

La teoría de conjuntos cantoriana y la representación de funciones: la clasificación René Baire

Luis Recalde

Resumen

El propósito de este artículo es describir el papel histórico jugado por la teoría de conjuntos cantoriana en la fundamentación del análisis. Específicamente, nos proponemos analizar la manera cómo la obra del matemático francés René Baire revela la potencia de las técnicas transfinitas en la descripción de la teoría de funciones. El proceso histórico de clasificación de funciones muestra que era necesario pasar del ámbito prescriptivo de lo que era una función al ámbito descriptivo, es decir a un campo teórico en donde se pudiera reconocer propiedades de las funciones de acuerdo a los grados de discontinuidad. La obra matemática de Baire no sólo constituye la síntesis del proceso de clasificación de funciones sino que incorpora técnicas, métodos y resultados novedosos. Con Baire se hacen familiares las técnicas de recursión transfinita, la pruebas de inducción transfinita y la semicontinuidad.

Palabras y frases claves: Teoría de conjuntos, fundamentos del análisis, clases de Baire

1 Introducción

El desarrollo histórico del concepto de función en el siglo XIX y en los inicios del XX se inscribe en el llamado periodo de fundamentación del análisis o rigorización de las matemáticas. ¿Qué es eso de la rigorización de las matemáticas? ¿En qué consiste la llamada fundamentación del análisis? Al respecto, han surgido una serie de metáforas afortunadas buscando caracterizar el hecho: cimentar sobre bases firmes el edificio matemático, estructurar de manera ordenada las matemáticas, describir los principios de la arquitectura matemática, etc. “Dar a las ciencias matemáticas las bases sólidas”, dice al respecto Lagrange en su *Théorie des fonction analytique* (1797), (ver Dugac [1981]) proponiéndose dos objetivos concretos:

1. Desarrollar el cálculo diferencial sin las consideraciones metafísicas de lo infinitamente pequeño y evitar el empleo del método de “fluxiones” que introduce en el análisis la noción “extranjera” de movimiento en el uso de la noción de límite.

2. Unir el cálculo al álgebra, de tal manera que no haya que hacer de todo más que un solo método.

Cuestiones muy bien caracterizadas por el célebre matemático francés Jean Cavaillès en *Método axiomático y formalismo* de 1938. Para Cavaillès, el proceso de rigorización hace alusión a tres aspectos básicos y mutuamente dependientes:

1. Escoger entre distintos tipos de evidencia
2. Dar prioridad a unos desarrollos respecto a otros
3. Situar la actividad matemática entera en relación con otras actividades de la conciencia.

Como se ve, no se trata de poner en duda la potencia y la veracidad de los métodos y de los conceptos matemáticos; la búsqueda se encamina, fundamentalmente, a encontrar una manera de *evitar los contaminantes extramatemáticos*. Se trata de especificar un método que permita caracterizar aquellos conceptos que deberían reconocerse como objetos matemáticos propiamente dichos. Pero esto no es más que una añoranza euclidiana. Sabemos que el esfuerzo de Euclides, proveniente de la filosofía aristotélica, era construir unas matemáticas cuyos objetos pertenecieran al tipo de seres inmóviles y accidentales. En el siglo XIX, y aún en la actualidad, este paradigma es el que predomina: la identidad matemática de un objeto pasa por el esfuerzo de incorporarlo a cuerpo teórico que excluya cuestiones extrañas a la matemática, tal como el movimiento físico.

Sin embargo, el proceso de constituir un terreno propio de las matemáticas va mucho más allá que institucionalizar una formalización consistente. El problema de fondo tiene que ver con la caracterización ontológica de los objetos que habitan ese universo, de tal forma que, a pesar de su naturaleza abstracta, tomen distancia de otros entes abstractos como los lestrigones, los cíclopes y demás seres imaginarios. El concepto de función no escapa a esta problemática. Si bien las primeras discusiones apuntan justamente a incorporar una definición propiamente matemática, el problema de fondo aparece cuando se busca explicitar sus propiedades: continuidad, integrabilidad y derivabilidad, entre otras. En este sentido, si bien es cierto que se libra una interesante discusión en torno a las definiciones de Euler y Cauchy, dado que aún guardan reminiscencias con variaciones temporales, la discusión central se desarrolla en el ámbito filosófico; mientras algunos insisten en amarrar las funciones a

las expresiones analíticas, otros propugnan por una definición de función como relación arbitraria. Para matemáticos como Borel, Lebesgue y Baire la definición nominal de función no caracteriza la función como objeto. El objeto función cobra sentido en cuanto se puedan exhibir sus propiedades, lo cual se puede lograr a través de incorporar procesos constructivos. La representación de funciones a través de las clasificaciones permite acercarnos a este proceso. Precisamente la clasificación de funciones de René Baire constituye la síntesis de esta perspectiva.

2 Las primeras clasificaciones de funciones

La clasificación de objetos matemáticos, que de alguna manera prefiguran el concepto de función, datan de tiempos antiguos; por ejemplo, Descartes, en su *Geometría*, establece clasificaciones de curvas en mecánicas y geométricas, de acuerdo a si se les puede adoptar o no una ecuación, e incorpora la representación algebraica de algunas de ellas. Una parábola, por ejemplo, deja de depender de la acción de un plano que corta un cono para convertirse en una ecuación de segundo grado.

En 1667 en su libro *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, James Gregory, aventura una primera definición de función como una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una serie de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación. La idea de “cualquier operación” era un lujo teórico que se permitía Gregory y que se constituye uno de los primeros pasos en la idea de incorporar la convergencia como operación legítima en matemáticas, pues aunque no había una explicación rigurosa del hecho, la cuestión era que las series de potencias se utilizaban a discreción de una manera libre. Por la misma época, Newton utilizó el término “fluentes” para designar las variables dependientes del tiempo, que modernamente reconocemos como funciones paramétricas. Leibniz utilizó explícitamente la palabra función para designar cualquier cantidad que varía de un punto a otro en una curva.

Aquí hay algo interesante: con la incorporación de la palabra se está identificando un concepto que busca autonomía y que por lo tanto merece un tratamiento especial. Obviamente esto no es suficiente para alcanzar el estatuto de objeto matemático. En este sentido, lo que podríamos llamar la conciencia de la emergencia de un nuevo objeto matemático, *función*, con su simbología y significado propio se da a partir de Euler y más específicamente en Cauchy. Sin embargo, ni uno ni otro logran una caracterización completa de lo que es una función, porque a pesar de la incorporación de una definición determinada y una notación precisa, aún en ellos retumban ecos del pasado. Las llamadas *cantidades variables*,

que emplean en sus respectivas definiciones, guardan reminiscencias con el movimiento. El paso definitivo, hacia la función como relación especial arbitraria, se dará hacia principios del siglo XX con la adopción de la teoría de conjuntos y el empleo de los cuantificadores del cálculo de predicados.

En 1748 en su famoso libro *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Euler escribe:

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes.

Una expresión analítica es una fórmula constituida a partir de las operaciones elementales de la aritmética, la composición de funciones, las series y los productos infinitos, la integración y la derivación.

Cauchy, en su *Curso de Análisis* de 1821, presenta la siguiente definición:

Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable.

