



IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA CLIL EN LA ENSEÑANZA DE LAS
NOCIONES DE PERÍMETRO Y ÁREA DENTRO DEL CONTEXTO DE LA HUERTA
ESCOLAR A TRAVÉS DEL INGLÉS COMO LENGUA EXTRANJERA

JUAN CARLOS JARAMILLO ANTE

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS TECNOLOGIAS Y CULTURAS.

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2022



IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA CLIL EN LA ENSEÑANZA DE LAS
NOCIONES DE PERÍMETRO Y ÁREA DENTRO DEL CONTEXTO DE LA HUERTA
ESCOLAR A TRAVÉS DEL INGLÉS COMO LENGUA EXTRANJERA

JUAN CARLOS JARAMILLO ANTE

201503686

Trabajo de Grado para optar al título de
Magister en Educación, énfasis en Educación Matemática

Dirigido por
Jorge Enrique Galeano Cano
Marco Emilio Correa Repizo

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS TECNOLOGÍAS Y CULTURAS.
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2022

A mi Padre Dios

quien da el querer y el hacer

de toda buena obra.

AGRADECIMIENTOS

A Dios dueño de mi vida y de mis proyectos personales, que con su palabra ha sostenido mi existir.

A mi esposa Viviana Zambrano, y a nuestros tres hijos Juan Daniel, Josué e Isabella, por su amor, apoyo, paciencia y compañía durante todo este proceso de formación académica.

A mis padres y familiares por su acompañamiento y oración, y especialmente a mi suegro Lorenzo Zambrano, q. e. p. d. que fue su deseo de verme culminar mis estudios.

A la Universidad del Valle quien me formó como profesional, a mi director de Tesis, el profesor Jorge Enrique Galeano, a mi codirector de Tesis, el profesor Marco Emilio Correa por su paciencia, entrega y acompañamiento académico.

Al Colegio La Arboleda en donde a través del quehacer docente por 19 años me formé como maestro.

A todos los que me aprecian y aprecio.

RESUMEN

En este informe de trabajo final se presenta un aporte a la investigación en educación matemática en contextos bilingües, en los cuales la enseñanza de las matemáticas se da en una lengua extranjera (LE)¹. Para desarrollar esta propuesta investigativa se implementó la metodología de aula CLIL (Content and Language Integrated Learning)² la cual permitió la integración de ambos conocimientos, el matemático y el de la LE, en los procesos de enseñanza. Bajo esta metodología de aula se realizó el diseño de un experimento de enseñanza en el contexto de la huerta escolar con estudiantes de grado cuarto de primaria, el cual involucró la enseñanza de las nociones³ de longitud, perímetro y área, con la enseñanza del vocabulario y las expresiones lingüísticas en inglés necesarias para comunicarse tanto de manera oral como escrita, dentro de este contexto pedagógico.

Los diseños que se aplicaron en esta investigación reflejaron las teorías expuestas en el marco teórico sobre el enfoque comunicacional, la educación matemática realista, la enseñanza de las nociones de perímetro y área, la educación matemática en contextos bilingües, y también, sobre la metodología CLIL. Al final, teniendo en cuenta los resultados obtenidos de las intervenciones en el aula con los diseños implementados, se recogen varias conclusiones las cuales están en consonancia con las teorías presentadas.

¹ Se habla de lengua extranjera cuando la lengua que se estudia no es la lengua propia del país en que se estudia ni coexiste como oficial o autóctona.

² CLIL se traduce al español como AICLE que significa “Aprendizaje Integrado de Contenido y de Lengua Extranjera.

³ Se utiliza la palabra noción, para hacer referencia específica al tratamiento inicial de los conceptos de perímetro y área que se abordaron en el presente trabajo de investigación.

Se concluye que la experimentación en contextos reales permite el desarrollo de habilidades matemáticas necesarias para la adquisición de las propiedades de las magnitudes de longitud y superficie, a través de procesos de reinvención y descubrimiento. También se encontró que las interacciones entre todos los participantes dentro del contexto propuesto, incluyendo las interacciones con el docente-investigador, hicieron de la comunicación un aspecto fundamental para el aprendizaje matemático en la lengua extranjera, confirmando así que el aprendizaje es un acto social. Se pudo también corroborar que, la metodología CLIL es un recurso de aula apropiado como macroestructura didáctica para la elaboración de diseños de implementación de un episodio de enseñanza bilingüe, y que el enfoque discursivo, y el cambio de código lingüístico o “code switching”, son fundamentales para lograr los aprendizajes matemáticos y lingüísticos que se esperan. Por último se encontró, que la enseñanza de las nociones de perímetro y área debe privilegiar la experimentación, la comparación, la iteración de la unidad de medida en contextos reales, la descomposición y recomposición de superficies, los recubrimientos del plano, para luego pasar a lo icónico y a lo procedimental.

PALABRAS CLAVE: enfoque comunicacional, enseñanza bilingüe de las matemáticas, metodología CLIL, perímetro y área, huerta escolar, experimento de enseñanza.

ABSTRACT

This research work's final report presents a contribution to research in mathematics education in bilingual contexts, where mathematics is taught in a foreign language (FL). To develop this research work, the CLIL (Content and Language Integrated Learning) classroom methodology was implemented, which allowed the integration of both knowledge, mathematics, and FL, in the teaching processes. Under this classroom methodology, the design of a teaching experiment was conducted in the context of the school garden with fourth-grade students at primary school, which involved the teaching of the notions of length, perimeter, and area, with the teaching of vocabulary and the linguistic expressions in English necessary to communicate both orally and in writing, within this pedagogical context.

The designs that were applied in this research work reflected the theories exposed in the theoretical framework, such as the communicational approach, the realistic mathematical education, the teaching of the notions of perimeter and area, mathematical education in bilingual contexts, and the CLIL methodology. In the end, taking into account the results obtained from the classroom interventions with the implemented designs, several conclusions are drawn, which are in line with the theories presented.

It is concluded that experimentation in real contexts allows the development of mathematical skills necessary for the acquisition of the properties of the magnitudes of length and surface area, through processes of reinvention and discovery. It was also found that the interactions among all participants within the proposed context, including interactions with the teacher-researcher, made communication a fundamental aspect of mathematical learning in the foreign language, thus confirming that learning is a social act. It was also possible to corroborate

that the CLIL methodology is an appropriate classroom resource as a didactic macrostructure for the elaboration of implementation designs of a bilingual teaching episode, and that the discursive approach and code-switching are fundamental to achieving the expected mathematical and linguistic learning. Finally, it was found that the teaching of the notions of perimeter and area should privilege experimentation, comparison, iteration of the unit of measurement in real contexts, decomposition, and decomposition of surfaces, and plane overlays, and then move on to the iconic and procedural.

KEYWORDS: communicational approach, bilingual teaching of mathematics, CLIL methodology, perimeter and area, school garden, teaching experiment.

TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	4
RESUMEN.....	5
ABSTRACT	7
INTRODUCCIÓN	15
CAPÍTULO I. Problema de investigación	17
1.1 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	17
1.2 CONTEXTO INSTITUCIONAL	21
1.3 PREGUNTA PROBLEMATIZADORA.....	25
1.4 OBJETIVOS.....	26
1.4.1 Objetivo General	26
1.4.2 Objetivos Específicos.....	26
1.5 ANTECEDENTES	27
1.5.1 Antecedentes de educación matemática bilingüe a nivel internacional	27
1.5.2 Antecedentes sobre la implementación de la metodología CLIL en la enseñanza de las matemáticas a nivel nacional.....	34
1.5.3 Antecedentes sobre Área y Perímetro	36
CAPÍTULO II. Marco de referencia	43
2.1 La comunicación como enfoque de enseñanza de las matemáticas y de las lenguas.	45
2.1.1 Enfoque Comunicacional en el Aprendizaje de las Matemáticas de Anna Sfard	45
2.1.2 El Enfoque Comunicativo en la Enseñanza de las Lenguas.....	48
2.2 Educación Matemática Realista.....	52
• Principio de Actividad.	54
• Principio de Realidad.....	54
• Principio de Niveles.....	55
• Principio de Reinversión Guiada.	57
• Principio de Interacción.....	57
• Principio de Interrelación o Interconexión.	58
2.3 Aspectos de la educación matemática bilingüe	60
2.3.1 Perspectivas sobre el Lenguaje y Aprendizaje de las Matemáticas en Estudiantes Bilingües	60
2.3.2 El Uso de dos Lenguas en el Aprendizaje de las Matemáticas	66
2.3.3 La Hipótesis de la Interdependencia Lingüística	68

2.4	Enseñanza del área y EL perímetro en LA EDUCACIÓN básica primaria	71
2.4.1	Magnitud y Medida	71
2.4.2	La Noción de Unidad	74
2.4.3	Aspectos de la Magnitud Lineal Longitud	76
2.4.3.1	La Noción de Distancia y La Conservación de la Longitud	76
2.4.3.2	Desarrollo del Concepto de Longitud en Freudenthal	77
2.4.3.3	Aspectos sobre la Medición de Longitudes	79
2.4.4	La Magnitud Multilineal Superficie	81
2.4.4.1	Uso de los Términos Superficie y Área	82
2.4.4.2	Obstáculos al abordar la Magnitud Superficie y el Área	82
2.4.4.3	Área y Perímetro	84
2.4.4.4	Objetivos de la Enseñanza del Área en la Escuela	85
2.4.5	El Tratamiento Didáctico de la Medida	86
2.5	La Metodología CLIL (Content and Language Integrated Learning) o AICLE (Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras)	89
2.5.1	Principios de la Metodología CLIL Aplicados a la Enseñanza de las Matemáticas.	90
2.5.1.1	Contenido o Conocimientos Básicos del pensamiento métrico y de los sistemas de medida.	92
2.5.1.2	Cultura o Contexto	97
2.5.1.3	Cognición o Procesos generales.....	101
2.5.1.4	Comunicación.	104
2.5.2	Metodología CLIL en Colombia	109
CAPÍTULO III. Experimentación		112
3.1	Enfoque Cualitativo	113
3.2	Investigación de Diseño.....	114
3.3	Experimento de Enseñanza.....	116
3.3.1	Selección de los participantes	118
3.3.2	Fases del Experimento de Enseñanza.....	119
3.3.3	Preparación del Experimento	121
3.3.4	Las Conjeturas de la Investigación.....	122
3.3.5	Uso de la Metodología CLIL en la Elaboración Macro-Didáctica de los Diseños	123
3.3.6	Análisis a Priori de la Secuencia de Situaciones sobre Longitud y Perímetro.....	130

3.3.6.1	Diseño 1, Situación 1, Tarea 1 (D1S1T1): Reconocimiento de la Magnitud Longitud en un Objeto Tridimensional.....	130
3.3.6.2	Diseño 1, Situación 1, Tarea 2 (D1S1T2): Observación y Comparación de Longitudes.....	131
3.3.6.3	Diseño 1, Situación 2 (D1S2): Estimación y Medición de Longitudes con Instrumentos Antropométricos.....	131
3.3.6.4	Diseño 1, Situación 3 (D1S3): Medición de Longitudes con Unidades no Estandarizadas.....	132
3.3.6.5	Diseño 1, Situación 4, Tarea 1 y 2 (D1S4T1-2): Medición del Perímetro con unidades no Estandarizadas	134
3.3.6.6	Diseño 1, Situación 4, Tarea 3 y 4 (D1S4T3-4): Conservación e Invariancia de la Magnitud Longitud	134
3.3.6.7	Diseño 1, Situación 5 (D1S5): Carácter unidimensional del Perímetro	135
3.3.7	Análisis a Priori de la Secuencia de Situaciones sobre Perímetro y Área.....	135
3.3.7.1	Diseño 2, Situación 1, Tarea 1, 2 y 3 (D2S1T1-2-3): Comparación de Áreas.....	135
3.3.7.2	Diseño 2, Situación 1, Tarea 4, 5 y 6 (D2S1T4-5-6): Disociación entre el área y la forma de la superficie.....	136
3.3.7.3	Diseño 2, Situación 2 (D2S2T1-2): Conservación del Área. Descomposición de la Superficie con Procedimientos Geométricos	137
3.3.7.4	Diseño 2, Situación 3 (D2S3): Disociación del Área del Perímetro.....	138
3.3.7.5	Diseño 2, Situación 4, Tarea 1 (D2S4T1): Recubrimiento de la Superficie... ..	139
3.3.7.6	Diseño 2, Situación 4, Tarea 2 (D2S4T2): Conservación del Área	140
3.3.8	Experimentación.....	141
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS RETROSPECTIVOS		145
4.1	RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS LOCALES	146
4.1.1	Desarrollo del Concepto de Perímetro	147
4.1.2	Desarrollo del Concepto de Perímetro y Área	167
4.2	ANÁLISIS RETROSPECTIVO.....	185
CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		189
REFERENCIAS		193
ANEXOS.....		198
A.	ANEXO 1. DISEÑO SOBRE LONGITUDES Y PERÍMETROS	198
B.	ANEXO 2. DISEÑO SOBRE PERIMETRO Y ÁREA.....	208

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño. Grado Quinto.	23
Figura 2. Competencias evaluadas. Grado Quinto.	23
Figura 3 Componentes evaluados. Grado Quinto.	24
Figura 4. Average by Strand - Math's 5° Grade. Colegio La Arboleda 2018.	24
Figura 5 . Average by Strand - Math's 5° Grade. Colegio La Arboleda 2019.	25
Figura 6 . Articulación de la metodología CLIL con el problema de la enseñanza de perímetro y área en un contexto de bilingüismo.	44
Figura 7 . La comunicación como enfoque de enseñanza de las matemáticas y de las lenguas. ...	52
Figura 8 . Principios de la educación matemática realista.	59
Figura 9 . Perspectivas sobre el lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas en contextos bilingües.	64
Figura 10 . El uso de ambas lenguas en el aprendizaje de las matemáticas como generador de competencia matemática y lingüística.	67
Figura 11 . La Analogía del Iceberg.	69
Figura 12. La Huerta Escolar como Medio de Construcción de la Magnitud Longitud y Superficie.	84
Figura 13. Principios de la Metodología CLIL (contenido, cultura, cognición y comunicación,) en armonía con los Lineamientos Curriculares del MEN (conocimientos básicos, contexto y procesos generales) bajo un enfoque comunicacional.	92
Figura 14. El contexto de la Huerta Escolar como lugar privilegiado para el aprendizaje de las nociones de Perímetro y Área y para el desarrollo de las habilidades comunicativas en Inglés.	100
Figura 15. The Language Triptych.	108
Figura 16. Enfoque metodológico utilizado para dar respuesta a los objetivos de investigación.	113
Figura 17. Varas de medición de longitudes y Fichas para recubrir la superficie de la huerta.	118
Figura 18. Ciclo de acciones realizadas durante el experimento de enseñanza	121
Figura 19. Contexto desde donde se originan las secuencias de actividades	125
Figura 20. Longitudes abordadas en el experimento en la huerta	130
Figura 21. Vocabulario y estructuras gramaticales para realizar comparaciones de longitudes en la huerta.	131
Figura 22. Vocabulario y expresiones lingüísticas para comunicar estimaciones de longitudes.	132
Figura 23. Relación fraccionaria entre las varas de medir	133
Figura 24. Situación de comparación de áreas.	136
Figura 25. Vocabulario y estructuras gramaticales para la comparación de áreas.	136

Figura 26. Tarea D2S1T4-5-6	137
Figura 27. Figuras de la tarea D2S2T1	138
Figura 28. Tarea D2S2T2.....	138
Figura 29. Figuras de la tarea D2S3.....	139
Figura 30. Piezas del Tangram para recubrir el área 1 de la huerta.	140
Figura 31. Cuadrícula para formar el cuadrado con las piezas del Tangram.	141
Figura 32. Mediciones Antropométricas realizadas por los estudiantes.	152
Figura 33. Uso de fracciones en las mediciones antropométricas de la estudiante E4.	155
Figura 34. Medición del Perímetro de la Huerta realizada por un grupo de estudiantes.	158
Figura 35. Resolución de un conflicto cognitivo cuando no se logra capturar la medida de una longitud.....	160
Figura 36. Equivalencia entre vas de medir encontrada por un grupo.....	162
Figura 37. Figuras realizadas por los estudiantes al transformar la forma de la huerta manteniendo el mismo perímetro.....	163
Figura 38. Huerta en forma de elefante creada por la estudiante E4 de igual área que las huertas D y E.	177
Figura 39. Recubrimiento del Área 1 de la Huerta realizado por un grupo de estudiantes.....	181

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Fases de la investigación	119
Tabla 2. Implementación de la metodología CLIL en la elaboración Macro-Didáctica de los diseños sobre perímetro y área	123
Tabla 3. Características Generales de la Investigación	142
Tabla 4. Comparación de Longitudes (D1S1T2)	149
Tabla 5. Estimación y Medición de Longitudes con Instrumentos Antropométricos (D1S2)	152
Tabla 6. Medición de Longitudes con Unidades no Estandarizadas (D1S3)	156
Tabla 7. Medición del Perímetro con unidades no Estandarizadas (D1S4T1-2)	159
Tabla 8. Conservación e Invariancia de la Magnitud Longitud (D1S4T3-4).....	164
Tabla 9. Carácter unidimensional del Perímetro (D1S5)	166
Tabla 10. Comparación de Áreas. El Área como número de Unidades que recubren la Superficie (D2S1T1-2-3)	168
Tabla 11. Disociación entre el Área y la Forma de la Superficie (D2S1T4-5-6).....	171
Tabla 12. Conservación del Área. Descomposición de la Superficie con Procedimientos Geométricos (D2S2).....	175
Tabla 13. Disociación del Área del Perímetro (D2S3).....	178
Tabla 14. Recubrimiento de la Superficie por procedimientos geométricos (D2S4T1)	181
Tabla 15. Conservación del Área (D2S4T2)	183

INTRODUCCIÓN

La educación matemática enfoca sus esfuerzos en fomentar y dar respuesta a la problemática alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y una de las problemáticas más recientes y muy poco abordada en nuestro entorno nacional, es la educación matemática en contextos de bilingüismo. Este ámbito el cual es el centro de interés de la presente investigación abre un espacio de discusión, análisis y reflexión alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en otra lengua.

Son cada vez más las escuelas del sector privado que han ido implementando la enseñanza de las matemáticas en inglés, y este nuevo campo de la educación aún no ha sido abordado sistemáticamente en los trabajos de investigación. Este trabajo pretende, por lo tanto, aportar a este campo con un análisis y reflexión sobre la metodología CLIL como propuesta de aula para implementar la enseñanza de las matemáticas en una lengua extranjera.

Por lo hasta ahora planteado, este trabajo de investigación aborda un problema de análisis que se deriva en dos, la enseñanza inicial de las nociones de perímetro y área, y la enseñanza de la lengua extranjera necesaria para la apropiada elaboración del discurso matemático en el aula. Como propuesta teórica y metodológica para abordar esta situación, se implementará la metodología CLIL para integrar el contenido académico con el de la nueva lengua.

Para abordar esta problemática, este trabajo de investigación se presenta de la siguiente manera: el primer capítulo se enfocó en plantear el problema de investigación que incluyó la justificación, el contexto, la pregunta problema, los objetivos, y los antecedentes los cuales cubrieron investigaciones en tres frentes: acerca de la educación matemática bilingüe, sobre la

implementación de la metodología CLIL en la enseñanza de las matemáticas, y por último sobre la enseñanza de las nociones de perímetro y área en la escuela.

El capítulo segundo recoge los fundamentos teóricos los cuales se organizaron en cinco partes: la primera parte se enfoca en lo discursivo, tanto en el enfoque comunicacional de Anna Sfard para la enseñanza de las matemáticas, como en el enfoque comunicativo de la enseñanza de las lenguas. La segunda parte plantea los principios de la educación matemática realista de Freudenthal que permitirán concretizar la propuesta discursiva. La tercera parte expone diversos aspectos teóricos sobre la educación matemática bilingüe, las perspectivas del lenguaje, el uso de las dos lenguas, la nativa y la extranjera en los episodios comunicativos de aprendizaje. La cuarta parte se centra en los conceptos de perímetro y área y su tratamiento didáctico en el aula de clase, para terminar con la quinta parte que plantea los principios de la metodología CLIL, como solución a la problemática abordada en la presente investigación.

El capítulo tercero presenta la metodología de investigación basada en los experimentos de enseñanza, se describen sus fases, la trayectoria con el respectivo análisis a priori de los diseños, las conjeturas de la investigación y la implementación de la metodología CLIL en la macro estructura de los diseños.

El cuarto capítulo presenta los análisis retrospectivos que incluyen las producciones de algunos estudiantes, y un análisis de los procesos de aprendizaje de las nociones de perímetro y área junto con el análisis del discurso matemático en inglés de los estudiantes.

En el capítulo cinco se describen las conclusiones y las recomendaciones finales a las que se llegaron con la implementación y análisis de la trayectoria de aprendizaje, y traen aportes a los postulados teóricos expuestos en la presente investigación.

CAPÍTULO I. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo se presentan los elementos que evidencian la problemática en la cual se sustenta este trabajo de investigación acerca de la educación matemática bilingüe y la enseñanza de las nociones de perímetro y área en una lengua extranjera, a través de la metodología CLIL.

Se describen también las características generales del contexto escolar en el cual se desarrolla la intervención, la población a quien está dirigida esta institución educativa, y el desempeño de los estudiantes en las pruebas estandarizadas nacionales e internacionales.

De igual manera, se presentan los resultados de los análisis de los estudios más relevantes, realizados sobre la enseñanza de las matemáticas en otra lengua, y los resultados de los estudios sobre la enseñanza de los conceptos de perímetro y área que influyen de manera directa en este trabajo de investigación. Al final se presentan los objetivos que se constituyen como ejes conductores de este trabajo.

1.1 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El inglés es el tercer idioma con más hablantes nativos, y el primer idioma con más hablantes no-nativos en el mundo, de acuerdo con el portal Statista (*Los idiomas más hablados en el mundo*, 2021). Hoy en día se podría afirmar que el inglés es una lengua “franca” pues es la lengua predominante en los intercambios comerciales, académicos y ha sido también escogida como la lengua vehicular entre hablantes con diferentes lenguas nativas (L. Rodríguez, 2011)

Para responder a esta tendencia global muchos planteles educativos del sector privado en Colombia y muchas escuelas en el mundo, han incluido en sus currículos la enseñanza de diferentes asignaturas, entre ellas las matemáticas, en el idioma inglés. Este modelo de inmersión en una lengua extranjera pretende brindar a los estudiantes la posibilidad de interactuar en inglés, tanto en diversos contextos de la vida diaria, como en diversos contextos académicos, de manera que ellos puedan ir progresando en el desarrollo de la competencia en la nueva lengua, al tiempo que ellos adquieren conocimientos académicos.

Sfard (2008) sostiene que la comunicación está situada en el corazón mismo de la educación matemática, que desarrollar un discurso matemático es equivalente a pensar matemáticamente y que la separación entre comunicación y pensamiento es inviable dado que el pensar es un esfuerzo dialógico. Es por esta razón, que la tarea del profesor en el aula será la de modificar el discurso previo de los estudiantes por un discurso matemático.

Los profesores de matemáticas en contextos bilingües tendrán el reto de modificar las formas discursivas de los estudiantes en la nueva lengua que ellos están aprendiendo, lo que implica tener en cuenta los procesos de bilingüismo cuando se enseñan los conceptos matemáticos propios de cada grado escolar. Estos aprendizajes que los estudiantes realizan en una lengua extranjera permitirán de igual manera, la modificación de sus discursos en su lengua materna, ya que las lenguas no están separadas en el cerebro, sino que son interdependientes y los conceptos aprendidos son transmisibles entre las lenguas dado que operan a través del mismo sistema central de pensamiento.⁴

⁴ Esta hipótesis se trata en el punto [2.3.3](#) del marco teórico.

En el aula bilingüe de matemáticas no se puede prescindir de la comprensión de la relación existente entre comunicación, aprendizaje de las matemáticas y bilingüismo. La enseñanza de las matemáticas en inglés debe ser investigada y comprendida, pues la inadecuada formación y comprensión de este enfoque educativo, podría conducir al fracaso o a la frustración tanto para los estudiantes en este modelo de aprendizaje, como para los maestros en el proceso de enseñanza bajo este enfoque.

La enseñanza de las matemáticas en ambientes bilingües, no solo representan un reto para los maestros sino también para los estudiantes; puesto que al mismo tiempo que ellos aprenden las matemáticas deben también aprender la nueva lengua, y por esta razón se hace indispensable que los educadores matemáticos que enseñan en otra lengua sean conscientes de los retos del bilingüismo e incluyan en su enseñanza metodologías que permitan el crecimiento en ambos sentidos.

Uno de los obstáculos de pasar por alto la enseñanza de la lengua extranjera durante la enseñanza del objeto matemático, es la pérdida de claridad frente al desempeño de los estudiantes, puesto que un bajo desempeño puede ser a causa de las dificultades del idioma y no precisamente a causa de los conceptos matemáticos enseñados. Es por esta razón que lograr comprender mejor la relación existente entre el bilingüismo y el aprendizaje de las matemáticas, permitirá realizar intervenciones adecuadas con los alumnos.

En la enseñanza de las matemáticas en contextos bilingües confluyen diversos tipos de interacciones en la nueva lengua. Los alumnos enfrentan problemas matemáticos propuestos por los maestros, otros propuestos por los libros de texto que son diseñados en países de habla inglesa y, además, problemas matemáticos presentes en pruebas internacionales que los alumnos de estas

instituciones bilingües usualmente deben presentar. Estos problemas contienen detalles lingüísticos que pueden ser inusuales para los estudiantes y les pueden presentar obstáculos los cuales deben ser abordados por los maestros en el aula de clase. Rosales et al. (2012) citado por (Adoniou & Qing, 2014) afirma que los profesores usualmente manejan con superficialidad la resolución de problemas, “superficial approach to problem-solving” (p. 5), desperdiciando así las oportunidades presentes en esta competencia matemática para enseñar la nueva lengua. Este autor afirma que el profesor de matemáticas no puede asumir, que el éxito de sus estudiantes en la lectura de textos en la clase de inglés garantizará en ellos la comprensión del inglés presente en los textos de matemáticas, sino que es necesaria una intervención directa del profesor en la enseñanza de la nueva lengua durante la enseñanza de los objetos matemáticos en el aula de clase.

