



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: VISUALIZACIONES, INTUICIONES Y  
DEMOSTRACIONES FORMALES.

Jonathan Estevan Lucero Chaves – 1130126

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2017

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: VISUALIZACIONES, INTUICIONES Y  
DEMOSTRACIONES FORMALES.

Jonathan Estevan Lucero Chaves – 1130126

Trabajo De Grado Para Optar Al Título De Licenciado En Matemáticas Y Física

Director

Dr. Luis Cornelio Recalde Caicedo

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2017

*Dedico este trabajo a:*

*Mis Padres María y Armando por darme esperanza.*

*Mis Hermanos, en especial Sodier y Hugo por apoyarme cuando más lo  
necesitaba.*

*Mi tía Lucy y a Tania Enríquez por sus grandes consejos.*

*Mi Danna por siempre estar a mi lado.*

*Agradecimientos:*

*Al profesor Luis Recalde, por su constante asesoría y dirección del presente trabajo.*

*A mis evaluadoras Luz Victoria De La Pava y Martha Bobadilla por sacar de su tiempo para leer y aportar a mi trabajo.*

*A mis profesores por compartirme de su conocimiento y guiarme en esta bonita profesión.*

*A mis compañeros, en especial a Sebastian Lopez por ayudarme en mis dificultades.*

## Tabla de Contenido

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| RESUMEN .....                                             | 7         |
| <b>0. INTRODUCCIÓN .....</b>                              | <b>8</b>  |
| <b>1. INTUICIONES DE UN TEOREMA EN CONSTRUCCIÓN .....</b> | <b>13</b> |
| 1.1. La Conjetura de Girard .....                         | 13        |
| 1.2. Descartes y su regla de los signos.....              | 18        |
| 1.3. Newton y las raíces de una ecuación polinómica. .... | 22        |
| 1.4. El contraejemplo de Leibniz. ....                    | 26        |
| <b>2. VISUALIZANDO LA DEMOSTRACIÓN DEL TFA .....</b>      | <b>30</b> |
| 2.1. El Teorema de D'Alembert. ....                       | 30        |
| 2.1.1. <i>El intento de D'Alembert</i> .....              | 32        |
| 2.2. El papel de Euler .....                              | 35        |
| 2.1.2. El intento de Euler .....                          | 38        |
| 2.3. El aporte de Laplace.....                            | 41        |
| 2.3.1. <i>El intento de Laplace</i> .....                 | 43        |
| <b>3. GAUSS Y SUS DEMOSTRACIONES FORMALES.....</b>        | <b>47</b> |
| 3.1. Gauss, su vida y obras.....                          | 47        |
| 3.2. El plano de Gauss.....                               | 48        |
| 3.3. Críticas a los intentos de demostración.....         | 51        |
| 3.4. El Teorema Fundamental del Álgebra .....             | 52        |
| 3.4.1. Primera Demostración Formal.....                   | 53        |
| 3.4.2. Segunda Demostración Formal.....                   | 63        |
| 3.4.3. Tercera Demostración Formal .....                  | 67        |
| <b>4. REFLEXIONES Y CONCLUSIONES .....</b>                | <b>70</b> |
| <b>5. ANEXOS.....</b>                                     | <b>79</b> |
| <b>6. REFERENCIAS.....</b>                                | <b>83</b> |

## Tabla de Figuras

|                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1. Curva $TM$ con $z$ infinitamente pequeño. ....                                                                                                 | 33 |
| Figura 2. Curva $TM$ con coordenadas reales de $AC$ , $CT$ .....                                                                                         | 34 |
| Figura 3. Construcción del cuadrado de área 2. ....                                                                                                      | 49 |
| Figura 4. La duplicación del área de un cuadrado. ....                                                                                                   | 49 |
| Figura 5. Generación de magnitudes cuadradas.....                                                                                                        | 50 |
| Figura 6. La unidad en el dominio complejo de Gauss.....                                                                                                 | 51 |
| Figura 7. Construcción de la perpendicular con longitud $T$ sobre el punto $P$ ; donde $T > 0, T' < 0$ y $T'' = 0$ . ....                                | 57 |
| Figura 8. Primera y segunda curva para $r$ infinito y $m = 4$ .....                                                                                      | 58 |
| Figura 9. a) Proceso de división de la circunferencia en $4m$ puntos, b): Una circunferencia dividida para $m = 4$ .....                                 | 59 |
| Figura 10. Valores positivos y negativos de la superficie $T$ , según los valores del ángulo $m\varphi$ para la ecuación $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ ..... | 60 |
| Figura 11. a) Ramas numeradas de las curvas $T = 0$ y $U = 0$ asociadas a una ecuación de cuarto grado. b) La rama 2 se pierde en el círculo.....        | 62 |
| Figura 12. Conexiones entre ramas .....                                                                                                                  | 63 |

## RESUMEN

En el presente trabajo de grado se realiza un análisis histórico de los procesos de rigor que surgen en la construcción histórica del Teorema Fundamental del Álgebra, tomando como referencia las intuiciones, visualizaciones y demostraciones formales que se van dando en el devenir histórico. En la educación secundaria y en algunos cursos universitarios, algunos contenidos del álgebra como la resolución de ecuaciones, se enseñan como una serie de técnicas y procesos algorítmicos que dejan de lado la parte conceptual; en este trabajo se busca observar cómo han evolucionado los procesos de demostración en el álgebra, que van desde las intuiciones, pasan por las visualizaciones y se consolidan con los procesos formales que permiten demostrar dicho teorema; este trabajo, se realiza con el deseo de hacer un aporte desde la historia para superar un poco el tecnicismo con que algunos contenidos del álgebra, como en el caso de la resolución de ecuaciones, se han venido trabajando.

**Palabras Clave:** Resolución de ecuaciones, Teorema Fundamental del Álgebra, Demostración, Números complejos, Intuición, Visualización, Formalización, Educación Matemática.

---

## 0. INTRODUCCIÓN

---

El presente trabajo se inscribe en la línea de formación en Historia y Epistemología de las Matemáticas del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle.

El trabajo de grado está enfocado a los estudiantes universitarios que se encuentran cursando carreras como Licenciatura en matemáticas y física, y Licenciatura básica con énfasis en educación matemática. En nuestro contexto colombiano, se observa que en el currículo de algunas universidades el proceso de enseñanza de la demostración corresponde al grupo de matemáticas avanzadas o cursos de formación profesional de los planes de Matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas; los cuales se profundizan con mayor rigor en los últimos semestres de las carreras en cursos como álgebra moderna, topología, análisis matemático, etc. Así mismo, se ha visto que una de las grandes dificultades, las cuales son causa de deserción y repetición de estas materias, es el hecho de no saber demostrar, pues no conocen la forma de hacerlo ni la importancia que tiene la demostración en matemáticas.

Una de las causas de esta problemática es que tanto en el colegio como en los primeros cursos de universidad algunos conceptos de las matemáticas son enseñados como una serie de técnicas procedimentales, que en el caso del álgebra sirven para resolver ecuaciones. En (Pedemonte, 2008, p. 386) se afirma:

(...) generalmente el álgebra no se considera como una manera de ver y expresar las relaciones, sino como un cuerpo de normas y procedimientos para la manipulación de símbolos. Los estudiantes son normalmente capaces de desarrollar los cálculos, pero no son conscientes de los axiomas y teoremas que se utilizan en su realización.

Inicialmente, en el colegio los profesores de matemáticas se enfrentan a que sus alumnos no comprenden la necesidad de realizar demostraciones, pues los estudiantes en algunas ocasiones solo utilizan una simple verificación y quedan satisfechos con ello; en otras ocasiones creen que el teorema es verdadero, ya que les resulta evidente, por una visualización geométrica que se haga de él o por una argumentación utilizando las TICS. Pero, si se les invita a demostrar un teorema o una propiedad, el simple hecho de empezar a demostrarlo se les dificulta, quizás porque inicialmente no entienden el por qué sea necesaria la demostración.

Además, el hecho de que los alumnos se puedan mover dentro de un marco axiomático riguroso y formal implica una madurez que comienza a alcanzarse en los últimos años de escolaridad de la educación media en grados diez y once, cuyo pleno manejo requiere de un desarrollo más profundo del pensamiento matemático. Sin embargo, desde edades tempranas, es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones; aunque sin exigencia de formalización.

Luego, dado que en el ámbito del álgebra que se dicta en la Universidad hay una serie de resultados que exigen demostración, en el presente trabajo se estudia la importancia de la demostración desde un punto de vista histórico, observando cómo se ha pasado de técnicas procedimentales a procesos rigurosos. Para ello, el estudio se centrará en el Teorema Fundamental del Álgebra (TFA), el cual establece que toda ecuación polinómica  $f(x) = 0$ , con coeficientes complejos, de grado  $n \geq 1$ , tiene al menos una o exactamente  $n$  raíces complejas, las cuales pueden repetirse. Dicho teorema es sustancial en esta investigación porque muestra, desde el punto de vista histórico, cómo han sido los procesos de rigor en varias ramas de las matemáticas como el álgebra, la geometría, el análisis, variable compleja, etc.; además, dentro de tales ramas de las matemáticas, se encuentran conceptos como la solución de ecuaciones y los números complejos.

Por tanto, se considera pertinente indagar sobre los cambios que se han dado en los procesos de rigor en el desarrollo histórico del TFA, teniendo en cuenta que su demostración marca un punto de inflexión muy importante en la emergencia del álgebra como rama de las matemáticas, pues con dicho teorema se inauguran las demostraciones de tipo algebraico. Esto lleva a preguntarnos sobre cuáles son los procesos intuitivos, las visualizaciones y las demostraciones formales que realizan diferentes matemáticos para demostrar el TFA.

En este trabajo entendemos a la intuición como un razonamiento inductivo, con el cual se trabaja ciertas propiedades de un objeto matemático, para esto se construyen y formulan algunos ejemplos particulares, los cuales brindan un cierto grado de verdad, de esta manera, el sujeto interpreta la propiedad del objeto como cierta, autoevidente y auto consistente, es decir que si se trata de buscar un contraejemplo no es fácil encontrarlo, después, el sujeto realiza generalizaciones que se cumplen para un gran conjunto de ejemplos, incluso este puede llegar a lanzar conjeturas sin necesidad de realizar una demostración.

Así mismo, para nosotros la visualización tienen que ver con los esquemas lógicos de demostración que realiza un matemático, en esta etapa, los procesos demostrativos no alcanzan el objetivo final el cual es demostrar con todo el rigor matemático un enunciado, esto debido al surgimiento de algunos vacíos conceptuales; la visualización corresponde a los intentos de demostración realizados por un sujeto, los cuales se encuentran en una fase pre-formal. Es gracias a la visualización que se brinda herramientas para poder demostrar un enunciado de forma clara y concisa.

En la etapa formal, se encuentran las demostraciones rigurosas que cumplen con las condiciones necesarias para ser aceptadas por la comunidad matemática; en esta última etapa se utiliza un

lenguaje lógico, axiomático, incluso algunos teoremas que son de ayuda, para demostrar un enunciado.

Así, se espera dejar un material de consulta para didactas, profesores, estudiantes y todo aquel que desee dar cuenta de los momentos históricos que se presentaron en la historia del TFA. Las problemáticas descritas anteriormente, se desarrollan en los siguientes capítulos:

En el capítulo 1, se realiza un análisis histórico-epistemológico de las intuiciones, aportes y contraejemplos que dieron diferentes matemáticos acerca del TFA. Además, se observan los diferentes ejemplos que dieron tanto Rene Descartes (1596-1650) como Albert Girard (1595-1632), los cuales sirvieron para dar veracidad a sus reglas y con esto conjeturar el TFA, sin aportar demostración alguna; luego, con Isaac Newton (1642-1727) se obtiene un aporte importante para demostraciones futuras con la formalización del concepto de polinomios simétricos; finalmente Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), para solucionar un problema del cálculo, hace uso del TFA, sin aludir a su demostración.

En el capítulo 2, se analizan los diferentes intentos de demostración que fueron presentados por distintos matemáticos como Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783) y Pierre Simon Laplace (1749-1827); el primero en publicar su intento de demostración es D'Alembert, quien haciendo uso de la variable compleja y el método analítico, intenta probar que las raíces de una ecuación polinómica son de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ . El segundo en presentar su intento de demostración es Euler, quien gracias al método algebraico, demuestra que una ecuación de grado par se puede descomponer en factores cuadráticos de menor grado. Finalmente, fue Laplace, quien haciendo uso de un método algebraico, intenta demostrar que una ecuación polinómica se puede descomponer en factores cuadráticos de menor grado. De esta manera, se

presentan los intentos de demostración que fueron de gran ayuda para la comunidad matemática en general, en especial para Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien retomó sus intentos y dio una demostración formal del TFA. En los intentos presentados por los matemáticos anteriores, también se hizo uso de la geometría y de conceptos que aún no habían sido formalizados, un ejemplo de esto es el hecho de haber aceptado, sin demostrar la existencia de las raíces de una ecuación polinómica.

En el capítulo 3 se trabaja las demostraciones formales de Gauss, las cuales desarrolló desde diversas perspectivas: algebraica, geométrica y analítica. En su primera demostración, Gauss soluciona el problema, que estaba sin concluir, respecto a la existencia de la raíz de un polinomio. Igualmente, en este capítulo se muestra la manera en la que Gauss incorpora geoméricamente las cantidades imaginarias, que aunque ya eran conocidas por la comunidad, su naturaleza matemática no era aceptada completamente.

El capítulo 4 es un capítulo de conclusiones, el cual trata de sintetizar la propuesta que se ha desarrollado en este trabajo de investigación; en particular los procesos de intuición, visualización y demostración formal que pueden ser un buen elemento para trabajar desde un punto de vista matemático, que aporte a la formación de estudiantes que se encuentran en el nivel medio, y superior como es el caso de los futuros licenciados en matemáticas; además, se plantea una aplicación de cómo deberían llevarse a cabo estos procesos de demostración.

---

## 1. INTUICIONES DE UN TEOREMA EN CONSTRUCCIÓN

---

*El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se pide.*

*D'Alembert*

Haciendo un recorrido histórico se logra percibir que a partir de la resolución de ecuaciones es que se empiezan a ver los primeros indicios del TFA. En el siglo XVI el matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), publica en el *Ars magna* la resolución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas. Después de esto, surge el interés de trabajar la teoría de ecuaciones, creando diferentes métodos y reglas para encontrar las soluciones. Lo anterior permitió nuevos avances en la matemática, y en especial en el álgebra, dando paso al TFA, el cual establece que toda ecuación polinómica  $f(x) = 0$ , con coeficientes complejos, de grado  $n \geq 1$ , tiene al menos una o exactamente  $n$  raíces complejas las cuales se pueden repetir. Este enunciado fue inicialmente planteado como una conjetura por Girard y Descartes, pues al resolver ecuaciones observaron la relación entre los coeficientes de una ecuación y su grado. Descartes trabajó con raíces cuadradas de cantidades negativas, las cuales denomina cantidades imaginarias. Teniendo en cuenta estas soluciones Descartes plantea que una ecuación de dimensión  $n$ , tiene  $n$  soluciones. Otros matemáticos como Newton y Leibniz también trabajaron con el TFA, pero este último, duda de su veracidad.

### 1.1. La Conjetura de Girard

El matemático francés Albert Girard (1595-1632), nació en Saint-Mihiel, quien fue miembro de la iglesia reformada y tuvo que establecerse en los Países Bajos, donde realizó sus estudios,

graduándose a los veintidós años como matemático en la Universidad de Leiden-Holanda. Girard sirvió al ejército del príncipe de Orange, aportando desde la matemática a la ingeniería militar. Girard se concentró fundamentalmente en el estudio del álgebra, la trigonometría y la aritmética, en dichas áreas publicó algunas obras, entre las que nos resulta de particular interés *Invention nouvelle en l'algebre* de 1629, la cual marca el inicio de las discusiones en torno al TFA. Girard trabajó en la teoría de ecuaciones y logró dar un gran paso al admitir soluciones positivas, negativas e imposibles. Para realizar la formulación del teorema, inicialmente da algunas definiciones importantes, las cuales son explicadas por medio de ejemplos.

En cuanto a las ecuaciones, estas constan de dos o más términos, por ejemplo  $x^2$  es un término con denominación (grado o exponente) 2,  $6x$  es otro termino con denominación 1, y 40 es otro termino con denominación 0, si las juntamos en una ecuación por medio de operaciones, formamos la siguiente ecuación:

$$x^2 = 6x + 40;$$

la cual puede ser clasificadas en simples y mixtas. Las ecuaciones simples son aquellas que tienen solo dos términos, por ejemplo:

$$x^2 = 49.$$

Las ecuaciones compuestas o mixtas, son aquellas que constan de varios términos, como la ecuación:

$$x^2 = 6x + 40.$$

Cuando se comparan los términos de una ecuación, el izquierdo, es llamado tema o antecedente; y el derecho, predicado o consecuente; por ejemplo, en:

$$3x^2 - 4x = 70,$$

$3x^2 - 4x$  es el antecedente y 70 es el consecuente.

En *Invention nouvelle en l'algebre*, Girard define ecuaciones completas, incompletas, primitivas y derivadas. Las ecuaciones completas, son las que tienen todos sus términos sin dejar ninguno por fuera, por ejemplo, la ecuación:

$$x^6 = 11x^5 + 13x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 9x - 31,$$

es completa, ya que tiene el exponente 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Las incompletas, se pueden caracterizar como casi completas para uno, dos, tres, etc., dependiendo del número de términos que le hagan falta. Si la denominación (grado) de los términos de una ecuación son números primos, se habla de ecuaciones primitivas, como:

$$x^5 = 6x^3 - 13x^2,$$

donde 5, 3 y 2 son primos entre sí. Pero cuando la denominación de los términos tiene común divisor, como:

$$x^6 = 7x^4 - 9x^2,$$

que tiene como exponentes a los números 6, 4 y 2 que en conjunto tienen como común divisor a al número 2 se habla de una ecuación derivada.

Además, para clasificar los términos de una ecuación, el término más alto es llamado máximo o alto extremo; el de grado mayor, es llamado primer mixto; el siguiente, segundo mixto; Y así sucesivamente hasta llegar a  $x^0$  llamado cierre o extremidad inferior. Por ejemplo, en:

$$x^9 = 3x^8 - 10x^6 + 4x + 12,$$

$x^9$  es el máximo,  $3x^8$  es el primer mixto,  $10x^6$  es el tercer mixto,  $4x$  es el octavo mixto y 12 es el cierre. Ahora, si se quiere obtener el orden alternativo de la ecuación:

$$x^7 = 4x^6 + 14x^5 - 56x^4 - 49x^3 + 196x^2 + 36x - 144,$$

se debe organizar de la siguiente forma:

$$x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x = 4x^6 - 56x^4 + 196x^2 - 144,$$

es decir, de un lado se pondrá los términos con denominación impar y del otro los términos con denominación par.

Girard también da ciertas propiedades de los números (soluciones de la ecuación), en este caso, si tengo algunas soluciones enteras, la suma total se llamará primera fracción; la suma de todos sus productos de dos en dos se llama segunda fracción; la suma de todos sus productos de tres en tres se llama tercera fracción; y así sucesivamente hasta el final; pero el producto de todos los números es la última fracción, denominada cierre. De esta manera, si se tiene los números: 2, 4, 5; entonces la primera fracción es  $2 + 4 + 5 = 11$ , la segunda fracción es  $8 + 10 + 20 = 38$ , la tercera fracción o cierre es  $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ .

