

Fecha de presentación del Informe: Día Mes Año **1. Datos generales del Proyecto**

Código del proyecto: 1227			
Título del proyecto: Construcción numérica de datos iniciales para el problema de valor inicial en relatividad general mediante un método no-elíptico.			
Facultad o Instituto Académico: Ciencias Naturales y exactas			
Departamento o Escuela: Matemáticas			
Grupo (s) de investigación: Ecuaciones diferenciales dispersivas y teoría de control			
Entidades:			
Palabras claves: Relatividad, Numérico, No-Elíptico.			
Investigadores ¹	Nombre	Tiempo asignado	Tiempo dedicado
Investigador Principal	Leon Dario Escobar Diaz	12 meses	12 meses
Coinvestigadores			
Otros participantes			

2. Resumen ejecutivo:

Una de las grandes virtudes de la teoría de la relatividad general radica en que ésta permite describir matemáticamente el comportamiento del espacio y del tiempo, o simplemente del espacio-tiempo, mediante la formulación de un problema de valor inicial. Sin embargo, debido al carácter geométrico de la teoría, encontrar datos iniciales que sirvan como base para un problema de evolución es una tarea bastante compleja matemáticamente.

¹ Todas las personas relacionadas en el informe y que participen en el proyecto deben haber suscrito el acta de propiedad intelectual de acuerdo con los formatos establecidos.

Tradicionalmente, la estrategia para encontrar estos datos iniciales consiste en reducir las ecuaciones que determinan el dato inicial, comúnmente conocidas en la literatura como ecuaciones de restricción o *constraints*, a un sistema elíptico de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Si bien este enfoque ha sido exitoso para encontrar datos iniciales de cierto tipo de espacio-tiempos, es bien sabido por parte de la comunidad científica que estos métodos acarrearán diversos problemas cuando son utilizados para modelar escenarios más relevantes, como por ejemplo, espacio-tiempos con agujeros negros rotantes.

Por lo anterior, en este proyecto de investigación implementamos un nuevo método geométrico, el cual permite encontrar familias de datos iniciales mediante la formulación de los *constraints* como un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En particular, en este proyecto nos planteamos como objetivo principal generar numéricamente datos iniciales correspondientes a perturbaciones de un agujero negro rotante en vacío con momento angular pequeño, prestando especial atención a su comportamiento asintótico en regiones lejanas del agujero negro. Para llevar a cabo el objetivo anterior, en este trabajo introdujimos un **nuevo método numérico** basado en una combinación de un método espectral y un método de elementos finitos (con elemento infinito) para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en dominios no acotados, compuestos por un producto cartesiano entre intervalo no acotado de los números reales y la superficie de la dos-esfera unitaria.

Mediante la implementación del anterior método, se consiguió alcanzar el objetivo principal planteado en este proyecto. Específicamente; **se definió matemáticamente una familia de perturbaciones de agujeros negros rotantes con momento angular pequeño y se resolvieron los constraints en su forma hiperbólica para estas configuraciones, permitiendo encontrar numéricamente dichas perturbaciones.** Adicionalmente, el comportamiento asintótico de esta familia de perturbaciones en regiones lejanas del agujero negro se analizó satisfactoriamente gracias a la parte del método que involucra el uso de un elemento infinito. Finalmente, **se redactó un artículo**, el cual se adiciona a este informe como material suplementario y que fue recientemente enviado a una revista científica con reconocimiento internacional, en el que se discute en detalle la implementación del nuevo método numérico para resolver los constraints, así como un análisis de sus ventajas y desventajas para encontrar perturbaciones de agujeros negros rotantes con momento angular pequeño.

3. Síntesis del proyecto:

En el marco de la teoría de la relatividad general, la formulación de un problema de valor inicial conduce a dos conjuntos de ecuaciones diferenciales parciales: las ecuaciones de evolución y las ecuaciones de restricción o constraints. El primer conjunto de ecuaciones determina la evolución del espacio-tiempo mientras que el segundo conjunto de ecuaciones, los constraints, determinan su geometría espacial o

estado inicial. Este ultimo grupo de ecuaciones generalmente se dividen en la restricción Hamiltoniana (ecuación de campos escalares) y la restricción de momentos (ecuación de campos tensoriales). Debido a la naturaleza no lineal de estas ecuaciones, su tratamiento numérico y analítico es, en general, una tarea bastante compleja.