Para lograr gestionar estos retos de aprendizaje de contenido matemático y de una lengua extranjera, se propone implementar la metodología CLIL, la cual está basada en 4 principios: Contenido, Comunicación, Lenguaje y Cultura. Estos principios permiten planear y ejecutar los procesos de enseñanza de los contenidos escolares teniendo en cuenta los procesos de bilingüismo en los estudiantes.

El contexto de la huerta escolar en el cual se desarrolla esta investigación está en relación directa con el principio de la Cultura en la metodología CLIL. Este principio sostiene que el aprendizaje debe darse en un entorno contextualizado y como lo afirma (Romberg, 1991), las matemáticas al ser un producto social y al crearse los objetos matemáticos como respuesta a problemas sociales para darle sentido al mundo que nos rodea, los contextos físicos son el lugar privilegiado, para su enseñanza. El contexto físico de la huerta escolar permitirá de manera

especial, abordar enseñanza las magnitudes y las medidas de perímetro y área, desde los mismos contextos de donde surgieron históricamente.

El contexto de la huerta escolar que se utiliza en esta investigación permite a los estudiantes, como afirma Treffers (1987) citado por (Bressan et al., 2016), desarrollar la “matematización progresiva” (p. 6), la cual se da en dos formas: la matematización horizontal, al tener los estudiantes que traducir el problema de la magnitud y la medida de un objeto físico al matemático descubriendo y reconstruyendo el proceso de medir, mientras tanto la matematización vertical, se vale de los conceptos de perímetro y área para resolver la situación planteada.

Como lo afirman los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) los niños deben descubrir la medición como una necesidad histórica ligada al mundo real para luego ir a los instrumentos refinados. Es por este motivo, que algunos contextos de la realidad de los estudiantes pueden y deben ser aprovechados para la comprensión de las magnitudes. Con este trabajo se busca investigar si la metodología CLIL facilita el aprendizaje de las nociones de perímetro y área, y a su vez permite el desarrollo de la competencia comunicativa en inglés de los estudiantes en la básica primaria.

1.2 CONTEXTO INSTITUCIONAL

Este trabajo de investigación se desarrolló con los estudiantes del grado cuarto de primaria del Colegio La Arboleda, situado en el sector de Pance, comuna 22 de la ciudad de Cali-Valle del Cauca. Esta institución es de carácter privado, calendario B, no confesional, ofrece una educación bilingüe en inglés desde Preescolar hasta grado undécimo.

El Colegio La Arboleda acogió un Currículo Internacional bajo la propuesta de la Universidad de Cambridge. Este currículo promueve la resolución de problemas, la investigación y el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo y busca aportar a los estudiantes habilidades y conocimientos que les permitan enfrentar adecuadamente los retos de la educación universitaria nacional e internacional. Este programa académico que se denomina “Cambridge Assessment International Education (CI)” se encuentra en más de 9.000 colegios en 162 países en el mundo.

El Currículo Internacional se orienta en inglés y brinda un marco de desarrollo de las competencias en matemáticas las cuales son evaluadas anualmente a través de pruebas de progreso llamadas “Progression Tests” y a través de pruebas de corte, al final del grado quinto de primaria y al final del grado octavo de básica secundaria, llamadas “Checkpoint”. Estas pruebas permiten monitorear el progreso de los estudiantes año tras año y la prueba “Checkpoint” provee además un informe detallado de las fortalezas y debilidades del grupo evaluado. Estas pruebas también están diseñadas en inglés.

A continuación, se presentan tres gráficos que muestran el desempeño en el área de matemáticas de los estudiantes de grado quinto de primaria del Colegio La Arboleda. Se dispone del resultado de la última prueba saber aplicada a los estudiantes correspondiente al año 2017 y de los dos últimos resultados obtenidos en la prueba “Primary Checkpoint” en el año 2018 y 2019.

La figura 1 muestra los resultados obtenidos por los estudiantes del grado quinto de primaria en el área de matemáticas en el año 2017. Se puede observar que aún un 20% de los estudiantes muestran un desempeño entre mínimo e insuficiente.

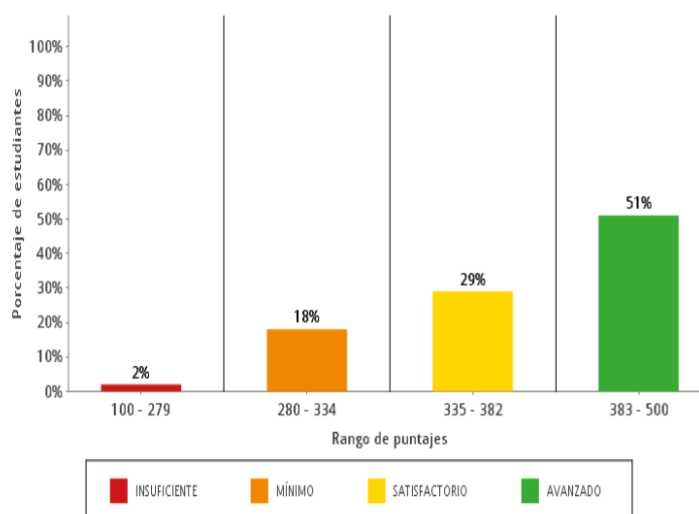


Figura 1 Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño. Grado Quinto.

Datos tomados de la página icfesinteractivo.gov.co. Colegio La Arboleda 2017.

La figura 2 muestra los desempeños de los estudiantes en las competencias del área: razonamiento, comunicación y resolución de problemas, mostrando una debilidad en la competencia de razonamiento.



Figura 2. Competencias evaluadas. Grado Quinto.

Datos tomados de la página icfesinteractivo.gov.co. Colegio La Arboleda 2017.

La figura 3 muestra el desempeño de los estudiantes en los componentes de la asignatura de matemáticas mostrando debilidad en el componente geométrico-métrico.



Figura 3 Componentes evaluados. Grado Quinto.

Datos tomados de la página icfesinteractivo.gov.co. Colegio La Arboleda 2017

En los siguientes gráficos 4 y 5 correspondientes a los resultados en matemáticas de las pruebas “Primary Checkpoint” del año 2018 y 2019 respectivamente, se muestran de manera comparativa los resultados obtenidos por los estudiantes del Colegio La Arboleda, los estudiantes de los Colegios “CI”⁵ de Colombia y los resultados obtenidos por el resto de Los colegios en el Mundo que han acogido este programa Curricular Internacional de la Universidad de Cambridge.

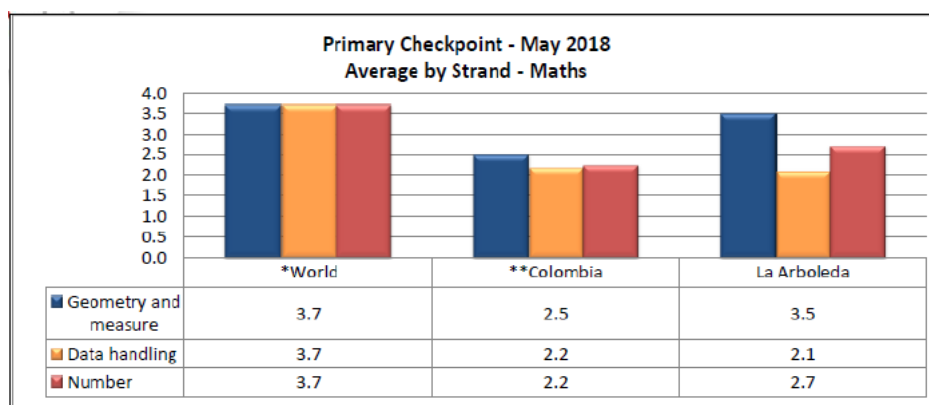


Figura 4. Average by Strand - Math's 5° Grade. Colegio La Arboleda 2018.

Datos aportados por el Colegio La Arboleda.

⁵ Currículo Internacional de la Universidad de Cambridge.

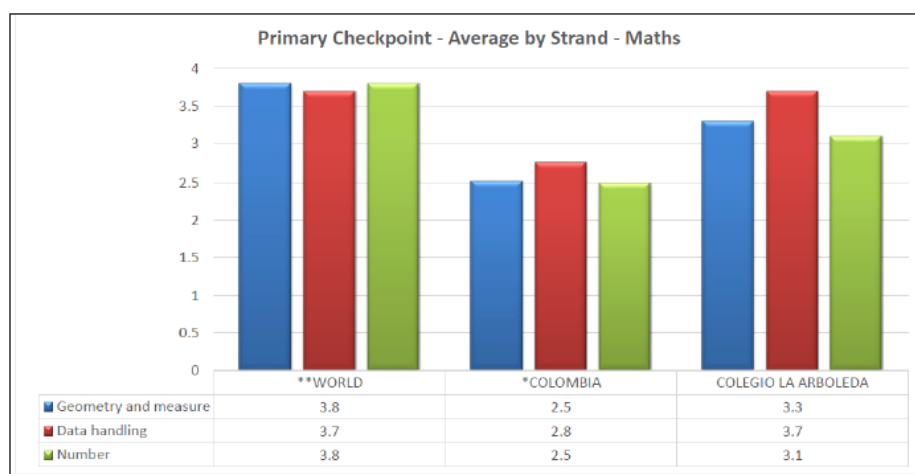


Figura 5 . Average by Strand - Math's 5° Grade. Colegio La Arboleda 2019.

Datos aportados por el Colegio La Arboleda.

Los resultados que el Colegio ha obtenido tanto en la Prueba Saber del MEN,⁶ como en las pruebas “Primary Checkpoint”, muestran progresos cada año, pero también retos para consolidar mejores aprendizajes en nuestros estudiantes. Desafortunadamente no se cuenta con resultados específicos de las preguntas referentes a los conceptos de perímetro y área. En el presente trabajo de investigación se tendrán en cuenta ambos currículos, el Currículo nacional y el Currículo internacional de la universidad de Cambridge.

1.3 PREGUNTA PROBLEMATIZADORA

La enseñanza de las matemáticas en una lengua extranjera es parte de un enfoque educativo bastante reciente en nuestro país, y por esta razón no ha sido lo suficientemente abordada en trabajos de investigación. Por consiguiente, esta investigación aportará importantes elementos de análisis acerca de la teoría existente sobre el aprendizaje de las matemáticas en contextos de

⁶ Ministerio de Educación Nacional

bilingüismo, y seguirá abriendo el escenario a futuras investigaciones en este campo, para una mejor comprensión de la enseñanza de las matemáticas en inglés como lengua extranjera.

De acuerdo con este panorama surge la siguiente pregunta problematizadora:

¿Cómo mejorar la enseñanza de las nociones de perímetro y área en la medida que se desarrolla la competencia comunicativa en inglés como lengua extranjera?

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo General

Analizar los alcances de la implementación de un diseño basado en la metodología CLIL, que integra la enseñanza de las nociones de perímetro y área con el desarrollo de la competencia comunicativa en inglés, en el contexto de la huerta escolar con estudiantes bilingües del grado cuarto de primaria.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Determinar los avances de los estudiantes en el desarrollo de las nociones de perímetro y área bajo la metodología CLIL en el contexto de la huerta escolar.
- Determinar si la metodología CLIL facilitó el desarrollo del discurso de los estudiantes tanto de manera oral como escrita, para expresar los conocimientos adquiridos sobre las nociones de perímetro y área dentro del contexto de la huerta escolar.

1.5 ANTECEDENTES

Para abordar los antecedentes de este trabajo de investigación se realizó tres tipos de clasificaciones: primero, los trabajos concernientes a investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas en una lengua extranjera o una lengua segunda a nivel internacional; segundo, los trabajos de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en inglés en Colombia; y tercero, las investigaciones concernientes a la enseñanza del área y el perímetro de figuras planas.

Actualmente, existen escasas investigaciones relevantes sobre la enseñanza de las matemáticas en contextos de bilingüismo en Colombia, por lo que la mayoría de los trabajos aquí referenciados fueron desarrollados en países de Europa, y solo una investigación de nivel de maestría que se desarrolló en Colombia. Respecto a las investigaciones sobre área y perímetro, sí se encontraron trabajos relevantes realizados en nuestro país.

1.5.1 Antecedentes de educación matemática bilingüe a nivel internacional

Dentro de las investigaciones realizadas acerca de la enseñanza de las matemáticas en otra lengua, se encuentra la investigación realizada en una escuela de Bélgica donde se efectuó un estudio longitudinal para determinar si a los estudiantes a quienes se les enseñaron las matemáticas a través de la metodología CLIL, alcanzarían un mejor desempeño que a sus compañeros a quienes se les enseñaron las matemáticas en su lengua materna. (Surmont et al., 2016).

En este estudio participaron 107 estudiantes de primer año de secundaria en una escuela de Bélgica. A 35 de estos estudiantes se les enseñó las matemáticas con la metodología CLIL y a los otros 72 estudiantes se les enseñó esta asignatura en su lengua nativa. A los estudiantes del curso

CLIL se les enseñó el contenido de matemáticas en francés como lengua extranjera y a los estudiantes del “grupo tradicional”⁷ se les enseñó la asignatura de matemáticas en holandés la cual era su lengua nativa.

Este estudio se realizó para determinar la influencia que la enseñanza CLIL tendría en el desempeño de los estudiantes en matemáticas. Para este fin, se les aplicaron 3 pruebas estandarizadas, una prueba previa al comienzo del año escolar sin que los estudiantes hubieran recibido alguna instrucción en CLIL, la segunda prueba a los 3 meses y la tercera prueba a los 10 meses ya finalizando el año escolar. La primera prueba mostró que ambos grupos, el CLIL y el tradicional tenían, al inicio de la investigación, el mismo nivel en matemáticas, pero la segunda y la tercera prueba evidenciaron que el grupo CLIL había mejorado significativamente su desempeño en matemáticas por encima del grupo tradicional.

En este estudio los autores hallaron claramente los efectos positivos de la enseñanza CLIL y afirman que CLIL no solo les da a los estudiantes una ventaja en la comprensión de las estructuras de la lengua extranjera y la lengua materna, sino que también les ayuda a los estudiantes a comprender el lenguaje de las matemáticas. Los autores también advierten que, aunque los resultados positivos se pudieron notar desde el inicio de la enseñanza con esta metodología, también se debe tener en cuenta que existen otros factores, como la motivación, la autoconfianza, el apoyo de los padres en casa, que no fueron tomados en cuenta en su investigación.

⁷ Con grupo tradicional me refiero a aquellos estudiantes que no recibieron su clase de matemáticas en una lengua extranjera con la metodología CLIL.

Por último, los autores sugieren de acuerdo con los datos encontrados, que CLIL posiblemente crea una mayor “conciencia metalingüística”⁸ en los estudiantes, lo que se supone conduciría a una mejor comprensión del lenguaje abstracto de las matemáticas y concluyen con la afirmación que una combinación de una lengua segunda y contenido académico, tiene un efecto positivo en el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Los resultados hallados por estos autores aportan elementos de análisis importantes, que sirvieron de base para analizar los hallazgos de la intervención que se realizó en este trabajo de investigación. Los resultados positivos encontrados en esta escuela de Bélgica sirvieron como referente de comparación con los resultados encontrados en las intervenciones realizadas con los estudiantes del colegio bilingüe de esta ciudad de Colombia.

Un segundo antecedente sobre la educación matemática bilingüe es una investigación realizada en una escuela en Finlandia, donde se llevó a cabo un estudio sobre el pensamiento y los procesos de aprendizaje de las matemáticas y las ciencias enseñadas a través de una lengua extranjera. (Jäppinen, 2005) lideró esta investigación acerca del desarrollo cognitivo⁹ de 669 estudiantes finlandeses, de los cuales, a un grupo experimental de 335 estudiantes, se les enseñó a través del inglés, el francés o el sueco, y al grupo control de 334 estudiantes se les enseñó a través del finlandés que es su lengua materna. El porcentaje de estudiantes que recibieron la enseñanza en inglés fue del 60%, en francés fue del 30% y en sueco fue del 10%. Se estudió el desarrollo

⁸ El autor describe la “Conciencia metalingüística”, como la habilidad para manipular y reflexionar sobre las características estructurales de las lenguas.

⁹ El desarrollo cognitivo en este estudio es considerado como la integración entre el pensamiento y los procesos de aprendizaje del contenido.

cognitivo; es decir, la comprensión, el uso y la aplicación de conceptos y estructuras conceptuales de los contenidos enseñados, a través de una lengua extranjera.

Los estudiantes estuvieron divididos en 3 grupos de edad, el primero tenía entre 7 y 9 años, el segundo entre 10 y 12 años y el tercer grupo de estudiantes tenía entre 13 y 15 años. Se realizaron cuatro mediciones a cada grupo de estudiantes, comenzando desde la primavera del 2002 y finalizando en el otoño del 2003. Los 46 profesores de los estudiantes observados tuvieron libertad para escoger sus materiales y métodos de enseñanza y la lengua que se utilizó en las evaluaciones que se aplicaron fue el finlandés, debido a que al grupo control se le enseñó en esta lengua.

En el primer grupo no se encontraron diferencias significativas en ninguna de las cuatro mediciones realizadas. La enseñanza a través de la metodología CLIL parece haber propiciado el pensamiento matemático y los procesos de aprendizaje de los estudiantes, de la misma manera que se dio con los estudiantes en el ambiente de su lengua materna.

En la primera medición del segundo grupo, se encontró que el nivel cognitivo inicial fue igual. Sin embargo, el grupo experimental superó al grupo control en las otras tres mediciones. La enseñanza a través de una lengua extranjera al parecer ayudó o aún promovió el pensamiento matemático y los procesos de aprendizaje de los estudiantes de este grupo de edad.

En el tercer grupo, se tuvieron resultados muy similares tanto el grupo experimental como en el grupo control, y no hubo estadísticamente diferencias significativas en ninguna de las mediciones realizadas.

De acuerdo con este estudio se encontró que las escuelas que usan CLIL en Finlandia han tenido éxito en ofrecer condiciones favorables para el desarrollo cognitivo de sus estudiantes, como ocurre de manera similar en la enseñanza a través de la lengua materna. Los resultados positivos encontrados confirman que la enseñanza a través de una lengua extranjera favorece el pensamiento y el aprendizaje de contenido en los estudiantes.

El autor encontró que, aunque el nivel cognitivo general de los estudiantes CLIL fue mayor comparado con el grupo control, se encontraron dificultades en el primer grupo de edad con algunos temas muy abstractos, específicamente con contenidos espaciales, por lo que sugiere que, con los estudiantes en sus primeros años de escolaridad, los maestros deben considerar cuidadosamente qué contenidos enseñar en la lengua extranjera y cuales en su lengua materna. También sugiere que los temas a enseñar en la lengua extranjera estén relacionados principalmente al contexto inmediato del estudiante y más adelante cuando los procesos de pensamiento se hayan desarrollado aún más, se pueden incorporar contenidos más abstractos.

El autor explica que el desempeño similar del tercer grupo pudo haberse dado debido a la menor exposición de los estudiantes a la lengua extranjera comparado con la mayor cantidad de exposición a esta lengua que tenían los estudiantes del primero y segundo grupo. (Jäppinen, 2005) concluye principalmente a través de este estudio que “un entorno de aprendizaje exigente y enriquecido con el lenguaje tiene en general, un efecto positivo sobre el desarrollo cognitivo del estudiante CLIL en Finlandia”.

Los resultados de esta investigación permitieron de igual manera realizar una comparación con los resultados obtenidos en la aplicación de la metodología CLIL en la enseñanza del perímetro y área en inglés con los estudiantes del colegio de la ciudad de Cali. Es importante

tener en cuenta, que los resultados obtenidos en este estudio de Jäppinen, no tuvieron tampoco en consideración los factores del contexto social y educativo que influyen de manera importante los resultados que se obtuvieron.

Un tercer antecedente acerca de la educación matemática bilingüe fue tomado de una escuela de habla catalana en España. En esta escuela se condujo una investigación acerca del rendimiento matemático de los estudiantes en cuyo entorno coexisten, el catalán junto con el castellano. Los autores investigaron las variables del contexto social y educativo que inciden en el aprendizaje de conocimiento lingüístico y matemático de los estudiantes, como la condición lingüística familiar, la situación socio-profesional de la familia, el idioma en que se realiza la prueba de evaluación, el cociente intelectual de los estudiantes, y el autoconcepto. Los autores sostuvieron que el dominio y el uso del lenguaje incidió en el desarrollo cognitivo y por lo tanto en la construcción de conocimientos escolares en los estudiantes. (Pifarre et al., 2003)

Se investigaron a 483 alumnos en total del segundo curso del primer ciclo de la ESO¹⁰ de España que corresponde al grado octavo de la educación básica secundaria de Colombia. Se evaluaron alumnos de 21 aulas de clase pertenecientes a 20 escuelas de la provincia de Lleida. 255 estudiantes pertenecen a familias que hablan catalán, 128 hablan castellano, 92 son bilingües, 5 hablan otras lenguas y 3 estudiantes no responden a la pregunta.

Los autores hallaron respecto a la variable de condición lingüística familiar, que los alumnos cuyas familias son catalanohablaantes obtuvieron mejores resultados que los alumnos de familias bilingües (castellano y catalán) y monolingües de habla castellana siendo estos últimos los que obtuvieron un desempeño matemático menor. Cuando revisaron los resultados obtenidos

¹⁰ Educación Secundaria Obligatoria de España.

por los alumnos en la prueba de catalán encontraron que los alumnos de habla castellana y los alumnos bilingües poseen un conocimiento menor, tanto oral como escrito del catalán la cual era la lengua vehicular de instrucción. En términos globales, los investigadores encontraron que el dominio de la lengua vehicular del proceso de enseñanza-aprendizaje favorece el rendimiento académico de los estudiantes en matemáticas.

Los investigadores hallaron resultados significativos respecto a la situación socio-profesional de la familia. Encontraron que los alumnos que obtuvieron mejores resultados son aquellos pertenecientes a familias de un nivel socio-profesional medio, luego las de un nivel alto y las de un nivel socio-profesional bajo obtuvieron menores resultados en matemáticas.

Respecto a la relación entre rendimiento matemático y el idioma en que se realiza la prueba no se encontraron diferencias entre los que la realizaron en catalán y los que la realizaron en castellano. Los investigadores interpretan que el conocimiento que los estudiantes alcanzan de los contenidos matemáticos en la lengua vehicular (catalán) es suficiente para poder responder la misma prueba en castellano. Los estudiantes transfieren los aprendizajes matemáticos obtenidos de una lengua a la otra sin inconveniente confirmando así la hipótesis de la interdependencia lingüística de Cummins.

Respecto a la variable de relación entre rendimiento matemático y cociente intelectual encontraron que el desempeño en matemáticas está directamente relacionado con el índice de su cociente intelectual. Por último, encontraron que los alumnos con mejor autoconcepto de sus aptitudes matemáticas obtienen mejores desempeños en la asignatura confirmando así la incidencia de componentes metacognitivos implicados en la resolución de tareas matemáticas.

A través de estos resultados hallados en las investigaciones consultadas sobre la enseñanza bilingüe de las matemáticas, se puede concluir que el desempeño de los estudiantes que reciben su enseñanza en una lengua vehicular que no es la materna, está ligado también a diferentes factores externos al aula de matemáticas, y que inciden directa o indirectamente sobre el aprendizaje de los estudiantes dentro de estos contextos bilingües; algunos de ellos son el trasfondo socio-profesional de la familia, la condición lingüística familiar, la cantidad de exposición a la lengua extranjera en el ambiente escolar, el cociente intelectual y el autoconcepto del estudiante, entre otros.

Estos antecedentes mencionados, ponen en evidencia la importancia de las variables del contexto social y educativo en el aprendizaje del conocimiento lingüístico y matemático de los estudiantes, las cuales se deben tener en cuenta al momento de efectuar una investigación similar.

1.5.2 Antecedentes sobre la implementación de la metodología CLIL en la enseñanza de las matemáticas a nivel nacional

En el contexto nacional se tiene una investigación relevante a nivel de maestría acerca de la manera en que los profesores de matemáticas de primero a sexto grado en un colegio bilingüe de Puerto Colombia Atlántico, que se ha también adherido al currículo internacional de Cambridge, implementan la metodología CLIL en la enseñanza de las matemáticas. La autora observó si la forma en que los profesores implementaban esta metodología en sus clases corresponde a una clase CLIL adecuadamente planeada y desarrollada. (Perez, 2016)

En esta investigación se concluyó que, aunque los profesores implementaron algunos aspectos de la metodología CLIL, no eran muy conscientes de la importancia de tener objetivos, no solo de contenido sino también de la lengua extranjera en sus clases. La autora afirma que es

necesaria una mayor capacitación de los docentes para conocer los fundamentos de la metodología CLIL como lo son “varied scaffolding activities, contextualization of content, language support, development of communicative skills and functional language to support the learning of the content, and varied opportunities for teamwork and the implementation of class projects” (Perez, 2016, p. 157).

En esta investigación también se halló que los profesores enfocaron su enseñanza en el contenido disciplinar, olvidando la necesidad de enseñar aquellos aspectos de la nueva lengua necesarios para comprender los contenidos matemáticos a enseñar. Por esta razón concluye que, se hace necesario un mayor entrenamiento docente, para lograr integrar las habilidades comunicativas en inglés junto con el contenido matemático.

Otro hallazgo de esta investigación fue que, aunque los profesores hablaron en inglés en sus clases la mayor parte del tiempo, no lograron ir más allá de la perspectiva del “language through learning” fallando en incluir en sus clases el “language of learning” y el “language for learning”¹¹ mostrando los objetivos del lenguaje a sus estudiantes para hacerlos conscientes de lo que se espera de ellos a nivel lingüístico durante las clases. La autora sugiere que el currículo debería ser adaptado de manera que enfatice claramente los objetivos del lenguaje junto a los contenidos matemáticos a alcanzar, y también sugiere que la institución debería establecer CLIL como la metodología de enseñanza de las matemáticas para permitir avanzar en ambos conocimientos de manera apropiada.

