



Elaboración de un modelo local de análisis didáctico que integre elementos de la teoría de los Van Hiele, transformaciones geométricas y objetos fractales en el diseño de una unidad didáctica que promueva el desarrollo de pensamiento geométrico en grado once

Brayan Andres Stuart Vernaza

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

2023



Elaboración de un modelo local de análisis didáctico que integre elementos de la teoría de los Van Hiele, transformaciones geométricas y objetos fractales en el diseño de una unidad didáctica que promueva el desarrollo de pensamiento geométrico en grado once

Brayan Andres Stuart Vernaza

Dirigido por:

Heber Mesa Palomino

Evelio Bedoya Moreno

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

2023

DEDICATORIA

Hoy, al finalizar mi trabajo de grado, deseo tomarme un momento para expresar mi profundo agradecimiento a lo largo de este arduo proceso a:

A mis padres María Vernaza y Freddy Stuart, por su amor, sabiduría y sacrificio, que han contribuido a mi crecimiento y desarrollo personal cada día.

A mis hermanos, Gerson Stuart y José Vernaza, por su apoyo incondicional en los momentos más difíciles y tormentosos.

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo, agradezco a Dios por darme la fortaleza suficiente para lograr avanzar satisfactoriamente a lo largo de todo el proceso de formación profesional y personal, a pesar de todas las dificultades que se hicieron manifiestas.

A los Doctores, Heber Mesa Palomino y Evelio Bedoya Moreno, por contribuir significativamente en el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado, compartiendo sus conocimientos y experiencias conmigo.

A mis evaluadores, los profesores Humberto Mora Martínez y Juan Pablo Orozco García, por dedicar el tiempo suficiente para revisar y valorar el presente trabajo.

A los profesores de la Facultad de Educación y Pedagogía por orientar todo mi proceso de formación académica como futuro educador.

A mi tía, Norma Henao, que ha sido una persona la cual me apoyo y oriento con sus sabios consejos.

A mi compañera, Carolina Sierra, quien ha sido una presencia grata y apoyo constante durante este viaje académico.

RESUMEN

Este trabajo de grado consiste en una propuesta de innovación didáctica y curricular con el propósito de abordar problemáticas emergentes en la enseñanza y comprensión de algunas nociones de geometría euclidiana en educación media. Se concreta en la selección de elementos conceptuales y procedimentales para la elaboración de una propuesta de modelo local de conocimientos y análisis didácticos basada en algunos elementos fundamentales de la teoría cognitiva e instruccional de los Van Hiele, con el propósito de diseñar una unidad didáctica que integre contenidos curriculares de geometría euclidiana y fractal, que promuevan el desarrollo de pensamiento geométrico de los estudiantes de grado once, y que a la vez permita reconocer, promover y fortalecer los conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos base de la formación profesional docente del profesor de matemáticas de este nivel educativo.

Palabras clave: innovación curricular y didáctica, desarrollo de pensamiento geométrico, geometría euclidiana, transformaciones geométricas, geometría fractal, modelo local de análisis didáctico, teoría de los Van Hiele, formación del profesor de matemáticas, competencias geométricas.

ABSTRACT

This undergraduate thesis consists of a proposal for didactic and curricular innovation with the goal of addressing emerging problems in the teaching and understanding of some notions of Euclidean geometry in secondary education. It is specified in the selection of conceptual and procedural elements for the elaboration of a proposal for a local model of knowledge and didactic analysis based on some fundamental elements of the cognitive and instructional theory of the Van Hiele, with the objective of designing a didactic unit that integrates curricular contents of Euclidean and fractal geometry, which promote the development of geometric thinking of eleventh grade students, and which at the same time allow to recognize, promote and strengthen the mathematical, curricular and didactic knowledge that is the basis of professional teacher training of the mathematics teacher of this educational level.

Keywords: curricular and didactic innovation, development of geometric thinking, Euclidean geometry, geometric transformations, fractal geometry, local model of didactic analysis, Van Hiele theory, mathematics teacher training, geometric skills.

INDICE GENERAL

RESUMEN	5
ABSTRACT	6
INTRODUCCIÓN.....	14
CAPÍTULO I.....	17
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	17
1.1 APROXIMACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN	17
1.2 GENERALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN	19
1.3 SISTEMATIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN.....	21
1.3.1 <i>Pregunta central de investigación</i>	21
1.3.2 <i>Preguntas auxiliares de investigación</i>	21
1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	22
1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	25
1.5.1 OBJETIVO GENERAL.....	25
1.5.2 <i>Objetivos específicos</i>	25
1.6 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	26
CAPÍTULO II	29
2. MARCO TEÓRICO	29
2.1 MARCO CONTEXTUAL.....	29
2.1.1 <i>Dimensión Curricular</i>	29

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

2.1.1.1	Estándares Básicos de Competencia (EBC)	29
2.1.1.2	Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)	33
2.1.1.3	Lineamientos Curriculares (LC)	35
2.1.1.4	Acerca de la formación de profesores de matemáticas	38
2.2	MARCO CONCEPTUAL	40
2.2.1	<i>Dimensión Didáctica</i>	40
2.2.1.1	Modelo local de Análisis Didáctico (AD)	40
2.2.1.1.1	Análisis didáctico curricular	43
2.2.1.1.2	Análisis didáctico del contenido	44
2.2.1.1.3	Análisis didáctico cognitivo	45
2.2.1.1.4	Análisis didáctico de instrucción	46
2.2.1.1.5	Análisis didáctico de actuación	46
2.2.1.2	Teoría de los Van Hiele	47
2.2.1.2.1	Niveles de razonamiento de los Van Hiele para el aprendizaje de la geometría	48
2.2.1.2.2	Fases de aprendizaje de los Van Hiele para la enseñanza de la geometría	49
2.2.1.3	Unidad Didáctica (UD)	51
2.2.2	<i>Dimensión Matemática</i>	53
2.2.2.1	Geometría Fractal	53
2.2.2.2	Algunos fractales clásicos	58
CAPÍTULO III		60
3. MARCO METODOLÓGICO		60
3.1	MODELO LOCAL DE ANÁLISIS DIDÁCTICO (AD) COMO HERRAMIENTA METODOLÓGICA	60
3.2	SISTEMATIZACIÓN DE EXPERIENCIAS DOCENTES	61
3.2.1	<i>Caracterización general: contextos, participantes y recolección de la información</i>	63
CAPÍTULO IV		69
4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS Y ANÁLISIS		69

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

4.1	TEORÍA DE LOS VAN HIELE Y EL DISEÑO INTEGRADO DE UNA PROPUESTA DE MODELO LOCAL DE ANÁLISIS DIDÁCTICO	
	(AD) COMO ESTRATEGIA EN LA ELABORACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA (UD) PARA LA ENSEÑANZA DE TRANSFORMACIONES	
	GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DE LA CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS FRACTALES	69
4.1.1	<i>Análisis didáctico del currículo: Contextualización curricular</i>	72
4.1.2	<i>Análisis didáctico de contenido</i>	72
4.1.3	<i>Análisis didáctico cognitivo</i>	83
4.1.4	<i>Análisis didáctico de instrucción</i>	86
4.2	UNIDAD DIDÁCTICA (UD) PARA LA ENSEÑANZA DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS MEDIANTE LA	
	CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS FRACTALES	89
4.3	RESULTADOS OBTENIDOS Y ANÁLISIS EN RELACIÓN A LA TEORÍA DE LOS VAN HIELE	102
4.4	RESULTADOS OBTENIDOS Y ANÁLISIS EN RELACIÓN A LA PROPUESTA DE MODELO LOCAL DE ANÁLISIS DIDÁCTICO ..	104
4.3	RESULTADOS OBTENIDOS Y ANÁLISIS SOBRE LA APLICACIÓN (PRUEBA PILOTO) DE LA PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA	
	(UD)	107
	CAPÍTULO V	111
	5. CONCLUSIONES	111
	5.1 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES A LA INVESTIGACIÓN EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS (DdM).....	111
	REFERENCIAS	115
	ANEXOS	124

INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. ORGANIZACIÓN CURRICULAR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN LOS CICLOS ESCOLARES.	32
FIGURA 2. RELACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS BÁSICOS, PROCESOS GENERALES Y CONTEXTOS.	36
FIGURA 3. ORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y EL MODELO DE ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS.	41
FIGURA 4. EL CARÁCTER TEÓRICO Y PRÁCTICO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO (AD).	43
FIGURA 5. ILUSTRACIÓN DE LA CURVA DE KOCH.	59
FIGURA 6. ILUSTRACIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPIŃSKI.	59
FIGURA 7. ILUSTRACIÓN REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ROTACIÓN	76
FIGURA 8. ILUSTRACIÓN REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA TRASLACIÓN	77
FIGURA 9. ILUSTRACIÓN REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA HOMOTECIA	78
FIGURA 10. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO A PARTIR DE LA SEMEJANZA.	80
FIGURA 11. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO A PARTIR DE LA CONGRUENCIA.	80
FIGURA 12. ILUSTRACIÓN DE LOS FRACTALES EN LA GEOLOGÍA.	81
FIGURA 13. ILUSTRACIÓN DE LOS FRACTALES EN LA SALUD.	82
FIGURA 14. ILUSTRACIÓN DE LOS FRACTALES EN LA ARQUITECTURA.	82

INDICE DE TABLAS

TABLA 1.	ORGANIZACIÓN CONCEPTUAL SOBRE LOS FRACTALES.	54
TABLA 2.	ESQUEMA MPD. (METAS, PROCESOS Y DESEMPEÑOS).....	72
TABLA 3.	ORGANIZACIÓN CONCEPTUAL SOBRE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS.....	75
TABLA 4.	TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DESDE LA SEMEJANZA Y CONGRUENCIA.....	79

INDICE DE ANEXOS

ANEXO 1.	SITIO DE APLICACIÓN DE LA PRUEBA PILOTO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA (UD).....	124
ANEXO 2.	APLICACIÓN (PRUEBA PILOTO) DE LA PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA (UD).	125
ANEXO 3.	EVIDENCIA DEL DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA (2 Y 3).	126
ANEXO 4.	EVIDENCIA DEL DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA (5 Y 6).	127
ANEXO 5.	EVIDENCIA DEL DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA (1,2 Y 3).	128
ANEXO 6.	EVIDENCIA DEL DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA (4 Y 5).	129
ANEXO 7.	EVIDENCIA DEL DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA (1, 2 Y 3).	130
ANEXO 8.	EVIDENCIA DEL DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA (5).....	131
ANEXO 9.	CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN (PREGUNTAS 1-4).....	132
ANEXO 10.	CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN (PREGUNTAS 5-8)	133
ANEXO 11.	CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN (PREGUNTAS 9-12)	134
ANEXO 12.	RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE ALGUNOS ALUMNOS	135
ANEXO 13.	CUESTIONARIO DE VALORACIÓN (INDICACIONES Y PREGUNTAS 1-2).....	136
ANEXO 14.	CUESTIONARIO DE VALORACIÓN (PREGUNTAS 3-4).....	137
ANEXO 15.	CUESTIONARIO DE VALORACIÓN (PREGUNTAS 5-7).....	138
ANEXO 16.	RESPUESTAS DE ALGUNOS ALUMNOS ACERCA DE LA VALORACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA (UD) (RESPUESTAS 3-4)	139

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

ANEXO 17. RESPUESTAS DE ALGUNOS ALUMNOS ACERCA DE LA VALORACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA (UD) (RESPUESTAS 5-6)	140
ANEXO 18. RESPUESTAS DE ALGUNOS ALUMNOS ACERCA DE LA VALORACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA (UD) (RESPUESTA 7)	140
ANEXO 19. PERMISO PARA TRATAMIENTO DE DATOS E INFORMACIÓN CON FINES ACADÉMICOS.....	141

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado, es el resultado de una colaboración entre el Departamento de Matemáticas y la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Se inscribe en la línea de formación de Didáctica de las Matemáticas (DdM) del programa de Licenciatura en Matemáticas. A partir de una unidad didáctica diseñada mediante la integración o articulación de una propuesta de modelo local de análisis didáctico y algunos elementos de la teoría de los Van Hiele, se proponen estrategias y contenidos relacionados con las transformaciones geométricas y objetos de la geometría fractal utilizando un recurso didáctico digital como GeoGebra, con la intención de trabajar en desarrollo de pensamiento geométrico en alumnos de grado once. El propósito general consiste en identificar o reconocer conocimientos y procedimientos geométricos y didácticos integrados del profesor de matemáticas cuando se enfrenta a situaciones de innovación educativa (curricular y didáctica) como la descrita anteriormente.

La propuesta de investigación se desarrollará en el marco de una perspectiva didáctica documentada desde referentes de orden didáctico, curricular y matemático. De otro lado, este trabajo se logra situar en investigaciones que se encargan del estudio de la geometría fractal y, desde un punto de vista didáctico, en una investigación que aborda diferentes procesos para el desarrollo de competencias geométricas que inciden en la construcción del conocimiento. Un primer paso en el desarrollo de este trabajo consiste en tener una aproximación a la problemática de investigación, en la cual se describe la necesidad de proponer una unidad didáctica que condense algunos tópicos de la

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

geometría euclidiana que serán aplicados en la exposición de una geometría más abstracta (geometría fractal), específicamente, la construcción de algunos objetos fractales de manera iterativa que logre promover en los alumnos el desarrollo de pensamiento geométrico. Del mismo modo se realiza un acercamiento a investigaciones realizadas en tiempos pasados, que están vinculadas a propuestas didácticas para desarrollar competencias geométricas en el aula, con la particularidad de que estas se centran específicamente en el concepto geométrico de autosimilitud de un conjunto fractal y su relación con el estudio de fenómenos encontrados en la naturaleza.

Los referentes teóricos en los cuales se fundamenta este trabajo, y que son transversales a la propuesta, se categorizan en tres dimensiones. Una *dimensión didáctica*, sustentada desde la teoría que proponen los Van Hiele ligada a la enseñanza y aprendizaje de la geometría y en conjunto con una propuesta teórica y metodológica relacionada a los modelos locales de conocimientos y análisis didáctico y unidades didácticas. Por otro lado, desde una *dimensión curricular* que se regula por el punto de vista descrito por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en términos de cómo se concibe el abordaje de pensamiento espacial y sistemas geométricos en las instituciones educativas, a partir de sus principales documentos instaurados institucionalmente, además de considerar diferentes aspectos asociados a la formación profesional de los profesores en matemáticas. Finalmente, desde una *dimensión matemática* orientada a recuperar algunos tópicos de la geometría euclidiana. Adicionalmente, se presenta de manera formal la esencia de la geometría fractal a partir de los conceptos fundamentales contenidos en ella, tomando como base los planteamientos teóricos de Sabogal, S y Arenas, G (2011)., en su propuesta “*una introducción a la geometría fractal*”.

Para la elaboración de la unidad didáctica se propone como estrategia metodológica, desde un enfoque de carácter cualitativo, integrar la implementación de una propuesta de modelo local de análisis didáctico en conjunto con la teoría cognitiva e instruccional que proponen los Van Hiele y una

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

estrategia de investigación en educación matemática basada en la investigación-acción como elementos teóricos y prácticos para entrar en contexto con el fenómeno que se pretende abordar con el diseño.

CAPÍTULO I

1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se precisa la problemática de investigación sobre la cual se pretende ahondar en el desarrollo de este trabajo de grado, para lo cual, se describe la necesidad de proponer una unidad didáctica que condense algunos tópicos de la geometría euclidiana que se abordarán a través de contenidos propios de la geometría fractal, como estrategia de innovación curricular y didáctica en el quehacer del profesor de matemáticas.

1.1 Aproximación a la problemática de investigación

Para empezar, la geometría euclidiana se concibe como una geometría clásica y tradicional, la cual es presentada a lo largo del siglo III a.C. Los cimientos teóricos y conceptuales de esta geometría se construyen a partir de la obra que propone Euclides de Alejandría conocida como “Los Elementos de Euclides”; dicha obra se encarga de abordar elementos fundamentales en el marco de la geometría euclidiana, tales como líneas, puntos y curvas, entre otros. En los Elementos de Euclides se proponen una serie de planteamientos en los cuales se establecen las principales bases axiomáticas de la geometría euclidiana, específicamente, se plantean 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes que dan lugar para la comprensión, el desarrollo y avance de las ciencias modernas.

Esta geometría se rige por los principios de la lógica deductiva y la demostración, lo que implica que cualquier teorema que se demuestre en la geometría euclidiana es válido para cualquier figura geométrica plana. Cabe aclarar que este tipo de geometría se limita al estudio de aquellas representaciones figúrales (formas, figuras) que distan de muchas realidades del entorno, describiendo

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

así, aspectos únicamente regulares, ideales y que no demandan mayor complejidad en términos de su comprensión.

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son circunferencias y la corteza de un árbol no es lisa, como tampoco es cierto que la luz viaja en línea recta” (Mandelbrot, s.f., citado en Sabogal y Arenas, 2011., p.01). Sin embargo, la geometría euclidiana es la base que permite dar cuenta del abordaje de diferentes tipos de geometrías, tales como la geometría proyectiva, las geometrías no euclidianas y la topología; es aquí donde emerge una geometría más topológica y analítica para el estudio de diversos fenómenos de la naturaleza, la cual se conoce a día de hoy como geometría fractal.

Una geometría que trasciende de los puntos, las rectas y los planos de Euclides para atrapar y describir las formas de los árboles, las montañas y las nubes. Complejidad y simplicidad son partes complementarias de su todo. La geometría es llamada Geometría Fractal. (McGuire, 1991., citado en Grisales, 2017., p.27).

La geometría fractal tiene sus orígenes en la década de los 70. Ésta se circunscribe en las áreas del conocimiento correspondientes a la geometría, topología, matemáticas aplicadas y el análisis matemático. La geometría fractal emerge como una herramienta para describir y caracterizar aquellos aspectos de la naturaleza que no pueden ser abordados por la geometría euclidiana, siendo capaz de modelar formas complejas y estructuras irregulares que se encuentran en la naturaleza, como las hojas de los árboles, la textura de las rocas y la forma de las nubes. Uno de los intereses por la geometría fractal surge de la necesidad de comprender el orden de los fenómenos de la naturaleza y su relación con el universo logrando convertirse en una herramienta útil para analizar y dar explicación a todo aquello que rodea a las personas, desde la biodiversidad de la naturaleza hasta los fenómenos físicos y químicos que ocurren en el universo.

Según Santos, L y Barreto, O. (2022) la geometría fractal ha demostrado ser funcional en diversas disciplinas, como, la geología, la salud, el arte y la arquitectura. En la geología, por ejemplo, se utiliza para modelar la forma de las montañas y los ríos, y para predecir terremotos y otros fenómenos geológicos. En la salud, se emplea para analizar las estructuras del cerebro y para entender la relación entre la estructura de los vasos sanguíneos y el desarrollo de enfermedades. Ahora bien, en el arte y la arquitectura, sirve para crear formas y estructuras complejas, y para diseñar edificios y obras de arte que se asemejen a las formas de la naturaleza (p.7).

De acuerdo a lo anterior, Mandelbrot propone una formalización conceptual respecto a todos los conceptos geométricos que emergen a través del tiempo asociados a la geometría fractal, para ello destina dos obras esenciales, se refiere primeramente a “Les Objets Fractals: forme, hasard et dimension”, esta obra se presenta como un ensayo de carácter informal en el cual presenta tópicos generalizados que se encuentran intrínsecamente vinculados a la geometría de fractales, y su segunda obra “The Fractal of Nature” se muestra como un complemento más compacto para sus aportes a la investigación respecto a la geometría fractal, y aunque da continuidad a las mismas generalidades que ha expuesto, amplía el abordaje de otros tópicos que exceden la parte introductoria de los fractales.

1.2 Generalización de la problemática de investigación

A través del tiempo, la enseñanza y aprendizaje de la geometría ha logrado representar una de las principales dificultades en el campo de la educación matemática, debido en parte a que la geometría y las matemáticas a nivel general se conciben como objetos complejos y abstractos, es decir, que no es tarea sencilla manipularlos ya que generalmente se acceden a ellos por medio de representaciones.

En esa perspectiva, enseñar geometría en la escuela supone ofrecer a los alumnos la posibilidad de:

describir, entender e interpretar el mundo real y sus fenómenos; resolver una amplia variedad de problemas que implican usos de estimación, aproximación y medición; acceder

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

paulatinamente, mediante el uso de técnicas y de las explicaciones sobre ellas se pueden dar, a un modo de teoría axiomática; formular conjeturas y preguntas; proponer pruebas, estrategias; elaborar refutaciones, ejemplos y contraejemplos de los fenómenos que se describen y modelizan primero, para aplicar las conclusiones a otros fenómenos; recuperar la capacidad de asombro y de análisis de lo visual, de la imagen; construir esquemas básicos de respuestas a situaciones cotidianas provenientes tanto del medio social como de las otras áreas de estudio, así como de la propia matemática, que involucren la conceptualización de lo espacial. (Villella, 2001., citado en Fernandez, R, 2016., p.02).

Con lo cual, el profesor en su quehacer pedagógico debe tener claro que el propósito de su enseñanza debe estar en términos de desarrollar en los alumnos competencias matemáticas que les permitan fortalecer habilidades ligadas al reconocimiento, caracterización y aplicación de los diferentes saberes matemáticos para la comprensión de los diferentes fenómenos que se hacen visibles dentro del entorno.

Cabe mencionar que estas necesidades intrínsecas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría proponen un reto interesante para el profesor en su práctica pedagógica, pues se considera indispensable encontrar diferentes alternativas que permitan fortalecer el acto de enseñar esta disciplina, sin dejar de lado diferentes procesos generales como lo son; razonamiento, modelación, resolución de problemas, comunicación y ejercitación de procedimientos, que resultan componentes esenciales para el aprendizaje de la geometría.

En ese sentido, la teoría que proponen los Van Hiele en conjunto con una propuesta de modelo local de análisis didáctico del contenido, resultan herramientas esenciales para el profesor en todo el proceso de orquestación didáctica, pues estos modelos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consideran fundamental la integración de diferentes estrategias didácticas, herramientas y recursos que

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

orienten la enseñanza en el aula de forma adecuada, permitiendo así estructurar detalladamente el diseño de una serie de actividades que privilegien identificar las formas de razonamiento de los alumnos en las cuales se haga visible las ideas matemáticas que ellos poseen y desarrollan en relación a un objeto geométrico en particular, además de caracterizar y reconocer el progreso de los alumnos a partir de los niveles que propone esta teoría.

1.3 Sistematización de la problemática de investigación

De acuerdo a la propuesta teórica y metodológica de los Van Hiele y el modelo local de análisis didáctico se formulan las siguientes preguntas que orientan la presente investigación:

1.3.1 Pregunta central de investigación

Tomando como referencias teórica y metodológica el modelo cognitivo e instruccional de los Van Hiele y el diseño integrado de un “modelo local de análisis didáctico del contenido”, ¿qué elementos conceptuales y procedimentales se podrían tomar en cuenta para el diseño de una unidad didáctica que articule o integre el estudio de transformaciones geométricas y la construcción de algunos objetos apropiados de la geometría fractal utilizando un recurso digital como GeoGebra, con propósitos de desarrollar pensamiento geométrico en grado once?

1.3.2 Preguntas auxiliares de investigación

A partir de la propuesta teórica de los Van Hiele y el modelo local de análisis didáctico, ¿de qué forma se debe orientar el diseño de una unidad didáctica que integre transformaciones geométricas y objetos fractales para privilegiar el desarrollo de pensamiento geométrico en grado once?

Desde un punto de vista matemático, ¿qué aspectos teóricos y operatorios de las transformaciones geométricas se involucran en la construcción de objetos fractales a través de Sistemas Iterados de Funciones (SIF)?

¿Qué elementos conceptuales y procedimentales se deben de tener presentes en la planificación e implementación de actividades didácticas a través del recurso digital GeoGebra que permitan reconocer sentidos, comprensión y dificultades en su elaboración e implementación?

1.4 Justificación de la investigación

Para Gamboa, R y Ballester, E. (2010) en el marco de la Didáctica de las Matemáticas (DdM) es fundamental realizar investigaciones en las cuales se haga visible la importancia que tiene conocer, enseñar y aplicar conceptos de la geometría en diferentes contextos, por lo cual es esencial centrar la mirada en aquellas que se enfoquen en el estudio que se relaciona a la enseñanza de la geometría en las instituciones educativas, ya que se han logrado identificar diferentes dificultades en su enseñanza y las formas en las que inciden en el aprendizaje de los alumnos. Cabe mencionar que los profesores en su quehacer pedagógico han tratado de innovar en las estrategias y métodos que emplean para el desarrollo de las clases, todo con el ánimo de realizar aportes significativos a los alumnos. Sin embargo, en la actualidad aún existen profesores que prefieren llevar a la práctica formas de enseñanza utilizadas tradicionalmente, lo cual repercute en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje (p.27).

En ese sentido, Vargas, G y Gamboa, R. (2013) hacen énfasis en que la enseñanza de la geometría en las instituciones educativas ha perdido importancia en comparación con otras áreas del conocimiento o se sigue desarrollando de forma tradicional, dado que, se dedican al desarrollo de los diferentes contenidos matemáticos a través de estrategias tradicionales, principalmente, por la clase magistral, donde se prioriza el uso del discurso del profesor como elemento principal para movilizar saberes en el aula. Esto significa que se sobrepone una única estrategia metodológica para la enseñanza de las matemáticas, encontrando su fundamentación en la enseñanza tradicional en la escuela, la cual se caracteriza por el rol que asume el profesor, donde desempeña un papel predominante como la principal fuente de conocimiento, mientras que los alumnos son vistos como receptores pasivos de

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

información. Cabe resaltar que actualmente esta estrategia metodológica es objeto de crítica en la educación matemática, debido a que presenta varias deficiencias (p.76).

En primer lugar, se enfoca en la memorización de contenidos teóricos y procedimientos sin priorizar la comprensión de los conceptos subyacentes, esto hace que los alumnos tengan dificultades para aplicar los conocimientos matemáticos en situaciones reales. Por otra parte, se basa en clases magistrales que no fomentan la participación activa de los alumnos ni la exploración de la matemática por sí mismos, lo cual conlleva a que la enseñanza tradicional de la matemática no muestre a los alumnos cómo la matemática en general se aplica en la vida real, impidiendo ver su relevancia y utilidad en el mundo actual.