En el sentido de Euler, el universo de las funciones corresponderá al universo de las expresiones analíticas. De forma genérica se establece la primera clasificación de funciones: trascendentes y algebraicas. Al incorporar una definición que escapa al concepto de expresión analítica, Cauchy ha ampliado el universo funcional. Sin embargo, Cauchy entiende que las funciones especificadas pertenecen a un tipo especial, como lo son las funciones continuas. En este sentido, incorpora, de manera implícita, la primera gran clasificación fundamental: funciones continuas y discontinuas. (También Bolzano lo había hecho en 1816). Cauchy muestra un singular apego a lo continuo que le lleva a algunos resultados controversiales. Uno de los problemas surge con la puesta en escena de contraejemplos a su resultado según el cual suma arbitraria, convergente, de funciones continuas es continua. Es mucho lo que se ha escrito sobre este resultado, y su vínculo con la emergencia de la convergencia uniforme. Sin desconocer la importancia de este aspecto, nos interesa aquí analizar sus repercusiones en el desarrollo de la teoría de funciones. Es importante

anotar que el desarrollo de la teoría de funciones no sólo tiene relación con lo matemático; la aparición de fenómenos, como el del calor, obligan a pensar en las funciones discontinuas. ¿Cómo caracterizar estos nuevos objetos, funciones discontinuas, de los cuales se tienen tan pocas referencias? ¿Merecen el reconocimiento de funciones propiamente dichas? El primero en responder afirmativamente a esta pregunta fue Peter Gustav Lejeune-Dirichlet en 1837. En su artículo: *Sur convergence des séries trigonometriques qui servent á représenter une fonction arbitraire*, no encuentra inconvenientes para aceptar funciones que no estén sujetas a ninguna ley analítica. Para él, f es una función si ella hace corresponder a todo valor de x un valor bien determinado $f(x)$. En seguida presenta el ejemplo de la función característica de los racionales como prototipo de estas funciones, (sin embargo, Dirichlet estaba equivocado, puesto que si bien esta función es totalmente discontinua, ella es representable analíticamente). Dirichlet además prometía en este artículo profundizar en la integración y convergencias de las series de Fourier para funciones con un número infinito de discontinuidades en un intervalo finito. Pero su respuesta no llegó nunca. Fue un alumno del mismo Dirichlet: Bernhard Riemann, quien extendió la integración a funciones con un conjunto denso de discontinuidades, logrando una caracterización bastante significativa de las funciones discontinuas. Riemann define la integral a partir de particiones y sus correspondientes sumas de la siguiente manera:

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$. Riemann toma una partición P de este intervalo, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Si la suma,

$$S = \sum_{i=1}^n f(t_i) (x_i - x_{i-1}), \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

se aproxima a un límite único cuando $\|P\| \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$, la función es integrable y ese límite se designa por $\int_a^b f(x) dx$.

Riemann demuestra que la clase de funciones integrables incluye algunas que poseen un conjunto denso de discontinuidades en un intervalo acotado, como la función,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{n^2},$$

donde, $g_n(x) = g(nx)$ y

$$g(x) = \begin{cases} x - n, & \text{donde } n \text{ es el entero más cercano a } x \\ 0, & \text{para } x = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{9}{2}, \dots \end{cases}$$

$f(x)$ es discontinua en los puntos de la forma $x = \frac{p}{2q}$, donde p y $2q$ son primos relativos. A pesar de que sus puntos de discontinuidad constituyen un conjunto denso en cualquier intervalo acotado, $f(x)$ es Riemann integrable.

Fue Weierstrass y algunos de sus alumnos, quienes abordaron la construcción de expresiones analíticas que definieran funciones con infinitas oscilaciones y discontinuidades en un intervalo finito. Precisamente de 1870 data la clasificación de Hermann Hankel (1839-1873), desarrollada de la siguiente manera:

1. La primera clase consiste de las funciones continuas.
2. La segunda clase está formada por las funciones continuas excepto en un número finito de puntos en todo intervalo finito.
3. La tercera clase corresponde a las funciones que tienen un número infinito de discontinuidades en un intervalo finito. Estas pueden ser a su vez de dos clases:

3.1 funciones puntualmente discontinuas

3.2 funciones totalmente discontinuas

Las subdivisiones 3.1 y 3.2 las realiza Hankel atendiendo a la diferencia entre funciones discontinuas integrables y no integrables en el sentido de Riemann. Hankel precisa la naturaleza de las discontinuidades mediante el concepto de *salto de una función* en un punto. Concepto que prefigura la noción de oscilación incorporada por Volterra más tarde.

Basado en este concepto, Hankel demuestra que una función f , acotada, es Riemann integrable si y sólo si es puntualmente discontinua. Resultando extremadamente importante, pues permite identificar, a través de una propiedad de la función, si es o no Riemann integrable; propiedad que no es otra cosa que la caracterización de un conjunto particular.

Los resultados de Hankel fueron retomados por el italiano Ulisse Dini (1845-1918). Rigurosamente hablando, su texto *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* de 1878, es el primer tratado de teoría de funciones de variable real. Recibido con gran entusiasmo por la comunidad matemática, incluyendo a Cantor, en el texto, Dini incorpora de manera directa los conceptos de extremo superior e inferior, sobre los que se soporta la noción de semicontinuidad incorporada por Baire en su Tesis. Al respecto, Pierre Dugac dice que esta publicación de Dini contiene el germen de los interrogantes que movilizaron a Baire.

Gaston Darboux toma como referencia a Hankel para sus trabajos sobre funciones altamente discontinuas y sobre la integración de tales funciones. En esta dirección, Darboux se inscribe en la línea investigativa, originada por Weierstrass, que trata sobre la representación de funciones continuas no diferenciables en ningún punto. Respecto al desarrollo conceptual de los trabajos de Baire, es importante resaltar que Weierstrass había demostrado el primer teorema básico de la representación de funciones, según el cual una función continua podía aproximarse uniformemente por una sucesión de polinomios sobre un intervalo finito.

3 Aportes y desarrollos teóricos de Baire

En primer lugar, hay necesidad de diferenciar entre los presupuestos teóricos sobre los que desarrolla Baire su teoría y las novedades conceptuales que se desprenden de ésta, a la luz de un análisis epistemológico desde una visión integral de la obra.

Los presupuestos teóricos son presentados por Baire en la introducción de su Tesis, y están referidos a la definición misma del concepto de función. En términos generales, Baire contrapone a la definición de función arbitraria, tipo Dirichlet, un método constructivo

A partir de ciertas funciones simples, se consideran las expresiones compuestas de estas funciones simples, reservando la palabra función a las expresiones así obtenidas. [Baire, 1899, p. 10; = Œuvres scientifiques, p. 49]

En el desarrollo de sus ideas, Baire reconoce haber tomado como referencia fundamental, dos documentos: el libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* de Dini, antes citado, y la memoria *Sur les fonctions discontinues* de Darboux[1875].