Ahora, se expone el enunciado del TFA propuesto por Girar como Teorema II, del cual no se dio ninguna demostración en su trabajo:

**Teorema II.** Todas las ecuaciones algebraicas tienen tantas soluciones como la denominación del término más alto nos muestra, y la primera fracción de las soluciones es igual al número del primer mixto, la segunda fracción es igual al número del segundo mixto; la tercera fracción es igual al número del tercer mixto, y así sucesivamente, de modo que la última fracción es igual a la del cierre, y esto de acuerdo con los signos que se pueden observar en el orden alterno.<sup>1</sup>

Adicional a éste, Girard muestra con ejemplos particulares que su teorema es válido; por ejemplo toma la ecuación completa:

$$x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 24,$$

que en su orden alternativo se puede ver como:

$$x^4 - 7x^2 - 24 = 4x^3 - 34x,$$

---

<sup>1</sup> Traducción libre de (Struik, 2014, pág. 85)

la cual tiene como denominación 4; es decir que tiene cuatro soluciones, a saber: 1, 2, -3, 4, donde 4 es el primer mixto, además corresponde a la primera fracción de las soluciones; -7 que es el segundo mixto, corresponde a la segunda fracción de las soluciones, etc. A continuación, los números con sus signos de acuerdo con el orden de las cantidades serán 4, -7, -34, -24, que son las cuatro fracciones de las cuatro soluciones.

En cuanto a las ecuaciones incompletas, como:

$$x^3 = 7x - 6,$$

sigue teniendo tres soluciones, que serían 1, 2, -3, y las ecuaciones incompletas, se pueden completar de la siguiente manera:

$$x^3 = 0x^2 + 7x - 6,$$

con el fin de encontrar todas las soluciones, tal como se ha hecho antes.

Continando con lo anterior presentamos el siguiente ejemplo que se puede ver en (Struik, 2014), donde:

$$x^3 = 167x - 26,$$

es igual a:

$$x^3 = 0x^2 + 167x - 26,$$

y arreglando de forma alternativa, se obtiene:

$$x^3 - 167x = 0x^2 - 26,$$

donde el número con sus signos, de acuerdo al orden de las cantidades será 0, -167, -26. Sin embargo tenemos que encontrar tres números que tengan este tipo de fracciones; donde su suma sea 0, la suma de sus productos dobles sea -167, y el producto de los tres sea -26. Ahora bien, si hemos encontrado a uno de los tres números, es decir -13, y ya que el producto de los tres es -26, el producto de los otros dos será 2, y dado que la suma de los tres números es 0, y uno de

ellos es  $-13$ , entonces, la suma de los otros dos serán 13. La cuestión se reduce ahora a encontrar dos número cuya suma sea 13 y el producto 2 y trabajando con estas dos ecuaciones, llegamos a:

$$x^2 = 13x - 2,$$

restaurada; es decir, las cantidades que son solución serían:

$$13 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{161 \cdot \frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad 13 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{161 \cdot \frac{1}{4}},$$

que junto con  $-13$  son las tres soluciones requeridas.

De esta manera, Girard realiza un trabajo serio con la teoría de ecuaciones, pues las caracteriza dependiendo de sus términos, grado, el valor de sus coeficientes y estudia algunas propiedades relacionadas a las soluciones de una ecuación, además conjetura el TFA algo que también hace Descartes, tal como veremos a continuación.

## 1.2. Descartes y su regla de los signos.

Según de (Boyer, 1986) y (Struik, 2014), René Descartes (1596-1650), filósofo y científico francés, nació en La Haye, en el seno de una familia bien situada económicamente. Su padre, un abogado moderadamente rico, lo envió, a los ocho años de edad al colegio de los jesuitas de La Flèche, debido a su delicada salud le estaba permitido pasar las mañanas en la cama, tiempo que aprovechaba para estudiar, costumbre que conservó toda su vida. A los dieciséis años dejó La Flèche y a los veinte se licenció en la Universidad de Poitiers con el título de abogado. Se fue a París donde pasó un año estudiando matemáticas. Los nueve años siguientes viajó por diversos países y participó en algunas campañas militares, primero en Holanda en 1617 y más tarde con el ejército francés en La Rochelle-Francia.

Por esa misma época Descartes abandonó Francia, en busca de un ambiente intelectual más libre y seguro; se instaló en Holanda, donde vivió los siguientes veinte años de su vida y escribió

sus obras. En 1649, Descartes aceptó una invitación de la reina Cristina de Suecia para trasladarse a ese país y enseñarle filosofía; allí fundó una academia de ciencias, en Estocolmo para ser más exactos, y debido al invierno escandinavo, murió de neumonía a principios de 1650. En 1637 publicó *El Discurso del método*, ésta es una obra clásica en filosofía, la cual contiene tres apéndices: La *Dióptrica*, los *Meteoros* y la *Geometría*. La *Geometría* consta de tres libros, en ellos Descartes presenta lo que hoy conocemos como geometría analítica, que es un ir y venir entre el álgebra y la geometría. Además, se formaliza la teoría de ecuaciones y se establecen muchos de los símbolos de la terminología del álgebra actual.

Este trabajo influyó profundamente en el desarrollo del álgebra y la geometría, pues con el método de Descartes las curvas podían ser estudiadas a través de ecuaciones y las ecuaciones a través de curvas. Es decir, las líneas estaban denotadas por medio de símbolos algebraicos; y, se encontraban sujetas a operaciones geométricas que involucran construcciones con regla y compás. Descartes definió los conceptos de ecuación y raíz, que fueron aceptados rápidamente por muchos matemáticos contemporáneos. Con respecto a ello menciona que:

Una ecuación está integrada por varios términos, alguno de ellos conocidos y alguno de ellos desconocidos, siendo unos iguales a otros o, más bien, considerados todos conjuntamente, son iguales a cero; digo tal, pues lo más conveniente sería considerarlos de este modo. (Descartes, 1996, pág. 461)

Siguiendo con el tratamiento de las ecuaciones, Descartes menciona que “Cada ecuación, pues, puede tener tantas raíces (valores de la cantidad desconocida), como dimensiones tiene la cantidad desconocida” (Descartes, 1996, pág. 461); lo cual parece una aproximación al TFA. Para ejemplificar lo anterior, Descartes considera las siguientes raíces:  $x = 2$ , que se puede ver como  $x - 2 = 0$ ,  $x = 3$  ( $x - 3 = 0$ ); multiplicando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$[1.1] \quad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

esta es una ecuación en la que  $x$  posee el valor 2 y 3. Ahora, si a  $x - 4 = 0$  la multiplicamos [1.1], se tiene a:

$$[1.2] \quad x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0;$$

en esta ecuación,  $x$  tiene tres dimensiones, ósea que cuenta con tres valores, que son 2, 3 y 4.

Pero para Descartes las raíces de una ecuación no siempre serán verdaderas, pues se da el caso en el que algunas de ellas sean falsas (negativas); pues, si se supone que  $x$  representa la carencia de una cantidad que fuese 5, se tiene que  $x = -5$  ( $x + 5 = 0$ ) multiplicada por [1.2], da como resultado:

$$[1.3] \quad x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

en este caso se tiene una ecuación de cuatro dimensiones, donde se sabe que tres de ellas son verdaderas 2, 3 y 4, y una es falsa,  $-5$ . De esta manera, se puede factorizar una ecuación polinómica que posee como raíces, cantidades verdaderas y falsas.

Las ecuaciones polinómicas también se pueden dividir por un binomio; que formado por la cantidad desconocida, menos el valor de una de las raíces verdaderas, o más el valor de una de las raíces falsas forman un factor, el cual será el divisor del polinomio original, de este modo pueden ser reducidas las dimensiones (grado) de una ecuación, por ejemplo, [1.3] será divisible por el factor  $(x + 5)$ , dado que  $x = -5$  es raíz de ésta ecuación y como resultado se obtiene a [1.2].

Además, Descartes menciona la ecuación [1.3] por ser el resultado de la multiplicación de los siguientes factores:  $x - 2, x - 3, x - 4, x + 5$ , es divisible entre ellos, es decir que [1.3] no puede ser dividida por un binomio, compuesto por la cantidad desconocida mas (+) o menos (−) alguna otra cantidad, es decir que no es divisible por  $(x - 17)$ ; esto muestra que 17 no es valor de alguna de sus raíces, lo cual nos deja ver que solamente tiene cuatro raíces 2, 3, 4,  $-5$ .

En (Descartes, 1996), se observa una regla, denominada «regla de los signos»; con ella puede determinar el número de raíces verdaderas y falsas que pueda tener alguna ecuación; así que, pueden darse tantas raíces verdaderas como cambios de signo de más (+) a menos (–) y de menos (–) a más (+) se encuentre en los coeficientes de la ecuación; igualmente, pueden encontrarse raíces falsas, esto depende de si hay dos signos +, o dos signos – consecutivos. Para esta regla, se debe tener en cuenta que tanto los coeficientes como las raíces de la ecuación deben ser reales; lo cual se sabía, pues Descartes parte de considerar inicialmente las raíces de una ecuación y después, haciendo el producto entre factores, obtiene la ecuación original. Para esta regla, se debe ubicar los coeficientes con su incógnita, ordenados de forma decreciente de izquierda a derecha en pares consecutivos, es decir que se compara el primero con el segundo, el segundo con el tercero y así sucesivamente hasta el llegar al término constante. Observemos que en la última ecuación:

$$\overbrace{+x^4}^{(1)} \underbrace{-4x^3}_{(2)} \overbrace{-19x^2}^{(3)} \underbrace{+106x}_{(4)} \overbrace{-120}^{(5)} = 0$$

de (1) a (2), de (3) a (4) y de (4) a (5), hay cambios de signo, es decir que tenemos tres raíces verdaderas y únicamente de (2) a (3) no hay cambio de signo, es decir que hay únicamente una raíz falsa.

Las soluciones para las ecuaciones que plantea Descartes son cantidades positivas, negativas e imaginarias, siendo las imaginarias de gran importancia, pues en el libro III de la *Geometría*, menciona lo siguiente:

Nótese, finalmente, que tanto las raíces verdaderas como las falsas no siempre son reales; es decir, podemos imaginar cuánto he dicho en cada ecuación, pero algunas veces no hay cantidad alguna que corresponda a las raíces imaginarias. Así, aunque pudiésemos imaginar tres raíces en esta ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

no hay sino una real, 2; en relación con las otras dos, aunque se las incremente, disminuya o multiplique de acuerdo con las reglas cuya exposición he realizado, siempre serán imaginarias. (Descartes, 1996, pág. 469)

Se puede ver que las raíces cuadradas de números negativos, son para Descartes producto de la imaginación, pues él, representa las soluciones por métodos geométricos, entonces no le es fácil representar soluciones imaginarias, aunque las acepta en su trabajo; su reconocimiento de éstas va más allá de lo aceptado por sus colegas matemáticos y de cierta manera, legítima su uso. Por otro lado, siempre hay que tener en cuenta que el propósito de las soluciones imposibles es dar veracidad a la regla general. Además, no existen otras raíces que satisfacen la ecuación, y estas son importantes por su uso; el cual es fácil de ver, debido a que sirven para la invención de soluciones de ecuaciones similares.

### **1.3. Newton y las raíces de una ecuación polinómica.**

El inglés Isaac Newton (1642-1727), es considerado uno de los más grandes científicos en la historia de la humanidad; nació prematuramente en Woolsthorpe, en el condado de Lincolnshire, en el año en el que moría el italiano Galileo Galilei (1564-1642). El padre de Isaac había fallecido antes de su nacimiento y su madre volvió a casarse cuando el chico tenía apenas tres años de edad, dejándolo al cuidado de su abuela. El pequeño Newton, asistía a la escuela del lugar donde vivía y fue así como su tío materno, descubrió en él una inteligencia inusual. Su tío, convenció a la madre para que lo dejase estudiar en Cambridge; ahí, llegó a formar parte del Trinity College. Antes de que iniciara sus primeros cursos, estudio distintas obras como: los *Elementos* de Euclides, la *Geometría* de Descartes, la *Óptica* del alemán Johannes Kepler (1571-1630), las obras del francés Franciscus Vieta (1540-1603), etc. Además de esto, Newton contó con grandes maestros como el británico Isaac Barrow (1630-1677), quienes le apoyaron en su búsqueda de conocimiento.

Entre 1665 y 1666, el Trinity College tuvo que cerrar debido a una peste; entonces, Newton regresó a su casa y fue ahí, donde realizó cuatro de sus más importantes descubrimientos, entre los cuales están: el teorema binomial, el cálculo, la ley de la gravitación y la naturaleza de los colores. Con respecto a las contribuciones que hizo en matemáticas, en especial en el álgebra; obtuvo un resultado muy importante, este tiene que ver con polinomios simétricos, como por ejemplo:

$$P(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2,$$

si intercambiamos las variables  $a, b$  o  $c$ , entonces el polinomio  $P$  no cambia. Por ejemplo, si permutamos  $a$  por  $c$  se tendría:

$$P'(c, b, a) = c^2 + b^2 + a^2 = a^2 + b^2 + c^2 = P(a, b, c),$$

donde el polinomio  $P$ , no cambia al realizar la permutación anterior, decimos entonces que  $P$  es un polinomio simétrico. En este caso se tienen tres variables, pero se puede extender a más.

Los polinomios simétricos son de mucha importancia, puesto que en el caso de dos variables:

$$\sigma_1(a, b) = a + b,$$

$$\sigma_2(a, b) = ab,$$

estos polinomios están ligados a una ecuación de segundo grado. Pues si suponemos que  $a$  y  $b$  son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0,$$

donde  $p$  y  $q$  son números complejos, se sigue que:

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

por lo tanto, se tiene una relación entre los coeficientes de la ecuación y los polinomios simétricos elementales en sus raíces:

$$-p = a + b = \sigma_1,$$

$$q = ab = \sigma_2.$$

Igualmente, para una cúbica de la forma:

$$x^3 + px^2 + rx + s = 0,$$

donde los coeficientes  $p, q$  y  $s$  son complejos, si suponemos que sus raíces son  $a, b$  y  $c$ , entonces:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} -p &= a + b + c = \tau_1(a, b, c) \\ q &= ab + ac + bc = \tau_2(a, b, c) \\ -r &= abc = \tau_3(a, b, c), \end{aligned}$$

son las relaciones de los coeficientes de la cúbica con los polinomios simétricos elementales  $\tau_1, \tau_2$  y  $\tau_3$ , en términos de las raíces  $a, b$  y  $c$ . Notemos que no es necesario conocer las soluciones, sino que basta con suponer su existencia. Así pues, es claro que lo anterior se puede generalizar para una ecuación de grado  $n$  y se tendrá una relación entre los coeficientes de la ecuación y los  $n$  polinomios simétricos elementales de sus raíces.

En 1707 Newton publica *Arithmetica Universalis*, donde trabaja la teoría de ecuaciones, su obra fue la recopilación de las notas de clase, que eran dictadas en Cambridge. En esta obra, trabaja con el TFA, aunque aún no había sido demostrado, porque le era de gran utilidad al resolver problemas por medio de ecuaciones. Newton realizó investigaciones sobre las soluciones de ecuaciones, incluyendo la búsqueda de divisores de polinomios. Además, plasmó la regla de los signos de Descartes, que ya se había mencionado anteriormente, y utilizó el hecho de que las raíces imaginarias de una ecuación polinómica real vienen en pares conjugados, lo cual aún no se había demostrado.

Con respecto a la relación que existe entre las raíces de una ecuación y sus coeficientes, encontramos su generalización publicado en *Arithmetica Universalis*, de la siguiente forma: Sea la ecuación general:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

donde  $-a_1$ , es la suma de las raíces,  $a_2$  “el agregado del rectángulo de cada dos raíces,” y así sucesivamente hasta el final.

Para continuar hablando de este resultado, es necesario definir algunos términos importantes. Newton denota «afirmativo» en lugar de positivo, «dimensión» para decir grado, «cantidad» de un término en lugar de coeficiente, «rectángulo» para el producto de dos términos y «contenido» para el producto de más de dos términos. Con esto, Newton, citado por Struik (2014), menciona que:

De la generación de las ecuaciones, se conocerá sus términos, empezando por la cantidad del segundo término, si este signo está cambiado, es igual al agregado de todas las raíces con sus propios signos; el tercer término, es igual al agregado de los rectángulos de cada dos de las raíces; el cuarto término, si su signo está cambiado, es igual al agregado de los contenidos de cada tres de las raíces; el quinto término es igual al agregado de los contenidos de cada cuatro raíces, y así, hasta el final.<sup>2</sup>

Para ver con mayor claridad lo anteriormente expuesto, se asumen las siguientes raíces:  $x = a, x = b, x = -c, x = d$ , después se las multiplica y se genera otra ecuación, la cual podemos ver a continuación:

$$x^4 - (a + b - c + d)x^3 + (ab - ac - bc + ad + bd - cd)x^2 - (-abc + abd - acd - bcd)x + (-abcd) = 0,$$

entonces, se puede ver que sus signos están cambiados, aquí la cantidad conocida del segundo término es  $a + b - c + d$ , que representa la suma de todas las raíces. La cantidad del tercer término es  $ab - ac - bc + ad + bd - cd$ , que representa los rectángulos de cada dos raíces. La cantidad del cuarto término es  $-abc + abd - acd - bcd$ , que representa la suma de los contenidos sobre cada ternario; y la cantidad del quinto término es  $-abcd$ , que representa el contenido entre todas las raíces.

---

<sup>2</sup> Traducción libre de (Struik, 2014, pág. 94)

Ahora observemos la siguiente ecuación:

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

donde se conoce la cantidad del segundo término que es  $p = -1$ , la del tercero  $q = -19$ , la del cuarto  $q = +49$  y la del quinto  $r = -30$ . Ahora, si se establece las relaciones, donde:  $p' = 1, q' = 19, r' = -49, s' = 30$ . Surge lo siguiente:

$$\lambda_1 = p' = 1,$$

$$\lambda_2 = p'\lambda_1 + 2q' = 1 + 38 = 39,$$

$$\lambda_3 = p'\lambda_2 + q'\lambda_1 + 3r' = 39 + 19 - 147 = -89,$$

$$\lambda_4 = p'\lambda_3 + q'\lambda_2 + r'\lambda_1 + 4s' = -89 + 741 - 49 + 120 = 723,$$

donde la suma de las raíces 1, 2, 3, y  $-5$ , es  $1 + 2 + 3 - 5 = 1 = \lambda_1$ , la suma de los cuadrados de sus raíces es  $1 + 4 + 9 + 25 = 39 = \lambda_2$ , la suma de los cubos de sus raíces es  $1 + 8 + 27 - 125 = -89 = \lambda_3$ , y la suma de los bicuadrados es  $1 + 16 + 81 + 625 = 723 = \lambda_4$ .

Esta relación ya había sido presentada por Girard, pero Newton da muchas otras fórmulas para diferentes combinaciones de potencias de las raíces, trabajando hasta ecuaciones de grado 8. Se cree que él, estaba consciente de que podía generar fórmulas análogas para ecuaciones de grado  $n$ . Con este resultado, se puede decir que “cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación se pueden expresar en términos de los coeficientes de la ecuación” (Dávila, 2004, pág. 47); este resultado sería de gran ayuda para los trabajos posteriores sobre el TFA.

#### 1.4. El contraejemplo de Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig-Alemania, ingresó a la universidad a los quince años, a los diecisiete obtuvo su bachillerato en artes, estudió teología, derecho, filosofía y matemáticas, por esta razón se le ha considerado como uno de los últimos eruditos que consiguió conocimientos universales para su época. A la edad de veinte años estaba preparado para obtener

el grado de doctor en derecho, pero le fue negado debido a su juventud, en vista de ello, abandonó su lugar de nacimiento y consiguió su doctorado en la Universidad de Altdorf-Suiza, en la que se le ofreció un puesto de profesor de derecho, el cual Leibniz rechazó para ser parte de una carrera diplomática.