En ese sentido, Iglesias, M afirma que: No es que un profesor sea matemáticamente competente, es necesario que ponga en juego el conocimiento didáctico del contenido matemático al momento de diseñar, gestionar y evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje, teniendo en mente la necesidad que sus estudiantes progresivamente desarrollen y practiquen competencias matemáticas según las exigencias propias del nivel o modalidad educativa; es decir, es necesario que el profesor también sea didácticamente competente. (2016, citado en Formación Inicial de los Docentes en Geometría y su Didáctica., p.145).

Así, el profesor debe tomar consciencia de que el ámbito educativo va evolucionando progresivamente, y este cambio trae consigo nuevas estrategias innovadoras de enseñanza en relación a la geometría, donde se privilegia la integración de diferentes materiales y recursos didácticos que permitan que los alumnos interactúen de manera constante con el saber matemático y con el profesor, promoviendo su interés y generando espacios de discusión significativos.

En consecuencia de lo anterior, Iglesias, M., enfatiza en que los profesores deben ser usuarios idóneos de estos recursos y, de ser posible, haber experimentado su utilidad durante su proceso de

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

formación matemática y didáctica; por ejemplo, la capacidad para juzgar la utilidad de un software de Geometría Dinámica (SGD) en la elaboración y exploración de construcciones geométricas se desarrollaría a partir de la realización de tareas matemáticas que exijan a los profesores –durante su formación inicial - el desarrollo y la puesta en práctica de sus conocimientos y competencias matemáticas y didácticas. (Iglesias, 2016, citado en Formación Inicial de los Docentes en Geometría y su Didáctica., p.145).

Es decir, se considera necesario que los profesores que implementan diferentes recursos tecnológicos en el aula para la enseñanza de las matemáticas, tengan la suficiente preparación y habilidad para llevarlos a cabo, puesto que los profesores a través de todo su quehacer didáctico y pedagógico deben ser capaces de evaluar qué escenarios resultan idóneos para incorporarlos en el aula, con el propósito de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Para ello, es de suma importancia que los profesores reciban una formación adecuada durante su proceso de formación inicial. En particular, los profesores deben participar en tareas matemáticas que exijan el desarrollo y la puesta en práctica de sus conocimientos y competencias matemáticas y didácticas utilizando recursos didácticos tecnológicos, ya que, de esta manera, pueden experimentar la utilidad tanto en su propia formación, como el impacto que tienen en el aula.

En ese orden de ideas, es importante mencionar que en el marco del desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado que se concreta en el diseño de propuesta de unidad didáctica tenga la necesidad de contemplar diferentes aspectos asociados a la enseñanza a través de todo su proceso de orquestación y configuración didáctica, donde inicialmente el profesor tenga habilidades para planificar cuidadosamente la enseñanza de los contenidos, lo que implica realizar un análisis didáctico a través de constructos teóricos descritos más adelante, centrando su mirada en los temas a trabajar y diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos. Estos procesos deben reflejar el conocimiento a elaborar

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

por los alumnos, las actividades que deben realizar, los recursos que se utilizarán y los métodos y procedimientos adecuados para fomentar el aprendizaje y la comprensión de los alumnos. Todo esto con el propósito de facilitar el aprendizaje de los saberes matemáticos en el aula y que los alumnos estén en la capacidad de exteriorizarlos.

1.5 Objetivos de la investigación

1.5.1 Objetivo general

Identificar y seleccionar elementos conceptuales y procedimentales básicos para el diseño de un modelo local de análisis didáctico del contenido matemático y curricular en cuestión, como estrategia de formación inicial del profesor de matemáticas, el cual se concreta en la elaboración de una propuesta de unidad didáctica (UD), basada en elementos de la teoría cognitiva e instruccional de los Van Hiele, utilizando objetos fractales y un recurso didáctico digital de mediación como GeoGebra, con el propósito de desarrollar competencias de pensamiento geométrico, en relación con el estudio de las transformaciones geométricas en grado once.

1.5.2 Objetivos específicos

Revisar y reconocer elementos conceptuales y procedimentales básicos de carácter matemático, curricular y didáctico, con el propósito de diseñar un modelo local de conocimientos y análisis didácticos del contenido, orientado a la elaboración de una unidad didáctica para el desarrollo de competencias de pensamiento geométrico en relación con transformaciones geométricas, utilizando algunos recursos didácticos de mediación como objetos fractales y tecnología digital como GeoGebra.

Con base en resultados del objetivo anterior y el modelo local de conocimientos y análisis didácticos, intentar diseñar e implementar algunas actividades para el desarrollo de una unidad didáctica en torno al contenido geométrico considerado, con el propósito de desarrollar sentidos, y

comprensión al respecto, e identificar necesidades y dificultades para su elaboración e implementación por parte del profesor de grado once.

1.6 Antecedentes de la investigación

Este apartado presenta algunas de las investigaciones que se han realizado en el marco de la educación matemática en relación al desarrollo de pensamiento geométrico a través de la enseñanza de conceptos de la geometría fractal.

Inicialmente, en la Universidad del Valle, Cabezas, M. (2015) presentó en su trabajo para optar al título de pregrado de Licenciada en Matemáticas y Física, “Una introducción a la geometría fractal a través del tratamiento de la autosimilitud integrando un ambiente de geometría dinámica”, el abordaje del proceso de visualización y la propiedad de autosimilitud para determinar la incidencia que estos tienen en el desarrollo de pensamiento geométrico y crítico de los alumnos de noveno grado, es decir, las formas en cómo comprenden un objeto fractal a partir de diferentes situaciones didácticas que involucran varios procesos y procedimientos geométricos. Este trabajo de grado se centra en responder ¿Qué caracteriza algunas situaciones de aprendizaje en el contexto de la geometría fractal desde la visualización y el estudio de la autosemejanza cuando se integra un ambiente de geometría dinámica?, para ello se propone el estudio del contexto de la geometría fractal desde exploraciones a un nivel didáctico, considerando el diseño de una propuesta didáctica fundamentada desde diferentes puntos de vistas asociados a la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Por otro lado, también en la Universidad del Valle, Ramírez, J. (2016) propone en su trabajo para optar al título de pregrado de licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, “Una mirada artística a la geometría fractal en contextos escolares a través de la propiedad de la autosemejanza en grado noveno de la Educación Básica en Colombia”, efectuar un acercamiento de carácter intuitivo a la geometría fractal, específicamente al concepto de autosemejanza. Para ello consideraron pertinente el

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

diseño de una serie de actividades en particular que se acotaran a la autosemejanza, pero desde aspectos históricos y teórico-prácticos con los cuales los alumnos fuesen capaces de comprender la aplicabilidad de los fractales en diferentes situaciones.

Otro aporte a la investigación fue desarrollado en la Universidad Tecnológica de Pereira, Grisales, L. (2017) en su trabajo para optar al título de magister en Enseñanza de las Matemáticas, “Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la media básica del C.E Bachillerato en Bienestar Rural Sede Ciató en el municipio de Pueblo Rico mediante elementos de la naturaleza”, se concibe la idea de dar a conocer estudios que se realizaron respecto a conceptos básicos de la geometría fractal para desarrollar pensamiento geométrico. Es importante destacar que esta propuesta toma en consideración el hecho de integrar la enseñanza de los fractales junto con elementos propios de la naturaleza de forma más explícita, en comparación con las investigaciones presentadas con antelación.

Ahora bien, en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional del Departamento de Matemática Educativa, México, Carrillo, J. (2017) en su propuesta para optar al título de Magister en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa, “Descubriendo matemáticas con fractales en secundaria. Un estudio aplicando el modelo de Van Hiele y el curriculum en espiral de Bruner con tecnología”, donde se propone observar el aprendizaje matemático y el razonamiento de los alumnos a través de los procesos que desarrollan en la resolución algunas tareas enfocadas en la construcción de fractales, orientado desde la teoría cognitiva e instruccional de los Van Hiele. Donde cada una de las actividades elaboradas en el marco del desarrollo esta investigación, surgen a partir de la concepción en donde los fractales, a pesar de que pueden conducir a matemáticas muy complejas, surgen a partir de iteraciones de un grado menor en términos de su complejidad.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Del mismo modo, en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Barriga, L y Correa, A. (2018) en su trabajo para optar al título de Especialistas en Educación en Tecnología, “Diseño de un ambiente virtual de aprendizaje basado en el modelo de Van Hiele para la comprensión de los fractales” donde su propósito consiste en desarrollar una propuesta didáctica, situada en los niveles cognitivos y fases de aprendizaje propuestas en la teoría de los Van Hiele y en la educación con tecnología. Para ello se presentan algunas actividades orientadas a través de un recurso educativo digital como herramienta para uso de los profesores, que ayude a potenciar las técnicas pedagógicas en el aula y del mismo modo logre incidir en el aprendizaje de los fractales.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan elementos teóricos, los cuales asumen el rol de referentes contextuales y conceptuales de orden curricular y didáctico, desde tres dimensiones: Curricular, Didáctica y Matemática. Los cuales inciden en todo el proceso de planificación, elaboración y desarrollo de la propuesta de trabajo de grado.

2.1 Marco contextual

A continuación, se propone situar esta propuesta de unidad didáctica de acuerdo a lo que sugiere el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus documentos oficiales.

2.1.1 Dimensión Curricular

2.1.1.1 Estándares Básicos de Competencia (EBC)

Para comenzar, los Estándares Básicos de Competencias (2006) aluden a un documento de carácter institucional que tiene la finalidad de fundamentar aquellos parámetros y contenidos matemáticos que se deben desarrollar en los diferentes ciclos escolares. Esto en palabras del MEN quiere decir que se corresponde a un documento que encuentra sus bases en los lineamientos existentes (documentos institucionales), con el propósito de establecer puntos de referencia comunes que permitan definir los niveles de calidad a los que todos los alumnos del país tienen derecho, independientemente de su lugar de origen. Con esta iniciativa se pretende guiar la búsqueda de la calidad educativa por parte de todo el sistema educativo (p.9).

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

De acuerdo a lo anterior, es importante esclarecer el significado que tiene para el (MEN, 2006) el concepto “Estándar”, el cual define como:

Un estándar es un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad; expresa una situación deseada en cuanto a lo que se espera que todos los estudiantes aprendan en cada una de las áreas a lo largo de su paso por la Educación Básica y Media, especificando por grupos de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9, y 10 a 11) el nivel de calidad que se aspira alcanzar. (MEN, 2006., p.11).

En este orden de ideas, los EBC se logran enmarcar en una guía donde privilegian la planificación y elaboración del currículo concretada en los planes de estudios y formación de académica, además del diseño de material educativo, principalmente la producción textos escolares y recursos didácticos para la enseñanza de los contenidos en el aula

Ahora bien, los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) definen el Pensamiento Espacial y los Sistemas Geométricos como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales (p. 61). Es decir que centra sus esfuerzos en aspectos relacionados a las habilidades cognitivas que sirven para atender, entender y manipular mentalmente las formas, objetos y relaciones contenidas en el espacio.

De ese mismo modo, el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos toma como apoyo la percepción sensorial, la atención, la memoria, la imaginación y la visualización, permitiendo así representar, analizar, modelar y resolver problemas geométricos de manera efectiva. De aquí su importancia en diferentes escenarios, ya que es esencial para la comprensión y manipulación de objetos y formas en el entorno.

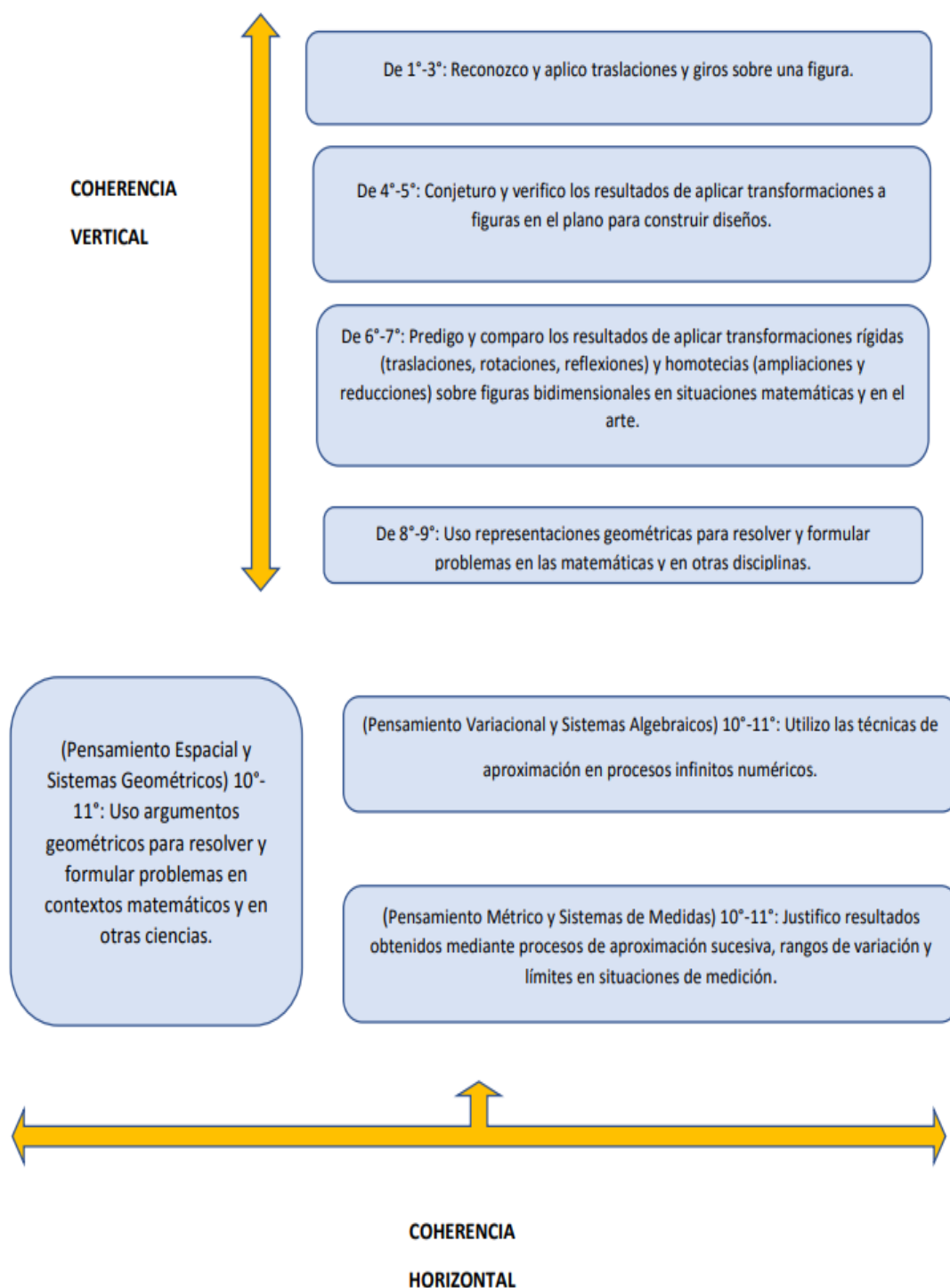
Ahora bien, desde el punto de vista del (MEN, 2006) el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos tiene una serie de particularidades, donde se explicitan como:

- Como todos los sistemas, los geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos.
- El pensamiento espacial opera mentalmente sobre modelos internos del espacio en interacción con los movimientos corporales y los desplazamientos de los objetos y con los distintos registros de representación y sus sistemas notacionales o simbólicos. Sin estos últimos, tampoco se hubiera podido perfeccionar el trabajo con los sistemas geométricos y, en consecuencia, refinar el pensamiento espacial que los construye, maneja, transforma y utiliza.
- Los sistemas geométricos pueden modelarse mentalmente o con trazos sobre el papel o el tablero y describirse cada vez más finamente por medio del lenguaje ordinario y los lenguajes técnicos y matemáticos, con los cuales se pueden precisar los distintos modelos del espacio y formular teorías más y más rigurosas. Estos modelos con sus teorías se suelen llamar “geometrías.

Desde el punto de vista de los EBC, esta propuesta de trabajo de grado se logra situar en grado once, de aquí a la importancia de estructurar, sobre cómo se debe orientar el desarrollo de manera paulatina, durante los diferentes ciclos escolares (primaria y secundaria). Para ello, se propone una coherencia vertical y horizontal, donde se precisan aspectos relacionados a la enseñanza del contenido matemático escolar que se pretende desarrollar.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Figura 1. Organización curricular para la enseñanza de las transformaciones geométricas en los ciclos escolares.



Fuente: Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de*

Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. Bogotá, Colombia. Elaboración propia.

2.1.1.2 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)

Del mismo modo, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) hacen referencia a un documento institucional propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), el cual logra dar cuenta de todo lo que los alumnos deben de conocer y manipular en cada ciclo escolar, pero a diferencia de otros documentos institucionales, lo realiza de forma precisa y detallada pues como afirma el Ministerio de Educación Nacional, donde explicita que:

Los DBA, en su conjunto, explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular.

Se entienden los aprendizajes como la conjunción de unos conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende. Son estructurantes en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se puede edificar el desarrollo futuro del individuo. (MEN,2016., p.6).

Con lo cual, los DBA asumen un rol fundamental en el ámbito educativo, en vista de que permiten determinar los objetivos, contenidos, competencias y criterios de evaluación que se espera que los alumnos alcancen en un determinado grado y área de estudio. No obstante, es indispensable aclarar que cuando se refiere a “aprendizajes estructurantes”, se está aludiendo a aquellos conocimientos, habilidades y actitudes que se consideran de vital importancia en términos del desarrollo cognitivo y personal de los alumnos en un área en específica. Además, estos aprendizajes no solo implican la adquisición de conocimientos teóricos, sino que también involucran el desarrollo de habilidades prácticas y la adopción de actitudes y criterios que son importantes en el entorno. Por lo cual, es importante mencionar que la estructura que presenta la propuesta de este documento, se organiza a la luz de tres componentes esenciales: enunciado, evidencias de aprendizaje y ejemplificación.

- **Enunciado:** referencia el aprendizaje estructurante para el área de conocimiento específica.
- **Evidencias:** expresan indicios claves que permiten al profesor dar cuenta del aprendizaje que se concreta en el enunciado.
- **Ejemplo:** es el complemento contextualizado de las evidencias de aprendizaje.

Por otro lado, según (MEN, 2016) definen algunas características como se precisan a continuación (p.7).

- Los DBA responden a un documento comprensible para todos los miembros inmersos en el ámbito educativo.
- La organización y estructura que se propone en los DBA no implica que su desarrollo se realice de manera lineal, es decir, que se la facilita al profesor su utilidad en el proceso de orquestación didáctica.
- El profesor podrá, según los aprendizajes desarrollar experiencias que aporten a su formación profesional.
- Las evidencias de aprendizaje permiten al profesor visualizar como es el progreso de aprendizaje de los alumnos.
- Los enunciados y la ejemplificación ilustran aquello que los alumnos deben estar en capacidad de hacer al alcanzar los aprendizajes enunciados, contextualizándolos de acuerdo a sus necesidades.

En vista de lo anterior, para el desarrollo de este trabajo de grado el cual se concreta en la elaboración de una unidad didáctica, para reconocer procesos y procedimientos del profesor enfrentado a situaciones de innovación curricular y didáctica, se considera el DBA vol. 2 de grado once. Cabe mencionar que el DBA que está alrededor de la propuesta de investigación es el DBA 6.

2.1.1.3 Lineamientos Curriculares (LC)

Al igual que los Estándares Básicos de Competencia y los Derechos Básicos de Aprendizaje, los Lineamientos Curriculares (LC) corresponden a otro documento instaurado institucionalmente que, dentro de sus propósitos, privilegia exponer los principales aspectos a tener en cuenta en todo el proceso de orquestación y estructuración curricular, es decir, que centra su mirada en diferentes contextos nacionales, institucionales y sociales principalmente, para con ello fundamentar las propuestas educativas en los diferentes sectores. De aquí la necesidad de resaltar algunos de los propósitos principales, y que son transversales a la planificación y elaboración de los Lineamientos Curriculares (LC).

Para el (MEN, 1998), dentro de los propósitos que subyacen en los lineamientos curriculares se priorizan aspectos asociados a:

- Responder a los criterios curriculares nacionales-institucionales entorno a la función de las diferentes disciplinas y sobre sus enfoques para enseñar y aprender en el aula.
- Los lineamientos priorizan fortalecer el estudio de la fundamentación pedagógica de las diferentes disciplinas, y la articulación de proyectos entre las mismas como ejercicio transversal en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Dicho esto, en los Lineamientos Curriculares (LC), situados en el campo de la enseñanza de las matemáticas como área del conocimiento se precisan elementos conceptuales que se deben tener presentes en toda la organización curricular, específicamente, conocimientos básicos, procesos generales, y el contexto.

- **Conocimientos básicos:** Se refieren específicamente a la relación que existe entre los procesos específicos y los sistemas propios de las matemáticas, donde al comprenderlos y llevarlos a la práctica, los alumnos van a estar en la capacidad de apropiarse de los

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

diferentes contenidos matemáticos escolares y aplicarlos en diferentes situaciones cotidianas.

- **Procesos generales:** Se alude a los procesos que están en términos del aprendizaje de las matemáticas en el aula, los cuales son: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- **El contexto:** Se centra en el medio actual donde se encuentran inmersos los alumnos, entendido a partir de aspectos socioculturales (económicas, creencias, sociales, intereses e interacciones) el cual determina en gran medida el aprendizaje de las matemáticas.

Figura 2. Relación de los conocimientos básicos, procesos generales y contextos.



Fuente: Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares.

En ese sentido, la interpretación del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, en términos de la organización curricular, se centra en se privilegiar el desarrollo de habilidades que permiten representar, manipular objetos y relaciones en el espacio. Para ello se deben de considerar diferentes elementos de carácter operatorio tales como: construcciones, representaciones mentales y exploraciones activas en relación al objeto geométrico.

Por otra parte, los procesos generales que se proponen dentro de la actividad matemática, son de orden curricular y se caracterizan por lo siguiente:

- **Razonamiento:** Se refiere a la capacidad de los alumnos de realizar procesos de abstracción basados en la lógica deductiva y matemática para hacer inferencias en relación a un contenido matemático en particular.
- **Resolución y planteamiento de problemas:** Alude a la posibilidad de los alumnos para reconocer un problema matemático y a su vez planificar, elaborar, proponer y desarrollar estrategias para resolverlo.
- **Comunicación:** Se interpreta a través de la aptitud con la que cuentan los alumnos para expresar y compartir sus ideas matemáticas de una forma clara y concreta.
- **Modelación:** Se centra en la suficiencia que tienen los alumnos de establecer relaciones entre los diferentes contenidos matemáticos escolares y situaciones del mundo real.
- **Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos:** Se enfoca en la facultad que poseen los alumnos para resolver sistemáticamente diferentes planteamientos matemáticos.

2.1.1.4 Acerca de la formación de profesores de matemáticas

Indudablemente, la formación de profesores de matemáticas juega un papel esencial en el sector educativo, en vista de que dentro de sus propósitos se busca promover el desarrollo de aprendizajes significativos que inciden en el desarrollo personal y cognitivo de los alumnos, por lo cual desde el MEN se proponen unos criterios que regulan todo el proceso formativo de los profesores en las Instituciones de Educación Superior (IES), cabe mencionar que principalmente sobresalen:

- **Decreto 0709 de 1996:** El propósito del presente decreto consiste en precisar y explicar aquellas orientaciones, reglas y criterios de carácter normativo, que se deben considerar en la trayectoria de organización curricular de los diferentes programas académicos (planificación, elaboración y desarrollo) que incidan en el mejoramiento de la formación personal y profesional de los educadores.
- **Decreto 3076 de 1997:** La intención de este decreto está orientada a definir las normativas para la elaboración y desarrollo de los programas ofrecidos en las instituciones de educación superior (pregrado y posgrado) y los reconocimientos (títulos) a los futuros educadores en las diferentes disciplinas.
- **Resolución 1036 de 2004:** Esta resolución propone caracterizar de forma específica los diferentes programas (pregrado y especialización en educación) que ofrecen en las instituciones de educación superior, en términos de su calidad formativa.
- **Resolución 5443 de 2010:** A diferencia de la resolución 1036 de 2004, el objetivo de ésta se centra en caracterizar de forma generalizada los diferentes programas (pregrado y especialización en educación) que ofrecen en las instituciones de educación superior, en términos de su calidad formativa, pero tomando en consideración otras disposiciones relacionadas a la práctica pedagógica de los educadores.

Cabe esclarecer que cada uno de estos Decretos y Resoluciones están alineados a La Ley General de la Educación de 1994, específicamente el artículo 109, donde sus objetivos están en función de poder formar educadores de alta calidad científica, ética, pedagógica y didáctica, privilegiando el fortalecimiento de aquellos componentes enfocados hacia la investigación y la capacitación en los diferentes niveles y ciclos escolares, con lo cual los profesores, en su quehacer pedagógico estén en la capacidad de desarrollar todos sus conocimientos y habilidades de la mejor manera en el aula, generando ambientes significativos de enseñanza y aprendizaje y construcción de nuevos conocimientos por parte de los actores escolares involucrados.

En esa perspectiva, es necesario que los profesores en formación, desarrollen unas competencias profesionales, en relación a la enseñanza de las matemáticas, para ello la línea del grupo de investigación del Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) propone cómo se debe concebir un profesor formado profesionalmente y capacitado para enseñar matemáticas en la escuela. Primeramente, un profesor de matemáticas debe desarrollar habilidades en diseño, desarrollo y evaluación de entornos de aprendizaje que fomenten el desarrollo de habilidades matemáticas en los alumnos, y que sea capaz de reflexionar y trabajar de manera autónoma. Por otra parte, un profesor de matemáticas debe actualizarse en las tendencias educativas y tecnológicas en el campo de la enseñanza de las matemáticas, lo cual le permitirá diseñar estrategias innovadoras y efectivas para la enseñanza de esta disciplina. Además, deben ser capaces de reflexionar sobre sus propias prácticas pedagógicas y mejorarlas de manera continua, a través del análisis crítico de su desempeño y de la retroalimentación recibida de sus colegas y alumnos.

Adicionalmente, es importante que la formación de profesores de matemáticas incluya un enfoque en la investigación educativa y en la práctica reflexiva, donde los profesores en formación deben ser capaces de diseñar y llevar a cabo investigaciones en el campo de la enseñanza de las matemáticas, lo cual les permitirá estar actualizados y contribuir al desarrollo de la disciplina.

