corresponde a un modelo cosmológico con $\Omega_m = 0.24$ y $\Omega_\Lambda = 0.76$, siendo Ω_m la contribución a la densidad total por parte de los átomos y de materia oscura y Ω_Λ la proporción correspondiente a una constante cosmológica. Este fue el resultado sorprendente al que llegaron los grupos de Perlmutter y Riess en 1998. La consecuencia del agregado de este nuevo parámetro cosmológico Ω_Λ es que el universo presente estaría en una fase de expansión acelerada.

Así pues, nos encontramos en un universo que se expande aceleradamente y con abundancia de un contenido de energía que aún desconocemos. Aunque hoy en día se maneja el modelo Λ CDM (constante cosmológica + materia oscura fría), se tienen sin embargo indicios que nos llevan a desechar la constante cosmológica. Entre estos indicios se encuentra el problema de la constante cosmológica [25, 26], el cual se refiere a la abrumadora discrepancia entre el valor teórico y el valor observacional de Λ .

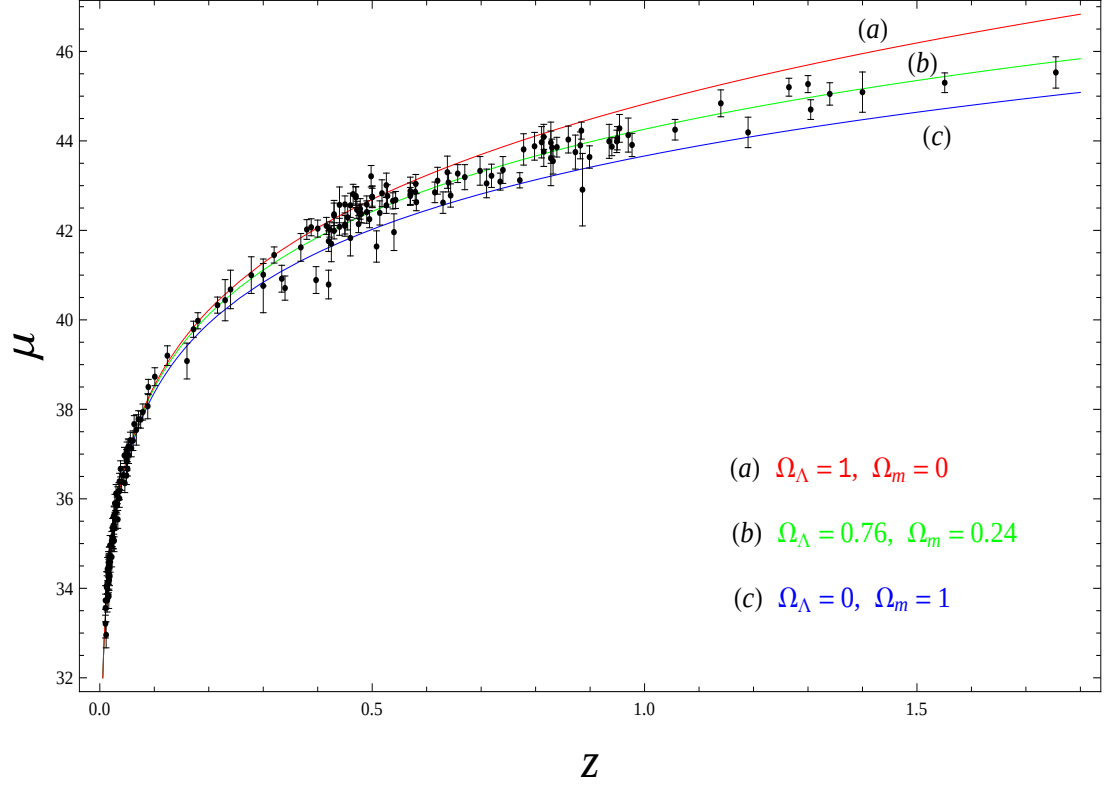


FIGURA 1.2. Datos observacionales de μ vs z [2]. Las tres curvas corresponden a modelos teóricos con (a) $\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 1$, (b) $\Omega_m = 0.24, \Omega_\Lambda = 0.76$ y (c) $\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$.

Una alternativa a la constante cosmológica es la llamada teoría de quintaesencia [33], la cual consiste en un campo escalar mínimamente acoplado a la curvatura y cuyo potencial es escogido para lograr el efecto de presión negativa que le permita tomar el papel dominante en la expansión acelerada. No obstante, la quintaesencia requiere el ajuste de condiciones iniciales muy críticas para dar cuenta de los valores actuales de energía oscura. Además, se necesitan potenciales extremadamente planos [121], los cuales son difíciles de encontrar en física de partículas, y esto plantea un problema de naturalidad para la cosmología quintaesencial.

Estas cuestiones han llevado a proponer teorías alternativas para explicar la expansión acelerada del universo. Una de ellas es considerar teorías de gravedad modificada, las cuales proponen modificar las leyes enmarcadas en las ecuaciones de Einstein. Dichas modificaciones pueden realizarse dentro del esquema de las teorías de campo escalar-tensorial [33, 74], las cuales emplean un campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad. En este contexto se encuentra el acoplamiento entre el campo escalar y el invariante Gauss-Bonnet, el cual es inspirado en teoría de cuerdas y ha sido propuesto para estudiar la dinámica del universo a tiempo tardío [60, 122, 123]. Otra interacción interesante que produce buenos resultados en el estudio de la energía oscura y la inflación es el acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y el invariante de Ricci. Este acoplamiento surge normalmente en la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvado [52, 118] y en teorías multidimensionales como teoría de supercuerdas [48, 50, 49]. La comprensión de los efectos de estos acoplamientos podrían proporcionar pistas sobre la forma en que las teorías fundamentales se manifiestan en la evolución del universo. Por tanto, es de interés estudiar la influencia de estos acoplamientos en la dinámica de la energía oscura.

CAPÍTULO 2

Acoplamientos cinetico, no minimo y de Gauss-Bonnet

Como se mencionó anteriormente, un número importante de fuentes observacionales ponen de manifiesto la existencia de fases de expansión acelerada tanto en épocas tempranas como en épocas tardías del universo. En la actualidad existen diferentes líneas teóricas para explicar de forma unificada la verdadera naturaleza de dichas fases de aceleración. Entre estas propuestas teóricas se encuentran las llamadas teorías de gravedad modificada, las cuales intentan explicar la aceleración del universo a partir de distintas modificaciones (o generalizaciones) de las ecuaciones de Einstein.

El punto de partida fundamental de las teorías de gravedad modificada consisten entonces en los lagrangianos que describen la interacción gravitacional. Por ejemplo, la relatividad general utiliza la densidad lagrangiana más sencilla para la gravedad:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2} R \quad (2.1)$$

Esta densidad lagrangiana puede ser generalizada a través de la adición de términos cuadráticos del tensor de Riemann (R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, etc). Sin embargo, este tipo de generalizaciones puede producir ciertas inestabilidades que son inaceptables en la física actual, como por ejemplo que el gravitón sea un estado con norma negativa [124]. Otro problema de las modificaciones cuadráticas de la gravedad es la aparición de derivadas de cuarto orden en la métrica, lo cual introduce más grados de libertad en comparación con la relatividad general. Estas dificultades pueden subsanarse al considerar el invariante cuadrático Gauss-Bonnet [60, 125, 126]:

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.2)$$

Aunque este término es un invariante topológico (derivada total), su presencia afecta la dinámica cosmológica cuando es acoplado a un campo escalar, ya que no es eliminado con el proceso variacional y contribuye con derivadas de segundo orden a las ecuaciones de campo. Por lo tanto, este acoplamiento puede ser incorporado en la acción a través de un término de la forma $F_2(\phi)\mathcal{G}$, donde $F_2(\phi)$ es una función del campo escalar. Generalmente este término es estudiado en el marco de las teorías escalar-tensorial, las cuales describen la gravedad a partir de un campo escalar (ϕ) y un campo tensorial ($g_{\mu\nu}$).

Otro acoplamiento escalar-tensor muy popular en la literatura es el acople de la forma $\phi^2 R$, el cual ha sido propuesto en numerosos modelos tanto inflacionarios como de energía oscura. Este acoplamiento surge en forma natural en el proceso de cuantización sobre el espacio-tiempo curvo [52, 118]. De hecho, cuando se toman en cuenta correcciones cuánticas del campo escalar mínimamente acoplado, se producen términos divergentes, los cuales son eliminados exactamente por la contribución de un término de la forma $\phi^2 R$. Por tanto, este acoplamiento no mínimo es necesario para ajustar la renormalización por sustracción de contratérminos. Cabe mencionar que este tipo de acoplamiento también aparece en teorías de gravedad multidimensional y en el límite de bajas energías en teoría de cuerdas [49, 50].

Una generalización adicional consiste en agregar acoplamientos entre las derivadas del campo escalar y la curvatura, por ejemplo, $R\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, $R_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi$, etc [127, 128]. En general, estos acoples inducen la aparición de terceras derivadas en las ecuaciones de campo [93], lo cual introduce más grados de libertad en comparación con la relatividad general. Esto se puede evitar considerando un acoplamiento cinético de la forma $F_1(\phi)G_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi$ [93, 94], siendo $F_1(\phi)$ una función arbitraria del campo escalar. De esta manera se garantiza que las ecuaciones de campo no contengan derivadas de orden superior.

A continuación se describirá explícitamente el modelo escalar-tensorial con acoplamientos cinético, no mínimo y de Gauss-Bonnet.

2.1. El modelo

Como punto de partida, considérese la acción que contiene los acoplamientos mencionados anteriormente

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - F_2(\phi) \mathcal{G} \right] \quad (2.3)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar y $\mathcal{G}$ es el invariante Gauss-Bonnet ($\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$). El acople $F_1(\phi)$ tiene dimensión de $(longitud)^2$ y el acople $F_2(\phi)$ es adimensional. El acoplamiento no mínimo $F(\phi)$ es asociado a una constante de gravitación efectiva y puede reescribirse de la forma $F(\phi) = \frac{1}{\kappa^2} - h(\phi)$, donde $h(\phi)$ es una función del campo escalar. La acción anterior puede escribirse de la forma

$$S = S_{NM} + S_\phi + S_{GB} + S_K \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} S_{NM} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} F(\phi) R \right) \\ S_\phi &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \\ S_{GB} &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \mathcal{G} \\ S_K &= \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \end{aligned}$$

Tomando la variación de la acción (2.3) con respecto a la métrica, se obtiene una expresión general de la forma

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{GB} + T_{\mu\nu}^K + T_{\mu\nu}^{NM} = 0 \quad (2.5)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{NM} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NM}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^{GB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{GB}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^K = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_K}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Las expresiones explícitas de estos tensores son:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (2.6)$$

$$T_{\mu\nu}^{NM} = -g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma F(\phi)] + [\nabla_\mu \nabla_\nu F(\phi)] - F(\phi) G_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} = & -4 \left([\nabla_\mu \nabla_\nu F_2(\phi)] R - g_{\mu\nu} [\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] R - 2[\nabla^\rho \nabla_\mu F_2(\phi)] R_{\nu\rho} - 2[\nabla^\rho \nabla_\nu F_2(\phi)] R_{\mu\rho} \right. \\ & \left. + 2[\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} [\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)] R_{\rho\sigma} - 2[\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)] R_{\mu\rho\nu\sigma} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^K = & \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) F_1(\phi) \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi) \\ & - \nabla_\nu \nabla_\mu (F_1(\phi) \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi) + R F_1(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\ & - 2 F_1(\phi) (R_{\mu\lambda} \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \phi + R_{\nu\lambda} \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi) + g_{\mu\nu} R_{\lambda\gamma} F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla^\gamma \phi \\ & + \nabla_\lambda \nabla_\mu (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \phi) + \nabla_\lambda \nabla_\nu (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi) \\ & - \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\gamma (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla^\gamma \phi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Además, al variar la acción (2.3) con respecto al campo escalar se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{1}{2} F'(\phi) R + \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V'(\phi) - F_1'(\phi) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - 2 F_1(\phi) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - F_2'(\phi) \mathcal{G} = 0 \quad (2.10)$$

Bajo la suposición de una métrica FRW (1.3) y un campo escalar homogéneo, la ecuación de campo (2.5) produce únicamente dos ecuaciones independientes, las cuales pueden ser calculadas con las componentes (00) y (11) [95, 122]. Dichas componentes generan el siguiente par de ecuaciones

$$3H^2 \left(F - 8H\dot{F}_2 - 3F_1\dot{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V - 3H\dot{F} \quad (2.11)$$

$$2\dot{H} \left(8H\dot{F}_2 + F_1\dot{\phi}^2 - F \right) = \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} - 8H^2\ddot{F}_2 + 8H^3\dot{F}_2 - 2H\frac{d(F_1\dot{\phi}^2)}{dt} \quad (2.12)$$

Además, la ecuación de movimiento (2.10) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} - 3 \left(2H^2 + \dot{H} \right) \frac{dF}{d\phi} + 24H^2 \left(H^2 + \dot{H} \right) \frac{dF_2}{d\phi} + 6HF_1\dot{\phi}(3H^2 + 2\dot{H}) \\ + 3H^2 \left(2F_1\ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi}\dot{\phi}^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como se verá a continuación, las ecuaciones (2.11) y (2.12) pueden manipularse para obtener expresiones que permiten la reconstrucción del modelo en cualquier escenario cosmológico. Es importante aclarar que el conjunto de ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) no forma un sistema de ecuaciones independientes. De hecho, es posible demostrar que la ecuación (2.13) puede obtenerse a partir de las ecuaciones (2.11) y (2.12). Por esta razón solo se debe considerar dos de estas tres ecuaciones.

2.2. Mecanismo de reconstrucción

Como puede observarse, el carácter no lineal de las ecuaciones cosmológicas (2.11), (2.12) y (2.13) dificulta su integración para un conjunto particular de condiciones iniciales. Sin embargo, es posible plantear el problema inverso: dado un escenario cosmológico, obtener expresiones que permiten obtener el potencial el escalar y los acoplamientos (reconstrucción del modelo) [57]. Debido a que la reconstrucción con acople Gauss-Bonnet ya fue estudiada en [122], asumiremos $F_2(\phi) = 0$ y estudiaremos el efecto combinado de el acoplamiento cinético y no mínimo. Nótese que la ecuación (2.12) puede reescribirse de la siguiente forma

$$2\dot{H}F + \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} = 2 \left[-3H^2F_1\dot{\phi}^2 + H\frac{d}{dt} \left(F_1\dot{\phi}^2 \right) + \dot{H}F_1\dot{\phi}^2 \right] \quad (2.14)$$

Teniendo en cuenta que

$$a^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{H}{a^3} \left(F_1\dot{\phi}^2 \right) \right] = -3H^2F_1\dot{\phi}^2 + H\frac{d}{dt} \left(F_1\dot{\phi}^2 \right) + \dot{H}F_1\dot{\phi}^2$$

la ecuación (2.14) puede escribirse como

$$2\dot{H}F + \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} = a^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{H}{a^3} \left(F_1\dot{\phi}^2 \right) \right]$$

Por conveniencia, definamos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} R(t) &= 2\dot{H}F + \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} \\ S(t) &= 3H^2F - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 3H\dot{F} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con esto, el acoplamiento cinético se puede escribir como

$$F_1(t) = \frac{a^3(t)}{H(t)\dot{\phi}^2(t)} \int^t dt_1 \frac{R(t_1)}{2a^3(t_1)} \quad (2.16)$$

Combinando las ecuaciones (2.11), (2.15) y (2.16), el potencial escalar se puede calcular con la siguiente expresión integral:

$$V(t) = S(t) - 9H(t)a^3(t) \int^t dt_1 \frac{R(t_1)}{2a^3(t_1)}$$

Para expresar el potencial y el acoplamiento en términos de ϕ es conveniente definir las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} t &= f(\phi) \\ H &= g'(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizando esto, el acoplamiento y el potencial pueden ser reconstruidos a través de las siguientes expresiones:

$$F_1(\phi) = \frac{e^{3g(f(\phi))}[f'(\phi)]^2}{g'(f(\phi))} \int^\phi d\phi_1 f'(\phi_1) \frac{R(f(\phi_1))}{2e^{3g(f(\phi_1))}} \quad (2.18)$$

$$V(\phi) = S(f(\phi)) - 9g'(f(\phi))e^{3g(f(\phi))} \int^\phi d\phi_1 f'(\phi_1) \frac{R(f(\phi_1))}{2e^{3g(f(\phi_1))}} \quad (2.19)$$

Estas ecuaciones permiten la reconstruir el modelo a partir de las funciones f y g . Téngase en cuenta que dichas funciones tienen incorporada la dinámica de la expansión del universo, ya que están directamente relacionadas con la función de Hubble y el campo escalar. A continuación se utilizarán soluciones de tiempo tardío para reconstruir el modelo en el caso particular $F(\phi) = \frac{1}{\kappa^2} - \xi\phi^2$, donde ξ es una constante adimensional.

2.2.1. Solución tipo ley de potencias en fase de quintaesencia

Considérese las siguientes funciones f y g :

$$f(\phi) = t_0 e^{\phi/\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = p \ln \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

donde ϕ_0 , t_0 y p son constantes positivas. Usando (2.17) se obtiene que la función de Hubble y el campo escalar están dados por:

$$H = \frac{p}{t} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \quad (2.20)$$

Esta solución describe una expansión tipo power-law ($a \sim t^p$), la cual es de especial interés ya que representan estados intermedios o asintóticos entre todas las posibles evoluciones cosmológicas. Es fácil ver que para $p > 1$ se obtiene una solución acelerada con ecuación de estado en el rango $-1 < w < -1/3$. En general, las soluciones correspondientes a este rango de w se conocen como cosmologías de quintaesencia [25, 33]. Incorporando esta solución en las ecuaciones (2.18) y (2.19) se obtiene la siguiente reconstrucción

$$F_1(\phi) = e^{2\phi/\phi_0}(a_+^0 + a_+^1\phi + a_+^2\phi^2) \quad (2.21)$$

$$V(\phi) = e^{-2\phi/\phi_0}(b_+^0 + b_+^1\phi + b_+^2\phi^2) \quad (2.22)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{\pm}^0 &= -\frac{t_0^2(\pm 1 + 3p(2 \pm p(3 - 4\xi)))}{2p(1 \pm 3p)^3} + \frac{t_0^2}{(1 \pm 3p)\kappa^2\phi_0^2}, \\ a_{\pm}^1 &= \mp \frac{(1 + 3p(\pm 2 + p))t_0^2\xi}{p(1 \pm 3p)^2\phi_0}, \quad a_{\pm}^2 = -\frac{t_0^2\xi}{(1 \pm 3p)\phi_0^2}, \\ b_{\pm}^0 &= \pm \frac{3p^2(\mp 2 + 3p)}{(1 \pm 3p)t_0^2\kappa^2} - \frac{(1 - 27p^2(1 \pm p(2 - 4\xi)))\phi_0^2}{2(1 - 3p)^3t_0^2}, \\ b_{\pm}^1 &= \frac{3p(\pm 1 + 6p \mp 9p^2)\xi\phi_0}{(1 \pm 3p)^2t_0^2}, \quad b_{\pm}^2 = \frac{3p^2(2 \mp 3p)\xi}{(1 \pm 3p)t_0^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nótese que el efecto del prefactor polinomial en el potencial es introducir un mínimo local, el cual puede ser ajustado a través de los parámetros ξ , p , ϕ_0 y t_0 . Una característica de este potencial es que presenta un comportamiento run-away (es decir, $V \rightarrow 0$ cuando $\phi \rightarrow \infty$), el cual es importante en la fenomenología de la energía oscura ya que refleja el comportamiento scaling del modelo. En general, la forma de este potencial corresponde a la de Albrecht-Skordis [129, 130], la cual aparece en forma natural en la teoría M y produce escenarios interesantes de quintaesencia consistentes con rangos observacionales.

Otra forma de realizar la reconstrucción para soluciones de quintaesencia es asumiendo un comportamiento lineal del campo escalar como función del tiempo. En otras palabras, es posible asumir la siguiente escogencia de las funciones f y g :

$$f(\phi) = t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = p \ln \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

Esto conlleva a las siguientes expresiones para η y ϕ :

$$F_1(\phi) = \left(\frac{t_0^2}{\kappa^2\phi_0^2(3p+1)} \right) + \left(\frac{t_0^2(\xi(4p-2)+1)}{2p(1-3p)\phi_0^2} \right) \phi^2 \quad (2.24)$$

$$V(\phi) = \left(\frac{3p^2(9(p-1)p+2)\phi_0^2}{\kappa^2(9p^2-1)t_0^2} \right) \frac{1}{\phi^2} - \left(\frac{(3p+1)\phi_0^2(6p(\xi+\xi p(3p-1)-1)-1)}{2(9p^2-1)t_0^2} \right) \quad (2.25)$$

Nótese que cuando $\phi \rightarrow \infty$, el potencial es aproximadamente plano y converge a un valor mínimo diferente de cero. Cabe mencionar que los potenciales con valor mínimo aparecen

en el contexto de la teoría de supergravedad y han sido propuestos para modelar la energía oscura en fase de quintaesencia [131].

2.2.2. Solución tipo ley de potencias en fase phantom

Las soluciones cosmológicas con ecuación de estado por debajo de -1 se denominan cosmologías phantom, las cuales no son descartadas por las cotas observacionales de w^1 . La reconstrucción en este escenario cosmológico puede realizarse al tomar las siguientes funciones f y g :

$$f(\phi) = t_s - t_0 e^{\phi/\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = -p \ln \left(\frac{t_s - t}{t_0} \right)$$

donde ϕ_0 , t_0 , p y t_s son constantes positivas. Esto conduce a:

$$H = \frac{p}{t_s - t} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \ln \left(\frac{t_s - t}{t_0} \right)$$

Este parámetro de Hubble conduce a una expansión tipo power-law de la forma $a \sim (t_s - t)^p$, prediciendo una singularidad futura en un tiempo finito llamada Big-Rip. De la ecuación (1.8) se ve que esta solución tiene una ecuación de estado por debajo de -1 para cualquier $p > 0$. Reemplazando las funciones f y g en las expresiones (2.18) y (2.19) se obtiene la reconstrucción:

$$F_1(\phi) = e^{2\phi/\phi_0} (a_-^0 + a_-^1 \phi + a_-^2 \phi^2) \quad (2.26)$$

$$V(\phi) = e^{-2\phi/\phi_0} (b_-^0 + b_-^1 \phi + b_-^2 \phi^2) \quad (2.27)$$

Al igual que en el caso de quintasencia, el potencial obtenido con la solución phantom tiene un comportamiento run-away y tiene la forma de Albrech-Skordis. Es importante destacar que esta reconstrucción implica que las soluciones phantom pueden obtenerse sin necesidad de introducir campos escalares fantasmas, lo cual es una característica importante para un modelo viable de energía oscura.

Otra manera de reconstruir el modelo en el escenario phantom es asumiendo que el campo escalar decrece linealmente con el tiempo. Esto se puede implementar con las siguientes funciones:

$$f(\phi) = t_s - t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = -p \ln \left(\frac{t_s - t}{t_0} \right)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en las ecuaciones (2.18) y (2.19), se obtiene:

$$F_1(\phi) = \left(\frac{t_0^2 (\xi(4p+2) - 1)}{2p(1+3p)\phi_0^2} \right) \phi^2 - \left(\frac{t_0^2}{\kappa^2 \phi_0^2 (3p-1)} \right) \quad (2.28)$$

¹De acuerdo a las mediciones astrofísicas, la ecuación de estado tiene un valor cercano -1 , sin embargo, las cotas observacionales no descartan ecuaciones de estado en fase phantom ($w_{DE} = -1.01 \pm 0.05$ [132]).

$$V(\phi) = \left(\frac{3p^2(9(p+1)p+2)\phi_0^2}{\kappa^2(9p^2-1)t_0^2} \right) \frac{1}{\phi^2} - \left(\frac{(3p-1)\phi_0^2(6p(\xi + \xi p(3p+1)-1)+1)}{2(9p^2-1)t_0^2} \right) \quad (2.29)$$

Nótese que la reconstrucción en los casos de quintaesencia y phantom solo difieren en los coeficientes constantes, implicando restricciones paramétricas adicionales en el modelo. Como se enfatizó anteriormente, la obtención de soluciones phantom sin introducir campos fantasmas constituye una característica atractiva para un modelo viable de energía oscura.