En 1672 viajó a París, con el propósito de desviar las intenciones conquistadoras de los franceses hacia Alemania. En París se encontró con el holandés Christiaan Huygens (1629-1695), quien le aconsejó que si deseaba hacerse matemático debería leer los tratados del francés Blaise Pascal (1623-1662). En 1673 una misión política lo condujo a Londres, donde se compró un ejemplar de las *Lectiones Geometricae* de Isaac Barrow. Después de conocer a otros personajes importantes se fue involucrando más en la ciencia, hasta volverse miembro de la Royal Society. Al empezar el siglo XVIII, el TFA se relacionó con los inicios del cálculo, que para ese entonces lo trabajaban tanto Newton como Leibniz. El avance de esta rama de las matemáticas se estancó debido a un problema, el cual era calcular la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios tal que  $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$ ; para resolver este problema, Leibniz y el matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748), junto a otros matemáticos, pensaron que era necesario expresar cada polinomio real como el producto de factores reales de primer y segundo grado.

En la búsqueda de una solución, surgen los siguientes dos interrogantes: ¿Siempre es posible descomponer un polinomio real en un producto de factores reales lineales o cuadráticos? y ¿Todo polinomio tiene siempre una raíz real y una compleja; y cada raíz compleja, tiene también su conjugada? con respecto a esto, Leibniz citado por Pla i Carrera (1992) menciona lo siguiente:

Tan pronto como encontré mi cuadratura aritmética; reduciendo la cuadratura del círculo en una cuadratura racional y observando que la suma

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

depende de la cuadratura del círculo, observé inmediatamente que la suma de una expresión racional, se puede convertir en muchas clases de sumas más simples. Y mostraré, por un procedimiento de descomposición de un nuevo género, porque debe ser de esta manera. Este procedimiento consiste en convertir un producto de factores en una suma; esto es, transformar una fracción con un denominador de grado superior, igual a producto de raíces, en una suma de fracciones con denominadores simples.<sup>3</sup>

A lo que Leibniz se refiere es que la integral de una expresión racional, se logra convertir en una integral más simple. Menciona que esto se puede hacer mediante la descomposición en factores lineales, que poseen nuevos números imaginarios. Como se puede notar, las dos preguntas anteriores y la respuesta de Leibniz, hacen referencia al TFA. Pero él, menciona que no es posible descomponer un polinomio real en un producto de factores reales lineales o cuadráticos, pues:

Leibniz en 1702 dio una prueba de que el TFA era falso, afirmando que  $x^4 + a^4$  nunca podría ser definido como producto de factores cuadráticos reales. Su error procedía de descomponer el polinomio de la siguiente forma:

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}),$$

sin darse cuenta de que puede obtenerse una descomposición más sencilla desde:

$$x^4 + a^4 = (a^2 + x^2) - 2a^2x^2 = (a^2 + x^2 + ax\sqrt{2})(a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}),$$

como señalará en 1719 Jean Bernoulli. (Sabaté, 2005, págs. 2-3)

Con relación a las cantidades imaginarias, Leibniz realizó algunas contribuciones; una de estas, es ver a un número real positivo como una descomposición imaginaria, de la siguiente forma:

---

<sup>3</sup> Traducción libre de (Pla i Carrera, 1992, pág. 890)

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}},$$

se dice que lo anterior sorprendió a sus contemporáneos y de cierta manera aportó a la teoría de estos números, la cual estaba siendo olvidada; pero esto no aporta a entender la naturaleza de los mismos.

En el transcurso del tiempo se nota como poco a poco se ha ido construyendo el TFA; aunque, también han surgido dudas respecto al mismo. Despejarlas, le corresponde a los matemáticos de las siguientes generaciones, pues son ellos quienes deberán tratar de demostrar el TFA.

---

## 2. VISUALIZANDO LA DEMOSTRACIÓN DEL TFA

---

*Es cierto que la mayor parte de los resultados son exactos,  
pero esto es algo verdaderamente extraño.*

*Niels Henrik Abel*

En la época de Euler, D'Alembert, Lagrange y Laplace, el trabajo con ecuaciones y números complejos, estaba en su más grande auge, es por eso que:

(...) el meollo del problema de factorizar un polinomio real en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, era probar que cada polinomio tenía al menos una raíz real o compleja. La prueba de este hecho, llamado teorema fundamental del álgebra, se convirtió en una finalidad primordial. (Kline, 2002, págs. 790-791)

El primero en intentar una demostración formal del TFA fue D'Alembert, su intento por demostrar el TFA fue conocido como Teorema de D'Alembert. Sin Embargo, su demostración no fue válida pues se le encontraron algunas inconsistencias. Pocos años más tarde, Euler publica su intento de demostración, pero al igual que su amigo, no pudo culminar satisfactoriamente. Otra de las figuras importantes en la búsqueda de una demostración formal del TFA fue Laplace, quien haciendo uso del discriminante de un polinomio, también intenta demostrar el teorema.

### 2.1. El Teorema de D'Alembert.

La teoría de ecuaciones polinómicas, el estudio de los números complejos y el TFA están estrechamente relacionados, dado que al solucionar una ecuación polinómica, según la conjetura de Girard, ésta debe tener tantas soluciones como su grado lo indique; pero en muchas ocasiones dichas soluciones van a ser números complejos. Así que, si alguien estuviese trabajando algunos de estos tres grandes campos, de cierta manera tendría que abordar los demás. Para D'Alembert

quedó comprobado este hecho, dado que enfoca toda su atención en el TFA, internándose en la rigurosidad del problema para dar una demostración formal.

En el año 1746, D'Alembert termina su intento de demostración, y dos años más tarde es publicada en 19 páginas cortas, en un artículo llamado *Recherches sur le calcul integral*. Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), matemático, filósofo y enciclopedista francés, nació en París, estudió en la escuela Jansenista; tras dos años de estudiar derecho, empezó a cursar la carrera de Medicina, que poco tiempo después la abandonó, para dedicarse al estudio de las ciencias. D'Alembert sentía una gran pasión por las matemáticas y contribuyó mucho a las mismas; presentó sus trabajos a la Academia de Ciencias de París a la cual perteneció, adquiriendo fama, llegando a consagrarse como uno de los grandes matemáticos de la época.

Escribió muchas obras, entre las más importantes, está el Tratado de dinámica y sistemas hidráulicos. *Réflexions sur la cause générale des vents*, que incluye un tratado relacionado con derivadas parciales. En sus investigaciones relacionadas con la precisión de los equinoccios, establece una serie de ecuaciones afines al movimiento de la Tierra en torno a su centro de gravedad. D'Alembert observó que al operar números complejos, siempre daba como resultado otro número complejo, de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ , donde  $p$  y  $q$  son ambos reales; es decir que su aporte, tiene que ver sobre todo con las cantidades complejas, y no tanto con el TFA, con respecto esto, Álvarez y Dhombres (2011) mencionan que “el teorema que demuestra D'Alembert no es fundamental para el álgebra. Se fundamenta la estabilidad de los números complejos para funciones”.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Traducción libre de (Alvarez & Dhombres, 2011, pág. 229)

### 2.1.1. El intento de D'Alembert

D'Alembert establece una demostración esquemática del TFA. De esta manera, plantea que cualquier polinomio, el cual está en términos de  $y$ , se puede factorizar cuando el grado del polinomio es par, como en el caso de  $yy + fy + g, yy + hy + i$ , etc. donde todos sus coeficientes:  $f, g, h, i$ , etc. son reales, pues para  $yy + fy + g$  se tiene que si  $a$  es una raíz real, siempre hay una segunda  $b$ , la cual también será real y el producto:

$$(y - a)(y - b) = yy + fy + g.$$

Por otro lado, desde Newton se sabía que las raíces complejas de una ecuación polinómica vienen en pares conjugados. Además, si se multiplica un número complejo por su conjugado, su producto es un polinomio real.

D'Alembert también menciona que un polinomio siempre se puede dividir en factores  $yy + hy + i, yy + hy + m$ , etc., con coeficientes reales. Es decir que un polinomio se puede descomponer en factores cuadráticos reales, lo cual da respuesta a una de las preguntas que Leibniz se había planteado tiempo atrás.

En su intento por demostrar el TFA, D'Alembert parte de un polinomio

$$P(y) = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + \dots + fy + g,$$

el cual no tiene raíces reales. Después considera la curva de la ecuación

$$G(y, z) = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + \dots + fy + z = 0^5.$$

Y desarrolla a  $y$  en una serie de potencias fraccionarias en términos de  $z$  cerca del cero:

$$y = az^{m/n} + bz^{r/s} + \dots.$$

---

<sup>5</sup> Con relación a las dos variables de la ecuación algebraica que podemos ver en  $G(y, z)$ , la primera, osea  $y$  es siempre la variable del polinomio, y la segunda,  $z$ , es la constante indeterminada, que va precedida ya sea por  $+$  o  $-$ .

En su demostración utiliza el método de reducción al absurdo y gracias a esto comprueba que los valores asociados de  $y$  son de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ . (Sabaté, 2005).

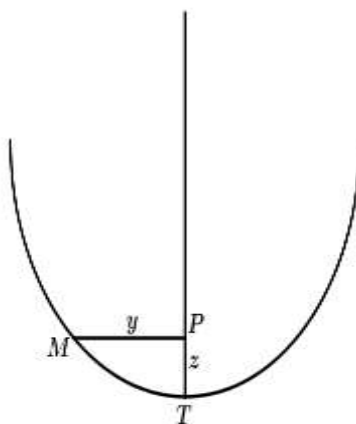
D'Alembert parte de dos teoremas; el teorema A, al cual denomina (local) y el teorema B designado (Global).

**Teorema A** (Local). Si  $y$  y  $z$  están relacionados en la ecuación  $F(y, z) = 0$ , e  $y = 0, z = 0$  es una solución, entonces hay una solución compleja y para todo  $z$  real suficientemente pequeño. Hay un valor correspondiente en cualquier  $y$  y  $z$  real, que satisfaga  $F(y, z) = 0$ .<sup>6</sup>

Para demostrar el teorema A, son necesarios tres artículos

**Art. II.** Sea  $TM$  una curva, de manera que  $y = 0$  o  $y = \infty$  cuando  $z = 0$ . Si se toma a  $z$  infinitamente pequeño, el valor de  $y$  en  $z$  puede expresarse siempre por una cantidad real cuando  $z$  es positivo; y cuando  $z$  es negativo,  $y$  se puede expresar por una cantidad real o una cantidad de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ , donde  $p$  y  $q$  son ambos reales.<sup>7</sup>

Para demostrar lo anterior se tiene que  $PM = y$  y  $TP = z$ . El eje  $x$  es el eje vertical, mirando hacia arriba, tal como se puede ver en la figura 1.



**Figura 1.** Curva  $TM$  con  $z$  infinitamente pequeño. Tomado de “Recherches sur le calcul intégral”, por J. D'Alembert, 1746 p. 193.

Para  $z$  infinitamente pequeño,  $y$  es una serie de potencias convergente en términos de  $z$ ,

<sup>6</sup> Traducción libre de (Baltus, 2004, pág. 418).

<sup>7</sup> Traducción libre de (Baltus, 2004, pág. 418).

$$y = az^{m/n} + bz^{r/s} + cz^{t/u}, etc.,$$

donde  $\frac{m}{n} < \frac{r}{s} < \dots$ .

1<sup>ro</sup>. Si todos los términos permanecen positivos, entonces  $y$  se puede expresar como  $az^{m/n}$ ; pues los exponentes van aumentando, y como  $0 < z < 1$ , entonces:

$$az^{m/n} > bz^{r/s} > cz^{t/u} > etc.$$

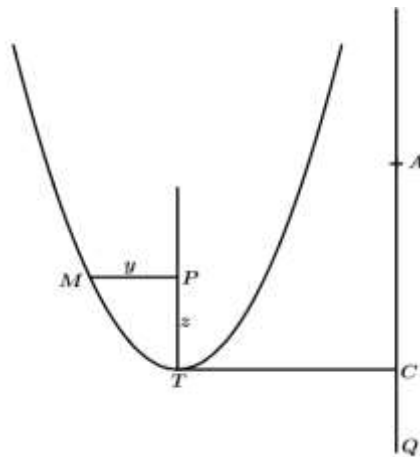
Y al ser  $z$  infinitamente pequeño los términos  $bz^{r/s} + cz^{t/u}, etc$  son casi nulos.

2<sup>do</sup>. Ahora si  $az^{m/n}$  es negativo al ser  $z$  negativo, es decir, cuando  $n$  es par y  $m$  impar, entonces  $z^{m/n}$  se vuelve imaginario, es decir que se puede reducir a la forma  $p + q\sqrt{-1}$ .

Continuando con el segundo artículo, tenemos:

**Art. III. Cor. I.** Si nosotros consideramos otro punto en la curva, con coordenadas reales de  $AC$ ,  $CT$ , una abscisa  $AQ$  mayor que  $AC$  pero infinitamente pequeña tiene una ordenada imaginaria solamente de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ .<sup>8</sup>

Si tenemos que  $z = TP$  es negativa, es decir, es de la forma  $r + s\sqrt{-1}$  por el Art. II, entonces  $AQ = CT + TP = CT + r + s\sqrt{-1}$  osea que  $AQ$  es de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ .



**Figura 2. Curva  $TM$  con coordenadas reales de  $AC$ ,  $CT$ .** Tomado de “Recherches sur le calcul intégral”, por J. D'Alembert, 1746 p. 193.

<sup>8</sup> Traducción libre de (Baltus, 2004, pág. 419).

Por último, se enuncia el Artículo IV, pues con este se termina de demostrar el Teorema A o teorema local, el cual menciona que cuando  $AC$  es aumentado por una cantidad finita  $CQ$  hasta un cierto tamaño, a continuación, el eje de ordenadas se puede suponer que es de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ .

Continuando con la versión del TFA según D'Alembert, se plantea el siguiente teorema:

**Teorema B** (Global). Sea  $F(x, y) = 0$  la ecuación algebraica de una curva de  $x(y)$  en el plano complejo, donde  $y$  oscila a lo largo de un segmento del eje real. Entonces ordenando  $x(y)$  puede continuar tomando solamente valores reales y complejos como abscisas y se extiende a lo largo de todo el eje real.<sup>9</sup>

Al igual que el Teorema A, para demostrar el Teorema B, se emplean los siguientes artículos:

**Art. V. Cor. III.** Para cualquier  $CQ$  finito que aumenta hasta la abscisa  $AC$ , la ordenada imaginaria correspondiente es de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ .<sup>10</sup>

**Art. VI.** Sea  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx + g$  cualquier polinomio, que no se anula para ningún número real que está sustituido en lugar de  $x$ ; entonces digo que hay siempre una cantidad  $p + q\sqrt{-1}$  la cual hace que el polinomio sea igual a cero.<sup>11</sup>

Demostrando estos artículos y llegando a una contradicción se demuestra que la raíz de un polinomio, siempre serán de la forma  $p + q\sqrt{-1}$ .

## 2.2. El papel de Euler

Euler menciona que el TFA, está relacionado con las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden  $n$ , como:

$$[2.1] \quad 0 = Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + L \frac{d^ny}{dx^n},$$

---

<sup>9</sup> Traducción libre de (Baltus, 2004, pág. 419).

<sup>10</sup> Traducción libre de (Baltus, 2004, pág. 420).

<sup>11</sup> Traducción libre de (Baltus, 2004, pág. 420).

en la que  $A, B, C, \dots, L$  son constantes. Señala que la solución general de [2.1] debe contener  $n$  constantes arbitrarias y la solución será la suma de  $n$  soluciones particulares, cada uno multiplicado por una constante arbitraria. Así que la solución general de  $y$  tiene la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Haciendo en [2.1] la sustitución  $y = e^{[f r dx]}$ , con  $r$  constante, se obtiene la ecuación polinomial en términos de  $r$

$$[2.2] \quad A + Br + Cr^2 + \dots + Lr^n = 0.$$

De hecho, la solución general depende de la factorización del polinomio [2.2] y de la naturaleza de sus raíces -reales o complejas-; simple o múltiple, e indirectamente su resultado depende esencialmente del TFA.

Euler, escribe una carta a Jean Bernoulli en el año 1739, en ella menciona estar convencido de que:

A cada expresión algebraica  $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + etc.$  Con cualquier número de dimensiones, si no se la puede resolver en factores reales simples de la forma  $p + qx$ ; al menos se la podrá resolver en factores cuadráticos  $p + qx + rxx$ , los cuales siempre son reales.<sup>12</sup>

Algunos autores, han citado esta carta, como evidencia de la primera formulación de la declaración general del TFA, que fue realizada por Euler, aunque en esos momentos Euler reconoce no tener una demostración formal de su enunciado. Además, tres años después de la publicación de D'Alembert, dio a conocer su versión del TFA, en su artículo *Recherches sur les racines imaginaires des équations* de 1751.

Leonhard Euler (1707-1783) nació en Basilea-Suiza. A sus trece años de edad conoció a Jean Bernoulli, quien era considerado como el más destacado matemático del momento. Cuando tenía

---

<sup>12</sup> Traducción libre de (Gilain, 1991, pág. 107)

quince años, se graduó de bachiller y en 1726 obtuvo la profesión de Maestro. Dos años más tarde publicó su primer trabajo titulado *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*. En 1748, Euler publicó en Lausana, Suiza, el primero de sus tres grandes tratados sobre cálculo: *Introductio in Analysi Infinitorum*. Esta es una de las obras más importantes en la historia del cálculo infinitesimal y de la geometría analítica; recoge resultados que había escrito en memorias anteriores, presenta nuevos aportes y desarrolla algunos de los principales conceptos que sobre el tema habían obtenido sus predecesores, como Newton, Leibniz y los Bernoulli.

Euler fue miembro de la Academia de San Petersburgo-Rusia, donde era catedrático y uno de los intelectuales más famosos. Su producción científica sin lugar a dudas fue inmensa, pues aun después de quedarse ciego, seguía produciendo artículos. Federico el Grande, Rey de Prusia, le hizo la invitación para que se incorporara a la Academia de Berlín, petición que fue aceptada; sin embargo, su estancia no fue tan agradable y debido a las peticiones de Catalina la Grande volvió a Rusia en 1766.

Euler contribuyó en el análisis, a las series infinitas, series convergentes y divergentes; también aportó a la teoría de los números complejos, trató de entender la naturaleza de los mismos. Con respecto a ellos escribió lo siguiente:

Porque todos los números concebibles, o son mayores que cero o menores que cero o iguales a cero, entonces es claro que las raíces cuadradas de números negativos no pueden estar incluidas entre los posibles números (números reales). Consecuentemente, debemos decir que estos son números imposibles. Y dicha circunstancia nos lleva al concepto de tales números, los cuales por su naturaleza son imposibles, y ordinariamente son llamados números imaginarios o fantasiosos, ya que solo existen en la imaginación. (Kline, 2002, pág. 786)

Se puede decir que Euler trabajó incesantemente con ellos, uno de sus aportes en este campo fue denotar con  $i$  como  $\sqrt{-1}$ , y desde ese momento otros matemáticos se encargaron de propagar

esta notación. Euler demuestra bajo operaciones algebraicas la estabilidad de  $M + N\sqrt{-1}$  y menciona que todas las raíces de una ecuación son de esta forma; también inauguró las demostraciones algebraicas. En primer lugar, Euler demuestra que cuando la raíz  $x + y\sqrt{-1}$  existe, también existe su conjugado,  $x - y\sqrt{-1}$ , y al multiplicar estas dos raíces se obtiene a un factor de la forma  $xx + px + q$ .

Por su parte el italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) intenta completar la demostración dada por Euler en 1772, en su artículo *Sur la forme des racines imaginaires des équation*, menciona que la demostración de Euler puede conducir a una indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$ . Para superar los obstáculos que se presentan en la demostración de Euler, Lagrange utiliza los conceptos relacionados con permutaciones de raíces.

### 2.1.2. El intento de Euler

Para su versión del TFA, Euler parte de tres principios, los cuales son aceptados por él sin demostración alguna. Estos enuncian lo siguiente:

- i. la posibilidad de factorizar un polinomio en factores lineales,
- ii. el número de raíces es igual al grado de la ecuación, deducido de (i).
- iii. las relaciones entre coeficientes y raíces, deducidas también de (i), mediante un cálculo de las raíces como si se tratase de números ordinarios.