2.2 Marco Conceptual

Análogamente, se concretan las teorías que sustentan esta propuesta de trabajo de grado, es decir, el modelo teórico e instructivo de los Van Hiele y una propuesta de modelo local de análisis didáctico como referentes conceptuales y procedimentales.

2.2.1 Dimensión Didáctica

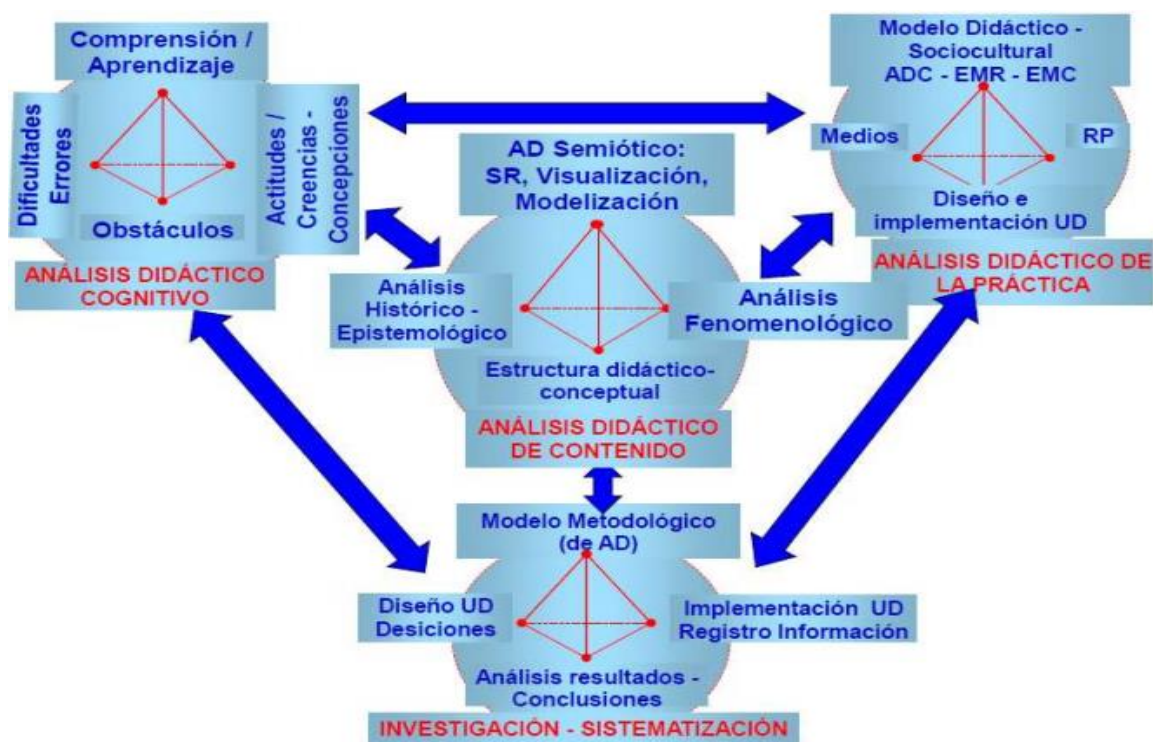
2.2.1.1 Modelo local de Análisis Didáctico (AD)

De acuerdo a Bedoya, E. (2022), “el análisis didáctico (AD) es un constructo pluridisciplinar que consiste en la descripción de la manera ‘ideal’ de realizar actividades de diseño curricular a nivel local”. Donde sus principales características se centran en todo el desarrollo de la práctica profesional docente, en relación a los procesos que se desarrollan para concatenar competencias propias de la disciplina, del currículo, sociales y culturales. En ese sentido, es necesario caracterizar estas competencias que se enmarcan en los conocimientos didácticos de la práctica profesional del profesor de matemáticas (p.15).

- Poseer un conocimiento disciplinar de referencia: de carácter investigativo y profundización.
- Dentro de la actividad práctica, tener habilidades en la trayectoria de planificación, elaboración y evaluación de las actividades y propuestas didácticas (unidades didácticas, secuencias didácticas, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, entre otros.)
- El análisis didáctico (AD) privilegia estructurar desde diferentes dimensiones el diseño y organización del currículo, propuestas de aula y actividades de aprendizaje.
- Sistematizar las experiencias de los profesores de matemáticas considerando las actividades asociadas a investigación y profundización en los contenidos matemáticos escolares y como parte de la actividad práctica del profesor.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Figura 3. Organización del conocimiento didáctico y el modelo de análisis didáctico de los contenidos matemáticos.



Fuente: Bedoya, E. (2022). Didáctica de las matemáticas- conocimiento y

análisis didáctico: Formación de profesores, innovación curricular e investigación en educación matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.

En ese sentido, se denomina Análisis Didáctico al proceso mediante el cual el profesor de matemáticas, basándose en conocimientos didácticos, diseña, implementa y evalúa las distintas actividades de planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza de las matemáticas; tiene carácter local o situado en relación tanto con el contenido como con el contexto. Estas mismas actividades se pueden adaptar con propósitos investigativos, confiriéndole de esta manera al AD carácter de metodología auxiliar de investigación. Tal como se dijo inicialmente, el AD, o mejor, los conocimientos, habilidades y capacidades de los profesores para realizarlo, constituye indicadores de una formación y de competencia profesional de estos. (Bedoya, E, 2002., citado en Solano y Bedoya, 2013., p.406.)

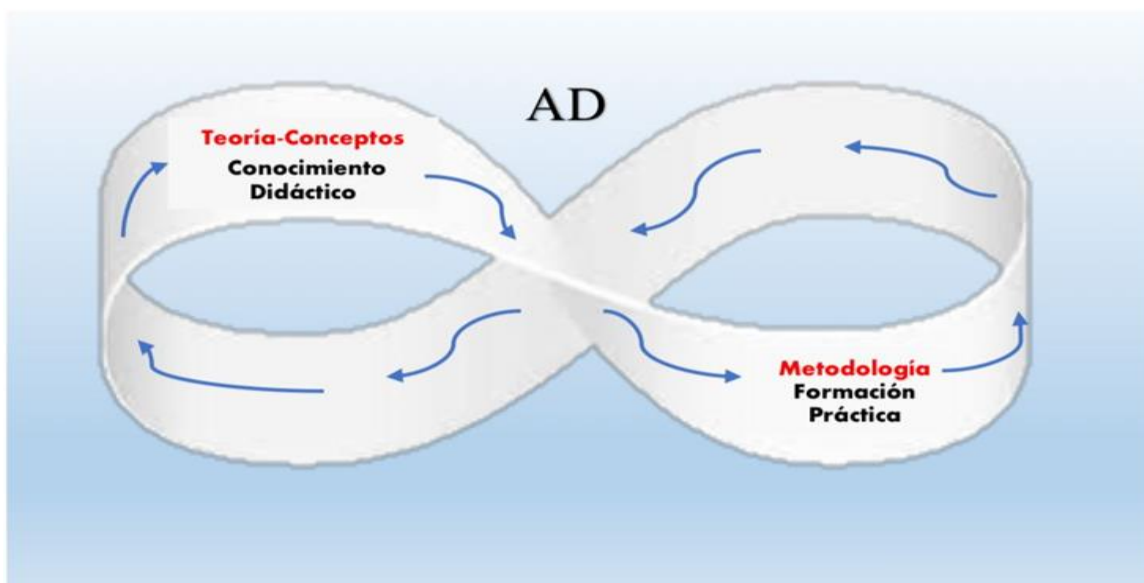
ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Lo cual quiere decir que el modelo local de análisis didáctico en la formación profesional del profesor de matemáticas tiene un doble carácter: teórico y práctico. El análisis didáctico se interpreta como una herramienta fundamental y transversal para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cual permite a los profesores atender las necesidades que emergen constantemente en el aula. Además, ayuda a los profesores a comprender diferentes escenarios subyacentes en todo su proceso de orquestación didáctica, tales como planificación, elaboración, diseño, aplicación y evaluación de aquellas actividades de enseñanza que se adaptan en función de mitigar las diferentes necesidades cognitivas que se hacen manifiestas en los alumnos y al entorno mismo en el que se enseña.

Por tanto, es esencial que los profesores cuenten con los conocimientos, habilidades y capacidades necesarias para realizar un análisis didáctico coherente y preciso para lograr una enseñanza de calidad en relación a los contenidos matemáticos escolares que se movilizan en el aula de clases. El AD es un constructo teórico que centra su atención en el estudio de los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tanto, a través del AD, los profesores pueden comprender mejor cómo se construyen los conocimientos matemáticos en los alumnos y cómo se pueden desarrollar estrategias didácticas y pedagógicas para mejorar el aprendizaje de las matemáticas.

En esa perspectiva, el análisis didáctico es indispensable para los profesores de matemáticas, ya que les permite adaptar su enseñanza a las necesidades de sus alumnos y mejorar su aprendizaje, donde es necesario que los profesores cuenten con los conocimientos y habilidades suficientes para realizar un análisis didáctico coherente y preciso.

Figura 4. El carácter teórico y práctico del análisis didáctico (AD).



Fuente: Bedoya, E. (2017). Formación de profesores de educación

básica y media en matemáticas y su didáctica: conocimiento didáctico del contenido, análisis didáctico y unidades didácticas. Universidad del Valle, Colombia.

Con lo mencionado anteriormente, resulta primordial presentar la categorización que se propone a través de toda la fundamentación de la propuesta de modelo local de análisis didáctico, para ello, se centra la mirada alrededor de: Análisis Didáctico Curricular, Análisis Didáctico del Contenido, Análisis Didáctico Cognitivo, Análisis Didáctico de Instrucción, y Análisis Didáctico de Actuación, en ese orden, en la trayectoria de planificación, elaboración y aplicación de la unidad didáctica.

2.2.1.1.1 Análisis didáctico curricular

El Análisis Didáctico del Currículo se concibe a partir de la siguiente concreción curricular:

Para Camacho, J. (2017) en Colombia el currículo se concreta en tres contextos; el nacional a través del MEN ministerio de educación nacional, el Institucional a través del PEI proyecto educativo institucional, y el aula a través del plan de aula. La propuesta curricular en Colombia propone como referentes nacionales dos documentos principales; los Lineamientos generales de cada

área del conocimiento (1998) y los estándares generales y específicos de cada área del conocimiento (2002), estos últimos contenidos en el documento (No 3 del MEN), desde ese entonces han venido siendo trabajados y modificados periódicamente, lo que cumple con el planteamiento de Rico, respecto a que una propuesta curricular debe responder a cambios en la dinámica de social (p.53).

En ese orden de ideas, esta categoría de análisis, está en función de organizar y estructurar la enseñanza de los contenidos matemáticos escolares de una forma integral y contextualizada, para ello es necesario contemplar los diferentes escenarios en los cuales se encuentran inmersos los alumnos, principalmente aspectos curriculares, institucionales y sociales. Cabe aclarar que aquello que se relaciona a aspectos curriculares e institucionales se centra en determinar una organización que incida en el desarrollo de competencias matemáticas en el aula, teniendo en cuenta las necesidades específicas de cada institución educativa y, por ende, del estudiantado. Ya en lo que se refiere a lo social, alude a todas las condiciones culturales, sociales y económicas para así proponer una enseñanza de las matemáticas contextualizada y orientada a los diferentes entornos cotidianos.

2.2.1.1.2 Análisis didáctico del contenido

El Análisis Didáctico del Contenido consiste en la descripción y caracterización histórico- epistemológica, fenomenológica, semiótica y estructural del contenido matemático, y se dirige a dar respuesta a la pregunta ¿qué enseñar? Asimismo, el AC consiste en un método para establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procedimientos que conforman un texto de las matemáticas escolares. (Rico, 2013., citado en Preciado, 2016., p.65).

Con lo cual, esta categoría de análisis se refiere a que el profesor, en todo su proceso de orquestación didáctica debe examinar el contenido matemático escolar que pretende enseñar desde

diferentes perspectivas, donde logre atender todo aquello que lo componen, por ejemplo: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología, como se describen a continuación.

- **Estructura conceptual:** Corresponde a la organización conceptual y matemática junto a relaciones emergentes entre los conceptos matemáticos y los procedimientos que dan lugar a la comprensión del contenido matemático escolar que se pretende movilizar.
- **Sistemas de representación:** Alude a las diferentes formas en que se puede representar el contenido matemático escolar, es decir, la transición y movilización entre los diferentes registros, (algebraico, geométrico, aleatorio, entre otros).
- **Fenomenología:** Se centra en las relaciones entre el contenido matemático con fenómenos de la realidad, en los cuales se haga visible la utilidad de los diferentes conceptos y como se involucran para resolver o modelar diversas situaciones de contexto real.

2.2.1.1.3 Análisis didáctico cognitivo

El Análisis Didáctico Cognitivo capacita a los profesores en torno a la revisión de las dificultades, errores, obstáculos y problemas cognitivos relacionados con la comprensión, aprendizaje, enseñanza y evaluación de los conceptos matemáticos en cuestión. (Gómez, Lupiáñez, Marín y Rico, 2007., citado en Preciado, 2016., p.89). En esa perspectiva, esta categoría de análisis se enfoca en que los profesores revisen los aspectos intrínsecamente relacionados con la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático escolar, ya que, por una parte, se enfoca en aquello que se espera que los alumnos aprendan y como el profesor gestiona la enseñanza de los contenidos matemáticos en el aula y que incida de manera significativa en los alumnos. Por otro lado, se encarga de observar y analizar las complejidades que presenta el contenido en términos de su comprensión. Por ende, es necesario examinar la naturaleza de estas complejidades y considerar diversas formas de atenderlas en el aula.

2.2.1.1.4 Análisis didáctico de instrucción

El Análisis Didáctico de Instrucción se centra, en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de evaluación. (Lupiáñez, 2009., p.59). En ese sentido, el profesor debe tener rigurosidad en la gestión de las actividades y recursos para la enseñanza de las matemáticas. Esta gestión implica identificar, definir y recopilar todos los recursos necesarios para la planificación, elaboración y gestión de las actividades matemáticas en el aula.

2.2.1.1.5 Análisis didáctico de actuación

El Análisis Didáctico de Actuación utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo. (Gómez, 2007., p.93). Lo cual significa que su propósito está en función de identificar y caracterizar tanto aspectos significativos como a mejorar de la unidad didáctica, es decir que esta categoría se considera posterior a la intervención del profesor y la puesta en acto de las actividades.

Con todo lo dicho anteriormente, por un lado, se entiende el doble carácter que representa el análisis didáctico en la formación profesional del profesor de matemáticas, dado que, asume el rol de una herramienta teórico y practica en la investigación de la didáctica de las matemáticas e innovación curricular y didáctica.

Por otra parte, es pertinente aclarar que, para el desarrollo de este trabajo, que se concreta en la identificación elementos de carácter conceptual y procedimental a partir de la elaboración de una propuesta de unidad didáctica entorno a la enseñanza de algunas transformaciones geométricas y

construcciones fractales, basado en elementos de la teoría de los Van Hiele y una propuesta de modelo local de análisis didáctico como referentes conceptuales y procedimentales. Se considera alrededor de un análisis didáctico del contenido, sin embargo, se involucran las categorías de análisis didáctico curricular, análisis didáctico cognitivo y análisis didáctico de instrucción, en vista de que centran su mirada especialmente en la etapa de planificación y elaboración de la unidad didáctica, a diferencia de la categoría de análisis didáctico de actuación, que se encarga de atender aspectos posteriores a la implementación y evaluación de aquellas unidades didácticas enfocadas en la enseñanza de las matemáticas.

2.2.1.2 Teoría de los Van Hiele

La teoría de los Van Hiele corresponde a un modelo de razonamiento geométrico, el cual tiene sus bases en una investigación realizada por dos profesores de matemáticas de origen holandés, Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof, mientras sustentaban sus tesis doctorales en la Universidad de Utrech. Ambos presentaron modelos para enseñar y aprender geometría. A lo largo de sus investigaciones se presenta la teoría que expone el modelo de los Van Hiele, y la cual centra su atención en evidenciar cómo se produce todo el proceso de evolución del razonamiento de los alumnos y comprensión de diferentes saberes cognitivos como lugares geométricos.

Cabe señalar que en este modelo emergen algunos aspectos esenciales dentro de todo su desarrollo, primero su esencia está dada por lo descriptivo, ya que permite reconocer la variedad de formas en las que el alumno razona y realiza ejercicios de abstracción sobre un objeto geométrico, además de servir como un soporte instructivo en el quehacer del profesor, pues sistematiza la ruta que en su práctica pedagógica debe seguir en su práctica pedagógica para potenciar el progreso de los alumnos en el aprendizaje de la geometría. Ahora bien, para acercarse a la intencionalidad que pretende el modelo de los Van Hiele, se requiere exponer las principales características de esta teoría, las cuales

son de nivel secuencial, progresivo, intrínseco-extrínseco, lingüística y de emparejamiento, como se describen a continuación.

- **Secuencial:** se requiere avanzar linealmente a través de cada uno de los niveles, para no generar rupturas en el desarrollo del razonamiento geométrico.
- **Progresivo:** Para avanzar de un nivel de razonamiento a otro, es necesario alcanzar las competencias definidas en el nivel anterior.
- **Intrínseco-Extrínseco:** Las competencias y conocimientos alcanzados en determinado nivel de razonamiento, orientaran el desarrollo del siguiente nivel.
- **Lingüística:** Cada nivel de razonamiento se caracteriza por su unicidad en el lenguaje geométrico empleado y la significación en los diferentes niveles.
- **Emparejamiento:** Para abordar determinado nivel de razonamiento, es necesario reconocer el nivel inicial de los alumnos, donde se considera fundamental incorporar las fases de aprendizaje para ese nivel.

Para Vargas, G y Gamboa, R. (2013), la estructura del modelo de los Van Hiele, está dada por cinco niveles cognitivos y cinco fases de aprendizaje como se proponen a continuación (p.82).

2.2.1.2.1 Niveles de razonamiento de los Van Hiele para el aprendizaje de la geometría

Nivel I (Reconocimiento o visualización): Este nivel se refiere a las aproximaciones iniciales que tienen los alumnos en relación a las figuras y objetos geométricos, donde tienden a comprenderse de una manera general, la cual se enfoca en establecer semejanzas y diferencias entre ellos y elementos más comunes, en lugar de preocuparse por atender y comprender las relaciones matemáticas (definiciones, propiedades, etc.) que emergen en ese momento.

Nivel II (Análisis): Este nivel permite tener un acercamiento a la esencia de las figuras, es decir, iniciar a reconocer elementos y relaciones que poseen las figuras por medio de una observación y

experimentación coherente, además se comienzan a percibir propiedades de los objetos geométricos.

Sin embargo, no se están en la capacidad de relacionar las propiedades unas con otras.

Nivel III (Deducción informal): Este nivel tiene la intención de otorgar un significado a las interpretaciones e inferencias que se realizan sobre las figuras y objetos geométricos, reconociendo la incidencia que tienen en el origen de las mismas. Para ello describen los objetos geométricos y figuras de manera formal. Además, tienen la capacidad de reconocer y establecer relaciones entre algunas de sus propiedades.

Nivel IV (Deducción formal): Este nivel permite el acto de utilizar un lenguaje lógico y formal para explicar los diferentes fenómenos que surgen, por lo cual se realizan deducciones y demostraciones, entendiendo las propiedades de las figuras y objetos geométricos, a partir de bases axiomáticas, además de dar lugar a formalizar en niveles más complejos y coherentes en términos de rigurosidad matemática.

Nivel V (Rigor): Este nivel centra sus esfuerzos en poder reflexionar, analizar y conjeturar sobre aspectos relacionados al fundamento de la axiomática de la geometría, principalmente (nociones, definiciones, axiomas, postulados, propiedades, teoremas, etc.)

En ese orden de ideas, a partir de que el profesor logra determinar la importancia que tiene aprovechar las claridades conceptuales que surgen del modelo de los Van Hiele se hace necesario segmentar en lo que se denota como “fases de aprendizaje” para desarrollar diferentes contenidos didácticos en el aula.

2.2.1.2.2 Fases de aprendizaje de los Van Hiele para la enseñanza de la geometría

Fase I (Información): En esta primera fase el rol del profesor es acercarse a todos los saberes cognitivos que los alumnos poseen, producto de enseñanzas anteriores en el aula o las prácticas y construcciones sociales que han desarrollado respecto al objeto de estudio de forma empírica.

Fase II (Orientación dirigida): Esta fase muestra la regulación que subyace entre las diferentes situaciones que se plantean en el aula y las intervenciones que el profesor realiza para direccionar de forma adecuada a su respectivo desarrollo.

Fase III (Explicitación): Aquí se pone de manifiesto la idea de generar ambientes de discusión y reflexión entre el profesor y los alumnos en función de todo lo que se comprende y se dificulta en la interpretación de la esencia del contenido matemático estudiado.

Fase IV (Orientación libre): Esta fase se encamina al hecho de que los alumnos estén en capacidad de determinar la aplicabilidad e influencia que tiene el objeto de estudio en diferentes contextos y del mismo modo que ellos estén en la capacidad de manipularlos para abordar alguna situación en particular.

Fase V (Integración): En esta última fase propone que el profesor en su quehacer pedagógico logre diseñar una ruta en la cual le permita a los alumnos recopilar todo lo aprendido a través de las otras fases y cuente con un punto de vista más amplio, coherente y estructurado respecto al objeto de estudio abordado.

Con todo lo descrito anteriormente, se hace explícita la importancia que tiene incorporar el modelo de los Van Hiele en el desarrollo de esta investigación, puesto que permite llevar al aula algunas actividades que privilegian desarrollar y fortalecer en una población específica contenidos propios de la geometría euclidiana, específicamente, las transformaciones geométricas en plano. Cabe aclarar que los alumnos deben haber tenido alguna experiencia con la geometría euclidiana, ya que se espera que los alumnos logren fortalecer bases de dicha geometría a través del tratamiento y manipulación de contenidos matemáticos escolares de mayor grado de complejidad, en términos de su nivel de abstracción.

Es aquí donde la teoría de los Van Hiele a partir de sus niveles cognitivos permite reflexionar sobre lo que aprenden los alumnos en la aplicación de la unidad didáctica. Ahora bien, en la trayectoria de planificación y elaboración de las actividades de enseñanza de la UD de esta propuesta de trabajo de grado, se propone avanzar hasta el nivel II (Análisis) de la propuesta cognitiva de los Van Hiele, dado que alcanzar este nivel, en términos del aprendizaje de parte de los alumnos, significa aproximarse a las figuras y objetos geométricos (construcciones fractales), además de reconocer elementos y relaciones que posee cada construcción de objeto fractal y la incidencia de las transformaciones geométricas de la geometría euclidiana concretadas en la unidad didáctica. Todo esto dará lugar, para reconocer cuáles son las experiencias en cada uno de los participantes al momento de superar cada paso y nivel donde se encuentran.

El modelo de los Van Hiele, es un modelo suficiente y pertinente para el propósito general de este trabajo de grado, que se enfoca en reconocer conocimientos y procedimientos geométricos y didácticos del profesor de matemáticas cuando se enfrenta a situaciones de innovación educativa (curricular y didáctica), a través de la orientación de carácter instruccional que ofrece. A partir de las fases del modelo de aprendizaje, donde se pretende desarrollar hasta la fase V (integración), se ayuda al profesor en su quehacer pedagógico a reconocer elementos que lo llevarán a entender cómo debe ser su participación en el diseño y movilización de este contenido matemático escolar en el aula.

2.2.1.3 Unidad Didáctica (UD)

En palabras de Solano, S y Bedoya, E. (2013) una propuesta de unidad didáctica se interpreta como una unidad de programación e intervención profesor, la cual se constituye a partir de una sistematización de una serie de actividades para la enseñanza de un contenido matemático escolar, la cual se concreta a partir de integrar elementos teóricos y prácticos relacionados al quehacer del profesor producto de su formación académica y profesional. Ahora bien, en el proceso de planificación y elaboración de la UD que se pretende a lo largo desarrollo de este trabajo de grado, se propone una que

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

estructure algunos tópicos de la geometría euclidiana que serán aplicados en la exposición de una geometría más abstracta y analítica, donde se prioriza la construcción de algunos objetos fractales a través de Sistemas Iterados de Funciones (SIF) para desarrollar Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos (p. 408).

Para ello, se busca sistematizar algunas de las actividades de enseñanza que se desarrollan en un tiempo determinado para alcanzar unos objetivos en particular. Cabe mencionar que, la UD está orientada a un grupo de alumnos de grado once y se enfoca principalmente en los conceptos matemáticos de: transformaciones geométricas (rotación, traslación, homotecias) y Sistemas Iterados de Funciones (SIF).

En concordancia a lo que sugiere Bedoya, E. (2022) Con esta UD se pretende que los alumnos, además, de fortalecer contenidos matemáticos de la geometría euclidiana, adquieran una cierta experiencia en el reconocimiento de otro tipo de geometría, más analítica y topológica pero igual de funcional en términos de su aprendizaje (p.31). Cabe aclarar que la estructura de unidad de didáctica que orienta el desarrollo de este trabajo de grado, está compuesta a partir de:

- Título
- Presentación y descripción general
- Análisis curricular (concreciones curriculares, modelo didáctico pedagógico).
- Objetivos (generales y específicos).
- Recursos (humanos, bibliográficos, tecnológicos, etc.)
- Análisis didáctico de contenido.
- Análisis cognitivo (competencias, errores y dificultades).
- Análisis de instrucción: Orientaciones didácticas (basadas en el modelo didáctico pedagógico).

- Secuencia de actividades (Actividades de introducción, motivación y diagnóstico; actividades de desarrollo; actividades de evaluación y actividades de apoyo y ampliación).
- Reflexión autocrítica y evaluación de la unidad.
- Referencias bibliográficas.

2.2.2 Dimensión Matemática

2.2.2.1 Geometría Fractal

Primeramente, en esta propuesta de trabajo de grado se logra poner de relieve algunos elementos de la geometría fractal que inciden en la construcción de objetos fractales a través de Sistemas Iterados de Funciones (SIF), los cuales serán el medio para la elaboración la propuesta de unidad didáctica respectiva basada en transformaciones geométricas en el plano ($\mathbb{R}^2$). Especialmente se concretan nociones asociadas a los espacios métricos y el espacio donde se encuentran los fractales. Cabe aclarar que, resulta fundamental comprender los espacios métricos, en particular el espacio donde “viven” los fractales, como una fundamentación matemática que privilegia comprender, estudiar y describir diferentes estructuras irregulares a través de diferentes propiedades, y conceptos como se precisan más adelante.