En la actualidad, existen varios métodos en la literatura para la integración numérica de las ecuaciones de evolución. Entre ellos, el método BSSN y la formulación de gauge armónico generalizado son los enfoques más utilizados por la comunidad científica actualmente. En contraste con lo anterior, solo existen unos pocos métodos para resolver las ecuaciones de restricción. En particular, el enfoque tradicional (y más usado actualmente) es el método de Lichnerowicz-York, el cual después de realizar una transformación conforme “apropiada” a la geometría del problema, permite reducir los constraints a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales elípticas no lineales. Usando este enfoque se podría, en principio, determinar cualquier dato inicial imaginable para el problema de valor inicial en relatividad general. Por ejemplo, podría construirse un dato inicial para modelar una estrella de neutrones o un sistema binario de agujeros negros. Sin embargo, en la práctica, encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones elípticas no lineales resulta, en la mayoría de los casos, en una tarea bastante compleja debido a la no linealidad de las ecuaciones y a la inclusión de condiciones de frontera.

Con el fin de superar este tipo de dificultades se suele hacer uso de ciertos supuestos que simplifican el conjunto de las ecuaciones elípticas. En particular, la conocida propuesta de Bowen y York se usa ampliamente para determinar datos iniciales en la mayoría de las simulaciones actuales de agujeros negros y emisión de ondas gravitacionales. Esta propuesta simplifica el sistema elíptico no lineal asumiendo que la parte puramente espacial del espacio-tiempo es conforme al espacio plano (o Euclidiano). Una de las desventajas de hacer uso de este tipo de suposiciones es que restringen el conjunto de datos iniciales que podemos construir al excluir muchos escenarios de gran interés. En particular, debido a la prueba de la inexistencia de una transformación conforme entre el espacio plano y el espacio-tiempo de Kerr dada por Garat y Price (ver artículo adjunto para referencia de este trabajo), es bien sabido que no es posible utilizar el método de Bowen y York para obtener datos iniciales precisos para describir un agujero negro rotante y sus perturbaciones. Adicionalmente, cualquier intento de utilizar este método para obtener datos iniciales que modelen esta situación, conduce irremediabilmente a la inclusión de ondas gravitacionales “basura” sin ninguna interpretación física clara.

Este tipo de inconvenientes ha alentado a los investigadores en la última década a buscar formas alternativas de encontrar datos iniciales. Algunos de los enfoques más notables que se han propuesto recientemente se basan en la idea de Matzner, Huq y Shoemaker, los cuales consisten en superponer agujeros negros rotantes escritos en una forma de Kerr-Schild (ver artículo adjunto para referencias de estos trabajos). Sin

embargo, debido a que todos estos enfoques todavía implican la solución de sistemas ecuaciones elípticas, estos métodos heredan inevitablemente muchas de las desventajas del método elíptico tradicional.

Recientemente en una serie de artículos, Itsván Rácz introdujo un método completamente nuevo para resolver los constraints, el cual no reduce las ecuaciones a un sistema elíptico de ecuaciones diferenciales. En su lugar, dependiendo de qué componentes de los datos iniciales se asignen libremente, los constraints se reformulan (después de cierta construcción geométrica) como un sistema parabólico-hiperbólico o un sistema hiperbólico-algebraico, los cuales solo requieren un dato inicial libre sobre cierta superficie para ser resueltos (ver artículo adjunto).

Utilizando diversas técnicas numéricas y analíticas introducidos en previas investigaciones por el investigador principal en agujeros negros estáticos (ver artículo adjunto), en este proyecto de investigación nos propusimos como objetivo principal explorar la formulación hiperbólica-algebraica de Rácz con el fin de determinar su conveniencia, ventajas y desventajas para construir numéricamente agujeros negros rotantes. En particular, nos enfocamos en construir familias de datos iniciales de perturbaciones de un agujero rotante con momento angular pequeño, y en introducir un nuevo método numérico que nos permita analizar su comportamiento asintótico en regiones lejanas de la frontera del agujero negro.

Específicamente, el anterior objetivo fue alcanzado sistemáticamente mediante el logro de los siguientes objetivos específicos: Se uso la formulación hiperbólica de los constraints usando los operadores de eths y su relación con geometrías conformes a la 2-esfera (ver artículo adjunto). Se definió un integrador radial basado en el método de elementos finitos con elemento infinito y un integrador espectral para la parte angular basado en los armónicos esféricos con peso espinorial. Se introdujeron perturbaciones lineales de un dato inicial de un agujero negro de Kerr o agujero negro rotante, y se consiguió analizar mediante experimentos numéricos el comportamiento de dichas perturbaciones en regiones lejanas de la frontera del agujero negro, lo cual nos permitió producir soluciones físicamente posibles.