Además, demuestra tres teoremas: (1) una ecuación de grado impar tiene al menos una raíz real, (2) una ecuación de grado par o no tiene raíces reales o tiene pares de tales raíces, y (3) una ecuación de grado par con el término absoluto negativo tiene al menos una raíz positiva y otra negativa. Luego continúa con el:

**Teorema 4.** Toda ecuación de grado cuatro:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

siempre se puede descomponer en dos factores reales de segundo grado.

Supongamos que en la ecuación propuesta el segundo término ya no se encuentra, y que tenemos que resolver esta ecuación:

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,^{13}$$

en dos factores reales de segundo grado. Está claro que estos factores son de la forma

$$(xx + ux + \alpha)(xx - ux + \beta) = 0$$

Si ahora comparamos este producto con la ecuación propuesta, que deberá encontrar

$$B = \alpha + \beta - uu, \quad C = (\beta - \alpha)u, \quad D = \alpha\beta,$$

de la que se deriva

$$\alpha + \beta = B + uu, \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u},$$

por lo tanto

$$2\beta = uu + B + \frac{C}{u} \quad \text{y} \quad 2\alpha = uu + B - \frac{C}{u},$$

y ya que se tiene  $4\alpha\beta = 4D$  obtenemos un polinomio real en  $u$  de grado  $\binom{2m}{m} = \binom{4}{2} = 6$ ,

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D$$

o

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0,$$

Donde el valor de  $u$  debe ser encontrado. Puesto que el término absoluto  $-CC$  es esencialmente negativo, se ha demostrado que esta ecuación tiene al menos dos raíces reales. Cuando se toma una de ellas como  $u$ , entonces los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  también serán reales, y por lo tanto los dos supuestos factores de segundo grado  $xx + ux + \alpha$  y  $xx - ux + \beta$  serán reales.

---

<sup>13</sup> Euler conocía un hecho, procedente del *Ars Magna* de Cardano o incluso anterior, que siempre se puede aplicar una transformación para eliminar el segundo mayor grado de un polinomio

Entre los corolarios del teorema 4, también se demuestra para la ecuación de quinto grado; por otro lado, el Escolio II señala que si las raíces de la ecuación dada de cuarto grado son  $a, b, c, d$ , entonces la ecuación de sexto grado en  $u$ , donde  $u$  sea el suma de dos raíces de la ecuación dada, tendrá las seis raíces  $a + b, a + c, a + d, c + d, b + d, b + c$ . Y si  $a + b + c + d = 0$ , se puede escribir para  $u$  los valores  $p, q, r, -p, -q, -r$ , y la ecuación en  $u$  se convierte en:

$$(uu - pp)(uu - qq)(uu - rr) = 0$$

**Teorema 5.** Cada ecuación de grado 8 siempre se puede resolver en dos factores reales de cuarto grado.

La demostración sigue el mismo razonamiento anterior. El término  $x^7$  se elimina, de modo que los dos supuestos factores pueden ser escritos como:

$$x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

y

$$x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Como  $u$  expresa la suma de cuatro raíces de la ecuación de octavo grado, puede tener  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$  valores, y que va a satisfacer una ecuación de la forma

$$0 = (uu - pp)(uu - qq)(uu - rr)(uu - ss) \dots,$$

con 35 factores. El término absoluto es negativo, y el razonamiento sigue como antes.

El corolario 2 establece que también se probó el teorema para el grado 9, y el Corolario 3 para grados 6 y 7, ya que sólo tenemos que multiplicar tal ecuación por  $xx$  o  $x$  para obtener otra ecuación, de grado 8. El Escolio II, trata de asegurarse de que no solo  $u$ , sino también los otros coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  son reales. Euler continúa en el teorema 6 con pruebas similares para ecuaciones de grado 16, hasta llegar al planteamiento general:

**Teorema 7.** Cada ecuación la cual tiene como grado a una potencia binaria, como  $2^n$  (Siendo  $n$  un número mayor que 1), se puede descomponer en dos factores de grado  $2^{n-1}$ . Es decir, la ecuación:

$$x^{2m} + Ax^{2m-2} + Bx^{2m-3} + \dots = (x^m + ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \dots)(x^m - ux^{m-1} + \beta x^{m-2} + \dots)$$

La demostración es similar a las anteriores, conduciendo a una ecuación en  $u$  de grado

$$N = \binom{2m}{m} = \frac{2m!}{(2m-m)!m!},$$

que va a satisfacer una ecuación con  $\frac{1}{2}N$  factores.

De esta manera Euler concluye que toda ecuación polinómica en términos de  $x$ , como:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.},$$

siempre pueden resolverse en factores con coeficientes reales, ya sea los simples de la forma  $x + p$ , o los dobles de la forma  $xx + px + q$ .

### 2.3. El aporte de Laplace

El discriminante de un polinomio es de suma importancia para Laplace, pues gracias a este concepto, el intenta demostrar el TFA. En el año 1795, Laplace se encuentra dictando clases en la Escuela Normal de Francia; su quinta clase que justamente tiene relación con ecuaciones y sus raíces se titula: *La resolución de las ecuaciones. Teorema sobre la forma de las raíces imaginarias*. Para la época era importante publicar las clases, debido a que cada tema era un descubrimiento relevante, sobre todo si era un matemático importante como Laplace, motivo por el cual, tiempo después se publicó su trabajo para uso de la comunidad científica.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) nació en Normandía, intentó realizar estudios religiosos en Caen, pero lo abandonó y se dedicó al estudio de la matemática en París. Allí consiguió trabajo en la Escuela Militar, ya que después de haberle enviado sus trabajos a D'Alembert este quedó

sorprendido y lo recomendó para tal ocupación. También impartió clases en la Escuela Normal y en la Escuela Politécnica. Sus trabajos se enfocaron sobre todo en Probabilidad y Astronomía, para las cuales escribió grandes obras; entre las más importantes tenemos: *Tratado de Mecánica Celeste*, que es un estudio relacionado con la física de Newton, también publicó *Teoría analítica de las probabilidades* y *Ensayo filosófico sobre la probabilidad*. Laplace hizo parte de la Academia de Ciencias y colaboró con sus conocimientos al comité de pesos y medidas.

Estuvo al servicio de Napoleón, donde ocupó el cargo de Ministro del Interior; pero tuvo que salir debido a que su superior pensaba que Laplace estaba llevando su administración a lo infinitamente pequeño. Laplace tuvo que pasar por una época de terror, porque París cambiaba de monarquía a república, debido a esto, se fue a vivir por un tiempo a una casa de campo que poseía en las afueras. En aquellos tiempos, la política hacía parte de su vida, pues cabe resaltar que perteneció al senado donde fue condecorado con el título de Márquez por el Rey Luis XVIII.

En su publicación presenta la fórmula general para la resolución de la ecuación cuadrática y la generaliza para ecuaciones de la forma:

$$x^{2n} + px^n + q = 0,$$

dando por establecido que una ecuación de grado  $2n$  ha de tener  $2n$  raíces. Laplace considera la ecuación cúbica (reducida):

$$x^3 + px + q = 0,$$

estableciendo que el signo de su determinante  $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$  condiciona la forma de las raíces.

Continúa su análisis con la cuártica (reducida):

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

donde  $a, b, c, d$  son sus cuatro raíces, llegando a la conclusión de que esta ecuación es resoluble en dos factores reales de segundo grado.

Para la demostración de tal afirmación, su objetivo es hallar un discriminante que permita el cálculo de las raíces; entonces, mediante algunas sustituciones y operaciones se obtiene la ecuación reducida de tercer grado

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0,$$

la cual tiene como raíces a  $z, z', z''$ , de las cuales por lo menos una es real y de ellas se puede obtener las raíces de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\sqrt{z} + \sqrt{z'} + \sqrt{z''}) & b &= \frac{1}{2}(\sqrt{z} - \sqrt{z'} - \sqrt{z''}) \\ c &= \frac{1}{2}(\sqrt{z'} - \sqrt{z} - \sqrt{z''}) & d &= \frac{1}{2}(\sqrt{z''} - \sqrt{z} - \sqrt{z'}) \end{aligned}$$

Se supone que  $\sqrt{z}$  es la raíz real, obtendremos:

$$a + b = \sqrt{z} \qquad ab = \frac{1}{4}(z - z' - z'' - 2\sqrt{z'z''})$$

En la segunda igualdad, pueden sustituirse los valores de  $z'$  y  $z''$  por las siguientes expresiones:

$$z' + z'' = -2p - z \qquad z'z'' = \frac{-q^2}{z}$$

de las cuales se deduce que tanto  $a + b$  como  $ab$  sean reales. Por tanto la expresión  $x^2 - (a + b)x + ab$  será real y factor de la ecuación de cuarto grado propuesta. Es decir que a la ecuación de cuarto grado se la puede dividir por el factor de segundo grado, obteniendo un factor de segundo grado como cociente. Su único problema es que asume la existencia de las  $n$  raíces, sin demostrar su existencia, tal como lo hará en su intento de demostración del TFA.

### 2.3.1. El intento de Laplace

A partir del análisis de la cuártica, Laplace anuncia una demostración muy simple de un teorema general: toda ecuación de grado par se resuelve en factores reales de segundo grado. Como puede observar es una forma de expresar el TFA, puesto que ya se sabía que una ecuación de grado impar

tiene una raíz real, con lo que era posible obtener una ecuación de grado par mediante división de polinomios.

Su intento de demostración, empieza de la siguiente manera: Sea el polinomio

$$p(x) = x^n - b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n, \text{ con } b_i \in \mathbb{R} \text{ y } n \geq 1.$$

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_i, x_j, \dots, x_n$  sus raíces. Por ser de grado par, sea

$$n = 2^k q, \text{ con } k \geq 1 \text{ y } q \in 2\mathbb{N} + 1.$$

Supone una nueva ecuación

$$Q_t(x) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} [x - (x_i + x_j) + t(x_i x_j)],$$

cuyas raíces son agrupaciones por pares de las raíces de  $P(x)$  de la forma  $x_i + x_j + t(x_i x_j)$  donde  $t(\text{arbitrario}) \in \mathbb{R}$ . Su grado será  $n' = 2^{k-1} q'$ , donde  $q'$  sigue siendo impar.

Laplace procede por inducción:

1<sup>ro</sup>. Si  $k = 1$ , entonces el nuevo polinomio  $Q_t(x)$  tendrá grado impar y, por tanto, tendrá al menos una raíz real sea cual sea el valor de  $t$ , pues desde D'Alembert y Euler se sabía que todos los polinomios de grado impar tiene al menos una raíz real. Así mismo, es claro que existen infinitos valores de  $t$  para los que

$$x_i + x_j + t(x_i x_j) \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, existen  $t_1, t_2$  distintos y reales, tales que

$$x_i + x_j + t_1(x_i x_j) \in \mathbb{R}, x_i + x_j + t_2(x_i x_j) \in \mathbb{R}.$$

Entonces las cantidades  $(x_i x_j)$  y  $(x_i + x_j)$  son también reales. Por ello, el factor

$$(x^2 - [x_i + x_j]x + x_i x_j)$$

será un factor real de segundo grado de  $P(x)$ .

2<sup>do</sup>. Si  $k > 1$ , entonces  $P(x)$  tendrá un factor real de segundo grado si toda ecuación de grado  $2^{k-1}q'$ , tiene un factor de segundo grado, ya que los infinitos

$$x_i + x_j + t(x_i x_j), (i < j \text{ y } t \in \mathbb{R})$$

serán números complejos y entonces, siguiendo el razonamiento anterior, existirán dos raíces  $x_i, x_j$  de  $P(x)$  tales que  $(x_i + x_j)$  y  $(x_i x_j) \in \mathbb{C}$ . Por consiguiente, el factor

$$x^2 - [x_i + x_j]x + x_i x_j \in \mathbb{C}[x]$$

divide exactamente a  $P(x)$ , tomando la forma de un número complejo, es decir

$$x^2 + fx + h + \sqrt{-1}(f'x + h').$$

Como que las raíces complejas son conjugadas, también será divisor exacto de la ecuación, propuesta su conjugada

$$x^2 + fx + h + \sqrt{-1}(f'x + h').$$

Entonces,  $P(x)$  tendrá como factor la función de cuarto grado, que es resultado de multiplicar las dos raíces anteriores

$$(x^2 + fx + h)^2 - (f'x + h')^2.$$

Laplace recurre entonces a la demostración que hizo antes de la resolución de la cuártica, en la que concluye que toda ecuación de cuarto grado es resoluble en dos factores reales de segundo grado. También discute la posibilidad de que ambas raíces tengan un factor común, que sólo podrá ser  $f'x + h'$ , en cuyo caso  $P(x)$  será divisible por dicho factor, obteniendo un polinomio de grado impar y tendrá, por tanto otro factor real de primer grado. Por ello,  $P(x)$  seguirá teniendo un factor real de segundo grado como resultado de multiplicar ambos factores de primer grado.

3<sup>ro</sup>. Una vez demostrado que toda ecuación de grado  $2^k q$  tiene un factor real de segundo grado si y sólo si toda ecuación de grado  $2^{k-1}q'$  también lo tiene, puede generalizarse la inducción en  $k$ .

Según Sabaté (2005) Laplace completa la inducción diciendo:

Toda ecuación de grado par tiene un factor de segundo grado; dividiéndola por dicho factor se obtiene una nueva ecuación de grado par, que tendrá, a su vez, un factor real de segundo grado; y continuando de esta forma se descompondrá la ecuación entera en factores reales de segundo grado. (p. 9)

De esta forma concluye su intento por demostrar el TFA, dando paso a Karl Friedrich Gauss, para que en su disertación doctoral realice la primera demostración formal del TFA. Pero todos los esfuerzos de estos personajes no fueron infructuosos, pues aportaron a la demostración que finalmente fue dada por Gauss.

---

### 3. GAUSS Y SUS DEMOSTRACIONES FORMALES

---

*Según el juicio de los más eminentes matemáticos en vida, Emmy Noether era la más importante inteligencia matemática creativa que ha nacido desde que comenzó la educación superior de las mujeres.*

*Albert Einstein*

Después de las intuiciones e intentos por demostrar el TFA, es finalmente Gauss, quien da una demostración formal en el año 1799; en su disertación doctoral realiza la primera demostración del TFA y critica las demostraciones hechas por sus antecesores. Para poder demostrar el TFA, Gauss tiene que entender la naturaleza de los números complejos y explorar muy bien esta área para lograr poder realizar su demostración. Al final no quedó satisfecho con su demostración decidiendo realizar otras tres, dedicándole medio siglo a este resultado importante del álgebra.

#### 3.1. Gauss, su vida y obras

El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nació en Brunswick, desde pequeño se observó su habilidad para las matemáticas, pues a la edad de tres años corrigió un error en las cuentas salariales de su padre. Gracias al cuidado y apoyo de su madre pudo tener una buena educación. Gauss estudió en la escuela local cuando niño; a los quince años empezó a cursar su educación media, esto gracias al duque de Brunswick quien le brindó apoyo económico, inicialmente cuando Gauss estudiaba en el Colegio Carolino en Brunswick aprendió lenguas clásicas y exploró las obras de Newton, Euler y Lagrange.

Gauss descubrió la ley de mínimos cuadrados, después de esto se dedicó de lleno a las matemáticas pues realizó un gran descubrimiento el cual fue construir de acuerdo a las normas

euclídeas el polígono regular de 17 lados. El duque también apoyo a Gauss en la Universidad de Göttingen a la cual entró en el año 1795, dos años después de graduarse publicó la obra *Disquisitiones arithmeticae*, relacionado con el lenguaje y la notación de la teoría de números, conocida como el álgebra de las congruencias, incluyendo la demostración rigurosa del teorema fundamental de la Aritmética.

En las dos primeras décadas del siglo XIX, Gauss produjo un flujo permanente de trabajos sobre temas astronómicos, de los que destaca el tratado *Theoria Motus Corporum Coelestium* (1809). Fue nombrado director del Observatorio Astronómico de Göttingen en 1807, puesto que ocupó durante 40 años. Alrededor de 1820 el gobierno de Hannover encomendó a Gauss la medición precisa de grandes triángulos sobre la superficie terrestre, esto proporcionó el estímulo que le condujo a las ideas de su artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827). Después de grandes contribuciones a la ciencia, Gauss murió a los 78 años de edad, siendo recordado como uno de los más grandes matemáticos de la historia.

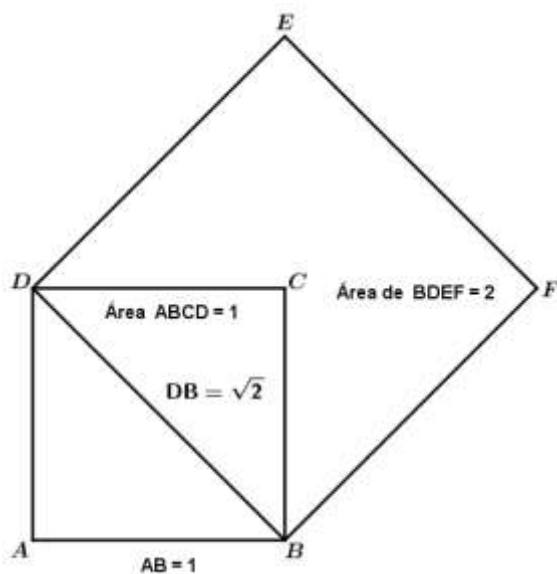
### 3.2. El plano de Gauss

Gauss representa los números complejos en el plano complejo, donde un número de la forma  $a + bi$ , se puede ver como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano. Esta representación permitió a los matemáticos tener confianza con respecto a estos números,

Desde tiempos muy anteriores a Gauss algunos estudiosos manipularon raíces cuadradas de números negativos, pero la interrogante persistía: si se puede representar el significado de  $x^2 = 1$  como un cuadrado de área igual a 1, ¿qué referente físico había para  $x^2 = -1$ ? Otros estudiosos como Euler y Lagrange afirmaron que ecuaciones del tipo  $x^2 = -1$  tenían solución pero que tal solución era “imposible”. (Espinoza, 2009, pág. 146)

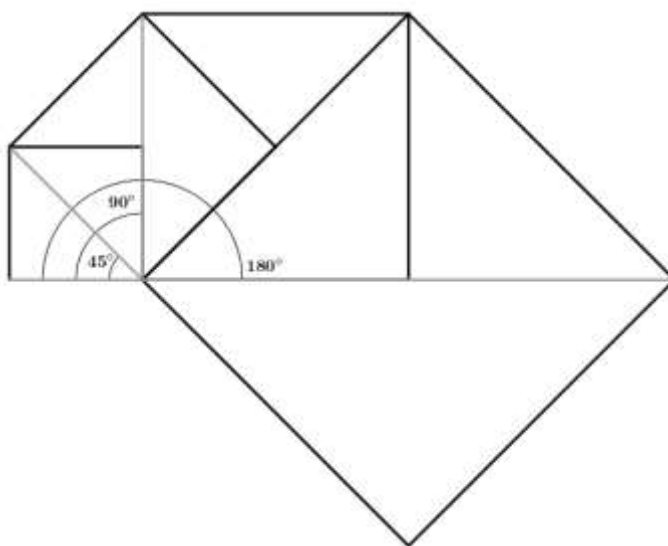
En su demostración del TFA, Gauss denominó a las raíces cuadradas de números negativos, como números complejos, para abordarlos recurrió al principio de cuadrar, método utilizado por

los antiguos griegos. Partiendo del cuadrado ABCD de área 1; construye un cuadrado con el doble de área, partiendo de su diagonal BD, de longitud  $\sqrt{2}$ . Como se muestra en la figura 3.