El problema de las funciones discontinuas que son límite de funciones continuas había sido pensado por Baire desde 1897. Justamente en 1898, decide trasladarse a Italia para trabajar con Volterra, alumno de Dini, en cuya escuela se adelantaban este género de estudios, según consta en una carta que le envía a Borel, desde Turín [Baire, 1898a, p. 33]. Esta comunicación es históricamente significativa porque en ella hace alusión a dos aspectos que serán esenciales para su trabajo de tesis. El primero se refiere a la demostración de que la potencia del conjunto de las funciones discontinuas tiene la misma potencia que el conjunto de los números transfinitos de la segunda clase [es decir $2^{\aleph_1}$ si se adopta la hipótesis del continuo]. El segundo tiene que ver con el tema central de su tesis de doctorado; en este sentido se pregunta:

¿No se puede entrever la posibilidad de caracterizar, de una manera precisa, el conjunto de funciones discontinuas que pueden ser considerados como límites de funciones continuas (...)? [Baire, 1898a, p. 34].

Ya en su comunicación *Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles* [1897], el objetivo central de Baire era construir una escalera jerárquica de acuerdo al grado de discontinuidad de las funciones. En este sentido incorpora sus famosas clases:

- C_0 : Clase 0 , que corresponde a las funciones continuas.
- C_1 : Clase 1 , funciones que se obtienen como límite de sucesiones de C_0 , sin pertenecer a C_0 .
- C_2 : Clase 2 , funciones que se obtienen como límites de sucesiones de C_0 y C_1 , sin pertenecer a ninguna de ellas.
- $\vdots$
- C_n : Clase n , funciones que se obtienen como límites de sucesiones de clases anteriores, sin pertenecer a ninguna de estas clases.
- $\vdots$

Hasta aquí, Baire se ha parado en la tradición clásica de construcción recursiva, para conformar un conjunto de clases numerable. Para la definición de clases superiores, Baire se apoya en la construcción cantoriana de los conjuntos derivados y de los ordinales transfinitos. Recordemos que Cantor basa su teoría de ordinales transfinitos en dos principios de generación: (i) adición de la unidad. (ii) adoptar el límite de sucesiones monótonas crecientes. Se obtiene así, la secuencia de ordinales:

$1, 2, 3, \dots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots \omega + \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \omega^2 + 3, \dots \omega^3, \dots$
 $\omega^4, \dots \omega^5, \dots \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \dots,$
 $\omega^2 + 2\omega, \omega^2 + 2\omega + 1, \dots, \omega^2 + 3\omega, \dots, \omega^2 + 4\omega, \dots, \omega^2 2, \dots, \omega^2 3, \dots \omega^3, \dots,$
 $\omega^4, \dots, \omega^\omega, \dots \Omega \dots$

Al conjunto de los ordinales finitos $1, 2, 3, \dots$ se les denomina de la *clase I*. Los ordinales que no pertenecen a la *clase I* se llaman ordinales transfinitos, de éstos a aquellos menores que Ω se les denomina de *clase II*, y así sucesivamente. Los ordinales de las clases I y II, pueden ser de dos especies: aquellos que se generan por adición de unidades, como $1, 2, 3, \dots$ también $\omega + 1, \omega + 2$, etc, son de la primera clase, los que se generan por el límite son de segunda especie, como ω, ω^2 , etc.

Basándose en esta construcción Baire define clases superiores de índice transfinito. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tal que $\forall n, \exists i$ tal que $f_n \in C_i$; además, $\{f_n\}$ converge a f , donde $f \notin C_i, \forall i$, entonces se tiene que $f \in C_\omega$, donde ω es el primer ordinal transfinito de la teoría cantoriana. De la misma forma se definen $C_{\omega+1}, C_{\omega+2}, \dots, C_{2\omega}, \dots$ [Baire, 1899, p. 69; Œuvres Scientifiques, p. 117].

Baire debe demostrar que su clasificación no es meramente nominal, esto es, debe construir, en concordancia con sus concepciones filosóficas, funciones pertenecientes a cada una de las clases que acaba de definir. O dicho de otra forma, debe localizar propiedades que permitan identificarlas. En este sentido Baire plantea los dos teoremas básicos siguientes:

Teorema 1: Una sucesión de funciones converge a una función $f(x)$, si y sólo si esta función es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto. [Baire, 1899, p. 62; Œuvres Scientifiques, p. 110]

Teorema 2: Las funciones de segunda clase son puntualmente discontinuas sobre cada conjunto perfecto, ignorando un conjunto de primera categoría con respecto al conjunto perfecto. [Baire, 1899, p. 87; Œuvres Scientifiques, p. 135]

Infelizmente, Baire sólo pudo demostrar la condición necesaria, pero no la suficiente, de este último teorema, el cual caracterizaba todas sus clases. En 1914 Luzin probaría que no se cumple la recíproca. Usando la hipótesis del continuo construyó funciones que poseían esta propiedad, pero que no pertenecían a las clases de Baire.

De esta forma, haciendo un balance de los resultados de Baire, se puede concluir que ha logrado caracterizar únicamente funciones de C_0 , C_1 y C_2 , quedando sus siguientes clases en un nivel nominal. Además, el mismo Baire demuestra que su construcción contiene un principio de limitación de acuerdo al siguiente teorema:

Teorema 3: Sea $E = \{f / f \in C_\alpha, \text{donde } \alpha \text{ es un número de las clases I o II de ordinales transfinitos}\}$. Si una sucesión de funciones pertenecientes al conjunto E tiene un límite, esta función límite pertenece también a E . [Baire, 1899, p. 70; Œuvres Scientifiques, p. 118]

Para su demostración, Baire recurre a las propiedades básicas de los transfinitos cantorianos de la siguiente manera:

Sea $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \{f_n\} \mapsto f(x)$ tales que $f_n(x) \in \text{Clase } \alpha_n$. Se forma la sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$. Según Cantor, existe un número $\beta \in \text{I}$ ó $\beta \in \text{II}$ tal que $\alpha_n < \beta, \forall n$.

$f(x)$ entonces, pertenece a la clase β o a una clase inferior; por lo tanto, $f \in E$.

E contiene, entonces, todas sus funciones límites.

En este estado de cosas, vemos que la clasificación de Baire comporta dos aspectos fundamentales:

- Se tienen determinadas únicamente funciones de las tres primeras clases.
- La clasificación da cuenta únicamente de un número minoritario de funciones discontinuas.

4 El método demostrativo de Baire

En primer lugar, Baire introduce el concepto de máximo, tanto de un punto como de un dominio: partiendo de una función f cualquiera de valor real y definida sobre $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se toma con centro en $P \in D$, la esfera

$$S_{\rho_1}(P) : \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / \sum_{i=1}^n [x_i - (x_i)_0]^2 \leq \rho_1^2 \right\}$$

Para los puntos de este conjunto, existe M_1 , tal que $f(x) \leq M_1$, $\forall x \in S_{\rho_1}(P)$, donde M_1 es el límite superior de f en $S_{\rho_1}(P)$.

A partir de la sucesión de radios $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_p > \dots$, tal que $\lim_{p \rightarrow \infty} \rho_p = 0$, se forman las esferas encajadas:

$$S_{\rho_1}(P) \supset S_{\rho_2}(P) \supset \dots \supset S_{\rho_p}(P) \supset \dots$$

En cada esfera se toma M_i , como el límite superior de f en $S_{\rho_i}(P)$, obteniéndose la sucesión $M_1, M_2, \dots, M_p, \dots$, tal que:

$$M_1 \geq M_2 \geq \dots \geq M_p \geq \dots \quad (1)$$

Tomando $M_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} M_p$, se obtiene la definición del valor máximo.