¹¹ En el apartado [2.4.1.4](#) del Marco Teórico explico estos aspectos del lenguaje pertenecientes al principio de la comunicación en la metodología CLIL.

Estas conclusiones de Perez sirvieron como punto de partida para la implementación de la metodología CLIL en el presente trabajo de investigación. Los resultados de Perez fueron tenidos en cuenta en la elaboración de los diseños, y se implementó cuidadosamente en estos, la enseñanza de la competencia comunicativa en inglés durante el proceso de enseñanza de las nociones de perímetro y área.

1.5.3 Antecedentes sobre Área y Perímetro

Molina, J. D. G., Ramírez, Z. M. S., & Cano, R. A. L. (2013) investigaron sobre el concepto de área y perímetro en el contexto de la agricultura del café con estudiantes de quinto grado de primaria. Ellos basaron su investigación en el modelo de enseñanza para la comprensión la cual establece que la habilidad de comprender conceptos depende de la contextualización de estos y que, para llegar a la formalización, se debe vivir primero un proceso de comprensión en un contexto particular de manera que se permita la articulación entre conceptos y procedimientos. Los autores investigaron la manera en que las actividades agrícolas propias de esta población rural podrían influir en la comprensión de las nociones de perímetro y área. Para ello partieron de este contexto real y a su vez adecuado a las necesidades e intereses de los estudiantes, para así lograr una transformación del pensamiento concreto al pensamiento abstracto.

En esta investigación se pretendió demostrar que los contextos cercanos a la realidad de los estudiantes, pueden ser aprovechados para la comprensión de diversos conceptos matemáticos y que la práctica propia de esta población, en la utilización de medidas de longitud como cuerdas y palos, la utilización de medidas de capacidad como tapas, copas y jeringas, y la terminología utilizada para denotar espacios destinados a la siembra como lote, parcela, barrera, puente y calle,

pueden servir como elementos de enlace con las actividades de aula orientadas a la comprensión matemática.

Los autores utilizaron la metodología de estudio de caso y escogieron a 4 estudiantes de grado quinto de primaria que tuvieran relación con el cultivo del café para observar sus procesos de comprensión en la transición del contexto agrícola a la comprensión de los términos de perímetro y área. Los autores recogieron la información a través de observaciones durante las actividades, a través de entrevistas individuales y grupales y a través también de la recolección de portafolios y el proyecto final.

Como conclusiones los autores afirman que es útil para los estudiantes vivenciar y palpar las nociones de área y perímetro en situaciones contextuales dado a que ayudan a establecer relaciones beneficiosas para la comprensión. También encontraron que este contexto aportó un alto significado práctico y vivencial a los objetos matemáticos a enseñar y que les permitió llegar a situaciones de homotecias, semejanzas, rotación y traslación.

Este antecedente se asemeja al presente trabajo de investigación en la utilización de un contexto cercano a los estudiantes para abordar la enseñanza de la magnitud y la medida de perímetro y área, en el caso de este trabajo, se utilizó la huerta escolar. Estos resultados permiten reafirmar que la utilización de un contexto para la enseñanza de las nociones de perímetro y área es de gran ayuda para los estudiantes, facilita la comprensión del objeto matemático, y permite la matematización horizontal y vertical de los conceptos propuestos.

Un segundo antecedente consultado se enfocó en las convicciones de maestros y estudiantes en lo concerniente a las relaciones existentes entre perímetro y área de una figura plana. En este trabajo se observó en estudiantes desde niveles inferiores hasta los niveles de

educación superior, el concepto erróneo de que existe una relación de estrecha dependencia entre perímetro y área. También se preguntaron si los maestros eran conscientes de este problema o si esta dificultad de construcción conceptual también estaba presente en ellos. (D'Amore & Fandiño, 2007)

Los investigadores estaban interesados en el cambio de las convicciones de los estudiantes y en el lenguaje usado para explicar su pensamiento. Querían identificar si después de algunos ejemplos los estudiantes estaban dispuestos a cambiar de convicción y para este fin los entrevistaron individualmente antes y después de los ejemplos utilizados y así identificar también el tipo de lenguaje que usaban. A los estudiantes se les proponía un problema, se les escuchaba y se registraba su respuesta, luego se les proponía a los estudiantes las nueve pruebas diseñadas por los investigadores para intervenir y lograr el cambio de convicciones, se les ayudaba en su ejecución, se escuchaban sus comentarios y después de esta intervención se registraba la formulación explícita de su nueva convicción, en caso de haberla.

Uno de los hallazgos de esta investigación fue que el uso del lenguaje cotidiano en todos los grados de la escolaridad era muy frecuente y de manera sorprendente, los estudiantes universitarios fueron los que mayormente recurrían al lenguaje coloquial para referirse a aspectos geométricos.

En la primera prueba que se administró se encontraron ideas erróneas en los docentes acerca de las relaciones entre perímetro y área de las figuras planas. Se encontró que los docentes con mayor dificultad en comprender estas relaciones se encontraban en los primeros niveles de escolaridad debido a su menor preparación técnica. Los autores afirman que los obstáculos encontrados no solo son epistemológicos, sino también didácticos. Los docentes evaluados

requirieron de “profundas entrevistas” para poder cambiar sus convicciones por lo que se puede inferir que sus elecciones didácticas influyeron en la formación de las ideas erróneas en los estudiantes.

También se encontró que, para abordar estos conceptos en el aula, los maestros regularmente usan figuras convexas generando la idea errónea que las figuras cóncavas no se pueden usar. Se usan usualmente figuras estándares que provocan la idea errónea de que otras figuras no son geométricas. Casi nunca se ponen en relación el área y el perímetro de la misma figura geométrica. Casi nunca se hacen transformaciones sobre las figuras de forma que se conserven o modifiquen el área o el perímetro. Los investigadores encontraron igualmente que los docentes no realizan una correcta transposición didáctica para transformar un saber (en este caso inexistente para algunos) en un saber enseñar limitándose a seguir el libro de texto.

El presente trabajo de investigación pretendió de igual manera hallar la realidad discursiva inicial de los estudiantes respecto a las nociones de área y perímetro y se analizaron las modificaciones discursivas que se dieron en ellos después de la intervención de los diseños referentes a la huerta escolar. Esta modificación discursiva se observó en la lengua vehicular de enseñanza que es el inglés. En los diseños aplicados se puso en relación el área y el perímetro de las mismas figuras geométricas y se realizaron transformaciones para conservar o modificar su área o su perímetro y así evidenciar la independencia de estos conceptos.

Un tercer antecedente acerca del área y del perímetro, es el realizado por (Corberan, 1997) en su trabajo de investigación Doctoral sobre el análisis del concepto de área de superficies planas. Corberan concluye tras la experimentación, que el no haber logrado que todos los estudiantes disocien el área del perímetro, se evidencia la fuerza con la que este concepto erróneo

está arraigado en ellos. El autor también afirma, coincidiendo con muchos otros autores que han investigado sobre el área, que este concepto es aún muy incomprendido por los estudiantes y que esto se debe fundamentalmente a la insuficiente dedicación y al modo incorrecto en el que se realiza su enseñanza.

La autora también concluyó que, para lograr una adecuada enseñanza y aprendizaje de este concepto, se debe abordar la enseñanza progresiva de sus diferentes manifestaciones, que en su conjunto constituyen el concepto de área, y que la pobreza de los conocimientos que poseen los alumnos sobre este concepto se debe al tratamiento habitual que se le da en la escuela primaria limitándolo al estudio de las fórmulas. Las diferentes manifestaciones del concepto de área según Corberan son: A) El área como parte del plano ocupado por la superficie. B) el área como magnitud autónoma. C) el área como número de unidades que recubren la superficie. D) El área como el límite de la suma de áreas de polígonos. E) el área como producto de dimensiones lineales. F) el área como aplicación que asocia a cada región del plano un número real positivo.

Se sugiere que antes de tratar con las fórmulas para el cálculo del área, los estudiantes deberían estar familiarizados con el área como parte del plano ocupado por la superficie, con el área como magnitud autónoma y con el área como el número de unidades que recubren la superficie. La enseñanza que usualmente se ha dado en la escuela sobre este concepto solo ha permitido el uso rutinario de las fórmulas y no ha favorecido el aprendizaje del concepto, creando o al menos no corrigiendo la falsa concepción en los estudiantes de que existe una relación de estrecha dependencia entre el perímetro y el área de una misma superficie.

Después de la experimentación realizada en esta investigación, se pudo constatar entre otros aspectos, la total desaparición de las concepciones erróneas conceptuales, una reafirmación

de la viabilidad del uso de los procedimientos geométricos, una disminución del número de estudiantes que muestran una concepción numérica, la ausencia de referencia a la unidad estándar de medida. También se halló una disminución en la tendencia de los alumnos a omitir la unidad de medida tras el cálculo del área. Se observó un aumento en el uso correcto de las unidades no estándares de medida. Se elevó el grado de familiaridad e inclinación de los estudiantes al uso de la unidad de medida no estándar en el cálculo de áreas.

Los diseños implementados en el presente trabajo de investigación, estuvieron orientados a que los estudiantes se familiarizaran con el área como parte del plano ocupado por la superficie, con el área como magnitud autónoma, con el área como el número de unidades que recubren la superficie y el área como el límite de la suma de áreas de polígonos. No se abordó el tratamiento de fórmulas de área. En el análisis final se verifican los alcances de las intervenciones realizadas en el cambio de convicciones de los estudiantes respecto a las nociones de área y perímetro.

Un cuarto antecedente realizado por (Marmolejo et al., 2017) se enfocó en el conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. En esta investigación, se analizó la información expuesta por nueve educadores en formación, o en ejercicio (no licenciados en matemáticas y en ejercicio-licenciados en matemáticas), de sus diseños de enseñanza, sus soluciones a las tareas propuestas, y la descripción y justificación de su aporte al desarrollo visual y al estudio de la relación perímetro-área.

A partir de las observaciones a los registros obtenidos, el autor concluye que los docentes en general utilizan preferiblemente el conocimiento ampliado y el especializado, y no consideran notablemente en sus diseños el conocimiento común o acorde con el nivel educativo en que los estudiantes se desempeñan. Esto se puede considerar como una oportunidad para nuevos

aprendizajes y competencias respecto a la visualización en las relaciones de perímetro y área, pero también pueden ser un obstáculo o un bloqueo para el cumplimiento del objetivo de las tareas. Los alcances de estas propuestas dependen exclusivamente al acompañamiento del docente y del nivel de su formación didáctica.

El autor también encontró que los educadores con formación matemática y experiencia en su enseñanza promueven en sus diseños la visualización inductiva. Estas visualizaciones son más complejas por su carácter operatorio y discursivo, y hacen parte de las últimas fases del desarrollo visual. Por otra parte, los educadores en formación o con una formación distinta a las matemáticas, promueven mayoritariamente visualizaciones obstaculizantes y las incluyen indistintamente con actividades que si promueven la visualización.

En el presente trabajo de investigación se diseñaron actividades de visualización inductiva operatoria para realizar recubrimientos de superficie a través de rotaciones, traslaciones y reflexiones de las piezas, y para verificar que al cambiar la forma el área permanece igual. Esto permitió generar reflexiones iniciales sobre el concepto de área. También se diseñaron actividades de visualización inductiva coordinada donde los estudiantes debían verificar relaciones de equivalencia entre perímetro y área, y así poner en duda las falsas concepciones en esta relación. No se incluyeron en los diseños tareas de visualización obstaculizante pues no promovían el desarrollo de habilidades visuales, ni reflexiones sobre los aspectos de perímetro y área.

CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos del presente trabajo de investigación y se encuentra compuesto de cinco partes. Las cuatro primeras partes, están relacionadas con el enfoque comunicacional en la enseñanza de las matemáticas y la enseñanza de las lenguas, se exponen los principios de la educación matemática realista, se mencionan algunos aspectos de la educación matemática bilingüe, y también se presentan algunos aspectos didácticos de la enseñanza del área y el perímetro de figuras planas. La última parte de este capítulo presenta una metodología de aula la cual permite la integración de ambos procesos, la enseñanza de los objetos matemáticos con la enseñanza de los aspectos del lenguaje que permiten la comunicación matemática en la lengua extranjera.

La primera parte empieza con el planteamiento del enfoque comunicacional de Anna Sfard como fundamento epistemológico del aprendizaje de las matemáticas y se plantean los fundamentos del enfoque comunicativo de la enseñanza de las lenguas. Ambos enfoques se fundamentan en la comunicación como principal proceso de enseñanza y de aprendizaje.

En la segunda parte se presenta la educación matemática realista, como una posible solución a la dificultad didáctica encontrada en el enfoque comunicacional, que es la de modificar el lenguaje cotidiano de los estudiantes por un discurso matemático profesional. Los principios de la educación matemática realista permitirían el transito paulatino desde las ideas concretas a las ideas matemáticas mas avanzadas y abstractas.

En la tercera parte se exponen algunos aspectos de la educación matemática en contextos bilingües, primero se mencionan algunas perspectivas sobre el lenguaje y el aprendizaje de las

matemáticas en este contexto lingüístico, luego se aborda el aspecto del uso de las dos lenguas en el aula de clase, para después abordar la hipótesis de la interdependencia lingüística. En la cuarta parte se expone el concepto de magnitud y medida del área y el perímetro a abordar en esta investigación, y su tratamiento didáctico dentro del aula de clase.

En la última parte de este capítulo se explican los principios de la metodología CLIL¹², como una metodología de aula integradora de los conceptos planteados en la enseñanza de las matemáticas a través de otra lengua vehicular, y como posible herramienta de solución a la problemática abordada en este trabajo de investigación. Por último, se exponen algunos aspectos actuales de la metodología CLIL en Colombia. Ver la figura 6.

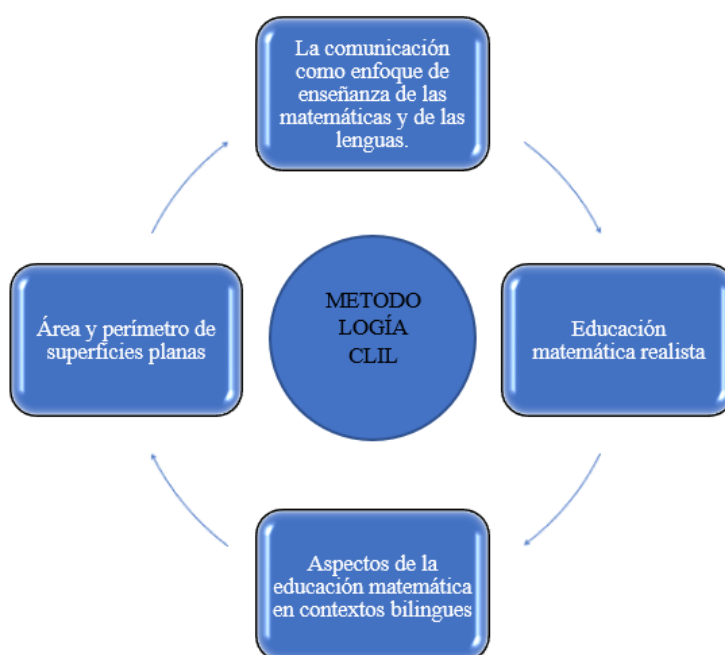


Figura 6 . Articulación de la metodología CLIL con el problema de la enseñanza de perímetro y área en un contexto de bilingüismo

¹² La sigla CLIL “Content and Language Integrated Learning” o en español, AICLE “Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras”

2.1 LA COMUNICACIÓN COMO ENFOQUE DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LAS LENGUAS.

Dado que el problema que se está abordando en este trabajo de investigación trata con el aprendizaje integrado de las matemáticas y del inglés como lengua extranjera, se exponen aquí dos enfoques relevantes en la enseñanza de ambos campos del saber, los cuales se fundamentan en la comunicación como actividad humana indispensable para el aprendizaje: el enfoque comunicacional de Anna Sfard y el enfoque comunicativo en la enseñanza de las lenguas.

2.1.1 Enfoque Comunicacional en el Aprendizaje de las Matemáticas de Anna Sfard

El enfoque comunicacional del aprendizaje de las matemáticas se ha planteado como respuesta a las dificultades presentadas por los enfoques adquisicionistas, los cuales han visto el aprendizaje como una propiedad personal alejada de un contexto. Este enfoque que presenta Sfard propone un cambio epistemológico dentro de la educación matemática, pues concibe el aprendizaje como una integración del estudiante a una comunidad, donde las actividades matemáticas ocurren dentro de un contexto y la comunicación está situada en el centro mismo del aprendizaje. (Sfard, 2008)

De acuerdo con Sfard, la comunicación es equivalente al pensamiento. La autora afirma que pensar es un acto de comunicación consigo mismo, en el que nos informamos, producimos argumentos, nos hacemos preguntas, y esperamos nuestras propias respuestas. Ella sostiene que la dicotomía pensamiento-comunicación bajo este enfoque desaparece, puesto que el habla no es independiente ni secundaria al pensamiento, sino que ambos aspectos se consideran inseparables y ninguno antecede al otro. Bajo el enfoque comunicacional el aprendizaje estaría definido, como el proceso de cambiar nuestras formas discursivas propias para poder llegar a ser participantes

competentes de un nuevo discurso, por lo tanto, lograr pensar en forma matemática es llegar a ser participante del discurso matemático.

Esta nueva visión sobre el aprendizaje ubica a la comunicación en el corazón mismo de la educación matemática aportando un cambio importante a nuestra visión tradicional sobre el aprendizaje y la enseñanza de esta área del conocimiento. En este enfoque se sustenta, que el aprendizaje no se puede separar de las interacciones sociales y que por esta razón no podría verse más como una adquisición personal e independiente del contexto que le rodea. Sería a través del conflicto discursivo, de la comunicación con otros, y de la necesidad de ajustar las formas discursivas propias a las de otras personas expertas, que el aprendizaje individual se originaría. En el enfoque comunicacional el pensamiento depende de las exigencias de la comunicación y surge como una versión privada y modificada producto de esa comunicación interpersonal.

La autora plantea tres aspectos que los estudiantes deben modificar en el aprendizaje del nuevo discurso matemático:

- Tendrán que ampliar su vocabulario y aprender a operar con nuevos términos matemáticos desde el comienzo.
- Necesitarán de recursos visuales como mediadores de la comunicación.
- Deberán transformar las reglas metadiscursivas que organizan y conducen el flujo de la comunicación. Estas reglas metadiscursivas son las acciones que llevan a cabo las personas y que se consideran apropiadas dentro de un contexto dado, como también lo son, aquellos comportamientos que las personas se abstienen de realizar durante la comunicación. Estas reglas son invisibles, pero guían el discurso, y son las responsables de que la comunicación pueda tener lugar.

En el enfoque comunicacional, a diferencia del aprendizaje basado en la comprensión en la que se prioriza la comprensión conceptual sobre la formalización, la secuencia de eventos ocurre de una manera distinta, puesto que la introducción de nuevos nombres y significantes es ahora el comienzo en vez del final del proceso de aprendizaje. Es imposible enseñar un nuevo discurso sin hablar sobre sus objetos desde el principio, es solo cuando se habla sobre ellos que se les da existencia. Por lo tanto, el profesor ha de usar desde el inicio ese discurso en palabras o en símbolos, para iniciar a los estudiantes en el razonamiento sobre los nuevos objetos matemáticos, ya que el maestro es considerado el iniciador dinámico de los hábitos discursivos nuevos.

Cuando se introduce un nuevo símbolo a través del discurso, se crea un nuevo espacio semántico y con ello la necesidad de un nuevo hábito discursivo. El procedimiento de ir llenando el espacio creado es el que permitirá la aparición de las nuevas formas discursivas que irán reemplazando los viejos hábitos cotidianos hasta lograr la objetificación gradual del discurso. Es en la interacción con un experto mientras tratan de comprender, que los estudiantes pueden llegar al discurso matemático objetificado.

Durante los procesos de comunicación en el aula, se encuentran aquellos observadores que solo escuchan las interacciones entre sus compañeros, y que no son muy activos en el discurso ni se involucran como interlocutores; ellos se consideran también participantes de ese discurso. Las verbalizaciones que se realizan durante la comunicación despiertan en todos los oyentes, interpretaciones, y aquellos que son solo observadores, participan también al esperar las respuestas del interlocutor y siendo evaluadores de las intervenciones de sus compañeros. En este ciclo discursivo, el solo observador también toma parte en la apropiación del mensaje y le da así mismo su interpretación personal.

En el presente trabajo de investigación la comunicación está situada dentro del contexto de la huerta escolar. Este contexto permite introducir a los estudiantes en el razonamiento sobre los objetos matemáticos de área y perímetro, y de esta manera promueve la producción de argumentos, de preguntas y de respuestas que permiten el cambio gradual de las formas discursivas de los estudiantes respecto a este conocimiento. Las interacciones entre los estudiantes y entre ellos con el maestro permiten la creación de conflictos discursivos que originan el desarrollo del pensamiento matemático. Los diseños que se implementan tienen desde el inicio el vocabulario propio de los nuevos discursos a alcanzar y las expresiones en inglés necesarias para el desarrollo efectivo de la comunicación.

2.1.2 El Enfoque Comunicativo en la Enseñanza de las Lenguas

Podemos evidenciar el mismo principio comunicativo, tanto en el enfoque comunicacional de las matemáticas, como en el enfoque comunicativo de la enseñanza de las lenguas. Anna Sfard afirma al respecto lo siguiente:

El profesor de matemáticas que se abstiene de hacer un despliegue de sus propias habilidades matemáticas se puede comparar con el profesor de lengua extranjera que nunca se dirige a sus estudiantes en el idioma que se supone deben aprender. Sería ingenuo pensar que los niños pueden desarrollar ya sea los hábitos discursivos matemáticos o la habilidad para hablar una lengua extranjera estando solos. (Sfard, 2008, p. 246).

El enfoque comunicativo de la enseñanza de las lenguas extranjeras (LE)¹³ o lenguas segundas (L2)¹⁴, tuvo su origen en la década del 70 y su objetivo es la enseñanza de la

¹³ Una lengua extranjera (LE) es una lengua que no es nativa o propia de un país y no llega a emplearse como lengua de comunicación.

¹⁴ Se dice lengua segunda (L2) si se aprende en un país donde coexiste como oficial o autóctona con otras lenguas.

competencia comunicativa en la lengua meta (LM)¹⁵. La competencia comunicativa es entendida como la capacidad de usar la LM de forma significativa en distintos contextos. Este enfoque difiere del enfoque gramatical que se utilizaba desde mediados del siglo XIX, el cual se orientó exclusivamente en el conocimiento de la gramática de la lengua y sus componentes sintácticos.

En el enfoque gramatical se presentaban las reglas gramaticales y luego una serie de ejercicios para practicarlas, la enseñanza se centraba en el análisis deductivo de la gramática, la memorización y la traducción. Este enfoque gramatical de enseñanza no lograba desarrollar en los estudiantes la habilidad de comunicarse en la LM y fue por esta razón que surgió el enfoque comunicativo como método de enseñanza de las lenguas, y como su nombre lo indica, privilegió el desarrollo de la competencia comunicativa en sus aprendices.

La enseñanza a través de este nuevo método se daría a partir de la generación de situaciones reales¹⁶ creando distintos contextos, de manera que se permita la generación de comunicación auténtica en los estudiantes, se recrean situaciones cotidianas con el fin de dar oportunidades de uso real de la lengua donde los estudiantes puedan expresar sus propias experiencias, ideas y opiniones. La enseñanza en el enfoque comunicativo se centra en el alumno y la gramática está ordenada a la funcionalidad y relevancia de los contextos comunicativos.

El enfoque comunicativo de la enseñanza de la LM es un conjunto de principios que comprenden los siguientes aspectos: el uso de la lengua para diferentes propósitos y funciones, el uso formal o informal de la lengua en diferentes contextos y escenarios, el uso de la lengua escrita de manera apropiada, la producción y comprensión de diferentes tipos de textos

¹⁵ Lengua Meta (LM) es la lengua objeto de aprendizaje y engloba los términos de lengua extranjera y lengua segunda.

¹⁶ Estas situaciones se crean de manera ficticia en el aula de clase, para simular una situación de la vida real.

narrativos, reportes, entrevistas, conversaciones, etc., y el uso de diferentes estrategias con el fin de mantener la comunicación aun cuando se tienen limitaciones en el conocimiento gramatical de la lengua. (Richards, 2006)

La comprensión acerca de los procesos de aprendizaje de la LM ha cambiado considerablemente. Anteriormente el aprendizaje de una lengua era visto como un proceso de formación de hábitos de manera mecánica, por lo que se consideraba necesario el dominio estricto de la competencia gramatical. La repetición constante buscaba eliminar el error y se perseguía la producción correcta de las oraciones a través de práctica controlada tanto oral como escrita. El profesor tenía el control del aprendizaje con el fin de evitar que se cometieran errores gramaticales y se usaban estrategias como la memorización de diálogos y ejercicios.

Actualmente, los procesos de aprendizaje de una lengua son vistos como el resultado de procesos tales como, la interacción entre el estudiante y un interlocutor usuario experto de la lengua, la creación colaborativa de significado, la creación de interacción intencionada y significativa a través de la lengua, la negociación de significado entre el estudiante y el interlocutor para lograr comprenderse, el aprendizaje a través de la retroalimentación que reciben los estudiantes cuando usan la LM, el prestar atención al lenguaje que se recibe desde el interlocutor tratando de incorporar nuevas palabras y expresiones al propio desarrollo de la competencia comunicativa.