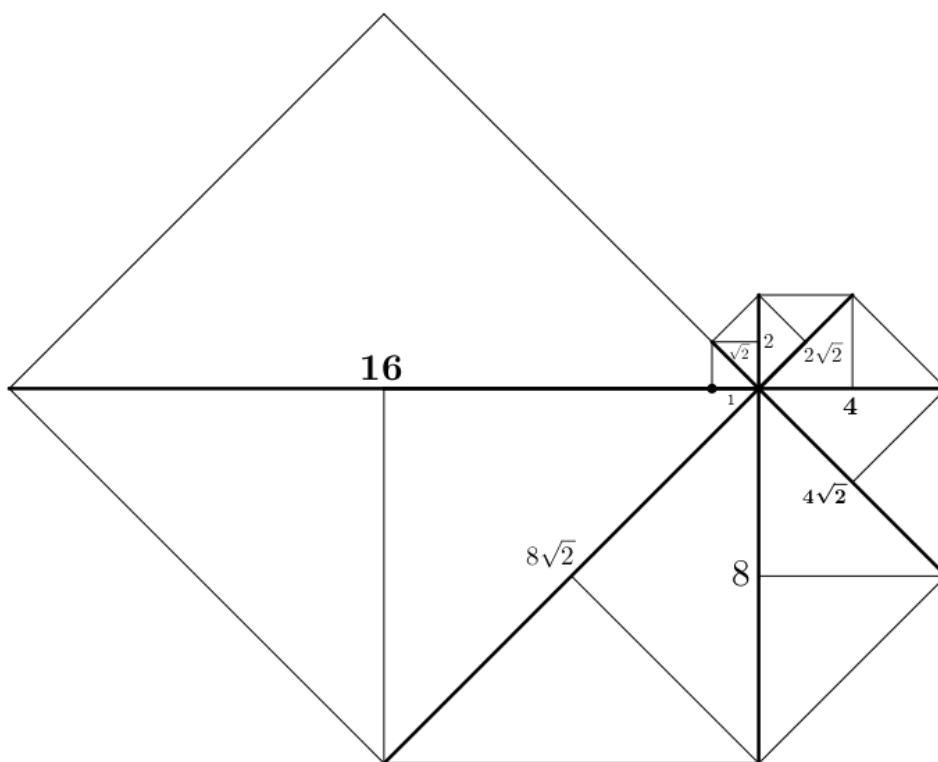
**Figura 3. Construcción del cuadrado de área 2.** Adaptado de “The fundamental theorem of algebra. Bringing the invisible to the surface”, por B. Director, 2002 p. 18.

Partiendo del lado horizontal del cuadrado inicial (ver figura 4), realizando una rotación de  $45^\circ$  se construyó un cuadrado de área 2. Realizando una nueva rotación de  $45^\circ$  con la que se tiene una rotación de  $90^\circ$ , se construyó un cuadrado de área 4 y se hace una extensión de  $\sqrt{2}$  a 2.



**Figura 4. La duplicación del área de un cuadrado.** Tomado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 147.

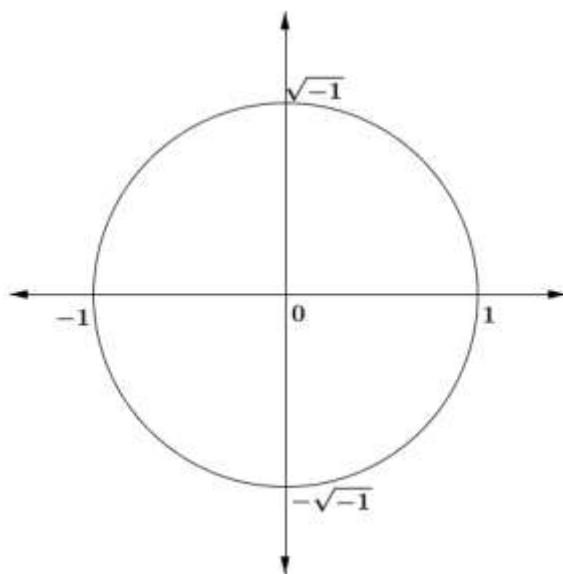
En sí, el ángulo de  $45^\circ$  se duplicó a  $90^\circ$  y se hizo una extensión al cuadrado de  $\sqrt{2}$ ; para cuadrar la magnitud igual a 2 se duplicó el ángulo de rotación de  $90^\circ$  a  $180^\circ$  y se hizo una extensión de 2 a 4; para cuadrar la magnitud igual a 4 se duplicó el ángulo de  $180^\circ$  a  $360^\circ$  y se hizo una extensión de 4 a 16. Se puede continuar este proceso indefinidamente, como se ve en la figura 5.



**Figura 5. Generación de magnitudes cuadradas.** Adaptado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 148.

De acuerdo con lo anterior, consideremos el círculo unitario como origen, con su diámetros comprendido entre 1 y  $-1$ ; partiendo de 1, al hacer el procedimiento inverso, se toma la raíz cuadrada de  $-1$ , como el ángulo se reduce a la mitad, entonces en este punto el ángulo será  $90^\circ$ , de esta manera obtenemos a  $\sqrt{-1}$ ; si rotamos las manecillas  $180^\circ$  en sentido contrario a las a las manecillas del reloj, obtenemos a  $-\sqrt{-1}$  (Ver figura 6). De esta manera, para Gauss, según Espinoza (2009):

La unidad en el dominio complejo es la circunferencia unitaria, donde 1 representa una rotación completa,  $-1$  media rotación,  $\sqrt{-1}$  un cuarto de rotación y  $-\sqrt{-1}$  tres cuartos de rotación. De este modo, Gauss comprendió el significado de  $\sqrt{-1}$ , asoció sus números complejos a las acciones combinadas de rotar y extender sobre el plano, así, cada punto del plano estaría representado por un número complejo.



**Figura 6. La unidad en el dominio complejo de Gauss.** Tomado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 149.

### 3.3. Críticas a los intentos de demostración

El encargado de invalidar las demostraciones dadas por D'Alembert y Euler es Gauss. El intento de demostración de Laplace no lo tuvo en cuenta, debido a que al mismo tiempo en el que Gauss escribía su tesis doctoral, también Laplace escribió su intento de demostración del TFA. Las objeciones que Gauss impone a la demostración de D'Alembert, tienen que ver con lo siguiente: D'Alembert empieza su demostración partiendo de que las raíces de una ecuación polinómica existen, después se dedicó a investigar la forma de estas; en su intento de demostración D'Alembert utiliza consideraciones geométricas y analíticas muy avanzados para la época, resultando difícil para sus lectores.

D'Alembert hace uso de cantidades infinitamente pequeñas, con mucha libertad. En su demostración utiliza una curva imaginaria, la cual es modelada por medio de una serie, pero no se justifica la convergencia o divergencia de la serie, dejando un vacío conceptual sin completar. Con respecto al intento de demostración de D'Alembert, Gauss menciona lo siguiente:

Por estas razones no estoy en condiciones de considerar la demostración de D'Alembert como satisfactoria. A pesar de esto, me parece que la verdadera esencia de la demostración en discusión no es en absoluto afectada por todas estas objeciones; yo creo que en el mismo fundamento (aunque en una manera muy diferente y por lo menos con una mayor circunspección) una demostración rigurosa de nuestro teorema se puede construir.<sup>14</sup>

Con respecto a la demostración de Euler, Gauss no la considera completa, pues Euler estudia diversos casos particulares, y poco a poco se considera polinomios de grado superior hasta llegar a generalizarlo, intentando convencer al lector de que se ha demostrado el TFA. El intento por completar la demostración de Lagrange también es criticado por Gauss, pues al igual que otros matemáticos, Lagrange parte de que una ecuación de grado  $m$  tiene  $m$  raíces. Sin embargo, los intentos de demostración hechos por los matemáticos como D'Alembert, Euler y Laplace, son un gran aporte para las demostraciones formales hechas por Gauss; pues él retoma algunos resultados importantes de sus antecesores.

### 3.4. El Teorema Fundamental del Álgebra

*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, fue el nombre de la disertación doctoral de Gauss, la cual fue publicada en latín en el año 1799, en ella venía a demostrar, basándose en consideraciones geométricas que toda ecuación polinómica  $f(x) = 0$  con

---

<sup>14</sup> Traducción libre de (Gauss C. F., 1799, p. 7)

coeficientes reales, tiene al menos una raíz. En 1815, publicó en latín *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, para la cual se basaba en principios algebraicos.

Un año después, en 1816 publicó su tercera demostración, basándose en lo que hoy se conoce como la integral de Cauchy, este es un artículo corto escrito en latín, que lleva por nombre *Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia*. Después de 50 años, en 1849 publicó en alemán una nueva demostración llamada *Zur theorie der algebraischen gleichungen*, donde generalizó la primera demostración para coeficientes complejos.

En este trabajo abordaremos las tres primeras demostraciones, pues la cuarta demostración es similar a la primera, solo que los coeficientes del polinomio son complejos.

### 3.4.1. Primera Demostración Formal

Gauss demuestra que toda ecuación algebraica de la forma:

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m = 0, \text{ donde } A_0 = 1.$$

Se puede resolver en factores reales de primer o segundo grado. Para facilitar la demostración, Gauss llamó

$$X = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m.$$

Este teorema se demuestra mediante dos lemas.

#### Primer Lema

Si  $m$  es cualquier número entero positivo, entonces la función:

$$[3.1] \quad x^m \operatorname{sen} \varphi - r^{m-1}x \operatorname{sen} m\varphi + r^m \operatorname{sen}(m-1)\varphi$$

será divisible entre:  $x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$ .<sup>15</sup>

Para realizar la demostración Gauss utiliza a:

$$[3.2] \quad x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2 = (x - (r \cos \varphi + ir \sin \varphi))(x - (r \cos \varphi - ir \sin \varphi))$$

Reemplazando valores enteros positivos en la función [3.1], para  $m = 1$ , y para  $m = 2$ , se cumple. Gauss continúa realizando esto para  $m \geq 3$  y se da cuenta que el cociente tiene la siguiente forma:

$$x^{m-2} \sin \varphi + rx^{m-3} \sin 2\varphi + r^2 x^{m-4} \sin 3\varphi + \dots + r^{m-2} \sin(m-1)\varphi.$$

Se demuestra por inducción que el producto de  $x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$  por [3.2] da como resultado [3.1].

- Para  $m = 3$ , se tiene que:

$$(x \sin \varphi + r \sin 2\varphi)(x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2) = x^3 \sin \varphi - r^2 x \sin 3\varphi + r^3 \sin 2\varphi$$

- Ahora supongamos que el resultado es verdadero para  $m = k$ , es decir, se cumple que:

$$[3.3] \quad [x^{k-2} \sin \varphi + rx^{k-3} \sin 2\varphi + \dots + r^{k-2} \sin(k-1)\varphi](x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2) \\ = x^k \sin \varphi - r^{k-1} x \sin k\varphi + r^k \sin(k-1)\varphi$$

- También, se verifica que se cumple para  $m = k + 1$ .

$$[3.4] \quad [x^{k-1} \sin \varphi + rx^{k-2} \sin 2\varphi + \dots + r^{k-1} \sin k\varphi](x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2) \\ = x^{k+1} \sin \varphi - r^k x \sin(k+1)\varphi + r^{k+1} \sin k\varphi$$

Es decir, se cumple [3.4] y por lo tanto se cumple el lema para todo  $k$  entero.

## Segundo Lema

Si la cantidad  $r$  y el ángulo  $\varphi$  están determinados de tal manera que se cumplan las ecuaciones:

$$[3.5] \quad A_0 r^m \cos m\varphi + A_1 r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \dots + A_{m-1} r \cos \varphi + A_m = 0$$

y

---

<sup>15</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, p. 26).

$$[3.6] \quad A_0 r^m \sin m\varphi + A_1 r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \sin \varphi = 0$$

Entonces la función  $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-2} r^2 + A_{m-1} r + A_m = X$

será divisible por el factor de segundo grado  $x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$  solamente si  $r \sin \varphi \neq 0$ . Pero si  $r \sin \varphi = 0$ , entonces esa función será divisible por el factor simple  $x - r \cos \varphi$ .<sup>16</sup>

Para su demostración, se reemplaza a [3.2] en  $X$ , separando la parte real de la parte imaginaria, obtenemos a [3.5] y [3.6] respectivamente. Pero si  $r \sin \varphi = 0$ , tenemos que [3.2] es:  $(x - r \cos \varphi)^2 = (x - r \cos \varphi)(x - r \cos \varphi)$ , es decir, solo tenemos una raíz doble.

De acuerdo con la demostración del lema 1, las siguientes cantidades serán divisibles entre [3.2]:

$$\left. \begin{aligned} &A_0 r x^m \sin \varphi - A_0 r^m x \sin m\varphi + A_0 r^{m+1} \sin(m-1)\varphi, \\ &A_1 r x^{m-1} \sin \varphi - A_1 r^{m-1} x \sin(m-1)\varphi + A_1 r^m \sin(m-2)\varphi, \\ &A_2 r x^{m-2} \sin \varphi - A_2 r^{m-2} x \sin(m-2)\varphi + A_2 r^{m-1} \sin(m-3)\varphi, \\ &\quad \vdots \\ &A_{m-2} r x^2 \sin \varphi - A_{m-2} r^2 x \sin 2\varphi + A_{m-2} r^3 \sin \varphi, \\ &A_{m-1} r x \sin \varphi - A_{m-1} r^2 \sin(0)\varphi, y \\ &A_m r \sin \varphi + A_m x \sin(0)\varphi + A_m r \sin(-\varphi) \end{aligned} \right\} [3.7]$$

Pues:

$$\begin{aligned} &A_0 r x^m \sin \varphi - A_0 r^m x \sin m\varphi + A_0 r^{m+1} \sin(m-1)\varphi \\ &= A_0 r (x^m \sin \varphi - r^{m-1} x \sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi) \\ &A_1 r x^{m-1} \sin \varphi - A_1 r^{m-1} x \sin(m-1)\varphi + A_1 r^m \sin(m-2)\varphi \\ &= A_1 r (x^{m-1} \sin \varphi - r^{m-2} x \sin(m-1)\varphi + r^{m-1} \sin(m-2)\varphi); \\ &\quad \vdots \\ &A_m r \sin \varphi + A_m x \sin(0)\varphi + A_m r \sin(-\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Es decir que la suma de todas las cantidades especificadas de [3.7] son divisibles entre [3.2].

Por otro lado, la suma del primer, segundo y tercer término, son respectivamente:

$$\begin{aligned} &A_0 r x^m \sin \varphi + A_1 r x^{m-1} \sin \varphi + \cdots + A_{m-1} r x \sin \varphi + A_m r \sin \varphi = r \sin \varphi X \\ &-x(A_0 r^m \sin m\varphi + A_1 r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \sin \varphi) = -x(0) = 0 \\ &A_0 r^{m+1} \sin(m-1)\varphi + A_1 r^m \sin(m-2)\varphi + \cdots + A_{m-2} r^3 \sin \varphi - A_m r \sin \varphi = 0, \end{aligned}$$

---

<sup>16</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, pp. 26-27)

Con esto concluimos que la suma de todo [3.7] es  $r \sin \varphi X$  y es divisible entre  $x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$ , por tanto la función  $X$  lo es, siempre que  $r \sin \varphi \neq 0$ . Si  $r \sin \varphi = 0$ , entonces, tenemos a  $x = r \cos \varphi$  y se tendrá que  $X = 0$ , por la hipótesis [3.6], pues haciendo la sustitución en  $X$ , tenemos:

$$X = A_0 r^m \cos m\varphi + A_1 r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \cos \varphi + A_m = 0$$

Esto quiere decir que  $(x - r \cos \varphi)$  es un factor de  $X$ , en consecuencia, la función

$$X = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m$$

es divisible entre  $x - r \cos \varphi$ , y por lo tanto  $X$  es divisible entre  $x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$  o entre  $x - r \cos \varphi$  siempre que se satisfaga [3.5] y [3.6].

Respecto a los lemas anteriormente demostrados, Gauss escribió lo siguiente:

Propuesta cualquier función  $X = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-2} r^2 + A_{m-1} r + A_m$ ,  $r$  y  $\varphi$  se pueden determinar de tal manera que se cumplan las ecuaciones [3.5] y [3.6]. Entonces se sigue que  $X$  tiene un factor real de primer o segundo grado; por otra parte, la división necesariamente produce un cociente real de menor grado, el cual por la misma razón también tendrá un factor de primer o segundo grado. Mediante la continuación de esta operación  $X$  finalmente se descompondrá en factores reales simples o de segundo grado.<sup>17</sup>

### Existencia de una raíz

Para continuar con la demostración de Gauss, se denota a  $T$  como [3.6] y  $U$  como [3.5], donde:

$$U = A_0 r^m \cos m\varphi + A_1 r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \cos \varphi + A_m$$

$$T = A_0 r^m \sin m\varphi + A_1 r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \sin \varphi$$

Se considera un plano infinito, y en él un eje  $GG'$  en el que seleccionamos un punto  $C$ . Ubicamos un punto  $P$  en el plano cuya distancia a  $C$  sea  $r$ ;  $\overline{PC}$  y  $\overline{GC}$  forman el  $\angle \varphi$ . Sobre  $P$  levantamos segmentos rectilíneos perpendiculares de longitud  $T$  en todos los puntos del plano. (Ver figura 7).

---

<sup>17</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, pág. 28)

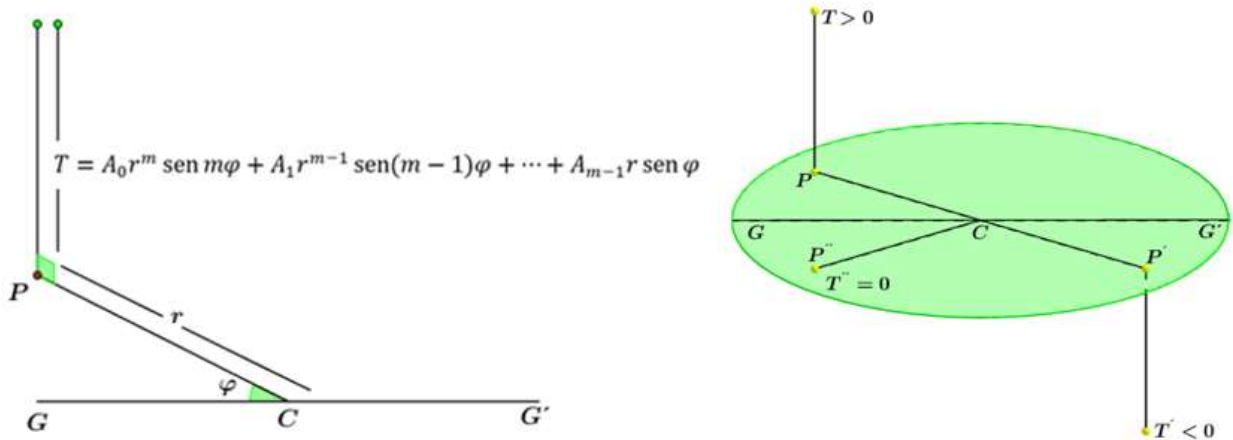


Figura 7. Construcción de la perpendicular con longitud  $T$  sobre el punto  $P$ ; donde  $T > 0$ ,  $T' < 0$  y  $T'' = 0$ . Adaptado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, pp. 125 y 126.