Definición: Al valor M_0 se le llama el máximo de f en P , y se representa por $M[f, P]$

El máximo de f en P , $M[f, P]$, cumple las siguientes propiedades fundamentales:

Teorema A: $\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0$, tal que $f(x) < M_0 + \varepsilon, \forall x \in S_\rho(P)$

Aunque Baire no demuestra este resultado, es fácil verificarlo: $\lim_{p \rightarrow \infty} M_p = M_0$, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n - M_0 < \varepsilon, \forall n \geq N$; por lo cual $M_n < M_0 + \varepsilon$; de esta forma, tomando ρ_n se tiene que $f(x) \leq M_n, \forall x \in S_{\rho_n}(P)$.

Teorema B. $\forall \varepsilon > 0, \forall \rho > 0, \exists x \in S_\rho(P)$ tal que $f(x) > M_0 - \varepsilon$

Tomando el $\sup_{x \in D} f(x)$, se obtiene $M[f, D]$, que designa el máximo de f en todo dominio D . Aunque Baire no lo aclara, D corresponde a un dominio continuo y cerrado, de acuerdo a tratamientos posteriores. f debe ser una función acotada, pues es parte del hecho de la existencia del supremo de cada una de las esferas cerradas y es condición para la convergencia de (1). Además, si $M_0 = \infty$, no se cumpliría el teorema B. Es importante destacar que la noción de máximo de una función en un punto, había sido establecida por Volterra en su artículo: *Sui principii del calcolo integrale* [Giornale Mat. 1881, 19, pp. 333-372]. Precisamente este concepto de máximo de f en un punto, le sirve de base para definir la semicontinuidad superior:

Definición: Cuando $M[f, P] = f(P)$ se dice que f es semicontinua superiormente en P .

Definición: Cuando $M[f, x] = f(x), \forall x \in D$, la función es semicontinua superiormente en D , o también siempre igual a su máximo.

De inmediato Baire plantea el siguiente ejemplo: Sea f una función cualquiera. Se define $\varphi(x) = M[f, x], \forall x \in D$. $\varphi(x)$ es semicontinua superiormente en D , osea siempre igual a su máximo, puesto que para $P_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$, se tiene, por el teorema A, que se puede encontrar un dominio D_1 , en torno a P_0 tal que:

$M[f, D_1] < M[f, P_0] + \varepsilon$. De otro lado, para $x \in D_1$, $M[f, x] \leq M[f, D_1]$, de lo cual $M[f, x] \leq M[f, P_0] + \varepsilon$, lo que significa que $\varphi[x] < \varphi(P_0) + \varepsilon$.

De igual manera se define el mínimo de f en $P_0 : m[f, P_0]$, y también las funciones semicontinuas inferiormente o funciones siempre iguales a su mínimo.

Después de describir algunas propiedades de las funciones semicontinuas, Baire presenta los siguientes teoremas fundamentales para su objetivo central:

Teorema C: Si f es semicontinua superiormente entonces para cada α , el conjunto de puntos donde $f \geq \alpha$, es cerrado.

Para su demostración, basta tomar el conjunto $A = \{x / f(x) \geq \alpha\}$ y en él, el punto de acumulación a . Formando la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rightarrow a$, se tiene que $f(a_n) \geq \alpha, \forall n$; pues si $f(a) < \alpha$ entonces $M[f, a] \neq f(a)$, lo cual es contradictorio.

Teorema D: Si una función es semicontinua inferiormente, el conjunto de puntos para los cuales $f \leq \alpha$, es un conjunto cerrado.

A continuación Baire incorpora otro de los conceptos centrales para el desarrollo de su investigación, a saber, como es el concepto de oscilación,

el cual también ha sido definido por Volterra en la mencionada publicación de 1881. Para ello incorpora precisamente la función máxima de f , $\varphi(x) = M[f, x], \forall x$; y la función mínimo de f , $\psi(x) = m[f, x], \forall x$, sobre las cuales se apoya.

Definición: Sean f una función, φ su máximo y ψ su mínimo. Para cada $P(x_1, \dots, x_n)$ perteneciente al dominio de f , la diferencia $\varphi(x_1, \dots, x_n) - \psi(x_1, \dots, x_n)$ se define como la oscilación de f en P y se designa con $\omega[f, P]$

Igualmente define la oscilación de la función en un dominio:

Definición: Cuando se trata de un dominio D , $\omega[f, D]$ se llama la oscilación de f en D . $\omega[f, D] = \varphi - \psi$ en el dominio.

La oscilación se reveló de inmediato como una noción básica en la dirección de los requerimientos de Baire, dado que cumple las tres propiedades importantes:

1. $\omega[f, P] \geq 0$. Por definición.
2. Si $\omega[f, P] = 0$ entonces f es continua en P , puesto que $M[f, P] = m[f, P]$, y por las propiedades de éstos, f cumple la condiciones de continuidad.
3. Si $\omega[f, P] \neq 0$ entonces f es discontinua en P .

De esta forma, Baire reconoce en la oscilación, el concepto que mide el grado de discontinuidad de f . Además, tomando $\omega[f]$ como la función correspondiente a la oscilación de f en cada punto de su dominio, demuestra que es semicontinua superiormente:

Teorema E: $\omega[f]$ es semicontinua superiormente.

Demostremos el teorema con notación moderna: Sea $\varepsilon > 0$. Para P_0 , punto del dominio, se tiene que existe un dominio D_1 que contiene a P_0 tal que $\varphi(x) < \varphi(P_0) + \varepsilon/2$ y $\psi(x) > \psi(P_0) - \varepsilon/2$ para todo punto en el dominio. De la dos inecuaciones anteriores se deduce que: $\varphi(x) - \psi(x) < \varphi(P_0) - \psi(P_0) + \varepsilon$, por lo tanto $\omega(x) < \omega(P_0) + \varepsilon$ para todo punto del dominio D_1 .

Para demostrar que se cumplen las condiciones necesarias del teorema 1, Baire debe demostrar que en cualquier intervalo existen puntos donde la función es continua; para ello utiliza de manera directa, como lo indicaremos luego, una de las propiedades básicas de las funciones semicontinuas, sintetizada en el teorema siguiente:

Teorema F: Si χ es semicontinua superiormente y siempre positiva, existe en todo dominio, un dominio de la misma dimensión, en el cual χ tiene su mínimo positivo.

Es importante no dejar pasar por alto las similitudes de contenido de el teorema 1 y el teorema F. En ambos se manejan los cuantificadores universal y existencial, buscando propiedades que caractericen las funciones respectivas. Sin embargo, el acercamiento es más inmediato con el siguiente teorema G, contrareciproco del teorema F. Tanto en el teorema 1 como en el teorema G, se busca demostrar propiedades de las funciones en todo subdominio. De hecho, faltaría combinar el teorema F con el análisis de la oscilación, para obtener las condiciones necesarias del teorema 1.

Teorema G: Si una función χ es semicontinua superiormente, y ella tiene en todo punto su mínimo nulo, entonces existen en todo dominio, puntos donde χ es nula.