Una de las metas del enfoque comunicativo es el desarrollo de la fluidez¹⁷ en el uso de la lengua. La fluidez se desarrolla generando actividades de clase en las cuales los estudiantes deben

¹⁷ Se entiende por fluidez al uso natural de la lengua cuando un hablante se comunica de manera significativa y comprensible a pesar de sus limitaciones en la competencia comunicativa.

negociar significado, usar estrategias de comunicación, corregir fallas en la comprensión y evitar rupturas en la comunicación. Las actividades que se enfocan en la fluidez reflejan el uso natural de la lengua, se enfocan en la comunicación y en su uso significativo, requieren del uso de estrategias comunicativas, de la producción no predecible de la lengua dentro de un contexto. Por el contrario, las actividades que se enfocan en la precisión gramatical reflejan el uso controlado de la lengua en el aula de clase, enfocándose en la formación de ejemplos correctos, en la práctica de la lengua fuera de un contexto, y en el uso de frases cortas que no requieren de comunicación significativa sino de una escogencia regulada de la lengua.

En el enfoque comunicacional no desaparecen los diálogos, la gramática y la enseñanza de la pronunciación, sino que aparecen como parte de una secuencia de actividades que buscan la precisión gramatical a la vez que desarrollan fluidez en la comunicación. El tipo de actividades que se propone desde el enfoque comunicativo es el trabajo en parejas, juegos de roles, trabajo por proyectos y trabajos grupales donde los estudiantes deben trabajar de forma cooperativa tomando mayor responsabilidad de su propio aprendizaje. El profesor no se enfoca en los errores pues estos son considerados como parte del aprendizaje.

En la figura 7 se muestra la problemática de la educación matemática bilingüe abordada desde la comunicación como enfoque de enseñanza.

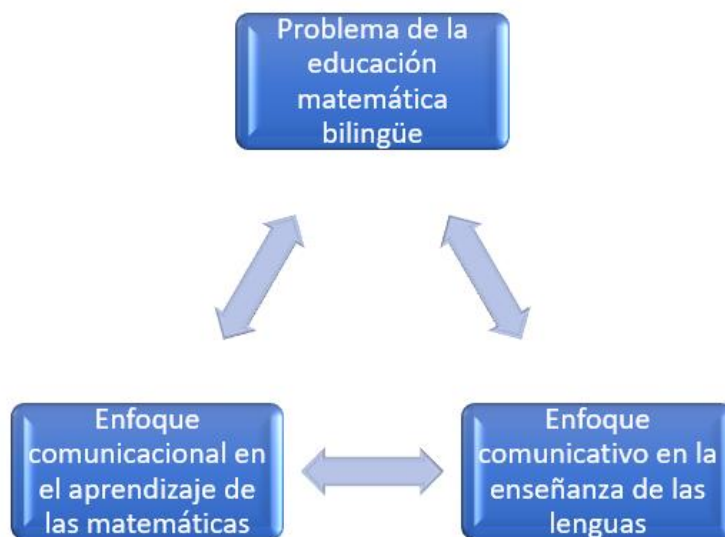


Figura 7 . La comunicación como enfoque de enseñanza de las matemáticas y de las lenguas.

Los diseños sobre perímetro y área que se implementan en esta investigación permiten también el desarrollo del discurso matemático en inglés de los estudiantes. La huerta como situación real de aprendizaje, permite la generación auténtica de comunicación en los estudiantes y de ellos con el maestro-investigador, el cual tendrá un rol relevante en la guía y apropiación del nuevo discurso matemático y en la incorporación de los nuevos elementos lingüísticos a utilizar. Se privilegia en todo momento el desarrollo de la fluidez oral y escrita de los estudiantes en el uso del inglés evitando la ruptura en la comunicación con intervenciones abundantes para corregir el uso gramatical o la pronunciación, que opaquen la generación del nuevo discurso.

2.2 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Según se ha venido desarrollando en la primera parte de este capítulo, en el enfoque comunicacional de Anna Sfard es indispensable preservar el discurso matemático profesional dentro del aula de clase para lograr introducir a los estudiantes en el pensamiento matemático; pero no se puede desconocer la dificultad que los estudiantes tienen para acceder a este tipo de

discurso profesional el cual es riguroso, formal y algunas veces arbitrario para ellos. Esto ha generado un interrogante acerca de lo que realmente sería una verdadera actividad matemática dentro del aula de clase, y sobre sí el discurso matemático profesional es el tipo de discurso que debe prevalecer en el colegio.

Lo anteriormente planteado hace pensar que la escuela hoy día, ha estado esforzándose en implementar en sus prácticas situaciones de la vida real, las cuales le permitan la incorporación gradual de los estudiantes en el discurso matemático a través del discurso cotidiano, pero este esfuerzo ha pretendido también abstenerse de tratar con los contenidos y discursos matemáticos rigurosos dentro del aula, lo cual ha conllevado en sí misma a un detrimento del discurso matemático profesional y a la producción de discursos altamente personales en los estudiantes. No se puede ignorar que las matemáticas son un sistema bien diseñado y organizado, por lo que no se podría modificar de manera arbitraria, y tampoco se debería permitir el caer en un proceso descuidado de flexibilización (Sfard, 2008).

Ante esta dificultad de enseñar reglas formales del discurso matemático profesional en el aula de clase, dada su complejidad para los estudiantes, la solución posible según Sfard es quedarnos con un discurso bien definido, coherente y convincente. Para salvar tanto el discurso matemático en el salón de clase, enseñar matemáticas de forma significativa, y facilitar la transición del discurso matemático cotidiano al profesional, en ese sentido Sfard sugiere apoyarse en la propuesta ofrecida por los diseñadores de la “Educación Matemática Realista”, la cual plantea dentro de su enfoque la extensión del discurso cotidiano paso a paso, para ir incluyendo paulatinamente ideas matemáticas más avanzadas y abstractas. De esta manera, la extensión del discurso no debería llevarse a cabo hasta que el discurso actual sea tan realista como el discurso cotidiano con el que los estudiantes comenzaron (Sfard, 2008).

La EMR¹⁸ se fundamenta en unos principios de los cuales unos están más conectados a la enseñanza y otros al aprendizaje:

- ***Principio de Actividad.***

Las matemáticas son una actividad humana y para (Freudenthal, 2002) es más importante la actividad misma de hacer matemática, que la matemática como un producto ya terminado. El aprendizaje de las matemáticas no se ve como un sistema cerrado, sino como una actividad continua cuya finalidad es organizar o matematizar el mundo que nos rodea. Los estudiantes son vistos como sujetos activos de su propio aprendizaje los cuales en el proceso mismo de reinención de las matemáticas bajo la guía del maestro, van desarrollando pensamiento matemático.

Para Freudenthal el pensamiento matemático no puede ser transmitido directamente a los alumnos por lo que la enseñanza de las matemáticas no debería empezar por el final, sino por las situaciones de la vida diaria.

- ***Principio de Realidad.***

La EMR utiliza situaciones del mundo real o problemas contextuales como un punto inicial para aprender matemáticas, situaciones las cuales son matematizadas para avanzar a lo formal y estructural (Santamaria, 2006). El término “realista” se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la realidad o autenticidad de los problemas. Es decir, que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real, sino que basta con que sean “reales” en la mente de los estudiantes, que sean

¹⁸ EMR es la abreviación de Educación Matemática Realista.

representables, razonables e imaginables por lo que los contextos pueden venir de historias ficticias, de otras ciencias o también del mundo formal de las matemáticas, los cuales pueden presentarse en forma de juego o reto, pueden provenir de la realidad y a su vez contener elementos no reales en sí mismos. Estos contextos y situaciones deben ser generadores de su actividad matematizadora y no ser solamente instrumentos distractores o secundarios de la actividad matemática escolar. (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2009)

- ***Principio de Niveles.***

La EMR sostiene que, durante los procesos de aprendizaje, los estudiantes pasan por varios niveles de comprensión, desde las soluciones informales conectadas al contexto hasta alcanzar actividades matemáticas más formales.

Freudenthal propone la matematización como la meta central de la educación matemática llegando a afirmar que “No hay matemática sin matematización” y llamó “matematización” a la forma de enfrentar una situación real y organizarla con medios matemáticos con el fin de resolverla. Es de esta manera, como afirma Sfard, que se puede pasar del lenguaje común al lenguaje matemático. En la matematización horizontal se va del mundo de la vida al mundo de los símbolos; es decir que se utilizan las herramientas matemáticas para resolver un problema de la vida diaria y en la matematización vertical se trabaja dentro del mundo de los símbolos, es decir, dentro de la matemática misma.

Ambas acciones matemáticas pueden tener lugar en cualquier nivel de la actividad matemática escolar. Según Treffers mencionado por (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2009) un enfoque empírico se centra solo en la matematización horizontal, un enfoque estructuralista se

limita solo a la matematización vertical y en un enfoque mecanicista ambas formas están ausentes (p. 20).

El proceso de matematización involucra aspectos tales como el reconocer características esenciales en situaciones y problemas, el descubrir características comunes, ejemplificar ideas generales, enfrentar situaciones problemáticas de manera paradigmática, buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas, y reflexionar acerca de la actividad matematizadora considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas.

En la EMR se propone también el uso didáctico de modelos que promuevan y apoyen el proceso de matematización progresiva. Estos modelos funcionan como vehículos, como puentes entre la comprensión informal que está conectada con la realidad del estudiante y la comprensión de los sistemas formales (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2009). Los modelos son usados como representaciones de situaciones problema, estos pueden ser materiales concretos, bosquejos visuales, esquemas, situaciones paradigmáticas como la resta repetida, diagramas o símbolos. Los modelos deben estar arraigados en los contextos realistas imaginables y deben ser flexibles de manera que puedan ser aplicados también en niveles más avanzados en una matematización vertical.

El modelo debe permitir el tránsito desde el nivel más bajo a niveles más avanzados, debe también ajustarse a las estrategias informales de los estudiantes, pueden ser inventados por los estudiantes mismos y ser adaptables a nuevas situaciones. El rol del maestro es el de crear ambientes de aprendizaje propicios que contengan un conjunto de problemas, actividades y contextos, donde los estudiantes puedan crear, a través del diálogo y la negociación y guiados por

el maestro, su propio conocimiento. La situación problema debe ser fácilmente esquematizada y debe provocar la construcción de modelos.

- ***Principio de Reinversión Guiada.***

Como al inicio los estudiantes no poseen las herramientas matemáticas suficientes, aquí se propone que los estudiantes las reinventen a partir de problemas presentados en contextos y situaciones realistas. Este proceso de reinversión debe ser guiado por el maestro, por lo que los contextos ofrecidos a los estudiantes deben generar un ambiente propicio para la construcción del conocimiento matemático y deben permitirles el alcance de niveles más altos de comprensión.

Como gran parte de la matemática surge históricamente a manera de herramienta para matematizar situaciones del entorno natural y social, su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones (Bressan et al., 2016). Esto no significa que la enseñanza de las matemáticas se restrinja a fenómenos del mundo real, pues también debe operar dentro de la matemática misma.

- ***Principio de Interacción.***

La enseñanza de la matemática dentro de la EMR es considerada una actividad social, por lo que las interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el maestro son esenciales para la formación del pensamiento matemático. Como también lo afirma Sfard, en la EMR se considera el discurso del estudiante, manifestado en dar explicaciones, justificaciones, mostrar estrategias, discrepar, cuestionar o convenir, como el camino para lograr niveles más altos de comprensión. También coincide Sfard con la EMR cuando afirma que los estudiantes que no participan como interlocutores en el discurso, al escuchar y observar lo que otros proponen y

muestran, se hacen partícipes de ese discurso a través de las reflexiones generadas, lo cual les conducen también a crear modificaciones a su propio discurso.

En este principio de interacción, igualmente se propone el trabajo con grupos heterogéneos; es decir, de estudiantes con distintos niveles de habilidades, y no se promueve el separar a los estudiantes en pequeños grupos de acuerdo con sus destrezas. La EMR no pretende que todos los estudiantes alcancen el mismo nivel de desarrollo al mismo tiempo, por lo contrario, se respeta la individualidad de cada estudiante.

- ***Principio de Interrelación o Interconexión.***

Freudenthal afirma que se debe promover la interrelación de contenidos de aprendizaje de las matemáticas tanto como sea posible. En la EMR no se tratan los contenidos como entidades separadas, sino que deben entrelazarse los ejes curriculares en la solución de las situaciones problema. Esto permite mayor coherencia en la enseñanza y facilita la matematización bajo distintos modelos y lenguajes. El álgebra, la geometría y lo numérico deben trabajar juntos todo el tiempo.

En la figura 8 se muestran los principios de la educación matemática realista de Freudenthal, los cuales se tomaron en cuenta en la realización y ejecución de los diseños del presente trabajo de investigación.



Figura 8 . Principios de la educación matemática realista.

En el presente trabajo de investigación, la enseñanza de las nociones de perímetro y área se presenta a los estudiantes a través del contexto de la huerta escolar, donde ellos van construyendo estos conceptos de manera activa mientras resuelven las situaciones diseñadas por el maestro-investigador. Los estudiantes realizan en la huerta mediciones antropométricas, utilizan varas como unidades de medida no estandarizadas, miden perímetros con cuerdas, realizan recubrimientos de la superficie de la huerta con unidades no estándares, y comparan perímetros y áreas para comprender la independencia de estos conceptos. Durante las intervenciones intencionadas en la huerta escolar, los estudiantes deben dar explicaciones, justificaciones, mostrar estrategias, discrepar, cuestionar o convenir, tanto de manera oral como escrita, lo que les va a ir permitiendo avanzar a mayores niveles de comprensión de estos conceptos matemáticos. Los diseños elaborados permiten igualmente la interconexión del componente geométrico con el numérico.

2.3 ASPECTOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA BILINGÜE

La educación matemática escolar enseñada en otra lengua vehicular que no es la nativa tiene unos aspectos propios que es necesario reconocer y comprender de manera que, el proceso de enseñanza de las matemáticas se realice de manera apropiada, sin olvidar las características propias que conlleva un aprendizaje en otra lengua. En este apartado se expondrán dos aspectos importantes en los procesos de enseñanza en el aula: el primero sobre el lenguaje y su relación con el aprendizaje de las matemáticas y el segundo sobre el uso de ambas lenguas, la nativa y la lengua extranjera dentro del aula de clase.

2.3.1 *Perspectivas sobre el Lenguaje y Aprendizaje de las Matemáticas en Estudiantes*

Bilingües

Según (Moschkovich, 2002) existen tres perspectivas sobre el lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes bilingües: la adquisición de vocabulario, la construcción de múltiples significados y las prácticas discursivas.

Aunque algunos investigadores han considerado que el principal reto de los estudiantes bilingües de matemáticas es la adquisición de vocabulario y la comprensión de lectura en la lengua meta; Moschkovich considera que el desarrollo de la competencia matemática requiere mucho más que alcanzar estos dos aspectos, y que para el alcance de esta competencia es fundamental, la participación de los estudiantes a través de diversas intervenciones orales y escritas para explicar procesos, describir conjeturas, proveer conclusiones, presentar argumentaciones, construir significados, relacionar datos, sacar ideas centrales, deducir conclusiones, etc.

Por estas razones es claro que no es solamente a través de la ejecución de algoritmos, la resolución de problemas, la lectura de textos de clase o la realización de talleres, que se alcanza competencia matemática, sino que son necesarios los procesos discursivos; y aún si en algunas aulas de clase no existieran procesos de discusión oral o escrita, el aprendizaje de las matemáticas no dependería solamente del aprendizaje de vocabulario, afirma la autora.

Dado que el desarrollo de la competencia matemática, como se ha mencionado, implica otras habilidades más allá del conocer el significado de las palabras de la lengua vehicular, es importante distinguir entre el conocimiento del vocabulario y la competencia matemática de un estudiante, pues se puede ser matemáticamente competente aún a pesar de no contar con las suficientes herramientas lingüísticas en la lengua meta. La carencia de vocabulario en la lengua vehicular no tiene por qué ser interpretado como una deficiencia, una razón para remediar o un prerrequisito para participar en las clases de matemáticas, los estudiantes bilingües pueden aprender vocabulario en la nueva lengua, al mismo tiempo que aprenden matemáticas.

Moschkovich plantea una segunda perspectiva acerca del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes bilingües, y es la construcción de los múltiples significados de las palabras. De acuerdo con Halliday, (1978) citada por (Moschkovich, 2002) existe un registro propiamente matemático diferente del uso común del lenguaje y que los estudiantes deben aprender a diferenciar y a usar apropiadamente en cada contexto (p. 193). En la enseñanza de las matemáticas a estudiantes bilingües se observan estos obstáculos lingüísticos que producen con frecuencia malas interpretaciones de los estudiantes acerca de lo que está siendo enseñado. Algunos ejemplos de estos múltiples significados son:

- “**any number**” no significa “cualquier número” sino “todos los números” en un contexto matemático.
- “**a quarter**” puede referirse a “una moneda de dólar americano” o “un cuarto de una unidad”.
- “**prime**” puede referirse a “prime number,” (número primo), “prime time,” (horario estelar) o “prime rib” (costilla) y en español “prime” puede significar “primo pariente” o “número primo”.
- El uso de “**more**” (mas) es otra palabra que puede causar obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo:

Hay cuatro más ____ que.

There are four more ____ than.

Hay cuatro veces más ____ que ____.

There are four times as many ____ as ____.

Esta segunda perspectiva acerca de la enseñanza de las matemáticas a estudiantes bilingües, permite cambiar el enfoque de centrarse en como los estudiantes adquieren vocabulario a centrarse en como los estudiantes negocian los múltiples significados de los términos matemáticos; de cómo los estudiantes adquieren palabras a como desarrollan el significado de esas palabras; de aprender palabras con significados únicos a comprender palabras con significados múltiples; y de aprender vocabulario a usar las palabras apropiadas en diferentes situaciones. Los estudiantes bilingües deben aprender a distinguir estos múltiples significados de las palabras y es tarea del profesor utilizar varios recursos para lograr esta claridad y comprensión en sus clases.

La tercera perspectiva propuesta por Moschkovich presupone que, el aprendizaje de las matemáticas es una actividad discursiva y por lo tanto inherentemente social y cultural. Los estudiantes cuentan ya con conocimientos previos en ambas lenguas, la nativa y la lengua meta, cuentan también con unos registros lingüísticos propios tanto de la vida diaria como del discurso matemático, y esta perspectiva sociocultural refiere a como los estudiantes usan todos estos recursos de los diferentes registros para lograr comunicarse matemáticamente. En esta perspectiva discursiva no nos enfocamos en los errores y deficiencias de los estudiantes, sino en los recursos y en las competencias con que ellos cuentan.

Esta perspectiva discursiva va más allá del conocimiento del vocabulario o del conocimiento de los múltiples significados de las palabras, ya que se comprende que, aunque un estudiante no maneje completamente estos dos aspectos de la nueva lengua, esto no le representa un impedimento para lograr adquirir los conceptos matemáticos que se están estudiando. Los estudiantes utilizan más que palabras del nuevo idioma que están aprendiendo para comunicar, razonar y argumentar, ellos usan gestos, descripciones gráficas y aún su propia lengua, como recursos para comunicarse matemáticamente. Si los educadores matemáticos en contextos bilingües se enfocan solamente en las dificultades de los alumnos en usar las palabras en inglés de manera correcta, se haría un juicio corto y poco apropiado, acerca de la capacidad del estudiante de comunicar apropiadamente sus ideas matemáticas.

Enfocarse solamente en corregir el vocabulario o la pronunciación de los estudiantes durante el proceso de enseñanza de las matemáticas, desviaría al maestro de enfocarse en lo discursivo y, por lo tanto, en el desarrollo de las competencias matemáticas que los estudiantes están adquiriendo a través del uso de otra lengua vehicular. Desde esta perspectiva son aceptados los diversos recursos que los estudiantes bilingües utilizan para lograr expresar sus ideas matemáticas, como el paso del

inglés al español, el uso de gestos, de objetos o representaciones gráficas para lograr explicar y comunicarse matemáticamente. Es importante tener en cuenta que la función primordial de un maestro de matemáticas de estudiantes que están aprendiendo otra lengua, es mantener un enfoque en las ideas matemáticas al mismo tiempo que desarrolla en sus estudiantes competencia comunicativa en esa lengua. El maestro bilingüe debe comprender que la adquisición de vocabulario ocurre de manera más exitosa, no cuando se les corrige el vocabulario a los estudiantes, sino cuando se utiliza el idioma en contextos de enseñanza que involucran discusiones por largos periodos de tiempo. En la figura 9 se puede ver la relación inclusiva de cada una de las perspectivas del lenguaje mencionadas y el aprendizaje de las matemáticas en contextos bilingües.



Figura 9 . Perspectivas sobre el lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas en contextos bilingües.

Tal y como se ha expuesto en los puntos anteriores de este marco teórico con el enfoque comunicacional de la enseñanza de las matemáticas de Anna Sfard, con el enfoque comunicativo de enseñanza de las lenguas expuesto por Richards, y en este apartado con las perspectivas sobre

el lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes bilingües propuesto por Moschkovich, el desarrollo de la competencia discursiva está en el centro de los procesos de enseñanza y es el enfoque utilizado durante la realización, implementación y ejecución de los diseños de intervención del presente trabajo de investigación.

Los estudiantes durante el desarrollo de los diseños propuestos están siempre participando en procesos discursivos, participan en diversas intervenciones orales y escritas para explicar procesos, proveer conclusiones, presentar sus argumentaciones, y construir los significados de las nociones de longitud, perímetro y área. Estos diseños fueron elaborados bajo la metodología CLIL, la cual a su vez propone en su principio de comunicación¹⁹, abordar el lenguaje bajo tres perspectivas, el lenguaje de enseñanza (vocabulario y gramática), el lenguaje para la enseñanza (expresiones lingüísticas) y el lenguaje a través de la enseñanza (las practicas discursivas). Los diseños elaborados bajo este enfoque discursivo proveen a los estudiantes con los elementos de la lengua extranjera necesarios para facilitarles los procesos comunicativos tanto orales como escritos.

Durante las intervenciones orales de los estudiantes se estimula y refuerza el uso del inglés, pero a su vez no se castiga ni se ignora el uso de la lengua nativa que ellos hacen para lograr comunicarse matemáticamente, se aceptan los errores de vocabulario, los errores en el uso de las expresiones lingüísticas y en la pronunciación que se cometen en el desarrollo de la comunicación, de manera que se privilegia siempre el enfoque discursivo para desarrollar competencia matemática y comunicativa en la nueva lengua.

¹⁹ Ver el apartado 2.5.1.4 donde se explica este principio.

2.3.2 El Uso de dos Lenguas en el Aprendizaje de las Matemáticas

Existen dos perspectivas teóricas distintas que explican el fenómeno del lenguaje: la perspectiva psicolingüística, la cual ve el lenguaje como un fenómeno cognitivo individual y limita sus estudios a contextos experimentales; y la perspectiva sociolingüística, que se enfoca en la naturaleza social del lenguaje asumiéndolo como un fenómeno no solo cognitivo sino también cultural y social, y sus estudios sobre el uso del lenguaje se realizan en contextos naturales (Moschkovich, 2007). Para el desarrollo de esta investigación se usará un enfoque sociolingüístico, el cual provee de una visión más amplia para comprender y analizar el discurso en el aula bilingüe de matemáticas.

En el aula de clase bilingüe ocurre en los estudiantes y docentes un fenómeno llamado “Code Switching” o cambio de código, el cual se refiere a la práctica de usar las dos lenguas, la lengua meta y la lengua nativa, en el transcurso de un episodio comunicativo. En el aula bilingüe de matemáticas los estudiantes suelen moverse de una lengua a otra para hacer cálculos aritméticos y para participar de las discusiones de clase. Cuando los estudiantes no conocen el vocabulario de un tema en particular, ellos recurren a su lengua nativa o solicitan traducción a sus compañeros o docentes, y en algunos casos, algunos estudiantes prefieren abstenerse de participar en las discusiones de clase lo que tendría más efectos negativos que positivos desde el punto de vista del aprendizaje.

Esta práctica de recurrir a ambas lenguas ha sido estigmatizada por algunas instituciones o docentes, y hasta en algunos casos se ha prohibido el uso de la lengua nativa por considerar esta práctica nociva para el aprendizaje de la nueva lengua. Moschkovich corrobora a través de estudios de otros autores, que el permitir a los estudiantes escoger la lengua que prefieran para

resolver cálculos y problemas matemáticos, tiene mayores ventajas que solo permitir el uso de la lengua meta. La autora afirma también que hay evidencia adecuada para aseverar que el cambio de lengua no afecta la calidad y la integridad del pensamiento a nivel conceptual en la producción de la nueva lengua y que el bilingüismo no tiene efecto en la resolución de problemas matemáticos con tal que la proficiencia en la lengua sea al menos adecuada para comprenderlos. En la figura 10 se ilustra como el uso de ambas lenguas en el aula de clase es necesario para el avance en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes bilingües.

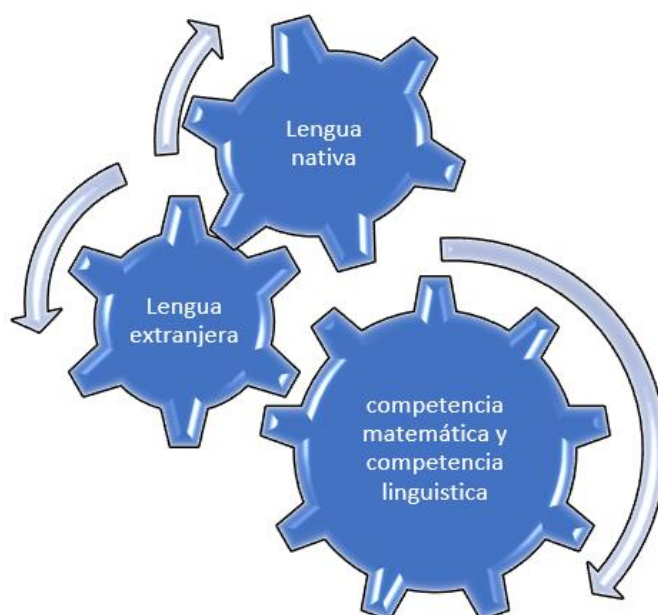


Figura 10 . El uso de ambas lenguas en el aprendizaje de las matemáticas como generador de competencia matemática y lingüística.