Respecto a los extremos de las perpendiculares, Gauss escribió que:

Los extremos de estas perpendiculares “los cuales para los valores positivos de  $T$  se encuentran por arriba del plano; para los negativos, por debajo; y cuando  $T$  desaparece, en el plano mismo en una superficie curva continua e infinita en todas direcciones, a la cual por brevedad llamaré en lo que sigue *primera superficie*.<sup>18</sup>

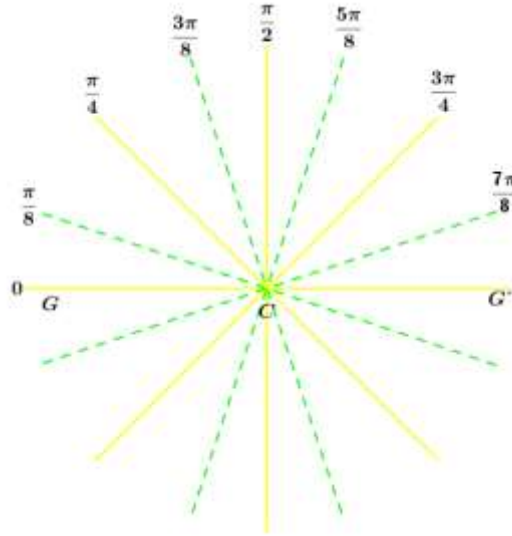
De manera similar se construye la curva  $U$ . Ahora, debemos demostrar que existe un punto sobre el plano donde se intersectan la primera y segunda superficie. A la intersección entre superficie y plano lo denominamos curva. Cuando  $r$  es muy grande,  $T$  puede tomar valores positivos o negativos, según varíe  $\phi$ . Si dividimos a  $T$  entre  $r^m$ , obtenemos:

$$T = A_0 \sin m\phi + \frac{A_1}{r} \sin(m-1)\phi + \frac{A_2}{r^2} \sin(m-2)\phi + \dots + \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \sin \phi = \sin m\phi = 0.$$

O sea  $\phi = \frac{k}{m}\pi$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ ; luego, la curva  $T$  está formada por  $m$  líneas rectas que se intersecan con  $C$  cuyos ángulos de inclinación respecto a  $GG'$  son  $0, \frac{1}{m}\pi, \dots, \frac{m-1}{m}\pi$ . Sucede lo mismo con la curva  $U = 0$ ; esta coincide con  $\cos m\phi = 0$ , es decir que  $\phi = \frac{k}{m}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , donde  $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ , y sus

<sup>18</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, pág. 29)

ángulos son  $\frac{1}{2m}\pi, \dots, \frac{(2m-1)}{2m}\pi$ . Observemos que para  $T = 0$ ; las inclinaciones son  $\left(\frac{2k}{m}\right)\frac{\pi}{2}$  y  $\left(\frac{2k+2}{m}\right)\frac{\pi}{2}$  y para  $U = 0$  son  $\left(\frac{2k+1}{m}\right)\frac{\pi}{2}$ , es decir que entre dos ramas de  $T$  hay una de  $U$ . (Ver Figura 8).



**Figura 8. Primera y segunda curva para  $r$  infinito y  $m = 4$ .** Tomado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 131.<sup>19</sup>

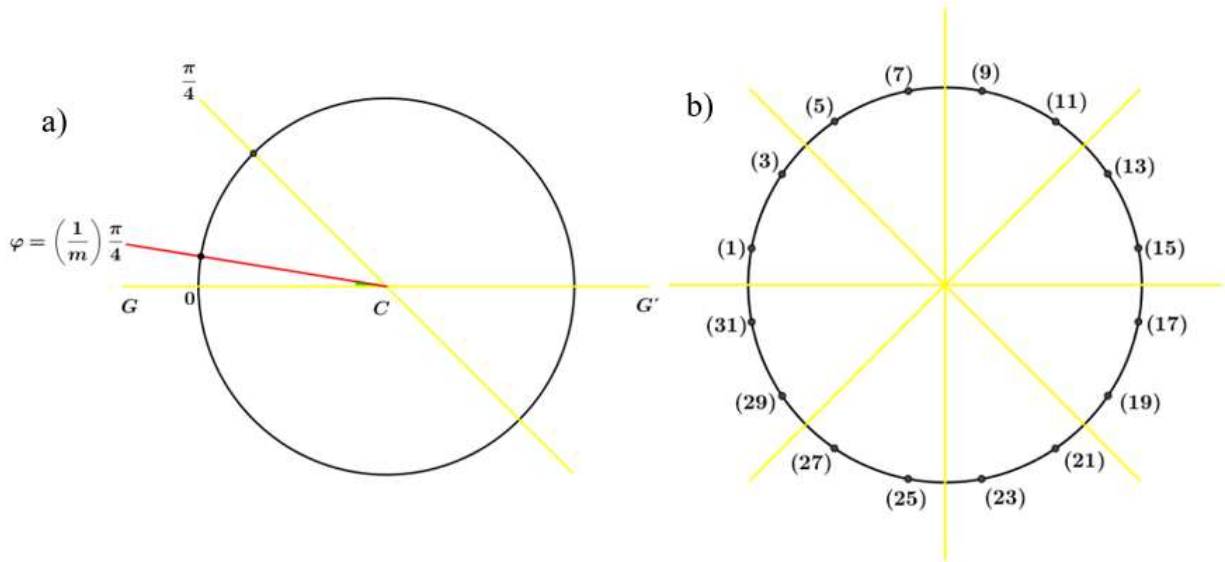
Nos queda por demostrar que existe por lo menos un punto común entre la primera y segunda curva. Para el caso cuando la distancia de  $P$  a  $C$  es finita, Gauss demostró el siguiente teorema:

**TEOREMA:** Manteniendo todo como antes, se puede describir un círculo de centro  $C$  en cuya circunferencia están  $2m$  puntos en los cuales  $T = 0$ , y la misma cantidad en los cuales  $U = 0$ ; y de tal manera que cada uno de estos últimos yace entre dos de los primeros.<sup>20</sup>

Para su demostración se parte de un círculo de radio  $r$ , designemos con (1) el punto sobre la circunferencia a  $\varphi = \left(\frac{1}{m}\right)\frac{\pi}{4}$  del lado izquierdo del eje, hasta el punto  $(8m - 1)$  para el cual  $\varphi = \left(\frac{8m-1}{m}\right)\frac{\pi}{4}$ . Así tenemos  $2m$  parejas donde  $T = 0$  en algún punto entre  $(8m - 1)$  y (1) y  $2m$  parejas donde  $U = 0$  para algún punto entre (1) y (3), etc. (ver figura 9).

<sup>19</sup> Para la figura 8, trabajamos con las superficies:  $T = r^4 \text{sen } 4\varphi - 3r^2 \text{sen } 2\varphi + 6r \text{sen } \varphi$ , y  $U = r^4 \text{cos } 4\varphi - 3r^2 \text{cos } 2\varphi + 6r \text{cos } \varphi - 2$  ambas asociadas a la ecuación:  $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ .

<sup>20</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, pág. 32))



**Figura 9. a) Proceso de división de la circunferencia en  $4m$  puntos, b): Una circunferencia dividida para  $m = 4$ .** Adaptado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 132.

Sea:  $T = r^m \left( A_0 \sin m\varphi + \frac{A_1}{r} \sin(m-1)\varphi + \frac{A_2}{r^2} \sin(m-2)\varphi + \cdots + \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \sin \varphi \right)$ . Donde

$D = \frac{A_1}{r} \sin(m-1)\varphi + \frac{A_2}{r^2} \sin(m-2)\varphi + \cdots + \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \sin \varphi$ ; con esta nueva notación se tiene que

$T = r^m (\sin m\varphi + D)$ . Recordemos que en el punto (1),  $\varphi = \left(\frac{1}{m}\right) \frac{\pi}{4}$ ; luego,  $m\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Evaluando

$T$  en el punto (1) se tiene que  $T = r^m \left( \sin \frac{\pi}{4} + D \right) = r^m \left( \sqrt{\frac{1}{2}} + D \right)$ . Para que  $T$  sea positivo  $\varphi =$

$\frac{\pi}{4}$ , se necesita que  $|D| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Analicemos a  $|D|$ :

$$|D| = \left| \frac{A_1}{r} \sin(m-1)\varphi + \frac{A_2}{r^2} \sin(m-2)\varphi + \cdots + \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \sin \varphi \right|$$

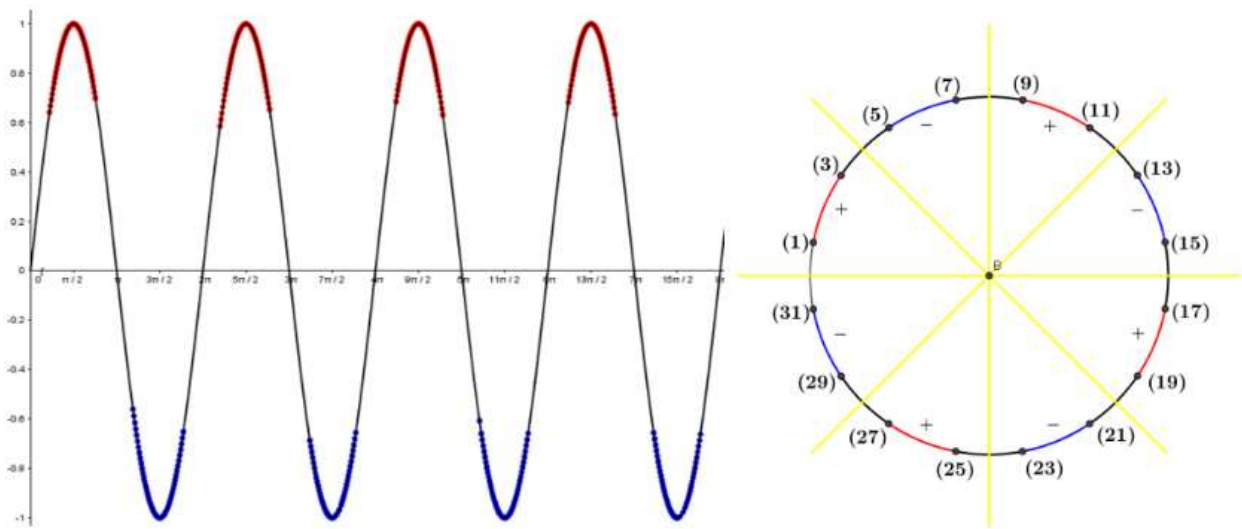
$$< \left| \frac{A_1}{r} \right| + \left| \frac{A_2}{r^2} \right| + \cdots + \left| \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \right| \text{ (pues } 0 \leq |\sin k\varphi| \leq 1 \text{ con } k \in \{0, 1, \dots, m-1\})$$

$$|D| < g \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{m-1}} \right) < g \left( \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r^{m-1}} + \cdots \right) \text{ donde } g = \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_{m-1}|)$$

Sabemos que  $r > 0$ ; si se toma  $r > 1$ , se tendrá que  $\frac{1}{r} < 1$ . Luego  $|D| < g \left( \frac{\frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}} \right) = g \left( \frac{1}{r-1} \right)$ .

Si  $\frac{g}{r-1} < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , entonces  $r > g\sqrt{2} + 1$ ; seguidamente, para todo  $\varphi$  para los cuales  $|\sin k\varphi| \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$  se

tendrá que conservar el mismo signo que  $\sin m\varphi$ . Analizando los valores de  $\varphi$  y de  $m\varphi$  para los  $4m$  puntos, deducimos que  $T$  será positivo siempre que  $m\varphi$  caiga entre  $\frac{(8k+1)\pi}{4}$  y  $\frac{(8k+3)\pi}{4}$  con  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ . Y tendrá un valor negativo cuando caiga entre  $(8k+5)$  y  $(8k+7)$  con  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ . En ninguno de los intervalos mencionados  $T = 0$ , pues  $\sin \varphi$  nunca es nulo. Puesto que en (3) el valor de  $T$  es positivo y en (5) es negativo, se tendrá que en alguna parte entre (3) y (5),  $T = 0$ . Y de manera general entre  $(4k+3)$  y  $(4k+5)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .



**Figura 10.** Valores positivos y negativos de la superficie  $T$ , según los valores del ángulo  $m\varphi$  para la ecuación  $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ . Tomado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 136.

Pero, puede existir más de un punto donde  $T = 0$ . Supongamos que entre (3) y (5) hay al menos dos puntos donde  $T = 0$ ; así,  $T$  tiene un máximo o un mínimo en ese intervalo. Analicemos la derivada de  $T$ :

$$\frac{dT}{d\varphi} = mr^m \left( A_0 \cos m\varphi + \frac{(m-1)A_1}{mr} \cos(m-1)\varphi + \dots + \frac{A_{m-1}}{mr^{m-1}} \cos \varphi \right)$$

Tomando  $E = \frac{(m-1)A_1}{mr} \cos(m-1)\varphi + \frac{(m-2)A_2}{mr^2} \cos(m-2)\varphi + \dots + \frac{A_{m-1}}{mr^{m-1}} \cos \varphi$ ,  $\frac{dT}{d\varphi} = mr^m(\cos m\varphi + E)$ . Veamos bajo qué circunstancias  $\frac{dT}{d\varphi}$  conserva el mismo signo que  $\cos m\varphi$ . En (3),  $m\varphi = \frac{3\pi}{4}$  y  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  para que  $\frac{dT}{d\varphi} = mr^m(\cos m\varphi + E)$  tenga el mismo signo que  $\cos m\varphi$  cualesquier valores de sus coeficientes, se necesita que  $|E| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tenemos que

$$|E| = \left| \frac{(m-1)A_1}{mr} \cos(m-1)\varphi + \frac{(m-2)A_2}{mr^2} \cos(m-2)\varphi + \cdots + \frac{A_{m-1}}{mr^{m-1}} \cos \varphi \right|$$

$$< \left| \frac{A_1}{r} \right| + \left| \frac{A_2}{r^2} \right| + \cdots + \left| \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \right| \text{ (Pues } 0 \leq |\cos k\varphi| \leq 1)$$

$$< \frac{g}{r} + \frac{g}{r^2} + \cdots + \frac{g}{r^{m-1}} \text{ (Donde } g \text{ es el máximo de } \{|A_1|, |A_2|, |A_3|, \dots, |A_{m-1}|\})$$

Entonces,  $|E| < g \left( \frac{1}{r-1} \right)$ ; pero si  $\frac{1}{r-1} < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , ósea que cuando  $r > g\sqrt{2} + 1$ ; la superficie  $\frac{dT}{d\varphi} =$

$mr^m(\cos m\varphi + E)$  mantiene el mismo signo que  $\cos m\varphi$ . De lo anterior se tiene que  $\frac{dT}{d\varphi}$  es negativa cuando  $m\varphi$  cae entre  $\frac{3\pi}{4}$  y  $\frac{5\pi}{4}$ , es decir entre los puntos (3) y (5) de la circunferencia. Luego  $T = 0$  en un solo punto entre (3) y (5), y de manera general entre  $(4k+3)$  y  $(4k+5)$ .

De manera similar se demuestra que  $U$  tiene un valor negativo en cualquier punto desde (3) hasta (5), y de manera general de  $(8k+3)$  a  $(8k+5)$ . La superficie  $U$  tendrá un valor positivo de (7) a (9), y de forma general de  $(8k+7)$  a  $(8k+9)$ . Entonces  $U = 0$  en algún punto entre (1) y (3) y de forma general entre  $(4k+1)$  y  $(4k+3)$  con  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ . Se puede comprobar que no existe más de  $2m$  puntos sobre la circunferencia en los que  $U = 0$ .

Gauss explicó que si trazamos otro círculo con un radio mayor o menor que  $r$ , pero mayor que  $g\sqrt{2} + 1$  y lo dividimos; de manera general entre  $(4k+3, 4k+5)$   $T = 0$ . Además, menciona:

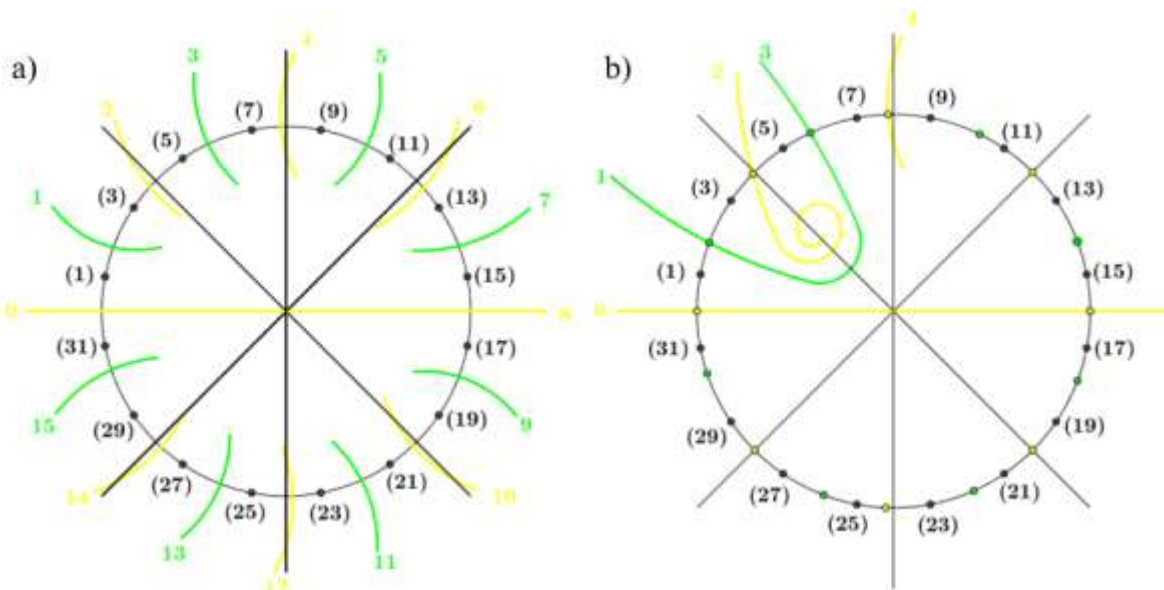
Ya se puede deducir de esta posición relativa de las ramas entrando al círculo, de tantas maneras diversas que necesariamente debe ocurrir dentro del círculo una intersección de alguna rama de la primera línea con una rama de la segunda línea, (...).<sup>21</sup>

Designemos con 0 la parte izquierda del eje  $GG'$ , que pertenece a la primera curva, con 1 a la rama inmediata, la cual pertenece a la segunda curva y así hasta la rama  $4m-1$ . Denotamos con números pares a las ramas de la primera curva y con números impares las ramas de la segunda

---

<sup>21</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, pág. 35)

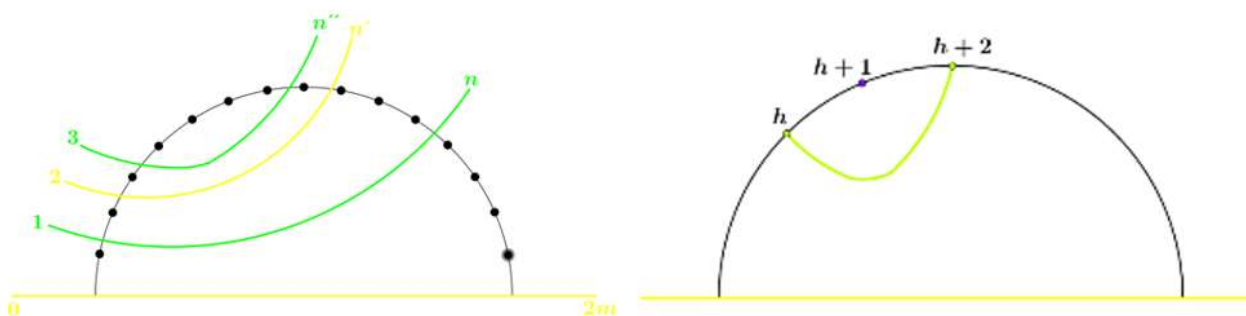
curva, (ver figura 12 a)). Supongamos que la rama 2, no sale; así que podemos rodearla y finalmente salir por algún lugar entre 2 y 4 sin intersectar la primera curva; veamos que esto es absurdo. Al entrar entre las ramas 0 y 2 la superficie  $T$  tiene valores positivos; está por encima del círculo. Al salir entre las ramas 2 y 4, está por debajo. Entonces en algún momento estuvimos sobre la primera curva y por tanto tocamos la rama 2. Luego, toda rama que entra en la circunferencia tiene que salir.



**Figura 11. a) Ramas numeradas de las curvas  $T = 0$  y  $U = 0$  asociadas a una ecuación de cuarto grado. b) La rama 2 se pierde en el círculo.** Adaptado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G. Espinoza, 2009, p. 141.