2.2.3. Solución de De Sitter

A continuación se mostrara que la solución De Sitter o constante cosmológica puede satisfacer las ecuaciones cosmológicas del modelo. Para esto se asume lo siguiente:

$$f(\phi) = t_0 \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{y} \quad g(t) = H_0 t$$

donde t_0 , ϕ_0 y H_0 son parámetros positivos. Esto conlleva a:

$$H = H_0 \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 \frac{t}{t_0}$$

Debido a que H es constante, el parámetro de estado es igual a -1 , lo cual corresponde efectivamente a la solución de constante cosmológica. Reemplazando las correspondientes funciones f y g en (2.18) y (2.19) se obtiene:

$$F_1(\phi) = \left(\frac{-3+4\xi}{18H_0^2} \right) - \left(\frac{t_0\xi}{3H_0\phi_0} \right) \phi$$

$$V(\phi) = \left(\frac{3H_0^2}{\kappa^2} - \frac{(4\xi-3)\phi_0^2}{2t_0^2} - \frac{\phi_0^2}{2t_0^2} \right) - \left(\frac{3H_0\xi\phi_0}{t_0} \right) \phi - (3H_0^2\xi) \phi^2$$

Esta reconstrucción muestra que es posible obtener soluciones de De Sitter para un modelo con potencial cuadrático y acoplamiento cinético lineal. Otra forma de incorporar la solución de De Sitter es a través de las siguientes funciones:

$$f(\phi) = -t_0 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad \text{y} \quad g(t) = H_0 t$$

Esto conlleva a las siguientes expresiones para $F_1(\phi)$ y $V(\phi)$:

$$F_1(\phi) = \frac{t_0(-1+2(2+H_0t_0)\xi)}{2H_0(2+3H_0t_0)}$$

$$V(\phi) = \frac{3H_0^2}{\kappa^2} + \left(-3H_0^2\xi + \frac{6H_0\xi}{t_0} - \frac{9H_0(2\xi(H_0t_0+2)-1)}{2t_0(3H_0t_0+2)} - \frac{1}{2t_0^2} \right) \phi^2$$

2.2.4. Solución Little Rip

Los modelos Little Rip [133, 134] proporcionan una evolución para la expansión del universo que interpola entre la expansión asintótica de De Sitter y modelos con singularidades Big Rip. Aunque estas soluciones se caracterizan por tener un parámetro de estado por debajo de -1 , la función de Hubble en estos escenarios cosmológicos no presenta singularidades en tiempo finito. Físicamente, en estas soluciones Little Rip ni el factor de escala ni la densidad de energía llegan a infinito en tiempo finito, pero, sin embargo, tarde o temprano dan lugar a la desintegración de toda estructura en un tiempo finito. Para empezar la reconstrucción del modelo con esta solución, se asumirá que:

$$f(\phi) = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad \text{y} \quad g(t) = \left(\frac{H_0}{h} \right) e^{ht}$$

siendo H_0 , ϕ_0 y h parámetros constantes. Lo anterior implica que:

$$H = H_0 e^{ht} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 e^{ht}$$

Nótese que la función de Hubble no posee singularidades y el parámetro de estado correspondiente está por debajo de -1 . Reemplazando las funciones en las ecuaciones de reconstrucción, se obtiene

$$\begin{aligned} F_1(\phi) &= \left(-\frac{\phi_0}{3hH_0\kappa^2} + \frac{h(-1+4\xi)\phi_0^3}{18H_0^3} \right) \frac{1}{\phi^3} + \left(\frac{(-1+4\xi)\phi_0^2}{6H_0^2} \right) \frac{1}{\phi^2} \\ V(\phi) &= \left(\frac{3hH_0}{\kappa^2\phi_0} + \frac{h^3(1-4\xi)\phi_0}{2H_0} \right) \phi + \left(h^2(1-6\xi) + \frac{3H_0^2}{\kappa^2\phi_0^2} \right) \phi^2 - \frac{6hH_0\xi}{\phi_0} \phi^3 - \frac{3H_0^2\xi}{\phi_0^2} \phi^4 \end{aligned}$$

A continuación se obtendrán soluciones exactas en ausencia de potencial utilizando el mismo acoplamiento no mínimo de esta sección. Debido a que en [122] se obtuvieron estas soluciones en presencia del acoplamiento Gauss-Bonnet, se asumirá $F_2(\phi) = 0$ y se analizarán los efectos del acoplamiento cinético y no mínimo.

2.3. Soluciones en ausencia de potencial

Para empezar, nótese que al hacer $V = 0$, $F_2(\phi) = 0$ y $F(\phi) = \frac{1}{\kappa^2} - \xi\phi^2$ en las ecuaciones (2.11) y (2.13), se obtiene:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 3\xi H (2\phi\dot{\phi} + H\phi^2) + 9H^2 F_1 \dot{\phi}^2 \right] \quad (2.30)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + 6\xi(2H^2 + \dot{H})\phi + 6HF_1\dot{\phi}(3H^2 + 2\dot{H}) + 3H^2 \left(2F_1\ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi} \dot{\phi}^2 \right) = 0 \quad (2.31)$$

Utilizando la variable e-folding ($x = \ln a$), las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas de la siguiente forma:

$$6 \left(\frac{1}{\kappa^2} - \xi\phi^2 \right) H^2 = H^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 12\xi H^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + 18H^4 F_1 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(H^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) + 6H^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6\xi \left(4H^2 + \frac{dH^2}{dx} \right) \phi \frac{d\phi}{dx} + 36H^4 F_1 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \\ & + 12H^2 \frac{dH^2}{dx} F_1 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6H^2 \frac{d}{dx} \left(H^2 F_1 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Con el propósito de integrar estas ecuaciones, se asumirá la siguiente expresión para el acoplamiento cinético [122]:

$$F_1 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{H^2} (k_1 + k_2 \phi^2)$$

siendo k_1 y k_2 constantes. Con esto, las ecuaciones (2.32) y (2.33) pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 12\xi \phi \frac{d\phi}{dx} + 6(\xi + 3k_2) \phi^2 + 18k_1 - \frac{6}{\kappa^2} = 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + (24\xi + 12k_2) \phi \frac{d\phi}{dx} + 36(k_1 + k_2 \phi^2) \right] H^2 \\ & + \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 6\xi \phi \frac{d\phi}{dx} + 12(k_1 + k_2 \phi^2) \right] \frac{dH^2}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Haciendo $k_1 = \frac{1}{3\kappa^2}$, la ecuación (2.34) se reduce a:

$$\frac{d\phi}{dx} = \left(-6\xi \pm \sqrt{6\xi(6\xi - 1) - 18k_2} \right) \phi \quad (2.36)$$

cuya solución es

$$\phi = \phi_0 e^{-\lambda x}, \quad \lambda = 6\xi \pm \sqrt{6\xi(6\xi - 1) - 18k_2} \quad (2.37)$$

Reemplazando esta solución en la expresión (2.35) se obtiene la siguiente ecuación para la función de Hubble

$$\left(\gamma + \frac{12}{\kappa^2 \phi_0^2} e^{2\lambda x} \right) H^2 + \left(\beta + \frac{4}{\kappa^2 \phi_0^2} e^{2\lambda x} \right) \frac{dH^2}{dx} = 0 \quad (2.38)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda^2 - 6\xi\lambda + 12k_2 \\ \gamma &= -2\lambda^3 + 6\lambda^2 - (24\xi + 12k_2)\lambda + 36k_2 \end{aligned}$$

La solución general de esta ecuación es

$$H^2 = h_0^2 e^{-\frac{\gamma}{\beta} x} \left[\kappa^2 \phi_0^2 \beta + 4e^{2\lambda x} \right]^{-\frac{3\beta - \gamma}{2\beta\lambda}} \quad (2.39)$$

donde h_0^2 es una constante de integración. Para calcular la ecuación de estado correspondiente, es conveniente utilizar la ecuación (1.8) en términos de la variable e-folding:

$$w = -1 - \frac{1}{3H^2} \frac{dH^2}{dx} \quad (2.40)$$

Reemplazando la solución (2.39) en la ecuación anterior, se obtiene una ecuación de estado de la forma

$$w = -1 + \frac{\gamma(\kappa\phi_0)^2 + 12e^{2x\lambda}}{3\beta(\kappa\phi_0)^2 + 12e^{2x\lambda}} \quad (2.41)$$

la cual evoluciona entre los valores (con $\lambda > 0$):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w = -1 + \frac{\gamma}{3\beta} \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0,$$

Nótese que estos límites no dependen de la condición inicial del campo escalar. Además se ve que la solución puede contener fase phantom si uno de los parámetros, β o γ , es negativo. Se analizará cada caso por separado. Si $\beta < 0$ y $\gamma > 0$ entonces el primer factor dependiente de x en (2.39) se incrementa exponencialmente, mientras la potencia del segundo factor es negativa, lo cual conlleva a una singularidad Big Rip en algún momento donde $\beta(\kappa\phi_0)^2 = -3e^{2x\lambda}$. Este tipo de singularidades pueden ser evitadas al considerar el caso $\beta > 0$ y $\gamma < 0$. Asumiendo estas desigualdades, el segundo factor de (2.39) es siempre positivo independientemente del signo de la potencia, conllevando a una solución que siempre es finita y tiene la ventaja de describir un escenario phantom. Para ilustrar el comportamiento de la solución (2.39), en la figura (2.1) se grafica la ecuación de estado como función del corrimiento al rojo para algunos valores de los parámetros. El comportamiento cuasiconstante de w en un amplio intervalo de z permite simular una solución similar a la constante cosmológica hasta épocas recientes. También es notable que en la época actual, la ecuación de estado puede tomar valores cercanos a -1 tanto en fase quintaesencia como phantom.

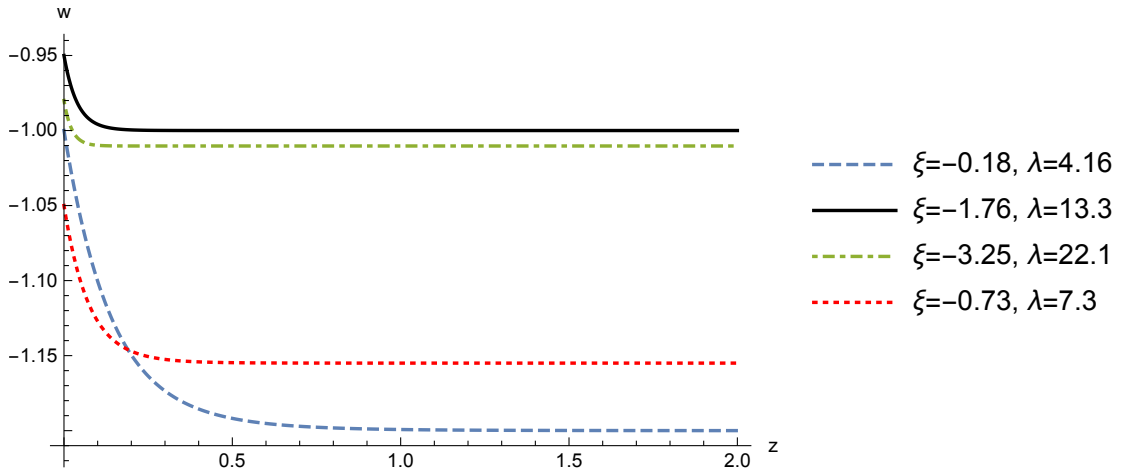


FIGURA 2.1. Ecuación de estado de energía oscura w en función del corrimiento al rojo para varios valores del parámetro ξ . En todas las gráficas se toma $\lambda > 0$ y $\kappa\phi_0 = 2$. Aunque las curvas cubren diferentes comportamientos del parámetro de estado, todas están dentro del rango aceptable de las observaciones astrofísicas. Nótese que el parámetro de estado actual w_0 en todas las curvas es muy similar a -1 , tomando valores tanto de quintaesencia como phantom.

CAPÍTULO 3

Análisis del sistema autónomo

En el capítulo anterior se encontró una gran variedad de soluciones de energía oscura que son consistentes con las restricciones observacionales. Sin embargo, no es suficiente solo con saber que el modelo admite una solución acelerada, también hay que caracterizar el comportamiento del modelo alrededor de esta solución. Para realizar este tipo de caracterización, existe una herramienta matemática conocida como teoría de sistemas autónomos [135, 136, 137], la cual permite estudiar el comportamiento asintótico de soluciones críticas de interés cosmológico. Por esta razón, primero daremos a conocer algunos conceptos básicos de esta teoría.

3.1. Introducción a la teoría de sistemas autónomos

Un sistema autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (ver [137]):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Este sistema se puede escribir de una manera más compacta si utilizamos la siguiente notación vectorial

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

De esta manera, el sistema (3.1) se puede escribir de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

Un sistema autónomo, ya sea bidimensional o tridimensional, puede ser visualizado a través de un diagrama conocido como mapa de fase. Por lo general, un mapa de fase esquematiza el comportamiento del campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a lo largo de sus curvas integrales (llamadas también trayectorias u orbitas).

Existen ciertas soluciones particulares de la ecuación (3.2) que son muy importantes dinámicamente. Un ejemplo de ellas son los puntos críticos ($\mathbf{x}_c$), los cuales son definidos como los ceros de la función $\mathbf{F}$. Es decir, el sistema dinámico (3.2) tiene un punto crítico en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ si y solo si $\mathbf{F}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{0}$. Como $\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{0}$, los puntos críticos también reciben el nombre de puntos estacionarios o puntos equilibrio.

Antes de caracterizar el comportamiento del sistema dinámico alrededor de un punto crítico, definamos primero la matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$:

$$J(\mathbf{x}) = D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Supongamos que J_c es la matriz Jacobiana evaluada en el punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$. Diremos que $\mathbf{x}_c$ es hiperbólico cuando las partes reales de todos los autovalores de J_c son diferentes de cero, en caso contrario diremos que $\mathbf{x}_c$ es no hiperbólico.

Los puntos críticos poseen una característica muy importante: pueden ser atractores. La idea intuitiva es la siguiente: cuando muchas orbitas diferentes convergen a un punto del espacio de fases se habla de atracción hacia ese punto. Los atractores dan información sobre el comportamiento asintótico del sistema. De manera más precisa: un punto crítico $\mathbf{x}_c$ se llama atractor si existe una vecindad $\Omega_C \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}_c$ tal que $\mathbf{x}(t=0) \in \Omega_C$ implica que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_c$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Otra característica importante de un punto crítico es su estabilidad, cuyo concepto surge al preguntar si las soluciones próximas al punto crítico permanecerán cerca de él. Dicho de manera más formal: un punto crítico $\mathbf{x}_c$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}(t=0) - \mathbf{x}_c\| < \delta$ entonces $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$.

Una forma de determinar la estabilidad asintótica de un punto crítico es a través del criterio de Hartman-Grobman [136], el cual plantea el uso de la matriz Jacobiana J_c para analizar la estabilidad. Dicho de manera más precisa, el signo de los autovalores de J_c pueden ser usados para sacar conclusiones sobre la estabilidad del punto crítico. A continuación, escribiremos el teorema que da soporte a dicho criterio.

Teorema. Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ es un punto crítico del sistema autónomo (3.2). Supongamos además que los valores propios J_c son $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Entonces,

- $\mathbf{x}_c$ es asintóticamente estable si todos los autovalores de J_c tiene parte real negativa.
- $\mathbf{x}_c$ es inestable si uno o más autovalores de J_c tiene parte real positiva.

Nótese que este teorema no da ningún criterio de estabilidad cuando la parte real de todos los autovalores es menor o *igual* que cero. Por esta razón, en estos casos solo se puede hablar de una estabilidad de tipo *marginal*.

3.2. Ecuaciones del sistema autónomo, puntos críticos y estabilidad de las soluciones

Considérese el modelo (2.3) en presencia de un fluido perfecto con densidad de energía ρ_m y ecuación de estado w_m ¹, Con este agregado de materia, las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) toman la forma:

$$3H^2 \left(F - 8H\dot{F}_2 - 3F_1\dot{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V - 3H\dot{F} + \rho_m \quad (3.3)$$

$$2\dot{H} \left(8H\dot{F}_2 + F_1\dot{\phi}^2 - F \right) = \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} - 8H^2\ddot{F}_2 + 8H^3\dot{F}_2 - 2H\frac{d(F_1\dot{\phi}^2)}{dt} + (1+w_m)\rho_m \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} - 3 \left(2H^2 + \dot{H} \right) \frac{dF}{d\phi} + 24H^2 \left(H^2 + \dot{H} \right) \frac{dF_2}{d\phi} + 6HF_1\dot{\phi}(3H^2 + 2\dot{H}) \\ + 3H^2 \left(2F_1\ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi}\dot{\phi}^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para estudiar la dinámica cosmológica desde la perspectiva de los sistemas autónomos, considérese las siguientes variables adimensionales [138, 139, 101]:

$$\begin{aligned} x = \frac{\dot{\phi}^2}{6H^2F}, \quad y = \frac{V}{3H^2F}, \quad f = \frac{\dot{F}}{HF}, \quad k = \frac{3F_1\dot{\phi}^2}{F} \\ g = \frac{8H\dot{F}_2}{F}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2F}, \quad \varepsilon = \frac{\dot{H}}{H^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Debido a que el acoplamiento Gauss-Bonnet ya fue estudiado en [138], omitiremos la variable g (es decir, $F_2 = 0$) y analizaremos el efecto combinado de los acoplamientos cinético y no mínimo. Con esto, las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) pueden reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x + y - f + k + \Omega_m &= 1 \\ 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{3}k \right) &= -6x - (f' + \varepsilon f + f^2) + f - 2k + 2 \left(\frac{1}{3}k' + \frac{1}{3}kf \right) - 3(1+w_m)\Omega_m \\ 3(x' + 2x\varepsilon + xf) + 18x + 3(y' + 2y\varepsilon + yf) - 3f(2 + \varepsilon) + 6k + 4\varepsilon k + k' + kf &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹A lo largo de este capítulo se asumirá que $0 \leq w_m \leq 1$

donde las variables primadas denotan diferenciación con respecto a la variable e-folding. Para cuantificar la dominancia del campo escalar, es posible definir un parámetro de densidad efectivo de la forma $\Omega_\phi = x + y - f + k$, el cual está relacionado con Ω_m a través de la ecuación $\Omega_\phi + \Omega_m = 1$. Cabe mencionar que el sistema anterior requiere un conjunto adicional de ecuaciones, las cuales pueden ser obtenidas al asumir una forma funcional específica del potencial y de los acoplamientos. En particular, se estudiara el modelo cuando dichas funciones sean de tipo ley de potencias y exponencial.

3.2.1. Sistema autónomo correspondiente a un modelo con $V(\phi) \sim \phi^n$, $h(\phi) \sim \phi^N$, $F_1(\phi) \sim \phi^m$, $F_2(\phi) \sim 0$

Para empezar, considérese los siguientes parámetros adimensionales [138, 139, 101]:

$$b = \phi \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{dF}{d\phi} \right) \right], \quad c = \phi \frac{d \ln V}{d\phi}, \quad d = \phi \frac{d \ln F_1}{d\phi}, \quad \Gamma = \phi \frac{d \ln F}{d\phi} \quad (3.8)$$

Nótese que para un modelo cuyas funciones $V(\phi)$, $h(\phi)$ y $F_1(\phi)$ son proporcionales a una potencia del campo escalar, los parámetros b , c y d toman valores constantes. En otras palabras, si $V(\phi) \propto \phi^n$, $h(\phi) \propto \phi^N$ y $F_1(\phi) \propto \phi^m$, entonces $b = N - 1$, $c = n$ y $d = m$. Teniendo en cuenta esto, es posible obtener el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{c}{\Gamma} f y - 2y\varepsilon - yf \\ f' &= \frac{b}{\Gamma} f^2 + \frac{1}{2} f \frac{x'}{x} - \frac{1}{2} f^2 \\ k' &= \frac{d}{\Gamma} k f + k \frac{x'}{x} + 2\varepsilon k \\ \Gamma' &= b f + f - \Gamma f \end{aligned} \quad (3.9)$$

El conjunto de ecuaciones (3.7) y (3.9) forman un sistema autónomo completo, cuyo análisis de estabilidad puede realizarse a través del formalismo introducido en la sección anterior. En las tablas (3.1) y (3.2) se muestran algunos puntos críticos y sus correspondientes autovalores. La ecuación de estado efectiva w_{eff} que aparece en la tabla (3.1) permite determinar si la solución conduce a una expansión acelerada. Por ejemplo, la materia ordinaria ($w_{eff} = 0$) y radiación ($w_{eff} = 1/3$) corresponden a cosmologías desaceleradas con $w_{eff} > -1/3$, mientras que el régimen de quintaesencia corresponde a un escenario cosmológico de expansión acelerada con $-1 < w_{eff} < -1/3$. En el caso de constante cosmológica o solución de De Sitter se tiene una aceleración positiva con $w_{eff} = -1$. Además, para simplificar escritura en estas tablas, se han definido las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{4d(d+4) - 27b(b+2) - 11} \\ \sigma &= 2 + 2b - c \\ \gamma &= (3 + 6b + 3b^2 + 7c + 7bc - 2c^2 + 3(1+b)(1+b+c)w_m) \end{aligned}$$

TABLA 3.1. Puntos críticos y ecuación de estado para un modelo con potencial y acoplamiento cinético tipo ley de potencias.

	x	y	f	k	Γ	w_{eff}
A1	1	0	0	0	$1+b$	1
A2	0	0	0	1	Γ	$-1/3$
A3	$-\frac{1}{2}$	0	0	$3/2$	$1+b$	-1
A4	0	0	-1	0	$1+b$	$1/3$
A5	0	$\frac{5+5b-c}{1+b+c}$	$\frac{4+4b-2c}{1+b+c}$	0	$1+b$	$-1 + \frac{2(1+b-c)(2+2b-c)}{3(1+b)(1+b+c)}$
A6	0	0	$\frac{1-3b+2d-f_1}{1+3b-d}$	$\frac{2+d-f_1}{1+3b-d}$	$1+b$	$-1 + \frac{(b-d-1)(3b-2d-1+f_1)}{3(b+1)(3b-d+1)}$
A7	0	0	$\frac{1-3b+2d+f_1}{1+3b-d}$	$\frac{2+d+f_1}{1+3b-d}$	$1+b$	$-1 + \frac{(b-d-1)(3b-2d-1-f_1)}{3(b+1)(3b-d+1)}$
A8	0	0	$1-3w_m$	0	$1+b$	$1/3$

TABLA 3.2. Autovalores correspondientes a los puntos críticos de la tabla 1.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
A1	-6	6	0	0	$3(1-w_m)$
A2	3	3	$3/2$	0	$-3w_m$
A3	0	0	0	-3	$-3(1+w_m)$
A4	$\frac{b-1}{b+1}$	1	$\frac{5+5b-c}{1+b}$	$-\frac{5+3b+d}{1+b}$	$2-3w_m$
A5	$\frac{2(1-b)\sigma}{(1+b)(1+b+c)}$	$\frac{-2\sigma}{1+b+c}$	$\frac{c-5-5b}{1+b}$	$\frac{2(2+2b-c)(c+d-2b)}{(1+b)(1+b+c)}$	$-\frac{\gamma}{(1+b)(1+b+c)}$
A6	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{2(2+d)}$	$\frac{2-c+d}{2(2+d)}$	$-\frac{5}{2-3w_m}$	$-\frac{5}{2}$
A7	$\frac{1}{2}$	$\frac{d}{2(2+d)}$	$\frac{2-c+d}{2(2+d)}$	$-\frac{5}{2-3w_m}$	$-\frac{5}{2}$
A8	$\frac{(b-1)(3w_m-1)}{1+b}$	$3w_m-1$	$3w_m-2$	$\frac{3+c+3w_m(1-c)+3b(1+w_m)}{1+b}$	$\frac{d(1-3w_m)-3(1+w_m)-b(5-3w_m)}{1+b}$

A continuación se analizará cada punto crítico y se discutirán sus implicaciones cosmológicas.

A1: $(1, 0, 0, 0, 1+b)$ con autovalores

$$[-6, 6, 0, 0, 3(1-w_m)]$$

Este punto es dominado por la energía cinética del campo escalar y conduce a la ecuación de estado característica de la materia Stiff. Nótese que los autovalores implican que este punto crítico es inestable.

A2: $(0, 0, 0, 1, \Gamma)$ con autovalores

$$[3, 3, 3/2, 0, -3w_m]$$

Este punto es dominado por el acoplamiento cinetico y posee una ecuación de estado $w_{eff} = -1/3$, la cual corresponde a la división entre la expansión desacelerada y acelerada. De los autovalores se concluye que este punto crítico es un punto de silla.

A3: $(-1/2, 0, 0, 3/2, 1+b)$ con autovalores

$$[0, 0, 0, -3, -3(1+w_m)]$$

Este punto corresponde a una solución de De Sitter ($w_{eff} = -1$) con dominancia del campo escalar ($\Omega_\phi = 1$). Debido a la presencia de autovalores menores o iguales a cero, la estabilidad de este punto crítico es de tipo marginal.

A4: $(0, 0, -1, 0, 1+b)$ con autovalores

$$\left[\frac{b-1}{b+1}, 1, \frac{5+5b-c}{b+1}, -\frac{5+3b+d}{b+1}, 2-3w_m \right]$$

En este punto crítico, cuyo parámetro de estado corresponde a radiación ($w_{eff} = 1/3$), tanto el potencial como el acoplamiento son despreciables comparados con el acoplamiento no mínimo. Nótese que este punto es de silla para ciertos valores de los parámetros b , c y d , por ejemplo, si $-1 < b < 1$, $c > 5(1+b)$ y $d > -4 - 3b$, se obtienen autovalores positivos y negativos, reflejando efectivamente el comportamiento de silla. Debido a esto, este punto podría representar una fase transitoria de un universo dominado por radiación.