Sigamos la prueba de Baire en notación moderna:

Sea D un dominio cualquiera. Por hipótesis χ tiene un dominio nulo en D ; por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists p \in \text{int}D$, en el cual $\chi(p) < \varepsilon/2$.

Como χ es semicontinua superiormente, existe un dominio D_1 que contiene a P , en el cual $\chi(x) < \chi(p) + \varepsilon/2$, $\forall x \in D$ y por lo tanto $\chi(x) < \varepsilon, \forall x \in D$.

Tomemos la sucesión $\varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/2^2, \dots, \varepsilon/2^n, \dots$ se tiene que en D_1 encontramos un dominio D_2 en el cual $\chi < \varepsilon/2$. En D_2 un dominio D_3 donde $\chi < \varepsilon/2^2$.

Se forma así una sucesión de dominios $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ tales que $D_{i+1} \subset D_i$, por lo tanto existe al menos un punto límite P_0 en el interior de todos los D_i , tal que para este punto, $\omega < \varepsilon/2^n$, $\forall n$, de lo cual $\omega = 0$. Como $\omega[\chi, P_0] = M[\chi, P_0] - m[\chi, P_0] = M[\chi, P_0] - 0 = 0$, entonces $\chi(P_0) = 0$.

La hipótesis de la semicontinuidad superior es necesaria en el teorema G, pues existen funciones tales que en todo punto su mínimo es nulo y nunca toman el valor cero, como en el siguiente caso:

Ejemplo: $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q, p, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por otro lado, una función puede ser semicontinua superiormente, no tomar el valor cero y sin embargo, tener su mínimo cero en un punto o en un dominio de dimensión $n - 1$, cuando el dominio de f es de n dimensiones; tal es el caso en $x = 0$, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{cuando } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Con base en las características de la función oscilación, Baire establece su primera clasificación: las funciones no continuas para las cuales existan, en todo dominio, puntos donde $\omega = 0$, se denominan funciones *puntualmente discontinuas*, en otro caso se denominan funciones *totalmente discontinuas*. De acuerdo a estas definiciones, no es difícil demostrar las siguientes propiedades básicas:

1. Si una función es totalmente discontinua, existe un dominio de n dimensiones, en el cual la oscilación en cada punto tiene su mínimo positivo.
2. Las funciones puntualmente discontinuas, cumplen la propiedad de que en cada punto y en todo dominio, el mínimo de ω es cero.
3. Una función semicontinua superiormente, es puntualmente discontinua.

5 Demostración de las condiciones necesarias

Tomando como referencia los conceptos anteriormente expuestos, Baire aborda la demostración de las condiciones necesarias del teorema 1. Para ello sigue un camino indirecto, estudiando propiedades de las funciones de dos variables que luego, bajo ciertas condiciones, le proporcionan información sobre las funciones de variable real. La primera de estas propiedades, que él ya había estudiado en 1896, como vimos antes, tiene relación con la continuidad de las funciones de dos variables. Baire se da cuenta que una función puede ser continua con respecto a cada variable separadamente sin ser continua con respecto a las dos variables conjuntamente. En este sentido, se plantea tres problemas básicos:

1. Dados los valores de la función correspondientes a $f(x, x)$, definir una función $f(x, y)$ continua con respecto a x y con respecto a y .
2. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. A es el rectángulo, $A = \{(x, y) / \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq y \leq \gamma\}$. $f(x, y)$ continua para cada (x, y) excepto para $(x, 0)$ (puntos sobre el eje OX), en $(0, x)$ la función es sólo continua con respecto a y . ¿Cómo es la función sobre OX ?
3. Sea $f(x, y)$ definida en el rectángulo $\alpha \leq x \leq \beta$, $\gamma \leq y \leq \delta$. $f(x, y)$ es continua respecto a y en todo punto. Para x se tiene que f es continua respecto a x en un conjunto denso de paralelas a OX (esto es, para $y = y_1$ y $y = y_2$ existe $y = y_3$, $y_1 > y_2 > y_3$ en la cual f es continua con respecto a x). Se desea saber cómo es f sobre una curva plana C definida en el rectángulo.

A través de las hipótesis del problema 2 se pueden obtener condiciones para las funciones de variable real. Veamos esto:

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A = \{(x, y) / \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq y \leq \gamma\}$, f es continua para todo (x, y) excepto en OX , donde es continua solo con respecto a y . Tomemos una sucesión de abscisas que tiendan a cero, $\{y_n\} \mapsto 0$. A través de cada una de estas abscisas, se trazan las rectas paralelas $y = y_1, y = y_2, \dots, y = y_n, \dots$. Por las condiciones del problema, se tiene que las funciones $f(x, y_1), f(x, y_2), \dots, f(x, y_n), \dots$ son continuas respecto a x , excepto $f(x, 0)$ que puede ser discontinua.

Tomando un $x = x_0$, se tiene que $f(x_0, y_1), f(x_0, y_2), \dots, f(x_0, y_n), \dots \mapsto f(x_0, 0)$, lo cual no significa otra cosa, que la función discontinua $f(x, 0)$ es el límite de la sucesión de funciones continuas, $f(x, y_1), f(x, y_2), \dots, f(x, y_n), \dots$, o límite de la serie de funciones continuas:

$$f(x, y_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n))$$

que es convergente para todo x en un cierto dominio de variación. Se trata entonces de una serie de funciones continuas en la variable x , que converge a una función discontinua. Baire, entonces, ha camuflado las condiciones necesarias del teorema

1 en los requerimientos del problema 2. Lo que significa que la respuesta al problema 2 enmarca la salida a las condiciones necesarias del teorema 1. para ello Baire utiliza el problema 3, demostrando que f es puntualmente discontinua sobre cualquier cueva plana $\mathcal{C}$, y dado que las condiciones del problema 1 y 2 están abarcadas en las condiciones del problema 3, se puede concluir que $f(x, 0)$ es puntualmente discontinua. El proceso seguido para responder al interrogante del problema 3 es el siguiente:

En primer lugar, Baire estudia la oscilación de la función en los puntos del rectángulo dado: tomando un punto arbitrario $A(x_0, y_0)$ sobre el rectángulo en consideración, se describe en la recta $x = x_0$ el segmento BC del cual A es el punto medio. Se denota por $\omega(\rho, A)$ a la oscilación de f en el segmento BC , donde $BA = AC = \rho$. Fácilmente se puede deducir que $\omega(0, A) = 0$, dado que f es continua sobre la recta $x = x_0$.

Como se nota, Baire estudia las variaciones verticales de la función, es decir, las oscilaciones en puntos del dominio, pero sobre rectas paralelas al eje y . Esto le permite definir la función $\alpha_\sigma(x, y)$ de acuerdo al siguiente procedimiento:

Sea $\sigma > 0$, se llamará $\alpha_\sigma(p)$ al límite superior de valores de ρ tales que $\omega(\rho, P) \leq \sigma$. α_σ es tal que:

$$\omega(\rho, P) \leq \sigma \text{ para } \rho \leq \alpha_\sigma \text{ y } \omega(\rho, P) > \sigma \text{ para } \rho > \alpha_\sigma.$$

Proceso que efectuado para todo punto del dominio, define la función $\alpha_\sigma(x, y)$, la cual es siempre positiva, dado que f es continua respecto a y . Pero la propiedad realmente importante y que nos ubica en la recta final del objetivo de Baire, se debe al hecho de que la función $\alpha_\sigma(x, y)$ es semicontinua superiormente; veamos esto:

Teorema H: α_σ es semicontinua superiormente.