Veamos que siempre ocurrirá una intersección de la primera curva con la segunda. Supongamos que se pueden unir dos puntos pares y dos puntos impares de tal manera que no resulta una intersección de la primera curva con la segunda. Puesto que el eje  $GG'$  forma parte de la primera curva, se tendrá que el punto 0 está conectado con el punto  $2m$ . El punto 1 puede conectarse entonces con cualquier otro punto impar  $n$ . Unamos ahora el punto 2 con un punto  $n'$  y el punto 3 tendrá que unirse entonces con un punto  $n''$ . Esto nos conduce a que en algún momento sólo resta conectar el punto  $h$  con  $h + 2$ . Por lo que la rama que entra al círculo a través del punto  $h + 1$  necesariamente se intersectará con la rama que une  $h$  con  $h + 2$ . Pero alguna de ellas pertenece a la

primera curva mientras la otra pertenece a la segunda curva, lo que contradice la suposición inicial, y por lo tanto existe una intersección de la primera curva con la segunda curva. (Ver figura 13).



**Figura 12. Conexiones entre ramas.** Adaptado de “Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra” G.

Espinoza, 2009, pp. 142 y 143.

En su demostración, Gauss explicó que no sólo habrá una sino al menos  $m$  intersecciones de la primera curva la cual se corta con varias ramas de la segunda en un mismo punto, generando que  $X$  tenga varios factores iguales. Además, menciona lo siguiente:

En seguida advierto que de ninguna manera es imposible presentar la demostración precedente, la cual aquí construí sobre principios geométricos, también de manera puramente analítica: más mediante esta representación, la cual expuse aquí, pienso que resulta menos abstracta, y realmente aquí se coloca ante los ojos el centro neurálgico de lo que se demuestra mucho más claramente de lo que se podría esperar de una demostración analítica.<sup>22</sup>

### 3.4.2. Segunda Demostración Formal

Gauss parte de dos funciones polinómicas  $Y, Y'$ , de las cuales la primera tiene grado mayor o igual a la segunda; entonces podemos formar las ecuaciones

$$\begin{aligned} Y &= qY' + Y'' \\ Y' &= q'Y'' + Y''' \\ Y'' &= q''Y''' + Y'''' \\ &\vdots \end{aligned}$$

<sup>22</sup> Traducción libre de (Gauss, 1799, pág. 38))

$$Y^{\mu-1} = q^{(\mu-1)} Y^{(\mu)},$$

así, tenemos que  $Y$  es un múltiplo de  $Y'$  y  $Y''$ , y así sucesivamente hasta que llegamos a una división sin residuo. Es necesario señalar que las funciones polinómicas  $Y, Y', \dots$ , y los coeficientes  $q, q', q'', \dots$ , son *polinomios* que están en términos de  $x$ . De lo anterior, se deduce que, el polinomio  $Y^{(\mu)}$  es un divisor de cada uno de los anteriores, incluyendo a  $Y$  y a  $Y'$ . Cuando  $Y$  y  $Y'$  no se pueden ver como múltiplo de otras ecuaciones polinómicas, es posible encontrar dos polinomios  $Z, Z'$  en términos de  $x$  tal que:

$$ZY + Z'Y' = 1$$

Nuestro tratamiento se dirige ahora a otra discusión preliminar, acerca de la transformación de las funciones simétricas. Sean  $a, b, c, \dots$  cantidades,  $m$  un número entero. Denotemos por  $\lambda'$  su suma,  $\lambda''$  la suma de sus productos en pares,  $\lambda'''$  la suma de sus productos de tres en tres, etc., por lo que a partir de la expansión del producto:

$$(x - a)(x - b)(x - c) \dots$$

surge

$$y = x^m - \lambda' x^{m-1} + \lambda'' x^{m-2} - \lambda''' x^{m-3} + \dots$$

Por lo tanto  $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots$  son funciones simétricas en términos de  $a, b, c, \dots$ . Si sustituimos a  $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots$  por  $\ell', \ell'', \ell''', \dots$ , respectivamente y llamaremos  $p$  al *discriminante* del polinomio  $y$ . De esta manera, para  $m = 2$ ,

$$p = -\ell'^2 + 4\ell''$$

para  $m = 3$ , se puede ver que,

$$p = -\ell'^2 \ell''^2 + 4\ell'^3 \ell''' + 4\ell''^3 - 18\ell' \ell'' \ell''' + 27\ell'''^2$$

Para fijar la noción del discriminante, hay que ver los coeficientes del polinomio  $y$  como cantidades indeterminadas. El discriminante del polinomio con coeficientes determinados:

$$Y = x^m - L' x^{m-1} + L'' x^{m-2} - L''' x^{m-3} + \dots$$

será un número definido  $P$ , que es el valor de la función de  $p$  para  $\ell' = L', \ell'' = L'', \ell''' = L''', \dots$

Por lo tanto en el caso en que se supone que  $Y$  puede resolverse en factores simples:

$$Y = (x - A)(x - B)(x - C) \dots$$

de manera que  $Y$  surge de:

$$y = (x - a)(x - b)(x - c) \dots$$

poniendo  $a = A, b = B, c = C, \dots$ . Está claro, pues, que si  $P = 0$ , entonces entre las cantidades al menos dos deben ser encontradas para ser iguales; por el contrario, si  $P \neq 0$  entonces  $A, B, C, \dots$  tiene que ser necesariamente diferentes. Ahora observamos, si ponemos  $\frac{dY}{dx} = Y'$ , donde:

$$Y' = mx^{m-1} - (m-1)L'x^{m-2} + (m-2)L''x^{m-3} - \dots$$

Si dos de las cantidades  $A, B, C, \dots$  son iguales, por ejemplo,  $A = B$ , entonces  $Y'$  será divisible por  $x - A$ , por lo que  $Y$  y  $Y'$  tienen un factor común que es  $x - A$ . Por el contrario, si suponemos que  $Y$  y  $Y'$  tienen un factor común, entonces  $Y'$  debe implicar un factor simple de uno de estos  $x - A, x - B, x - C, \dots$  por ejemplo, la primera,  $x - A$ , que no puede ser el caso a menos que  $A$  es igual a alguno de los otros  $B, C, D, \dots$

De lo anterior se deduce un teorema, que dice que si el discriminante del polinomio  $Y$  no es 0,  $Y$ ,  $Y'$  ciertamente no pueden tener un factor común, o si  $Y$ ,  $Y'$  tienen un factor común entonces necesariamente el discriminante del polinomio  $Y$  debe ser 0.

Con la ayuda de la discusión anterior, la *solución* de la ecuación  $Y = 0$ , es decir, el descubrimiento de un valor definido de  $x$ , ya sea real o expresado en la forma  $g + h\sqrt{-1}$ , que la satisface, se reduce a la solución de la ecuación  $F(u, X) = 0$ , siempre que el discriminante del polinomio  $Y$  es distinto de cero. Es preciso señalar que si todos los coeficientes en  $Y$ , es decir, el número de  $L', L'', L''', \dots$ , son cantidades reales, entonces también lo son todos los coeficientes

en  $F(u, X)$ . El grado de la ecuación secundaria  $F(u, X)$  es  $\frac{1}{2}m(m-1)$ : por lo tanto, cada vez que  $m$  es un número de la forma  $2^\mu k$  donde  $k$  es impar, entonces el orden de la ecuación secundaria es de la forma  $2^{\mu-1}k'$ .

En el caso cuando el discriminante del polinomio  $Y$  es 0, se le puede asignar otro polinomio  $\mathfrak{Y}$  dividiéndolo, cuyo discriminante es distinto de cero y cuyo grado es de la forma  $2^v k'$  tal que  $v \leq \mu$ . Cualquier solución que sea de la ecuación  $\mathfrak{Y} = 0$  también satisface la ecuación  $Y = 0$ , la solución de la ecuación  $\mathfrak{Y} = 0$  puede ser reducida de nuevo a la solución de otra ecuación, cuyo grado es de la forma  $2^{v-1}k''$ .

A partir de estas cosas podemos decir que en general, la solución de cualquier ecuación cuyo grado es un número par de la forma  $2^\mu k'$  puede reducirse a la solución de la otra ecuación cuyo grado es de la forma  $2^{\mu'} k'$ , tal que  $\mu' < \mu$ . Siempre y cuando el número  $\mu' \neq 0$ , el mismo método puede ser aplicado una vez más, y que continuará así hasta que se llegue a una ecuación cuyo grado es impar y los coeficientes de esta ecuación sean reales, siempre que todos los coeficientes de la ecuación original reales; de hecho, una ecuación de grado impar produce una solución, y de hecho una raíz real, y así cada una de las ecuaciones anteriores también será soluble, ya sea por una raíz real o por una raíz de la forma  $g + h\sqrt{-1}$ .

Por lo tanto, se ha establecido que cualquier polinomio  $Y$  que sea de la forma  $x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - \dots$  donde  $L', L'', L''', \dots$  son las cantidades reales definidas, implica un factor  $x - A$ , donde  $A$  es una cantidad real o uno expresable en la forma  $g + h\sqrt{-1}$  en el último caso, fácilmente puede verse que  $Y$  también alcanza el valor 0 por la sustitución  $x = g + h\sqrt{-1}$ , y así es divisible por  $x - (g - h\sqrt{-1})$  y así también por el producto  $x^2 - 2gh + g^2 + h^2$ . Por lo tanto, cualquier polinomio se factoriza, de hecho implica un factor de primer o segundo grado, y desde el mismo

se aplica de nuevo al cociente, es evidente que  $Y$  se puede descomponer en factores reales de primer o segundo grado. Siendo ese el propósito principal de Gauss.

### 3.4.3. Tercera Demostración Formal

La demostración de Gauss inicia con el polinomio:

$$X = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$$

Donde sus coeficientes son cantidades reales. Sea  $r, \varphi$  otras variables, se define:

$$r^m \cos m\varphi + A_1 r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + A_2 r^{m-2} \cos(m-2)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \cos \varphi + A_m = t$$

$$r^m \sin m\varphi + A_1 r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + A_2 r^{m-2} \sin(m-2)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \sin \varphi = u,$$

Las expresiones  $t$  y  $u$  son la parte real e imaginaria, resultado de la sustitución de

$$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

en  $X$ . Observemos que las derivadas con respecto a  $t$  y  $u$ , es decir  $\frac{dt}{d\varphi} = -u'$  y  $\frac{du}{d\varphi} = t'$ , son:

$$mr^m \cos m\varphi + (m-1)A_1 r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \cos \varphi = t'$$

$$mr^m \sin m\varphi + (m-1)A_1 r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \cdots + A_{m-1} r \sin \varphi = u'$$

Gauss demuestra el siguiente teorema:

**Teorema.** Sea  $tt' + uu'$ . Tenemos que esta expresión es positiva para un valor  $r$  de  $R$  suficientemente grande sin importar el valor de  $\varphi$ . Se tiene que para valores grandes de  $r$ , los términos dominantes de  $t$  y  $u$  son:

$$r^m \cos m\varphi \quad \text{y} \quad r^m \sin m\varphi,$$

y los términos dominantes de  $t'$  y  $u'$  son

$$mr^m \cos m\varphi \quad \text{y} \quad mr^m \sin m\varphi,$$

por lo tanto el término  $tt' + uu'$  es

$$mr^{2m}(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi) = mr^{2m}$$

que es siempre positivo.

Ahora, Observemos que las segundas derivadas de  $t$  y  $u$  con respecto a  $\varphi$ , es decir  $\frac{d^2 t}{d\varphi^2} = -u''$

y  $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = t''$ , son:

$$m^2 r^m \cos m\varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \cdots + L r \cos \varphi = t''$$

$$m^2 r^m \sin m\varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \cdots + L r \sin \varphi = u''$$

El objetivo de Gauss es demostrar que existe un punto en el plano en el cual  $t$  y  $u$  son ambas nulas, ya que la existencia de tal punto implica la existencia de una raíz compleja del polinomio  $X$ . Si la raíz es real,  $X$  tiene un factor lineal y el proceso continúa. Si la raíz no es real  $X$  tiene un factor cuadrático y de manera similar el proceso continúa.

Supongamos que no existe un punto del plano tal que  $t = 0$  y  $u = 0$ , entonces  $t^2 + u^2$  es siempre diferente de cero, y la función

$$y = \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' - uu')^2}{r(t^2 + u^2)^2}$$

es siempre finita. Nótese que el factor  $r$  en el denominador se cancela puesto que  $t', u', t'', u''$  son divisibles por  $r$ . Gauss considera a continuación la doble integral

$$\Omega = \int_0^R \int_0^{360} y \, dr \, d\varphi.$$

El resultado es el mismo, si integramos primero con respecto a  $\varphi$  y luego con respecto a  $r$ . La integral indefinida con respecto a  $\varphi$  es

$$\int y \, d\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(t^2 + u^2)}$$

Es claro que si diferenciamos la función del lado derecho obtenemos  $y$ ; además la función del lado derecho tiene la misma función para  $\varphi = 0^\circ$  y para  $\varphi = 360^\circ$ , por tanto el valor de la integral entre 0 y 360 es cero. Esto implica que

$$\Omega = 0$$

De otra parte si uno integra primero con respecto a  $r$ , obtiene la integral indefinida:

$$\int y \, dr = \frac{tt' - uu'}{t^2 + u^2}.$$

Para  $r = 0$  esta expresión es nula y para  $r = R$  es positiva. Esto significa que la integral es positiva y por tanto  $\Omega$  es positiva, lo cual contradice la conclusión anterior. Por tanto la hipótesis de que  $t$  y  $u$  nunca son ambas cero conduce a una contradicción.

---

## **4. REFLEXIONES Y CONCLUSIONES**

---

El desarrollo histórico de un concepto matemático se puede abordar de diferentes maneras; en este trabajo de investigación se aplicó una propuesta metodológica que tiene que ver con ciertas etapas, las cuales permiten tener un acercamiento a los conceptos y procedimientos de validación de un enunciado, dichas etapas de desarrollo conceptual están relacionadas a la intuición, visualización y formalización. Una intuición corresponde a la percepción de la veracidad de algo sin que medie un proceso formal. Es el caso de los planteamientos de Descartes y Girard, quienes establecen, sin necesidad de demostrarlo, que una ecuación de grado  $n$  tiene  $n$  raíces. Con respecto a la visualización se hace referencia a los procesos mentales, ideas, intentos, esquemas de demostración, los cuales son realizados por grandes matemáticos como D'Alembert, Euler y Laplace, quienes realizaron los primeros intentos de demostración acerca del TFA. La etapa formal tiene que ver con la validación de un enunciado, que es cuando ya se demuestra con todo el rigor un teorema. Esta metodología la hemos aplicado al TFA. Un análisis histórico nos permite visualizar claramente las diferentes etapas que hemos tomado como referencia en esta indagación, pues con el objetivo de validarlo se pasa de las intuiciones a una etapa pre-formal y de la etapa pre-formal a una formal que es donde se demuestra el teorema.

En la demostración del TFA se pone a prueba la intuición, la cual está relacionada con el hecho de pensar que una ecuación tiene tantas soluciones como su grado lo indica. Las demostraciones del TFA se verán afectadas por el contexto histórico en el que se encuentren, por ejemplo Descartes no pudo demostrar el teorema porque carecía de las herramientas matemáticas para hacerlo. Por otro lado, las demostraciones de D'Alembert, Euler y Laplace fueron invalidadas porque utilizaban

conceptos que aún no habían sido definidos; incluso el mismo Gauss utilizó libremente el concepto de continuidad; además, cada uno de ellos, tiene un método para demostrar el TFA y una estrategia con la cual atacar el problema.

El TFA es un teorema de naturaleza especial para la época, pues corresponde a un teorema de existencia pura. Eso significa que da cuenta de la existencia del objeto sin necesidad de exhibirlo. Eso explica un poco la riqueza de la metodología que se plantea en este documento, pues se muestra que en el itinerario seguido para establecer una demostración de existencia pura la visualización y la intuición juegan un papel muy importante; así, en la primera etapa de demostración, Gauss recurre a la geometría para visualizar las raíces, mediante la intersección de dos curvas en el plano. De esta manera, la visualización juega un papel importante en la demostración del TFA, al permitir crear imágenes mentales para comprender un objeto matemático. Así mismo, el TFA, como su nombre lo indica, es fundamental para el álgebra, motivo por el cual se considera que se debería demostrar con herramientas algebraicas; pero modernamente incluso D'Alembert y Gauss hacen su demostración analíticamente, es decir, realizando procedimientos del análisis matemático.

A pesar de que las demostraciones de Gauss del TFA constituyen un paso importante en el desarrollo conceptual, aún quedaban algunos detalles formales que deberían ser revisados. De hecho, las demostraciones completamente formales se dieron algunas décadas después y con el aporte de muchos matemáticos de diferentes latitudes. Además, al hacer un recorrido por la historia del TFA, se nota que muchas veces se supone la existencia de raíces de polinomios, lo cual es una falla en matemáticos como Euler, D'Alembert y Laplace. En las siguientes generaciones, e incluso en muchos de los libros de texto de variable compleja, como los que se usan en la Licenciatura en Matemáticas y Física de la universidad de Valle, se demuestra el TFA con base en teoremas

desarrollados después del siglo XVIII. Por ejemplo, una forma de demostrarlo es haciendo uso del teorema del matemático Joseph Liouville (1809-1882). Según este teorema, si  $f$  es una función continua y acotada, luego  $f$  es constante<sup>23</sup>; desde la topología haciendo uso del teorema de punto fijo, el cual fue planteado por Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), también es posible demostrar el TFA<sup>24</sup>.

A propósito, en este trabajo se pueden mencionar algunos resultados importantes, empezando con que no existe un modelo de demostración independiente de la época; los modelos están relacionadas a las personas que han construido conocimiento matemático, pues se puede ver que antes de D'Alembert los matemáticos no podían demostrar el TFA, debido a que las matemáticas de su época no eran lo suficientemente avanzadas para ello; pero una vez que se tuvieron las herramientas suficientes, fue D'Alembert quien utilizando un método analítico presentó su intento de demostración. En contraste con esto, tanto Euler como Laplace utilizaron un método algebraico; además, en lo que a Gauss respecta, su segunda demostración es algebraica, mientras que las demás son analíticas; pero en la primera y tercera demostración de Gauss se hace uso de la geometría, allí es donde se demuestra la existencia de las raíces de una ecuación polinómica.

Por otro lado, las exigencias con respecto al rigor han ido variando a medida que ha ido avanzando la historia: podemos ver que inicialmente con Descartes y Girard, solo se intuye el TFA, sin ninguna demostración; mientras que Newton y Leibniz brindan herramientas para poder demostrarlo en el futuro; por su parte, tanto D'Alembert, Euler y Laplace presentan sus intentos de demostración del TFA, pero no es suficiente para el rigor exigido por la comunidad matemática, pues los matemáticos citados anteriores asumen como verdadero la existencia de las raíces de un

---

<sup>23</sup> Ver anexo 1.

<sup>24</sup> Ver anexo 2.

polinomio, lo cual es un gran vacío en sus demostraciones; por otra parte, Gauss tampoco ofrece una demostración rigurosa, pues utiliza conceptos que aún no se han demostrado, quedando descontento y brindando muchas demostraciones más en el transcurso de 50 años.

Después de las demostraciones de Gauss, y las críticas respectivas se puede decir que el rigor absoluto es inalcanzable. Se podría pensar que cuando se demuestra un teorema, queda finalizado el trabajo que se debía realizar. Pero esto no es así, en el caso del TFA una vez se aprobó la demostración formal de Gauss como válida, nuevas ideas surgieron en otras ramas de la matemática, como la variable compleja, para poder demostrarlo de otras maneras y con otras herramientas.

Además, no ha habido un total acuerdo por parte de la comunidad matemática, en cuanto a los conceptos y procedimientos utilizados para demostrar el TFA, pues nadie dice cuáles son los más adecuados para demostrarlo, es por eso que Gauss pasa mucho tiempo tratando de hacer una demostración algebraica del teorema, sin embargo, recurrió al análisis, a la geometría, etc., para demostrarlo; Gauss podía utilizar en su demostración diferentes métodos, tal como lo hizo, pues uso el método directo, inducción matemática, reducción al absurdo, etc., para verificar la veracidad del teorema.