A continuación, se describen las principales definiciones, lemas, proposiciones y teoremas que emergen en la exposición de la geometría fractal desde la perspectiva de Sabogal, S y Arenas, A. (2011), Barnsley, M. (1988) y Vasquez, A. (2016).

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Tabla 1. Organización conceptual sobre los fractales.

Fractales: Se definen como un conjunto de formas generadas a partir de un proceso de repetición a diferentes escalas.	Características: A continuación, se describen las principales características de orden conceptual, relacionadas a los objetos propios de la geometría fractal.
Autosimilitud: Se refiere a la semejanza interna (estructuras y patrones) que poseen los fractales desde diferentes escalas.	Estricta: Representaciones idénticas del fractal a diferentes escalas. Aproximada: Representaciones similares del fractal a diferentes escalas. Estadística: Representaciones que muestran similitudes estadísticas unos con otros mediante medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala.
Dimensión: Es una medida que se emplea para describir diferentes estructuras fractales en términos de su complejidad.	Euclidiana: Se basa número de coordenadas requeridas para caracterizar y especificar un objeto fractal. Topológica: Se enfoca cubrir los objetos fractales mediante conjuntos abiertos de radio pequeño. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch: Corresponde a la generalización métrica del concepto de dimensión de un espacio topológico, que permite definir una dimensión no entera para un objeto fractal.
Iteración: Las iteraciones consisten en repetir n veces la misma figura o patrón. En los fractales lo que se itera son las funciones o el patrón generador dependiendo del fractal.	Algebraica: Consiste en una utilizar una función como unidad procesadora. Geométrica: Se basa en una regla aplicada a una figura geométrica o en alguna parte específica de ella. Principalmente, la regla conlleva a una “ruptura” en la figura y es en estos pasos de fragmentación que la regla se aplicará indefinidamente.
Linealidad: Los objetos y conjuntos fractales se clasifican según su linealidad.	Lineales: Corresponden a las líneas rectas que constituyen la forma geométrica sobre las que se le aplica. Son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito. No lineales: Corresponden a aquellos que muestran una estructura similar, pero no son exactamente igual a su original, dado que son generados a partir de distorsiones complejas, creando alteraciones no tan solo de posición, tamaño y orientación.

Fuente: Vásquez, A. (2016). Introducción a la geometría fractal.

Definición 1. (Espacio métrico): Un espacio métrico es una pareja (X, d) , donde X corresponde a un conjunto no vacío de objetos que denotaremos como puntos y d es una función:

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

llamada métrica o distancia en el espacio, la cual satisface los siguientes axiomas:

$$EM1: \forall x, y \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y,$$

$$EM2: \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2, d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

Definición 2. (Sucesión convergente): Sea (X, d) un espacio métrico y $(S_n)_n$ una sucesión en X .

Decimos que $(S_n)_n$ converge si existe $S \in X$, de forma que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N} \geq N \rightarrow d(S_n, S) < \varepsilon,$$

donde S es llamado límite de la sucesión y se denota como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)_n = S \text{ ó } (S_n)_n \rightarrow S.$$

Si la sucesión no converge diremos que es divergente.

Definición 3. (Sucesión de Cauchy): Sea (X, d) un espacio métrico, $(S_n)_n$ una sucesión en X . Se dice que $(S_n)_n$ es una sucesión de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \in \mathbb{N} \geq N \rightarrow d(S_m, S_n) < \varepsilon.$$

Definición 4. (Espacio métrico completo): Un espacio métrico (X, d) se dice que es completo, si toda sucesión de Cauchy en X , converge.

Teorema 1. $(\mathbb{R}^2, d)$ es un espacio métrico donde d se define como:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$$

Definición 5. (Conjunto compacto): Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Decimos que S es compacto, si toda sucesión en S admite una subsucesión convergente cuyo límite está en S .

Definición 6. (Contracción): Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$. Decimos que f es una contracción si $\exists r \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1$ de forma que para cualesquiera $x, y \in X$ tenemos que:

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y).$$

Si se cumple esto, entonces la constante r se llama factor de contracción de f .

Teorema 2. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f: X \rightarrow X$ una contracción, entonces existe un único punto fijo $a \in X$ tal que $f(a) = a$. Además, $\forall x \in X$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = a$.

Definición 7. (Sistema Iterado de Funciones): Un sistema Iterado de Funciones (SIF) es una estructura de la forma $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$, donde (X, d) es un espacio métrico completo y cada $f_i = X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N$, corresponde a una contracción.

A partir de este momento centraremos la atención en el espacio métrico completo $(\mathbb{R}^2, d)$ para la construcción de objetos fractales en el plano.

Definición 8. Definimos $H(\mathbb{R}^2)$ como la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$H(\mathbb{R}^2) := \{K \subseteq \mathbb{R}^2 : K \text{ es compacto}, K \neq \emptyset\}$$

El conjunto $H(\mathbb{R}^2)$ es conocido como el espacio donde viven los fractales.

En este espacio definimos la función $\widetilde{d}: H(\mathbb{R}^2) \times (\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, como $\widetilde{d}(A, B) = \max \{ \min \{ \widetilde{d}(a, b) : b \in B \} : a \in A \}$, para $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ compactos y no vacíos.

Debe notarse que $\tilde{d}(A, B) = 0$ siempre que $A \subseteq B$, esto muestra que $\tilde{d}$ no es una métrica para $H(\mathbb{R}^2)$, sin embargo ayuda a construir lo que se conoce como métrica de Hausdorff para $H(\mathbb{R}^2)$, como se aprecia en el siguiente teorema.

Teorema 3. El espacio $(H(\mathbb{R}^2), h)$ es completo donde $h: H(\mathbb{R}^2) \times H(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como: $h(k_1, k_2) = \max \{ \tilde{d}(k_1, k_2), \tilde{d}(k_2, k_1) \}, \forall k_1, k_2 \in H(\mathbb{R}^2)$.

En consecuencia, se expone el siguiente teorema, el cual asume un rol fundamental en el proceso de planificación y elaboración de la propuesta de unidad didáctica que se concreta más adelante, puesto que se utilizan los fractales como el medio para acceder y comprender las transformaciones geométricas, específicamente rotaciones, traslaciones y homotecias.

Teorema 4. Dado un SIF $\{X; F_1, F_2, \dots, F_N\}$ se define:

$$F: H(\mathbb{R}^2) \rightarrow H(\mathbb{R}^2)$$

$$K \rightarrow F(K) =: \bigcup_{i=1}^N f_i(K).$$

Entonces F es una contracción.

De acuerdo a los teoremas anteriores, entonces existe un único punto $A \in H(\mathbb{R}^2)$ tal que:

$$A = F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A).$$

Adicionalmente, $\forall K \in H(\mathbb{R}^2)$ tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(K) = A.$$

Donde el conjunto A corresponde al atractor del SIF (Sistema Iterado de Funciones).

Entenderemos como conjunto fractal en $\mathbb{R}^2$ a los conjuntos de $H(\mathbb{R}^2)$ que son atractores de SIF's.

Este teorema logra dar cuenta de que los Sistemas Iterados de Funciones (SIF) toman como punto de partida un conjunto invariante de funciones y que, al aplicarlas de manera iterativa a cualquier conjunto compacto, la secuencia de conjuntos resultante o producción del mismo siempre va a converger a un conjunto fractal llamado el atractor del SIF, además de garantizar su existencia y unicidad. Este resultado es de gran relevancia dentro de los intereses de esta propuesta de investigación e innovación curricular y didáctica, puesto que permite integrar algunas transformaciones geométricas, que son necesarias para efectuar diferentes construcciones fractales y así estudiar el comportamiento y tratamiento de las mismas en diferentes contextos asociados al mundo fractal.

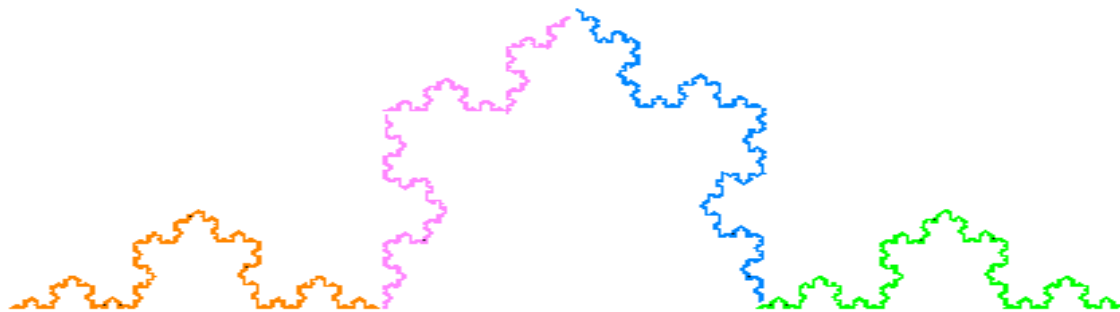
Se ha realizado una presentación formal, desde un punto de vista matemático, que permite visualizar cómo se involucran diferentes conceptos de carácter más abstractos, analíticos y topológicos en torno a la construcción de fractales a través de un proceso iterativo y su relación con la geometría plana.

2.2.2.2 Algunos fractales clásicos

Es importante presentar algunas de las construcciones de objetos fractales más reconocidas dentro de las investigaciones sobre este tipo de geometría, donde destacan, la Curva de Koch y el Triángulo de Sierpiński.

Curva de Koch: Helge Von Koch fue un matemático que propuso la construcción del fractal “Curva de Koch”, como una curva continua que se caracteriza específicamente por no tener ninguna recta o segmento de recta uniforme, sino por estar formada por múltiples pliegues y dobleces que la hacen parecerse a una costa natural. Esta curva presenta una complejidad similar a la de las costas naturales, con patrones de pliegues y dobleces que se repiten a diferentes escalas.

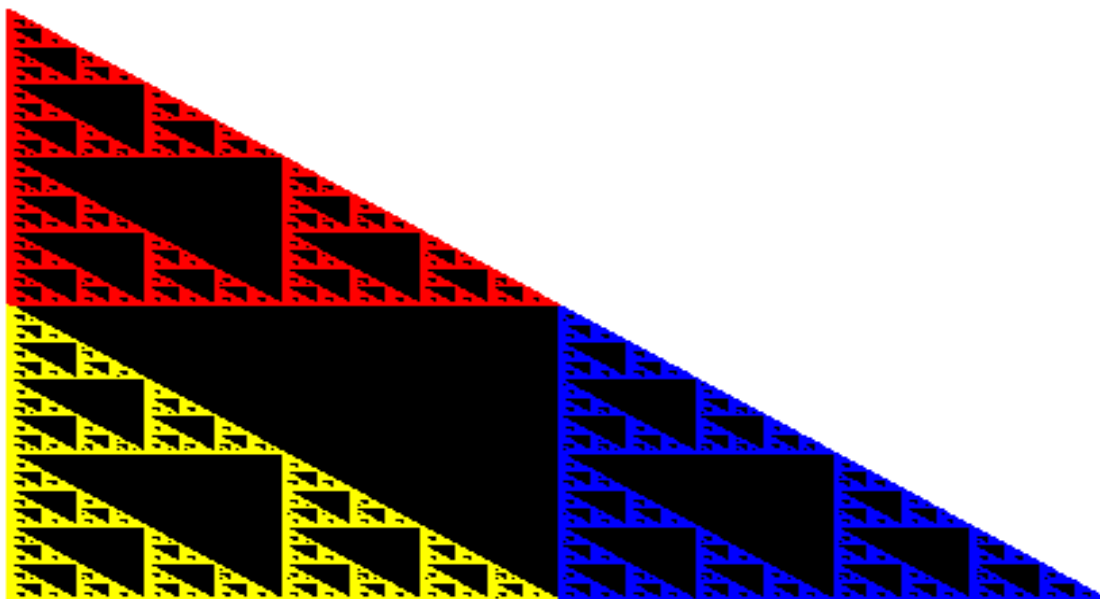
Figura 5. Ilustración de la Curva de Koch.



Fuente: Elaboración propia.

Triángulo de Sierpiński: El matemático Waclaw Sierpiński se enfocó en el estudio de diferentes formas de fractales, y fue así como surgió el triángulo de Sierpiński. Este objeto fractal puede descomponerse en tres figuras congruentes, cada una con la mitad del tamaño de la figura original. Si se duplica el tamaño de una de las partes, se puede recuperar el triángulo inicial. El triángulo de Sierpiński se compone por tres copias autosimilares de sí mismo, lo que lo hace un fractal con la propiedad de autosimilitud.

Figura 6. Ilustración del Triángulo de Sierpiński.



Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se detallan aspectos metodológicos y prácticos de carácter transversal en el marco del desarrollo de la propuesta de trabajo de grado, con el objetivo de concretar una propuesta de innovación curricular y didáctica. Para este trabajo, se considera fundamental emplear un diseño metodológico que se enmarca en una propuesta de modelo local de análisis didáctico y la sistematización de experiencias docentes, una estrategia metodológica de investigación-acción basada en la investigación cualitativa en educación matemática.

3.1 Modelo local de análisis didáctico (AD) como herramienta metodológica

El Modelo local de análisis didáctico desde este trabajo de grado se interpreta como una estrategia de formación profesional del profesor de matemáticas y de innovación curricular y didáctica, la cual contribuye a la investigación en el campo de la educación matemática, dado que, se concibe como un modelo que contribuye a mejorar la actividad investigativa y práctica para la enseñanza de las matemáticas, permitiendo fortalecer la práctica profesional continua del profesor. Es decir que, el modelo local de análisis didáctico representa una herramienta metodológica indispensable para proponer contenidos matemáticos escolares en el aula, pues su implementación permite al profesor de matemáticas ahondar en el conocimiento matemático con el propósito de analizarlo desde diferentes perspectivas, entre ellas un punto de vista didáctico en el cual se contemplan diferentes escenarios con el objetivo de tener mayor claridad para planificar y elaborar la unidad didáctica.

Ahora bien, es importante mencionar que el modelo local de análisis didáctico que se implementa en este trabajo de grado consiste en la selección de un contenido matemático e

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

interiorizarlo desde las diferentes categorías que comprende el análisis didáctico. Por tal motivo, se definen unas metas u objetivos de aprendizaje que permiten detallar y describir aspectos relacionados a las transformaciones geométricas y construcciones de objetos fractales a través de SIF. En primer lugar, se realiza una caracterización desde una dimensión curricular, en función del grado de escolaridad donde se desarrollará la propuesta, esto con la intención de comprender de qué manera se logra integrar el contenido matemático con los tópicos abordados en este ciclo escolar. También desde una dimensión didáctica, que permite visualizar la estructura conceptual, representaciones y fenomenología del contenido matemático, y desde nivel cognitivo para precisar las dificultades en su comprensión. Así mismo, observar aspectos instruccionales, asociados a la utilidad de los recursos didácticos (manipulativos y digitales) y con ello poder planificar, organizar y elaborar la unidad didáctica respectiva.

3.2 Sistematización de experiencias docentes

Para el desarrollo de este trabajo, se considera pertinente abordar la investigación desde la sistematización de experiencias docentes, entendida esta como una estrategia y herramienta metodológica que se enfoca en investigaciones de carácter cualitativo y a su vez, contiene otras metodologías consigo, en este caso la investigación en educación matemática basada en investigación-acción, la cual es una estrategia metodológica, que integra diversos componentes de carácter teórico y práctico (investigación, quehacer pedagógico y reflexión), permitiendo generar conocimientos a través del análisis relacionado a todo el proceso de orquestación didáctica del profesor de matemáticas (planificación, elaboración y aplicación). Cabe mencionar que la investigación-acción tiene dentro de sus propósitos priorizar la transformación e innovación curricular y didáctica asociada a la práctica profesional del profesor de matemáticas, con lo cual permite reflexionar sobre su misma práctica.

De acuerdo a Bedoya, E (2013) la sistematización de experiencias docentes que se recupera en este trabajo se ha organizado a partir de:

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. Preparación y planificación metodológica del proceso de sistematización.
2. Recuperación/reconstrucción de la experiencia: documentación y fundamentación conceptual.
3. Análisis e interpretación de la información y del proceso realizado (de tal forma que se movilicen y desarrollen conocimientos fundamentales sobre la práctica o la experiencia).
4. Potencialización y socialización o comunicación de los resultados asociados con la experiencia, su sistematización (incluyendo propuestas de posibles mejoras) y fundamentación conceptual y procedimental.

En síntesis, para el desarrollo de este trabajo de grado y apoyado en la propuesta de (Bedoya, E, 2013) relacionada a la sistematización de una experiencia docente proponen cuatro fases a ejecutar, como se precisan a continuación:

Fase de planificación: Dentro de esta fase, se propone realizar un análisis preliminar alrededor del contenido matemático escolar a desarrollar, considerando el marco conceptual previamente definido, es decir que, corresponde al proceso donde se delimita la problemática de investigación. Adicionalmente, se definen los intereses de la investigación y se precisan aspectos conceptuales, metodológicos y procedimentales que orientarán el proceso de sistematización de experiencia docente. Posterior a ello, se elabora el marco conceptual que a priori, logra atender a las necesidades e intereses de este trabajo de grado, desde tres dimensiones (curricular, didáctica y matemática).

Fase de Acción: Esta fase considera la planificación, elaboración y aplicación (a modo de prueba piloto) de la unidad didáctica, para ello, se ahonda en los elementos (teóricos y prácticos) que permitan la planificación y posterior elaboración de la unidad didáctica. Esta fase se realiza a la luz de la teoría de los Van Hiele en relación a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, junto con una propuesta de

modelo local análisis didáctico y las subcategorías que esta teoría comprende. Las cuales dan lugar a observar de una forma más crítica diferentes aspectos tales como los contextos (curricular, institucional, aula), el contenido matemático (construcciones de objetos fractales), los participantes activos (profesor y alumnos) y los recursos didácticos (manipulativos y tecnológicos) que constituyen el diseño de la unidad didáctica.

Fase de Observación: Para esta fase, el propósito consiste en una evaluación generalizada de la experiencia docente en la aplicación de la unidad didáctica, donde se centra la mirada en la interacción en el aula, las tareas y recursos, y en general las dinámicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en los diferentes registros obtenidos (digitales y físicos), los cuales otorgaran un punto de partida para pensar en modificaciones posteriores de la unidad didáctica.

Fase de Reflexión: En esta fase, se tiene la intención reflexionar de forma precisa entorno al objetivo central de la investigación, el cual consiste reconocer elementos conceptuales (teóricos) y procedimentales (prácticos) para elaborar una propuesta de unidad didáctica, enfocada en el propósito de desarrollar pensamiento geométrico relacionado con el estudio de las transformaciones geométricas y la construcción de objetos fractales en grado once de educación media. Y a partir de esto, plantear algunas consideraciones y reflexiones desde diferentes perspectivas ligadas a la práctica profesional del profesor de matemáticas y proponer posibles mejoras en diferentes facetas de la trayectoria.

3.2.1 Caracterización general: contextos, participantes y recolección de la información

La caracterización general, en el cual se desarrolla la sistematización de experiencias docentes, se define a través de diferentes escenarios tales como: contexto sociocultural, contexto curricular institucional y contexto del aula, como se proponen a continuación.

Contexto sociocultural del colegio católico: El Colegio Católico (sede principal y única sede), es una institución educativa bilingüe, privada y personalizada. Se encuentra ubicado en la zona urbana

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

(sur), de la ciudad de Santiago de Cali, del departamento Valle del Cauca. Específicamente en la Cra. 49 No.9B-42. Por lo general el nivel socioeconómico de los alumnos es de estrato 4 y 5. La población estudiantil de dicho grado de escolaridad, cuenta con un total de 17 alumnos, entre los 16 y 17 años de edad, la mayor parte de la población es de etnia mestiza.

Contexto curricular institucional del colegio católico: A través del manual de convivencia se concretan algunos aspectos que permiten ilustrar al Colegio católico, como sitio seleccionado para el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado.

Historia: El Colegio Católico abre sus puertas por primera vez el 4 de noviembre de 1954 en el entonces convento de las hermanas Vicentinas, ubicado en la Carrera 5 # 6–17. Su fundadora Rosalba Santander de Gutiérrez es pedagoga del Instituto Pedagógico Nacional de Bogotá, hoy Universidad Pedagógica Nacional, donde gracias a su directora Francisca Radke quien vincula al pedagógico a docentes del Gimnasio Moderno. Tiene por maestros a la vanguardia de la Escuela activa en Colombia, entre ellos a Manuel Piquero, Henry Yerly, Tomás Rueda Vargas, Rafael Mallarino, don Agustín Nieto Caballero fundador del Gimnasio Moderno y a Virginia Gutiérrez de Piñeres.

Modelo pedagógico: pedagogía constructivista.

Misión: Trabajar en equipo por el desarrollo integral de alumnos y alumnas a través del diseño de planes de área, proyectos pedagógicos y actividades complementarias para ser implementados en clase y en horario de actividades de extensión consecuentes con los siguientes criterios:

- Fortalecer el concepto religioso y la creencia en Dios como único camino hacia la felicidad.
- Fomentar la fraternidad, la convivencia, el amor entre las personas y el respeto a la dignidad humana de mujeres, hombres, adultos mayores, jóvenes, niños y niñas.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

- Estimular el reconocimiento en cada ser humano de una gama de cualidades que se fortalecen con el trabajo diario y de debilidades que se superan con esfuerzo, voluntad y dedicación.
- Estimular el desarrollo intelectual, emocional y espiritual del individuo para el logro de su equilibrio y armonía personal.
- Estimular la actividad creadora y canalizarla hacia el trabajo académico, científico, artístico y deportivo.
- Fomentar el respeto y aprecio por nuestra identidad nacional: Orígenes, cultura e historia.
- Concientizar y fomentar el respeto, la defensa y el cuidado de la naturaleza, de todas sus criaturas, sus recursos, el agua y el medio ambiente.
- Concientizar sobre la responsabilidad e importancia de la participación para el cumplimiento de los DEBERES CÍVICOS y el respeto de los DERECHOS CIUDADANOS.
- Estimular y acompañar una actitud de crecimiento para ser cada día mejor, mejor y mejor.

Visión: La visión del Colegio católico se concreta a partir de los siguientes criterios:

- Formar niños y jóvenes capaces de vivir en armonía con ellos mismos, con los demás, con la naturaleza y con Dios.
- Formar personas autónomas y líderes, capaces de participar positivamente en el desarrollo social del Valle del Cauca, de Colombia y del mundo, gente integral con responsabilidad y compromiso de vivir, compartir y proyectar la paz.
- Estimular la excelencia académica y el desarrollo intelectual, emocional y espiritual de nuestros estudiantes.

Principios y valores: Los principios y valores del colegio católico se resumen en:

- El Colegio Católico es un espacio para el cuerpo y el espíritu, donde se forjan hábitos de vida y amor al estudio.
- Educamos al individuo para sí mismo, para ser feliz y hacer felices a los demás, porque quien se construye a sí mismo, se proyecta positivamente a los demás en todas sus dimensiones física, intelectual, emocional, espiritual y social.
- Trabajamos por la excelencia académica y el desarrollo del conocimiento de nuestros estudiantes.
- Aprender haciendo, creando experiencias y actividades por medio del juego, las manualidades y las bellas artes.
- Protegemos y cuidamos el agua, el aire, los bosques y a todos los seres de la naturaleza.
- Cultivamos los valores de la honestidad, la convivencia, el amor, la solidaridad, el respeto y la dignidad humana.
- Mi cuerpo es el templo de la vida, educarlo es dar al cuerpo y al alma toda la belleza y perfección de la que son capaces.
- Dios fuente de felicidad y de todas las cosas.
- Soy el universo.

Contexto del aula del colegio católico: La aplicación de la unidad didáctica se realizó en la sala de sistemas del Colegio Católico, la cual se encuentra localizada en la zona de matemáticas de la institución. Cuenta con un total de 18 computadores, aire acondicionado, vídeo beam, 18 sillas, además de un tablero grande de color blanco de acrílico, acompañado de una mesa y un computador portátil, el cual es asignado para las presentaciones e indicaciones por parte del profesor a cargo.

Recolección de la información: El proceso de recolección de la información que se contempla para el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado considera los siguientes aspectos:

Fase de planificación: Dentro de esta fase, el proceso de recolección de la información se considera a partir de una revisión documental detallada, considerando referentes de orden curricular, didáctico y matemático:

1. Documentos institucionales propuestos por el MEN, PEI, plan de área de la institución educativa, junto a los textos matemáticos escolares utilizados para el desarrollo de las clases de matemáticas.
2. Modelo de los Van Hiele y una propuesta de modelo local de conocimiento y de análisis didáctico.
3. Contenidos propios de la geometría fractal desde la perspectiva de los Sistemas Iterados de Funciones (SIF).

Fase de acción: En esta fase el proceso de la recolección de la información está en función de la elaboración de la unidad didáctica, para lo cual, se integran como herramientas metodológicas los referentes descritos en la fase de planificación, además, otorgando una caracterización más precisa del escenario donde se dará la puesta en acto de la propuesta didáctica. Para lo cual se realizará un trabajo de campo que consiste en visitar la I.E con el objetivo de ahondar en los diferentes contextos (curricular, institucional, aula), el contenido matemático para la construcción de objetos fractales, los participantes activos (profesor y alumnos) y los recursos didácticos (manipulativos y tecnológicos).

Fase de observación: En esta fase, el proceso de recolección de la información se centra específicamente en todos los registros físicos y audiovisuales que se puedan obtener en el desarrollo de la aplicación (grabaciones de las dos sesiones de clase, producciones escritas y digitales) que permitan responder al propósito central de la investigación.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Fase de reflexión: En esta fase final, se reflexiona desde una perspectiva didáctica, donde se analiza la incidencia y alcances del modelo de los Van Hiele, en la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas y construcciones fractales. Por otro lado, se exploran las implicaciones de integrar el modelo de los Van Hiele en conjunto con un modelo local de análisis didáctico, particularmente las categorías relacionadas con la planificación y elaboración de la unidad didáctica. Estas categorías son especialmente relevantes, dado que se alinean con los objetivos de la investigación.