En términos generales, y de acuerdo a propiedades de las funciones semicontinuas superiormente, se debe demostrar que para todo $A(x_0, y_0)$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un área que contiene a A tal que $\alpha_\sigma(x, y) < \alpha_\sigma(A_0) + \varepsilon$, para todo $A(x, y)$ perteneciente a esta área. Veamos esto: Sea $\varepsilon > 0$; se traza la recta $x = x_0$ y sobre esta se identifica el segmento B_0C_0 tal que $B_0A_0 = A_0C_0 = \alpha_\sigma(x_0, y_0)$. Sobre esta misma recta se localizan B_1 y C_1 tales que $B_1A_0 = A_0C_1 = \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon/2$.

Llamemos $\omega[\overline{CG}]$ la oscilación en el segmento $\overline{CG}$.

Según la definición de α_σ , $\omega[\overline{B_1C_1}] > \sigma$, $\exists k$ tal que $\omega[\overline{B_1C_1}] = \sigma + k$. De esta forma para $k_1 < k$, $\exists M, N$ pertenecientes al segmento $\overline{B_1C_1}$ tales que

$$|f(M) - f(N)| > \sigma + k_1 \quad (1)$$

(se supone que $y = M$ y $y = N$, f es continua, en otro caso se buscan M_1, N_1 que cumplan lo requerido, su existencia se garantiza por la hipótesis)

Se trazan paralelas a OX que pasen por M y N ; dado que sobre estas f es continua se tiene que para $r_1/2$ existen M', M'', N', N'' tales que $M'M = MM'' = \delta$ y $N'N = NN'' = \delta$ y para los cuales existen P en $M'M''$ y Q en $N'N''$ tales que

$$|f(P) - f(M)| < r_1/2 \text{ y } |f(Q) - f(N)| < r_1/2 \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned} |f(P) - f(Q)| &= |f(P) - f(Q) + f(M) + f(N) - f(M) - f(N)| \\ &= |[f(P) - f(M)] + [f(N) - f(Q)] + [f(M) - f(N)]| \\ &\geq |f(M) - f(N)| - |f(N) - f(Q)| - |f(Q) - f(M)| \\ &> \sigma + k - \frac{k_1}{2} - \frac{k_1}{2}. \end{aligned}$$

En resumen, $|f(P) - f(Q)| > \sigma$ Tenemos que PQ es paralelo a OY . Se traza un área cuadrada con centro en A_0 y cuyos semilados sean menores $\varepsilon/2$ y que δ .

Sea A un punto de este cuadrado. La distancia de A a $M'M''$ es $< \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$ y la distancia de A a $N'N''$ es $< \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$.

Además existen P, Q en el segmento que tiene por centro A y semilongitud $\alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$, donde P está en $M'M''$ y Q está en $N'N''$ y por lo tanto $|f(P) - f(Q)| > \sigma$.

Eso significa que $\alpha_\sigma(A) < \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$ y eso demuestra que $\alpha_\sigma(x, y)$ es semicontinua superiormente.

Usando un procedimiento similar, Baire demuestra además, el último teorema básico para la conclusión requerida.

Teorema I: Si en un punto $A_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{C}$, la función α_σ tiene su mínimo con respecto a $\mathcal{C}$, positivo, entonces $\omega(f, A_0) \leq 2\sigma$.

Finalmente, con base en los teoremas H e I, Baire fija las condiciones necesarias del problema 3:

Teorema J: En toda porción de curva representable por una ecuación de la forma $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ continua, existen puntos de $f(x, y)$ que son continuos respecto al conjunto (x, y) .

Consideremos α_σ sobre la curva $\mathcal{C}$. Dado que $\alpha_\sigma(x, y)$ es positiva y semicontinua, se puede aplicar el teorema F, de tal forma que en todo arco $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$, existe un arco $\mathcal{D}_1$, tal que $m[\alpha_\sigma, \mathcal{D}_1] > 0$. Tomemos la sucesión $\{\sigma_n\}$ tal que $\sigma_i > 0$, $0 \leq i \leq n$, $\sigma_i = \sigma$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$. De acuerdo con el mismo argumento anterior, en el arco $\mathcal{D}_1$ existe un arco $\mathcal{D}_2$ tal que $m[\alpha_{\sigma_2}, \mathcal{D}_2] > 0$, sobre $\mathcal{D}_2$ un arco $\mathcal{D}_3$ tal que $m[\alpha_{\sigma_3}, \mathcal{D}_3]$ y así sucesivamente. De esta manera, en $\mathcal{D}$, y por consiguiente en cualquier porción de la curva $\mathcal{C}$, existe al menos un punto P , en el cual $m[\alpha_\sigma, P] > 0$, por pequeño que sea σ . Este punto P de $\mathcal{C}$ cumple las hipótesis del teorema I, por lo tanto $\omega[f, P] < 2\sigma$, para todo σ , lo cual demuestra el teorema J.

De esta manera, en el marco del problema 3, Baire ha demostrado que la curva $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de que sobre ella, f es puntualmente discontinua.

Sin embargo, la idea de Baire es afinar aún más su resultado, refinando su estudio a subconjuntos del dominio, como los conjuntos perfectos. Recordemos que un conjunto E es perfecto si $E = E'$, donde E' es el conjunto de puntos de acumulación de E .

Los conceptos presentados al principio son trasladados de manera natural:

Sea $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $E \subset [A, B]$ tal que $E = E'$.

Se define:

$M[f, E]$: máximo de f con respecto a E .

$M[f, A, E]$: máximo de f en A con respecto a E .

$m[f, A, E]$: mínimo de f en A con respecto a E .

$\omega[f, A, E]$ es la oscilación de f en A con respecto a E .

Si $\omega[f, A, E] = 0$, f es continua en A relativa a E . f puede ser continua, puntualmente discontinua o totalmente discontinua respecto al conjunto perfecto E .

Siguiendo los procesos argumentativos similares, usados anteriormente, Baire llega a las condiciones necesarias del teorema 1.

Teorema K: Una función que puede ser obtenida con las condiciones del problema 3 (y de hecho con las condiciones de los problemas 1 y 2), es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.

6 Demostración de las condiciones suficientes

Para la demostración de las condiciones suficientes del teorema 1, Baire toma como referencia nuevamente los problemas 1 y 2, pero de manera inversa, adaptándolos a los nuevos requerimientos. Esto no es fortuito, pues como se mostró antes, la condición del teorema 1 que refiere la existencia de sucesión de funciones continuas que convergen a funciones discontinuas, subyace en el planteamiento de estos problemas.

Baire desarrolla su proceso demostrativo partiendo de una categoría particular de funciones, que le permitan "visualizar" el caso general. Esta categoría particular de funciones la construye de manera iterativa, analizando funciones, a las cuales les va imponiendo condiciones de discontinuidad cada vez más complejas.