A5: $\left(0, \frac{5+5b-c}{1+b+c}, \frac{4+4b-2c}{1+b+c}, 0, 1+b\right)$ con autovalores :

$$\left[\frac{2(1-b)(2+2b-c)}{(1+b)(1+b+c)}, \frac{2(c-2-2b)}{1+b+c}, \frac{c-5-5b}{1+b}, \frac{2(2+2b-c)(c+d-2b)}{(1+b)(1+b+c)}, \frac{(3+6b+3b^2+7c+7bc-2c^2+3(1+b)(1+b+c)w_m)}{(-1-b)(1+b+c)} \right]$$

En este punto crítico, cuya ecuación de estado depende de los parámetros b y c , el potencial y el acoplamiento mínimo son dominantes en comparación con el acople cinético. El caso $c = 1+b$ conduce a una solución de De Sitter, cuya estabilidad se obtiene con $b > 1$ y $d < b$ o $b < -1$ y $d > b$. Nótese que para el acoplamiento no mínimo estándar ($b = 1$), la solución de De Sitter es marginalmente estable cuando $b > d$. También es posible considerar ecuaciones de estado cuyos valores sean cercanos a -1 y estén dentro del rango de las observaciones astrofísicas, por ejemplo, tomando $b = 4$, $c = 4$ y $d = 1$ se obtiene una solución de quintaesencia estable con una ecuación de estado dada por $w_{eff} = -0.91$, mientras que al tomar $b = 2$, $c = 4$ y $d = 0$, la solución corresponde a una fase phantom estable con $w_{eff} = -1.06$. Por lo tanto, este punto tiene características viables para la descripción de escenarios cosmológicos de tiempo tardío.

A6 y **A7**. Estos puntos críticos conducen a una ecuación de estado que depende de los parámetros b y d y refleja el efecto combinado de los acoplamientos no mínimo y cinético. La positividad de los primeros autovalores de cada punto impide fases cosmológicas estables. De la tabla 3.1 se ve que la ecuación de estado solo puede tomar valores en el rango $0 < w_{eff} \leq 1$, lo cual es interesante en cosmologías tempranas. Esta desigualdad tiene lugar cuando $b \geq -1$ y $d \geq 5 + 7b$. Aunque estos puntos no pueden describir expansión acelerada, si pueden ser útiles en la descripción de épocas de materia y radiación.

A7: $(0, 0, 1 - 3w_m, 0, 1 + b)$ con autovalores :

$$\left[\frac{(b-1)(3w_m-1)}{1+b}, 3w_m-2, 3w_m-1, \frac{3+3b+c+3w_m+3bw_m-3cw_m}{1+b}, \frac{d(1-3w_m)-3(1+w_m)-b(5-3w_m)}{1+b} \right]$$

Este punto crítico conduce a $w_{eff} = 1/3$, $\Omega_\phi = -1 + 3w_m$ y $\Omega_m = 2 - 3w_m$, lo que implica que existe contribución tanto de la materia como del acoplamiento no mínimo. La positividad de los parámetros de densidad Ω_ϕ y Ω_m imponen la restricción $1/3 \leq w_m \leq 2/3$, la cual excluye a la materia no relativista ($w_m = 0$). En el caso $w_m = 1/3$, el punto fijo corresponde a una solución scaling y el universo en conducido a través de una era dominada por radiación con $\Omega_\phi = 0$ y $\Omega_m = 1$. Debido a que esta solución scaling corresponde a un punto fijo de silla, el sistema puede representar una fase transitoria de dominancia de radiación.

3.2.2. Sistema autónomo correspondiente a el modelo exponencial

Ahora se estudiará el caso en el que $V(\phi)$, $h(\phi)$ y $F_1(\phi)$ son funciones exponenciales. Este tipo de modelos surgen de forma natural como limites efectivos de teorías fundamentales tales como supergravedad y teoría de cuerdas [49, 50, 48]. A diferencia del modelo visto en la subsección anterior, los parámetros b , c , d y Γ se definen de la siguiente forma [138]:

$$b = \frac{d}{d\phi} \left[\ln \left(\frac{dF}{d\phi} \right) \right], \quad c = \frac{d \ln V}{d\phi}, \quad d = \frac{d \ln F_1}{d\phi}, \quad \Gamma = \frac{d \ln F}{d\phi} \quad (3.10)$$

Nótese que el campo escalar no aparece explícitamente en estas expresiones. Asumiendo que los parámetros b , c y d son constantes, las funciones del modelo son tipo exponencial. En otras palabras, si $V(\phi) \propto e^{l\phi}$, $h(\phi) \propto e^{m\phi}$ y $F_1(\phi) \propto e^{n\phi}$, entonces $b = l$, $c = m$ y $d = n$. Teniendo en cuenta esto, el sistema autónomo correspondiente se obtiene solamente cambiando la última ecuación de (3.9) por

$$\Gamma' = (-\Gamma + b)$$

En las tablas (3.3) y (3.4) se muestran los puntos críticos y los autovalores del sistema autónomo correspondiente al modelo exponencial. Además se muestran los parámetros efectivos que reflejan las características cosmológicas de las soluciones.

TABLA 3.3. Resumen de puntos críticos para el modelo exponencial.

	x	y	f	k	Γ	w_{eff}
B1	1	0	0	0	b	1
B2	0	0	0	1	Γ	$-1/3$
B3	$-\frac{1}{5}$	0	0	$6/5$	b	-1
B4	0	0	-1	0	b	$1/3$
B5	0	$\frac{5b-c}{b+c}$	$\frac{4b-2c}{b+c}$	0	b	$-1 + \frac{2(b-c)(2b-c)}{3b(b+c)}$
B6	0	0	$\frac{3b-2d+f_2}{d-3b}$	$\frac{d-f_2}{3b-d}$	b	$-1 + \frac{(b-d)(3b-2d+f_2)}{3b(3b-d)}$
B7	0	0	$\frac{3b-2d-f_2}{d-3b}$	$\frac{d+f_2}{3b-d}$	b	$-1 + \frac{(b-d)(3b-2d+f_2)}{3b(3b-d)}$
B8	0	0	$1-3w_m$	0	b	$1/3$

TABLA 3.4. Autovalores correspondientes a los puntos críticos de la tabla 3.3.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
B1	0	0	-6	6	$3(1-w_m)$
B2	0	$3/2$	3	3	$-3w_m$
B3	0	0	0	-3	$-3(1+w_m)$
B4	$\frac{1}{3b}$	1	$\frac{5b-c}{b}$	$-\frac{3b+d}{b}$	$2-3w_m$
B5	$\frac{2(c-2b)}{b+c}$	$\frac{2(c-2b)}{b+c}$	$\frac{c-5b}{b}$	$\frac{2(2b-c)(c+d-2b)}{b(b+c)}$	$\frac{2c^2-3b^2(1+w_m)-bc(7+w_m)}{b(b+c)}$
B6	$-\frac{1}{12d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d-c}{2d}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
B7	$-\frac{1}{12d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{d-c}{2d}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
B8	$-1+3w_m$	$-1+3w_m$	$-2+3w_m$	$\frac{c(1-3w_m)+3b(1+w_m)}{b}$	$\frac{d(1-3w_m)-b(5-3w_m)}{b}$

donde f_2 representa la expresión:

$$f_2 = \sqrt{4d^2 - 27b^2}$$

Al comparar respectivamente los puntos **B1**, **B2**, **B3** y **B4** con los puntos **A1**, **A2**, **A3** y **A4**, se nota que tienen las mismas propiedades de estabilidad y conducen a los mismos valores de Ω_ϕ y w_{eff} . En lo que sigue se discutirá las principales características del resto de puntos que aparecen en las tablas anteriores.

B5: $\left(0, \frac{5b-c}{b+c}, \frac{4b-2c}{b+c}, 0, b\right)$ con autovalores :

$$\left[\frac{2(c-2b)}{b+c}, \frac{c-5b}{b}, \frac{2(2b-c)(c+d-2b)}{b(b+c)}, \frac{-3b^2(1+w_m) - (7c+3cw_m)b + 2c^2}{b(b+c)} \right]$$

En este punto crítico, la dominancia del potencial y del acoplamiento no mínimo conduce a una ecuación de estado dependiente de los parámetros b y c . Nótese que la solución Scaling, $w_{eff} = w_m$, se obtiene al tomar

$$c = \frac{1}{4} \left[9b + 3bw_m - b\sqrt{73 + 78w_m + 9w_m^2} \right]$$

Este tipo de solución conduce a un escenario cosmológico en donde la densidad de energía del campo escalar tiene un comportamiento similar a la densidad de energía del fluido perfecto (radiación o materia pulverulenta). De los autovalores se deduce que dicha solución scaling corresponde a un atractor si se satisface las desigualdades $b > 0$ y $d < \frac{1}{4} [-b - 3bw_m + b\sqrt{73 + 78w_m + 9w_m^2}]$. Por otro lado, también es posible obtener estabilidad de soluciones de energía oscura, por ejemplo, la solución de quintaesencia es estable si $c < 0$, $2c - \sqrt{3}|c| < b < c$ y $d > 2b - c$ o $c > 0$, $c < b < 2c + \sqrt{3}|c|$ y $d < 2b - c$, mientras que la solución phantom es estable si $c < 0$, $c < b < c/2$ y $d > 2b - c$ o $c > 0$, $c/2 < b < c$ y $d < 2b - c$. Nótese que al hacer $c = b$ se obtiene la solución de De sitter, la cual es estable para $d < b$. Debido a que los parámetros b y c son reales, la ecuación de estado puede ser tan cercana a -1 como sea necesario, convirtiendo al punto crítico en un escenario cosmológico muy interesante para la descripción de la expansión acelerada.

B6 y B7: Estos puntos críticos existen para $\frac{-2|d|}{3\sqrt{3}} < b < \frac{2|d|}{3\sqrt{3}}$ y son dominados por los acoplamientos cinético y no mínimo. De la ecuación estado efectiva se ve que no es posible obtener expansión acelerada. El campo escalar puede simular materia pulverulenta en el caso $d = 7b$ y esta solución es estable bajo las condiciones $b > 0$ y $c < -5b$. Solución inestable de radiación puede ser obtenida cuando $d = -3b$. Considerando el limite $d \rightarrow 3b$ se obtiene una fase estable de radiación cuando $b < 0$ y $c > -b$.

B8: $(0, 0, 1 - 3w_m, 0, b)$ con autovalores

$$\left[3w_m - 1, 3w_m - 2, \frac{-5b + d + 3bw_m - 3dw_m}{b}, \frac{3b + c + 3bw_m - 3cw_m}{b} \right]$$

Al comparar este punto con **A8** se nota que tienen características similares, por ejemplo, los parámetros de densidad y la ecuación de estado son iguales en ambos puntos. Esto implica que también se debe imponer la restricción $1/3 \leq w_m \leq 2/3$, la cual garantiza la positividad de los parámetros de densidad. Si el fluido perfecto corresponde a radiación, entonces el punto crítico conlleva a una solución scaling y el universo es dominado por materia relativista. En cuanto a la estabilidad, este punto scaling es de silla, lo que puede representar una fase transitoria de dominancia de radiación.

CAPÍTULO 4

Perturbaciones e Inflación generalizada

Hasta ahora hemos trabajado bajo la premisa de que a gran escala el universo es homogéneo e isotrópico. Esta descripción del universo tiene sustento en un gran número de observaciones, entre las cuales se destaca la cuasi igualdad en la temperatura de la radiación cósmica de fondo. No obstante, a pesar de esta homogeneidad a gran escala, son bien conocidas la inhomogeneidades en regiones a escalas menores, donde la materia se aglomera en galaxias y en cúmulos de galaxias. Se cree que estas irregularidades han crecido con el tiempo a través de mecanismos gravitacionales, partiendo de una distribución cuasi homogénea en un pasado. El comportamiento a gran escala del Universo puede ser descrito si asumimos que este es homogéneo e isotrópico en la mayoría de su extensión. Luego imponemos irregularidades a corta escala. En la mayor parte de la evolución del Universo, estas irregularidades pueden ser consideradas pequeñas fluctuaciones que pueden ser abordadas usando una teoría lineal de perturbaciones. En este capítulo utilizaremos un formalismo generalizado para estudiar la influencia de los acoplamientos en el espectro de perturbaciones.

4.1. Espectro de potencias slow-roll

Al considerar teorías con funciones libres o acoplamientos no constantes, el formalismo slow-roll generalmente se modifica para incluir condiciones sobre la tasa de cambio de estos acoples. Esto se debe a que un incremento rápido de una función del campo, implica a su vez que dicho campo crece rápidamente, conllevando a una violación de las condiciones de rodadura lenta. En términos mas prácticos, es útil reexpresar las ecuaciones de movimiento en términos análogos a los parámetros ϵ_i , de modo que una expansión slow-roll pueda llevarse a cabo de forma sistemática. Con este fin, definamos los siguientes parámetros [103]:

$$\ell_0 = \frac{\dot{F}}{HF}, \quad \ell_1 = \frac{\dot{\ell}_0}{H\ell_0} \quad (4.1)$$

$$k_0 = \frac{3F_1\dot{\phi}^2}{F}, \quad k_1 = \frac{\dot{k}_0}{Hk_0} \quad (4.2)$$

$$\Delta_0 = \frac{8H\dot{F}_2}{F}, \quad \Delta_1 = \frac{\dot{\Delta}_0}{H\Delta_0} \quad (4.3)$$

Nótese que estas expresiones pueden ser interpretadas como parámetros de densidad asociados con la contribución de cada acoplamiento al contenido de energía del universo. Es útil escribir algunas cantidades en términos de estos parámetros, por ejemplo, el potencial y el termino cinético están dados por

$$V = H^2 F \left[3 - \frac{5}{2} \Delta_0 - 2k_0 - \epsilon_0 + \frac{5}{2} \ell_0 + \frac{1}{2} \ell_0 (\ell_1 - \epsilon_0 + \ell_0) - \frac{1}{2} \Delta_0 (\Delta_1 - \epsilon_0 + \ell_0) - \frac{1}{3} k_0 (k_1 + \ell_0 - \epsilon_0) \right] \quad (4.4)$$

$$\dot{\phi}^2 = H^2 F \left[2\epsilon_0 + \ell_0 - \Delta_0 - 2k_0 + \Delta_0 (\Delta_1 - \epsilon_0 + \ell_0) - \ell_0 (\ell_1 - \epsilon_0 + \ell_0) + \frac{2}{3} k_0 (k_1 + \ell_0 - \epsilon_0) \right] \quad (4.5)$$

Bajo la condición slow-roll $\epsilon_i, \ell_i, k_i, \Delta_i \ll 1$, las ecuaciones de movimiento (2.11), (2.12) y (2.13) se pueden escribir de forma aproximada como

$$3H^2 F \simeq V, \quad (4.6)$$

$$2\dot{H}F \simeq -\dot{\phi}^2 + H\dot{F} - 6H^2 F_1 \dot{\phi}^2 - 8H^3 \dot{F}_2, \quad (4.7)$$

$$3H\dot{\phi} + V' - 6H^2 F' + 18H^3 F_1 \dot{\phi} + 24H^4 F_2' \simeq 0 \quad (4.8)$$

donde el potencial da la contribución dominante al parámetro de Hubble, mientras que la dinámica slow-roll del campo escalar es determinada por las últimas dos ecuaciones. El número aproximado de e-folds puede determinarse de la siguiente expresión

$$N = \int_{\phi_{ini}}^{\phi_{end}} \frac{\frac{V}{3F} (1 + 6\frac{V}{3F} F_1)}{2\frac{V}{3F} (F' - 4\frac{V}{3F} F_2') - \frac{1}{3} V'} d\phi \quad (4.9)$$

A continuación procederemos a estudiar las ecuaciones de perturbaciones en este sistema

4.1.1. Perturbaciones escalares

Un cuidadoso estudio de perturbaciones muestra que a pesar de la presencia de acoplamientos no minimales, la ecuación de movimiento de las fluctuaciones primordiales puede ser escrita en la forma Mukhanov-Sasaki (detalles en apéndice D). Es decir, trabajando en términos de la variable $u = z_S \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ es la perturbación de curvatura, se obtiene que la ecuación de movimiento para un modo k es

$$u_k'' + \left(c_S^2 k^2 - \frac{z_S''}{z_S} \right) u_k = 0 \quad (4.10)$$

donde la prima indica diferenciación con respecto al tiempo conforme η , y las expresiones de c_S y z_S estas dadas por

$$c_S^2 \equiv \frac{F_S}{G_S}$$

$$z_S \equiv a \sqrt{2G_S}$$

siendo

$$G_S \equiv \frac{\Sigma}{\Theta^2} G_T^2 + 3G_T \quad (4.11)$$

$$F_S \equiv \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\Theta} G_T^2 \right) - F_T \quad (4.12)$$

con Σ , Θ , F_T y G_T dados por

$$\Sigma \equiv -3FH^2 - 3H\dot{F} + 48H^3\dot{F}_2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 18F_1H^2\dot{\phi}^2 \quad (4.13)$$

$$\Theta \equiv FH + \frac{1}{2}\dot{F} - 12H^2\dot{F}_2 - 3F_1H\dot{\phi}^2 \quad (4.14)$$

$$F_T \equiv F + F_1\dot{\phi}^2 - 8\ddot{F}_2 \quad (4.15)$$

$$G_T \equiv F - 8H\dot{F}_2 - F_1\dot{\phi}^2 \quad (4.16)$$

Nótese que la presencia de acoplamientos conduce a una expresión no trivial para la velocidad del sonido, c_S , la cual se reduce a la unidad cuando $F_1 \rightarrow 0$ y $F_2 \rightarrow 0$. Soluciones exactas de la ecuación de Mukhanov-Sasaki (4.10) son expresadas en términos de funciones Hankel, esto es:

$$u_k = \sqrt{|\eta|} \left(c_1 H_{\nu_S}^{(1)}(c_S k |\eta|) + c_2 H_{\nu_S}^{(2)}(c_S k |\eta|) \right)$$

donde $\nu_S^2 = 1/4 + \eta^2 z_S''/z_S$. Debido a que la cuantización de perturbaciones requiere que en escalas de subhorizonte ($c_S k |\eta| \gg 1$) la solución tienda asintóticamente hacia la condición de Bunch-Davies, se encuentra que las constantes de integración están dadas por $c_1 = \sqrt{\pi/4} \exp(i\pi(\nu_S + 1/2)/2)$ y $c_2 = 0$. Por consiguiente, la solución en escalas de superhorizonte ($c_S k |\eta| \ll 1$) toma la forma:

$$u_k = \left[2^{\nu_S-3/2} \frac{\Gamma(\nu_S)}{\Gamma(3/2)} \right] e^{(i\pi/2)(\nu_S-1/2)} \sqrt{\frac{|\eta|}{2}} (c_S k |\eta|)^{-\nu_S} \quad (4.17)$$

Continuando con la lógica presentada en el capítulo 1, vemos que el espectro de potencias de las perturbaciones de curvatura es

$$P_R = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2 = \left[2^{\nu_S-3/2} \frac{\Gamma(\nu_S)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \frac{H^2}{8\pi^2 G_S c_S^{2\nu_S} (aH\eta)^2} (k |\eta|)^{3-2\nu_S} \quad (4.18)$$

La dependencia de escala puede calcularse a través del índice espectral escalar, n_S , el cual es definido por

$$n_S - 1 \equiv \left[\frac{d \ln P_R}{d \ln k} \right] = 3 - 2\nu_S \quad (4.19)$$

Asumiendo un comportamiento cuasiconstante de los parámetros ϵ_i , se tiene

$$\eta \approx -\frac{1}{aH} \frac{1}{1 - \epsilon_0} \quad (4.20)$$

Aproximando a primer orden en slow-roll y usando la ecuación anterior, se obtienen las siguientes expresiones para G_S , c_S y z_S''/z_S [103, 102]:

$$G_S \approx F \left(\epsilon_0 + \frac{1}{2}\ell_0 - \frac{1}{2}\Delta_0 \right) \quad (4.21)$$

$$c_S^2 \approx 1 + \frac{\frac{4}{3}k_0 (\ell_0 - \Delta_0 - \frac{4}{3}k_0) - \frac{4}{3}k_0\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \ell_0 - \Delta_0} \quad (4.22)$$

$$\frac{z_S''}{z_S} = \frac{1}{\eta^2} \left(\nu_S^2 - \frac{1}{4} \right) \approx \frac{1}{\eta^2} \left[2 + 3\epsilon_0 + \frac{3}{2}\ell_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{\epsilon_0\epsilon_1 + \frac{1}{2}\ell_0\ell_1 - \frac{1}{2}\Delta_0\Delta_1}{\epsilon_0 + \frac{1}{2}\ell_0 - \frac{1}{2}\Delta_0} \right) \right] \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la expresión aproximada del índice espectral escalar a primer orden de slow-roll es

$$n_S - 1 = 3 - 2\nu_S \approx -2\epsilon_0 - \ell_0 - \frac{\epsilon_0\epsilon_1 + \frac{1}{2}\ell_0\ell_1 - \frac{1}{2}\Delta_0\Delta_1}{\epsilon_0 + \frac{1}{2}\ell_0 - \frac{1}{2}\Delta_0} \quad (4.24)$$

4.1.2. Perturbaciones tensoriales

Ahora se obtendrá el espectro de potencias de perturbaciones tensoriales, h_{ij} , generadas durante la inflación (detalles en apéndice D). Como se menciona en el capítulo 1, estas perturbaciones de la métrica son tensores simétricos, de traza nula y divergencia nula, es decir, $h_{ij} = h_{ji}$, $h_{ii} = 0$ y $\partial_i h_{ij} = 0$. Trabajando en términos de la variable $u_{ij} = z_T h_{ij}$, donde $z_T = a\sqrt{G_T}$, se obtiene que la ecuación de movimiento para un modo k es

$$u_{ij}'' + \left(c_T^2 k^2 - \frac{z_T''}{z_T} \right) u_{ij} = 0 \quad (4.25)$$

donde la velocidad de los modos tensoriales, c_T , esta dada por

$$c_T^2 = \frac{F_T}{G_T} = \frac{F + F_1\dot{\phi}^2 - 8\ddot{F}_2}{F - 8H\dot{F}_2 - F_1\dot{\phi}^2} \quad (4.26)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la subsección anterior, se obtiene que la solución de (4.25) en escalas de superhorizonte es:

$$u_{ij} = \left[2^{\nu_T-3/2} \frac{\Gamma(\nu_T)}{\Gamma(3/2)} \right] e^{(\frac{i\pi}{2}(\nu_T-\frac{1}{2}))} \sqrt{\frac{|\eta|}{2}} (c_T k |\eta|)^{-\nu_T} e_{ij} \quad (4.27)$$

donde e_{ij} es un tensor de polarización y $\nu_T^2 = 1/4 + \eta^2 z_T''/z_T$. El correspondiente espectro de perturbaciones tensoriales está dado por:

$$P_T = \left[2^{\nu_T-3/2} \frac{\Gamma(\nu_T)}{\Gamma(3/2)} \right]^2 \frac{2H^2}{\pi^2 G_T (aH\eta)^2 c_T^{2\nu_T}} (k |\eta|)^{3-2\nu_T} \quad (4.28)$$

Con esto, el índice espectral tensorial puede ser calculado de la siguiente forma:

$$n_T \equiv \left[\frac{d \ln P_T}{d \ln k} \right] = 3 - 2\nu_T \quad (4.29)$$

Otro parámetro importante que contiene información sobre las perturbaciones es la razón escalar-tensor, r , la cual se define como la razón entre el espectro tensorial y escalar:

$$r = \frac{P_T}{P_S} = 16 \left(\frac{c_S}{c_T} \right)^3 \frac{G_S}{G_T} \quad (4.30)$$

Expandiendo a primer orden en slow-roll y usando la ecuación (4.20), se obtiene las siguientes relaciones [103, 102]

$$G_T = F \left(1 - \Delta_0 - \frac{1}{3}k_0 \right) \quad (4.31)$$

$$c_T^2 = 1 + \frac{\frac{2}{3}k_0 + \Delta_0 - \Delta_0(\Delta_1 + \epsilon_0 + \ell_0)}{1 - \Delta_0 - \frac{1}{3}k_0} \quad (4.32)$$

$$\frac{z_T''}{z_T} = \frac{1}{\eta^2} \left(\nu_T^2 - \frac{1}{4} \right) \approx \frac{1}{\eta^2} \left[2 + 3\epsilon_0 + \frac{3}{2}\ell_0 \right] \quad (4.33)$$

Con esto, las expresiones para n_T y r en términos de parámetros slow-roll están dadas por [103, 102]

$$n_T = 3 - 2\nu_T \approx -2\epsilon_0 - \ell_0 \quad (4.34)$$

$$r \approx 8(2\epsilon_0 + \ell_0 - \Delta_0) \quad (4.35)$$

A continuación ejemplificaremos este enfoque usando algunos potenciales inflacionarios muy conocidos en la literatura, a saber, potenciales tipo ley de potencias [103] y exponencial [102]. Luego confrontaremos los índices observacionales resultantes con los últimos datos del Planck y del BICEP2/Keck-Array.