Sin duda alguna, nuestro principal resultado en este trabajo consistió en mostrar mediante experimentos numéricos, y argumentos analíticos, que nuestro nuevo método espectral con elementos finitos permite integrar las ecuaciones hiperbólicas de los constraints en todo el dominio y controlar su decaimiento asintótico. Esto nos permitió eliminar la “basura artificial” introducida por las condiciones de frontera de los métodos tradicionales a un costo computacional relativamente bajo. Ciertamente, este hecho constituye una ventaja significativa con respecto al método elíptico tradicional y por lo que consideramos interesante continuar implementando este nuevo método para integrar las ecuaciones hiperbólicas de los constraints en escenarios mas complejos.

4. Impactos actual o potencial:

El investigador principal considera que este trabajo podría tener un impacto positivo en cuanto al avance en la investigación de la simulación numérica de sistemas físicos con agujeros negros rotantes. Por esta razón, los principales resultados de esta investigación fueron discutidos en un artículo científico el cual (como se menciono anteriormente) fue enviado a una reconocida revista internacional especializada en el tema. Adicionalmente, las nuevas técnicas numéricas y analíticas introducidas en este proyecto abren una puerta para futuros trabajos de investigación o tesis de grado, no solo a la exploración de escenarios de agujeros negros mas complejos, sino también a su posible aplicación para el estudio numérico de otros sistemas físicos.

5. Productos:

Tabla No. 1. Cantidad y tipo de productos pactados en el *Acta de Trabajo y Compromiso* y productos finalmente presentados

TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS				No. de PRODUCTOS PRESENTADOS			
Productos de nuevos conocimientos								
Artículo en revista ISI-SCOPUS:	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
Artículo completo publicado O PRESENTADO en revistas indexadas	A1	A2	B	C	A1	A2	B	C
			x		x			
Libros de autor que publiquen resultados de investigación								
Capítulos en libros que publican resultados de investigación								
Productos o procesos tecnológicos patentados o registrados								
• Prototipos y patentes								
• Software								
Productos o procesos tecnológicos usualmente no patentables o protegidos por								

TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS		No. de PRODUCTOS PRESENTADOS	
secreto industrial				
Normas basadas en resultados de investigación				
Formación de recursos humanos	No. de estudiantes vinculados	No. de tesis	No. De estudiantes Vinculados	No. De tesis
Estudiantes de pregrado				
Semillero de Investigación				
Estudiantes de maestría				
Estudiantes de doctorado				
Joven investigador				
Productos de divulgación				
Publicaciones en revistas no indexadas				
Ponencias presentadas en eventos (congresos, seminarios, coloquios, foros)	No. de ponencias nacionales	No. de ponencias internacionales	No. de ponencias nacionales	No. de ponencias internacionales
Propuesta de investigación				
Propuestas presentadas en convocatorias externas para búsqueda de financiación.				

Tabla No. 2. Detalle de productos

Para cada uno de los productos obtenidos y relacionados en la tabla anterior, indique la información solicitada para cada uno, anexando copia de las respectivas constancias. Como anexo a este formato encontrará el instructivo para instructivo para la revisión de informes finales y productos

Tipo de producto:	Libro, Artículo, Software, Capítulo de libro, Memorias, Tesis, Prototipo Industrial, Diseño Industrial, Software, Patente
Nombre	Si el producto obtenido se encuentra en el marco de un documento o

General:	evento, indicar este nombre. Ejemplo: Revista Anales del Jardín Botánico de Madrid. (Año 2000). Vol: 1. Núm: 58. Págs: 186 - 188
Nombre Particular:	Escribir el nombre del producto generado. Ejemplo: Artículo Rorippa curvisiliqua (Cruciferae), nueva en Europa
Ciudad y fechas:	Ciudad y fecha de publicación o presentación del resultado.
Participantes:	Relacionar los autores del producto.
Sitio de información:	Mencionar el sitio en el cual quedará disponible el documento con los resultados del proyecto en extenso. Ejemplo: Biblioteca Central, Centro de Documentación, etc.
Formas organizativas:	Grupos, centros, institutos o laboratorio al cual se adscriben los autores del proyecto.

La presente versión del informe contiene las observaciones de los evaluadores:



Firma del investigador principal



VoBo. Vicedecano de Investigaciones

Por favor presente su informe impreso y en formato digital en hoja tamaño carta, letra arial 11, con espacios de 1 1/2

NOTA: Se anexan los siguientes documentos a este informe:

1. Copia de artículo generado de este trabajo de investigación: **A spectral-infinite element method for solving the hyperbolic Einstein constraint equations**. Este artículo se encuentra actualmente bajo evaluación en la revista internacional **Physical Review D**. Adicionalmente, note que en la página 29 de dicho artículo (en la sección de agradecimientos), el investigador principal **estableció de forma explícita** que este artículo fue realizado en el marco del proyecto C.I. 1227 adscrito a la vicerrectoría de investigaciones de la Universidad del Valle.
2. Copia del correo de confirmación de envío del artículo a la revista **Physical Review D**.