Asimismo, se ofrecen algunas conclusiones y generalidades basadas en la aplicación de la unidad didáctica a modo de prueba piloto llevada a cabo en el marco de esta propuesta didáctica, en vista de que responden a los objetivos específicos de la investigación. Sin embargo, es importante destacar que se proporcionan algunos detalles sobre los resultados obtenidos en dicha prueba. Adicionalmente, se proponen algunas reflexiones finales basadas en la experiencia personal e investigativa en la realización de esta propuesta de trabajo de grado, resaltando su contribución a la investigación en la línea de didácticas de las matemáticas (DdM) en términos de innovación y transformación curricular y didáctica.

CAPÍTULO IV

En este capítulo se presentan los resultados producto de una investigación que busca reconocer elementos teóricos y prácticos involucrados en la elaboración de una unidad didáctica sobre algunos tópicos propios de la geometría euclidiana y fractal. Para ello, se utilizan las propuestas teóricas y metodológicas de los Van Hiele, así como un modelo local de análisis didáctico.

4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Teoría de los Van Hiele y el diseño integrado de una propuesta de modelo local de análisis didáctico (AD) como estrategia en la elaboración de una unidad didáctica (UD) para la enseñanza de transformaciones geométricas a través de la construcción de objetos fractales

Como parte de la planificación y elaboración de la unidad didáctica se espera, los alumnos logren alcanzar el nivel II (Análisis) del modelo de los Van Hiele. Por lo tanto, se parte del nivel I (reconocimiento o visualización), donde los alumnos tendrán la capacidad de aproximarse a diferentes objetos fractales, reconociendo generalidades de las estructuras, pero aun sin ahondar en los conceptos, propiedades y relaciones que tienen con diferentes fenómenos o modelos de la naturaleza, también deben visualizar cómo se recuperan los elementos propios de la geometría euclidiana para construir fractales. En el nivel II (Análisis), el objetivo es que los alumnos puedan interiorizar entorno al proceso de construcción de objetos fractales de manera iterativa y como se involucran algunas transformaciones geométricas, especialmente las rotaciones, traslaciones y homotecias en diferentes construcciones fractales.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

A continuación, se describen brevemente cada una de las fases a abordar con el desarrollo de las actividades concretadas en la propuesta de unidad didáctica.

Fase I (Información): Inicialmente, en la unidad didáctica, para reconocer los saberes previos de los alumnos, se define un primer momento que se ha denominado “exploremos juntos”.

Específicamente en la actividad 1 y 2, se proponen figuras e imágenes, en conjunto con algunas preguntas, para que los alumnos conozcan, observen, describan y relacionen los principales elementos de la geometría fractal.

Fase II (Orientación dirigida): En el momento “representación y modelación”, específicamente en la actividad 3, se busca que los alumnos exploren el proceso iterativo de construcción de algunos objetos fractales, como el Triángulo de Sierpiński y la Curva de Koch. Esto se logra a través del juego denotado como “semilla- producción” donde los alumnos reconocen la construcción de fractales a partir de una semilla inicial y un conjunto de funciones previamente definidas. Para ello, se proponen cuatro situaciones, con el propósito de introducir a los alumnos a la construcción de objetos fractales a través de Sistemas Iterados de Funciones (SIF).

Fase III (Explicitación): En los momentos “exploremos juntos, representación y modelación, y socialización”, de manera concreta en las actividades 1,2,3, 7 y 8, se lleva a cabo la fase de explicitación. En esta fase se plantean una serie de cuestionamientos en forma de preguntas, descripciones y reflexiones, con el objetivo de generar ambientes de discusión y comentarios sobre el trabajo realizado durante el desarrollo de la unidad didáctica. Se espera que los alumnos reconozcan los errores cometidos y reflexionen sobre los diferentes conceptos abordados. Adicionalmente, estas actividades brindan a los alumnos la oportunidad de reflexionar sobre su trabajo a lo largo de las actividades previas.

Fase IV (Orientación libre): En el momento “representación y modelación”, específicamente en la actividad 4, se propone la construcción de algunos objetos fractales. A diferencia de la actividad 3, ésta se realiza con la ayuda del recurso digital didáctico GeoGebra. Esta actividad permite a los alumnos aplicar los conocimientos adquiridos hasta el momento. En esta fase, se fomenta el trabajo autónomo, ya que se espera que utilicen sus propias estrategias para desarrollar cada una de las situaciones previamente descritas. La intervención del profesor es mínima, ya que se busca generar procesos de reflexión en lugar de procedimientos mecánicos, para que los alumnos encuentren utilidad en lo aprendido.

Fase V (Integración): En el momento “aplicación de los fractales”, específicamente en la actividad 5 y 6, se plantean dos actividades con el objetivo de evaluar si se han alcanzado los objetivos de aprendizaje establecidos en la unidad didáctica. Estas actividades consisten en reconocer discriminadamente el proceso iterativo de construcción de objetos fractales, es decir, definir una semilla junto con un Sistema Iterado de Funciones. Primero se realiza a través de una representación pictórica de un fractal en su proceso iterativo indefinido, y luego a través de la producción de un posible fractal por parte de los alumnos.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

4.1.1 Análisis didáctico del currículo: Contextualización curricular

El modelo local de análisis didáctico del currículo que se propone alrededor de este trabajo, se encarga de realizar una serie concreciones de orden curricular para su desarrollo.

Tabla 2. Esquema MPD. (metas, procesos y desempeños).

Contenido matemático	Conceptos previos y medios	Procesos generales	Estándar	Derecho Básico de Aprendizaje	Evidencias de aprendizaje	Tiempo
Geometría Euclidiana: Transformaciones geométricas: rotación, traslación y homotecia. Geometría	Conceptos Ángulos. Polígonos. Sistemas de coordenadas cartesianas y polar. Medios Geometría Fractal: construcciones de objetos fractales como atractores de Sistemas Iterados de Funciones (SIF).	Modelación, Comunicación, Resolución y planteamiento de problemas.	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.	-Reconoce y utiliza distintos sistemas de coordenadas para modelar. -Compara objetos geométricos, a partir de puntos de referencia diferentes. -Explora el entorno y lo representa mediante diversos sistemas de coordenadas.	El tiempo que se considera adecuado para aplicar la unidad didáctica, tiene como límite 4 horas pedagógicas, equivalentes a dos secciones de clase.

Fuente: Ministerio de Educación Nacional. (1998, 2006, 2016). Elaboración propia.

4.1.2 Análisis didáctico de contenido

El modelo local de análisis didáctico del contenido contemplado para este trabajo de grado, se enfoca en observar de manera rigurosa el contenido matemático escolar a desarrollar, y para ello se

hace énfasis en tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología, en ese orden.

Estructura conceptual de las transformaciones geométricas

Ahora bien, para representar algebraicamente y geométricamente aquellas transformaciones lineales en el plano ($\mathbb{R}^2$), es necesario introducir los conceptos de: espacio vectorial, transformación lineal, isomorfismo, matriz y vector. Estos constituyen una parte fundamental en términos de la estructura conceptual de las transformaciones geométricas y, por ende, en el proceso iterativo de construcción de diferentes objetos fractales lineales. Además, de que definen los movimientos en el sistema de coordenadas cartesiano.

Espacio vectorial: Sea V un conjunto no vacío en el cual se han definido dos operaciones, llamadas *suma* y *producto por escalar* (dados los elementos u y v y un escalar λ de $\mathbb{R}$, la suma de u y v la denotamos $u + v$ y el producto por escalar de λ por u lo denotamos λu). Si las siguientes propiedades o axiomas se satisfacen para todo u, v y $w \in V$ y para todo par de escalares α y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces se dice que V es un *espacio vectorial real* y sus elementos son llamados vectores.

1. $u + v \in V$ (propiedad clausurativa para la suma).
2. $u + v = v + u$ (propiedad conmutativa para la suma).
3. $(u + v) + w = (v + w) + u = (w + u) + v$ (propiedad asociativa para la suma).
4. Existe un elemento neutro $0 \in V$, de forma que $u + 0 = u$, $\forall u \in V$ (propiedad modulativa para la suma).
5. $\forall u \in V, \exists v \in V$, de forma que $u + v = 0$ (propiedad de la existencia del opuesto para la suma). El vector v es denotado como $-u$.
6. $\alpha u \in V$ (propiedad clausurativa para el producto por escalar).
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (propiedad distributiva respecto a la suma de vectores).

8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (propiedad distributiva respecto a la suma de escalares).
9. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (propiedad asociativa para la multiplicación de escalares).
10. $(-1)u = -u$ (propiedad del inverso aditivo escalar).

Transformación lineal: Dados dos espacios vectoriales V y W , decimos que la función $T: V \rightarrow W$ es una *transformación lineal* de V en W , si y solo si se cumple que:

1. $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ (propiedad aditiva).
2. $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (propiedad homogénea).

Isomorfismo: Diremos que una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es un *isomorfismo*, si y solo si, T es una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva.

Matriz: Una matriz es un arreglo rectangular de números reales, llamados *componentes* o

elementos de la matriz, de la forma: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $(a_{i1} \dots a_{in})$ corresponde a la

i —ésima fila de la matriz A y $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ es la j —ésima columna de la matriz A .

Espacio euclidiano (Vector): Sea $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$. Este conjunto en los espacios suma y producto por escalar definidas como:

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ y $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ satisface los axiomas de espacio vectorial, por tanto, los elementos de $\mathbb{R}^n$ son llamados vectores de $\mathbb{R}^n$.

Para cada $X = (x_1, \dots, x_n)$ a x_1 lo llamamos primera componente, a x_2 segunda componente y en general, a x_n lo llamamos la n — ésima componente del vector X . En particular cuando $n = 2$, $\mathbb{R}^2$, tenemos una representación del plano.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Con lo descrito anteriormente, se propone la siguiente estructura conceptual alrededor de las transformaciones geométricas en el plano ($\mathbb{R}^2$) concretadas en esta propuesta de trabajo de grado:

Tabla 3. Organización conceptual sobre las transformaciones geométricas.

Transformaciones geométricas: Se definen como aquellos movimientos aplicados a una figura en el plano.	Características: A continuación, se describen las principales características de orden conceptual, relacionadas a los objetos propios de la geometría euclidiana.
Rotación: Se refiere al movimiento circular que realiza una figura en el plano, respecto al centro y con un ángulo determinado.	Centro de rotación: Es el punto fijo en el plano sobre el cual se desarrolla el movimiento de la figura en el plano. Sentido de rotación: Se refiere a la dirección en la que se efectúa la transformación a la figura en el plano. Amplitud del giro: Corresponde al ángulo que define la figura en el plano durante la transformación.
Traslación: alude al movimiento de una figura en el plano en el cual cambia su posición inicial.	Dirección: Alude a la trayectoria del movimiento de una figura en el plano. Sentido: Se enfoca en la orientación en la cual se desplaza una figura en el plano. Magnitud: Corresponde a la cantidad de unidades de medida en que se desplaza una figura en el plano.
Homotecia: Se define como el movimiento de una figura en el plano que determina la variación respecto al tamaño inicial de la figura conservando su forma.	Coefficiente de similaridad: Corresponde al factor de escala que define la relación entre la figura inicial y la figura homotética. Centro de similaridad: Se refiere al punto fijo en el plano sobre el cual se efectúa el movimiento de la figura en el plano. Figura inicial: Alude a la figura en el plano sobre la cual se determina la transformación. Figura homotética: Corresponde a la figura final en el plano, una vez se aplica la transformación.

Fuente: Sinisterra, B y Garcés, L. (2022). Abordaje de las

transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de licenciatura en matemática. Facultad de Educación y Pedagogía, Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas, Universidad del Valle, Colombia. Elaboración propia.

Sistemas de representación de las transformaciones geométricas

A continuación, se caracterizarán las representaciones algebraicas y geométricas de las transformaciones geométricas lineales y afines en $\mathbb{R}^2$, específicamente rotaciones, traslaciones y homotecias, debido a que son utilizadas en la construcción de fractales.

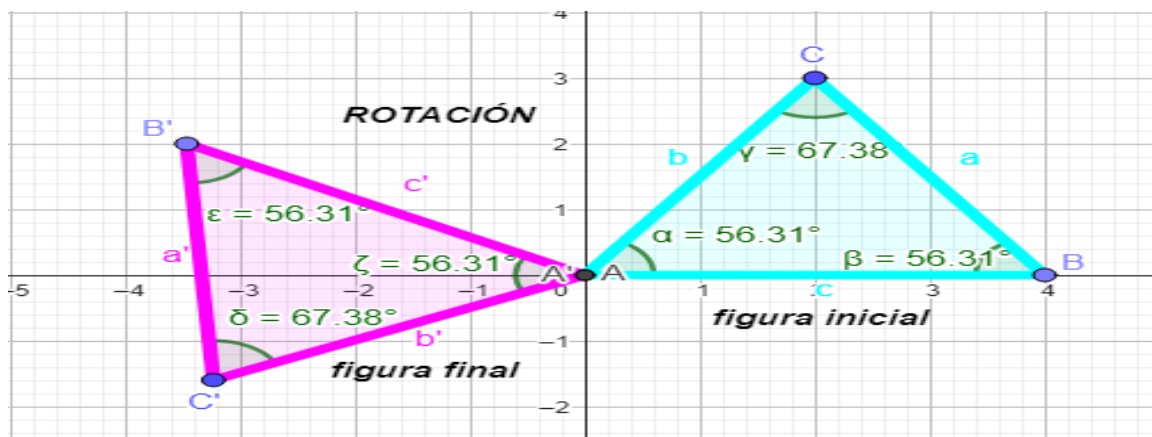
Rotación: Dado un punto C del plano y un ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$, se llama giro de centro $C = (a, b)$ y amplitud α , y se denota por $G(C, \alpha)$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto $P(x, y)$ del plano otro punto $R_{C, \alpha}(P) = (x', y')$ de forma que se verifique lo siguiente:

1. $x' = (x - a) \cos(\alpha) - (y - b) \sin(\alpha) + a$
2. $y' = (x - a) \sin(\alpha) + (y - b) \cos(\alpha) + b$

La representación matricial que define esta transformación geométrica en $\mathbb{R}^2$ se denota como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Figura 7. Ilustración representación geométrica de una rotación



Fuente: Elaboración propia.

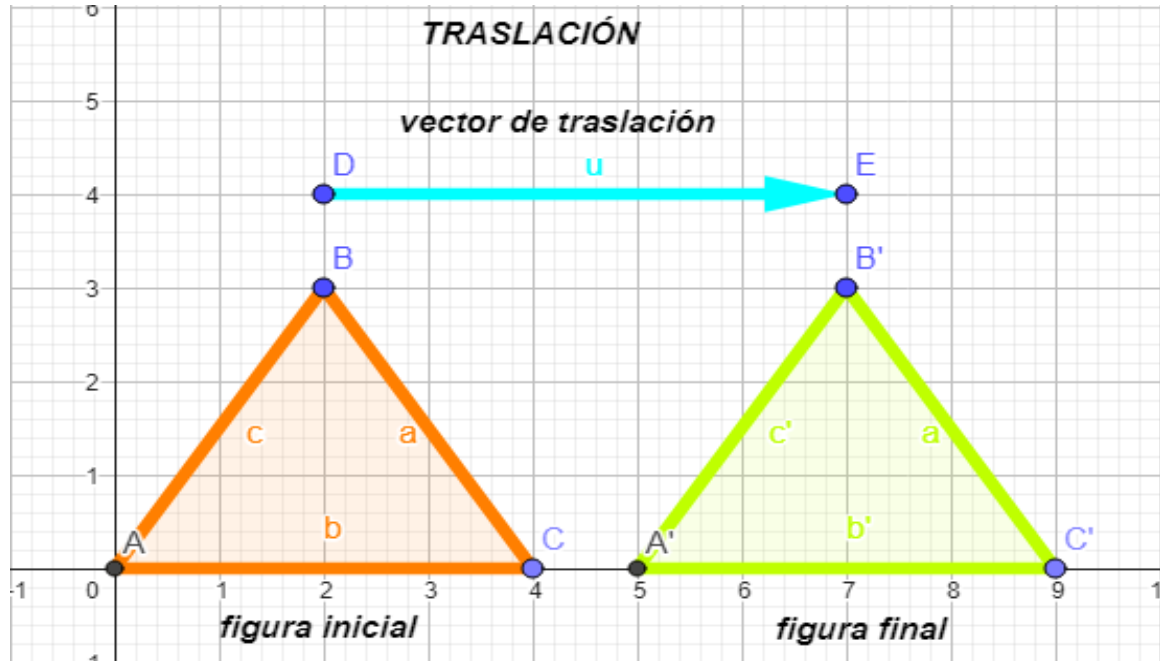
Traslación: Dado un vector $v = (x_r, y_r)$, se denomina traslación de vector v , denotado por T_v , a la transformación geométrica que asocia a cada punto $P(x, y)$ del plano otro punto $P'(x', y') = P + v$ de tal forma que se verifique que $P' = (x + x_r, y + y_r)$

La representación matricial dada para esta transformación geométrica se define como:

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$$

$$T_v(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$$

Figura 8. Ilustración representación geométrica de una traslación



Fuente: Elaboración propia.

Homotecia: Se llama homotecia de centro C y razón $k \neq 0$ y se denota por $H_{(C,k)}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto $P(x, y)$ del plano otro punto $P'(x', y') = H_{(C,k)}(P)$ de forma que:

$$1) \quad x' = kx - kx_r + x_r$$

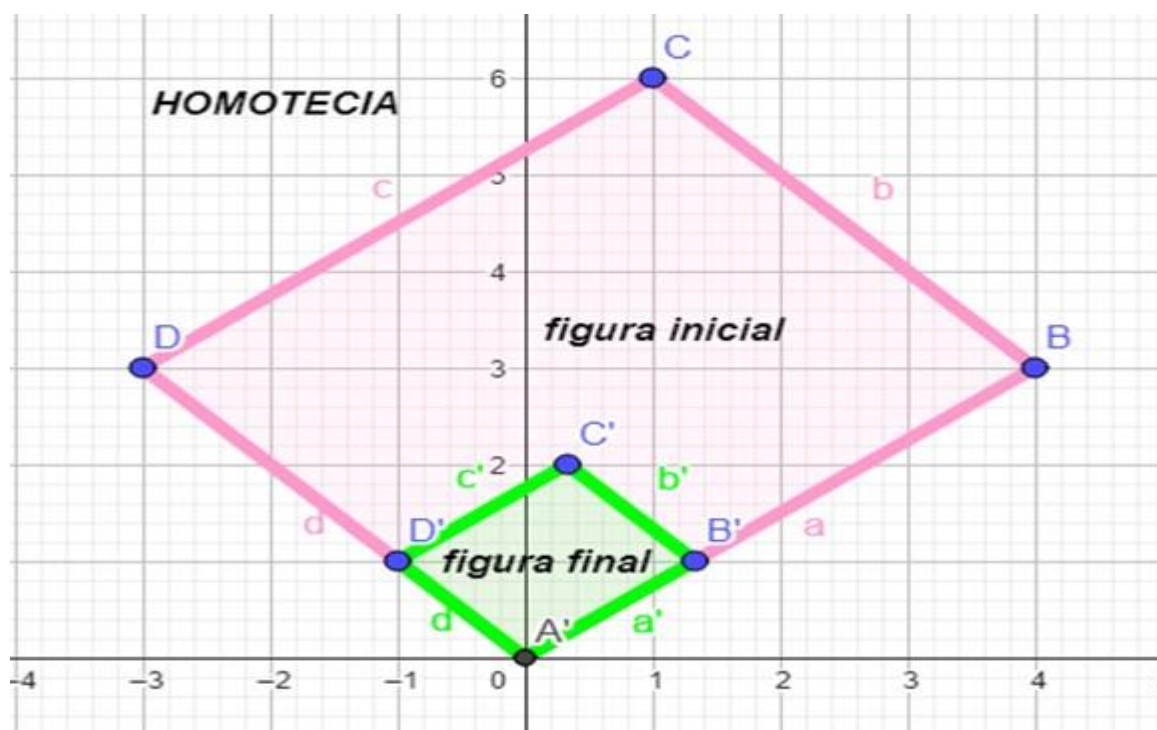
$$2) \quad y' = ky - ky_r + y_r$$

Donde tenemos que $C = (x_r, y_r)$ corresponde al centro de similitud.

La representación matricial para esta transformación geométrica se define cuando el centro de la homotecia es el origen $C = (0,0)$, en cuyo caso escribimos $H_{(C,k)} = H_k$,

$$H_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Figura 9. Ilustración representación geométrica de una homotecia



Fuente: Elaboración propia.

Fenomenología de las transformaciones geométricas

De acuerdo a los diferentes sistemas de representación de las transformaciones geométricas, es indispensable ahondar sobre aquellos modos de pensar e interpretarlas, en este caso, a partir de la semejanza y congruencia, como se propone a continuación.

- **Semejanza:** Decimos que dos figuras geométricas en $\mathbb{R}^2$ son semejantes si y solo si, sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

- **Congruencia:** Decimos que dos figuras geométricas en $\mathbb{R}^2$ son congruentes, si y solo si la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos correspondientes es exactamente igual.

Tabla 4. Transformaciones geométricas desde la semejanza y congruencia.

Transformaciones geométricas	Semejanza	Congruencia
Rotación	En esta transformación se mantienen las formas y proporciones, manteniendo el tamaño exacto.	En esta transformación gira una figura alrededor de un punto conservando sus longitudes y ángulos respecto a la figura inicial.
Traslación	En esta transformación se conserva su semejanza puesto que las formas y proporciones se mantienen exactamente iguales.	En esta transformación se permite mover una figura en una dirección cualquiera guardando exactamente sus longitudes y ángulos.
Homotecia	En esta transformación se basa en escalar una figura manteniendo sus ángulos y proporciones relativas entre sus lados. Además, puede ampliarse o reducirse dependiendo del factor de escala aplicado, a este proceso se le llama dilatación o contracción, respectivamente.	En esta transformación no se conserva la congruencia, debido a que las longitudes de los lados se escalan y no siempre se guardan sus ángulos.

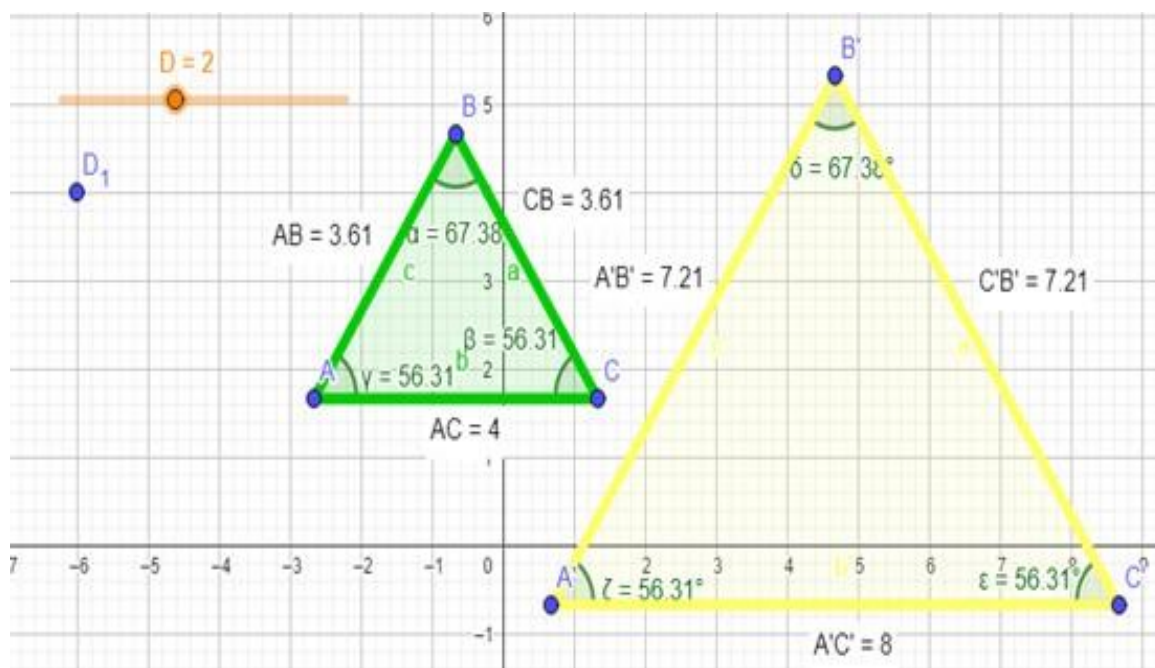
Fuente: Julio, L. (2014). Las transformaciones en el plano y la noción de

semejanza. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Elaboración propia.

A continuación, se proponen algunas representaciones geométricas que pone de relieve reconocer las principales características y connotaciones que tiene cada forma de pensar y abordar las transformaciones geométricas, a partir de la semejanza y congruencia, específicamente.

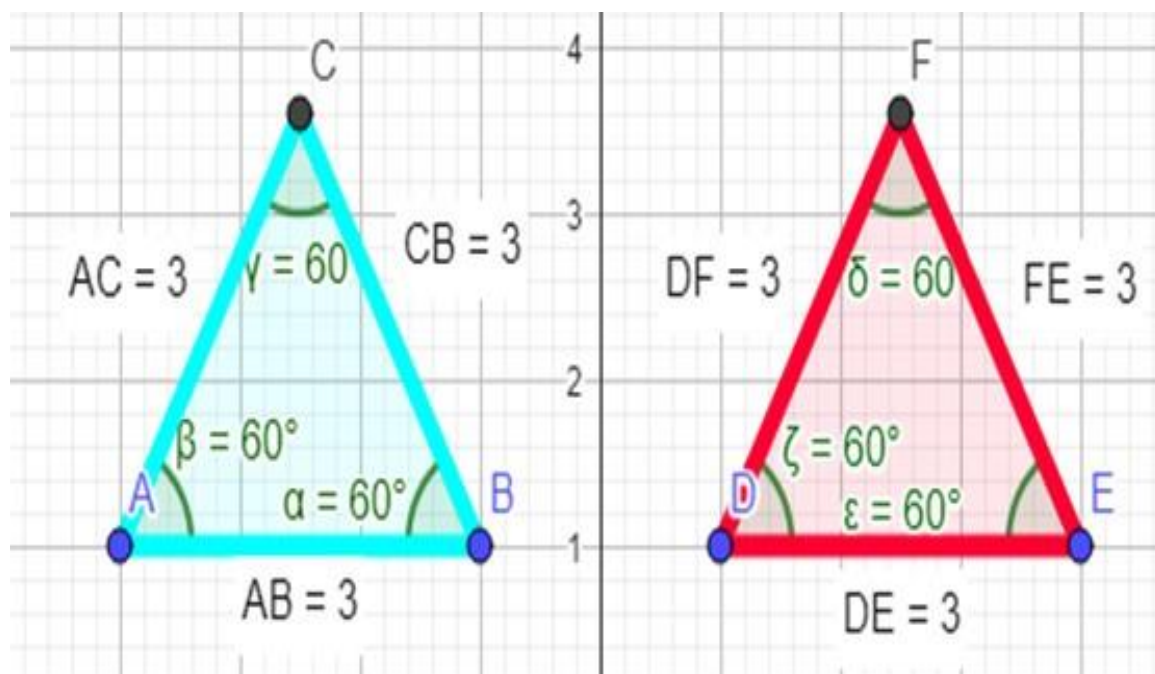
ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Figura 10. Transformaciones geométricas en el plano a partir de la semejanza.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 11. Transformaciones geométricas en el plano a partir de la congruencia.