El enfoque sociolingüístico utilizado en el presente trabajo de investigación para abordar la enseñanza bilingüe de las matemáticas ubica el desarrollo de la comunicación dentro de un contexto natural el cual es en este caso la huerta escolar. Dentro de este contexto de la huerta, el lenguaje ocurre de manera espontánea dada su naturaleza social y cultural, y por esta razón el cambio de código lingüístico inglés-español en los estudiantes, sucede también de manera natural

en los episodios comunicativos. Este cambio de código no se toma en esta investigación como una falla en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en una lengua extranjera, sino como un recurso de los estudiantes para avanzar en su pensamiento matemático y en la producción de la nueva lengua.

2.3.3 La Hipótesis de la Interdependencia Lingüística

Cummins afirma en su hipótesis de la interdependencia lingüística que, las lenguas no están separadas en el cerebro sino que son interdependientes entre sí; es decir que, lejos de ser perjudicial el aprendizaje simultaneo de dos o más lenguas, esto puede reforzar en los estudiantes su competencia no solo lingüística sino también de los conceptos aprendidos en esas lenguas (Cummins, 1991).

De acuerdo con el autor, aunque los aspectos lingüísticos tales como la pronunciación, la fluidez, la entonación, el acento, están claramente separados, hay una competencia cognitivo-académica subyacente, que es común a las lenguas, es una amplia gama de registros que se pueden usar en ambos idiomas, lo que permite la transferencia de esta competencia cognitivo-académica de una lengua a otra: es decir, que el conocimiento se comparte entre las lenguas.

Esto quiere decir que, un niño que ha entendido en una lengua algún concepto académico, no necesita entenderlo en la otra lengua, los aspectos conceptuales, las estrategias de aprendizaje y aún las similitudes entre las lenguas son transmisibles sin importar si los conocimientos fueron adquiridos en la lengua extranjera. Para que esta transferencia ocurra, es fundamental que el programa de inmersión cultural escolar esté bien estructurado y desarrollado.

En la siguiente figura se puede observar la analogía del iceberg la cual explica el Modelo de Competencia Subyacente Común, de Cummins.

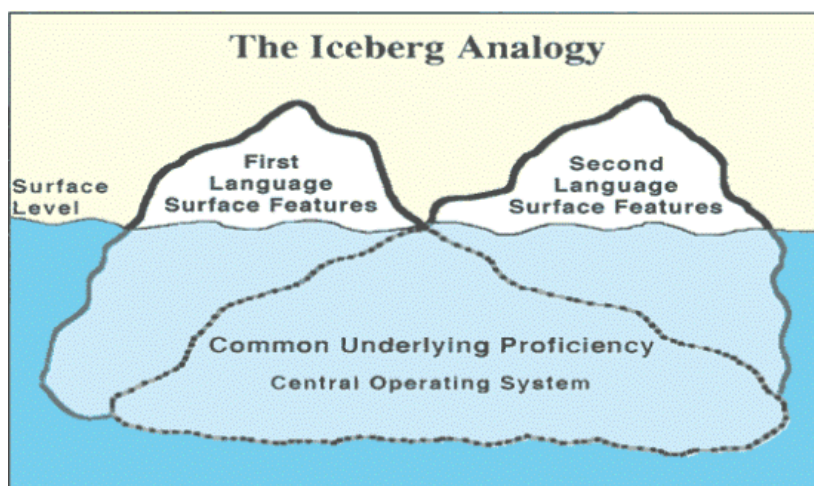


Figura 11 . La Analogía del Iceberg.

Nota. Tomado de <https://www.teachingforbilitery.com/wp-content/uploads/2015/08/iceberg.jpg>

En la superficie del iceberg están representadas la competencia en la lengua materna y en la lengua extranjera o lengua segunda, las cuales están claramente separadas entre sí. Sin embargo en el nivel bajo la superficie, los dos icebergs están fusionados de forma que las dos lenguas no funcionan de forma separada, ambas lenguas operan a través del mismo sistema central de procesamiento (Baker, 2006). Es por esta razón que, los estudiantes bilingües procesan los aprendizajes a través de una fuente común de pensamiento.

Los estudiantes deben desarrollar adecuada competencia lingüística en ambas lenguas que están aprendiendo, y estos procesos desarrollados de manera adecuada afectan, soportan y fortalecen el “sistema de operación central”. El niño al ir adquiriendo su lengua materna establece unas habilidades las cuales son almacenadas en el sistema de operación central y estas habilidades pueden ser usadas al trabajar con la lengua meta. Las competencias en la lengua

materna afectan positivamente el logro en la lengua meta y los altos niveles de proficiencia en la lengua meta también afectan positivamente la adquisición de la lengua materna.

Esta fundamentación lingüística en ambas lenguas permitirá el aprendizaje del conocimiento escolar de manera apropiada; y de manera opuesta, si las habilidades del lenguaje no están lo suficientemente desarrolladas para afrontar las complejidades de los conocimientos en otros campos del saber, las producciones serán débiles y empobrecidas.

Para el contexto de bilingüismo CLIL, es necesario el adecuado desarrollo de la lengua materna a su vez que se desarrolla la nueva lengua, las habilidades y el conocimiento adquirido en una lengua se transfieren a la otra creándose una competencia subyacente común de la cual los estudiantes aprovechan sin importar en que lengua están operando. Las habilidades académicas son interdependientes al unirse en este marco común (Wilhelmer, 2008).

El colegio donde se realiza la investigación tiene una alta intensidad horaria para la enseñanza del inglés como lengua extranjera y de igual manera una alta intensidad horaria para la enseñanza del español como lengua materna. Adicional a esta enseñanza directa de ambas lenguas, algunas asignaturas como las matemáticas, se enseñan en inglés y otras asignaturas en español. Esta fundamentación lingüística en ambas lenguas sirve de base apropiada para la implementación y conclusiones obtenidas en esta investigación. Las complejidades de los conocimientos sobre perímetro y área abordadas en este trabajo cuentan de base con unas habilidades previas en ambas lenguas apropiadamente desarrolladas durante la escolaridad de los estudiantes a investigar, lo cual incide directamente en los resultados obtenidos.

2.4 ENSEÑANZA DEL ÁREA Y EL PERÍMETRO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

La enseñanza del pensamiento métrico y los sistemas de medida en la escuela, de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), cobra importancia dada la múltiple aplicabilidad que tiene la medición en situaciones de la vida diaria, tales como, en las actividades comerciales, en los espacios y objetos que nos rodean y así mismo en los distintos campos del saber. Otra razón que soporta la enseñanza de la medición en la escuela es que está necesariamente unida con aspectos geométricos, aritméticos y de resolución de problemas, lo cual potencia el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático en los estudiantes.

En este apartado se comienza con el desarrollo teórico del concepto de magnitud o cualidad medible de los objetos, para luego aproximarse a la construcción del concepto de medida y a la necesidad de la utilización de la unidad de medida. Seguidamente se abordarán algunos aspectos de la magnitud lineal longitud y la magnitud multilineal superficie para luego aproximarse a los conceptos de perímetro y área, junto con sus dificultades epistemológicas y didácticas. Finalmente se mencionarán algunos aspectos importantes del tratamiento didáctico de la medida en la escuela.

2.4.1 *Magnitud y Medida*

La construcción del concepto de medida no se da en los niños por generación espontánea, sino que se requiere de unas experiencias previas que les permitan, primero explorar y descubrir las magnitudes físicas de los objetos a través de los sentidos, para luego construir el concepto de unidad de medida. Es por esta razón que, en la básica primaria, se deben facilitar situaciones

reales en las cuales los niños se acerquen y comprendan a través de la experiencia, los conceptos métricos de longitud, amplitud, capacidad, masa, tiempo, dinero, superficie y volumen.

La enseñanza de la magnitud de área al igual que la magnitud longitud, tradicionalmente se ha realizado bajo un enfoque aritmético donde se privilegia el uso de fórmulas y la conversión de unidades, pero no la construcción del concepto de medida. Este tratamiento precipitado hacia el manejo numérico y el dominio del Sistema Métrico Decimal, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sus medidas y a la necesidad misma de medir, no le facilita al estudiante captar todos los matices y las aplicaciones prácticas que tiene esta magnitud, como el repartir equitativamente, el comparar, la reproducción de áreas, el uso de patrones de medida, como también la estimación de las medidas en situaciones cotidianas. (Zapata & Cano, 2008)

El niño debe transitar los siguientes estadios para el conocimiento y manejo de una magnitud. Primero, el niño debe percibir una magnitud como una propiedad que posee una colección de objetos. En esta etapa es importante que el niño se acerque y entre en contacto con el objeto, para de esta manera experimentar, poder percibir una magnitud dada, y asimismo reconocerla distinta de la sensación que experimentaría al considerar otras propiedades del mismo objeto. Segundo, el niño debe comprender el concepto de conservación de una magnitud. En este estadio el niño comprende la idea de que, aunque el objeto sufra cambios de posición, forma, tamaño, color o alguna otra propiedad, la magnitud que se está considerando, permanece siempre constante. Tercero, el niño debe lograr ordenar objetos teniendo en cuenta la magnitud considerada: esto es más... que...; esto es igual ... que ...; esto es menos ... que Cuarto, el niño ya puede establecer la relación entre la magnitud y el número. En este último estadio el niño el niño es capaz de medir, el niño siente la necesidad de asignar un número a ese objeto, para

decir con exactitud cuánto mide, pesa o contiene, lo que lleva a la adopción de una unidad de medida. (Chamorro & Belmonte, 2000)

Para que el niño alcance la madurez mental en cada uno de estos estadios, se le debe proporcionar un medio amplio en el que pueda, de manera individual y grupal, experimentar, probar y, sobre todo, vivir las experiencias con las magnitudes, esto puede llevarse a cabo a través de talleres, laboratorios, rincones y también a través de proyectos dentro y fuera del aula de clase. Estas actividades propuestas deben permitirles a los alumnos experimentar las magnitudes de manera libre, y de igual manera deben diseñarse actividades de aprendizaje controladas, donde el maestro supervise e intervenga en el objetivo a alcanzar.

De acuerdo con los estadios de Piaget sobre el desarrollo evolutivo de la idea de medida, mencionados por (Chamorro & Belmonte, 2000, pág. 17), en una primera etapa, la comparación entre dos objetos es perceptiva y directa, es decir, se hace a través de los sentidos. El niño comenzará usando prioritariamente la vista y luego utilizará ciertas partes del cuerpo para determinar la magnitud dada. Al final de esta etapa, el niño deja de utilizar su cuerpo, para pasar a términos intermedios más independientes, como objetos, que utiliza para desplazar y determinar la magnitud. Luego el niño realiza una partición para aplicar una de sus partes como unidad de medida, primero utilizará un término medio demasiado grande y después reconocerá que un término más pequeño será el más apropiado para medir de manera más exacta.

La presente investigación sucede dentro de un contexto físico que permite la experiencia sensorial de los estudiantes para la adecuada construcción del concepto de magnitud y medida de longitud y superficie. No se comienza con el sistema de unidades, sino que se privilegia la construcción de las nociones a través de la comparación, la percepción de la conservación de las

magnitudes, el recubrimiento de las superficies, el uso de medidas antropomorfas y el uso de unidades de medida no estándar.

2.4.2 La Noción de Unidad

Al establecer la medida de las magnitudes se hace necesario establecer igualmente la noción de unidad, de manera que los estudiantes comprendan la relación existente entre unidad y magnitud, y que un cambio de unidad tiene implícito un cambio en la medida de una magnitud. El paso de las unidades antropométricas a la unidad de medida universal y a la idea del Sistema Métrico Decimal es complejo, y la transición podría ser casi imposible si no se ha realizado un trabajo previo que permita comprender los procesos de medición y la idea de unidad, y esta transición debe ser abordada didácticamente por el maestro en el aula de clase. De acuerdo con (Chamorro, 2003) la idea de unidad se desarrolla y se perfecciona en estas cinco etapas:

- *Ausencia de unidad.* La primera medida que el niño realiza es netamente visual y comparativa. El niño compara dos objetos entre sí, pero todavía no tiene la idea y mucho menos el uso de una unidad de medida independiente del objeto a medir. En esta comparación de dos magnitudes el niño no utiliza todavía algo común y que sea independiente del objeto, que es la unidad de medida.
- *Unidad objetal.* El niño ya utiliza una unidad, pero está ligada únicamente a un solo objeto y relacionada con lo que se debe medir. Aunque esta unidad todavía no es independiente del objeto, el niño puede también utilizarla como una unidad para la medida de otros objetos.

- *Unidad situacional.* Esta unidad todavía depende fuertemente del objeto a medir, pero puede cambiar de un objeto a otro. El alumno adapta las unidades que escoge al objeto a medir.
- *Unidad figural.* En esta etapa la unidad a construir va perdiendo toda relación con el objeto a medir. Todavía permanece cierta tendencia a medir objetos grandes con unidades grandes y objetos pequeños con unidades pequeñas. Los niños van estableciendo distintas unidades, todas ellas válidas para medir cualquier objeto y pueden llegar a constituir un verdadero sistema de unidades en esa magnitud.
- *Unidad propiamente dicha.* En esta etapa, el constructo de unidad ya está libre del objeto a medir y es una unidad interfigural; es decir, es la misma unidad para todas las figuras u objetos.

Cuando el niño ya logra comprender la unidad, entiende que el resultado de la medida es un número y puede medir con una misma unidad diversa clase de objetos. Se pasa de la unidad ligada totalmente al objeto a medir (intraobjeto) a una unidad que no depende en absoluto del objeto a medir (interobjeto). Ya logra construir una unidad más perfecta y desligada del objeto, lo que permite una mayor facilidad en el procedimiento de la medida.

En el diseño correspondiente a la longitud y el perímetro que se implementa en el presente trabajo de investigación, los estudiantes empiezan utilizando las partes de su cuerpo como unidades de medida, y luego pasan al uso de varas reconociendo en estas varas un sistema propio de medida útil para medir longitudes y perímetros de objetos físicos. Luego se pasa a la medición de perímetros en figuras representadas pictóricamente utilizando el lado de un cuadrado como unidad de medida. En el diseño correspondiente a la medida del área, los estudiantes utilizan la

unidad cuadrada para figuras representadas pictóricamente y luego utilizan unidades físicas con distintas formas para hacer recubrimientos en la superficie de la huerta y así hallar su área. Este paso por el uso de distintas unidades de medida permite a los estudiantes avanzar en la comprensión del concepto de unidad y a comprender que, el uso de una unidad de medida diferente implica a su vez un cambio en la medida de cada magnitud.

2.4.3 Aspectos de la Magnitud Lineal Longitud

La magnitud longitud es un concepto básico en la formación del pensamiento geométrico en los niños pues da lugar a la intuición del espacio euclídeo.

2.4.3.1 La Noción de Distancia y La Conservación de la Longitud

La comprensión de la noción de distancia permitirá al niño la construcción de la medida de longitudes y también la construcción del espacio. La distancia está definida no con relación a un objeto, sino al espacio vacío comprendido entre dos de ellos, por lo que la longitud entre dos objetos es su distancia. La distancia está ligada totalmente al concepto de línea recta, por lo que es necesario que el niño adquiera la noción de línea recta primero, para así lograr adquirir luego la noción de distancia.

El concepto de conservación de longitud requiere del paso por algunos momentos de desarrollo en el niño. Cuando los niños son expuestos a dos objetos de igual longitud colocados paralelamente y ocurre la alteración en la forma de alguno de ellos, los niños rompen esta idea inicial de igual longitud, y este movimiento los lleva ahora a afirmar que los objetos ya no son iguales, y que es más largo el objeto que se modificó. De igual manera, si se desplaza alguno de los objetos que están siendo comparados, los niños suelen fijarse solamente en los puntos

extremos, olvidándose de los puntos de partida, lo que los lleva a afirmar también que los objetos ya no son iguales en longitud, que ocurrió un alargamiento en uno de ellos, y por lo tanto es más largo el objeto cuyo punto límite está más alejado.

La conservación de longitud se logra finalmente, cuando se consigue la construcción de grupos de particiones y también de grupos de emplazamientos y desplazamientos. Es decir, cuando se logra constatar que la longitud se conserva, aunque las partes y su reunión se coloquen de cualquier forma, independientemente de los desplazamientos que se realicen.

2.4.3.2 Desarrollo del Concepto de Longitud en Freudenthal

Las fenomenología de (Freudenthal, 2002) asociada al concepto de longitud nos brinda pautas importantes para el tratamiento didáctico de este concepto.

El primer aspecto planteado por Freudenthal es que la longitud está expresada mediante adjetivos y especialmente por parejas de adjetivos opuestos, tales como, largo-corto, amplio-angosto, grueso-delgado, alto-bajo, profundo-superficial, lejos-cerca, ancho-angosto, alto-bajo, diminuto-insignificante, grueso-fino, etc. Los niños deben aprender a observar estas características relacionadas a la magnitud longitud, para ser capaces de expresarlas lingüísticamente, y aquí el rol del maestro es fundamental.

Estos adjetivos para expresar longitud son también utilizados en forma comparativa, mas largo que, más corto que, más ancho que, etc.; y también en forma superlativa, el más grueso, el menos angosto, etc.; o también pueden ser anteceditos de adverbios como, muy cerca, demasiado alto, bastante lejos, etc. Todas estas expresiones lingüísticas son utilizadas para comparar la longitud de los objetos y es necesaria su enseñanza y utilización en el aula de clase para un

adecuado desarrollo de este concepto en el niño. Hay que tener en cuenta que estos aspectos del lenguaje deben ser enseñados de manera explícita a los estudiantes en la lengua vehicular en la que las matemáticas están siendo enseñadas, y no dar por sentado que los niños ya las conocen y manejan por sí mismos.

Otro aspecto es la relación entre la longitud y la rigidez. La rigidez es entendida como la invariancia de la forma y del tamaño de los objetos aun cuando estos sean sometidos a ciertos movimientos. El cuerpo rígido puede ser desplazado permaneciendo congruente con el mismo bajo esta operación. Para lograr desarrollar el concepto de longitud, es necesario haber construido primero el concepto de rigidez pues para medir en la magnitud longitud es necesario que exista rigidez en la dirección en que se va a medir. También existe una relación entre longitud, rigidez y semejanza, siendo esta última un paso mental necesario para el desarrollo del concepto de rigidez y esta para el desarrollo cognitivo del concepto de longitud. Las semejanzas juegan un papel importante en la percepción visual, si un cuerpo rígido se aleja permanece invariante, pero visualmente lo que está mas lejos parece ser mas pequeño, expresando así unas relaciones de semejanza.

Otro aspecto del concepto de longitud es la invariancia de la longitud bajo deformaciones o flexiones, las cuales son reversibles; es decir, que las transformaciones aplicadas a los objetos, siempre se podrán deshacer y regresar al estado inicial. También hay que tener en cuenta la invariancia de las longitudes cuando le aplicamos ciertas transformaciones planas o espaciales como traslaciones o simetrías, y la posibilidad de deshacer cualquier transformación realizada y volver de nuevo al estado inicial. También encontramos la invariancia de la longitud de arco cuando al enderezar el objeto no se sufren acortamientos o alargamientos.

Ambos aspectos, el de la rigidez y la flexibilidad son hechos físicos que se adquieren de forma enactiva; es decir, a través de las primeras experiencias del niño con el mundo que le rodea. Este desarrollo comienza primero en una forma enactiva o experiencial, luego el niño llega a una fase icónica, apoyándose en imágenes físicas y finalmente, la fase simbólica donde se va haciendo cada vez más consciente hasta poder ser verbalizada.

Otras dos transformaciones que muestran invariancia de la longitud son las transformaciones de hacer-deshacer; es decir, un objeto largo se descompone en varias partes mas pequeñas y luego se recompone nuevamente. En este caso, se comparan los estados inicial y final sin dar importancia a los intermedios, y la longitud no es influida por el orden de las partes que la componen nuevamente.

Hay otro aspecto que Freudenthal señala al igual que Piaget en el desarrollo del concepto de longitud, y es la idea de distancia. Mientras que la longitud es una función de objetos completos, la distancia es una función en la que es preciso referirse a dos objetos. El tratamiento adecuado de la distancia permite comprender la medida de longitud de un objeto, entendida, así como la distancia entre dos puntos limites en ese objeto.

2.4.3.3 Aspectos sobre la Medición de Longitudes

Para la medición de longitudes es necesario el uso de instrumentos o de “varas” de medir, los cuales serán en un comienzo mas pequeñas que el objeto a medir. Los primeros instrumentos utilizados por los niños serán antropométricos, los niños suelen usar el “paso”, y en un comienzo no les preocupa que la longitud de todos los pasos no sea la misma, pero sí comprenden que, a menor número de pasos, menor será la longitud y viceversa. Otro instrumento utilizado por los

niños en la medición de longitudes es la distancia entre el pulgar y el dedo pequeño de su mano para contar con “cuartas”.

La medición con estos instrumentos corporales o con alguna otra vara de medir, implica ir acomodando el instrumento tantas veces sea necesario hasta que la longitud que se va a medir se acabe. Cuando el objeto a ser medido no es cubierto totalmente al aplicar congruentemente la vara de medir un número de veces, los niños expresarán la medida sobrante con expresiones verbales tales como, es un poco más largo, es un poco más corto, para luego empezar a recurrir a términos fraccionarios tales como la mitad, un tercio y luego hacer uso de la fracción decimal. Después del uso de medidas antropométricas, se pasa a un sistema metrológico independiente del hombre y del objeto.

Un aspecto por mencionar durante la medición de un trayecto que se encuentra bloqueado es el reemplazo parcial que hacen los niños del tramo bloqueado por un trayecto paralelo, que les permite terminar de realizar la medición.

Los diseños que se implementan en esta investigación tratan didácticamente el perímetro inicialmente desde la comparación de longitudes, se utilizan parejas de adjetivos opuestos y las estructuras gramaticales de comparativos y superlativos en inglés. La primera tarea de los estudiantes es la de observar algunas longitudes en el espacio de la huerta escolar y hacer las comparaciones respectivas de manera escrita y oral. Para este fin, se realizan explicaciones gramaticales previas y se trabaja en conjunto con su maestro de inglés para ampliar esta temática específica del idioma en sus clases y así facilitar su desempeño durante el desarrollo de las actividades matemáticas.

Los estudiantes también realizan la medición del perímetro de la huerta con una cuerda y con la longitud de esa cuerda, realizan otros modelos de huertas de distintas formas. Para diseñar nuevas huertas con el mismo perímetro, los estudiantes tienen que deformar o flexionar la cuerda para formarlos, esto les ayuda a captar el concepto de la invariancia de la longitud bajo las transformaciones realizadas, y así también les ayuda a disociar el perímetro de la cantidad de la superficie que contiene.

La medición de longitudes en la huerta escolar comienza con instrumentos antropométricos, los dedos, la palma de la mano, los pies, los pasos; luego se les provee a los estudiantes con cuatro varas de distintos tamaños para medir las longitudes, las cuales ellos van acomodando hasta que se acabe la longitud a medir, y tienen que utilizar fracciones para expresar las medidas. Los diseños parten de lo experiencial, del contacto con el ambiente físico de la huerta escolar y luego se pasa a la fase icónica donde se apoya en imágenes físicas.

2.4.4 La Magnitud Multilineal Superficie

La magnitud superficie involucra conceptualizaciones de orden geométrico, y el cálculo de su medida la cual reconoceremos como el área, involucra también el conocimiento de las estructuras aditivas y multiplicativas²⁰. La magnitud superficie puede ser tratada de dos formas: de manera unidimensional o de manera multilineal.

Como magnitud unidimensional es una medida producto de tipo directo; es decir, que a través de otra superficie patrón mediante un proceso aditivo, se realiza el conteo del número de veces que se utiliza ese patrón sobre la superficie a medir. Como magnitud multilineal o producto

²⁰ Concepto utilizado por Vergnaud.

de medidas, multiplicamos la medida de sus lados para hallar el área, lo que requiere el uso de estructuras multiplicativas que, aunque son equivalentes en sus resultados con las aditivas, no lo son desde el punto de vista didáctico generando así una mayor complejidad en su tratamiento.

2.4.4.1 Uso de los Términos Superficie y Área

No existe unanimidad en el significado y el uso de los términos de superficie y área por parte de profesores e investigadores, los cuales tienen distintas comprensiones y opiniones sobre estos términos. Para el presente trabajo de investigación se concuerda con la postura de (Corberan, 1997) quien comprende el área como una propiedad más de una superficie, que puede ser medible y a la que se le puede asociar un número como resultado de su medida. Es decir, se considera el área como una magnitud autónoma disociada de la forma de la superficie y del número, disociación que también ayudará en la dificultosa disociación existente entre el área y el perímetro, siendo esta última otra propiedad también de la superficie.

2.4.4.2 Obstáculos al abordar la Magnitud Superficie y el Área

Las conceptualizaciones que deben realizar los estudiantes cuando se están enfrentando al aprendizaje de la magnitud superficie y su medida, conllevan ciertos retos y obstáculos de aprendizaje, que son por lo tanto también retos didácticos.

Un primer obstáculo didáctico en el manejo escolar de la magnitud superficie, es la frecuente presentación a los estudiantes de figuras dibujadas en papel. Este tratamiento didáctico no favorece a la separación entre la longitud y la superficie, dado que la línea que bordea la figura se convierte en el aspecto más visible de la misma, lo cual no permite u obstaculiza el reconocimiento de la superficie como magnitud susceptible de ser medida en esa figura.

Otro obstáculo epistemológico, es la creencia que existe en los estudiantes de que el área de una figura es igual a la medida de sus lados o su perímetro. Para resolver este problema (Chamorro, 2003) plantea que dar a los estudiantes figuras recortadas, permite a través del tacto, que los estudiantes comprendan mejor la diferenciación entre líneas y superficies y que visualicen mucho mejor la bidimensionalidad de las figuras. El tratamiento didáctico de esta magnitud a través de figuras recortadas y no dibujadas permite la posibilidad de manipular, de trasladar, de girar, de recortar en partes más pequeñas, e incluso de pegar, lo cual favorece un aprendizaje experiencial y a su vez significativo del concepto de área.