4.1.3. Ejemplos explícitos

En los primeros ejemplos usaremos los resultados de las subsecciones previas para investigar la viabilidad de una clase de potencial inflacionario de la forma $V \sim \phi^n$. Después estudiaremos casos de inflación exponencial, donde mostraremos mecanismos que permiten obtener una salida del régimen slow-roll. En todos los ejemplos ilustrativos asumiremos que ϕ se mide en unidades de masa de Planck, la cual es definida por $M_p \equiv \frac{1}{\kappa}$. Además, por simplicidad, tomaremos unidades tales que $M_p = 1$.

Potencial cuartico con $V \sim \phi^4$, $F(\phi) \sim M_p^2 - \xi\phi^2$, $F_1(\phi) \sim \phi^{-2}$ y $F_2(\phi) \sim 0$

De acuerdo a los últimos datos del Planck (2018), los potenciales cuarticos no son compatibles con las observaciones, por tanto estudiaremos la viabilidad del modelo en presencia de los acoplamientos cinético y no mínimo. Para empezar, considérese las siguientes funciones:

$$V(\phi) = V_0\phi^4, \quad F(\phi) = M_p^2 - \xi\phi^2, \quad F_1(\phi) = \gamma/\phi^2, \quad F_2(\phi) = 0 \quad (4.36)$$

donde V_0 , ξ y γ son constantes adimensionales. Si este modelo es fenomenológicamente viable, entonces debe satisfacer las restricciones provenientes del Planck y del BICEP2/Keck-Array. Después de una revisión exhaustiva del espacio de parámetros, es evidente que este caso es compatible con las observaciones en un amplio rango de valores libres. Para ilustrar

esto más claramente, en la Fig. 4.1 se muestra el comportamiento del índice espectral y de la relación escalar-tensor como funciones de $V_0\gamma$ para varios valores del parámetro ξ

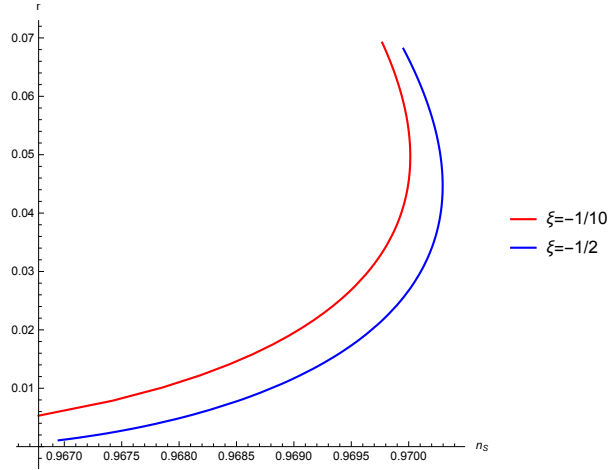


FIGURA 4.1. Curvas paramétricas de n_s y r como función de $V_0\gamma$, tomando 60 e-folds de inflación y valores pequeños de ξ . Para $\xi = -1/10$, el valor del producto $V_0\gamma$ está en el rango $[0, 4]$, mientras que para $\xi = -1/2$, el producto $V_0\gamma$ toma valores en el rango $[0, 100]$. En el caso $\xi = -1/10$, el valor del campo inicial está en el intervalo $[3.87M_p, 22M_p]$, mientras que en el caso $\xi = -1/2$, el campo inicial toma valores en el intervalo $[1.69M_p, 22M_p]$. Nótese que en amplios rangos de valores de $V_0\gamma$, los índices observacionales son compatibles con los últimos datos del Planck (2018) y BICEP2/Keck-Array.

Potencial cuadrático con $V \sim \phi^2$, $F(\phi) \sim M_p^2$, $F_1(\phi) \sim \gamma$ y $F_2(\phi) \sim \phi^{-2}$

Para visualizar el efecto combinado de los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet, considérese el siguiente modelo:

$$F = M_p^2, \quad V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad F_1(\phi) = \gamma, \quad F_2(\phi) = \frac{\eta}{\phi^2} \quad (4.37)$$

donde la constante m tiene dimensión de $masa^1$, la constante η tiene dimensión de $masa^2$ y la constante γ tiene dimensión de $masa^{-2}$. Los parámetros slow-roll (4.1)-(4.3), toman la forma

$$\epsilon_0 = \frac{6 - 8m^2\eta}{3\phi^2(1 + m^2\gamma\phi^2)}, \quad \epsilon_1 = \frac{4(3 - 4m^2\eta)(1 + 2m^2\gamma\phi^2)}{3\phi^2(1 + m^2\gamma\phi^2)^2} \quad (4.38)$$

$$\Delta_0 = \frac{16m^2\eta(3 - 4m^2\eta)}{9\phi^2(1 + m^2\gamma\phi^2)}, \quad \Delta_1 = \frac{4(3 - 4m^2\eta)(1 + 2m^2\gamma\phi^2)}{3\phi^2(1 + m^2\gamma\phi^2)^2}, \quad (4.39)$$

donde el producto $m^2\eta$ esta medido en unidades de M_p^4 , mientras que el producto $m^2\gamma$ es adimensional. El campo escalar en el fin de la inflación puede ser encontrado fácilmente imponiendo la condición $\epsilon_0(\phi_{end}) = 1$, de donde se obtiene

$$\phi_{end}^2 = \frac{1}{6m^2\gamma} \left[\sqrt{72m^2\gamma - 96m^4\gamma\eta + 9} - 3 \right] \quad (4.40)$$

De la ecuación (4.9), se obtiene que el número de e-foldings está dado por

$$N = \frac{3\phi^2(2 + m^2\gamma\phi^2)}{8(4m^2\eta - 3)} \Big|_{\phi_{ini}}^{\phi_{end}} \quad (4.41)$$

la cual permite encontrar ϕ_{ini} para un valor de N . De (4.24), (4.35) y (4.39) se encuentran las siguientes expresiones para los índices observacionales

$$n_s = \frac{3m^4\gamma\phi^2(\gamma\phi^4 + 16\eta) + 6m^2\gamma\phi^2(\phi^2 - 6) + 3\phi^2 + 32m^2\eta - 24}{3\phi^2(1 + m^2\gamma\phi^2)^2} \Big|_{\phi_{ini}} \quad (4.42)$$

$$r = \frac{3\phi(1 + m^2\gamma\phi^2)}{8m^2\eta - 6} \Big|_{\phi_{ini}} \quad (4.43)$$

Tomando $N = 60$, es posible obtener un comportamiento viable n_s y r en varios rangos de $m^2\gamma$. En la Fig. 4.2 se muestran curvas paramétricas de los índices observacionales para $1 < m^2\gamma < 5$.

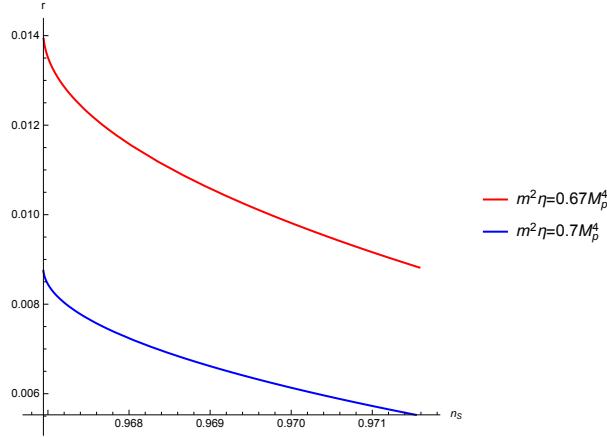


FIGURA 4.2. Curvas paramétricas de n_s y r como función de $m^2\gamma$, tomando 60 e-folds de inflación y $m^2\eta = 0.67, 0.7$ (unidades de M_p^4). Para $m^2\eta = 0.67$, el valor del producto $m^2\gamma$ está en el rango $[0, 0.29]$, mientras que para $m^2\eta = 0.7$, el producto $m^2\gamma$ toma valores en el rango $[0, 0.45]$. En el caso $m^2\eta = 0.67$, los valores del campo inicial están en el intervalo $[3.2M_p, 5.1M_p]$, mientras que en el caso $m^2\eta = 0.7$, el campo inicial toma valores en el intervalo $[2.5M_p, 4.0M_p]$. Nótese la compatibilidad con las observaciones en estos rangos de parámetros.

Potencial monomial con $V \sim \phi^n$, $F(\phi) \sim M_p^2$, $F_1(\phi) \sim \phi^{-n}$ y $F_2(\phi) \sim \phi^{-n}$

En este ejemplo se considera un modelo general tipo power-law, cuyo potencial y acoplamientos están dados por

$$F = M_p^2, \quad V(\phi) = \frac{\lambda}{n}\phi^n, \quad F_1(\phi) = \frac{\gamma}{\phi^n}, \quad F_2(\phi) = \frac{\eta}{\phi^n} \quad (4.44)$$

Los parámetros slow-roll para este modelo toman la forma

$$\epsilon_0 = \frac{n^2(3n - 8\eta\lambda)}{6(n + 2\gamma\lambda)\phi^2}, \quad \epsilon_1 = \frac{2n(3n - 8\eta\lambda)}{3(n + 2\gamma\lambda)\phi^2}, \quad \Delta_0 = \frac{8n\eta\lambda(3n - 8\eta\lambda)}{9(n + 2\gamma\lambda)\phi^2}, \quad (4.45)$$

$$\Delta_1 = \frac{2n(3n - 8\eta\lambda)}{3(n + 2\gamma\lambda)\phi^2}, \quad k_0 = \frac{n\gamma\lambda(3n - 8\eta\lambda)^2}{9(n + 2\gamma\lambda)\phi^2}, \quad k_1 = \frac{2n(3n - 8\eta\lambda)}{3(n + 2\gamma\lambda)\phi^2} \quad (4.46)$$

donde $\eta\lambda$ está en unidades de M_p^4 , mientras que $\gamma\lambda$ está en unidades de M_p^4 . El campo escalar en el fin de la inflación viene dado por

$$\phi_{end} = \frac{n\sqrt{3n - 8\eta\lambda}}{\sqrt{6n + 12\gamma\lambda}} \quad (4.47)$$

De la ecuación (4.9), se obtiene que el número de e-folds es

$$N = -\frac{3(n + 2\gamma\lambda)}{2n(3n - 8\eta\lambda)}\phi^2 \Big|_{\phi_{ini}}^{\phi_{end}} \quad (4.48)$$

Reemplazando (4.47) en la ecuación anterior, se encuentra una expresión explícita para la condición inicial del campo escalar:

$$\phi_{ini} = \left(\frac{(4N + n)(3n^2 - 8n\eta\lambda)}{6n + 12\gamma\lambda} \right)^{1/2} \quad (4.49)$$

Con esta condición inicial se obtiene que los índices inflacionarios (4.24) y (4.35) están dados por

$$n_S = \frac{(6\gamma\lambda + 16n\eta\lambda + 3n)\phi^2 - 3n^3 - (6 - 8\eta\lambda)n^2}{3(n + 2\gamma\lambda)\phi^2} \Big|_{\phi_{ini}} = \frac{4N - n - 4}{4N + n} \quad (4.50)$$

$$r = \frac{8n(3n - 8\eta\lambda)^2}{9(n + 2\gamma\lambda)\phi^2} \Big|_{\phi_{ini}} = \frac{16(3n - 8\eta\lambda)}{3(4N + n)} \quad (4.51)$$

De la ecuación (4.50) se ve que la expresión obtenida del índice espectral escalar es la misma que se obtiene en el caso de inflación caótica. Sin embargo, la expresión (4.50) muestra que la relación escalar-tensor depende del potencial y el acoplamiento Gauss-Bonnet, pero es independiente del acople cinético. Esto implica que el parámetro γ puede usarse para reducir los valores del campo tanto en el inicio como en el fin de la inflación. Antes de seguir, es conveniente definir los siguientes parámetros: $\alpha \equiv \eta\lambda$ y $\beta \equiv \gamma\lambda$. En la tabla 4.1 se muestran valores de los observables n_S y r en varios rangos de α , tomando 60 e-folds de inflación y potencias enteras y fraccionarias. Cabe destacar que el modelo de campo escalar canónico con $n = 2$ es descartado por las últimas observaciones, sin embargo, en presencia del acoplamiento Gauss-Bonnet, los índices inflacionarios toman valores fenomenológicamente viables. En todos los casos mostrados en esta tabla, los valores pequeños de r son consistentes con las restricciones observacionales. Debido a que β es un parámetro libre, es posible usar esta libertad para obtener valores deseados de ϕ_{ini} y ϕ_{end} .

TABLA 4.1. Índices inflacionarios en algunos rangos del parámetro α .

Potencia n	n_S	Rango de α	Rango de r
4	0.9508	$1 \leq \alpha \leq 1.3$	$0.0874 \geq r \geq 0.0349$
3	0.959	$0.7 \leq \alpha \leq 1.1$	$0.0746 \geq r \geq 0.0044$
2	0.9669	$0.3 \leq \alpha \leq 0.7$	$0.0746 \geq r \geq 0.0088$
4/3	0.9724	$0.01 \leq \alpha \leq 0.4$	$0.0866 \geq r \geq 0.0177$
1	0.9751	$10^{-3} \leq \alpha \leq 0.3$	$0.0664 \geq r \geq 0.0133$
2/3	0.9778	$10^{-4} \leq \alpha \leq 0.2$	$0.0443 \geq r \geq 0.0089$

Potencial exponencial en presencia del acoplamiento Gauss-Bonnet

Considérese el siguiente modelo exponencial definido por las siguientes funciones

$$F(\phi) = M_p^2, \quad V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}, \quad F_1(\phi) = 0, \quad F_2(\phi) = f_g e^{-\eta\kappa\phi}, \quad (4.52)$$

las cuales conllevan a los siguientes parámetros slow-roll

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{6} \lambda \left(8\eta\beta e^{-(\lambda+\eta)\phi} + 3\lambda \right) \\ \epsilon_1 &= -\frac{8}{3} \beta\eta (\lambda + \eta) e^{-(\lambda+\eta)\phi} \\ \Delta_0 &= -\frac{8}{9} \beta\eta \left(3\lambda e^{(\lambda+\eta)\phi} + 8\beta\eta \right) e^{-2(\lambda+\eta)\phi} \\ \Delta_1 &= -\frac{1}{3} (\lambda + \eta) \left(3\lambda e^{(\lambda+\eta)\phi} + 16\beta\eta \right) e^{-(\lambda+\eta)\phi} \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde el parámetro β , definido por $\beta = V_0 f_g$, está en unidades de M_p^4 . Resultados numéricos muestran que la condición $\epsilon_0(\phi_{end}) \sim 1$ no es apropiada para obtener una salida viable de la inflación, ya que los parámetros slow-roll $|\epsilon_1|$, $|\Delta_0|$ y $|\Delta_1|$ toman valores grandes mucho antes de finalizar la etapa inflacionaria. Esta problema puede trabajarse asumiendo que el régimen slow-roll finalice cuando $|\Delta_0(\phi_{end})| \sim 1$. De esta manera se obtiene que el campo escalar en el fin de la inflación es

$$\phi_{end} = \frac{1}{\lambda + \eta} \ln \left[\frac{4}{3} \left(\eta\lambda\beta + \sqrt{\beta^2\eta^2(\lambda^2 + 4)} \right) \right]. \quad (4.54)$$

De la ecuacion (4.9) se sigue que el campo escalar inicial toma el valor

$$\phi_{ini} = \frac{1}{\lambda + \eta} \ln \left[\frac{1}{3\lambda} \left(4e^{-\lambda N(\lambda+\eta)} - 8\beta\eta \right) \left(\eta\beta(\lambda^2 + 2) + \lambda\sqrt{\beta^2\eta^2(\lambda^2 + 4)} \right) \right]. \quad (4.55)$$

Esta condición inicial del campo escalar conduce a las siguientes expresiones de los índices observacionales:

$$n_S = 1 - \lambda^2 + \frac{2\beta\eta\lambda(2\eta + \lambda)e^{\lambda N(\lambda+\eta)}}{\lambda\sqrt{\beta^2\eta^2(\lambda^2 + 4)} + \beta\eta(2 - 2e^{\lambda N(\lambda+\eta)} + \lambda^2)}, \quad (4.56)$$

$$r = \frac{8\lambda^2 \left(\beta\eta(\lambda^2 + 2) + \lambda\sqrt{\beta^2\eta^2(\lambda^2 + 4)} \right)^2}{\left(\lambda\sqrt{\beta^2\eta^2(\lambda^2 + 4)} + \beta\eta(2 - 2e^{\lambda N(\lambda+\eta)} + \lambda^2) \right)^2} \quad (4.57)$$

Para estudiar la compatibilidad con las observaciones, en la Fig. 4.3 se muestran curvas paramétricas de n_S y r como función N en el intervalo $50 \leq N \leq 60$, tomando $\eta = 1$ y $\beta = -1$. Nótese que las curvas correspondientes a los casos $\lambda = -0.001$ y $\lambda = -0.004$ están dentro de las restricciones observacionales. Es importante destacar que el enfoque utilizado en este ejemplo es compatible con el formalismo slow-roll, ya que los parámetros $|\epsilon_i|$ y $|\Delta_i|$ se mantienen pequeños durante la inflación. Además, los valores obtenidos del potencial y del parámetro de Hubble fueron de orden $H \sim 10^{-6} M_p$ y $V^{1/4} \sim 10^{-3} M_p$, los cuales son consistentes con las cotas observacionales.

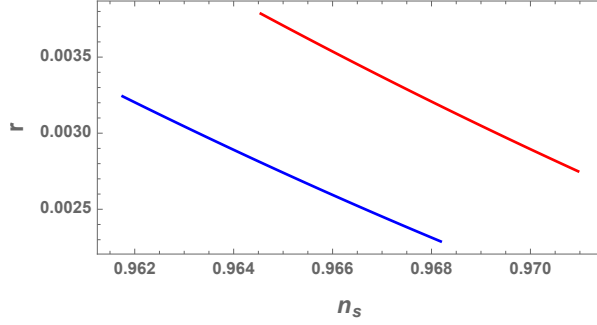


FIGURA 4.3. Representación paramétrica de n_s y r como función del número de e-folds en el intervalo $50 \leq N \leq 60$, tomando $\eta = 1$ y $\beta = -1$. La curva azul corresponde al caso $\lambda = -0.001$, mientras que la curva roja representa el caso a $\lambda = -0.004$. Ambas curvas están dentro de la región restringida por las últimas observaciones.

Potencial exponencial en presencia de acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet

Para estudiar el efecto combinado de los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet, considérese el siguiente modelo

$$F(\phi) = M_p^2, \quad V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}, \quad F_1(\phi) = f_k e^{-\lambda\kappa\phi}, \quad F_2(\phi) = f_g e^{\lambda\kappa\phi}. \quad (4.58)$$

donde V_0 , f_k , f_g y λ son constantes. Para este modelo se obtienen los siguientes parámetros slow-roll

$$\epsilon_0 = \frac{(3-8\beta)\lambda^2 e^{2\lambda\phi}}{6(e^{2\lambda\phi} + 2\alpha)}, \quad k_0 = \frac{\alpha(3-8\beta)^2 \lambda^2 e^{2\lambda\phi}}{9(e^{2\lambda\phi} + 2\alpha)^2}, \quad \Delta_0 = \frac{8\beta(3-8\beta)\lambda^2 e^{2\lambda\phi}}{9(e^{2\lambda\phi} + 2\alpha)},$$

$$\epsilon_1 = \frac{4\alpha(3-8\beta)\lambda^2 e^{2\lambda\phi}}{3(e^{2\lambda\phi} + 2\alpha)^2}, \quad k_1 = \frac{2(8\beta-3)\lambda^2 e^{2\lambda\phi}(e^{2\lambda\phi} - 2\alpha)}{3(e^{2\lambda\phi} + 2\alpha)^2}, \quad \Delta_1 = \frac{4\alpha(3-8\beta)\lambda^2 e^{2\lambda\phi}}{3(e^{2\lambda\phi} + 2\alpha)^2},$$

donde los parámetros α y β son definidos por $\alpha \equiv V_0 f_k$ y $\beta \equiv V_0 f_g$. Asumiendo que la inflación termina cuando $|\Delta_1(\phi_{end})| \sim 1$, se obtiene que el campo escalar en el final de la expansión inflacionaria está dado por

$$\phi_{end} = \frac{1}{2\lambda} \ln \left[\frac{2}{3} \left(\alpha((3-8\beta)\lambda^2 - 3) + \sqrt{\alpha^2 \lambda^2 (8\beta-3)(6 + (8\beta-3)\lambda^2)} \right) \right] \quad (4.59)$$

Reemplazando esta expresión en (4.9) se obtiene que el campo escalar inicial es

$$\phi_{ini} = \frac{1}{3}(8\beta-3)(N - f_{end})\lambda + \frac{1}{2\lambda} W \left[2\alpha e^{-\frac{2}{3}(8\beta-3)(N-f_{end})\lambda^2} \right], \quad (4.60)$$

donde W es la función Lambert y f_{end} está dado por

$$f_{end} = \frac{3}{\lambda(8\beta-3)} \left(\frac{\alpha e^{-2\lambda\phi_{end}}}{\lambda} - \phi_{end} \right)$$

Partiendo de esta condición inicial, es posible obtener una dinámica consistente con el formalismo slow-roll. Por ejemplo, en la Fig. 4.4 se muestra el comportamiento de los parámetros slow-roll entre ϕ_{ini} y ϕ_{end} , tomando 60 e-folds de inflación con $\lambda = 1.42$, $\alpha = 10^3$ y $\beta = -0.1$. Nótese que la condición $|\Delta_1(\phi_{end})| \sim 1$ es adecuada para finalizar

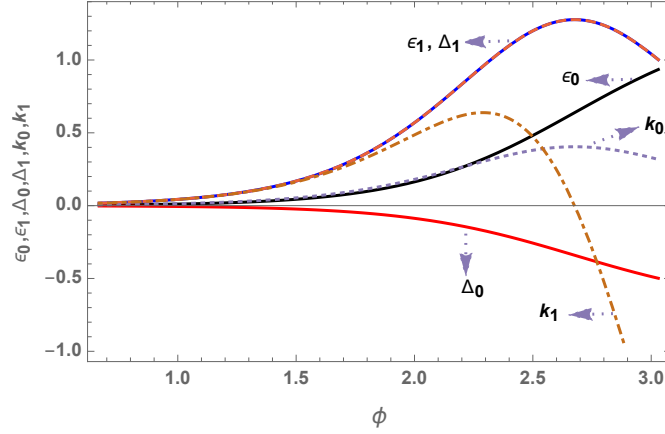


FIGURA 4.4. Comportamiento de los parámetros slow-roll entre $\phi_{ini} \simeq 0.67M_p$ y $\phi_{end} \simeq 2.3M_p$, tomando $N = 60$ e-folds, $\lambda = 1.42$, $\alpha = 10^3$ y $\beta = -0.1$. La condición $|\Delta_1(\phi_{end})| \sim 1$ es adecuada para finalizar la expansión inflacionaria

el régimen inflacionario. Para confrontar este ejemplo con los datos observacionales, calculemos el índice espectral escalar y la relación escalar tensor. Reemplazando (4.60) en las ecuaciones (4.24) y (4.35), obtenemos las siguientes expresiones para dichos índices inflacionarios:

$$n_s = 1 - \frac{(3 - 8\beta)\lambda^2 \left(1 + 3W \left[2\alpha e^{-\frac{2}{3}(8\beta-3)(N-f_{end})\lambda^2}\right]\right)}{3 \left(1 + 3W \left[2\alpha e^{-\frac{2}{3}(8\beta-3)(N-f_{end})\lambda^2}\right]\right)^2} \quad (4.61)$$

$$r = \frac{8\lambda^2}{9\alpha^2(2\alpha + 1)} \left(3\alpha + 4\beta W \left[2\alpha e^{-\frac{2}{3}(8\beta-3)(N-f_{end})\lambda^2}\right]\right)^2 \quad (4.62)$$

En la Fig. 4.5 se muestran curvas paramétricas de n_s y r como función del número de e-folds en el rango $50 \leq N \leq 60$, tomando $\beta = -0.1$ y $\beta = -0.05$. De aquí se ve que estos valores de β son compatibles con las observaciones de la relación escalar tensor.

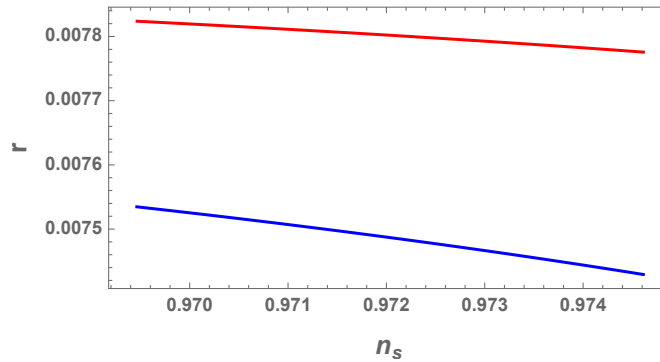


FIGURA 4.5. Índices observacionales n_s y r como función de N en el intervalo $50 \leq N \leq 60$, tomando $\lambda = 1.42$ y $\alpha = 10^3$. La curva azul corresponde al caso $\beta = -0.1$, mientras que la curva roja representa el caso a $\beta = -0.05$. En ambas curvas, la relación escalar tensor está dentro de las restricciones observacionales.