Fuente: Elaboración propia.

Transformaciones geométricas, fractales y realidad

Para Santos, L y Larreal, O., actualmente, la geometría fractal ha demostrado ser sumamente útil en diferentes campos y áreas científicas, ya que permite describir con gran detalle una serie de situaciones particulares. (2022, p.7).

A continuación, se presentan algunos ejemplos de cómo esta disciplina ha contribuido en la comprensión de fenómenos complejos.

Geología: Generalmente el uso de las estructuras fractales en esta disciplina está en función de describir y caracterizar diferentes fenómenos naturales, tales como: montañas, costas, ríos, entre otros. Adicionalmente se emplea para modelar y explicar comportamientos en estructuras terrestres.

Figura 12. Ilustración de los fractales en la geología.



Fuente: Fuente: Santos, L y Larreal, O. (2022) The fractals and their applications.

Documentary review. Escuela Superior Politecnica del Litoral. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Ecuador.

Salud: Los fractales proporcionan una métrica precisa para analizar la complejidad y la irregularidad de diferentes estructuras biológicas, por ejemplo, vasos sanguíneos, venas y tumores, lo

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

que facilita la detección temprana de enfermedades, la planificación y elaboración de fármacos junto a tratamientos médicos más eficaces.

Figura 13. Ilustración de los fractales en la salud

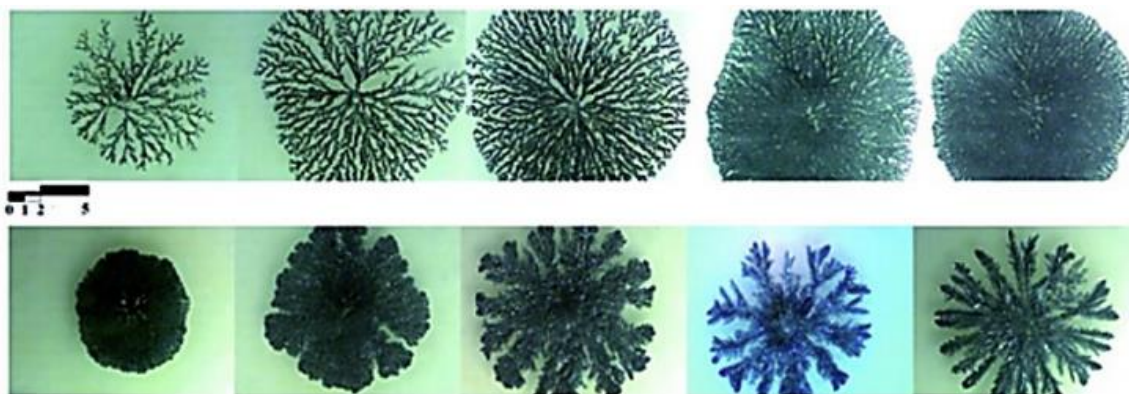


Fuente: Santos, L y Larreal, O. (2022) The fractals and their applications.

Documentary review. Escuela Superior Politecnica del Litoral. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Ecuador.

Química: En este campo, la geometría fractal ha sido generalmente empleada observar y estudiar la permeabilidad del fluido Ellis en medios porosos saturados y mediante el cálculo de la dimensión fractal, permitiendo así mediante los fractales replicar estructuras con patrones repetitivos a diferentes escalas.

Figura 14. Ilustración de los fractales en la arquitectura



Fuente: Santos, L y Larreal, O. (2022) The fractals and their applications.

Documentary review. Escuela Superior Politecnica del Litoral. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Ecuador.

4.1.3 Análisis didáctico cognitivo

El modelo local de análisis didáctico de carácter cognitivo de este trabajo de grado, centra su mirada en las dificultades, que se hacen manifiesto en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas y construcciones de fractales, por lo cual es necesario ahondar en la noción de dificultad. En palabras de Socas, M. (1997) la noción de dificultad en el aprendizaje de las matemáticas abarca diversas situaciones interrelacionadas. Estas van desde una planificación curricular deficiente hasta las características intrínsecas de la disciplina en sí. Para comprender en profundidad estas dificultades y su impacto en la comprensión de los contenidos matemáticos, es necesario categorizarlas y analizar su naturaleza individualmente. No obstante, mediante esta categorización, se busca explicar cómo cada dificultad afecta la comprensión de los diferentes conceptos matemáticos (s.p).

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: Estas dificultades se relacionan con el lenguaje utilizado en las matemáticas, especialmente en la comunicación de conocimientos específicos. En muchos casos, esta dificultad surge debido a un desconocimiento del lenguaje comúnmente utilizado en las ciencias matemáticas. Es importante tener en cuenta que existe una transición desde el lenguaje formal o natural hacia el lenguaje simbólico en matemáticas, y no considerar esta transición puede generar problemas de comprensión.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: Estas dificultades en particular se caracterizan por la falta de un hilo conductor que establezca relaciones entre los contenidos teóricos y las representaciones gráficas. El objetivo de este hilo conductor es asegurar una comprensión más coherente del conocimiento matemático. Esta dificultad se manifiesta en la ausencia de una estructura que vincule de manera efectiva los conceptos teóricos con las representaciones visuales.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas: Estas dificultades enfatizan en tres aspectos fundamentales, enmarcados en el contexto curricular institucional, los cuales son: la institución educativa, el currículo escolar y las estrategias pedagógicas de enseñanza que se emplean para la construcción conjunta del conocimiento matemático. Es esencial que estas estrategias se ajusten a la planificación curricular y a las políticas institucionales. Ya que al considerar estos elementos y emplear enfoques que estén alineados con ellos, el resultado será un aprendizaje adecuado del saber matemático por parte de los alumnos en el aula de clases.

Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: Las dificultades que surgen en este tipo de situaciones consideran aspectos fundamentales propios de los alumnos en términos de como aprenden, dado que, es importante tener en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje de cada alumno, puesto que varían considerablemente. Esto debe ser tomado en cuenta en toda la trayectoria de planificación, elaboración y desarrollo de actividades que se utilizarán para promover el desarrollo del conocimiento matemático en el aula. Este enfoque es crucial para garantizar un aprendizaje significativo.

Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas: Estas dificultades aluden a los aspectos personales (creencias, religiones, emociones) que se involucran con la actividad matemática, pues una actitud positiva y favorable frente a las matemáticas puede fortalecer la confianza y motivación, mejorando así el rendimiento y la comprensión de los conceptos matemáticos. Es aquí donde es necesario de que el profesor tenga en cuenta que estos aspectos logran incidir de manera positiva o negativa en la comprensión de los conceptos matemáticos.

En ese orden de ideas, y en el contexto de la planificación y elaboración de la unidad didáctica (UD) para este trabajo de grado, es fundamental tener en cuenta las dificultades que pueden surgir en la comprensión de las transformaciones geométricas y la construcción de diferentes fractales. Estas

dificultades están estrechamente relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje y pueden obstaculizar la adquisición de conocimientos por parte de los alumnos. Cabe aclarar que, estas dificultades tienen su origen en la interacción de elementos teóricos matemáticos, objetos, procesos y el uso del lenguaje.

Por lo tanto, al abordar estos temas en la unidad didáctica, es importante tener en cuenta las posibles dificultades que pueden surgir, y diseñar estrategias pedagógicas adecuadas para superarlas. Al reconocer y abordar de manera efectiva estas dificultades, se favorecerá el proceso de aprendizaje de los alumnos y se promoverá una comprensión más profunda y significativa de las transformaciones geométricas y los fractales.

A continuación, se precisan algunas dificultades desde la perspectiva de Sinisterra, B y Garces, L. (2022) que pueden presentar los alumnos para desarrollar los contenidos propuestos en la unidad didáctica (p.70).

Dificultades asociadas a la comprensión de la rotación en $\mathbb{R}^2$

- Identificar que la distancia que hay entre el punto a rotar y el centro de rotación, es igual a la distancia que hay entre el punto rotado y el centro de rotación.
- Determinar los ángulos iniciales que se forman en cada vértice el centro y la horizontal de la figura inicial.
- Reconocer el centro, sentido de rotación, y la amplitud del giro.

Dificultades asociadas a la comprensión de la traslación en $\mathbb{R}^2$

- Establecer que la imagen conserva la forma y tamaño de la figura inicial.
- Predecir la figura trasladada a partir de su magnitud, sentido y dirección.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

- Determinar usando expresiones algebraicas el vector de traslación teniendo en cuenta el objeto y su traslación.
- Asociar el vector con la distancia que haya entre cada punto de la figura inicial y su traslación.
- Asociar la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinado) con el vector de traslación.

Dificultades asociadas a la comprensión de la homotecia en $\mathbb{R}^2$

- Reconocer la relación que se presenta entre las figuras (inicial y homotética) a partir de la constante de proporcionalidad (coeficiente de similaridad k).
- Emplear expresiones algebraicas para efectuar la homotecia de una figura.
- Determinar el coeficiente y el centro homotético de una figura homotética.

4.1.4 Análisis didáctico de instrucción

En la perspectiva de este trabajo de grado, se realiza una recopilación de algunas concepciones relacionadas a los términos de “*materiales y recursos*” y la utilidad en el proceso de planificación, elaboración y desarrollo de la misma. A continuación, se presentan algunas concepciones en relación al concepto de *materiales*, pues diversos autores afirman que:

Hacen referencia al concepto de materiales, aclarando que son todos los aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y desarrollar conceptos matemáticos en el aula. (Alsina, Burgués y Fortuny, 1998., citado en Valenzuela, M., 2012, p.23).

Para Valenzuela, M. (2012) la noción de material se define como: todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico estructurado, que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones (p.24).

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

De acuerdo a los propósitos anteriormente descritos en el marco de la planificación, elaboración y aplicación de la unidad didáctica, los materiales requeridos para el desarrollo de la unidad didáctica son: Brócoli, helecho, hojas de block cuadriculado, regla y transportador, lápices, cuaderno, tablero, marcadores.

Ahora bien, es necesario categorizar los materiales en función de su utilidad para desarrollar contenidos matemáticos escolares en el aula.

1. Según su funcionalidad, donde se propone una clasificación de los materiales didácticos para la enseñanza de los conceptos matemáticos en términos de su estructuración.
2. En función de su versatilidad, es decir, la variedad de formas en las que puede utilizarse para ahondar en los diferentes conceptos.
3. Distinguiendo entre los diferentes materiales utilizados para la enseñanza.
4. En función de su utilidad y el formato en el que se presenta, es decir:
 - a) Pre-instruccional: se utiliza para dar apertura a la clase.
 - b) Co-instruccional: se utiliza para abordar el concepto matemático en el desarrollo de la clase.
 - c) Post-instruccional: se utiliza para dar cierre a la clase, con el propósito de recuperar elementos relacionados al concepto que se ha venido desarrollando.

En concordancia con los propósitos anteriormente descritos en el marco de la planificación, elaboración y aplicación de la unidad didáctica, cabe resaltar que mediante la utilización de estos materiales se prioriza que los alumnos logren visualizar, explorar y manipular para que estén en la capacidad comprender y aproximarse a los diferentes conceptos que se pretenden movilizar en las actividades propuestas.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Análogamente, se recuperan algunas definiciones asociadas a la noción de *recursos*, es decir, a que se alude con un software de geometría dinámica, específicamente GeoGebra.

En la perspectiva de diversos autores como Castiblanco, A, Urquina, H, Camargo, L y Acosta, M., un programa de geometría dinámica es un editor gráfico que da la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador. Pero en realidad es más que un simple editor en el que el usuario puede agarrar con el ratón un elemento del diagrama y arrastrarlo en la pantalla: el diagrama se redibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella. (2004, p.19).

Para Gutierrez, D., GeoGebra es un software libre, de matemática para educación en todos sus niveles.

Reúne de forma dinámica, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente.

Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. (2016, p. 12).

Para efectos de esta unidad didáctica, se optó por utilizar GeoGebra como recurso digital didáctico en conjunto con un software dinámico para la construcción de fractales, en el cual se realizarán algunas de las actividades que la componen, dado que potencializa el proceso de enseñanza y aprendizaje en los alumnos promoviendo así ambientes de instrucción donde los alumnos mismos construyan su propio repertorio de realizaciones o resultados matemáticos. Además, los alumnos pueden fácilmente modificar su construcción inicial y que estén en la capacidad de observar diversas relaciones que se mantienen invariantes, dando lugar a establecer conjeturas, deducciones e inferencias geométricas.

4.2 Unidad Didáctica (UD) para la enseñanza de transformaciones geométricas mediante la construcción de objetos fractales

	COLEGIO CATÓLICO UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA DE APRENDIZAJE	<u>CALIFICACION:</u>
---	---	------------------------------------

UNIDAD DIDÁCTICA N.º 1

ASIGNATURA: Geometría

GRADO: 11°

ALUMNO: _____

TEMA: Transformaciones Geométricas en $\mathbb{R}^2$ y fractales.

PROFESOR: Brayan Andrés Stuart Vernaza

DURACIÓN: 4 horas pedagógicas.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS EN $\mathbb{R}^2$ Y CONSTRUCCION DE OBJETOS FRACTALES

1. METAS U OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Fortalecer la comprensión de algunos conceptos propios de la geometría euclidiana, tales como: rotaciones, traslaciones y homotecias en $\mathbb{R}^2$.
- Reconocer elementos de la geometría fractal relacionados al proceso de construcción de objetos fractales de manera iterativa.
- Comprender como los objetos fractales logran modelar fenómenos de la naturaleza.
- Identificar la utilidad del recurso digital didáctico de GeoGebra en el momento de efectuar inferencias o deducciones geométricas.

2. INDICADORES DE DESEMPEÑO

- a. Reconoce y utiliza distintos sistemas de coordenadas para modelar.
- b. Compara objetos geométricos, a partir de puntos de referencia diferentes.
- c. Explora el entorno y lo representa mediante diversos sistemas de coordenadas.

3. ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- a. Realiza la lectura de la unidad didáctica en compañía del profesor.
- b. Desarrolla la Actividad de exploración, para fortalecer conceptos que son prerequisites para el desarrollo de la unidad didáctica.
- c. Desarrolla durante los momentos de trabajo personal las actividades propuestas en el proceso de exploremos juntos, representación y modelación, aplicación de los fractales y socialización.
- d. Participa de la explicación, comprensión y análisis de los temas en las clases, aclarando dudas presentadas en el desarrollo de la unidad y registrando notas a modo de evidencia.
- e. Realiza la sustentación de las actividades desarrolladas en la unidad didáctica al finalizar la unidad didáctica, apoyándose en la entrega de material físico y tecnológico que demuestre el desarrollo de la unidad didáctica.

4. INTRODUCCIÓN

La geometría fractal es un campo de estudio fascinante que encuentra aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. A diferencia de la geometría euclidiana, se dedica a describir las formas complejas e irregulares presentes en la naturaleza. La presente unidad didáctica tiene como objetivo explorar los fundamentos de la geometría fractal y las transformaciones geométricas propias de la geometría euclidiana, con el fin de modelar, resolver e interiorizar diferentes estructuras y formas naturales. A través de actividades prácticas y ejercicios, los alumnos desarrollarán habilidades de visualización espacial y pensamiento geométrico. Al finalizar la unidad, serán capaces de aplicar algunos elementos tanto la geometría fractal como la euclidiana en su vida cotidiana, comprendiendo los fenómenos naturales y diversos aspectos del mundo geométrico de manera más detallada.

5. EXPLOREMOS JUNTOS

Actividad 1. Aproximación fractal: Observar los siguientes videos y posterior a ello responder lo siguiente:

<https://youtu.be/udc1XqBBcgq>

https://youtu.be/Wea_1L-C9Xo

- ¿Qué es un fractal?

- ¿Cuáles son las principales características de los objetos fractales?

-Describe brevemente la utilidad de los fractales mediante dos ejemplos.

Actividad 2. Pregunta problema: ¿Has notado que algunas manifestaciones de la naturaleza poseen una forma que nos produce la impresión de que se repite a una menor escala en cada una de sus partes? Consideremos el caso de un brócoli y un helecho.

Brócoli



Helecho



Tomando como base el video anteriormente expuesto, analiza detalladamente cada una de las imágenes que se proponen y presenta una descripción breve de los principales aspectos de cada una de ellas.

Brócoli:

Helecho:

6. REPRESENTACION Y MODELACION

Actividad 3. Semilla-Producción: En una hoja de block cuadriculada de tamaño carta, construya cada uno de los fractales que se proponen a continuación.

a) Construcción triángulo de Sierpiński: Caso 1.

Semilla: Cuadrado de longitud 2 unidades.



Sistema Iterado de Funciones:

F1: Reduce a la mitad.

F2: Reduce a la mitad y desplazar una unidad horizontalmente a la derecha.

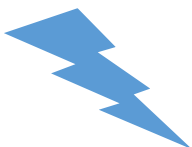
F3: Reduce a la mitad, desplazar una unidad horizontalmente a la derecha y desplazar una unidad verticalmente hacia arriba.

Al aplicar F1, F2 y F3 a la semilla que se define inicialmente, se obtiene una **primera producción (P1)**.

Ahora bien, repetir el proceso a cada producción obtenida. (**Nota: mínimo llegar hasta la cuarta producción**)

b) Construcción triángulo de Sierpiński: Caso 2.

Semilla: Rayo.



Sistema Iterado de Funciones:

F1: Reduce a la mitad.

F2: Reduce a la mitad, y desplazar una unidad horizontalmente a la derecha.

F3: Reduce a la mitad, desplazar una unidad horizontalmente a la derecha y desplazar una unidad verticalmente hacia arriba.

Ahora bien, repetir el proceso a cada producción obtenida. **(Nota: mínimo llegar hasta la cuarta producción)**

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

c) Construcción la Curva de Koch: Caso 1.

Semilla: Segmento.

Sistema Iterado de Funciones:

F1: Reduce a la tercera parte.

F2: Reduce a la tercera parte, rotar 60° en sentido anti horario (+) y desplazar $\frac{1}{3}$ horizontalmente a la derecha.

F3: Reduce a la tercera parte, rotar 60° en sentido horario (-), desplazar $\frac{1}{2}$ horizontalmente a la derecha y desplazar verticalmente $\frac{3}{6}$ hacia arriba.

F4: Reduce a la tercera parte y desplazar $\frac{2}{3}$ horizontalmente a la derecha.

Al aplicar F1, F2, F3 y F4 a la semilla que se define inicialmente, se obtiene una **primera producción (P1)**.

Ahora bien, repetir el proceso a cada producción obtenida. (**Nota: mínimo llegar hasta la cuarta producción**)

d) Construcción la Curva de Koch: Caso 2.

Semilla: Triángulo equilátero.

**Sistema Iterado de Funciones:**

F1: Reduce a la tercera parte.

F2: Reduce a la tercera parte, rotar 60° en sentido anti horario (+) y desplazar $\frac{1}{3}$ horizontalmente a la derecha.

F4: Reduce a la tercera parte y desplazar $\frac{2}{3}$ horizontalmente a la derecha.

Ahora bien, repetir el proceso a cada producción obtenida. **(Nota: mínimo llegar hasta la cuarta producción)**

Tomando en consideración con el juego **Semilla-Producción** responde el siguiente interrogante: Si este proceso iterativo se continúa efectuando de manera indefinida, ¿qué características crees que tendrían las figuras resultantes?

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Actividad 4. Objetos fractales y GeoGebra: Utilizar el software GeoGebra para realizar el proceso de construcción de los fractales que se proponen a continuación.

a) Construcción triángulo de Sierpiński: Caso 1.

Semilla: Cuadrado de longitud 2 unidades.



Sistema Iterado de Funciones:

F1: Reduce a la mitad.

F2: Reduce a la mitad y desplazar una unidad horizontalmente a la derecha.

F3: Reduce a la mitad, desplazar una unidad horizontalmente a la derecha y desplazar una unidad verticalmente hacia arriba.

b) Construcción la Curva de Koch: Caso 1.

Semilla: Segmento.



Sistema Iterado de Funciones:

F1: Reduce a la tercera parte.

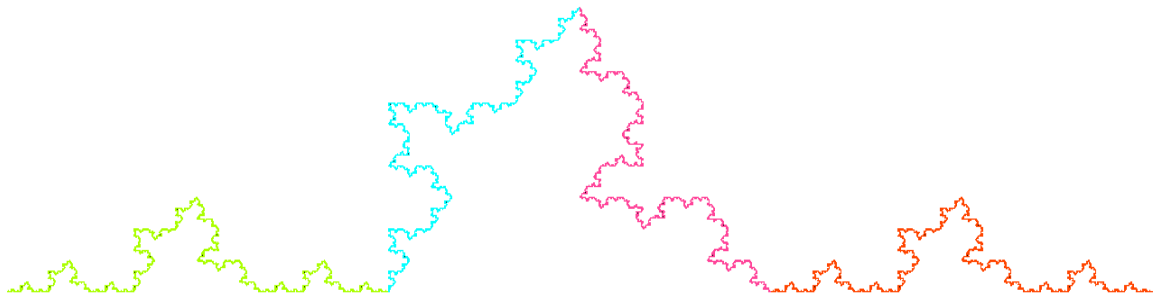
F2: Reduce a la tercera parte, rotar 60° en sentido anti horario (+) y desplazar $\frac{1}{3}$ horizontalmente a la derecha.

F3: Reduce a la tercera parte, rotar 60° en sentido horario (-), desplazar $\frac{1}{2}$ horizontalmente a la derecha y desplazar verticalmente $\frac{3}{6}$ hacia arriba.

F4: Reduce a la tercera parte y desplazar $\frac{2}{3}$ horizontalmente a la derecha.

7) APLICACIÓN DE LOS FRACTALES

Actividad 5. Identificación del SIF: A partir de la siguiente representación del objeto fractal en su producción iterativa indefinida, responder lo siguiente: ¿Cuál es el Sistema Iterado de Funciones utilizado para su construcción?



Semilla:

Sistema Iterado de Funciones:

F1:

F2:

F3:

F4:

Actividad 6. Producción fractal: Proponer una posible construcción de un objeto fractal, donde se explicita la semilla, el Sistema Iterado de Funciones utilizado junto a todo su proceso de elaboración a través del software de GeoGebra. **(Nota: mínimo llegar hasta la tercera producción)**

Nombre del Fractal:

Semilla:

Sistema Iterado de Funciones:

F1:

F2:

F3:

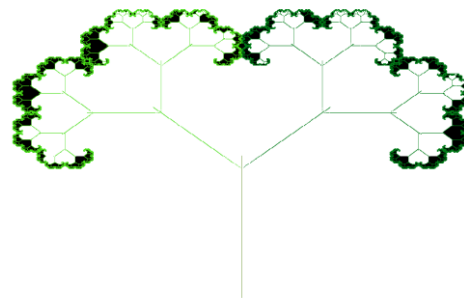
8) SOCIALIZACIÓN

Actividad 7. Fractales y fenómenos de la naturaleza: A continuación, se proponen los siguientes fractales para los cuales deben de dar una breve descripción de cada uno de ellos, donde logren mostrar los principales aspectos asociados a todo el proceso de construcción.

Hoja de Helecho



Árbol Fractal



Hoja de Helecho:

Árbol Fractal:

Actividad 8. Evaluación de la unidad didáctica (UD): Diligenciar los siguientes cuestionarios (evaluaciones de la UD) que se proponen a través de formularios de google.

1. https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdN4vShP65UQWMcKXxkFW0f61X7cw5Hh3sF3josRJoGRE9uPQ/viewform?usp=sf_link
2. https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeHmKPUIv9JXzqz66Ty4QnjODtubR3Qy1qcG05gyVG2AHBxwA/viewform?usp=sf_link

9) REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Barnsley, M. (1988) *Fractals Everywhere. School of mathematics*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia.

Mesa. H. (2001) *Fractales, grafos y códigos*. Revista INTEGRACIÓN, 2001, vol. 19, num.1, p. 13-21.

Mesa. H. (2002) *El triángulo de Sierpiński*. Monografía de grado. Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias.

<http://www.asociacionceat.org/aw/2/test1.htm>

4.3 Resultados obtenidos y análisis en relación a la teoría de los Van Hiele

En esta propuesta de trabajo de grado, el modelo de los Van Hiele resultó beneficioso para la elaboración de la unidad didáctica, puesto que este modelo tiene varias connotaciones, por un lado, se centra en cinco niveles de razonamiento geométrico de orden cognitivo, con lo cual se pretende que los alumnos puedan progresar en su desarrollo y alcanzar el nivel II de comprensión (Análisis). Este objetivo se plantea como un propósito fundamental y transversal en la trayectoria de planificación, elaboración y aplicación de la unidad didáctica.

En este trabajo de grado, se propone aplicar la unidad didáctica a partir de las cinco fases de aprendizaje que se precisan en el modelo de los Van Hiele. Cabe aclarar que, en las actividades propuestas en la unidad didáctica, estas fases asumen un carácter instruccional y procedimental en el rol del profesor para la gestión de la clase. En ese sentido, se prioriza la participación activa tanto del profesor como de los alumnos como se propone en el *anexo 2*, dado que este modelo me permitió atribuir diferentes roles tanto para mí, como profesor a cargo, pero del mismo modo para los alumnos, como se precisan a continuación:

- Por ejemplo, las tres primeras fases (información, orientación dirigida y explicitación), me permitieron dar cuenta de aspectos tales como, qué elementos conceptuales y procedimentales conocían los alumnos en relación a las transformaciones geométricas, donde se reconocieron ideas y nociones que ellos tenían respecto a las traslaciones, rotaciones y homotecias. Así mismo, me permitió identificar algunas proximidades que tenían con la geometría fractal, específicamente, relacionarla con la biodiversidad de la naturaleza. Además de generar ambientes de discusión donde se promovieron interacciones entre el profesor y los alumnos con el propósito de reflexionar y desarrollar cada una de las actividades.
- En cuanto a las otras dos fases de aprendizaje (orientación libre e integración), me permitieron a través de algunas de las actividades, otorgar un rol más autónomo a los alumnos, donde pudieran llevar a la práctica todos aquellos conocimientos que se han concretado en el desarrollo de la unidad didáctica, es decir, que estuvieran en la capacidad de trabajar por sí mismos y reflexionar sobre su desarrollo, como proceso transversal a la aplicación misma.