Otro aspecto para tener en cuenta en la enseñanza de la magnitud superficie es la utilización de objetos reales. Las formas irregulares que tienen en general los objetos reales generan un problema complejo que escapa a su tratamiento matemático en la educación básica primaria. Esto obliga al maestro a la utilización de objetos muy bien seleccionados, que evoquen ciertas cosas de la realidad, canchas deportivas, dormitorios, terrenos, y que estén especialmente presentados en forma de polígonos regulares, o de superficies que se puedan descomponer o aproximar mediante polígonos. Esta clase de objetos permite la utilización de medidas discretas dentro del aula, y también a la utilización de manera discreta de una magnitud continua.

Dada la irregularidad de los objetos reales, difícilmente se podrá trabajar la magnitud superficie con ellos en un aula de clase. Esta situación hace que la teoría y la práctica se distancien y para intentar cerrar esta brecha, se propone en este trabajo de investigación, la utilización de la huerta escolar, como contexto de aprendizaje, cuya superficie se encuentra ya diseñada en forma rectangular (es un rectángulo no exacto por su diseño rudimentario). Este diseño permitirá la experimentación, el uso de polígonos para realizar recubrimientos y la aproximación al

aprendizaje de esta magnitud a través de procedimientos simples. La siguiente figura muestra la huerta escolar del Colegio donde se realiza la intervención con los estudiantes.



Figura 12. La Huerta Escolar como Medio de Construcción de la Magnitud Longitud y Superficie.

2.4.4.3 Área y Perímetro

La teoría de las reglas intuitivas afirma que, los estudiantes reaccionan por lo regular de manera similar a una amplia variedad de tareas conceptualmente no relacionadas, haciéndose predecible la respuesta de los estudiantes a ciertas tareas matemáticas y científicas. Dos de esas reglas intuitivas que están relacionadas a tareas de comparación son: “más de A, más de B”, y “igual A, igual B” (Stavy & Tirosh, 1996).

Cuando los estudiantes fueron expuestos a tareas de comparación en los estudios de Stavy y Tirosh, un gran número de ellos respondía de acuerdo con la regla “más de A, más de B”, argumentando de manera incorrecta que, si se incrementa una cantidad, por consiguiente, se incrementa también la otra. Esto sucedió de igual manera en tareas sobre área y perímetro y en estudiantes de distintos grados escolares. La misma respuesta se obtuvo en actividades donde los estudiantes argumentaron que el perímetro de una figura que se modificó para igualar a otra en su forma permaneció igual a pesar del cambio sufrido, corroborando así la regla intuitiva que afirma que “igual A, igual B”.

La existencia de esta intuición en la comprensión de los conceptos de área y perímetro fue confirmada y caracterizada por Ávila y García quienes estudiaron la conservación de un contorno o perímetro y la variación de la superficie contenida en ese contorno o perímetro. De igual manera, estudiaron la conservación de una superficie y la variación del contorno que la contiene. Se constató que el niño persiste en la creencia de que, sin importar las transformaciones, el área permanece igual porque las figuras permanecen con el mismo perímetro (Ávila & García, 2019).

2.4.4.4 Objetivos de la Enseñanza del Área en la Escuela

La complejidad del concepto matemático del área se escapa de su posibilidad de enseñanza tanto en la educación básica primaria como en la secundaria. Esto conlleva a que el objetivo de su enseñanza no sea la construcción del concepto matemático, ni la búsqueda de su definición, sino, como afirma (Corberan, 1997) su estudio debe centrarse en los diversos procedimientos que permiten medir y comparar áreas de superficies planas.

Las propiedades a tener en cuenta en el estudio del área, de acuerdo con (O'Daffer y Clemens, 1977, citado por Corberan, 1997) son:

- Propiedad Aditiva. Si una región se puede descomponer en un número finito de regiones, el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.
- Propiedad de Invarianza. Si dos regiones son congruentes, entonces sus áreas son iguales.
- Propiedad de la Unidad. El área del cuadrado unidad es 1.

- Propiedad de la Disección. Si una región puede ser diseccionada en varias partes y esas partes reorganizadas para formar otra región, entonces las dos regiones tienen la misma área.

Estas propiedades hacen referencia a la conservación del área de una superficie cuando es sometida a diversas transformaciones y dado que estas propiedades no son evidentes para todos los estudiantes, deben ser objeto de enseñanza en el aula de clase a través de tareas de comparación y medición desde distintos enfoques con el fin de enriquecer y completar la comprensión del concepto de área en los estudiantes.

En el diseño que se implementa en el presente trabajo de investigación sobre el área, no se pretende abordar el concepto como tal pues la comprensión de este concepto se escapa del nivel escolar observado. Este trabajo se centra en la realización de procedimientos que permiten medir y comparar áreas de superficies planas, la descomposición del área en regiones, en recubrimientos de superficie, en la composición del área como la sumatoria de regiones, en la comparación de áreas iguales con distinta forma, y en el cuadrado como una unidad de medida.

2.4.5 El Tratamiento Didáctico de la Medida

El aprendizaje de las magnitudes y su medida en la escuela ha estado permeado por la influencia de la metodología tradicional, la cual ha privilegiado la repetición y la memorización como actos de aprendizaje. Los postulados de Piaget y Freudenthal nos llevan a replantear este acercamiento al concepto de magnitud, afirmando que es solo experimentando y manipulando los objetos, lo que hace posible el distinguir sus propiedades. La ausencia de estos contextos de experimentación con los objetos y con la medida, impide o retrasa la formación de estos

conceptos en los estudiantes, y los lleva implícitamente a tener que recurrir a la memorización de reglas que aún no comprenden, y que engañosamente logran manipular por un corto periodo de tiempo.

El Sistema Métrico Decimal y sus múltiplos y submúltiplos, solo tienen sentido en el estudiante si este siente la necesidad de su uso. Su aprendizaje, por lo tanto, requiere de actividades prácticas de medición que los lleven al uso de la unidad de medida y a la necesidad misma de fraccionar esa unidad cuando experimentan el problema de medir la parte sobrante del objeto. Algunos errores didácticos que aparecen con frecuencia en el proceso de enseñanza de la medida, son producto de la influencia de la metodología tradicional aún arraigada en la escuela (Chamorro & Belmonte, 2000).

Un primer error didáctico es la consideración del uso de los sentidos como un lujo o una pérdida de tiempo. Como ya se ha mencionado, el uso de los sentidos es imprescindible para la formación de los conceptos de magnitud y medida. Es a través de las propiedades físicas de los objetos que el niño establece relaciones de similitud o diferencia y estructura su pensamiento lógico-matemático.

Otro posible error es el uso inadecuado de los instrumentos de medida o el uso de un instrumento no apropiado para el objeto a medir. Ejemplos de estos errores son el uso de una regla para medir una curva, el uso de una regla para medir una superficie, el conteo inapropiado de los grados del transportador, o el no hacer coincidir el cero con el extremo del objeto a medir. Estos errores posiblemente ocurren por la falta de exposición del alumno a situaciones reales de medición donde él pueda elaborar sus propias estrategias y pueda escoger los instrumentos de medida que le sean más apropiados para cada objeto.

El proponer a los estudiantes situaciones problema que contengan datos no reales o que vayan contra el sentido común, es otro de los posibles errores didácticos en la enseñanza de la medición. Niños que corren 1000 kilómetros diarios, personas que comen 20 libras de arroz en un día, etc., dificultan los procesos de estimación y de autocorrección, pues generan un hábito de encontrar resultados irreales que no concuerdan con su entorno, y se convierten en un obstáculo para el razonamiento apropiado de los resultados hallados.

Otro posible error didáctico es el abuso en el uso de medidas enteras buscando redondeos no apropiados y sin tener en cuenta el uso funcional de la medida en cuestión. Se requiere realizar un buen trabajo de aproximación para cada caso concreto, guardando el contexto propio que a veces acepta resultados enteros y a veces no.

La escritura simbólica errónea usando inapropiadamente las unidades de medida, es otro posible error de los estudiantes, por lo que se les debe insistir en la escritura apropiada de cada uno de los pasos de resolución del problema, de manera que no se pierda el sentido del razonamiento que está llevando a cabo.

Finalmente, la carencia de estrategias para medir objetos reales, como la superficie de un terreno no regular, la cantidad de tela de un vestido, entre otros, es otro posible error didáctico, por lo que se debería practicar en clase, estrategias de descomposición de superficies y de sólidos en formas regulares, con mayor frecuencia.

Esta investigación sobre la enseñanza del perímetro y el área se aleja del enfoque de la metodología tradicional que privilegia la repetición y la memorización, y en cambio, aborda didácticamente su enseñanza desde la experimentación y la manipulación para así permitir a los

estudiantes, reconocer sus propiedades desde el uso de los sentidos, lograr la comprensión de la noción de unidad y avanzar en la construcción de las nociones de perímetro y de área.

En esta investigación no se aborda el sistema métrico decimal de medidas, las actividades propuestas en el diseño de longitud y perímetro llevan a los estudiantes al uso de unidades de medida no estandarizadas, y a la necesidad de fraccionar estas unidades cuando se requiere medir la parte sobrante de las longitudes. Las actividades propuestas en el diseño sobre área, permite a los estudiantes la utilización de regiones de distinta forma para medir el área de la superficie de la huerta por adición, y también les propone la disección del área de la superficie en partes, para luego formar con esas partes otra región y así comprobar que ambas regiones tienen la misma área.

2.5 LA METODOLOGÍA CLIL (CONTENT AND LANGUAGE INTEGRATED LEARNING) O AICLE (APRENDIZAJE INTEGRADO DE CONTENIDOS Y LENGUAS EXTRANJERAS)

El término “Content and Language Integrated Learning” (CLIL) fue definido en el año 1994, y propuesto en el año 1996 por la Universidad de “Jyväskylä” en Finlandia, y por la Plataforma Europea para la Educación Holandesa, para describir los métodos educativos donde las asignaturas son enseñadas a través de una lengua extranjera con un doble objetivo, el aprendizaje de contenido y el aprendizaje simultaneo de una lengua extranjera. (Darn, 2006)

La metodología CLIL surgió en Europa como respuesta al alto volumen de migraciones, lo que requirió que los maestros y las escuelas contasen con nuevas propuestas de enseñanza que les permitiesen asumir estos nuevos retos socio-pedagógicos y lingüísticos al interior de las aulas de clase. Dado que la cantidad de horas dedicadas a la enseñanza de la nueva lengua no era

suficiente para que los alumnos alcanzaran el nivel de proficiencia requerido para un buen desempeño escolar, se desarrolló la metodología CLIL, la cual permitió la integración entre la enseñanza de contenido y la nueva lengua, de manera que los estudiantes pudiesen desarrollar competencia comunicativa en la lengua meta, al mismo tiempo que desarrollaban los contenidos de otras asignaturas.

Dentro de esta metodología, tanto el aprendizaje de los contenidos, en este caso de las matemáticas, como el aprendizaje de la lengua, son igual de importantes. (Georgiou & Pavlou, 2011) afirman que, en la metodología CLIL el aprendizaje de un idioma está integrado con los temas de contenido, que es aplicable a cualquier edad y nivel escolar, y que integra también el desarrollo de habilidades sociales, culturales y cognitivas en los estudiantes.

2.5.1 Principios de la Metodología CLIL Aplicados a la Enseñanza de las Matemáticas.

Los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) proponen tres grandes aspectos para organizar el currículo del área en un todo armonioso. Estos aspectos pretenden que la educación matemática propicie el desarrollo de procesos de pensamiento que sean aplicables y duraderos, que permitan dar sentido al mundo que les rodea, que adquieran instrumentos que les permitan explorar la realidad, representarla, explicarla, predecirla, tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones, y ser receptivo a las de los demás.

Estos tres grandes aspectos son los siguientes:

Procesos generales: tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Conocimientos básicos: comprenden el pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional y los sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

El contexto: es el ambiente que rodea al estudiante, y que, por su cercanía y relevancia hace de las matemáticas algo más significativo para él. Para que el contexto se constituya en un recurso para la enseñanza, debe ser intervenido por el maestro de manera intencional, de manera que se generen situaciones y preguntas interesantes que logren desencadenar los procesos de aprendizaje esperados. Los contextos generadores de situaciones problemáticas pueden provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas o de las otras ciencias.

En esta investigación se emplea la metodología CLIL en la realización e implementación de dos diseños para enseñar las nociones de perímetro y área dentro del contexto de la huerta escolar, a estudiantes de cuarto grado de primaria que reciben la clase de matemáticas en inglés. El diseño a implementar toma en cuenta las cuatro características de esta metodología sugeridas por (Coyle, 2005), las cuales son: el contenido, la comunicación, la cultura y la cognición.

A continuación, presento un gráfico que armoniza los principios de la metodología CLIL con la propuesta curricular de matemáticas del MEN. Esta propuesta teórica puede servir de referente para próximas investigaciones sobre bilingüismo y educación matemática. Nota. Este gráfico muestra la relación existente entre los cuatro principios de la metodología CLIL y los tres grandes aspectos para organizar el currículo de matemáticas de acuerdo con el MEN. El principio de comunicación en CLIL tiene un lugar especial dada la relevancia que tiene el aprendizaje de una nueva lengua en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.



Figura 13. Principios de la Metodología CLIL (contenido, cultura, cognición y comunicación,) en armonía con los Lineamientos Curriculares del MEN (conocimientos básicos, contexto y procesos generales) bajo un enfoque comunicacional.

2.5.1.1 Contenido o Conocimientos Básicos del pensamiento métrico y de los sistemas de medida.

De acuerdo con los Estándares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), se puede hacer matemáticas no solamente con el número en la aritmética, sino también con el espacio en la geometría; y debido también a la aplicación de las nociones métricas a lo espacial (longitud, área y volumen), a lo temporal (duración y frecuencia) y a otras disciplinas como la física y la química (fuerza, peso, masa, densidad, temperatura, presión, velocidad, aceleración, etc.) fue necesario distinguir el pensamiento métrico del pensamiento numérico y del espacial. También con el desarrollo de la teoría de la probabilidad y del cálculo diferencial e integral se debió introducir los conceptos de probabilidad y variación como tipos de pensamiento matemático distintos del numérico, del espacial y del métrico. De esta manera el MEN ha planteado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, la subdivisión del

pensamiento matemático en los cinco tipos de pensamiento que la escuela de hoy conoce: el numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional.

Este trabajo de investigación se enfoca en el desarrollo del pensamiento métrico, y los sistemas métricos o de medidas, específicamente en la aplicación de estas nociones en lo espacial (longitud y área). Este trabajo busca que los estudiantes amplíen su comprensión sobre las magnitudes y las medidas dentro del contexto de la huerta escolar, y que este conocimiento se pueda luego generalizar a otros contextos. De igual manera, esta investigación se enfoca en el aprendizaje de los aspectos lingüísticos del inglés necesarios para el correcto desarrollo de este objetivo matemático.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares, los siguientes conceptos y procedimientos están relacionados con este tipo de pensamiento y se tienen en cuenta en la elaboración de los diseños que se implementan:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

En la construcción de estas nociones de magnitud, juegan un papel muy importante la estimación, los procesos de truncamiento y redondeo, el tratamiento del error, la valoración de cifras significativas, el uso de técnicas de encuadramiento, como también la expresión en notación científica, aspectos que también se incorporarán en el diseño de las actividades del trabajo.

Los estándares del MEN destacan la importancia de que los niños conozcan el desarrollo histórico de la medida, de manera que descubran que la medición surgió como una necesidad ligada al mundo real y que los instrumentos refinados y complejos se deben enseñar después de este acercamiento previo. La enseñanza de la medida en la escuela con mucha frecuencia es puesta en el plano de lo numérico, en situaciones donde el propósito es enseñar y aprender sobre el número y no sobre la medida.

Dentro de los sistemas métricos, los estudiantes deben desarrollar los siguientes procesos y conceptos:

- **La construcción de la magnitud.** El estudiante debe primero crear o abstraer en el fenómeno u objeto la magnitud concreta (largo, ancho, espesor,) o la cantidad susceptible de medición para luego abstraer de todas esas magnitudes concretas la magnitud longitud. La construcción del concepto de magnitud se da cuando se reconoce que hay algo que es más o menos que otra cosa. Primero se logra la comparación en la dirección de menor a mayor y luego se construye la inversa y se coordinan ambas.
- **El desarrollo del proceso de conservación.** Los estudiantes deben captar aquello que permanece invariante a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio en la

consolidación de los conceptos de longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc. Se aconsejan actividades de transformación con plastilina o transvasando líquidos de un recipiente a otro.

- **La estimación de magnitudes.** La estimación está relacionada con las variables continuas (magnitudes) o discretas (números naturales). Las variables continuas siempre se podrán refinar las medidas indefinidamente. Se debe también tener en cuenta que para los niños las unidades de medida son antropocéntricas y cuando se falla al tratar de capturar lo continuo con acciones antropocéntricas repetidas, porque sobra, o falta algo, se reequilibra el sistema de medición con la introducción de fraccionarios. Como actividad previa al proceso de medición de área se trata de cuadrricular el área de superficies escogiendo unidades de medida como la baldosa, lo cual tiene la desventaja de promover un carácter discreto y exacto de la medida. Esta aproximación requiere que se pase pronto a otro tipo de actividades que permitan captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida para que no genere obstáculos al desarrollo de los procesos de medición. Es importante empezar con la estimación aproximada, en este caso, del área y del perímetro sin ayuda de instrumentos de medición.
- **La apreciación del rango de las magnitudes.** Antes de seleccionar la unidad o patrón de medida es necesario hacer una estimación perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta.
- **La selección de unidades.** Para refinar el resultado de la medición, se debe seleccionar una unidad de medida apropiada para el rango ya determinado. La

asignación numérica se ha considerado lo más importante de la medición, aunque no es sino un subproceso del complejo proceso de medición.

- **El trasfondo social de la medición.** La medición está asociada a un contexto significativo e importante para el estudiante, por lo que debe enseñarse en el mismo contexto de donde surgió históricamente. Se deben buscar contextos donde los estudiantes dominen el trasfondo social y tengan interés en obtener resultados correctos.

Dentro de este aspecto de contenido o Conocimientos Básicos, los estudiantes del Colegio donde se lleva a cabo el presente trabajo de investigación deben desarrollar habilidades y conocimientos en la asignatura de matemáticas, que respondan a dos currículos, el currículo del MEN y el currículo internacional de la universidad de Cambridge llamado “Cambridge Assessment International Education (CI)”.

A continuación, se enlistan los Estándares del (MEN, 2006, p. 83) correspondientes al Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas del ciclo cuarto y quinto de primaria:

- Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
- Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
- Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación.

- Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.

A continuación, se enuncian los logros que los estudiantes al finalizar el grado quinto de primaria deben alcanzar en lo referente al concepto de Área y Perímetro de acuerdo con el Currículo de “Cambridge Assessment International Education”:

- Measure and calculate the perimeter and area of rectilinear shapes.
- Estimate the area of an irregular shape by counting squares.
- Calculate perimeter and area of simple compound shapes that can be split into rectangles.

2.5.1.2 Cultura o Contexto

Como lo afirma (Romberg, 1991) las matemáticas son un producto social. Los objetos matemáticos se crearon como respuesta a problemas sociales, han contribuido al desarrollo de la sociedad, y han ayudado a darle sentido al mundo que nos rodea. El principio de Cultura en la metodología CLIL está conectado con este trasfondo social de las matemáticas y trata de responder a la pregunta: ¿Cuál es la importancia de este tema de estudio con la vida diaria y con la cultura?

Las magnitudes y las medidas, al estar asociadas a contextos reales y cercanos a los estudiantes, permiten de manera especial abordar su enseñanza desde los mismos contextos de donde surgieron históricamente y responde claramente a la pregunta que la metodología CLIL plantea en este principio.

El contexto de la huerta escolar que se utiliza en esta investigación, les permite a los estudiantes, como afirma Treffers (1987) citado por (Bressan et al., 2016), desarrollar la “matematización progresiva” (p. 6), la cual se da en dos formas: la matematización horizontal, al tener los estudiantes que traducir el problema de la magnitud y la medida de este objeto físico al matemático descubriendo y reconstruyendo el proceso de medir. Una vez los estudiantes, guiados por el maestro, hayan traducido el problema al mundo matemático tendrán que realizar la matematización vertical, utilizando los conceptos de perímetro y área para resolver las situaciones planteadas. En la EMR de Freudenthal, se afirma que los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión en los procesos de matematización de situaciones, sin ser ellos necesariamente una jerarquía estrictamente ordenada:

A. Matematización horizontal.

- Nivel situacional. En este nivel la interpretación de la situación y las estrategias de resolución están ligadas totalmente al contexto de la situación. Los estudiantes se apoyan en sus conocimientos informales, su sentido común y su propia experiencia. Los estudiantes pueden identificar y descubrir la matemática presente dentro de ese contexto dado, pueden visualizar y descubrir relaciones y regularidades, pero todavía no ocurre un análisis más profundo dentro de la disciplina.

B. Matematización vertical

- Nivel Referencial. En este nivel aparecen los modelos gráficos o notacionales que esquematizan el problema, pero aún aparecen referidos a la situación particular.

- Nivel General. Se llega a este nivel a través de la reflexión sobre las estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior y surgen aspectos ya más focalizados sobre la matemática misma, los cuales se pueden generalizar y pueden también ser utilizados en otros contextos distintos.
- Nivel Formal. En este nivel ya se comprende y se actúa con los procedimientos y notaciones convencionales propios de la matemática.

Freudenthal afirmó, que la matemática ha de ser para todos y que la gran mayoría de las personas utilizarán solamente las matemáticas que le permitan resolver problemas de la cotidianidad. Por esta razón, la mejor forma de aprender matemática es haciéndola, reinventándola y no aprendiéndola como un producto ya terminado. Del mismo modo sostiene que el valor educativo de la matemática está en la comprensión de los modos en que esta disciplina organiza nuestro entorno social y natural y, por consiguiente, si la matemática surge como matematización de la realidad, el aprendizaje de la matemática debería originarse también en esa realidad.

El contexto de la huerta escolar responde a la pregunta que plantea el principio de Cultura en la metodología CLIL. Es desde este contexto significativo para los estudiantes, que surgen los problemas a solucionar y a partir de allí, se ponen en juego las estrategias de resolución, el uso apropiado de las unidades de medida, la necesidad de recurrir a la fracción de la unidad y el desarrollo de los procesos comunicativos en la lengua extranjera. Freudenthal citado por (Bressan et al., 2016), afirmó que “Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo” (Freudenthal, 1973). Los contextos pueden ser

situacionales, de la cotidianidad o también, puramente matemáticos, en tanto sean significativos para los niños.

La siguiente figura muestra el contexto real de la Huerta Escolar como lugar privilegiado para el aprendizaje del contenido matemático y de las habilidades comunicativas en la lengua extranjera. También, el contenido matemático necesita del lenguaje, y el lenguaje se adquiere en la necesidad de comunicar el conocimiento.

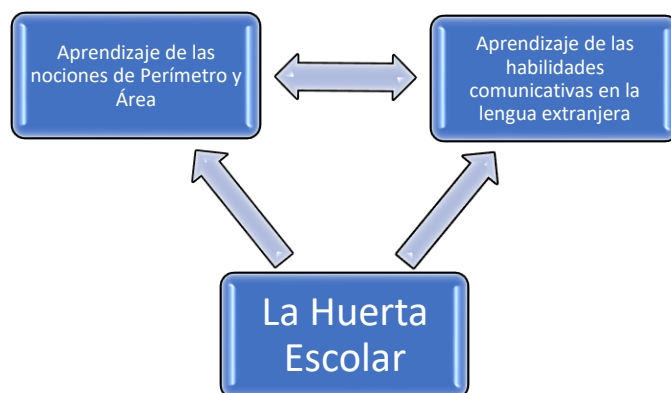


Figura 14. El contexto de la Huerta Escolar como lugar privilegiado para el aprendizaje de las nociones de Perímetro y Área y para el desarrollo de las habilidades comunicativas en Inglés.

En la metodología CLIL como en la Educación Matemática Realista de Freudenthal, se considera el aprendizaje como una actividad social. La discusión²¹ sobre las interpretaciones de la situación problema, de los distintos procedimientos y justificaciones de la solución, van a permitir esa “reinención guiada” de la matemática dentro de este contexto pedagógico. Igualmente, la metodología CLIL coincide con la postura de Freudenthal quien defiende el

²¹ Se estimula a los estudiantes el uso del inglés como vehículo de comunicación, pero también se aceptan las participaciones realizadas en la lengua materna que generen pensamiento matemático.

trabajo en grupos heterogéneos o con toda la clase, pues los distintos niveles de comprensión son importantes dentro del trabajo cooperativo. El rol del alumno dentro de este proceso de aprendizaje será el de matematizar y el del profesor será el didactizar, tanto horizontalmente en las situaciones que surgen dentro del aula y en los contextos escolares, como verticalmente al reinventar sus herramientas didácticas para facilitar la matematización de las situaciones.

2.5.1.3 Cognición o Procesos generales

Este principio de la metodología CLIL, nos pone en el escenario del desarrollo de las habilidades superiores de pensamiento. De acuerdo con Vygotsky citado por (Lucci, 2006), existen dos tipos de funciones mentales: las superiores y las inferiores. Las funciones mentales inferiores son naturales, de base biológica, nacemos con ellas y están determinadas genéticamente; mientras que las funciones mentales superiores son de origen sociocultural, pues se adquieren y se desarrollan a través de la interacción del sujeto con los aspectos sociales y culturales que le rodean (pp. 7-8). Es en la interacción con los demás que adquirimos conocimiento y entre mayor interacción social haya, mayor es la posibilidad de robustecer nuestras funciones mentales superiores. Las experiencias sociales del niño le permiten formar nuevas y cada vez más complejas funciones mentales. Siguiendo a Vygotsky, el ser humano es un ser cultural que no se relaciona únicamente de forma directa con su ambiente, sino también a través de la interacción con los demás individuos. Las habilidades superiores se manifiestan primero en el ámbito social y después en el individual a través de la interiorización.