La historia del TFA, está atada a la historia de la variable compleja, pues Descartes para dar solución a su regla, tuvo que admitir las raíces imaginarias a las cuales él las llama producto de la imaginación.

En este recorrido histórico, se pueden identificar una gran variedad de demostraciones del TFA, pasando de intuiciones a conjeturas para finalmente demostrarlo. Además, se puede ver que para hacer la demostración fueron necesarios otros conceptos, sin los cuales no se podría completar una

demostración. Bernard Bolzano (1781-1848) explicó en un trabajo llamado *Rein Analytischer Beweis*, el por qué las demostraciones, incluida la de Gauss, no eran del todo satisfactorias, pues estaban soportadas en intuiciones geométricas; en el caso de Gauss, la geometría fue un elemento indispensable, además del concepto de continuidad que utilizó aún sin tenerlo bien claro.

Asimismo, en todo el recorrido histórico se ha observado la construcción de conocimiento por medio del TFA, dado que, gracias a este teorema han surgido nuevos problemas, métodos y demostraciones para demostrar la existencia de la raíz de una ecuación.

Es un hecho que los desarrollos de Gauss llevaron el universo de las cantidades al terreno de las magnitudes complejas. Gauss visualiza la cantidad imaginaria  $\sqrt{-1}$  que venía siendo aceptada como solución de una ecuación desde Descartes, pues para cumplir con su conjetura, de que una ecuación de grado  $n$  tiene  $n$  soluciones, se necesita que algunas de estas soluciones sean imaginarias. Pero no solo ellos aportaron en este campo, pues Euler denotó con  $i$  a  $\sqrt{-1}$ , e incluso Leibniz aportó a la historia de estos números, los cuales no parecían tener impacto en los desarrollos matemáticos. Siendo esta una razón suficiente para que el trabajo de Gauss fuera aceptado; pues se sabe que las cantidades imaginarias aparecieron inesperadamente en la resolución de ecuaciones, y luego se las visualiza geométricamente, dando confianza a la comunidad matemática para generalizar su uso.

En este punto surge la pregunta ¿Cómo la historia del TFA aporta a la educación matemática? Tratando de dar una respuesta a esta pregunta, se puede diseñar una propuesta didáctica que permita un acercamiento diferente a los procesos de demostración a través de un teorema, bien sea el TFA o cualquier otro teorema, de tal manera que se vean los conceptos matemáticos en un

sentido riguroso y no solo como un concepto que se puede aplicar, como una regla de la cual se obtiene un resultado.

La demostración en el salón de clases es importante, por eso es necesario que desde edades tempranas los estudiantes aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, sin exigirles un alto grado de rigor en ellas. Cabe resaltar que en la educación básica y media se enseña a los estudiantes a usar la matemática, a pensar lógicamente, a argumentar, razonar y a fortalecer la intuición, es por eso que hay que enseñarles a demostrar teoremas, para que así ellos, puedan resolver problemáticas de diverso origen.

En el colegio se ven las demostraciones en un sentido no formal, y para que se pueda demostrar una proposición se debe pasar por unos niveles, iniciando por el de abstracción, el cual permite entender diferentes propiedades del objeto matemático con los que se esté trabajando. Inicialmente el estudiante limita su pensamiento a objetos específico como lo hacía Descartes, concentrándose solo en ejemplos particulares, para pasar a un segundo nivel donde el estudiante escoge un objeto como representación de una clase de objetos, es decir un ejemplo que haga que el estudiante se base en él para seguir con su trabajo; finalmente en el estudiante se producirán razonamientos generales de donde se podría pasar a hacer una demostración formal.

Después de este estudio histórico, se puede plantear una forma donde se implemente la demostración matemática en la escuela, pasando por diferentes procesos, estos pueden ser llevados a cabo con diferentes teoremas; para dar un ejemplo se espera que el estudiante vaya a su experiencia y mediante ejemplos particulares empiece resolviendo ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas, etc. Podrán ver que si se sigue así con un número reducido de casos se llega

a creer que siempre que se resuelva una ecuación lineal se tendrá una raíz, si se resuelve una ecuación cuadrática se tendrá dos raíces, etc., lo cual sería una conjetura hasta ese momento.

Continuando con el problema, se espera que el estudiante pase a realizar una generalización donde se concentre en casos no tan particulares que representen un cierto conjunto de ecuaciones, por ejemplo, podríamos decir que, cualquier ecuación que tenga como coeficientes números reales siempre se puede factorizar en polinomios cuadráticos. El siguiente paso sería generalizar la conjetura, es decir, que el estudiante pueda llegar a representar las ecuaciones de grado  $n \in \mathbb{N}$ , y pueda entender que siempre que  $n$  sea un número natural, si yo tengo una ecuación de grado  $n$ , la ecuación se podrá ver como el producto de  $n$  factores.

El siguiente paso sería tratar de demostrar este hecho, iniciando con una visualización mental de su solución; los estudiantes presentarán diferentes validaciones de la conjetura, de las cuales se escogerá la que tenga un carácter formal, hasta que la conjetura pase a ser un teorema. Claro está, el ejemplo que planteamos anteriormente tiene que pasar por unos procesos mentales donde el estudiante tenga un pensamiento matemático amplio, lo cual se logra hacia los últimos años de la educación media. La forma cómo el estudiante justifica un teorema puede variar, ya que si logra validarlo mediante dibujos o ejemplos, sería una prueba no retórica. Puede hacer una demostración *preformal*, es decir que mediante ciertos razonamientos se llegue a validar el teorema, pero siempre habrá algunas partes sin demostrar sin las cuales no se daría completamente la veracidad del teorema; otro caso serían las demostraciones formales que son las demostraciones rigurosas, que se pueden encontrar en los libros de texto de matemáticas universitarias. De todo esto se espera que, en su formación matemática, el estudiante pueda comprender una demostración y la importancia de la misma, ya que, con ello, se puede ver sus esquemas de demostración y con esto el estudiante podría explicar mejor sus razonamientos.

Lo que se pueden realizar en estudios más avanzados, tienen que ver con lo siguiente: desde lo didáctico, tanto para estudios con profesores y con estudiantes, se puede llevar la demostración al salón de clases y verificar si los sucesos históricos por los cuales pasaron los matemáticos, también se puede desarrollar en el salón de clases. Desde la parte histórica queda abierto el trabajo con las cantidades imaginarias y el estudio de la variable compleja, donde se puede observar cómo ha ido evolucionando las raíces cuadradas de números negativos que surgen en las ecuaciones, hasta conformarse toda una rama de las matemáticas como es la variable compleja; además, se puede observar cómo los estudiantes trabajan con estas cantidades en el salón de clases de la educación media y básica, ya que según los currículos no se aborda ampliamente, sin tener en cuenta sus aplicaciones en diferentes procesos matemáticos.

Incluso, desde lo matemático se podría ampliar aún más los desarrollos del TFA, ya que después de Gauss, surgen una amplia lista de matemáticos que trabajaron con este teorema. Por ejemplo, en 1814, el suizo Jean Robert Argand (1768-1822), publicó una demostración simple del TFA. También, en 1820, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) dedicó un capítulo completo de su *Cours d'analyse* a la demostración de Argand; dicha demostración en aquella época no fue completamente rigurosa, ya que el concepto de extremo inferior no había sido desarrollado todavía. La demostración de Argand fue recogida por Chrystal en su libro de texto Álgebra en 1886. Este libro fue muy divulgado y la demostración de Argand se hizo famosa.

La célebre demostración de Argand del TFA es un teorema de existencia que no es constructivo, otros matemáticos importantes como es Évariste Galois (1811-1832) y el matemático alemán Hellmuth Kneser (1898-1973), trabajaron también con la demostración del TFA. La demostración de Hellmuth Kneser fue simplificada en 1981, por su hijo Martin Kneser. Por otro lado, en la Universidad de Nijmegen en Holanda se estableció un proyecto de investigación sobre el TFA, el

cual llegó hasta el año 2000. El grupo sobre el TFA mantiene una página en la que se da información valiosa a quienes deseen ver los lenguajes de computación que utilizan en algunas soluciones constructivas. Incluso hay algoritmos en Coq (programa desarrollado en Francia) implementando el teorema de Kneser. Queda pues abierta la invitación para que los lectores interesados sigan investigando en torno al desarrollo histórico del TFA y las aportaciones que su estudio trajo en diversas áreas de las matemáticas.

---

## 5. ANEXOS

---

### **Anexo 1. Demostración, utilizando el Teorema de Liouville.**

Si  $p(z)$  es un polinomio no constante entonces existe un número complejo  $a$  tal que  $p(a) = 0$ .

La demostración del TFA se realiza de manera indirecta, por reducción al absurdo.

Sea  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ , con  $a_n \neq 0$  y  $n \geq 1$ , una ecuación polinomial con coeficientes reales. El TFA afirma que el segundo miembro de esta ecuación puede descomponerse en factores de primer o segundo grado; es decir, tiene raíces en los complejos. Concretamente,  $p(z) = 0$  tendrá  $n$  raíces, algunas de las cuales pueden ser repetidas.

Supongamos que  $p(z) = 0$  no tiene solución. Tomando como modelo del campo de los números complejos al plano, lo dividiremos en dos regiones: la primera será  $R_1 = \{z/|z| \leq r\}$ ; la región  $R_2$  será el resto del plano, es decir,  $R_2 = \{z/|z| > r\}$ . Consideremos la función  $\frac{1}{p(z)}$ ; como  $p(z)$  nunca se anula, tenemos que  $\frac{1}{p(z)}$  es una función continua en todo el plano, en particular en  $R_1$ . De acuerdo con la teoría actual de la variable compleja, si  $f(z)$  es una función continua en alguna región  $R$  del plano complejo,  $|f(z)|$  también lo será; además, si  $R$  es acotada y cerrada, es decir, si contiene a su frontera, entonces existirá un real positivo  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z$  en  $R$ . Este resultado nos conduce a que  $\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M$  para alguna  $M$  real, siempre que  $z$  se encuentre en  $R_1$ , que es una región cerrada y acotada.

Analicemos ahora el comportamiento de  $\frac{1}{p(z)}$  en la región  $R_2$ . Para ello utilizaremos la desigualdad

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \text{ en la que } |f(z)| \geq |g(z)|$$

Expresamos  $p(z)$  como:  $p(z) = f(z) + g(z)$  siendo  $f(z) = a_n z^n$  y  $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$ . Notemos que  $r$  puede ser lo suficientemente grande para cumplir que  $|f(z)| \geq |g(z)|$ . Tendremos así que

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |f(z) + g(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| = |f(z)| - |g(z)|. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$|a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0| \leq |a_{n-1}| |z|^{n-1} + |a_{n-2}| |z|^{n-2} + \dots + |a_0|.$$

De este modo,

$$|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|),$$

siempre que  $r$  sea lo suficientemente grande para que el último miembro de esta doble desigualdad sea positivo. Tenemos así que

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|) = |a_n| |z|^n - |z|^{n-1} \left( |a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \right. \\ &\quad \left. \frac{|a_{n-3}|}{|z|^2} + \dots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Sea  $A$  el número mayor del conjunto  $\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, |a_{n-3}| \dots |a_0|\}$ ; se tendrá que

$$|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \frac{|a_{n-3}|}{|z|^2} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} \leq A + \frac{A}{|z|} + \frac{A}{|z|^2} + \dots + \frac{A}{|z|^{n-1}} \leq nA$$

Como consecuencia, obtendremos que

$$\begin{aligned} |a_n| |z|^n - |z|^{n-1} \left( |a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} \right) &\geq |a_n| |z|^n - |z|^{n-1} \left( A + \frac{A}{|z|} + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{A}{|z|^{n-1}} \right) \geq |a_n| |z|^n - |z|^{n-1} (nA); \end{aligned}$$

Es decir

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1} \left( A + \frac{A}{|z|} + \cdots + \frac{A}{|z|^{n-1}} \right) \geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}(nA) = |z|^n \left( |a_n| - \frac{nA}{|z|} \right).$$

Lo anterior nos lleva a que

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{r^n \left( |a_n| - \frac{nA}{r} \right)}.$$

el segundo miembro de la desigualdad alcanzará su valor máximo respecto a los puntos de  $R_2$  cuando  $|z| = r$ , pues cada punto  $z$  de  $R_2$  cumple que  $|z| > r$ . Así, en la segunda región

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{r^n \left( |a_n| - \frac{nA}{r} \right)}.$$

En  $R_1$  se obtuvo que  $\frac{1}{|p(z)|} \leq M$  y en  $R_2$  se concluyó que  $\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{r^n \left( |a_n| - \frac{nA}{r} \right)}$ . Sea  $M'$  la mayor de las dos cotas. Se tendrá que  $\frac{1}{|p(z)|} \leq M'$  para cualquier  $z$  en el plano complejo. De este modo, la función  $\frac{1}{p(z)}$  es acotada. Bajo estas condiciones puede aplicarse el teorema de Liouville el cual menciona si  $f$  es una función entera y acotada entonces  $f$  es constante, y como obtenemos que  $\frac{1}{p(z)}$  es una función constante, es decir  $\frac{1}{p(z)} = k$ . Lo anterior lleva a que  $p(z) = \frac{1}{k}$  y esto es absurdo ya que  $p(z)$  es una función polinomial. Por lo tanto, la ecuación  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$  sí tiene solución en los complejos.

## Anexo 2. Demostración utilizando el Teorema de punto fijo de Brouwer

Sea  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ , cualquier polinomio complejo. Debemos probar que  $f(z)$  tiene por lo menos una raíz. Para este fin, sea  $z = r e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $R = 2 + |a_1| + \cdots + |a_n|$  y definimos una función no analítica  $g(z)$  como

$$g(z) = \begin{cases} z - f(z)/(R e^{i(n-1)\theta r}) & |z| \leq 1 \\ z - f(z)/(R z^{n-1}) & |z| \geq 1 \end{cases}.$$

La función  $g(z)$  es continua para todos los valores  $z$ . Primero, cada una de las dos expresiones dadas para  $g(z)$  es continua en todo el rango especificado, ya que ningún denominador se vuelve cero y, para  $z = 0$ , tenemos  $r = 0$  por lo que  $i(n-1)\theta r = 0$ , sin importar el valor que tenga  $\theta$ . Segundo, para  $z = 1$ , las dos expresiones son idénticas.

Para  $|z| \leq R$ , tenemos  $|g(z)| \leq R$ . Veamos

- Para  $z \leq 1$

$$|g(z)| \leq |z| + \left| \frac{f(z)}{R} \right| \leq 1 + \frac{1+|a_1|+\dots+|a_n|}{R} \leq 1 + 1 \leq R.$$

- Para  $1 \leq |z| \leq R$

$$|g(z)| = \left| z - \frac{z}{R} - \frac{a_1+\dots+a_n z^{1-n}}{R} \right| \leq \left| (R-1) \frac{z}{R} \right| + \frac{|a_1|+\dots+|a_n|}{R} \leq R - 1 + \frac{R-2}{R} \leq R.$$

Ahora consideremos la correspondencia  $z \rightarrow g(z)$ . Los últimos dos párrafos muestran que esta es una transformación continua que envía el círculo  $|z| \leq R$  en sí mismo. Luego, por el teorema de punto fijo de Brouwer, el cual menciona que: Cualquier transformación continua del círculo  $|z| \leq R$  en sí mismo tiene un punto fijo. Aquí  $R$  es un número real positivo arbitrario y  $z$  es una variable compleja. Existe al menos un valor  $z_0$  tal que  $g(z_0) = z_0$ . Pero la definición de  $g(z)$ , esto significa que  $f(z_0) = 0$  y que  $f(z)$  tiene por lo menos una raíz.

---

## 6. REFERENCIAS

---

- Acevedo, M. & Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Santafé de Bogotá: Universidad Nacional.
- Aleksandrov, A., Kolmogorov, A. & Laurentiev, M. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado* (v2). Madrid: Alianza.
- Alvarez, C. & Dhombres, J. (2011). *Une histoire de l'imaginaire mathématique: vers le théorème fondamental de l'algèbre et sa démonstration par Laplace en 1795*. Paris: Hermann.
- Arguedas, V. (2008). Historia del Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) y algunas curiosidades. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 9 (1), 1-6.
- Baltus, C. (2004, Marzo). D'Alembert proof of the fundamental theorem of algebra. *Historia Mathematica*, 31 (4), 414-428.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.
- Carrillo, F. (2002). El Príncipe de las Matemáticas. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, 1 (2) 27-38.
- Chavarría, S. (2014). *De las ecuaciones a la teoría de grupos, algunos obstáculos epistemológicos*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Cali.
- Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa: Revista de la sociedad argentina de educación matemática*, 24, 23-29.
- Crespo, C. (2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. *Clame*, 717-727.
- D'Alembert, J. (1746). Recherches sur le calcul intégral. *HAB pour l'année*, 182-193.
- Dávila, G. (2003, Mayo). El Desarrollo del Álgebra Moderna, Parte III: El surgimiento del álgebra abstracta. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, 2 (2), 38-78.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, 26, 15-30.
- Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. Barcelona: España.
- Director, B. (2002). The fundamental theorem of algebra. Bringing the invisible to the surface. *Fidelio. Journal of poertry, science an stratecraft*. 11 (3-4) pp. 17-29.

- Espinoza, G. (2009). *Las ecuaciones cuadráticas y el Teorema Fundamental del Álgebra*. (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma de México. Ciudad de México.
- Gauss, Carolo F. (1799). Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. *Werke III* (pp. 1-30). Göttingen: Suhrkamp Verlag.
- Gauss, Carolo F. (1815). Demonstratio nova altera Theorematis Omnem Functionem Algebraicam Rationalem Integram unius varia bilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. *Werke III* (pp. 32-56). Göttingen: Suhrkamp Verlag.
- Gauss, Carolo F. (1816). Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum ategrarum factores reales demonstratio tertia. *Werke III* (pp. 57-64). Göttingen: Suhrkamp Verlag.
- Gauss, C. F. (1799). *New proof of the theorem that every algebraic rational integral function in one variable can be resolved into real factors of the first or the second degree*. (Doctoral dissertation). Julia Carolina Academy. Helmstedt. Translated by Ernest Fandreyer.
- Gauss, C. F. (1815). Another new proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree. Translated by P. Taylor and B. Leak (1983).
- Gaviria, L. (2014). *De los grupos y cuerpos como herramientas a objetos matemáticos*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Cali.
- Gilain, C. (1991). Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral. *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (2), 91-136.
- Gómez, I. (2000). La intuición en Matemáticas. *Educación*, 44, 30-34.
- Gómez, I. (2014). Visualización y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 5–28. Braga, Portugal: APM.
- Ibañez, M. & Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación matemática*, 9 (2), 65-104.
- Ibañez, M. & Ortega, T. (2005, Junio). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números*, 61, 19-40.
- Kline, M. (2002). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días (v2)*. España: Alianza Editorial.

- Murcia, L. (2009). *La transición del álgebra clásica al álgebra moderna: algunos aspectos históricos – epistemológicos en el desarrollo de la noción de estructura a través de ecuaciones*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Cali.
- Pla i Carrera, J. (1992). The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss. *Publicacions matemàtiques*, 36 (2B), 879-911.
- Pedemonte, B. (2008, Abril). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 385–400.
- Sabaté, F. (2005, Marzo). El Teorema Fundamental del Álgebra. *Universitat de Barcelona*, 1-11.
- Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. Investigación en educación matemática: *Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática*, 18-21.
- Salazar, L. (2009). *Teorema Fundamental de Álgebra y sus diferentes demostraciones*. (Tesis de pregrado). Pontificia universidad Javeriana. Santafé de Bogotá.
- Struik, D. (2014). *A source book in mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press.
- Tellechea, E. (2003, Enero). El Cálculo Según Euler. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, 1 (2), 19-26.
- Van Der Waerden, B. (1985). *A history of algebra: from al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Berlín: Springer-Verlag.