Para este trabajo de grado, resultó pertinente considerar el diseño de la unidad didáctica alrededor del recurso digital didáctico de GeoGebra e integrarlo al modelo teórico de los Van Hiele. En vista de que proporciona varias herramientas que se utilizan para el desarrollo de algunas actividades que se concretan. Especialmente traslaciones, rotaciones y homotecias, las cuales van de acuerdo al interés de la investigación. Cabe resaltar que, estas herramientas permiten a los alumnos visualizar, explorar y experimentar con estas transformaciones, lo que facilita su comprensión. Además, los alumnos pueden realizar construcciones geométricas diferentes y obtener objetos fractales a través de su proceso iterativo e interiorizar el mismo.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

De acuerdo a los *anexos 3-8*, en el marco de esta propuesta de trabajo de grado, el modelo de los Van Hiele está intrínsecamente relacionado con los objetivos propios de la unidad didáctica, puesto que en las actividades se promueve el desarrollo de pensamiento geométrico, donde se espera que los alumnos logren comprender y fortalecer los conceptos de las transformaciones geométricas y se aproximen a elementos de la geometría fractal, específicamente las construcciones de objetos fractales a partir de un proceso iterativo (SIF). Esto, a través de la exploración activa, la convergencia entre los conceptos matemáticos y fenómenos de la naturaleza en conjunto con el uso de recursos físicos y digitales como mediadores para su aprendizaje.

4.4 Resultados obtenidos y análisis en relación a la propuesta de modelo local de análisis didáctico

El modelo local de análisis didáctico en el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado, responde a una herramienta altamente funcional tanto en términos teóricos como prácticos, en vista de que permite al profesor innovar en aspectos curriculares y didácticos en diferentes etapas del proceso educativo, desde la planificación hasta la evaluación de los contenidos matemáticos escolares, además de permitir al profesor reflexionar sobre su práctica y proponer mejoras continuas en función de las necesidades y características de sus alumnos.

Dentro de la estructura que se adopta en este trabajo de grado, concretada en un modelo local de análisis didáctico como elemento metodológico, la categoría correspondiente al análisis didáctico del contenido, asume el rol principal en el proceso de planificación y elaboración de la unidad didáctica, dado que, se centra en el estudio minucioso del contenido matemático escolar, donde se abordan las transformaciones geométricas y las construcciones de objetos fractales desde diferentes perspectivas, que se sintetizan en tres aspectos: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología:

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

- La revisión de la estructura conceptual de los tópicos contenidos en las transformaciones geométricas y los fractales, facilita al profesor de matemáticas entender los conceptos emergentes e ilustrarse para determinar cómo incorporarlos en las actividades que se proponen en la unidad didáctica.
- En cuanto a los sistemas de representación, permiten visualizar e interiorizar las diferentes formas en que se representan las transformaciones geométricas, aludiendo a su representación algebraica, matricial y geométrica. para comprender a su vez la relación que existe entre los diferentes conocimientos básicos y así promover el desarrollo de pensamiento geométrico.
- Finalmente, la fenomenología brinda la posibilidad comprender las diferentes formas de abordar los tópicos anteriormente descritos y a su vez, situar esta propuesta didáctica con algunos fenómenos de la realidad, encontrando afinidades y similitudes entre los conceptos y su aplicabilidad en el exterior.

En esta propuesta de trabajo de grado, se consideran tres componentes fundamentales y que completan la estructura de un modelo local de análisis didáctico: el Análisis Didáctico Curricular, el Análisis Didáctico Cognitivo y el Análisis Didáctico de Instrucción:

- El Análisis didáctico Curricular permitió comprender y caracterizar diversos escenarios educativos, desde los niveles nacionales e institucionales hasta el contexto local, centrándonos en la organización curricular y su relación con el contenido matemático escolar propuesto en una unidad didáctica.
- Por su parte, el Análisis Didáctico Cognitivo brindó la oportunidad de examinar las dificultades que los alumnos suelen enfrentar al comprender los conceptos subyacentes en la propuesta de la unidad didáctica, lo cual me resulta fundamental pues me permite

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

prever y abordar estas dificultades en el proceso de planificación y elaboración de las actividades.

- Finalmente, el Análisis Didáctico de Instrucción posibilita centrarse en la utilidad y pertinencia de GeoGebra como recurso digital didáctico para la elaboración de las actividades, donde se propone realizar algunas construcciones de objetos fractales.

En esta propuesta de trabajo de grado, se introduce el Análisis Didáctico de Actuación como una categoría adicional en la estructura del modelo local de análisis didáctico. Aunque en esta investigación, el Análisis Didáctico de Actuación no se considera igual de relevante como las otras categorías, pues su enfoque reside en la observación y análisis de los resultados posteriores a la aplicación de la unidad didáctica. Aunque, esto permite adoptar una perspectiva crítica hacia la prueba piloto de la presente unidad didáctica, pensada en reconocer tanto sus potencialidades como posibles aspectos a mejorar o proponer en un posible rediseño y futura implementación. Formando así, parte de este proceso cíclico del análisis didáctico.

Finalmente, este trabajo de grado propone el uso y la integración de las diferentes categorías que estructuran el modelo local de análisis didáctico para mejorar la enseñanza de las matemáticas, facilitando la comprensión de los contenidos matemáticos y promoviendo el uso de recursos tecnológicos como GeoGebra. Con esta estructura y los elementos teóricos y prácticos anteriormente descritos, se hace visible la utilidad que tienen estos en la práctica pedagógica y profesional del profesor, pues permite proponer contenidos de calidad en el aula y fortalecer la actividad científica e investigativa del profesor.

4.3 Resultados obtenidos y análisis sobre la aplicación (prueba piloto) de la propuesta de unidad didáctica (UD)

Durante la aplicación de la prueba piloto, para validar el diseño de la unidad didáctica, se lograron observar algunos aspectos, como se precisan a continuación:

- En el *anexo 2* se puede evidenciar que los alumnos mostraron gran compromiso y disposición para el desarrollo de cada una de las actividades que se propusieron, además, se logró ver reflejado el interés por una temática que denotaron como “nueva”.
- El tiempo a priori que se propuso para la aplicación (4 horas pedagógicas) puede considerarse en una próxima implementación del diseño de unidad didáctica, puesto que la cantidad de actividades y su grado de complejidad, aumentaba de manera paulatina y demanda mayor cantidad de tiempo en términos de su comprensión. Cabe aclarar que por cuestiones de tiempo y ajenas al profesor, se sintetizaron algunas de las actividades y se dieron algunas indicaciones para que las terminaran en otro espacio.
- Los *anexos 3,5 y 8* permiten visualizar que en la actividad 3, los alumnos inicialmente presentaron dificultades, en relación a la comprensión de los Sistemas Iterados de Funciones (SIF) y su utilidad en el proceso de construcción de los fractales, específicamente a que se estaba aludiendo con cada grupo de funciones definidas en lengua natural.
- La sala de sistemas donde se desarrolló la aplicación de la unidad didáctica presentó problemas con el acceso al programa de GeoGebra tanto de manera online como offline, por lo cual se optó por trabajar mediante proyección de GeoGebra a través de Video Beam y desarrollar algunas actividades de manera conjunta.
- Surgieron algunos contratiempos en la gestión del recurso digital didáctico de GeoGebra para el desarrollo de algunas actividades, específicamente en la actividad 4 y 6, dado

que, aunque ya habían tenido contacto previo con el recurso, presentaron dificultades para hacer uso de las herramientas de rotación, traslación y homotecia para las construcciones de fractales que se proponían. En cuanto a ello, se recomienda para una posible implementación posterior, destinar un espacio para la capacitación de las generalidades prácticas en cuanto a la gestión del recurso.

- En correspondencia con el *anexo 2*, el uso de un software diferente a GeoGebra para socializar en algunas facetas del desarrollo de las actividades, propició un ambiente agradable y significativo en relación a la socialización de las diferentes construcciones fractales que se desarrollaron.
- Efectuando un sondeo general a las actividades que se proponen en el momento denotado “socialización” específicamente en la evaluación de la unidad didáctica, se logra observar en las respuestas de los alumnos, que lograron comprender la mayoría de conceptos que se proponen en las actividades anteriormente descritas.
- En el *anexo 16-19*, se puede ver que la valoración de la unidad didáctica por parte de los alumnos, se obtiene un balance adecuado, sin embargo, resaltan como posibles mejoras aspectos tales como, selección del material audiovisual introductorio a la temática en conjunto con el uso de un material de apoyo (diapositivas) que permitiera presentar la unidad al grupo. Adicionalmente, hacer un buen uso o manejo del espacio relacionado la construcción manual de las figuras geométricas en el pizarrón, para efectos de claridad en el contenido.
- En cuanto al primero objetivo de la unidad didáctica que se enfoca *fortalecer la comprensión de algunos conceptos propios de la geometría euclidiana, tales como: rotaciones, traslaciones y homotecias en $\mathbb{R}^2$* . Se puede decir que, de acuerdo al *anexo 12* los alumnos lograron comprender los conceptos subyacentes en las transformaciones

geométricas, asimismo establecer diferencias entre unos y otros y relacionarlos con otros tipos de geometría, en este caso, elementos de la geometría fractal.

- El segundo objetivo de la unidad se centra en *reconocer elementos de la geometría fractal relacionados al proceso de construcción de objetos fractales de manera iterativa*. Los alumnos en algunas actividades realizaron construcciones de los fractales sugeridos, siguiendo el conjunto de transformaciones lineales (SIF) propuestas, además de sugerir un grupo de funciones como una posible construcción fractal. En ese sentido, resaltan la fuerza que cobra la relación entre el fractal y las transformaciones geométricas en el plano (SIF).
- El tercer objetivo de unidad didáctica que se centra en *comprender como los objetos fractales logran modelar fenómenos de la naturaleza*. Se puede apreciar que se efectúa una aproximación muy somera a las realidades de los fractales y sus factores de convergencia con fenómenos naturales y otras disciplinas. En vista de que, aunque se apoya de algunos elementos naturales (brócoli y hoja de helecho) en la propuesta de las actividades de enseñanza pierde un poco de fuerza esa relación, ya que está en función de atender a un proceso iterativo de construcción de objetos fractales para el estudio de las transformaciones geométricas en el plano precisadas previamente.
- De acuerdo al *anexo 2* y su relación con el último objetivo de la unidad didáctica que se concreta en *identificar la utilidad del recurso digital didáctico de GeoGebra en el momento de efectuar inferencias o deducciones geométricas*. Se puede inferir que no se logra satisfacer en su totalidad, pues, aunque se hace uso del recurso en el desarrollo de algunas actividades, se efectúa a través de un trabajo colaborativo y orientado por el docente, y por problemas técnicos y en la manipulación del recurso se imposibilita a los alumnos para que ellos exploren las construcciones y desarrollen las mismas de forma

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

individual, lo cual hubiera resultado más significativo para todos en términos de la comprensión y aprendizaje.

En síntesis, en la aplicación, evaluación y valoración de la propuesta de unidad didáctica se obtuvo un balance positivo a pesar de las adversidades que se hicieron manifiesto, especialmente en la gestión de los recursos para su desarrollo. Además, esta prueba a modo piloto sirve como punto de partida para considerar aspectos en una próxima implementación, rediseño de la unidad didáctica y un análisis riguroso de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES

En este último capítulo se presentan algunas conclusiones derivados de una investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas (DdM) y aportes al mismo.

5.1 Conclusiones y recomendaciones a la investigación en la didáctica de las matemáticas (DdM)

El desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado busca ampliar la concepción actual de la didáctica de las matemáticas (DdM), donde generalmente se limita el papel del profesor de matemáticas a la puesta en acto de diferentes propuestas de enseñanza en el aula, es decir, en una perspectiva más curricular y pedagógica, descuidando su labor investigativa contenida en la actividad práctica del profesor, la cual desempeña un papel crucial en el desarrollo de competencias profesionales del profesor y en el aprendizaje de los alumnos, pues se promueven ambientes de enseñanza y aprendizaje más significativos para todos.

Esta propuesta de innovación curricular y didáctica en la enseñanza de la geometría en el aula es una apuesta interesante, dado que, se propone un diseño de una unidad didáctica que: privilegia fortalecer conocimientos en geometría euclidiana y explorar la geometría fractal con recursos físicos y digitales, amplía el panorama en relación a una forma diferente de enseñar y aprender geometría y fortalece las bases que se proponen y desarrollan generalmente en el currículo en media académica. Por otra parte, se reconoce una realidad en la cual las matemáticas y la naturaleza convergen entre sí. Además, se está promoviendo el desarrollo de pensamiento geométrico y al mismo tiempo, su

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

capacidad para comprender y apreciar las formas y estructuras en el mundo que los rodea, lo cual es una experiencia educativa enriquecedora tanto para el profesor como para los alumnos.

Atendiendo a la pregunta central de la investigación, la cual es: *Tomando como referencias teórica y metodológica el modelo cognitivo e instruccional de los Van Hiele y el diseño integrado de un “modelo local de análisis didáctico del contenido”, ¿qué elementos conceptuales y procedimentales se podrían tomar en cuenta para el diseño de una unidad didáctica que articule o integre el estudio de transformaciones geométricas y la construcción de algunos objetos apropiados de la geometría fractal utilizando un recurso digital como GeoGebra, con propósitos de desarrollar pensamiento geométrico en grado once?* El trabajo me permitió identificar a través de la trayectoria de planificación, elaboración y aplicación de la unidad didáctica (UD), elementos conceptuales tales como: transformaciones geométricas (rotaciones, traslaciones, homotecias), Sistemas Iterados de Funciones (SIF), autosimilitud, iteraciones, entre otros. En relación a los elementos de carácter práctico y procedimental, que se lograron reconocer, se asocian a la gestión de la clase y los recursos, y su utilidad para resolver las actividades. Por otra parte, se logran recuperar elementos de carácter teórico y práctico, pero ya en función de la actividad práctica e investigativa del profesor, esto basado en las teorías y modelos en los cuales se sustenta esta propuesta de trabajo de grado.

En cuanto al objetivo central de la investigación, que se concreta en *identificar y seleccionar elementos conceptuales y procedimentales básicos para el diseño de un modelo local de análisis didáctico del contenido matemático y curricular en cuestión, como estrategia de formación inicial del profesor de matemáticas, el cual se concreta en la elaboración de una propuesta de una unidad didáctica (UD), basada en elementos de la teoría cognitiva e instruccional de los Van Hiele utilizando objetos fractales y un recurso didáctico digital de mediación como GeoGebra, con el propósito de desarrollar competencias de pensamiento geométrico, en relación con el estudio de las transformaciones geométricas en grado once*, se puede decir que la integración de una propuesta de modelo local de

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

análisis didáctico, principalmente la categoría de *análisis didáctico del contenido*, en conjunto con el modelo de los Van Hiele permitió estudiar el rol del profesor de matemáticas a detalle en las diferentes facetas en un contexto propiamente de diseño, es decir, revisar como es el proceso de orquestación didáctica del docente, en su planificación, elaboración y aplicación de una propuesta didáctica para la enseñanza de las transformaciones geométricas a través de los objetos fractales. En primer lugar, permitió delimitar lo que se esperaba de los alumnos y con ello mismo observar los diferentes roles que asumía el profesor en su desarrollo, logrando atender las necesidades emergentes en las fases de planificación y elaboración y aplicación de la propuesta didáctica, desde un punto de vista didáctico y matemático alrededor del contenido mismo, y con ello proponer y movilizar una serie de actividades acorde a los intereses de aprendizaje. Por otra parte, considerar estos constructos teóricos en el desarrollo de este trabajo, dio cuenta de la actividad de investigación como componente de la actividad practica pedagógica del profesor. También se logró una integración de la teoría y la práctica para desarrollar un contenido matemático escolar en el aula.

Centrando la mirada en el primer objetivo específico de la investigación que radica en *revisar y reconocer elementos conceptuales y procedimentales básicos de carácter matemático, curricular y didáctico, con el propósito de diseñar un modelo local de conocimientos y análisis didácticos del contenido, orientado a la elaboración de una unidad didáctica para el desarrollo de competencias de pensamiento geométrico en relación con transformaciones geométricas, utilizando algunos recursos didácticos de mediación como objetos fractales y tecnología digital como GeoGebra*. En el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado se puede decir que el modelo local de análisis didáctico del contenido, asumió un papel especial, dado que, permitió inmiscuirse en la esencia de las transformaciones geométricas, es decir, ahondar sobre su estructura y organización conceptual, diferentes representaciones ellas en conjunto con aspectos fenomenológicos o modos de pensarlas en

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

su proceso de enseñanza y aprendizaje, para con ello considerar la forma más adecuada para proponerlas, desarrollarlas y fortalecerlas a través de la geometría fractal.

Aludiendo al segundo objetivo específico de la investigación, que se fundamenta en *base a los resultados del objetivo anterior y el modelo local de conocimientos y análisis didácticos, intentar diseñar e implementar algunas actividades para el desarrollo de una unidad didáctica en torno al contenido geométrico considerado, con el propósito de desarrollar sentidos, y comprensión al respecto, e identificar necesidades y dificultades para su elaboración e implementación por parte del profesor de grado once.* Se puede decir la planificación y elaboración de la propuesta de unidad didáctica se lograron reconocer algunas dificultades asociadas a la comprensión del contenido matemático, y de qué manera aprovechar contenidos de una geometría analítica y abstracta para desarrollar y fortalecer la geometría plana, específicamente las transformaciones geométricas (rotaciones, traslaciones y homotecias). Además, dentro de esta propuesta también emergieron dificultades asociadas a la gestión de los recursos (físicos y digitales) sobre los cuales estaban sustentadas algunas de las actividades de aprendizaje concretadas en la unidad didáctica.

Como aporte a la investigación en la línea de didáctica de las matemáticas (DdM), se espera que este trabajo de grado, aporte elementos de carácter teórico y práctico, los cuales puedan ser considerados por otros profesores en formación o en ejercicio, para mejorar sus competencias en términos tanto investigativos como su actividad práctica pedagógica, en la enseñanza de la geometría y las matemáticas a nivel en general.

REFERENCIAS

- Aguilar, D. (2014). *La resolución de problemas y representación de conceptos de geometría analítica en un ambiente dinámico*. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Arcila, J y Manzano J. (2018). *Una propuesta didáctica entorno a las simetrías y razón aurea en grado decimo: resignificación de la práctica docente desde perspectivas sociocultural y análisis didáctico*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988a). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988b). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Álvarez, A. (1996). *Actividades Matemáticas con Materiales Didácticos*. Madrid: MEC-Narcea.
- Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere. School of mathematics*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia.
- Barrantes, M y Blanco, L. (2004). *Recuerdos, Expectativas y Concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar*. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, España.
- Barriga, L y Correa, A. (2018). *Diseño de un ambiente virtual de aprendizaje basado en el modelo de Van Hiele para la comprensión de los fractales*. Facultad de ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

- Bedoya, E. (2002). *Formación Inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas*. (Tesis Doctoral). Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España.
- Bedoya, E. (2017). *Formación de profesores de educación básica y media en matemáticas y su didáctica: conocimiento didáctico del contenido, análisis didáctico y unidades didácticas*. Universidad del Valle, Colombia.
- Bedoya, E. (2022). *Didáctica de las matemáticas- conocimiento y análisis didáctico: Formación de profesores, innovación curricular e investigación en educación matemática*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Brousseau, G. (s.f). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos I, Francia.
- Cabezas, M. (2015). *Una introducción a la geometría fractal a través del tratamiento de la autosimilitud integrando un ambiente de geometría dinámica*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Camacho, J. (2017). *Propuesta de un modelo local de análisis didáctico para fortalecer los conocimientos de un profesor de grado quinto sobre la fracción en su sentido de razón*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Camargo, L. (2018). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Carrillo, J. (2017). *Descubriendo matemáticas con fractales en secundaria. Un estudio aplicando el modelo de Van Hiele y el curriculum en espiral de Bruner con tecnología*. Departamento de

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

- Castiblanco, A, Urquina, H, Camargo, L & Acosta, M. (2004). *Potencial didáctico de la geometría dinámica en el aprendizaje de la geometría. Serie documentos, Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Ministerio de Educación Nacional (MEN), Bogotá, Colombia.
- Cortes, A, Jaramillo, J y Obregón, I. (2019). *Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Cunha, H. (2005). *Geometría fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de matemática*. Universidade Federal, do pára Núcleo pedagógico de apoio ao desenvolvimento científico – NPADC, programa de pós-graduação em educação em ciências e matemática, Brasil.
- Cuero, G y Manyoma, A. (2019). *Transformaciones geométricas a partir de la semejanza y la congruencia*. Universidad del Valle, Colombia.
- Cruz, M y Mantica, A. (2017). *El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas*. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Colombia.
- Escandón, J. (2017). *Modelo local de análisis didáctico para la enseñanza de las traslaciones en el plano cartesiano*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.

- Escarraga, A. (2019). *Evaluación de una unidad didáctica sobre adición de números naturales en grado tercero basada en un modelo local de análisis didáctico*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Fernández, L y Mosquera, M. (2019). *Arte y geometría: una propuesta didáctica para el aprendizaje de las transformaciones isométricas a través de un software de geometría dinámica*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Fernández, R. (2016). *Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atinente a los contenidos*. Universidad de la Frontera, Chile.
- Flores, J. (2010). *Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de geometría*. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras.
- Gamboa, R y Ballesteros, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista electrónica Educare, volumen XIV, Universidad Nacional, Costa Rica.
- Garbín, S. (2020). *La problemática fractal: Un punto de vista cognitivo con interés didáctico*. Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
- Grisales, L. (2017). *Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo de pensamiento geométrico en estudiantes de la media básica del C.E Bachillerato en Bienestar Rural Sede Ciató en el Municipio de Pueblo Rico mediante elementos de la naturaleza*. Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis Doctoral). Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España.
- Gutiérrez, D. (2016). *Sistemas de geometría dinámica como herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de trigonometría en la educación secundaria*. Facultad de Educación, Universidad de Cantabria, Santander, España.
- Higueras, L. (2011). *Algunos tipos de autosemejanza en fractales generados a través de sistemas iterados de funciones*. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Colombia.
- Iglesias, M. (2016). *Formación inicial de los docentes en geometría y su didáctica*. Memorias del IX congreso venezolano de Educación Matemática.
- Julio, L. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.
- Lupiañez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis Doctoral). Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España.
- Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Ed. Tus Quets.
- Martínez, M. (2013). *Sistematización de una experiencia didáctica que propone integrar algunos contenidos de las asignaturas de física y matemáticas de grado decimo mediante el uso de tic*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Mesa, H. (2001). *Fractales, grafos y códigos*. Revista INTEGRACIÓN, 2001, vol. 19, num.1, p. 13-21.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

- Mesa, H. (2002). *El triángulo de Sierpiński*. Monografía de grado. Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje y Evaluación*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia.
- Molina, M; Castro, E; Molina, J y Castro, E. (2011). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Enseñanza de las ciencias.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis Doctoral). Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España.
- Pérez, C. (2007). *Transformaciones lineales, afines y fractales en un ambiente computacional*. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Pérez, C. (2007). *Transformaciones lineales, afines y fractales*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Perez, M. (2007). *Unidad didáctica: Introducción a la geometría fractal*. Ediciones Mar Galicia S.C.
- Pochulu, M y Rodríguez, M. (2015). *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

- Potosí, L. (2018). *Análisis didáctico del modelo de formación de profesores de matemáticas basado en el trabajo por proyectos: El caso del concepto de función*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Preciado, M. (2016). *Análisis didáctico y sistematización de una propuesta didáctica entorno a las nociones matemáticas de regularidad y patrón en un aula heterogénea de grado quinto*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Ramírez, J. (2016). *Una mirada artística a la geometría fractal en contextos escolares a través de la propiedad de autosemejanza en noveno grado de la educación básica en Colombia*. Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Rico, L. (2004). *Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática*. Universidad de Granada, España.
- Rico, L. (2013). *El método del análisis didáctico*. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática.
- Rico, L; Lupiáñez, J y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España.
- Sabogal, S y Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- Santos, L y Barreto, O. (2022). *The fractals and their applications. Documentary review*. Escuela Superior Politecnica del Litoral. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Ecuador.
- Sinisterra, B y Garcés, L. (2022). *Abordaje de las transformaciones geométricas desde la complementariedad de los enfoques sintético y analítico en estudiantes de segundo semestre de*

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

licenciatura en matemática. Facultad de Educación y Pedagogía, Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas, Universidad del Valle, Colombia.

Solano, S y Bedoya, E. (2013). *La unidad didáctica y el análisis didáctico como instrumentos metodológicos de investigación en didáctica de la matemática y formación de profesores: el caso de la derivada*. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Colombia.

Socas, M. (1997). *Cap V: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Universidad de la Laguna, España.

Suarez, S. (s.f). *La representación en educación matemática: Atractores de sistemas iterados de funciones-una estrategia de aprendizaje*. Grupo de investigación pirámide (UPTC). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Tous, N. (2019). *Geometría vivencial. Unidad didáctica de geometría plana para alumnos de 6to grado de educación primaria*. Facultad de Educación, Universidad Internacional de la Rioja, España.

Valenzuela, M. (2012). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría*. Universidad de Granada, España.

Vargas, G y Gamboa R. (2013). *El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría*. Escuela Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica.

Vásquez, A. (2016). *Introducción a la geometría fractal*. Facultad de Educación y Humanidades, Departamento de Ciencias de la Educación Escuela de Pedagogía en Matemática, Universidad Bio-Bio, Chile.

Velasco, E. (s.f). *Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas*. E.U. de Magisterio (Segovia), Universidad de Valladolid, España.

<https://okdiario.com/curiosidades/conoce-triangulo-sierpinski-3147014>

https://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n_fractal#:~:text=es%20un%20n%C3%BAmero%20real%20que,que%20no%20admiten%20espacio%20tangente

ANEXOS

A continuación, se recopila evidencia que sustenta todo el proceso de planificación, elaboración y desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado.