4.2. Velocidad de propagación de los modos tensoriales en presencia de acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet

La reciente detección de ondas gravitacionales (GW) generadas por la fusión de estrellas de neutrones en el sistema GW170817 [98, 99, 100], impone una fuerte restricción a la velocidad de estas ondas, c_T , la cual debe diferir de la velocidad de la luz en una parte de 10^{16} . En términos prácticos, estas observaciones han validado el hecho de que las ondas gravitacionales y electromagnéticas tienen la misma velocidad de propagación. De la expresión (4.26) se ve claramente que los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet contribuyen significativamente a la desviación de c_T con respecto a 1. Para estudiar esto más a fondo, considérese un modelo exponencial descrito por las siguientes funciones

$$F(\phi) = M_p^2, \quad V(\phi) = V_0 e^{-\alpha\kappa\phi/\sqrt{2}}, \quad F_1(\phi) = \zeta e^{\alpha\kappa\phi/\sqrt{2}}, \quad F_2(\phi) = \eta e^{\alpha\kappa\phi/\sqrt{2}} \quad (4.63)$$

donde V_0 , α , ζ , η son constantes. Usando las soluciones power-law (2.20), las ecuaciones de Friedmann (2.11) y (2.12) conllevan a las siguientes restricciones

$$\frac{3p^2}{\kappa^2} = \frac{1}{2}\phi_0^2 + V_0 t_0^2 + \frac{9\zeta p^2}{t_0^2}\phi_0^2 + \frac{48\eta p^3}{t_0^2}, \quad (4.64)$$

$$(3p-1)\phi_0^2 - 2V_0 t_0^2 + \frac{6\zeta p^2(3p-2)}{t_0^2}\phi_0^2 + \frac{48\eta p^3(p-1)}{t_0^2} = 0, \quad (4.65)$$

donde hemos asumido que $\alpha\kappa\phi_0 = 2\sqrt{2}$, la cual permite simplificar las potencias t^{-2} de cada termino. Antes de calcular c_T , definamos la anomalía en la velocidad de los modos tensoriales, α_T , como sigue

$$\alpha_T \equiv c_T^2 - 1 = \frac{\dot{\phi}^2 (F_1 - 4F_2'') - 4(\ddot{\phi} - \dot{\phi}H) F_2'}{F/2 - F_1\dot{\phi}^2/2 - 4\dot{\phi}H F_2'} \quad (4.66)$$

Para satisfacer la restricción observada en el GW170817 (es decir, $\alpha_T < 10^{-16}$), asumamos que $\alpha_T = 0$. Esta suposición impone la siguiente condición al modelo exponencial (4.63):

$$\left(\zeta - 4\eta \left(\frac{\alpha\kappa}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \dot{\phi}^2 - 4\eta (\ddot{\phi} - \dot{\phi}H) \frac{\alpha\kappa}{\sqrt{2}} = 0, \quad (4.67)$$

Esto garantiza la cancelación de la anomalía en la velocidad de los modos tensoriales, α_T , producida por los acoplamiento cinético y Gauss-Bonnet (en el caso exponencial). Reemplazando las soluciones power-law (2.20) en la ecuación anterior, obtenemos que los parámetros libres satisfagan la restricción [96]

$$\zeta\phi_0^2 + 8\eta(p-1) = 0. \quad (4.68)$$

Esto establece una relación entre las constantes η , ζ y ϕ_0 y el parámetro p , el cual tiene incorporado la naturaleza de la expansión del universo. Cabe mencionar que esta restricción no depende de las coordenadas del fondo FRW. Por lo tanto, si esta restricción se cumple, la velocidad de las GW se mantendrá igual a la velocidad de la luz durante toda la evolución temporal del universo homogéneo. Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.64),

(4.65), (4.68) con respecto a η , ζ y V_0 , obtenemos

$$V_0 = \frac{12p^2(p-1)^2M_p^2 + (p^2 - 6p + 1)\phi_0^2}{2(2p^2 - 3p - 1)t_1^2} \quad (4.69)$$

$$\zeta = \frac{(p-1)(2pM_p^2 - \phi_0^2)t_1^2}{2p(2p^2 - 3p - 1)\phi_0^2} \quad (4.70)$$

$$\eta = \frac{(\phi_0^2 - 2pM_p^2)t_1^2}{16p(2p^2 - 3p - 1)} \quad (4.71)$$

Nótese que el potencial siempre es positivo para valores de p relevantes en energía oscura ($p \gtrsim 20$). Para estimar la contribución de cada componente a la densidad de energía oscura, asumamos que $p \sim 20$, $H(t_0) = H_0$ y $\phi_0 = pM_p/4$. Con estos valores se encuentra que las contribuciones del potencial y los acoplamientos son de $\mathcal{O}(1)M_p^2H_0^2$ [96], lo cual es consistente con lo esperado en la fenomenología de tiempo tardío.

Las limitaciones de este enfoque radican en el hecho de que $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ y H están involucrados en la cancelación de la anomalía de la velocidad de las GW, haciendo que el planteamiento solo sea válido en el universo FRW. En general, esta cancelación debe ser en forma covariante, independiente de la métrica de fondo, ya que de lo contrario, la perturbaciones rompen la cancelación de la anomalía, conllevando a contribuciones residuales.

Una situación más realista debe incluir la presencia de materia. El efecto de este nuevo agregado puede ser cuantificado a través de correcciones perturbativas de la solución power-law. Mas precisamente, esta solución puede ser corregida como

$$\phi + \delta\phi, \quad H + \delta H,$$

donde las perturbaciones $\delta\phi$ y δH producen fluctuaciones en la anomalía de la velocidad de las ondas gravitacionales. Para estimar estas correcciones, partamos del hecho de que la densidad de materia pulverulenta, ρ_m , evoluciona como $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$. Por tanto, la fluctuación relativa de densidad puede escribirse como [96]

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -3\frac{\delta a}{a} = -3\delta N \quad (4.72)$$

donde N es el número de e-folds ($N = \ln a$). Por otro lado, la variación δt puede ser estimada a partir de las fluctuaciones de densidad, como sigue:

$$\delta t(N) = \frac{dt}{dN}\delta N = \frac{1}{H}\delta N,$$

lo cual permite estimar las siguientes variaciones

$$\delta H = -\frac{1}{t}\delta N, \quad \delta\phi = \frac{\phi_0}{p}\delta N, \quad \partial_t\delta\phi = -\frac{\phi_0}{pt}\delta N, \quad \partial_t\partial_t\delta\phi = \frac{2\phi_0}{pt^2}\delta N, \quad (4.73)$$

donde hemos usado $\partial_t\delta N = \delta H$. Con esto, la variación de la ecuación (4.66) conduce a la siguiente expresión [96]

$$\delta\alpha_T \simeq \frac{4p - 2\gamma^2}{p(4p^3 - 4p^2 - (p+1)\gamma^2)}(\delta N)^2, \quad (4.74)$$

donde $\gamma = \phi_0/M_p$. En este análisis cualitativo, es notable que α_T recibe correcciones de segundo orden en δN . En particular, si hacemos $\delta\rho/\rho \sim 10^{-1}$, $p = 20$, $\gamma = p/4$, obtenemos $\delta\alpha_T \sim 10^{-8}$, lo cual está fuera del rango de precisión obtenida en el sistema GW170817. Sin embargo, en el límite de constante cosmológica, $p \rightarrow \infty$, se obtiene $\delta\alpha_T \rightarrow 0$, lo cual satisface automáticamente las restricciones observacionales. Además, al hacer $\gamma = \sqrt{2p}$ en la expresión (4.74), obtenemos $\delta\alpha_T \rightarrow 0$. En cualquier caso, para satisfacer la cota observacional de $\delta\alpha_T$, se requiere un ajuste adicional de las condiciones iniciales.

Alternativamente, podemos aplicar argumentos de ajuste fino para satisfacer la restricción sobre α_T . Para esto, asumamos que $F_1 = 4F_2''$, y supongamos que la anomalía puede ser acotada por [96]

$$\alpha_T = \frac{8\mu^3 F_2'}{M_p^{*2}} \quad (4.75)$$

donde M_p^* está dada por $M_p^{*2} = M_p^2 - \dot{\phi}^2 F_1 + 8\dot{\phi} H F_2'$, y μ es una escala de masa que puede ser estimada a través de las cotas observacionales de $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$. Adicionalmente, es necesario considerar un decrecimiento exponencial del acoplamiento Gauss-Bonnet, es decir, $F_2 \sim \eta e^{-\gamma\kappa\phi}$, ya que la pequeñez de α_T condiciona fuertemente los valores del parámetro γ . Con esto, obtenemos que la restricción $\alpha_T < 10^{-16}$ puede escribirse como

$$\frac{8\mu^3 \gamma \eta}{M_p M_p^{*2}} e^{-\frac{\gamma\phi}{M_p}} < 10^{-16}. \quad (4.76)$$

Teniendo en cuenta las cotas observacionales sobre el campo escalar, podemos asumir que $\mu^3 \sim M_p H_0^2$ y $\phi \sim M_p$. Entonces, en el universo tardío, la restricción (4.76) toma la forma

$$\alpha_T \sim \frac{8H_0^2 \gamma \eta}{M_p^{*2}} e^{-\gamma} < 10^{-16}. \quad (4.77)$$

Para hacer un progreso adicional en la estimación de la anomalía, podemos tomar $M_p^* \sim M_p$ y $\eta \sim M_p^2 H_0^{-2}$. Esto conduce a la restricción $\gamma e^{-\gamma} < 10^{-16}$, lo cual implica que $\gamma > 40$. Como consecuencia, las contribuciones de los acoplamientos a la energía oscura son reducidas por un factor de 10^{-16} . Es decir, el factor de amortiguamiento produce buenos resultados en la velocidad de las ondas gravitacionales, sin embargo, no es adecuado para dar una contribución relevante a la energía oscura.

Discutamos brevemente las implicaciones de una cancelación covariante de la anomalía α_T . Para que la restricción $\alpha_T = 0$ sea válida en cualquier métrica, es necesario la cancelación entre escalares o magnitudes tensoriales del mismo rango. En el presente modelo, esto conduce a las restricciones $F_1 = 4F_2''$ y $F_2' = 0$, las cuales dan lugar a un campo escalar canónico mínimamente acoplado. Una alternativa para retener los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet, consiste en tomar $F_1 = 4F_2''$ y asumir que F_2 tiene un efecto despreciable a escalas locales. Como la cancelación de la anomalía α_T es un efecto local, podríamos imponer la condición $F_2'(z=0) = 0$, la cual puede ser implementada con una parametrización de la forma $F_2(z) \sim c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$

En resumen, podemos concluir que en la métrica FRW, los acoplamientos cinético y GB pueden generar soluciones aceleradas que satisfagan la restricción $\alpha_T = 0$. En el contexto de ondas gravitacionales primordiales, el presente modelo constituye una buena alternativa para una evolución inflacionaria consistente con las observaciones del GW170817 [97]. Sin

embargo, en tiempo tardío, la restricción $\alpha_T = 0$ es válida siempre que las inhomogeneidades no produzcan correcciones por fuera de las cotas observacionales de c_T [96].

4.3. Implicaciones cosmológicas del formalismo de multiplicadores de Lagrange en presencia de acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet

Recientemente fue demostrado que el formalismo de multiplicadores de Lagrange conlleva a la eliminación de grados de libertad fantasma en teorías de gravedad $f(\mathcal{G})$ y $f(R, \mathcal{G})$ [140]. En esta sección extenderemos este enfoque adicionando explícitamente el acoplamiento cinético. Siguiendo la lógica presentada en [140, 104], presentaremos un mecanismo de reconstrucción de modelo a partir de cualquier escenario cosmológico. Luego demostraremos que los modelos reconstruidos conducen a una evolución inflacionaria fenomenológicamente viable.

4.3.1. Acción y ecuaciones de campo

En esta subsección haremos una breve revisión del formalismo de multiplicadores de Lagrange adoptando la notación y presentación de los trabajos [140, 104]. Para empezar, consideremos la siguiente acción con multiplicador de Lagrange λ en presencia de acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\chi) R + \lambda \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{\mu^4}{2} \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi) + h(\chi) \mathcal{G} + F_1(\chi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi \right], \quad (4.78)$$

donde μ es una constante con dimensión de masa, mientras que χ es un campo escalar dinámico con potencial $V(\chi)$. Nótese que las funciones $F_1(\chi)$, $F(\chi)$ y $h(\chi)$ están asociadas al acoplamiento cinético, no-mínimo y Gauss-Bonnet, respectivamente. A lo largo de esta sección asumiremos el caso mínimo para la función F , es decir, $F(\chi) = 1/\kappa^2$. Al variar la acción anterior con respecto a λ , obtenemos la restricción

$$0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{\mu^4}{2}, \quad (4.79)$$

la cual permite redefinir el potencial escalar $V(\chi)$ como sigue:

$$\tilde{V}(\chi) \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + V(\chi) = -\frac{\mu^4}{2} + V(\chi).$$

Con esto, la acción (4.78) puede reescribirse como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa^2} + \lambda \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{\mu^4}{2} \right) - \tilde{V}(\chi) + h(\chi) \mathcal{G} + F_1(\chi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi \right].$$

Variando la acción anterior con respecto a la métrica y al campo escalar, obtenemos las siguientes ecuaciones del campo gravitacional:

$$-\frac{1}{\kappa^2}G_{\mu\nu} - \lambda\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - g_{\mu\nu}\tilde{V}(\chi) + T_{\mu\nu}^{GB} + T_{\mu\nu}^K = 0, \quad (4.80)$$

$$-\nabla_\mu[\lambda\nabla^\mu\chi] - \tilde{V}'(\chi) + h'(\chi)G - F_1'(\chi)G_{\mu\nu}\partial^\mu\chi\partial^\nu\chi - 2F_1(\chi)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\chi = 0, \quad (4.81)$$

donde $T_{\mu\nu}^K$ corresponde a la variación del acoplamiento cinético, y $T_{\mu\nu}^{GB}$ surge de la variación del acoplamiento Gauss-Bonnet. Dichas variaciones pueden ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} = & 4\left([\nabla_\mu\nabla_\nu h(\chi)]R - g_{\mu\nu}[\nabla_\rho\nabla^\rho h(\chi)]R - 2[\nabla^\rho\nabla_\mu h(\chi)]R_{\nu\rho} - 2[\nabla^\rho\nabla_\nu h(\chi)]R_{\mu\rho} \right. \\ & \left. + 2[\nabla_\rho\nabla^\rho h(\chi)]R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}[\nabla^\rho\nabla^\sigma h(\chi)]R_{\rho\sigma} - 2[\nabla^\rho\nabla^\sigma h(\chi)]R_{\mu\rho\nu\sigma}\right), \\ T_{\mu\nu}^K = & g_{\mu\nu}R_{\lambda\gamma}F_1(\chi)\nabla^\lambda\chi\nabla^\gamma\chi + g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda(F_1(\chi)\nabla_\gamma\chi\nabla^\gamma\chi) - \nabla_\nu\nabla_\mu\left(F_1(\chi)\nabla_\lambda\chi\nabla^\lambda\chi\right) \\ & + RF_1(\chi)\nabla_\mu\chi\nabla_\nu\chi - 2F_1(\chi)\left(R_{\mu\lambda}\nabla^\lambda\chi\nabla_\nu\chi + R_{\nu\lambda}\nabla^\lambda\chi\nabla_\mu\chi\right) + G_{\mu\nu}F_1(\chi)\nabla_\lambda\chi\nabla^\lambda\chi \\ & + \nabla_\lambda\nabla_\mu\left(F_1(\chi)\nabla^\lambda\chi\nabla_\nu\chi\right) + \nabla_\lambda\nabla_\nu\left(F_1(\chi)\nabla^\lambda\chi\nabla_\mu\chi\right) - \nabla_\lambda\nabla^\lambda(F_1(\chi)\nabla_\mu\chi\nabla_\nu\chi) \\ & - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla_\gamma\left(F_1(\chi)\nabla^\lambda\chi\nabla^\gamma\chi\right). \end{aligned}$$

4.3.2. Cosmología FRW y reconstrucción

Para estudiar la dinámica cosmológica, consideremos la métrica plana FRW y asumamos que λ y χ sean espacialmente homogéneos, es decir, $\lambda = \lambda(t)$ y $\chi = \chi(t)$. Entonces, una solución de la Eq. (4.79) es

$$\chi = \mu^2 t. \quad (4.82)$$

Las componentes (00) and (11) de la ecuación (4.80) toman la forma

$$-\frac{3H^2}{\kappa^2} + \tilde{V}(\chi) + 9F_1(\chi)H^2\mu^4 - \lambda\mu^4 - 24H^3\mu^2h'(\chi) = 0, \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{3H^2}{\kappa^2} + \frac{2\dot{H}}{\kappa^2} - \tilde{V}(\chi) - \mu^4F_1(\chi)(3H^2 + 2\dot{H}) - 2H\mu^6F_1'(\chi) + 16H^3\mu^2h'(\chi) + 16H\dot{H}\mu^2h'(\chi) \\ + 8H^2\mu^4h''(\chi) = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Por otro lado, la ecuación (4.81) conduce a:

$$\mu^2\dot{\lambda} + 3H\lambda\mu^2 - 6\mu^2HF_1(\chi)(3H^2 + 2\dot{H}) - 3H^2\mu^4F_1'(\chi) + 24h'(\chi)H^2(H^2 + \dot{H}) - \tilde{V}'(\chi) = 0. \quad (4.85)$$

Despejando $\tilde{V}(\chi)$ y λ de la ecuaciones (4.83) and (4.84), obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\chi) = & \frac{3H^2}{\kappa^2} + \frac{2\dot{H}}{\kappa^2} - (3H^2 + 2\dot{H})F_1(\chi)\mu^4 - 2H\mu^6F_1'(\chi) + 16H^3\mu^2h'(\chi) + 16H\dot{H}\mu^2h'(\chi) \\ & + 8H^2\mu^4h''(\chi), \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\lambda = F_1(\chi)(6H^2 - 2\dot{H}) - 2\mu^2 H F_1'(\chi) - \frac{8h'(\chi)}{\mu^2}(H^3 - 2H\dot{H}) + \frac{2\dot{H}}{\kappa^2\mu^4} + 8H^2 h''(\chi), \quad (4.87)$$

donde en ambas expresiones las funciones $F_1(\chi)$ y $h(\chi)$ son arbitrarias. Como consecuencia, cualquier escenario cosmológico incorporado en el parámetro de Hubble puede ser obtenido en este modelo. Vale la pena ejemplificar esta técnica de reconstrucción con algunas cosmologías relevantes. A continuación mostraremos algunos ejemplos ilustrativos de este mecanismo de reconstrucción con soluciones viables de inflación y energía oscura.

Como primer ejemplo, consideremos la solución de De Sitter, cuya función de Hubble es constante, $H = H_0$. Para una escogencia arbitraria de las funciones $F_1(\chi)$ y $h(\chi)$, las ecuaciones (4.86) y (4.87) conducen a las siguientes expresiones para el potencial escalar y el multiplicador de Lagrange:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\chi) &= \frac{3H_0^2}{\kappa^2} - 3H_0^2\mu^4 F_1(\chi) - 2H_0\mu^6 F_1'(\chi) + 16H_0^3\mu^2 h'(\chi) + 8H_0^2\mu^4 h''(\chi), \\ \lambda &= 6H_0^2 F_1(\chi) - 2H_0\mu^2 F_1'(\chi) - \frac{8H_0^3 h'(\chi)}{\mu^2} + 8H_0^2 h''(\chi). \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo son las soluciones tipo power-law ($a \sim t^p$), las cuales son de especial interés ya que representan estados asintóticos en la expansión del universo. De las ecuaciones (4.86) y (4.87), encontramos que

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\chi) &= \frac{3p^2 - 2p}{\kappa^2 t^2} (1 - \kappa^2 \mu^4 F_1(\chi)) - \frac{2p\mu^6 F_1'(\chi)}{t} + \frac{16\mu^2 h'(\chi)(p^3 - p^2)}{t^3} + \frac{8p^2 \mu^4 h''(\chi)}{t^2}, \\ \lambda &= -\frac{2p}{\kappa^2 t^2 \mu^4} + \frac{2p F_1(\chi)}{t^2} + \frac{6p^2 F_1(\chi)}{t^2} - \frac{2p\mu^2 F_1'(\chi)}{t} - \frac{16p^2 h'(\chi)}{t^3 \mu^2} - \frac{8p^3 h'(\chi)}{t^3 \mu^2} + \frac{8p^2 h''(\chi)}{t^2}, \end{aligned}$$

donde $t = \frac{\chi}{\mu^2}$.

Otro ejemplo son las soluciones Little Rip. Este tipo soluciones representan una alternativa al Big Rip, ya que la densidad de energía oscura se incrementa con el tiempo pero sin hacer frente a singularidades en tiempo finito [133, 134]. Consideremos el comportamiento del parámetro de Hubble

$$H = H_L e^{\gamma t},$$

donde H_L y γ son constantes positivas. De la ecuación anterior se sigue que $\dot{H} > 0$, lo cual reproduce una fase phantom super acelerada, libre de singularidades futuras. Entonces, usando las ecuaciones (4.86) y (4.87), encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\chi) &= (3e^{2t\gamma} H_L^2 + 2e^{t\gamma} H_L \gamma) \left(\frac{1}{\kappa^2} - \mu^4 F_1(\chi) \right) - 2e^{t\gamma} H_L \mu^6 F_1'(\chi) + 8e^{2t\gamma} H_L^2 \mu^4 h''(\chi) \\ &\quad + 16\mu^2 h'(\chi)(e^{3t\gamma} H_L^3 + e^{2t\gamma} H_L^2 \gamma), \\ \lambda &= \frac{2e^{t\gamma} H_L \gamma}{\kappa^2 \mu^4} + F_1(\chi)(6e^{2t\gamma} H_L^2 - 2e^{t\gamma} H_L \gamma) - 2e^{t\gamma} H_L \mu^2 F_1'(\chi) + 8e^{2t\gamma} H_L^2 h''(\chi) \\ &\quad - \frac{h'(\chi)(8e^{3t\gamma} H_L^3 - 16e^{2t\gamma} H_L^2 \gamma)}{\mu^2}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde $t = \frac{\chi}{\mu^2}$.

Finalmente, una evolución fenomenológicamente interesante es la solución quasi-de Sitter, cuya función de Hubble es [39]

$$H = H_0 - H_i(t - t_k), \quad (4.89)$$

donde H_0 y H_i son constantes que controlan las escalas de energía durante la inflación, y t_k es el instante de tiempo en el que los modos de curvatura primordial salen del horizonte. En general, estos parámetros son fuertemente restringidos por los datos observacionales. Reemplazando (4.89) en las ecuaciones (4.86) y (4.87), obtenemos las siguientes expresiones para el potencial y el multiplicador Lagrange:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\chi) = & -\frac{2H_i}{\kappa^2} + \frac{3(H_0 - H_i(t - t_k))^2}{\kappa^2} + 2H_i\mu^4 F_1(\chi) - 3(H_0 - H_i(t - t_k))^2\mu^4 F_1(\chi) \\ & - 2(H_0 - H_i(t - t_k))\mu^6 F_1'(\chi) - 16H_i(H_0 - H_i(t - t_k))\mu^2 h'(\chi) \\ & + 16(H_0 - H_i(t - t_k))^3\mu^2 h'(\chi) + 8(H_0 - H_i(t - t_k))^2\mu^4 h''(\chi) \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \lambda = & -\frac{2H_i}{\kappa^2\mu^4} + 2H_i F_1(\chi) + 6(H_0 - H_i(t - t_k))^2 F_1(\chi) - 2(H_0 - H_i(t - t_k))\mu^2 F_1'(\chi) \\ & - \frac{8(H_0 - H_i(t - t_k))h'(\chi)}{\mu^2} ((H_0 - H_i(t - t_k))^2 + 2H_i) + 8(H_0 - H_i(t - t_k))^2 h''(\chi). \end{aligned} \quad (4.91)$$

En la siguiente subsección usaremos este escenario inflacionario para calcular el índice espectral de perturbaciones primordiales de curvatura, n_S , y la relación escalar-tensor, r .