Vygotsky fue el primer autor en introducir la noción de la zona de desarrollo próximo. Esta noción es contraria a los postulados de la pedagogía activa, la cual ubicó los procesos de aprendizaje en la actividad espontánea del niño y limitó el papel del maestro a simplemente aquel

que brinda las oportunidades de experiencia de los estudiantes. Con la introducción de la noción de zona de desarrollo próximo, Vygotsky reubicó el lugar de la instrucción en los procesos de aprendizaje, considerándolo como un factor definitivo para el avance a la siguiente zona de desarrollo cognitivo, lo cual no sería posible sin la intervención y guía del maestro el cual es más capaz y cuenta con la experticia necesaria para conducirlo en este proceso. (Vigotsky, 1978)

La Educación debe adecuarse a las capacidades psicológicas de sus estudiantes y potenciar el desarrollo de los Procesos Psíquicos Superiores, como el lenguaje escrito, el pensamiento hipotético-deductivo, la argumentación o la interpretación, el razonamiento, la memoria, la atención, la percepción, etc. Este desarrollo de las funciones Psicológicas Superiores ocurre primero en la interacción social la cual necesita de mediadores externos como lo son, entre otros, los maestros que hacen accesible la herencia cultural y luego ocurre en la internalización de este aprendizaje que dialoga con nuestras ideas y conceptos previos y alcanza una maduración intelectual que permite así el desarrollo cognitivo y se hace parte de la actividad individual del hombre.

Esta diferenciación entre aprendizaje y desarrollo, nos llevan a este concepto que Vygotsky definió como “zona de desarrollo próximo” que consiste en la diferencia entre aquello que el niño puede hacer por sí mismo y lo que puede hacer con ayuda de adultos o de otros compañeros más capaces. Lo que el niño puede hacer por sí mismo indica su nivel evolutivo real, lo que ya maduró, el producto final de su desarrollo, mientras que aquello que hace con apoyo, indica lo que está apenas en proceso de maduración. Por este motivo la enseñanza debe estar orientada hacia las funciones que están en proceso de maduración y no hacia las que ya han madurado. Los niños deben participar de actividades que son incapaces de resolver por sí mismos y en la interacción con los adultos podrá lograr desarrollar mayores habilidades.

En la construcción de adecuados escenarios pedagógicos que propicien el trabajo en la zona de desarrollo próximo es necesario que los niños estén expuestos a un importante rango de contextos con situaciones problema para resolver, privilegiando el dialogo constante entre estudiantes y profesores, como también el trabajo entre los mismos estudiantes dentro de un clima afectivo adecuado que favorezca la interacción.

El andamiaje es un concepto metafórico basado en el postulado de Vygotsky del aprendizaje como un proceso construido socialmente, usado para describir el soporte verbal dado por el adulto para guiar al niño a través de su zona de desarrollo próximo y así capacitarlo para poder llevar a cabo una tarea la cual no sería capaz de hacerla sin ayuda. El andamiaje es temporal y puede ser puesto, fortalecido, quitado por partes o quitado de manera completa mientras el niño desarrolla el conocimiento y las habilidades para poder actuar de manera independiente y competente.

Wood, Bruner and Ross (1976) identificaron seis características del andamiaje efectivo:

- Creación de interés efectivo en la tarea.
- Simplificación de la tarea, por ejemplo, partirlo en pasos.
- Mantener los niños encaminados recordándoles la meta.
- Señalando cosas clave para hacer o mostrando al niño otras maneras de realizar las partes de la tarea.
- Controlando la frustración de los niños durante la tarea.
- Demostrando una forma ideal de hacer la tarea.

2.5.1.4 Comunicación.

Es propuesta del autor de este trabajo, ubicar la comunicación en el centro de los principios de CLIL y de los aspectos generales de los Lineamientos Curriculares de matemáticas del MEN²², dada su importancia primordial en los procesos de aprendizaje. Según Vygotsky, citado por (Lucci, 2006), las funciones de pensamiento, lenguaje y razonamiento se desarrollan debido a su interrelación y a la influencia del contexto y de la cultura (pp. 5-6). Para este autor, el lenguaje es el principal mediador en la formación y en el desarrollo de las funciones psicológicas superiores y a través de la función comunicativa del lenguaje, el individuo se apropia del mundo externo. Como afirma (Guadaño, 2004), la comunicación y la cognición son las dos dimensiones más importantes del lenguaje humano. El lenguaje nos permite asimilar y estructurar nuestra experiencia de la realidad y además posibilita que compartamos ese conocimiento con nuestros semejantes. La vida social y cultural no es posible sin el lenguaje.

El aprendizaje es el resultado de un proceso activo de comunicación y negociación de significados que emerge de las interacciones entre estudiantes y contextos, entre estudiantes y estudiantes y entre estudiantes y profesores en el tratamiento de las situaciones matemáticas. De igual manera, los Lineamientos Curriculares también afirman que la comunicación es uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas, pues es precisamente este proceso el que facilita a los niños construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. La comunicación es también clave para que los alumnos realicen conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas.

²² Ver figura 13.

Asimismo (Romberg, 1991) afirma que la comunicación verbal y escrita es una parte crucial del proceso de aprendizaje por las siguientes razones: primero, porque la comunicación en forma de argumento lógico, es decir, basada en proposiciones y conclusiones, es fundamental para el discurso matemático. Segundo, porque como afirma Rescher, (1979) citado por Romberg (1991), “la comunicación es el medio por el cual los conocimientos personales se sistematizan en un ámbito, y, por tanto, se aceptan como conocimiento nuevo” (p. 375). Y tercero, como afirma Russell citado también por este autor, el desarrollo de la competencia en las categorías y estructuras del sistema lingüístico estructura la comprensión del niño y la hace progresar hacia un modo de conciencia pública (p. 375).

Dado que la habilidad para comunicarnos es esencial en el mundo actual, los Lineamientos Curriculares proponen a los maestros de matemática, el desarrollar estas competencias en sus estudiantes y no considerarlas como un asunto de otras asignaturas. Algunas de las competencias que los Lineamientos proponen que se deben desarrollar actualmente son las siguientes:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

Los maestros debemos diseñar situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes el exponer sus propias opiniones, el ser receptivos, el generar discusión y el desarrollar la confianza y la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos, de hacer conjeturas, de hacer preguntas, de explicar sus razonamientos y de resolver problemas. Para que esto suceda se debe promover el trabajo en equipo, la cooperación entre los estudiantes, como también la competencia sana entre ellos, que no se limiten solo a responder a las preguntas del maestro y a esperar la comprobación de las respuestas, o que se restrinjan a dar respuestas cortas que limiten el uso del lenguaje. En conclusión, se debe evitar que los alumnos dejen de actuar con estructuras ajenas y se debe fortalecer el desarrollo de la competencia comunicativa, pues es a través de ella, que los alumnos crearán su propio conocimiento matemático.

La metodología CLIL permitirá la integración del desarrollo del pensamiento métrico y del inglés, el cual será el vehículo en el que se llevará a cabo los aprendizajes que se pretenden. (Borjas, 2007) afirma que desde el momento en que nacemos estamos insertos en una realidad lingüística que crea un mundo común entre los sujetos que hablan una misma lengua: que homogeneiza la vida cotidiana y todas nuestras experiencias están marcadas por el lenguaje. Oleron, citado por (Borjas, 2007), afirma que durante su desarrollo el niño debe hacer simultáneamente dos análisis, porque debe analizar lo real que se le presenta y esa otra realidad que es el lenguaje que escucha y habla, y el progreso intelectual va a depender de cómo ajusta esas dos realidades descubriendo su adecuación. Esta conjugación de la vida real con el lenguaje que escucha y habla supone un problema, puesto que el contexto real no sigue la misma lógica gramatical que se encontraría en la asignatura de otra lengua. Por esta razón, se seleccionarán las formas gramaticales y las expresiones lingüísticas adecuadas para este contexto de aprendizaje y

para la resolución de las actividades propuestas. Los objetivos de este trabajo se lograrán en la medida que se haga explícita la relación entre el lenguaje y el contexto escogido.

(Coyle, 2015. p 91) organizó las actividades del lenguaje en un “*Language Triptych*” de manera que los estudiantes sean expuestos a:

- **Lenguaje de aprendizaje.** Es la lengua que los alumnos necesitan para acceder al contenido. El maestro debe enseñar lenguaje específico relacionado con los conceptos a enseñar, como las palabras clave, la pronunciación de las palabras, la morfosintaxis, como también las estructuras gramaticales a utilizar. En este aspecto, es necesario que el maestro de contenido se apoye en el profesor específico del idioma para que adapte el contenido lingüístico a las demandas lingüísticas de su asignatura.
- **Lenguaje para el aprendizaje.** Es el tipo de lenguaje que los estudiantes necesitarán para llevar a cabo las actividades en el salón de clase y desenvolverse apropiadamente, como, por ejemplo, el lenguaje relacionado con secuenciación de actividades, el lenguaje de las instrucciones, lenguaje para expresar falta de comprensión y necesidad de aclaración.
- **Lenguaje a través del aprendizaje.** Es decir, el aprendizaje necesariamente está mediado por el lenguaje y es en esta interacción que se desarrollan ambos procesos. Los alumnos necesitan de la lengua para mejorar sus procesos de aprendizaje y necesitan aprender nuevos conocimientos para progresar en la lengua.

En el siguiente gráfico se muestran los tres aspectos del lenguaje que deben ser tenidos en cuenta durante el aprendizaje de las matemáticas en una lengua extranjera.

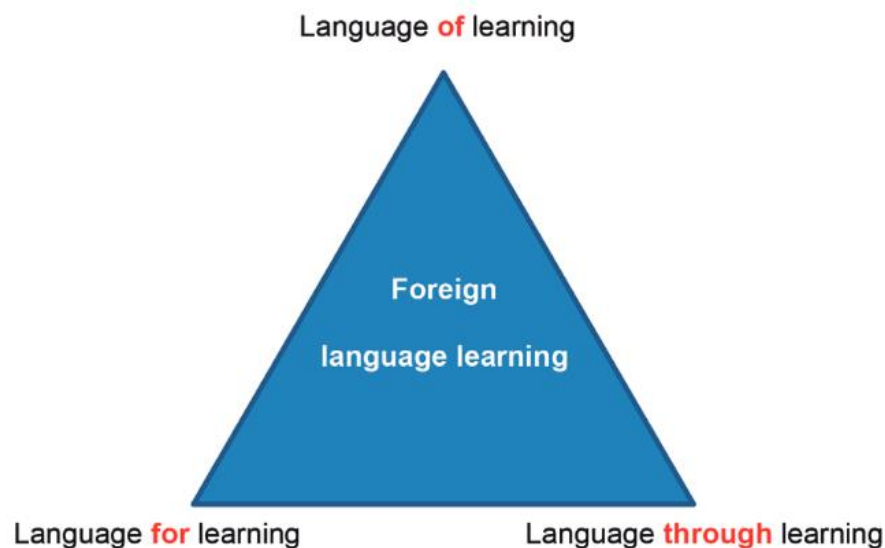


Figura 15. The Language Triptych.

Tomado de (Coyle et al., 2010)

Los diseños que se implementan en el presente trabajo bajo el enfoque comunicacional están fundamentados en los principios de la metodología CLIL y en los aspectos generales de los Lineamientos Curriculares del MEN. Los estudiantes deben, durante los episodios de enseñanza expresar sus ideas de forma oral y escrita, presentar argumentos, razonamientos e inquietudes. Cada actividad de enseñanza contenida en los diseños tiene de manera explícita la enseñanza del vocabulario y de las expresiones lingüísticas apropiadas para expresarse dentro de ese contexto y situación de aprendizaje. Durante la aplicación de los diseños, se les provee a los alumnos con los recursos lingüísticos de la nueva lengua necesarios para la comunicación, y con la guía del maestro los van poniendo en uso para expresar sus aprendizajes. El lenguaje de aprendizaje se brinda a los estudiantes con los adjetivos y la gramática para hacer comparaciones, y con los sustantivos para nombrar los elementos de la huerta. En el lenguaje para el aprendizaje, se brinda a los estudiantes las expresiones para expresar estimaciones y opiniones respecto a sus resultados

o hallazgos, y en el lenguaje a través del aprendizaje se les motiva y apoya en el uso del inglés para comunicarse.

2.5.2 Metodología CLIL en Colombia

Existen cuatro áreas que los investigadores y educadores deben trabajar para que CLIL se adapte al escenario colombiano. 1) Enfoque en el aprendizaje de la lengua; 2) Capacitación docente; 3) Desarrollo de materiales; 4) Competencia cultural e intercultural. (M. Rodríguez, 2011)

Respecto al enfoque en el aprendizaje de la lengua, la autora afirma, teniendo en cuenta resultados de investigaciones previas, que la enseñanza de áreas de contenido en la lengua extranjera mejora el aprendizaje de la lengua y también garantizan el éxito académico. Rodríguez también sostiene que un enfoque CLIL demanda que se perfeccione la enseñanza de la lengua, la cual va más allá del aprendizaje de estructuras gramaticales, y requiere de un aprendizaje significativo que la enseñanza de contenido puede ofrecer. Como afirma (Marsh & Langé, 2000) citado por (Rodríguez, 2011, p. 85) sobre CLIL, “using the language to learn and learning to use languages”.

La segunda área es la capacitación docente en CLIL, la cual es escasa en nuestro país y ella afirma que, es esencial contar con maestros capacitados que puedan diseñar y aplicar estrategias que integren las áreas de contenido dentro de un proceso de adquisición de la lengua extranjera. La autora afirma, por lo tanto, que, la formación docente en las instituciones educativas bilingües debería enfocarse en ambos aspectos, en la lengua extranjera y en el área de contenido de manera que los maestros puedan integrar ambos conocimientos con estrategias didácticas adecuadas en el aula de clase. En la actualidad no hay muchas universidades que ofrezcan programas de

formación de profesores bilingües y es necesario empezar a ofrecer este tipo de formación en CLIL a los nuevos docentes, para que logren ampliar su comprensión en como el contenido y la lengua funcionan juntos para alcanzar un mayor nivel de bilingüismo en nuestro país.

La tercera área es el diseño de materiales. Hay una importante carencia de libros de texto de las distintas áreas de contenido en inglés que estén diseñados para nuestro contexto y currículo en Colombia. La mayoría de los textos que circulan en nuestro país están diseñados bajo otros estándares y currículos extranjeros. La autora considera que los libros de texto para la educación CLIL deberían responder a lo siguiente: 1) que muestren el contenido académico en el contexto cultural propio; 2) que presenten la lengua meta de manera progresiva de manera que el dominio lingüístico no suponga una dificultad a la hora de abordar y evaluar los conceptos; 3) que tengan logros y competencias a alcanzar claras respecto a ambos aspectos, la lengua y los contenidos; 4) que respondan a nuestro currículo local.

La cuarta área corresponde a la competencia cultural e intercultural. Dado que la cultura es inherente al lenguaje, se debe prestar especial atención tanto a la cultura propia, como a la nueva cultura de manera que se pueda comparar, contrastar y comprender las distintas visiones de vida alrededor del mundo. Los aspectos culturales e interculturales enriquecerán el ambiente escolar y la comprensión del contenido necesita así mismo del contexto y realidades propias de los estudiantes para que se pueda dar de manera apropiada.

El presente trabajo de investigación aporta más elementos de análisis sobre CLIL en Colombia, especialmente en la enseñanza de las matemáticas en inglés. Este trabajo aporta a la teoría en educación matemática bilingüe y a la teoría sobre la enseñanza de las nociones de perímetro y área a través del inglés como lengua extranjera. La elaboración teórica expuesta y los

hallazgos encontrados dejan el escenario dispuesto para que se realicen otras investigaciones en esta línea.

Este marco teórico recoge las teorías pertinentes y actuales acerca del enfoque comunicacional para la enseñanza de las matemáticas, el enfoque comunicativo en la enseñanza de una lengua extranjera, la educación matemática realista, la metodología CLIL, la educación matemática bilingüe y las teorías sobre la enseñanza de las nociones de perímetro y área. Estos fundamentos teóricos alimentan los diseños realizados e implementados para responder la pregunta problema de esta investigación. Esta articulación teórica realizada es un primer acercamiento en esta línea de investigación que se realiza en Colombia y sirve de fundamento para los maestros que enseñan las matemáticas en inglés.

CAPÍTULO III. EXPERIMENTACIÓN

En este capítulo se exponen los fundamentos metodológicos del presente trabajo de investigación, los cuales orientaron las intervenciones que se realizaron con los estudiantes para dar respuesta a los objetivos y a la pregunta problema planteada.

En primer lugar, se presentan las particularidades que ubican esta investigación dentro de la metodología cualitativa, para luego explicar el paradigma de la investigación de diseño, y así poder describir las fases, la ruta y las características de este experimento de enseñanza. Este experimento de enseñanza utilizó una metodología particular de implementación, la metodología CLIL²³, la cual permitió la integración de la enseñanza del contenido matemático, con la enseñanza del contenido de la lengua extranjera necesario para el apropiado desempeño comunicativo de los estudiantes durante este aprendizaje propuesto. Este experimento de enseñanza tuvo también un contexto particular de desarrollo el cual fue la huerta escolar.

La siguiente figura muestra la integración del experimento de enseñanza diseñado bajo el enfoque metodológico CLIL en el contexto de la huerta escolar, con el paradigma de la investigación de diseño y la metodología cualitativa.

²³ Ver el punto 2.5 del marco teórico



Figura 16. Enfoque metodológico utilizado para dar respuesta a los objetivos de investigación.

El enfoque metodológico CLIL utilizado para el diseño de este experimento de enseñanza estuvo articulado con los elementos teóricos del enfoque comunicacional para el aprendizaje de las matemáticas de Anna Sfard, el enfoque comunicativo del aprendizaje de las lenguas, los principios de la educación matemática realista de Freudenthal, los aspectos de la educación matemática bilingüe, y los aportes teóricos y didácticos de diversos autores al problema de la enseñanza de las nociones de perímetro y área²⁴.

3.1 ENFOQUE CUALITATIVO

El componente experimental de este trabajo de investigación se desarrolló en el contexto físico de la huerta escolar, la cual fue el ambiente significativo del cual surgen los problemas sobre perímetro y área a solucionar; y también fue el ambiente significativo que facilitó el desarrollo de los procesos comunicativos en la lengua extranjera.

²⁴ Ver figura 6. Articulación de la metodología CLIL con el problema de la enseñanza de perímetro y área en un contexto de bilingüismo

Por tratarse de un contexto situacional, como lo es la huerta escolar, donde se llevó a cabo el desarrollo de un proceso de aprendizaje matemático y de lengua extranjera en particular, fue necesario utilizar una metodología de investigación cualitativa la cual le permitiera al docente-investigador ser parte activa de la investigación y así implementar los diseños y la metodología propuesta. El docente-investigador necesitó de la cercanía e interacción con los sujetos investigados, para así lograr adentrarse en el contexto mismo, implementar la propuesta de enseñanza diseñada y analizar y comprender el verdadero alcance de los diseños en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Es preciso señalar que el resultado de esta investigación dependió en gran manera de esta relación investigador-sujeto investigado; fue solo de esta forma que se pudo lograr la modificación del lenguaje cotidiano al lenguaje propio del objeto matemático que se abordó (perímetro y área), a través del inglés como lengua vehicular de enseñanza. Los conocimientos que los estudiantes adquirieron no fueron actos individuales o aislados del contexto, sino que fueron una creación compartida a partir de la interacción entre el investigador y el investigado a partir del contexto mismo (Sandoval C., 1996).

3.2 INVESTIGACIÓN DE DISEÑO

Para la elaboración y análisis de las intervenciones realizadas con los estudiantes, se utilizó la metodología de experimentos de enseñanza, la cual se ubica en el marco del paradigma de la investigación de diseño. El objetivo de la investigación de diseño, es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza (Molina et al., 2011). Para esta investigación se elaboraron e implementaron dos diseños (uno sobre longitudes y perímetro y el segundo sobre

perímetro y área)²⁵ a través de los cuales se exploraron los recursos y conocimientos previos de los estudiantes sobre el objeto matemático en cuestión, así como también sus habilidades comunicativas en inglés; se observaron las interacciones orales entre los alumnos y el profesor investigador, la manera como se llevó a cabo el proceso de enseñanza a través de la metodología CLIL bajo los enfoques teóricos propuestos; y finalmente, se recogieron los datos a través de entrevistas individuales y grupales, a través de grabaciones de audio y video, y mediante el análisis de los diseños mismos.

En el paradigma de investigación de diseño hay también una interdependencia entre el diseño instruccional propuesto y la investigación. Los fundamentos teóricos expuestos en el marco referencial fueron utilizados para la elaboración de los diseños instruccionales, como también para la interpretación de los datos recogidos; y los análisis que se fueron recogiendo durante el proceso de implementación de los diseños, permitieron a su vez la mejora de los diseños mismos.

Con la implementación de esta metodología de investigación de diseño, no se pretendió dar respuesta a una problemática en particular, ni se buscó el desarrollo particular de los sujetos (aunque todos aprendimos durante el proceso); sino que se pretendió avanzar en el desarrollo de las teorías de enseñanza planteadas. Estos diseños implementados en la investigación reflejan las teorías expuestas en el marco teórico, como lo son el enfoque comunicacional de enseñanza de las matemáticas y las lenguas, la educación matemática realista, el aprendizaje de las nociones de perímetro y área, la educación matemática en contextos bilingües, así como también la

²⁵ Ver anexos

metodología CLIL; y pretendió la confirmación de la viabilidad de este constructo teórico expuesto.

El proceso de investigación constó de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y ajuste para cada actividad de los diseños elaborados. Durante los ciclos se realizaron análisis continuos, se recogieron registros, y al final se realizó un análisis retrospectivo de los datos recogidos del estado final de los estudiantes, con el fin de aportar al modelo teórico. Finalmente, de toda la información recogida se analizaron los datos relevantes a los objetivos propuestos.

Con la implementación de esta metodología de investigación, y los diseños de las diferentes situaciones, se logró adquirir empíricamente un conocimiento útil para la toma de decisiones posteriores de docentes e investigadores interesados en seguir mejorando la competencia matemática y la competencia comunicativa de los estudiantes en inglés. Los aspectos del proceso de aprendizaje en estudio podrán ser potencialmente replicables en otros contextos similares y estudios posteriores podrán hacer uso de estos diseños contruidos bajo la metodología CLIL en el contexto de la huerta escolar, podrán reorganizarlos y adaptarlos a un contexto determinado.

3.3 EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El rol del docente-investigador fue el de experimentar de primera mano el aprendizaje matemático y discursivo de los estudiantes involucrados en este experimento de enseñanza, él se hizo parte integral del diseño, desde su elaboración, implementación y análisis, y construyó conocimiento sobre la construcción de conocimiento que hicieron sus estudiantes (Molina et al., 2011).

Las secuencias de episodios fueron diseñadas partiendo del contexto de la huerta del colegio, y teniendo en cuenta los principios de la metodología CLIL para lograr integrar adecuadamente la enseñanza de las nociones de perímetro y área, con los aspectos necesarios del lenguaje que permitieran la comunicación verbal y escrita de los estudiantes en inglés. Para llevar a cabo la indagación se elaboraron 2 diseños, el primero sobre longitudes y perímetros, y el segundo sobre perímetros y áreas. Cada diseño constaba de una serie de situaciones problema que se debían resolver en la huerta y también en el aula de clases, los estudiantes debían dar respuestas tanto escritas como orales a cada situación, lo que permitió reconocer los avances logrados durante todo el proceso de la investigación. Las intervenciones se llevaron a cabo durante 4 semanas, en un total de 24 clases de 45 minutos de duración cada una.

Se puso a disposición de los estudiantes los diseños y los materiales necesarios para su desarrollo, se les entregaron varas de medición de longitudes, cuerdas para medir perímetros, y un tangram en cartulina para pavimentar el área de la huerta, todos ellos elaborados por el docente-investigador. El proceso de desarrollo se grabó a través de tabletas que permitieron registrar audios, videos y fotografías de las intervenciones, de los diálogos, y del desarrollo de las actividades de los diseños. Al finalizar la resolución de los problemas se tuvieron entrevistas individuales para registrar los discursos respectivos de cada estudiante y su avance frente a la comprensión de las nociones de perímetro y área. La siguiente figura muestra los materiales utilizados por los estudiantes para la comprensión y medición del perímetro y área de la huerta escolar.

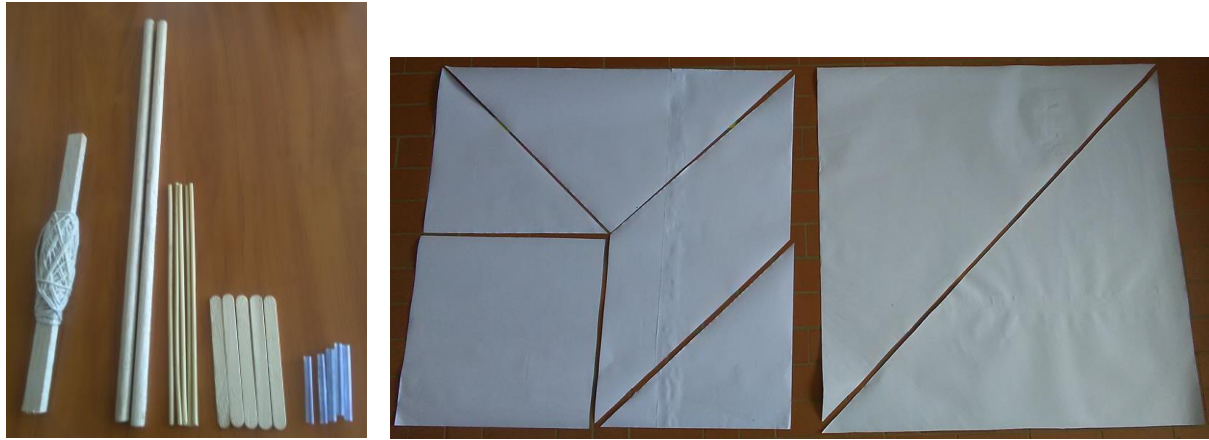


Figura 17. Varas de medición de longitudes y Fichas para recubrir la superficie de la huerta.