Anexo 1. Sitio de aplicación de la prueba piloto de la unidad didáctica (UD).



ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 2. *Aplicación (prueba piloto) de la propuesta de Unidad Didáctica (UD).*



ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 3. Evidencia del desarrollo de algunas actividades de enseñanza (2 y 3).

Geometría Fractal → Isabelle Riasco

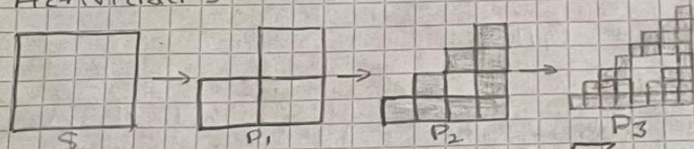
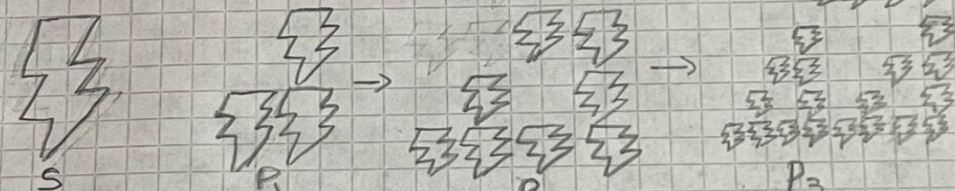
Actividad 1
 ¿Qué es fractal? Es una composición geométrica que se basa en denominar las figuras que requieren explicar a través de lo clásico.

Características
 → Repetición de formas en distintas dimensiones o escalas
 → Conserva su forma
 → Omotetia

Utilidad de un fractal → denominar y clasificar figuras que no está dentro de la teoría básica

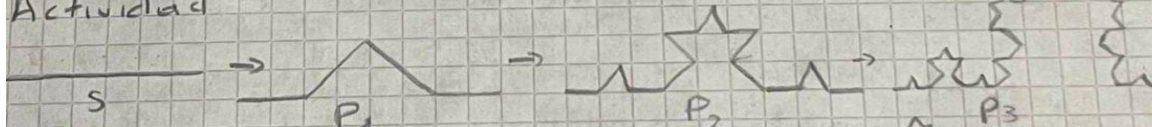
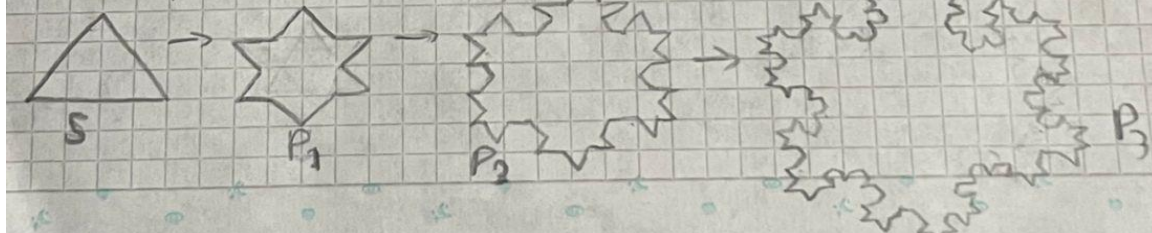
Actividad 2
 Brocoli → Su dirección es igual sin importar la escala
 → Su forma siempre se compone de lo mismo
 Helicó → Se repite la forma a pesar de que no hay mucha variación de tamaño

Actividad 3

Ambas tienden a una figura exacta con representaciones de una semilla variable dependiendo de su función

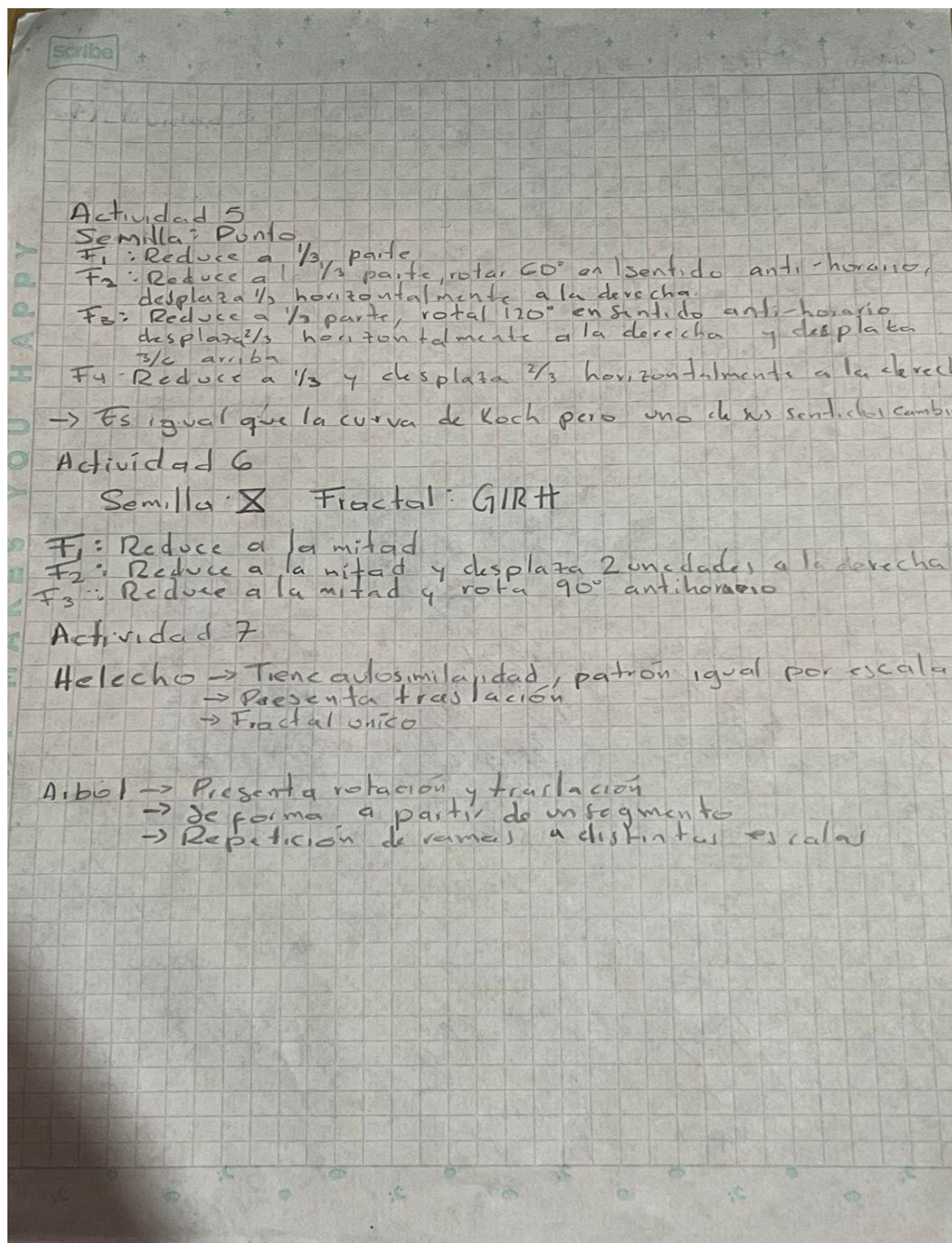
Actividad 4

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 4.

Evidencia del desarrollo de algunas actividades de enseñanza (5 y 6).



ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 5. Evidencia del desarrollo de algunas actividades de enseñanza (1,2 y 3).

Laura Guevara Pantoja 11°

Actividad 1

¿Qué es un fractal?

R// Se puede decir que es una figura geométrica pero no comunes que se repiten a gran escala sin diferenciarse a medida que esta aumenta.

¿Cuáles son las características principales?

- Se repiten a gran escala sin perder su forma.
- Figuras geométricas poco comunes.
- Unión de diferentes figuras.
- Son autosemejantes.

Función de los fractales.

Es muy útil para la elaboración de animaciones, diferentes tecnologías y a que es una sucesión, patrones, repeticiones de imágenes.

Actividad 2

Brócoli: Se puede observar como a pesar de que se muestran cada vez una parte más pequeña de este se puede ver que la forma no cambia solo la escala de cada una de ellas.

Hlechos: se observa que el helecho es la unión de la misma figura haciendo que se vea a gran escala.

Actividad 3

a). Semilla

P_1 P_2 P_3 P_4

f_1 f_2 f_3 f_4

f_1 : Reducir a la mitad
 f_2 : Reducir a la mitad, desplazar 1 unidad a la derecha
 f_3 : f_2 + desplazar una unidad verticalmente hacia arriba

Semilla

P_1 P_2 P_3 P_4 P_5

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 6. Evidencia del desarrollo de algunas actividades de enseñanza (4 y 5).

b) Semilla

La figura resultante se componería de cada producción a una escala muy pequeña pero conservando su forma, al punto de casi no diferenciar la semilla pero a su vez no pierde su forma.

c) Semilla

Se formaría una figura llena de líneas y picos que al repetirse tantas veces se podría asociar a la mitad de un copo de nieve.

Actividad 4 Geogebra.

Actividad 5.

Semilla: Segmento

F_1 = Reduce a la tercera parte.

F_2 = Reduce a la tercera parte, rotar 60° en sentido Antihorario y desplazar $1/3$ horizontalmente a la derecha.

F_3 = Reduce a la tercera parte, rotar 120° en sentido antihorario y desplazar $2/3$ horizontalmente a la derecha.

F_4 = Reduce a la tercera parte y desplazar $2/3$ a la derecha.

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 7. Evidencia del desarrollo de algunas actividades de enseñanza (1, 2 y 3).

escala y dimensión misma?

Shara Cardata II

Actividad 1

1. ¿Qué es un fractal?

- Figuras geométricas que se diferencian entre ellas y van fuera de lo común
- Características:
 - Son diferentes
 - Se repiten a grandes escalas
 - Misma dimensión
- Auto semejanza
- Uso de los fractales:
 - Para conocer la autenticidad de ciertos

2. Descripción gráfica

- De él pueden partir el mismo proceso a pequeñas dimensiones.

Halecho

- Sus formas se repiten al tener los mismos

3. Semilla Producción

FI CF

P1. 

P2. 

P3. 

PA. 

6. Nombre del fractal: Cardata

Semilla: 

SIF

F1 = Reducir 1/3

a la mitad

F = 

rotar 90°

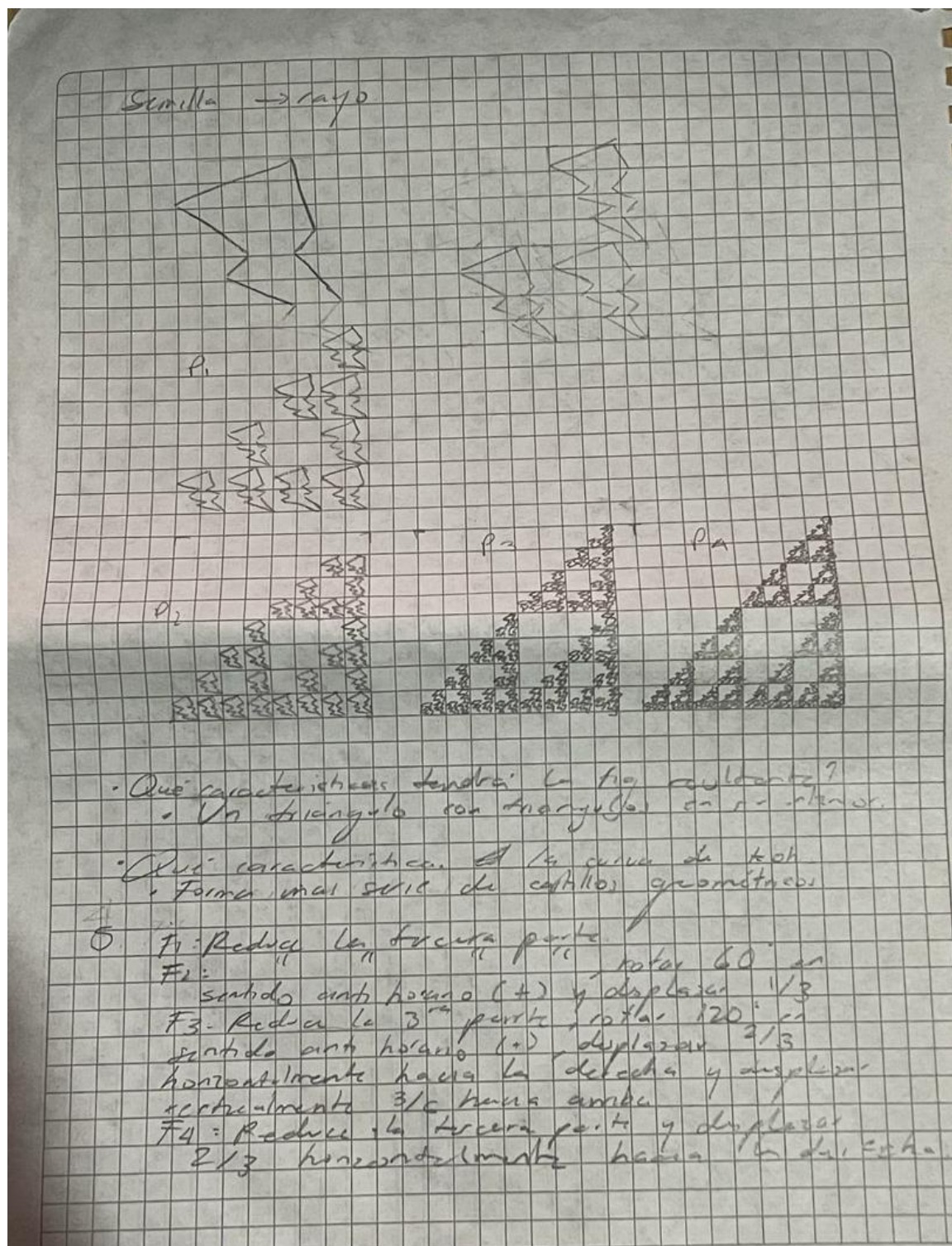
desplazar 1/3 unidades

F2 = 

a la mitad

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 8. Evidencia del desarrollo de algunas actividades de enseñanza (5).



Anexo 9. Cuestionario de evaluación (preguntas 1-4)

Examen Transformaciones Geométricas y Fractales

Determinar la veracidad o falsedad para cada uno de los siguientes enunciados según corresponda.

** Indica que la pregunta es obligatoria*

1. Correo electrónico *

2. La expresión fractal viene del latín fratás, que significa fracturado, roto, irregular. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

3. Un objeto fractal muestra detalles de sí mismo a cualquier escala. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

4. Los fractales se caracterizan por ser autosemejantes con limitación de escalas. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 10. Cuestionario de evaluación (preguntas 5-8)

25/6/23, 18:45

Examen Transformaciones Geométricas y Fractales

5. La autosemejanza se puede definir a partir del siguiente enunciado: Un objeto tiene la propiedad de autosimilitud si una pequeña sección suya puede ser vista como una replica a menor escala del objeto. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

6. Los fractales únicamente se ven en el campo de las matemáticas. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

7. El proceso de iteración sobre un fractal consiste en repetir n veces la misma figura o patrón. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

8. Una transformación geométrica es un movimiento aplicado a las figuras en el plano. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 11. Cuestionario de evaluación (preguntas 9-12)

25/6/23, 18:45

Examen Transformaciones Geométricas y Fractales

9. Las transformaciones geométricas involucradas en la construcción de fractales mediante un proceso iterativo son: rotación, traslación y simetrías. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

10. La transformación geométrica llamada homotecia se utiliza para ampliar o reducir una figura en el plano. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

11. La transformación geométrica utilizada para cambiar de posición una figura en el plano cambia es: rotación. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

12. La diferencia entre las transformaciones geométricas de traslación y rotación se puede describir en términos de posición y dirección de una figura en el plano. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

☐ Verdadero

☐ Falso

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 12. Resultados de la evaluación de algunos alumnos

Estadística

Promedio

10 / 11 puntos

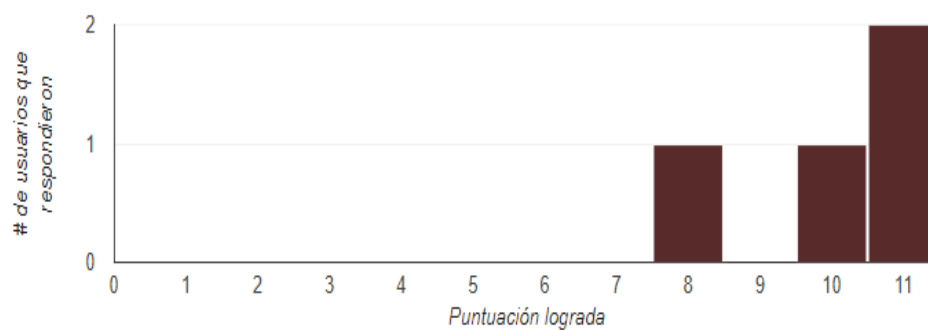
Mediana

10 / 11 puntos

Rango

8 - 11 puntos

Distribución de puntos totales



Puntuaciones

[Mostrar puntuaciones](#)

Correo electrónico	Puntuación/11	Se muestra la puntuación
williamperea61@gmail.com	8	3 jun 12:35
sara.trejos.garcia@gmail.com	11	3 jun 16:31
dannitacdm2006@gmail.com	10	4 jun 23:37
isabellariascos7@gmail.com	11	5 jun 07:57

25/6/23, 18:59

Evaluación de la Unidad Didáctica (UD)

Evaluación de la Unidad Didáctica (UD)

El objetivo de esta encuesta es recoger su opinión y valorar la satisfacción de la actividad realizada.

Por favor, valore cada una de las siguientes preguntas del 1 al 5 marcando la opción que considere más coincidente con su opinión, considerando como:

- 1- Muy insatisfactorio
- 2- Insatisfactorio
- 3-Indiferente
- 4-Satisfactorio
- 5- Muy satisfactorio

* Indica que la pregunta es obligatoria

1. Correo electrónico *

2. Nombre *

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 14. Cuestionario de valoración (preguntas 3-4)

3. ¿El diseño de la actividad de aprendizaje era lo que usted esperaba? *

Marca solo un óvalo.

Muy insatisfactorio

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

5 ☐

Muy satisfactorio

4. ¿Ha entendido con claridad el contenido propuesto en toda la unidad didáctica? *

Marca solo un óvalo.

Muy insatisfactorio

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

5 ☐

Muy satisfactorio

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 15. Cuestionario de valoración (preguntas 5-7)

25/6/23, 18:59

Evaluación de la Unidad Didáctica (UD)

5. Desde su punto de vista, mencione aquellas fortalezas que se logran resaltar en el marco de toda la unidad didáctica. *

6. Desde su punto de vista, mencione aquellas debilidades que se logran resaltar en el marco de toda la unidad didáctica. *

7. Realice algún comentario o sugerencia que permita mejorar la unidad didáctica anteriormente propuesta (tener en cuenta: contenido, presentación, diseño, etc.) *

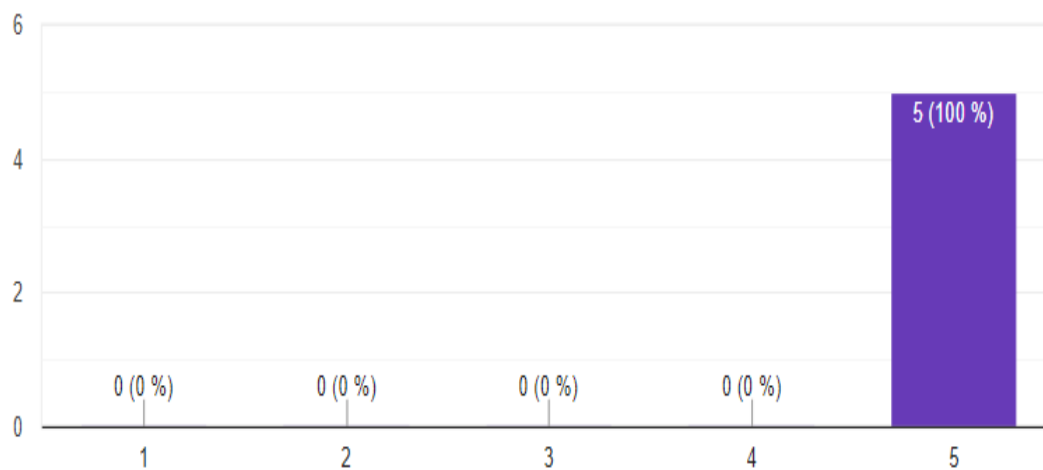
ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 16. Respuestas de algunos alumnos acerca de la valoración de la Unidad Didáctica (UD) (respuestas 3-4)

¿El diseño de la actividad de aprendizaje era lo que usted esperaba?



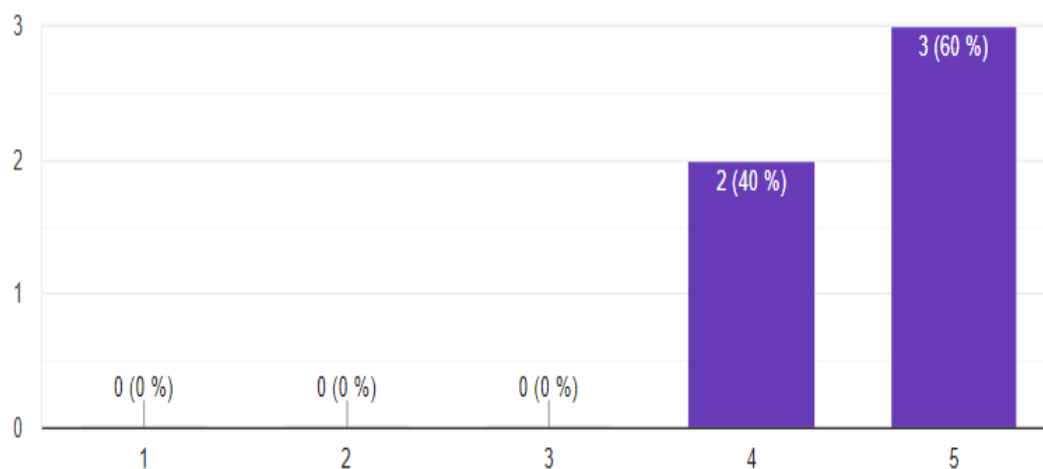
5 respuestas



¿Ha entendido con claridad el contenido propuesto en toda la unidad didáctica?



5 respuestas



ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 17. Respuestas de algunos alumnos acerca de la valoración de la Unidad Didáctica (UD) (respuestas 5-6)

Desde su punto de vista, mencione aquellas fortalezas que se logran resaltar en el marco de toda la unidad didáctica.

5 respuestas

.
Razonamiento e interpretación de fenómenos geométricos
Razonamiento y lógica
Hubo interés por si de verdad los estudiantes entendían, preguntándoles que pensaban y cuáles eran sus conclusiones; también hubo explicación a todas las dudas que se mencionaron.
Las bases de la geometría

Desde su punto de vista, mencione aquellas debilidades que se logran resaltar en el marco de toda la unidad didáctica.

5 respuestas

.
Construcción de figuras geométricas, uso del espacio
Creación o dibujo de figuras geométricas y manejo del espacio
Al principio no se entendían bien los videos debido al ruido, aunque esto era algo externo.
Ninguna

Anexo 18. Respuestas de algunos alumnos acerca de la valoración de la Unidad Didáctica (UD) (respuesta 7)

Realice algún comentario o sugerencia que permita mejorar la unidad didáctica anteriormente propuesta (tener en cuenta: contenido, presentación, diseño, etc.)

5 respuestas

.
Buscar mejor contenido audiovisual, que explique mejor la temática
Mejorar el contenido para explicar el tema
Creo que sería mejor exponer la actividad en diapositivas, se puede organizar punto por diapositiva y es más llamativo a la vista.
Un poco más dinámico

ANÁLISIS DIDÁCTICO, VAN HIELE Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Anexo 19. Permiso para tratamiento de datos e información con fines académicos.



FORMATO DE AUTORIZACIÓN DE TRATAMIENTO PROTECCIÓN DE DATOS PERSONALES

Dando cumplimiento a lo dispuesto en la Ley 1581 de 2012, "Por el cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales" y de conformidad con lo señalado en el Decreto 1377 de 2013, con la firma de este documento manifiesto que he sido informado de lo siguiente:

1. Brayan Andres Stuart Vernaza identificado con cedula 1005876874 actuará como Responsable del Tratamiento de datos personales de los cuales soy titular y que, conjunta o separadamente podrá recolectar, usar y tratar mis datos personales conforme la Política de Tratamiento de Datos Personales.
2. Que me ha sido informada la (s) finalidad (es) de la recolección de los datos personales, la cual consiste en: actividades realizadas con el fin de complementar el trabajo de grado de Brayan Andres Stuart Vernaza, el cual se realiza en torno a la geometría fractal, recuperando algunos elementos de la geometría euclidiana, siguiendo la teoría de los Van Hiele junto a una propuesta de modelo local de análisis didáctico.
3. Es de carácter facultativo o voluntario responder preguntas que versen sobre Datos Sensibles o sobre menores de edad.
4. Mis derechos como titular de los datos son los previstos en la Constitución y la ley, especialmente el derecho a conocer, actualizar, rectificar y suprimir mi información personal, así como el derecho a revocar el consentimiento otorgado para el tratamiento de datos personales.
5. Mediante el correo brayan.stuart@correounivalle.edu.co, podré radicar cualquier tipo de requerimiento relacionado con el tratamiento de mis datos personales.
6. Brayan Andres Stuart Vernaza garantizará la confidencialidad, libertad, seguridad, veracidad, transparencia, acceso y circulación restringida de mis datos y se reservará el derecho de modificar su Política de Tratamiento de Datos Personales en cualquier momento.
7. Teniendo en cuenta lo anterior, autorizo de manera voluntaria, previa, explícita, informada e inequívoca a Brayan Andres Stuart Vernaza para tratar mis datos personales, fotografías y videos de acuerdo con su Política de Tratamiento de Datos Personales para los fines relacionados con su objeto.
8. La información obtenida para el Tratamiento de mis datos personales la he suministrado de forma voluntaria y es verídica. Se firma en la ciudad de _____, a los ____ días del mes de ____ del año ____.

Firma: _____

Nombre: _____

Identificación: _____

Contacto: _____