4.3.3. Índices observacionales inflacionarios

En la sección 4.1 estudiamos un formalismo slow-roll generalizado en presencia de los acoplamiento cinético, no mínimo y de Gauss-Bonnet, los cuales constituyen una clase importante de modelos de gravedad generalizada. Sin embargo, este enfoque no es apropiado para describir la fenomenología inflacionaria del modelo (4.78), ya que los efectos de la ligadura y del multiplicador de Lagrange no están incorporados en las variables (4.1)-(4.3). Por esta razón, es necesario cuantificar los índices observacionales en términos de nuevos parámetros slow-roll, los cuales son definidos como sigue [141, 92, 142, 143, 144]:

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \varepsilon_2 \equiv \frac{\ddot{\chi}}{H\dot{\chi}} = 0, \quad \varepsilon_3 \equiv \frac{1}{2} \frac{\dot{F}}{HF} = 0, \quad \varepsilon_4 \equiv \frac{\dot{E}}{2HE},$$

donde la función E está dada por

$$E = -\frac{1}{\kappa^2} \lambda(\chi) + \frac{3Q_a^2}{\frac{2}{\kappa^2} + Q_b} + Q_c,$$

y Q_a , Q_b y Q_c representan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} Q_a &= 8\mu^2 h'(\chi) H^2 - 4\mu^4 F_1(\chi) H, \\ Q_b &= 16\mu^2 h'(\chi) H - 2\mu^4 F_1(\chi), \\ Q_c &= 6\mu^4 F_1(\chi) H^2. \end{aligned}$$

Siguiendo la lógica presentada en la sección 4.1, obtenemos que el índice espectral escalar, n_S , y la relación escalar-tensor, r , toman la forma [141, 92, 142],

$$n_S = 1 + 2 \frac{(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}{1 + \varepsilon_1} \quad (4.92)$$

$$r = 16 \left| \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{1}{H^2} (2Q_c + Q_d) - \frac{1}{H} Q_e + Q_f \right) \right) \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 Q_b}{2}} \left(\frac{c_S}{c_T} \right)^3 \right|, \quad (4.93)$$

donde las funciones Q_d , Q_e y Q_f están dadas por

$$\begin{aligned} Q_d &= 4\mu^4 F_1(\chi) \dot{H}, \\ Q_e &= 32\mu^2 h'(\chi) \dot{H} - 4\mu^2 (\mu^4 F_1'(\chi) - 2\mu^2 F_1(\chi) H), \\ Q_f &= -16(\mu^4 h''(\chi) - \mu^2 h'(\chi) H) - 4\mu^4 F_1(\chi), \end{aligned}$$

y la velocidades de propagación de los modos escalar y tensorial, c_S and c_T , toman la forma

$$\begin{aligned} c_S^2 &= 1 + \frac{Q_d + \frac{Q_a Q_e}{\frac{2}{\kappa^2} + Q_b} + Q_f \left(\frac{Q_a}{\frac{2}{\kappa^2} + Q_b} \right)^2}{-\mu^4 \lambda(\chi) + \frac{3Q_a^2}{\frac{2}{\kappa^2} + Q_b} + Q_c}, \\ c_T^2 &= 1 - \frac{Q_f}{\frac{2}{\kappa^2} + Q_b}. \end{aligned}$$

Para calcular n_S and r , consideremos el escenario inflacionario quasi-de-sitter (4.89). En términos del parámetro de Hubble, el número de e-folds N es igual a

$$N = \int_{t_k}^t H dt = H_0(t - t_k) - \frac{H_i}{2}(t - t_k)^2.$$

Resolviendo con respecto a $t - t_k$, obtenemos

$$t - t_k = \frac{H_0 + \sqrt{H_0^2 - 2H_i N}}{H_i}. \quad (4.94)$$

Vale la pena notar que esta expresión es válida siempre y cuando $N < H_0^2/2H_i$, lo cual implica que el número máximo de e-folds es $N_{max} = H_0^2/2H_i$. En lo que sigue, solo por simplicidad, tomaremos

$$\chi = \mu^2(t - t_k). \quad (4.95)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (4.90), (4.91), (4.92), (4.93), (4.94) y (4.95), podemos calcular los índices observacionales para una escogencia arbitraria de las funciones $F_1(\chi)$ y $h(\chi)$. Podemos ejemplificar esto con algunos casos explícitos [104]. Como primer ejemplo, consideremos la siguiente escogencia:

$$h(\chi) = 0, \quad F_1(\chi) = \kappa^2 \zeta, \quad (4.96)$$

donde ζ es una constante adimensional. Si tomamos que el número total de e-folds es $N = 60$, y asumimos que $H_i = 0.5 \times 10^{-22} M_p^2$, $H_0 = 10^{-10} M_p$, y $\mu \sim M_p$, encontramos compatibilidad con los datos observacionales para valores de ζ en el rango $[0.034, 0.234]$. Para ilustrar esto, en la Fig. 4.6 graficamos n_S y r como funciones del parámetro ζ .

Además, en la Fig. 4.7 también graficamos el potencial (4.90) como función del número de e-folds para varios valores de ζ compatibles con las observaciones.

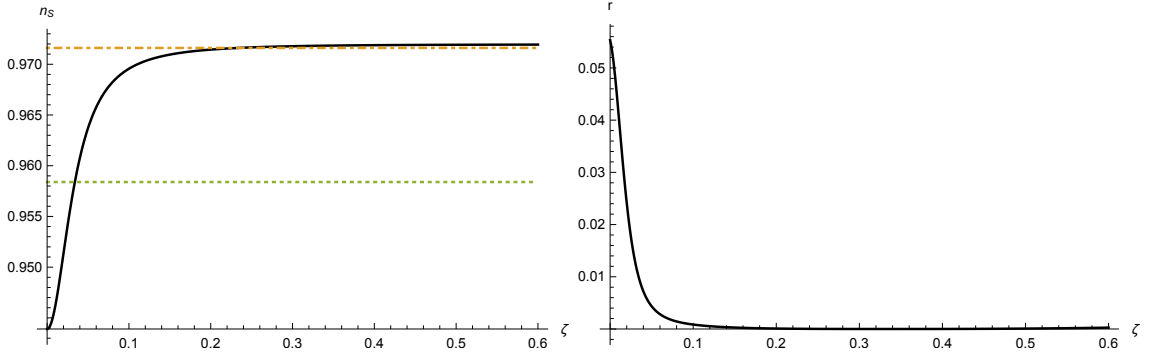


FIGURA 4.6. Comportamiento de los índices observacionales n_s y r como funciones del parametro ζ . En el rango $\zeta = [0.034, 0.234]$, estos observables son compatibles con los datos del Planck y del BICEP2/Keck-Array, los cuales restringen el índice espectral escalar y la razón escalar a tensor en los intervalos $n_s = [0.95839, 0.97161]$ y $r < 0.07$, respectivamente.

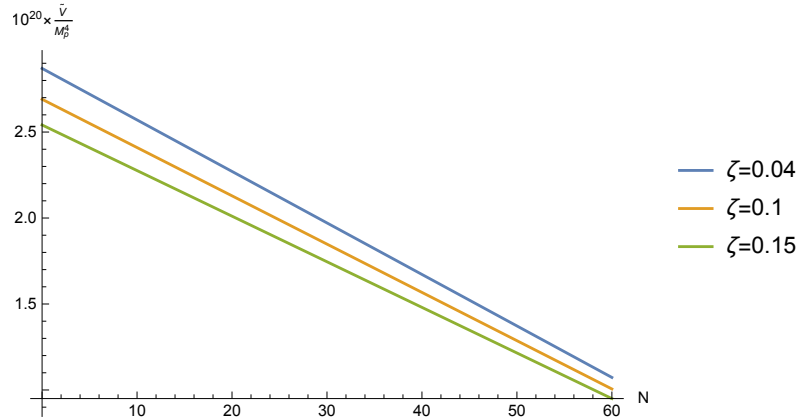


FIGURA 4.7. Potencial escalar obtenido del ejemplo (4.96) como función del número de e-folds, tomando valores del parámetro ζ compatibles con las observaciones.

Otro ejemplo es:

$$h(\chi) = 0, \quad F_1(\chi) = \kappa^2 \zeta \left(1 - e^{-\alpha \tanh(\kappa \chi)}\right)^2 \quad (4.97)$$

donde ζ y α son constantes adimensionales. Después de una revisión exhaustiva del espacio de parámetros, es evidente que este caso es compatible con las observaciones del Planck y del BICEP2/Keck-Array data en un amplio rango de valores libres. Para ilustrar esto más claramente, en la Fig. 4.8 ilustramos el comportamiento del índice espectral n_s y de la relación escalar-tensor, r , como funciones del parámetro ζ , para varios valores de α . Además, en este caso, el comportamiento del potencial (4.90) como función del número de e-folds es mostrado en la Fig. 4.9 para varios valores de α , tomando $\zeta = 20$, el cual es compatible con las observaciones.

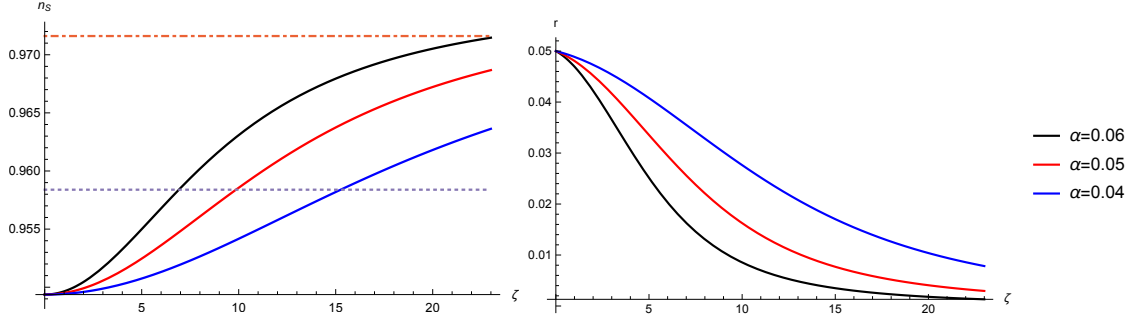


FIGURA 4.8. Comportamiento de los índices observacionales n_s y r como funciones del parámetro ζ para $\alpha = 0.04, 0.05, 0.06$. Aunque las curvas cubren diferentes comportamientos de estos índices, todas están dentro del rango aceptable de los datos astrofísicos. Nótese que la compatibilidad simultanea de n_s y r con las observaciones puede ser obtenida en un amplio rango de valores de (ζ, α)

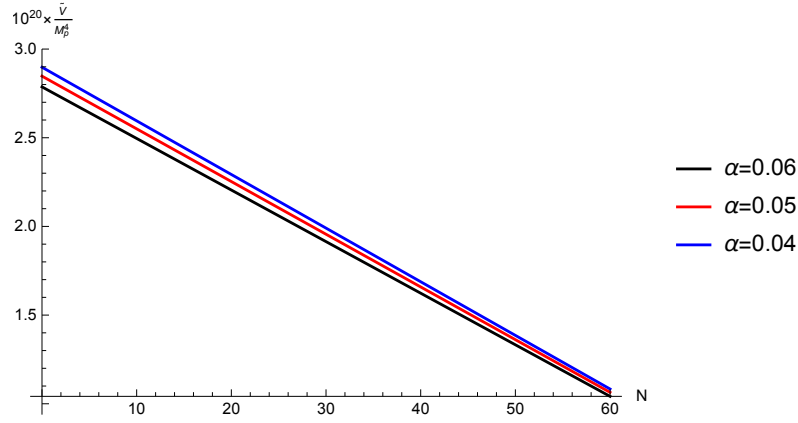


FIGURA 4.9. Potencial escalar obtenido del ejemplo (4.97) como función del número de e-folds, tomando $\alpha = 0.04, 0.05, 0.06$, y $\zeta = 20$, el cual es compatible con las observaciones.

4.3.4. Discusión

En esta sección extendimos el marco teórico de la gravedad Gauss-Bonnet libre de fantasmas [140] para incluir correcciones asociadas al acoplamiento cinético. Hemos revisado brevemente las características esenciales del formalismo de los multiplicadores de Lagrange en este modelo específico. En nuestro estudio consideramos un enfoque que permite, en principio, reconstruir el potencial y el multiplicador de Lagrange para escenarios cosmológicos dados arbitrariamente.

Para ejemplificar el proceso de reconstrucción, utilizamos soluciones power-law, Little-Rip, de Sitter y quasi-de-Sitter, donde obtuvimos potenciales que dependen de las funciones arbitrarias $h(\chi)$ y $F_1(\chi)$, las cuales son escogidas de tal manera que se satisfagan las cotas observacionales. En particular, nos enfocamos en el efecto del acoplamiento cinético en la dinámica inflacionaria, utilizando algunas formas específicas de la función $F_1(\chi)$.

Después de una breve discusión del formalismo general de los índices observacionales en gravedad modificada, nos enfocamos en una forma específica del parámetro de Hubble (quasi-de-sitter). De este modo, en un contexto rigurosamente fenomenológico, mostramos que la evolución inflacionaria conduce a valores viables del índice espectral escalar y de la relación escalar-tensor. Más aun, hemos probado que el modelo es viable en un

amplio rango de parámetros libres, lo cual es ilustrado en varias graficas de los índices observacionales como funciones de los parámetros libres.

En resumen, hemos demostrado aquí que, en principio, cualquier cosmología relevante para las observaciones actuales puede ser reconstruida utilizando el modelo (4.78). También mostramos que los efectos del acoplamiento cinético conducen a escenarios inflacionarios viables, los cuales son totalmente compatibles con las restricciones observacionales más actuales. Además, la elección de la tasa de Hubble es en principio arbitraria, con la única restricción de que la teoría resultante debe ser acelerada, es decir, el factor de escala debe satisfacer $\ddot{a} > 0$. Para finalizar, también es posible realizar el mismo análisis para otras opciones del parámetro de Hubble durante la inflación. Esperamos realizar un nuevo trabajo explorando esta alternativa.

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado un modelo de campo escalar con acoplamientos cinético, no mínimo y de Gauss Bonnet [122, 138]. Dicho modelo fue implementado a través de la acción (2.3), la cual involucraba cuatro funciones desconocidas: $F(\phi)$, $F_1(\phi)$, $F_2(\phi)$ y $V(\phi)$. Las ecuaciones de campo correspondientes a dicha acción fueron calculadas bajo la suposición de una métrica FRW y un campo escalar espacialmente homogéneo. Con estas ecuaciones se implementó un mecanismo de reconstrucción que permitió determinar las funciones $F_1(\phi)$ y $V(\phi)$ para cualquier escenario cosmológico dado. Se mostró ejemplos explícitos de reconstrucción para soluciones tipo ley de potencias, donde se obtuvo potenciales de la forma Albrecht Skordis. Este tipo de potenciales surge en el límite de bajas energías en teoría multidimensionales y presentan características atractivas para la descripción de cosmologías de tiempo tardío [129, 130]. El hecho de haber obtenido el potencial a partir de la reconstrucción con soluciones tipo ley de potencias, implica que el modelo con (2.21) y (2.22) produce soluciones scaling, las cuales juegan un papel importante en escenarios de quintaesencia. El modelo también se reconstruyó para una solución Little Rip donde la función de Hubble se incrementa exponencialmente con el tiempo y el potencial escalar obtenido es un polinomio de cuarto grado. Un escenario tipo de sitter también fue implementado en el mecanismo de reconstrucción, obteniéndose un potencial escalar cuadrático. Cabe resaltar que los escenarios phantom son obtenidos sin necesidad de introducir campo fantasmas, lo cual es una característica importante para un modelo viable de energía oscura [122].

Por otro lado, en el modelo en ausencia de potencial se mostró que al restringir apropiadamente el acoplamiento cinético, se obtiene soluciones exactas que describen apropiadamente la expansión acelerada del universo. Se demostró que el modelo permite la evolución de energía oscura phantom sin hacer frente al Big Rip o a cualquier otra singularidad. Se encontró que la ecuación de estado tiene comportamientos asintóticos diferentes que dependen de los parámetros del modelo, los cuales se pueden restringir para obtener una consistencia con los datos observacionales. De la ecuación (2.41) se deduce que el parámetro de estado actual depende del producto $\gamma(\kappa\phi_0)^2$: si $\gamma(\kappa\phi_0)^2 > -12$ entonces $w_0 > -1$ (fase de quintaesencia), si $\gamma(\kappa\phi_0)^2 < -12$ entonces $w_0 < -1$ (fase phantom) y si $\gamma(\kappa\phi_0)^2 = -12$, entonces $w_0 = -1$ (constante cosmológica). Los casos ilustrados en la figura (2.1) cubren diferentes comportamientos de la ecuación de estado, pero todos están dentro de las restricciones astrofísicas. También

se nota que son posibles las transiciones desde fase phantom hacia fase quintaesencia [122].

Luego se consideró el estudio del sistema autónomo del modelo (2.3), cuya acción tenía incorporada la versión general del acoplamiento no mínimo [138, 101]. Para esto fue fundamental definir las variables dinámicas de la forma (3.6), cuyas expresiones combinan estratégicamente los diferentes acoplamientos del modelo. Al asumir que el potencial y los acoplamientos son proporcionales a potencias enteras del campo escalar, la dinámica fue llevada a un sistema autónomo, cuyos puntos críticos reflejaron algunas soluciones de interés cosmológico. Por ejemplo, se demostró que al restringir adecuadamente los parámetros enteros b , c , y d , el punto **A5** conduce a soluciones estables de energía oscura en fases de quintaesencia, de sitter y phantom. Como consecuencia, es posible obtener estados asintóticos relevantes en la cosmología de tiempo tardío. Otro punto crítico interesante es el punto **A8**, el cual contiene una solución scaling de radiación con $w_{eff} = w_m = 1/3$. Al tener un comportamiento de silla, este punto puede representar una fase transitoria de dominancia de radiación. Por otro lado, el modelo exponencial también produjo puntos críticos interesante, entre los cuales se destaca el punto **B5**, cuyos autovalores permiten obtener estabilidad de soluciones de energía oscura. Debido a que en este modelo los parámetros b , c y d pueden tomar valores reales, dicho punto tienen la ventaja de que la ecuación de estado puede ajustarse a valores lo suficientemente cercanos a -1 , mostrando que el modelo exponencial también proporciona alternativas viables para describir escenarios de expansión acelerada. Además, en este modelo es posible obtener fase transitoria de radiación conducida por el punto de silla **B8**, el cual tiene relevancia cosmológica en épocas tempranas del universo.

En el capítulo 4 se consideró un formalismo slow-roll generalizado para estudiar el efecto de los acoplamientos en la fenomenología inflacionaria [102, 103]. Asumiendo la aproximación de rodadura lenta, los índices observacionales fueron expresados como funciones de los parámetros slow-roll. Para confrontar el modelo con las observaciones, se consideró algunas formas específicas de las funciones $F(\phi)$, $F_1(\phi)$, $F_2(\phi)$ y $V(\phi)$. En particular, se mostró que la presencia de los acoplamientos mejoran significativamente las predicciones observacionales de los potenciales cuadráticos y cuárticos (Figs. 4.2 y 4.1). En el modelo exponencial se encontró que la condición $\Delta_i(\phi_{end}) \sim 1$ era adecuada para finalizar el régimen de inflación. Además, los índices inflacionarios obtenidos en este contexto son totalmente compatibles con las restricciones astrofísicas (Figs. 4.3 y 4.5). Finalmente se consideró las implicaciones cosmológicas del formalismo de los multiplicadores de Lagrange en presencia de los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet [104]. Debido al grado de libertad que ofrece el modelo (4.78), se desarrolló un mecanismo de reconstrucción que fue ejemplificado con varias soluciones fenomenológicamente relevantes. En particular, en el contexto inflacionario quasi-de-sitter, se mostró que el acoplamiento cinético tiene un efecto significativo en el comportamiento de los índices observacionales. Además, en un amplio rango de parámetros libres, se encontró compatibilidad con las restricciones existentes del Planck y del BICEP2/Keck-Array (Figs. 4.6 y 4.8).

Todos los resultados mencionados anteriormente cubren una gran variedad de escenarios de expansión acelerada que son consistentes con los rangos de mediciones astrofísicas. Esto permite concluir que la combinación de los acoplamientos cinético, no mínimo y Gauss-Bonnet, proporciona una buena explicación de la dinámica del universo tanto en tiempo temprano como tardío, y pueden desempeñar un papel importante en revelar la naturaleza de la inflación y la energía oscura [122, 138, 102, 103, 104].

APÉNDICE A

Conceptos basicos de geometría

En relatividad general, el elemento infinitesimal de línea es descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.1})$$

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es el tensor métrico. La derivada covariante de un campo vectorial V^μ es definida como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (\text{A.2})$$

donde la conexión $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ es escogida de tal manera que la combinación $\nabla_\mu V^\nu$ se transforme como un tensor. En general, la derivada covariante de un tensor de rango arbitrario puede calcularse a través de la siguiente formula

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = & \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ & + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Es posible escojer una conexión sin torsión ($\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu$) que sea compatible con la métrica ($\nabla_\sigma \Gamma_{\mu\lambda}^\nu = 0$). Se puede mostrar que dicha conexión es única y está dada por la formula de Christoffel [109]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.4})$$

En el espacio plano de Minkowski podemos ver claramente que la conexión (A.4) se anula. Por lo tanto, en un espacio plano, las derivadas covariantes se reducen a derivadas ordinarias. Ahora, en un espacio curvo, la curvatura puede verse como una medida de la no conmutatividad de la derivada covariante. Esto es

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\beta]V^\rho = R_{\alpha\sigma\beta}^\rho V^\alpha \quad (\text{A.5})$$

donde $R_{\alpha\sigma\beta}^{\rho}$ es el tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\alpha\sigma\beta}^{\rho} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\rho}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} \quad (\text{A.6})$$

En general, el conmutador $[\nabla_{\rho}, \nabla_{\sigma}]$ puede ser aplicado sobre un tensor de rango arbitrario. Con algo de algebra se puede mostrar que

$$\begin{aligned} [\nabla_{\rho}, \nabla_{\sigma}]T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = & R_{\lambda\rho\sigma}^{\mu_1}T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + R_{\lambda\rho\sigma}^{\mu_2}T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ & - R_{\nu_1\rho\sigma}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - R_{\nu_2\rho\sigma}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Una forma usual de expresar el tensor de curvatura es mediante una representación completamente covariante: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}$. Teniendo en cuenta esto podemos escribir las siguientes propiedades del tensor de curvatura

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (\text{A.9})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.10})$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Para terminar, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R se definen de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = R_{\nu\mu} \quad (\text{A.13})$$

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (\text{A.14})$$

Es importante anotar que la simetría del tensor de Ricci surge como consecuencia de las propiedades del tensor de curvatura. También vale la pena mencionar que dichas propiedades permiten demostrar que $R_{\lambda\mu\nu}^{\lambda} = 0$ y $R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda} = -R_{\mu\nu}$

APÉNDICE B

Identidades adicionales del tensor de curvatura

En este apéndice demostraremos otras identidades asociadas con el tensor curvatura. Como se verá más adelante, estas identidades nos permitirán simplificar los cálculos del tensor energía impulso. A continuación listamos dichas identidades:

$$\nabla^\rho R_{\rho\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\sigma\nu} - \nabla_\nu R_{\sigma\mu} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu R \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\sigma\rho} = \frac{1}{2} \square R \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla^\rho \nabla^\sigma R_{\mu\rho\nu\sigma} = \nabla^\rho \nabla_\rho R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu R + R_{\gamma\mu\lambda\nu} R^{\lambda\gamma} - R_{\gamma\mu} R_\nu^\gamma \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla^\rho \nabla_\mu R_{\rho\nu} + \nabla^\rho \nabla_\nu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu R + \nabla_\nu \nabla_\mu R) - 2R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + 2R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda \quad (\text{B.5})$$

Demostración de las identidades (B.1), (B.2) y (B.3)

Primero que todo, nótese que la identidad (A.12) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\nabla_\lambda R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + \nabla_\gamma R_{\beta\delta\lambda}^\alpha + \nabla_\delta R_{\beta\lambda\gamma}^\alpha = 0 \quad (\text{B.6})$$

Contrayendo los índices α y γ se tiene que

$$\begin{aligned} & \nabla_\lambda R_{\beta\delta} + \nabla_\alpha R_{\beta\delta\lambda}^\alpha - \nabla_\delta R_{\beta\lambda} = 0 \\ \Rightarrow & \nabla_\alpha R_{\beta\delta\lambda}^\alpha = \nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta} \\ \Rightarrow & \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\delta\lambda} = \nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De esta manera queda demostrada la identidad (B.1). Para demostrar la identidad (B.2), partamos de la ecuación (B.7):

$$\begin{aligned}
& \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\delta\lambda} = \nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta} \\
\Rightarrow & g^{\beta\delta} \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\delta\lambda} = g^{\beta\delta} (\nabla_\delta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\delta}) \\
\Rightarrow & -\nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \nabla^\beta R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R \\
\Rightarrow & 2\nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \nabla_\lambda R \\
\Rightarrow & \nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \nabla_\lambda R
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Con esto queda demostrada la identidad (B.2). Ahora, la identidad (B.3) puede obtenerse al aplicar el operador ∇^λ a ambos lados de la ecuación (B.8). En efecto

$$\begin{aligned}
& \nabla^\lambda \nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^\lambda \nabla_\lambda R \\
\Rightarrow & \nabla^\lambda \nabla^\alpha R_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \square R
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Demostracion de la identidad (B.4)

Primero escribamos la identidad (A.12)

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\lambda} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0 \tag{B.10}$$

Contrayendo esta expresión con $g^{\delta\lambda}$ nos da

$$\begin{aligned}
& g^{\delta\lambda} (\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\lambda} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\lambda\gamma}) = 0 \\
\Rightarrow & \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g^{\delta\lambda} \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\lambda} + \nabla^\lambda R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0 \\
\Rightarrow & \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma (g^{\delta\lambda} R_{\alpha\beta\delta\lambda}) + \nabla^\lambda R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Como $g^{\delta\lambda} R_{\alpha\beta\delta\lambda} = 0$ y $R_{\alpha\beta\lambda\gamma} = R_{\lambda\gamma\alpha\beta}$, entonces

$$\nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla^\lambda R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = 0$$