En forma de condiciones suficientes, los problemas 1 y 2 se pueden escribir de la siguiente manera:

1. ¿Cómo debe ser $\varphi(x)$, con $\alpha \leq x \leq \beta$, para que sea posible determinar $f(x, y)$ definida en $\alpha \leq x \leq \beta, \alpha \leq y \leq \beta$, continua en todo punto con respecto a x y a y , e igual a $\varphi(x)$ sobre $x = y$?
2. ¿Cómo debe ser $\varphi(x)$ definida en $\alpha \leq x \leq \beta$, para que exista $f(x, y)$ continua en $\alpha \leq x \leq \beta, \alpha \leq y \leq \beta$, y continua solo con respecto a y en los puntos donde $y = 0$ e igual sobre OX a $\varphi(x)$?

Por comodidad se toma la siguiente definición como punto de partida a fin de evitar reiteraciones:

Definición: La función $\varphi(x)$ se dice representable si satisface las condiciones de los problemas 1 y 2.

Como se dijo antes, la idea de Baire es imponer condiciones de discontinuidad sobre $\varphi(x)$. Es así que, de manera sencilla y rápida, demuestra que las funciones con un número finito de discontinuidades son representables. Por ejemplo, analicemos el caso del problema 1, en el cual $\varphi(x) = f(x, x)$, suponiendo que $\varphi(x)$ tiene una discontinuidad en $x = 0$. Definimos la función $f(x, x)$ requerida sobre el cuadrado $OABC$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, como muestra la figura,

Sobre OB se define $f(x, x) = \varphi(x)$. Sobre OA se define una función continua, con la condición $f(0, 0) = \varphi(0)$. sin pérdida de generalidad, se toma,

$$f(x, 0) = \varphi(0), 0 \leq x \leq 1.$$

Para definir $f(x, x)$ en los puntos del triángulo OAB se unen linealmente los puntos de las imágenes de OB con los puntos imágenes de OA . Si tomamos $M(x_0, 0)$ y $N(x_0, x_0)$ se tendría que para los puntos (x, y) de MN :

$$f(x, y) = f(x_0, 0) + \frac{y}{x_0}(f(x_0, x_0) - f(x_0, 0))$$

o lo que es igual,

$$f(x, y) = \varphi(0) + \frac{y}{x_0}(\varphi(x_0) - \varphi(0)).$$

Sobre el triángulo OBC se define de manera simétrica.

En el caso de un número finito de discontinuidades se repite el proceso anterior en cada intervalo formado por cada par de discontinuidades.

Para el caso de un número infinito de discontinuidades, Baire previamente demuestra que si una función es representable en todo subsegmento $A'B'$ interior a AB , entonces es representable en la totalidad de AB . Para visualizar esto basta tomar una sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, sobre el segmento donde la función está definida; por ejemplo para el problema 1 se definirá sobre AA_1 como muestra la figura:

Con base en las hipótesis y usando el caso anterior, se puede definir $f(x, y)$ recursivamente siguiendo un orden determinado: primero se define sobre el triángulo T_1 , siguiendo el proceso del caso anterior; luego sobre el rectángulo $\mathcal{R}_1$, en el triángulo T_2 , en el rectángulo $\mathcal{R}_2, \dots$ de tal suerte que la operación prolongada indefinidamente permite definir $f(x, y)$, que satisface las condiciones de problema, sobre la totalidad del rectángulo.

Como consecuencia de este resultado, Baire obtiene su primer gran teorema en la demostración de las condiciones de las condiciones suficientes:

Teorema L: Sea una función definida sobre AB . Si existe sobre AB un número finito de puntos tales que tomando en torno a ellos vecindades tan pequeñas como se quiera y sustrayéndolas de AB , la función es representable, entonces la función es representable sobre todo el segmento AB .

Para el caso infinito Baire retoma la teoría transfinita cantoriana. Representando por P el conjunto de discontinuidades de la función a representar, hace uso directo de la construcción de conjuntos derivados de Cantor; de esta manera,

P' representa el conjunto derivado de P (conjunto de sus puntos de acumulación)
 P'' representa el conjunto derivado de P' ,
 $\vdots$
 P^n es el conjunto derivado de P^{n-1} ,
 $\vdots$

Si $P^n \neq \emptyset$ para todo n , entonces se define $P^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$. El proceso se puede seguir, definiendo $P^{\omega+1}, P^{\omega+2}, \dots, P^{\omega+\omega}, \dots$. En general, si α es número transfinito se presenta uno de los dos casos: Si α es de primera especie entonces P^α es el conjunto derivado de $P^{\alpha-1}$; si α es de segunda especie, $P^\alpha = \bigcap_{\alpha' < \alpha} P^{\alpha'}$.

De esta manera, si se tiene un número infinito de puntos de discontinuidad en un intervalo acotado, por el teorema de Weierstrass-Bolzano, este conjunto tendría al menos un punto de acumulación. Baire dirige su mirada hacia el conjunto puntos de acumulación, siguiendo el proceso de manera progresiva.

Caso 1: Si P infinito y P' finito, entonces por el teorema L se sigue que es representable, pues al tomar en cada elemento de P' vecindades tan pequeñas como se quiera y restarlas luego del intervalo total, la función es representable (en cada uno de los intervalos restantes quedará un número finito de discontinuidades)

Caso 2: Se generaliza el resultado anterior para P^n finito.

Caso 3: Cuando $P^\alpha = 0$, para α transfinito de segunda clase, se tiene que el conjunto de discontinuidades P es numerable no denso y por lo tanto, se reduce a los casos anteriores y la función será representable.

En seguida Baire aborda el problema de funciones con un conjunto de discontinuidades no numerables. Para ello toma como referencia funciones cuyo conjunto de discontinuidades P constituye un conjunto perfecto, no denso, como el conjunto triádico de Cantor. En este tipo de conjuntos, para cualquier intervalo, existe un subintervalo, ninguno de cuyos puntos interiores pertenecen a P . Los puntos extremos de este subintervalo pueden pertenecer o no a P , y por consiguiente, dado un punto $m \notin P$, se puede hablar del intervalo más grande que contenga a m y no contenga puntos de P . Teniendo en cuenta ésto, se puede definir P de una manera interesante: Supongamos P definido sobre el intervalo $[A, B]$. Existe una sucesión de intervalos: $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_nB_n], \dots$ disjuntos, cuyos puntos interiores no pertenecen a P y con los extremos $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, \dots$ pertenecientes a P . Además de estos puntos, P otros puntos exteriores a todos los intervalos $[A_n, B_n]$. Los intervalos $[A_n, B_n]$ se denominan intervalos contiguos a P .

Siguiendo una técnica similar a la del teorema L, Baire demuestra el siguiente teorema:

Teorema M: Si existe un conjunto perfecto no denso P , sobre el cual la función es continua, y si sobre todo segmento contiguo a P , la función es representable, entonces ella es representable sobre el intervalo total.