Aplicando el operador ∇^β a ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla^\beta \nabla^\lambda R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = 0 \tag{B.11}$$

De la identidad (B.1) se ve que $\nabla^\lambda R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} - \nabla_\beta R_{\gamma\alpha}$. Luego, la ecuación (B.11) puede escribirse de la siguiente manera

$$\nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla^\beta \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} - \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\gamma\alpha} = 0 \tag{B.12}$$

Ahora, reescribamos el termino $\nabla^\beta \nabla_\alpha R_{\gamma\beta}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\nabla^\beta \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} &= g^{\beta\phi} \nabla_\phi \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} = g^{\beta\phi} (\nabla_\phi \nabla_\alpha R_{\gamma\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\phi R_{\gamma\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\phi R_{\gamma\beta}) \\
&= g^{\beta\phi} ([\nabla_\phi, \nabla_\alpha] R_{\gamma\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\phi R_{\gamma\beta}) \\
&= g^{\beta\phi} ([\nabla_\phi, \nabla_\alpha] R_{\gamma\beta}) + \nabla_\alpha \nabla^\beta R_{\gamma\beta} \\
&= g^{\beta\phi} \left(-R_{\gamma\phi\alpha}^\eta R_{\eta\beta} - R_{\beta\phi\alpha}^\eta R_{\gamma\eta} \right) + \nabla_\alpha \nabla^\beta R_{\gamma\beta} \\
&= -R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} + R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa + \nabla_\alpha \nabla^\beta R_{\gamma\beta} \\
&= -R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} + R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\gamma R
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Con esto podemos escribir la ecuación (B.12) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&\nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} + R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\gamma R - \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\gamma\alpha} = 0 \\
\Rightarrow \nabla^\beta \nabla^\delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \nabla^\beta \nabla_\beta R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\gamma R + R_{\kappa\gamma\phi\alpha} R^{\phi\kappa} - R_{\kappa\alpha} R_\gamma^\kappa
\end{aligned}$$

Esto demuestra la validez de la identidad (B.4)

Demostración de la identidad (B.5)

Para empezar, consideremos la identidad (B.1):

$$\nabla^\sigma R_{\sigma\phi\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\phi\nu} - \nabla_\nu R_{\phi\mu}$$

Aplicando el operador ∇^ϕ a ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\phi\mu\nu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} \tag{B.14}$$

Por otro lado, escribamos la identidad (A.11) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&R_{\sigma\phi\mu\nu} + R_{\sigma\mu\nu\phi} + R_{\sigma\nu\phi\mu} = 0 \\
\Rightarrow R_{\sigma\phi\mu\nu} &= -R_{\sigma\mu\nu\phi} - R_{\sigma\nu\phi\mu}
\end{aligned}$$

Con esto, la ecuación (B.14) queda así

$$-\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\mu\nu\phi} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\nu\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} \tag{B.15}$$

Por conveniencia, expresaremos el termino $-\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu}$ como $-2\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu}$. De esta manera, la ecuación (B.15) queda así

$$-\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\mu\nu\phi} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\nu\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - 2\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} \tag{B.16}$$

En virtud de (B.1) se tiene $\nabla^\sigma R_{\sigma\mu\nu\phi} = \nabla_\nu R_{\mu\phi} - \nabla_\phi R_{\mu\nu}$. Luego

$$-\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\mu\phi} + \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\sigma\nu\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} - 2\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu}$$

Agrupando términos y teniendo en cuenta que $R_{\sigma\nu\phi\mu} = R_{\mu\phi\nu\sigma}$, obtenemos

$$\nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} = \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} + \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} - \nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\mu\phi\nu\sigma} \quad (\text{B.17})$$

Ahora, de las ecuaciones (B.13) y (B.5) se deduce que

$$\nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} = -R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu R$$

y

$$\nabla^\phi \nabla^\sigma R_{\mu\phi\nu\sigma} = \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu R + R_{\lambda\nu\gamma\mu} R^{\gamma\lambda} - R_{\lambda\mu} R_\nu^\lambda$$

Con esto, la ecuación (B.17) puede ser expresada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} &= -R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu R + \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla^\phi \nabla_\phi R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu R - R_{\lambda\nu\gamma\mu} R^{\gamma\lambda} + R_{\lambda\mu} R_\nu^\lambda \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $R_{\lambda\mu} R_\nu^\lambda = R_\mu^\lambda R_{\lambda\nu}$ y $R_{\lambda\nu\gamma\mu} R^{\gamma\lambda} = R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda}$, se obtiene

$$\nabla^\phi \nabla_\mu R_{\phi\nu} + \nabla^\phi \nabla_\nu R_{\phi\mu} = -2R_{\lambda\mu\gamma\nu} R^{\gamma\lambda} + 2R_{\lambda\nu} R_\mu^\lambda + \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu R + \nabla_\nu \nabla_\mu R)$$

Esto resultado demuestra la identidad (B.5).

APÉNDICE C

Cálculo de los tensores $T_{\mu\nu}^{GB}$, $T_{\mu\nu}^K$ y $T_{\mu\nu}^{NM}$

En este apéndice calcularemos los tensores $T_{\mu\nu}^{GB}$, $T_{\mu\nu}^K$ y $T_{\mu\nu}^{NM}$:

$$T_{\mu\nu}^{GB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{GB}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^K = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_K}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^{NM} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NM}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Antes de empezar, escribamos la variación de algunas cantidades que dependen de la métrica.

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \quad (C.1)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (C.2)$$

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \quad (C.3)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\alpha\beta} - g_{\mu\beta} \nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g^{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha} \nabla_\beta \nabla_\mu \delta g^{\alpha\beta} \right) \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} = & \frac{1}{2} \left(\nabla_\kappa \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} + \nabla_\lambda \nabla_\alpha \delta g_{\kappa\beta} - \nabla_\kappa \nabla_\alpha \delta g_{\lambda\beta} - \nabla_\lambda \nabla_\beta \delta g_{\kappa\alpha} \right. \\ & \left. + R_{\beta\kappa\lambda}^\gamma \delta g_{\gamma\alpha} - R_{\alpha\kappa\lambda}^\gamma \delta g_{\beta\gamma} \right) \end{aligned} \quad (C.5)$$

Algunas de estas ecuaciones son demostradas en [109], [145] y [146].

Cálculo del tensor $T_{\mu\nu}^{GB}$

Primero que todo recordemos que

$$S_{GB} = - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \mathcal{G} = - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \left(R^2 - 4R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + R_{\phi\gamma\kappa\lambda} R^{\phi\gamma\kappa\lambda} \right)$$

Esta expresión se puede escribir de la siguiente manera

$$S_{GB} = S_1 + S_2 + S_3$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R^2 \\ S_2 &= 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} \\ S_3 &= - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\phi\gamma\kappa\lambda} R^{\phi\gamma\kappa\lambda} \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en calcular la variación de S_{GB} respecto a la métrica. Para esto calcularemos las variaciones δS_1 , δS_2 y δS_3 , y luego las sumaremos para obtener la variación total δS_{GB} .

Variación δS_1

Calculemos la variación de la acción S_1 :

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= -\delta \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R^2 = - \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R^2 + F_2 \sqrt{-g} \delta(R^2)] \\ &= - \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R^2 + 2F_2 \sqrt{-g} R \delta(R)] \end{aligned}$$

Ahora debemos expresar esta variación en términos de variaciones de la métrica. Para esto, reemplacemos (C.2) y (C.3) en la expresión anterior y utilicemos regla de Leibniz para derivadas covariantes:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F_2 R^2 g_{\mu\nu} - 2F_2 R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_2 R) + 2\nabla_\nu \nabla_\mu (F_2 R) \right] \delta g^{\mu\nu}$$

En esta última expresión hemos omitido integrales superficie debido a que no contribuyen a las ecuaciones de campo.

Variación δS_2

Calculemos la variación de la acción S_2 :

$$\delta S_2 = 4\delta \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} = 4 \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + F_2 \sqrt{-g} \delta(R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma})]$$

Como $R^{\phi\gamma} = g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho}$, entonces

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= 4 \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + F_2 \sqrt{-g} \delta(g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho} R_{\phi\gamma})] \\ &= 4 \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + 2F_2 \sqrt{-g} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho} R_{\phi\gamma} \delta g^{\phi\sigma} + 2F_2 \sqrt{-g} g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\phi\gamma} \delta R_{\sigma\rho}] \end{aligned}$$

Ahora debemos expresar esta variación en términos de variaciones de la métrica. Para esto, reemplacemos (C.2) y (C.4) en la expresión anterior y utilicemos regla de Leibniz para derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} \delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \Big[& -2F_2 g_{\mu\nu} R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + 8F_2 g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} - 4\nabla^\phi \nabla_\mu (F_2 R_{\phi\nu}) \\ & - 4\nabla^\phi \nabla_\nu (F_2 R_{\phi\mu}) + 4\nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_2 R_{\mu\nu}) + 4g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (F_2 R_{\phi\gamma}) \Big] \end{aligned}$$

En esta última expresión se ha omitido las integrales de superficie y se han renombrado algunos índices mudos

Variación δS_3

Calculemos la variación de la acción S_3

$$\delta S_3 = -\delta \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda}$$

Esto es lo mismo que

$$\delta S_3 = - \int d^4x F_2 \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + \sqrt{-g} \delta \left(R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} \right) \right]$$

Como $R^{\alpha\beta\kappa\lambda} = g^{\lambda F_2} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi F_2}$, entonces

$$\delta S_3 = - \int d^4x F_2 \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + \sqrt{-g} \delta \left(g^{\lambda F_2} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi F_2} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \right) \right]$$

Con algo de algebra tensorial se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta S_3 = - \int d^4x \Big[& F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + 4F_2 \sqrt{-g} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi F_2} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \delta g^{\lambda F_2} \\ & + 2F_2 \sqrt{-g} g^{\lambda F_2} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi F_2} \delta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \Big] \end{aligned}$$

Ahora, reemplacemos (C.2) y (C.5) en la ecuación anterior. La expresión resultante se puede simplificar si se utilizan las propiedades del tensor de curvatura y la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned} \delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \Big[& \frac{1}{2} F_2 g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} - 2F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} \\ & + 4\nabla^\sigma \nabla^\phi (F_2 R_{\nu\sigma\phi\mu}) \Big] \end{aligned}$$

donde se ha omitido las integrales de superficie y se han renombrado algunos índices mudos

Variación total δS_{GB}

Ahora, calculemos la variación total δS_{GB} . Para esto, sumemos las variaciones δS_1 , δS_2 y δS_3 y tengamos en cuenta que $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\phi\gamma}R^{\phi\gamma} + R_{\alpha\beta\kappa\lambda}R^{\alpha\beta\kappa\lambda}$. Así,

$$\begin{aligned}\delta S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} & \left[\frac{1}{2} F_2 \mathcal{G} g_{\mu\nu} - 2F_2 R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_2 R) + 2\nabla_\nu \nabla_\mu (F_2 R) \right. \\ & + 8F_2 g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} - 4\nabla^\phi \nabla_\mu (F_2 R_{\phi\nu}) - 4\nabla^\phi \nabla_\nu (F_2 R_{\phi\mu}) + 4\nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_2 R_{\mu\nu}) \\ & \left. + 4g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (F_2 R_{\phi\gamma}) - 2F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} + 4\nabla^\sigma \nabla^\phi (F_2 R_{\nu\sigma\phi\mu}) \right]\end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas y teniendo en cuenta las identidades (B.1) – (B.5), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} & \left[\frac{1}{2} F_2 \mathcal{G} g_{\mu\nu} - 2F_2 R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2) R + 2(\nabla_\nu \nabla_\mu F_2) R \right. \\ & + 4F_2 R_{\mu}^{\rho} R_{\nu\rho} - 4(\nabla^\phi \nabla_\mu F_2) R_{\phi\nu} - 4(\nabla^\phi \nabla_\nu F_2) R_{\phi\mu} + 4(\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2) R_{\mu\nu} \\ & + 4g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma F_2) R_{\phi\gamma} - 2F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} + 4(\nabla^\sigma \nabla^\phi F_2) R_{\nu\sigma\phi\mu} \\ & \left. + 4F_2 R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau} \right]\end{aligned}$$

De aquí se ve claramente que el tensor $T_{\mu\nu}^{GB}$ es:

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}^{GB} = & -F_2 \mathcal{G} g_{\mu\nu} + 4F_2 R R_{\mu\nu} + 4g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2) R - 4(\nabla_\nu \nabla_\mu F_2) R - 8F_2 R_{\mu}^{\rho} R_{\nu\rho} \\ & + 8(\nabla^\phi \nabla_\mu F_2) R_{\phi\nu} + 8(\nabla^\phi \nabla_\nu F_2) R_{\phi\mu} - 8(\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2) R_{\mu\nu} \\ & - 8g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma F_2) R_{\phi\gamma} + 4F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} - 8(\nabla^\sigma \nabla^\phi F_2) R_{\nu\sigma\phi\mu} \\ & - 8F_2 R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau}\end{aligned}$$

Esta expresión es válida en un espacio-tiempo de dimensiones arbitrarias. En cuatro dimensiones, los términos proporcionales a F_2 (sin derivadas) se cancelan debido a que el invariante $\mathcal{G}$ es una divergencia en cuatro dimensiones. Teniendo en cuenta esto y usando el hecho de que $R_{\nu\sigma\phi\mu} = -R_{\mu\phi\nu\sigma}$, obtenemos

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}^{GB} = & -4\left([\nabla_\nu \nabla_\mu F_2] R - g_{\mu\nu} [\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2] R - 2[\nabla^\phi \nabla_\mu F_2] R_{\phi\nu} - 2[\nabla^\phi \nabla_\nu F_2] R_{\phi\mu} \right. \\ & \left. + 2[\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2] R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} [\nabla^\phi \nabla^\gamma F_2] R_{\phi\gamma} - 2[\nabla^\sigma \nabla^\phi F_2] R_{\mu\phi\nu\sigma} \right)\end{aligned}$$

Este tensor es totalmente equivalente al dado en (2.8).

Cálculo del tensor $T_{\mu\nu}^K$

Partamos de la acción correspondiente al acople cinético

$$S_K = \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi$$

Ahora, calculemos la variación de esta acción respecto a la métrica

$$\delta S_K = \delta \int d^4x \sqrt{-g} F_1 G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi$$

Esto es lo mismo que

$$\delta S_K = \int d^4x F_1 \left[\delta(\sqrt{-g}) G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi + \sqrt{-g} \delta(G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi) \right]$$

Usando el hecho de que $G_{\kappa\lambda} = R_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} g_{\kappa\lambda} R$, obtenemos

$$\delta S_K = \int d^4x F_1 \left[\delta(\sqrt{-g}) G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi + \sqrt{-g} \left(\delta(R_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi) - \frac{1}{2} \delta(R g_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi) \right) \right]$$

Como $\partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi = g^{\kappa\rho} g^{\sigma\lambda} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi$, entonces

$$\begin{aligned} \delta S_K = \int d^4x \left[F_1 \delta(\sqrt{-g}) G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi + \sqrt{-g} F_1 R_{\kappa\lambda} g^{\sigma\lambda} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \delta g^{\kappa\rho} \right. \\ \left. + \sqrt{-g} F_1 R_{\kappa\lambda} g^{\kappa\rho} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \delta g^{\sigma\lambda} + \sqrt{-g} F_1 g^{\kappa\rho} g^{\sigma\lambda} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \delta R_{\kappa\lambda} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_1 g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \delta R - \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_1 R \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi \delta g^{\rho\sigma} \right] \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en expresar esta variación en términos de variaciones de métrica. Para esto, reemplacemos (C.2), (C.3) y (C.4) en la ecuación anterior y utilicemos regla de Leibniz para derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} \delta S_K = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} F_1 g_{\mu\nu} G_{\kappa\lambda} \partial^\kappa \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2} F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla_\phi (F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu (F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi) - \frac{1}{2} F_1 R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + F_1 (R_{\mu\lambda} \partial_\nu \phi \partial^\lambda \phi + R_{\nu\lambda} \partial_\mu \phi \partial^\lambda \phi) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\nabla^\sigma \nabla_\mu (F_1 \partial_\nu \phi \partial_\sigma \phi) + \nabla^\sigma \nabla_\nu (F_1 \partial_\mu \phi \partial_\sigma \phi)) + \frac{1}{2} \nabla^\phi \nabla_\phi (F_1 \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma (F_1 \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) \right] \end{aligned}$$

En esta última expresión se ha omitido las integrales de superficie y se han renombrado algunos índices mudos.

Teniendo en cuenta que $G_{\kappa\lambda} = R_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}g_{\kappa\lambda}R$ y renombrando índices mudos, obtenemos

$$\begin{aligned}\delta S_K = & \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi) \right. \\ & + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu (F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi) - \frac{1}{2} F_1 R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + F_1 \left(R_{\mu\rho} \partial_\nu \phi \partial^\rho \phi + R_{\nu\rho} \partial_\mu \phi \partial^\rho \phi \right) \\ & - \frac{1}{2} F_1 g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} \partial^\rho \phi \partial^\sigma \phi - \frac{1}{2} \left(\nabla^\rho \nabla_\mu (F_1 \partial_\nu \phi \partial_\rho \phi) + \nabla^\rho \nabla_\nu (F_1 \partial_\mu \phi \partial_\rho \phi) \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_1 \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma (F_1 \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) \right]\end{aligned}$$

De aquí se ve claramente que el tensor $T_{\mu\nu}^K$ es:

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}^K = & F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi) - \nabla_\nu \nabla_\mu (F_1 \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi) \\ & + F_1 R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2 F_1 \left(R_{\mu\rho} \partial_\nu \phi \partial^\rho \phi + R_{\nu\rho} \partial_\mu \phi \partial^\rho \phi \right) + F_1 g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} \partial^\rho \phi \partial^\sigma \phi \\ & + \nabla^\rho \nabla_\mu (F_1 \partial_\nu \phi \partial_\rho \phi) + \nabla^\rho \nabla_\nu (F_1 \partial_\mu \phi \partial_\rho \phi) - \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_1 \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \\ & - g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla^\sigma (F_1 \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi)\end{aligned}$$

Subiendo y bajando algunos índices mudos se ve claramente que este tensor es equivalente al dado en (2.9).

Cálculo del tensor $T_{\mu\nu}^{NM}$

La acción correspondiente al acoplamiento no mínimo es:

$$S_{NM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} F(\phi) \right) R$$

La variación de esta acción es:

$$\delta S_{NM} = \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(\frac{1}{2} F(\phi) \right) R + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} F(\phi) \right) \delta R \right]$$

Reemplazando las ecuaciones (C.2) y (C.3) en la variación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S_{NM} = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} F(\phi) \right) (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} F(\phi) \right) R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right]\end{aligned}$$

Aplicando dos veces la regla de Leibniz y omitiendo integrales de superficie, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_{NM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma F(\phi)] \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} [\nabla_\mu \nabla_\nu F(\phi)] \delta g^{\mu\nu} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} F(\phi) \right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (C.6)$$

Teniendo en cuenta que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, la variación anterior se puede reescribir como

$$\delta S_{NM} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma F(\phi)] \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} [\nabla_\mu \nabla_\nu F(\phi)] \delta g^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} F(\phi) G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right]$$

De aquí se deduce que el correspondiente tensor $T_{\mu\nu}^{NM}$, está dado por

$$T_{\mu\nu}^{NM} = -g_{\mu\nu} [\nabla_\sigma \nabla^\sigma F(\phi)] + [\nabla_\mu \nabla_\nu F(\phi)] - F(\phi) G_{\mu\nu}$$

APÉNDICE D

Acción a segundo orden de perturbaciones cosmológicas

En este apéndice mostraremos brevemente el uso de la herramienta Xpand para verificar los resultados del cálculo de perturbaciones cosmológicas efectuado en el formalismo de galileones generalizados [91]. Las correcciones cuadráticas resultantes conducen a una versión general de la ecuación Mukhanov-Sasaki, la cual es el punto de partida para el cálculo del espectro de potencias. Usaremos el gauge de campo uniforme y tomaremos la métrica perturbada:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)$$

donde

$$N = 1 + A, \quad N^i = \partial^i B, \quad \gamma_{ij} = a^2(t)e^{2\xi} \left(\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj} \right),$$

siendo A , B y ξ perturbaciones escalares y h_{ij} es la perturbación tensorial, la cual satisface $h_{ii} = 0$, $h_{ij} = h_{ji}$ y $\partial_i h_{ij} = 0$.

Perturbaciones escalares

Primero enfocaremos nuestra atención al caso escalar ($h_{ij} = 0$). La métrica anterior puede ser implementada en Xpand de la siguiente forma:

```
<<xActxPand;
DefManifold[ M, 4, {α, β, γ, μ, ν, λ, σ} ];
DefMetric[ -1, g[-α,-β], CD, PrintAs -> "g"];
SetSlicing[ g, n, h, cd, {"|", "D"}, "FLFlat"];
DefMetricFields[ g, dg, h ];
DefMatterFields[u, du, h ];
$ConformalTime = False;
MyMetricRules = {dg[LI[1],-μ,-ν] :>- 2n[-μ]n[-ν]ϕh[LI[1]]
-ah[(n[-ν]cd[-μ]@Bsh[LI[1]]+n[-μ]cd[-ν]@Bsh[LI[1]])
+2h[-μ,-ν]ψh[LI[1]], dg[LI[2],-μ,-ν] :>- 2n[-μ]n[-ν]ϕh[LI[1]]^2
+2ah[]^2 Module[{α}, n[-μ]n[-ν]cd[-α]@Bsh[LI[1]]cd[α]@Bsh[LI[1]]]
-4ah[]ϕh[LI[1]](n[-ν]cd[-μ]@Bsh[LI[1]]+n[-μ]cd[-ν]@Bsh[LI[1]])
+4h[-μ,-ν]ψh[LI[1]]^2};
```



```
kill1[expr_] := expr /. xAct`xPand`φ[xAct`xTensorLI[1], xAct`xTensorLI[_]] :> 0;
kill2[expr_] := expr /. xAct`xPand`φ[xAct`xTensorLI[2], xAct`xTensorLI[_]] :> 0;
```

donde las perturbaciones escalares A , B y ξ se implementan con ϕh , $B h$ y ψh , respectivamente, y el campo escalar ϕ es implementado con φ . El conjunto de reglas **MyMetricRules** permite construir las perturbaciones de la métrica y las funciones **kill1** y **kill2** anulan las fluctuaciones del campo escalar (gauge de campo uniforme). La implementación de la densidad lagrangiana se realiza de la siguiente forma:

```
DefScalarFunction[V];
DefScalarFunction[F];
DefScalarFunction[F1];
DefScalarFunction[F2];
Lag = kill2[kill1[ExpandPerturbation@Perturbed[Conformal[g, gah2]
[Sqrt[-Detg[]] ((1/2)F[φ[]]RicciScalarCD[] - (1/2)CD[-μ][φ[]]CD[μ][φ[]]
- V[φ[]] + F1[φ[]]EinsteinCD[-μ, -ν]CD[μ][φ[]]CD[ν][φ[]] - F2[φ[]] (
RicciScalarCD[]^2 - 4 RicciCD[-α, -β] RicciCD[α, β]
+ RiemannCD[-α, -β, -γ, -λ] RiemannCD[α, β, γ, λ])]], 2]]];
ExtractOrder[ExtractComponents[SplitPerturbations[Lag, MyMetricRules, h]
, h], 2]//Expand;
```

La expresión resultante de la perturbación cuadrática de la acción puede reducirse eliminando términos de frontera. De esta manera, se obtiene

$$\delta S_S^2 = \int dt d^3 x a^3 \left[-3G_T \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial_i \xi + \Sigma A^2 - 2\Theta A \frac{\partial_i \partial_i B}{a^2} + 2G_T \dot{\xi} \frac{\partial_i \partial_i B}{a^2} + 6\Theta A \dot{\xi} - 2G_T A \frac{\partial_i \partial_i \xi}{a^2} \right] \quad (D.1)$$

donde Σ , Θ , F_T y G_T son definidas en la sección 4. De (D.1) se encuentra que las ecuaciones de movimiento de A y B están dadas por

$$\Sigma A + 3\Theta \dot{\xi} - \Theta \frac{\partial_i \partial_i B}{a^2} - G_T \frac{\partial_i \partial_i \xi}{a^2} = 0 \quad (D.2)$$

$$A = \frac{G_T}{\Theta} \dot{\xi} \quad (D.3)$$

Estas ligaduras permiten eliminar A y B de la acción (D.1). De esta manera, se obtiene

$$\delta S_S^2 = \int dt d^3 x a^3 \left[\left(3G_T + \Sigma \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial_i \xi - 2 \frac{G_T^2}{\Theta} \dot{\xi} \frac{\partial_i \partial_i \xi}{a^2} \right]$$

Omitiendo derivadas totales espaciales en el último término, la expresión anterior puede reescribirse de la siguiente forma

$$\delta S_S^2 = \int dt d^3 x a^3 \left[\left(3G_T + \Sigma \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial_i \xi + 2 \frac{G_T^2}{\Theta} \frac{\partial_i \dot{\xi} \partial_i \xi}{a^2} \right] \quad (D.4)$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \partial_i \xi \partial_i \xi \right] = \frac{d}{dt} \left[a \frac{G_T^2}{\Theta} \right] \partial_i \xi \partial_i \xi + 2a \frac{G_T^2}{\Theta} \partial_i \dot{\xi} \partial_i \xi,$$

entonces el ultimo termino de (D.4) puede reescribirse utilizando la expresión anterior (omitiendo derivada total). De este modo, la acción se reduce a:

$$\delta S_S^2 = \int dt d^3x \left[a^3 \left(\left(3G_T + \Sigma \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \frac{F_T}{a^2} \partial_i \xi \partial_i \xi \right) - \frac{d}{dt} \left(a \frac{G_T^2}{\Theta} \right) \partial_i \xi \partial_i \xi \right]$$

Organizando términos, esta expresión puede reescribirse como

$$\delta S_S^2 = \int dt d^3x a^3 \left[\left(3G_T + \Sigma \left(\frac{G_T}{\Theta} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(a \frac{G_T^2}{\Theta} \right) - F_T \right) \partial_i \xi \partial_i \xi \right]$$

Considerando las expresiones F_S y G_S definidas en la sección 4, la expresión de la acción a segundo orden queda de la forma

$$\delta S_S^2 = \int dt d^3x a^3 \left[G_s \dot{\xi}^2 - \frac{F_s}{a^2} \partial_i \xi \partial_i \xi \right] = \int dt d^3x a^3 G_s \left[\dot{\xi}^2 - \frac{c_s^2}{a^2} \partial_i \xi \partial_i \xi \right] \quad (\text{D.5})$$

donde $c_s^2 = F_S/G_S$. Para escribir esta expresión en forma canónica, consideremos las siguientes variables

$$dy_S = \frac{c_S}{a} dt, \quad \tilde{z}_S = \sqrt{2}a(F_S G_S)^{1/4}, \quad \tilde{u} = \tilde{z}_S \xi$$

Con esto, la acción anterior puede reescribirse como

$$\delta S_S^2 = \frac{1}{2} \int dy_S d^3x \left[(\tilde{u}')^2 - \partial_i \tilde{u} \partial_i \tilde{u} + \frac{\tilde{z}_S''}{\tilde{z}_S} \tilde{u}^2 \right]$$

donde la prima indica diferenciación con respecto y_S . La ecuación de movimiento resultante es

$$\tilde{u}_k'' + \left(k^2 - \frac{\tilde{z}_S''}{\tilde{z}_S} \right) \tilde{u}_k^2 = 0 \quad (\text{D.6})$$

donde el índice k representa el número de onda en el espacio de Fourier, y la prima indica diferenciación con respecto a y_S . Para probar que esta ecuación es equivalente a (4.10), consideremos el siguiente cambio de variables

$$\tilde{z}_S = \sqrt{c_S} z_S, \quad \tilde{u}_k = \sqrt{c_S} u_k, \quad dy_S = c_S d\eta.$$

Aplicando esta transformación a (D.6) se obtiene la ecuación (4.10), lo que prueba la equivalencia entre ambas ecuaciones

Perturbaciones tensoriales

Para implementar las perturbaciones tensoriales (h_{ij}) en el algoritmo Xpand, la función `MyMetricRules` debe modificarse de la siguiente manera:

```
MyMetricRules = {dg[LI[1], -μ_, -ν_] :> Eth[LI[1], -μ, -ν],
dg[LI[2], -μ_, -ν_] :> Module[{α}, Eth[LI[1], -μ, α] Eth[LI[1], -ν, -α]]};
```

donde las fluctuaciones h_{ij} se implementan con **Eth**. La expresión resultante de la perturbación cuadrática de la acción es:

$$\begin{aligned} \delta S_T^2 = \int dt d^3x \left[\frac{a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F}{8} + 2a^3 \dot{h}_{ij} \ddot{h}_{ij} F_2 H + 3a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 H^2 + a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 \dot{H} \right. \\ - \frac{a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} - 2a \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k \partial_k h_{ij} - 4a \dot{h}_{ij} F_2 H \partial_k \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F}{8} \\ + a F_2 H^2 \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + a F_2 \dot{H} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} - 2a F_2 \partial_j \dot{h}_{ik} \partial_k \dot{h}_{ij} \\ + 2a F_2 \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k \dot{h}_{ij} + \frac{F_2 \partial_k \partial_k h_{ij} \partial_l \partial_l h_{ij}}{a} - \frac{F_2 \partial_j \partial_i h_{kl} \partial_l \partial_k h_{ij}}{a} + \frac{2F_2 \partial_l \partial_j h_{ik} \partial_l \partial_k h_{ij}}{a} \\ \left. - \frac{F_2 \partial_l \partial_k h_{ij} \partial_l \partial_k h_{ij}}{a} \right] \end{aligned}$$

Omitiendo términos de superficie, la acción anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \delta S_T^2 = \int dt d^3x \left[\frac{a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F}{8} + 2a^3 \dot{h}_{ij} \ddot{h}_{ij} F_2 H + 3a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 H^2 + a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 \dot{H} \right. \\ - \frac{a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} - 2a \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k \partial_k h_{ij} - 4a \dot{h}_{ij} F_2 H \partial_k \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F}{8} \\ + a F_2 H^2 \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + a F_2 \dot{H} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} + 2a F_2 \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k \dot{h}_{ij} \left. \right] \quad (D.7) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left(a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 H \right) = 3a^3 H^2 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 + 2a^3 \dot{h}_{ij} \ddot{h}_{ij} F_2 H + a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \dot{F}_2 H + a^3 \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} F_2 \dot{H}$$

entonces el cuarto termino de (D.7) puede reescribirse utilizando la expresión anterior (omitendo derivada total). De esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta S_T^2 = \int dt d^3x \left[a^3 \left(\frac{F}{8} - \dot{F}_2 H - \frac{F_1 \dot{\phi}^2}{8} \right) \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - 2a \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k \partial_k h_{ij} - 4a \dot{h}_{ij} F_2 H \partial_k \partial_k h_{ij} \right. \\ - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F}{8} + a F_2 H^2 \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + a F_2 \dot{H} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} \\ \left. + 2a F_2 \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k \dot{h}_{ij} \right] \quad (D.8) \end{aligned}$$

El tercer y sexto término puede reescribirse al tener en cuenta las siguientes expresiones:

$$\partial_k \left(4a \dot{h}_{ij} F_2 H \partial_k h_{ij} \right) = 4a F_2 H \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k h_{ij} + 4a \dot{h}_{ij} F_2 H \partial_k \partial_k h_{ij} \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a F_2 H \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij}) = a F_2 H^2 \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + a \dot{F}_2 H \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + a F_2 \dot{H} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \\ + 2a F_2 H \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k h_{ij} \quad (D.10) \end{aligned}$$

Omitiendo términos de superficie y derivadas totales, la expresión (D.8) toma la forma

$$\begin{aligned} \delta S_T^2 = \int dt d^3x \left[a^3 \left(\frac{F}{8} - \dot{F}_2 H - \frac{F_1 \dot{\phi}^2}{8} \right) \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - 2a \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k \partial_k h_{ij} + 2a F_2 H \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k h_{ij} \right. \\ \left. - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F}{8} - a \dot{F}_2 H \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} + 2a F_2 \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k \dot{h}_{ij} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

El segundo término puede reescribirse si se tiene en cuenta las siguientes expresiones

$$\partial_k \left(2a \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k h_{ij} \right) = 2a \partial_k \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k h_{ij} + 2a \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k \partial_k h_{ij}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(a \partial_k \dot{h}_{ij} F_2 \partial_k h_{ij} \right) = a H \partial_k \dot{h}_{ij} F_2 \partial_k h_{ij} + a \partial_k \ddot{h}_{ij} F_2 \partial_k h_{ij} + a \partial_k \dot{h}_{ij} \dot{F}_2 \partial_k h_{ij} \\ + a \partial_k \dot{h}_{ij} F_2 \partial_k \dot{h}_{ij} \end{aligned}$$

Con esto, la acción (D.11) queda de la forma

$$\begin{aligned} \delta S_T^2 = \int dt d^3x \left[a^3 \left(\frac{F}{8} - \dot{F}_2 H - \frac{F_1 \dot{\phi}^2}{8} \right) \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - 2a \partial_k \dot{h}_{ij} \dot{F}_2 \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F}{8} \right. \\ \left. - a \dot{F}_2 H \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} - \frac{a \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} F_1 \dot{\phi}^2}{8} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

El cuarto término puede reescribirse al tener en cuenta la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \left(a \dot{F}_2 \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \right) = a \dot{F}_2 H \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + a \ddot{F}_2 \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} + 2a \dot{F}_2 \partial_k \dot{h}_{ij} \partial_k h_{ij}$$

Usando esto y simplificando, se tiene que

$$\delta S_T^2 = \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 \left[\left(F - 8\dot{F}_2 H - F_1 \dot{\phi}^2 \right) \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \left(F - 8\ddot{F}_2 + F_1 \dot{\phi}^2 \right) \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \right]$$

Reemplazando las expresiones (4.15) y (4.16) en la acción anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S_T^2 &= \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 \left[G_T \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - \frac{F_T}{a^2} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 G_T \left[\dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} - \frac{c_T^2}{a^2} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

donde $c_T^2 = F_T/G_T$. Siguiendo un procedimiento similar al de perturbaciones escalares, se obtiene que la forma canónica de la acción anterior es

$$\delta S_T^2 = \frac{1}{2} \int dy_T d^3x \left[(\tilde{u}'_{ij})^2 - \partial_k \tilde{u}_{ij} \partial_k \tilde{u}_{ij} + \frac{\tilde{z}_T''}{\tilde{z}_T} \tilde{u}_{ij}^2 \right]$$

donde $dy_T = c_S dt/a$, $\tilde{z}_T = a(F_T G_T)^{1/4}/2$, $\tilde{u}_{ij} = \tilde{z}_T h_{ij}$, y la prima indica diferenciación con respecto y_T . La ecuación de movimiento resultante es

$$\tilde{u}_{ij}'' + \left(k^2 - \frac{\tilde{z}_T''}{\tilde{z}_T}\right) \tilde{u}_{ij}^2 = 0 \quad (\text{D.14})$$

De modo similar al explicado en perturbaciones escalares, la equivalencia entre las ecuaciones (D.14) y (4.25) se puede probar fácilmente al considerar el siguiente cambio de variables

$$\tilde{z}_T = \sqrt{c_T} z_T, \quad \tilde{u}_{ij} = \sqrt{c_T} u_{ij}, \quad dy_T = c_T d\eta$$

Bibliografía

- [1] S. Perlmutter, et al., Nature **391**, 51 (1998).
- [2] A.G. Riess, et al., Astron. J. **116**, 1009 (1998); Astron. J. **117**, 707 (1999).
- [3] M. Hicken, et al., Astrophys. J. **700**, 1097 (2009).
- [4] M. Kowalski, et. al., Astrophys. J., **686**, p.749 (2008).
- [5] E. Komatsu, et al. (WMAP Collaboration), Astrophys. J. Suppl., 180, (2009) 330.
- [6] D. N. Spergel et al. [WMAP Collaboration], arXiv:astro-ph/0603449.
- [7] W. J. Percival, et al., Mon. Not. R. Astron. Soc., **401** (2010), 2148.
- [8] P. A. R. Ade et al., Planck Collaboration (Planck 2015 results. XX. Constraints of inflation), Astron. and Astrophys. **594**, A20 (2016); arXiv:1502.02114.
- [9] Y. Akrami et al., (Planck 2018 results. X. Constraints on inflation), arXiv:1807.06211.
- [10] P. A. R. Ade et al., A Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data, Phys. Rev. Lett. **114**, 101301 (2015); arXiv:1502.00612 .
- [11] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23** 347 (1981) .
- [12] A. D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982). .
- [13] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett.**48**, 1220 (1982) .
- [14] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **91B** 99 (1980) .
- [15] V. F. Mukhanov, G. V. Chibisov, JETP Letters **33** 532 (1981) .
- [16] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, Phys. Rept. **215** 203 (1992).
- [17] A. H. Guth, S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **49**, 1110 (1982) .
- [18] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, M. S. Turner, Phys. Rev. D, 28, 679 (1983).
- [19] A. D. Linde, Lect. Notes Phys., **738** 1 (2008), arXiv:0705.0164.
- [20] D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov, *Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory*, World Scientific (2011).

-
- [21] D. H. Lyth, A. Riotto, Phys. Rept. **314** 1 (1999), arxiv:9807278.
 - [22] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999) arXiv:9904075.
 - [23] R. Kallosh, Lect. Notes Phys. **738**,119 (2008); c0702059.
 - [24] S. M. Carroll, LivingRev. Rel. **4**, 1 (2000). arXiv:astro-ph/0004075.
 - [25] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Int. J Mod. Phys. D **15**, 1753-1936 (2006).
 - [26] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
 - [27] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483, (2002).
 - [28] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1969 (2003).
 - [29] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68**, 123512 (2003).
 - [30] S. M. Carroll, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067 (1998).
 - [31] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rep. **505**, 59 (2011).
 - [32] K. Bamba, et al, Eur. Phys. J. C **67**, 295 (2010).
 - [33] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark energy theory and observations*, Cambridge University Press, 2000.
 - [34] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, L. Sebastiani, S. Zerbini, Phys. Rev. D **77**, 046009 (2008), arXiv:0712.4017.
 - [35] S. Nojiri, S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **77** 026007 (2008), arXiv:0710.1738.
 - [36] E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, L. Sebastiani, S. Zerbini, Phys. Rev. D **83** 086006 (2011), arXiv:1012.2280.
 - [37] E. Elizalde, S.D. Odintsov, L. Sebastiani, R. Myrzakulov, Nucl. Phys. B **921** 411-435 (2017), arXiv:1706.0187.
 - [38] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, S. Banerjee, Nucl. Phys. B **938** 935 (2019), arXiv:1807.00335.
 - [39] S. Nojiri, S. D. Odintsov and V. K. Oikonomou, Phys. Rept. **692** 1 (2017), arXiv:1705.11098.
 - [40] S. Nojiri, S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115-146 (2007).
 - [41] T. Chiba, Phys. Lett. B **575**, 1 (2003); A. L. Erickcek, T. L. Smith, M. Kamionkowski, Phys. Rev. D **74**, 121501 (2006); I. Navarro, K. V. Acoleyen, JCAP **0702**, 022 (2006); G. J. Olmo, Phys. Rev. Lett. **95**, 261102 (2005); G. J. Olmo, Phys. Rev. D **72**, 083505 (2005); G. J. Olmo, Phys. Rev. D **75**, 023511 (2006); P. Zhang, Phys. Rev. D **76**, 024007 (2007); W. Hu, I. Sawicki Phys. Rev. D **76**, 064004 (2007).
 - [42] S. Tsujikawa, Lect. Notes Phys. **800** (2010).
 - [43] L. Amendola, C. Charmousis, S. C. Davis, JCAP **0710**, 004 (2007).

-
- [44] L. Amendola, C. Charmousis, S. C. Davis, JCAP **0612**, 020 (2006).
- [45] S. Tsujikawa, arXiv:1004.1493 [astro-ph.CO] (2010).
- [46] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press (1987).
- [47] M. Gasperini, *Elements of String Cosmology*, Cambridge University Press, 2007.
- [48] M. Gasperini, G. Veneziano, Physics Reports **373**, 1 (2003).
- [49] J. Hwang, H. Noh, Phys. Rev. D **61**, 043511 (2000).
- [50] C. Cartier, J. Hwang, E. Copeland, Phys. Rev. D **64**, 103504 (2001).
- [51] J. E. Lidsey, D. Wands, E. J. Copeland, Physics Reports, **337** 343 (2000).
- [52] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
- [53] H. Liu, A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **533**, 88 (1998).
- [54] S. Nojiri, S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **444**, 92 (1998).
- [55] C. Lanczos, Annals of Mathematics. **39**, 4 (1938).
- [56] L. N. Granda, Mod. Phys. Lett. A **27**, 1250018 (2012).
- [57] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sami Mod. Phys. Rev. D **74**, 046004 (2006).
- [58] M. Ivanov, A. V. Toporensky, Grav. Cosmol. **18**, 43 (2012).
- [59] G. Cognola, et al.: Phys. Rev. D **75**, 086002 (2007).
- [60] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sasaki, Phys. Rev. D **71**, 123509 (2005).
- [61] L. N. Granda, D. F. Jiménez, C. Sanchez, Int. J. Mod. Phys. D **22**, 1350055 (2013).
- [62] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, Phys. Rev. D **98**, (2018) 044039, arXiv:1808.05045.
- [63] Z. Yi, Y. Gong, M. Sabir, arXiv:1804.09116.
- [64] Z. K. Guo, D. J. Schwarz, Phys. Rev. D **80**, 063523 (2009), arXiv:0907.0427.
- [65] Z. K. Guo, D. J. Schwarz, Phys. Rev. D **81**, 123520 (2010), arXiv:1001.1897.
- [66] P. X. Jiang, J. W. Hu, Z. K. Guo, Phys. Rev. D **88**, 123508 (2013), arXiv:1310.5579.
- [67] S. Koh, B. H. Lee, W. Lee, G. Tumurtushaa, Phys. Rev. D **90**, 063527 (2014), arXiv:1404.6096.
- [68] S. Koh, B. H. Lee and G. Tumurtushaa, Phys. Rev. D **95**, 123509 (2017), arXiv:1610.04360.
- [69] P. Kanti, R. Gannouji, N. Dadhich, Phys. Rev. D **92**, 041302 (2015), arXiv:1503.01579.

-
- [70] C. van de Bruck, K. Dimopoulos, C. Longden, C. Owen, arXiv:1707.06839.
 - [71] P. Kanti, J. Rizos, K. Tamvakis, Phys. Rev. D **59**, 083512 (1999), arxiv:9806085.
 - [72] K. Nozari, N. Rashidi, Phys. Rev. D **95**, 123518 (2017), arXiv:1705.02617 .
 - [73] S. Chakraborty, T. Paul, S. SenGupta, arXiv:1804.03004.
 - [74] V. Faraoni, *Cosmology in scalar-tensor gravity*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
 - [75] Y. Fujii, K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge University Press, 2004.
 - [76] T. Chiba, Phys.Rev. D **60**, 083508 (1999).
 - [77] J. P. Uzan, Phys. Rev. D **59**, 123510 (1999).
 - [78] L. Amendola, Phys. Rev. D **60**, 043501, (1999).
 - [79] V. Faraoni, Phys. Rev. D **70**, 044037 (2004).
 - [80] V. Faraoni, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 471 (2002).
 - [81] E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, Phys. Rev. D **70**, 043539 (2004).
 - [82] F. C. Carvalho, A. Saa, Phys. Rev. D **70**, 087302 (2004).
 - [83] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet, A. A. Starobinsky, JCAP **09**, 016 (2006).
 - [84] F. Perrotta, C. Baccigalupi and S. Matarrese, Phys. Rev. D **61**, 023507 (1999).
 - [85] A. Riazuelo and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **62**, 083506 (2000).
 - [86] B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski, A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 2236 (2000).
 - [87] G. Esposito-Farese, D. Polarski, Phys. Rev. D **63**, 063504 (2001).
 - [88] T. Chiba, Phys. Rev. D **64**, 103503 (2001).
 - [89] C. Germani, A. Kehagias, Phys. Rev. Lett. **105**, 011302 (2010), arXiv:1003.2635.
 - [90] L. N. Granda, JCAP **1104**, 016 (2011), arXiv:1104.2253.
 - [91] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511 (2011).
 - [92] J. Hwang, H. Noh, Phys. Rev. D **71** 063536 (2005).
 - [93] Sushkov, S.V.: Phys. Rev. D. **80**, 103505 (2009). arXiv:0910.0980 [gr-qc].
 - [94] Sushkov, S.V.: Phys. Rev. D. **85**, 123520 (2012). arXiv:1204.6372 [gr-qc].
 - [95] L. N. Granda, Int. J. Theor. Phys.: **51**, 2813 (2012).
 - [96] L. N. Granda, D. F. Jimenez, Astropart. Phys. **103** 115 (2018).
 - [97] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, Phys. Lett. B **797**, 134874 (2017).

-
- [98] B. P. Abbott et al. (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017), arXiv:1710.05832.
- [99] B. P. Abbott et al., The Astrophysical Journal Letters **848**, L13 (2017).
- [100] B. P. Abbott et al., The Astrophysical Journal Letters **848**, L12 (2017).
- [101] L. N. Granda, D. F. Jimenez, Int. J. Mod. Phys. D **27**, 1850030 (2018).
- [102] L. N. Granda, D. F. Jimenez, Eur. Phys. J. C **79**, 772 (2019).
- [103] L. N. Granda, D. F. Jimenez, JCAP **1909**, 007 (2019).
- [104] D. F. Jimenez, L. N. Granda, E. Elizalde, *Cosmology in a model with Lagrange multiplier, and Gauss-Bonnet and non-minimal kinetic couplings*, Accepted in IJMPD.
- [105] T. Nutma, Comput. Phys. Commun. **185**, 1719 (2014), arXiv:1308.3493.
- [106] C. Pitrou, X. Roy, O. Umeh, Class. Quant. Grav. **30** 165002 (2013), arXiv:1302.6174.
- [107] D. Brizuela, J. M. Garcia, G. A. M. Marugan, Gen. Rel. Grav. **41**, 2415 (2009).
- [108] C. L. Bennett et al., ApJ (2012), arXiv:1212.5225.
- [109] S. Carroll, *Space time and geometry. An introduction to general relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [110] G. Gamow, Phys. Rev. **70** 572 (1946).
- [111] A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 491 (1965).
- [112] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Westview Press, 1994.
- [113] P. J. E. Peebles, J. T. Yu, ApJ **162**, 815 (1970).
- [114] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [115] D. Baumann, arXiv:0907.5424 (2009).
- [116] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [117] V. Mukhanov, S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press, 2007.
- [118] C. Gianluca, *Classical and Quantum Cosmology*, Springer International Publishing, 2017.
- [119] C. Gianluca, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [120] J. Cepa. *Cosmologia física*, Ediciones AKAL, 2007.
- [121] C. P. Burgess, P. Grenier, D. Hoover, J. Cosmol. Astropart. Phys. **0403**, 008 (2004).
- [122] L. N. Granda, D. F. Jimenez, Phys. Rev. D **90**, 123512 (2014).
- [123] T. Koivisto, D. F. Mota, Phys. Lett. B **644**, 104 (2007).

-
- [124] A. Felice, M. Hindmarsh, M. Trodden, JCAP **0608**, 005 (2006).
- [125] I. Quiros, E. Teste, arXiv:1005.2600 [gr-qc].
- [126] G. Calcagni, S. Tsujikawa, M. Sami, Class. Quant. Grav. **22**, 3977 (2005).
- [127] Capozziello, S., Lambiase, G., Schmidt, H.J.: Annalen Phys. **9**, 39-48 (2000). arXiv:gr-qc/9906051.
- [128] Amendola, L.: Phys. Lett. B **301**, 175-182 (1993). arXiv:gr-qc/9302010.
- [129] A. Albrecht, C. Skordis, Phys. Rev. Lett **84**, 2076 (2000).
- [130] A. Albrecht, C. P. Burgess, C. Skordis, Phys. Rev. D **65**, 123507 (2002).
- [131] P. Brax, J. Martin, Phys. Lett. B **468**, 40 (1999).
- [132] P. A. R. Ade et al., Planck Collaboration (Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters), Astron. and Astrophys. **594**, A13 (2016), arXiv:1502.01589.
- [133] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, R. J. Scherrer, Phys. Rev. D **84**, 063003 (2011).
- [134] I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **84**, 103508 (2011).
- [135] A. A. Coley, *Dynamical Systems and Cosmology*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [136] S. Sastry, *Nonlinear systems. Analysis, stability and control*, Springer publishers, 1999.
- [137] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, 2002.
- [138] L. N. Granda, D. F. Jimenez, Eur. Phys. J. C **77**, 679 (2017).
- [139] M. Sami, M. Shahalam, M. Skugoreva, A. Toporensky, Phys. Rev. D **86**, 103532 (2012).
- [140] S. Nojiri, S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, Phys. Rev. D **99**, 044050 (2019).
- [141] H. Noh and J. c. Hwang, Phys. Lett. B **515** 231 (2001), arxiv:0107069.
- [142] J. c. Hwang and H. Noh, Phys. Rev. D **66** 084009 (2002), arxiv:0206100].
- [143] D. I. Kaiser and E. I. Sfakianakis, Phys. Rev. Lett. **112** 1 (2014), 011302, arXiv:1304.0363.
- [144] D. J. Brooker, S. D. Odintsov, R. P. Woodard, Nucl. Phys. B **911**, 318 (2016), arXiv:1606.05879.
- [145] B. Andrews, C. Hopper, *The Ricci Flow in Riemannian Geometry*, Springer publishers, 2011.
- [146] B. Chow, D. Knopft, *The Ricci Flow: An introduction*, American Mathematical Society, 2004.