Baire se da cuenta entonces, de que la representación de una función no depende del hecho de que el conjunto de discontinuidades sea numerable o no, sino de su distribución estructural, es decir, de los aspectos topológicos. Esto le permite aumentar la complejidad del conjunto de discontinuidades y estudiar el caso en el cual el conjunto P de discontinuidades es cerrado no denso. Para este caso general, Baire retoma los resultados de Bendixson [Acta Mathematica 2, 1883, p. 415-429], según el cual, si P es cerrado se pueden presentar dos casos:

1. P es numerable, entonces $\exists \alpha \in I$ (primera clase de números) ó $\alpha \in II$ (segunda clase de números), tal que $P^\alpha = 0$. En este caso P es reductible. lo cual significa que f es representable.
2. P es no numerable, entonces $\exists \alpha$ tal que $P^\alpha = P^{\alpha+1} = \dots = P^\Omega$, $\Omega \in III$ (primer ordinal transfinito de la tercera clase de números). P^Ω es perfecto.

El caso 1 ya fue analizado; para el caso 2, dado que P es cerrado, se tiene que $P^\Omega \subset P$, y por lo tanto se cumple el siguiente teorema:

Teorema N: Sea P cerrado, no denso, tal que f es continua sobre P^Ω y es representable sobre todo segmento contiguo a P , entonces ella es representable sobre el segmento total.

A continuación empieza a imponer condiciones de discontinuidad sobre el conjunto perfecto P^Ω . Siguiendo un proceso idéntico al anterior llega a la conclusión que para que la función sea representable, debe ser puntualmente discontinua respecto al conjunto perfecto P^Ω . Tomando como referencia estos resultados y basado en las propiedades de la función oscilación, Baire toma el caso general, demostrando que una función puntualmente discontinua respecto a cualquier conjunto perfecto es representable, es decir, puede ser obtenida con las condiciones de los problemas 1 y 2.

7 Conclusiones

Hemos hasta aquí analizado la manera como demuestra las condiciones, necesaria y suficiente, del teorema 1. La generalización de este resultado, inmersa en el teorema 2 será tratado en otras instancias. Sin embargo, es necesario llamar la atención sobre nuestro propósito inicial. En particular sobre la manera cómo incide la teoría de conjuntos cantoriana en sus desarrollos conceptuales y en sus técnicas de demostración. Es indudable que sin la teoría de ordinales transfinita la clasificación de Baire no habría sido posible, como tampoco algunos de sus resultados inherentes. El mismo Baire llama la atención al respecto en la parte final de su tesis doctoral:

La teoría de conjuntos de puntos, juega un papel muy importante en estos métodos; se puede así mismo decir, que en el orden de ideas que nosotros nos hemos movido, todo problema relativo a la teoría de funciones conduce a ciertas cuestiones relativas a la teoría de conjuntos; y en la medida en que estas últimas cuestiones estén avanzadas, puede que sea posible resolver más o menos el problema planteado [Baire, 1899, p. 121. O.S.C. p. 169]

A partir de Baire, y hasta nuestros días, se volverá indispensable el apoyo de la teoría abstracta de conjuntos, si se quiere entender la profundidad teórica inmersa en la teoría de funciones. No es extraño, que en general, los libros modernos de análisis matemático y teoría de funciones, tengan destinado un capítulo para la teoría de conjuntos.

En este sentido, como lo refiere Fyodor Medved [*Scenes from the history of real functions*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlín, 1991, p.163], Fréchet no estaba siendo extremista al equiparar los trabajos de la escuela francesa (Bore, Baire, Lebesgue) con los desarrollos de Cantor.

Sin embargo, el mismo Fréchet reconoce que el mérito de Baire no se reduce a la adopción de una manera conveniente de las técnicas del infinito cantoriano, expurgando del infinito algunos rezagos que se perciben aún en Cantor, sino en la incorporación de nuevas técnicas demostrativas, algunas de las cuales las hemos presentado en este documento.

Para comprender uno de los aspectos novedosos incorporados por Baire, basta analizar los cambios de contenido de los tratados, en el período comprendido entre 1878 y 1907: desde la aparición del libro de Dini hasta el texto de Hobson, *The theory of functions of a real variable and theory of Fourier's series* [1907]. Los dos libros abordan los mismos temas excepto el de Hobson, que incorpora directamente los elementos básicos de la teoría de conjuntos. Precisamente uno de los elementos novedosos incorporados por Baire, al igual que por Borel y Lebesgue, lo constituye el uso explícito de las técnicas cantorianas en la caracterización de las funciones discontinuas. Sin embargo, hay que aclarar que los tres guardan distancia prudencial con la utilización directa del infinito actual, específicamente con aquellos resultados que involucran el axioma de elección. En este sentido se puede afirmar que la teoría de conjuntos cantoriana no fue adoptada fielmente sino de acuerdo a los requerimientos conceptuales de los usuarios franceses. Es significativo, por ejemplo, que en su tratado *Leçons sur les fonctions discontinues* [1905], Baire introduzca un capítulo destinado a la teoría cantoriana de conjuntos acorde a sus intereses particulares y a sus concepciones filosóficas de las matemáticas.

Referencias

- [1] Baire, R. *Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles*. Crasp, 125, p.691-694, [1897].
- [2] Baire, R. *Lettres á Emilé Borel*. Cahiers du Seminaire d'Histoire des Mathématiques 1990, Université Pierre y Marie curie, [1898a].
- [3] Baire, R. *Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues*. Crasp, 126, p.884-887, [1898b].
- [4] Baire, R. *Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues*. Crasp, 126, p.1621-1623, [1898c].
- [5] Baire, R. *Sur el problème de l'intégration au point de vue des variables réelles*. Crasp, 125, 1897, p.1700-1703, [1898d].
- [6] Baire, R. *Sur la théorie de variables réelles*. Annali di matem. pura ed appl.,(3), 3, 1-123, [1899].

- [7] Bendixson, I. *Quelques théoremes de la théorie des ensembles de points*. Acta math. 2, pp. 415-429, [1883].
- [8] Borel, E. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars, [1898].
- [9] Cauchy, A.L. *Cours d'analyse*. Paris: Debure, 1821, [1821].
- [10] Cavaillés, J. *Método axiomático y formalismo*. Colección Mathema, Servicios editoriales, Universidad Nacional Autonoma de Méxic, (1992), [1838].
- [11] Darboux, G. *Mémoire sur les fonctions discontinues*. Annales sci. Ecole Normale Sup. (2) 4, pp. 57-112, [1875].
- [12] Dini, U. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa: Nistri, [1878].
- [13] Dugac, P. *Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement*. Mathematical Perspectives. Enssays on Mathematics and its Historical Development. Editado por Dauben J. Academic Press, New York, [1981].
- [14] Fréchet, M. *Généralisation d'un théoremes de Weierstrass*. C. R. Acad. Sci. Paris, 139, pp. 848-850, [1904].
- [15] Fréchet, M. *La semi-continuité en géométrie élémentaire*. Nouvelles Ann.math.(5) 3, pp. 1-9, [1924].
- [16] Fréchet, M. *Sur le prolongement de fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes*. Fund. math.7, pp. 210-224, [1925].
- [17] Lebesgue, H. *Sur les fonctions représentables analytiquement*. Journal Math. pures appl. (6) 1, pp. 139-216.[1905]
- [18] Lusin, N. *Sur un problème de M. Baire*. C.R. Acad. Sci. Paris 158, pp. 1258-1261, [1914].
- [19] Medvedev, F. A. *Scenes from the history of real functions*. Publicado en Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1991, [1975].

Dirección del autor: Luis Recalde Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia. lurecal@yahoo.com