3.3.1 Selección de los participantes

Los diseños realizados se implementaron en dos de los tres cursos del grado cuarto de primaria de la institución educativa los cuales tienen entre 9 y 10 años, para un total de 40 estudiantes. Se decidió realizar la investigación con este grado escolar dado que se encuentran en las etapas iniciales de acercamiento a los conceptos de área y perímetro, y el contexto físico de la huerta escolar les permitiría realizar este acercamiento de manera apropiada sostenido en los datos aportados por Freudenthal, por Chamorro y los fundamentos teóricos expuestos en los lineamientos y estándares del MEN.

Para recoger la información necesaria que permitiera dar respuesta a los objetivos de investigación propuestos, se escogió una muestra de 8 estudiantes tomados de los dos cursos intervenidos, 4 niños y 4 niñas. Los criterios utilizados para la selección de los estudiantes fueron los siguientes:

- Los estudiantes debían haber participado activamente durante todas las implementaciones realizadas tanto en la huerta como en el aula de clase.

- Los estudiantes debían haber estado desde el inicio hasta el final de las intervenciones.
- Los estudiantes debían haber terminado de manera completa las tareas de los dos diseños implementados.

Dado que en las intervenciones en la huerta los estudiantes trabajaron de manera grupal, también se tomaron registros a las producciones grupales de los estudiantes sin especificar un estudiante en particular.

3.3.2 Fases del Experimento de Enseñanza

En la siguiente tabla se presentan cada una de las fases de esta investigación, al igual que las acciones desarrolladas en cada una de ellas, las cuales pretenden responder a la pregunta de investigación y a los objetivos propuestos.

Tabla 1. Fases de la investigación

FASES	ACCIONES
1. <i>Preparación del Experimento</i>	• Se definió el problema y los objetivos de investigación. • Se estableció la justificación de realizar este estudio. • Se revisaron los antecedentes sobre la metodología CLIL y sobre la enseñanza del área y perímetro. • Fundamentación teórica de la investigación: enfoque comunicacional, educación matemática realista, educación matemática bilingüe, área y perímetro, y metodología CLIL.
2. <i>Concepción y análisis a priori de la secuencia</i>	• Identificación de las unidades de análisis, categorías, subcategorías y variables didácticas que favorecen el diseño de las situaciones de enseñanza. • Elaboración del diseño de perímetro y del diseño sobre área en el contexto de la huerta escolar.

3. Experimentación	• Presentación del experimento de enseñanza a los estudiantes. • Implementación de cada uno de los diseños elaborados. • Recogida de datos mediante grabaciones en video y audio. • Recogida de las hojas de trabajo de los estudiantes. • Análisis de los datos recogidos durante cada intervención. • Rediseño del experimento de enseñanza teniendo en cuenta los datos recogidos en la intervención previa. • Implementación del siguiente diseño.
4. Análisis retrospectivo de las intervenciones (análisis a posteriori)	• Realización de las transcripciones de las grabaciones realizadas. • Organización de todos los datos recogidos. • Análisis de todos los datos recogidos de forma conjunta contrastándolos con los resultados de las teorías expuestas en el marco conceptual. • Se dio respuesta a los objetivos del estudio. • Se contrastaron los resultados obtenidos con otros estudios. • Se realizó la descripción de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes.

Nota. En esta tabla se muestran detalladamente las fases seguidas en este experimento de enseñanza. Tabla adaptada de (Molina et al., 2011).

A continuación, se expone el ciclo de acciones que se realizó durante el experimento de enseñanza desde el planteamiento del problema hasta la elaboración de las conclusiones.

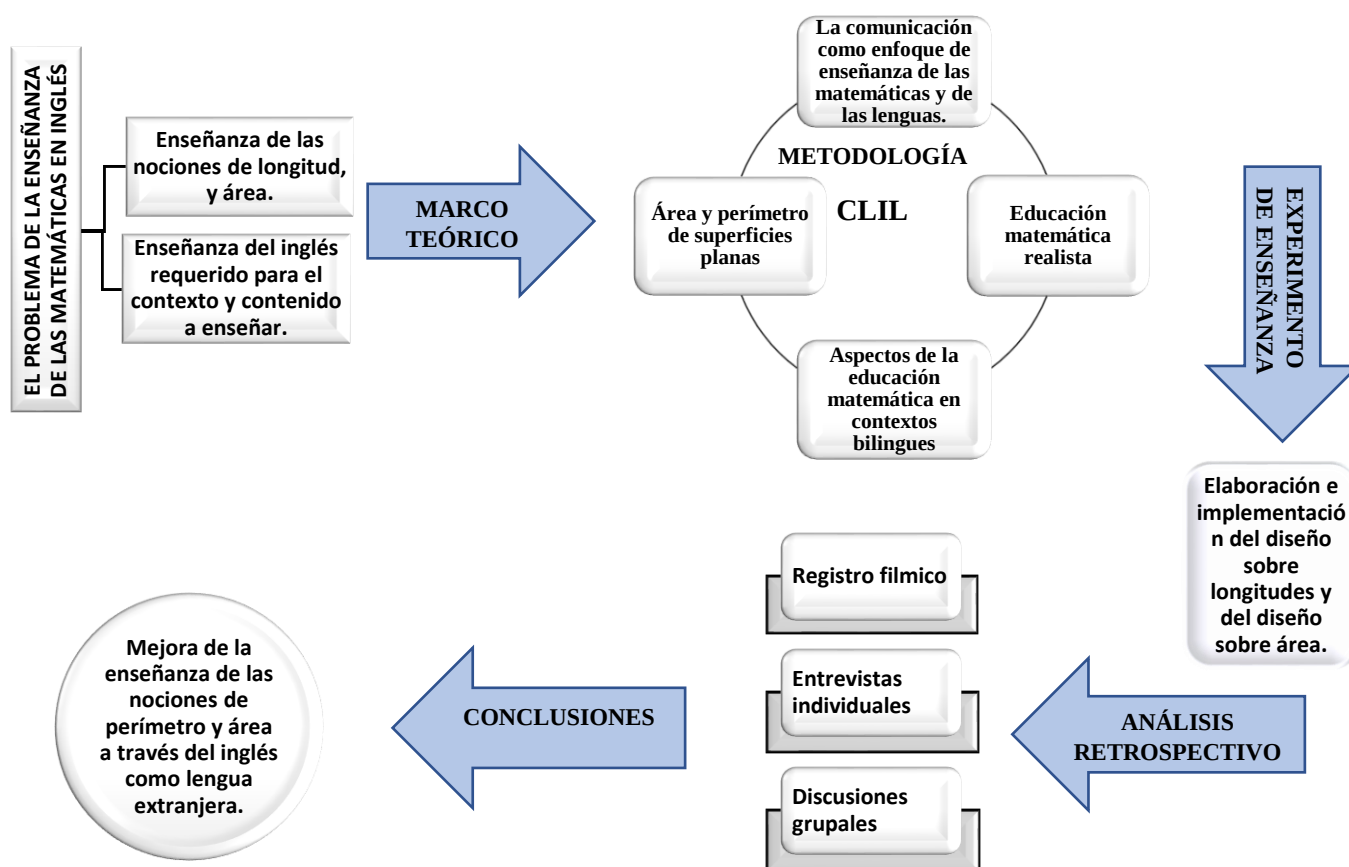


Figura 18. Ciclo de acciones realizadas durante el experimento de enseñanza

3.3.3 Preparación del Experimento

El diseño de la unidad didáctica sobre las nociones de perímetro y área con la metodología CLIL, consideró los distintos hallazgos de los autores planteados en los antecedentes, los análisis teóricos y didácticos recopilados en el marco conceptual y las propuestas del Ministerio de Educación Nacional en los estándares correspondientes al ciclo de cuarto y quinto de primaria.

Atendiendo a los resultados obtenidos por (Pifarre et al., 2003), se realizó una encuesta previa para conocer las variables del contexto social y educativo que incidieron en el aprendizaje del conocimiento lingüístico y matemático de los estudiantes. Las variables que se tuvieron en cuenta en la encuesta fueron: el trasfondo socio profesional de la familia, la condición lingüística

familiar, la cantidad de exposición a la lengua extranjera en el ambiente escolar, y el autoconcepto del estudiante.

En el presente diseño también se tuvo en cuenta los resultados obtenidos por (Perez, 2016), quien afirmó que los maestros investigados solo tuvieron en cuenta la perspectiva del “language through learning” en el desarrollo de sus clases de matemáticas en inglés, no enfatizando en las otras dos perspectivas del “language of learning” y el “language for learning” de acuerdo con el “*Language Triptych*” de (Coyle, 2015). Los diseños elaborados incluyeron las tres perspectivas del lenguaje, necesarias para la correcta implementación de la metodología CLIL, y así fomentar el apropiado desarrollo de la competencia comunicativa en inglés mientras adquieren el conocimiento matemático respectivo.

Siguiendo igualmente los resultados previos obtenidos por (Corberan, 1997) en su tesis doctoral sobre el concepto de área, los diseños implementados abarcaron el concepto de área como parte del plano ocupado por la superficie, el área como el número de unidades que recubren la superficie. el área como magnitud autónoma: teniendo en cuenta a Freudenthal también abarcaron el aprendizaje de adjetivos de comparación de longitudes, y la invariancia de la longitud bajo deformaciones o flexiones que son a su vez reversibles, antes de ir al uso de fórmulas y de medidas estandarizadas.

3.3.4 Las Conjeturas de la Investigación

A partir de la revisión de la literatura sobre educación matemática bilingüe y sobre el aprendizaje de las nociones de perímetro y área se desarrolló la siguiente conjetura inicial sobre el proceso de aprendizaje que seguirían los estudiantes. Se estimó que los estudiantes presentarían dificultades en mantener una comunicación 100% en inglés durante cada una de las

intervenciones, recurriendo frecuentemente al cambio de código lingüístico durante el proceso. Esta dificultad se anticipó con la aplicación apropiada del principio de comunicación de la metodología CLIL²⁶ en el proceso de planeación de las intervenciones a realizar. Estas anticipaciones realizadas pretendieron disminuir el cambio de código lingüístico durante las intervenciones de la investigación.

Se conjeturó que con el diseño de actividades experienciales, donde los estudiantes recubrieran la superficie con figuras de papel y que tuvieran la posibilidad de manipular, de trasladar, de girar, y de recubrir la superficie, los estudiantes superarían las dificultades con la comprensión de la independencia de las medidas de área y perímetro.

3.3.5 Uso de la Metodología CLIL en la Elaboración Macro-Didáctica de los Diseños

Los diseños se elaboraron usando un esquema de planeación que contiene: los objetivos, los criterios de evaluación, luego los principios de la metodología CLIL: los contenidos, la cultura, la comunicación y la cognición²⁷, luego las conjeturas generales y las posibles soluciones a ellas. En la siguiente tabla se encuentra el Macro-Diseño.

Tabla 2. *Implementación de la metodología CLIL en la elaboración Macro-Didáctica de los diseños sobre perímetro y área*

OBJETIVOS
Objetivo principal: Los estudiantes comprenderán las nociones de perímetro y área y la independencia de sus medidas a partir del cercado, observación y recubrimiento de la superficie de la huerta.

²⁶ Ver numeral [2.5.1.4](#) del marco teórico.

²⁷ Estos principios se abordaron el numeral 2.5 del Marco Referencial

Objetivos secundarios:

- Comprender la noción de perímetro en el contexto de la huerta.
- Comprender la noción de área en el contexto de la huerta.
- Determinar que el perímetro y el área son propiedades independientes de la forma, teniendo en cuenta el contexto de la huerta.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Para la evaluación, se considerarán los siguientes aspectos:

- El portafolio. Será un mecanismo para llevar organizadamente los registros de todas las actividades realizadas por los estudiantes: entrevistas, resolución de los diseños.
- La presentación de los resultados en frente del grupo.
- La fluidez para comunicar las ideas matemáticas dentro del grupo y frente al grupo.
- El trabajo en equipo.

CONTENIDOS - CONOCIMIENTOS BÁSICOS
Pensamiento Métrico y los Sistemas Métricos o de Medidas

Estándares del MEN correspondientes al Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas del ciclo cuarto y quinto de primaria:

- Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
- Seleccione unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
- Utilizo y justifico el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación.
- Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.

Logros que deben alcanzar en lo referente al concepto de Área y Perímetro de acuerdo con el Currículo de “Cambridge Assessment International Education”:

- Measure and calculate the perimeter and area of rectilinear shapes.
- Estimate the area of an irregular shape by counting squares.
- Calculate perimeter and area of simple compound shapes that can be split into rectangles.

CULTURA O CONTEXTO

La Huerta Escolar



Figura 19. Contexto desde donde se originan las secuencias de actividades

Dado que la matemática surgió como matematización de la realidad, se hace necesario que el aprendizaje de la matemática se origine también en esa realidad. El contexto de la huerta escolar les permite a los estudiantes, desarrollar la matematización progresiva. En la matematización horizontal los estudiantes tendrán que descubrir y reconstruir desde este objeto físico las nociones de perímetro y área. Una vez los estudiantes, guiados por el maestro-investigador, hayan traducido el problema al mundo matemático, tendrán que realizar la matematización vertical, construyendo las nociones de perímetro y área desde la matemática misma.

Muchas personas utilizarán solamente las matemáticas que le permitan resolver problemas de la cotidianidad, por esta razón, la mejor forma de aprender matemática es haciéndola, reinventándola y no aprendiéndola como un producto ya terminado. El contexto de la huerta escolar no es un ruido que perturbe la claridad del mensaje matemático, sino que el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo.

COMUNICACIÓN				
Language <u>of</u> Learning				
Language				Use
Bamboo sticks Hand Palm Finger Foot Arm Step Units a half a fourth / two fourths / three fourths an eighth / three eighths / five eighths / seven eighths				Provide this vocabulary before each of the activities that students must solve
Comparative adjectives much _____ than a lot _____ than Use <i>less</i> with longer adjectives. less _____ than Use <i>not as</i> _____ <i>as</i> or <i>not so</i> _____ <i>as</i> _____ with short adjectives. not as _____ as				
Language <u>for</u> learning				
Language		Meaning		Use
I could estimate it is about... I think it is about... I believe it is about... I consider that it is about ... In my opinion, it is about... It depends on... It measures about / around...		Giving opinions Giving answers		These expressions are included in the designs for students to use them in writing the answers and in reporting answers to the class and to the teacher
How can we measure the _____? How long is it? How can we find the of _____?		Asking questions		
Language <u>through</u> learning				
Once we are in the school garden, we will be communicating in english most of the time. I will monitor pair and group tasks and feedback on language problems that affect communication.				
Students will explain their results orally in front of the class.				

COGNICIÓN (Primer Diseño)		
MAGNITUD Y MEDIDA DE LONGITUDES Y PERIMETROS		
VARIABLES MICRO- DIDÁCTICAS	OBJETIVOS	DISEÑO (D)
		SITUACIÓN (S)
		TAREA (T)
Construcción de la magnitud longitud como una propiedad que posee una colección de objetos.	Inicialmente se realizará una actividad de comparación de las magnitudes concretas: ancho, alto y largo, para llevar a los estudiantes a la construcción de la magnitud abstracta longitud.	D1S1T1
Comparación y ordenación de objetos teniendo en cuenta la magnitud longitud.	Observar cómo los estudiantes hacen uso de parejas de adjetivos tales como, largo-corto, amplio-angosto, grueso-delgado, alto-bajo, profundo-superficial, lejos-cerca, ancho-angosto, alto-bajo, diminuto-insignificante, grueso-fino, etc. Observar el uso de los comparativos y superlativos.	D1S1T2
La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”:	Se realizarán procesos de estimación de longitudes en el cual se le asigna una cantidad de magnitud sin usar ningún instrumento de medida. Se observará la capacidad para expresar una cantidad de longitud sin comparar directamente las unidades antropométricas con los objetos a medir.	D1S2T2
La estimación de magnitudes sin ayuda de instrumentos de medición.	Observar el conflicto cognitivo ²⁸ que ocurre cuando se falla al tratar de capturar lo continuo con acciones antropométricas repetidas, porque sobra, o falta algo, y ver como se reequilibra el sistema de medición con la introducción de fraccionarios.	D1S2T3
Para la medición de longitudes es necesario el uso de instrumentos o de “varas” de medir, los cuales serán en un comienzo más pequeñas que el objeto a medir.	La medición con alguna otra vara de medir implica ir acomodando el instrumento tantas veces sea necesario hasta que la longitud que se va a medir se acabe. Cuando el objeto a ser medido no es cubierto totalmente al aplicar congruentemente la vara de medir un número de veces, los niños expresarán la medida sobrante con expresiones verbales tales como, es un poco más largo, es un poco mas corto, para luego empezar a recurrir a	D1S3T2 D1S4T1-2

²⁸ Se entiende por conflicto cognitivo en esta investigación, a la situación problemática que pone a prueba las concepciones alternativas del estudiante, para lograr un cambio conceptual.

	términos fraccionarios tales como la mitad, un tercio y luego hacer uso de la fracción decimal.	
	Identificar si los estudiantes captan la invariancia de la longitud a pesar de cambios de forma.	
Conservación e invariancia de la magnitud longitud bajo deformaciones o flexiones	Observar si los estudiantes comprenden que las transformaciones de longitud aplicadas a los objetos, siempre se podrán deshacer y regresar al estado inicial. Observar si los estudiantes comprenden la invariancia de la longitud de arco cuando al enderezar el objeto no se sufren acortamientos o alargamientos.	Situación IV – Tarea 3 y 4
Separación entre la longitud y la superficie	Se le presentan a los estudiantes diferentes formas de huerta para favorecer la separación entre la longitud y la superficie, y el reconocimiento de estas dos magnitudes susceptibles de ser medida en esos objetos.	Situación V

COGNICIÓN (Segundo Diseño)		
MAGNITUD Y MEDIDA DE PERÍMETRO Y ÁREA		
VARIABLES MICRO- DIDÁCTICAS	OBJETIVOS	DISEÑO (D)
		SITUACIÓN (S)
		TAREA (T)
El área como cantidad de plano ocupado y como número de unidades que recubren la superficie.	Observar si los estudiantes identifican por cantidad de plano ocupado o por recuento de unidades que recubren la superficie un área mayor o igual a otra a través de procedimientos geométricos y numéricos.	D2S1T1
		D2S2T2
		D2S3-4-5
Disociación entre el área y la forma de la superficie.	Identificar si los estudiantes logran comparar superficies para identificar áreas iguales con distinta forma, utilizando expresiones como, esto es más... que...; esto es igual ... que ...; esto es menos ... que	D2S1T1
		D2S2-3-4
Conservación del área:	Observar a través de procedimientos geométricos, si al descomponer la región de la huerta en un número finito de regiones, los estudiantes comprenden que el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.	D2S1T1-2
Propiedad Aditiva.		D2S4
Propiedad de Invarianza. Propiedad		

de la Unidad. Propiedad de la Disección.	Observar si los estudiantes comprenden que, si una huerta puede ser diseccionada en varias partes y esas partes reorganizadas para formar otra huerta, entonces las dos regiones tienen la misma área.	
Creencia que existe en los estudiantes de que el área de una figura depende de la medida de sus lados o su perímetro.	Se da a los estudiantes figuras en papel, de manera que, a través del tacto, los estudiantes comprendan mejor la diferenciación entre líneas y superficies y visualicen mucho mejor la bidimensionalidad de las figuras. Los recubrimientos en papel dan la posibilidad de manipular, de trasladar, de girar, de recortar en partes más pequeñas, e incluso de pegar. Trabajar el procedimiento geométrico de recorte y pegado de las piezas en las que queda descompuesta la superficie.	D2S1-3-4
Disociación del área del número que la mide.	Se observará si el estudiante logra concebir el área como el número de unidades que recubren la superficie. Se trabajarán recubrimientos de la unidad de medida. Observar si el estudiante comprende la relación inversa entre el número de unidades que recubren la superficie y el tamaño de la unidad. Se trabajarán procedimientos numéricos con uso de unidades bidimensionales.	D2S4

CONJETURAS	SOLUCIONES
Se conjetura que la aplicación apropiada del principio de comunicación de la metodología CLIL en el proceso de planeación de las intervenciones a realizar lograrán disminuir el uso de la lengua nativa durante el desarrollo de las intervenciones de la investigación.	Esta dificultad se anticipó con la aplicación apropiada del principio de comunicación de la metodología CLIL en el proceso de planeación de las intervenciones a realizar.
Se conjeturó que con el diseño de actividades experienciales, donde los estudiantes recubrieran la superficie con figuras de papel y que tuvieran la posibilidad de manipular, de trasladar, de girar, y de recubrir la superficie, los estudiantes superarían las dificultades con la comprensión de la independencia de las medidas de área y perímetro.	Se diseñaron actividades experienciales donde los estudiantes recubrieron la superficie con figuras de papel lo cual permitió la posibilidad de manipular, de trasladar, de girar, y de recubrir la superficie con el fin de que los estudiantes verifiquen si un cambio en la superficie alteraría el área y el perímetro de una figura.

3.3.6 *Análisis a Priori de la Secuencia de Situaciones sobre Longitud y Perímetro*

A continuación, se describen las situaciones y las tareas de cada uno de los diseños del experimento en las que se conjugan las variables macro y micro didácticas. Se presenta una descripción de cada una, los enunciados y los posibles tratamientos que pueden realizar los estudiantes tanto a nivel conceptual como a nivel discursivo.

3.3.6.1 **Diseño 1, Situación 1, Tarea 1 (D1S1T1)²⁹: Reconocimiento de la Magnitud Longitud en un Objeto Tridimensional**

La primera situación tiene como objetivo la percepción de la magnitud longitud como una propiedad que posee una colección de objetos. Se parte del contexto físico de la huerta escolar como un lugar privilegiado para el acercamiento a esta magnitud, se seleccionan tres longitudes a observar y comparar para que los estudiantes logren captar las dimensiones de largo, ancho y altura cuando se habla de un objeto tridimensional. Se les provee a los estudiantes las palabras en inglés (length, width and height) para nombrar cada una de las longitudes señaladas en la huerta.



Figura 20. Longitudes abordadas en el experimento en la huerta

²⁹ Ver anexo 1

3.3.6.2 Diseño 1, Situación 1, Tarea 2 (D1S1T2): Observación y Comparación de Longitudes

Una vez los estudiantes hayan reconocido las tres longitudes presentes en este objeto físico, largo, ancho y altura, proceden a compararlas entre sí. Estas comparaciones de longitudes permitirán el adecuado desarrollo de esta noción en los niños según lo afirma (Freudenthal, 2002). Como ya se mencionó, el contexto de la huerta escolar es el lugar desde donde se generan las situaciones de aprendizaje matemático, como las situaciones de aprendizaje discursivos en la nueva lengua. Para este fin, y aplicando el lenguaje del aprendizaje que es parte del principio de Comunicación de la metodología CLIL, se le brinda de manera explícita a los estudiantes el vocabulario y las estructuras gramaticales necesarias para expresar la comparación de las longitudes. Se espera que los estudiantes utilicen los adjetivos en forma de comparativos y superlativos para generar el discurso matemático apropiado de manera oral y escrita.

Use any of these adjectives to compare the lengths

- Short

- Long

Use any of these grammar structures:

- much _____ than
- a lot _____ than
- a little _____
- a bit _____

- less _____ than
- not as _____ as
- The _____ -est

Figura 21. Vocabulario y estructuras gramaticales para realizar comparaciones de longitudes en la huerta

3.3.6.3 Diseño 1, Situación 2 (D1S2): Estimación y Medición de Longitudes con

Instrumentos Antropométricos

Esta segunda situación del primer diseño tiene como objetivo la estimación y medición de longitudes con instrumentos antropométricos, los cuales son los primeros recursos de los niños para acercarse a la medición de longitudes. Se les pide a los niños que escojan las partes del

cuerpo mas adecuadas para realizar las estimaciones y mediciones de cada una de las tres longitudes de la huerta. Una vez los estudiantes identifican las partes del cuerpo apropiadas para realizar las mediciones de acuerdo con su longitud, se les pide que primero estimen la cantidad de esa parte del cuerpo necesarias para cubrir toda la longitud a medir. Después de realizar las estimaciones, los estudiantes deben acercarse a la huerta para medir las longitudes con las partes de su cuerpo consideradas más adecuadas. Se espera que los estudiantes desarrollen la capacidad de estimar apropiadamente longitudes y de realizar mediciones antropométricas, y que puedan a su vez comunicar sus resultados apropiadamente en inglés. En el aprendizaje discursivo en la lengua meta se provee a los estudiantes con las expresiones lingüísticas necesarias para comunicar las estimaciones encontradas.

Parts of the body you might want to use:		• I could estimate it is about... • I think it is about... • I believe it is about... • I consider that it is about ... • In my opinion it is about... • It depends on...
Hand	Palm	
Finger	Foot	
Arm	Step	

Figura 22. Vocabulario y expresiones lingüísticas para comunicar estimaciones de longitudes

3.3.6.4 Diseño 1, Situación 3 (D1S3): Medición de Longitudes con Unidades no

Estandarizadas

Esta situación tiene como objetivo el uso de “varas” para la medición de longitudes, de manera que los estudiantes se vayan acercando al concepto de unidad de medida y a la estimación de variables continuas, las cuales siempre se podrán refinar indefinidamente, siendo las “varas de medida” los instrumentos iniciales con que los estudiantes cuentan para reequilibrar el sistema de medición.

Cuando la medición con una vara les implique ir acomodando el instrumento tantas veces sea necesario hasta que la longitud que se va a medir se acabe, y cuando el objeto a ser medido no sea cubierto totalmente al aplicar congruentemente la vara de medir un número de veces, los estudiantes deberán utilizar las otras varas de medir hasta completar esa longitud. Se espera que los estudiantes recurran al uso de términos fraccionarios tales como la mitad, un cuarto y un octavo a través del uso de estas “varas” de medir.

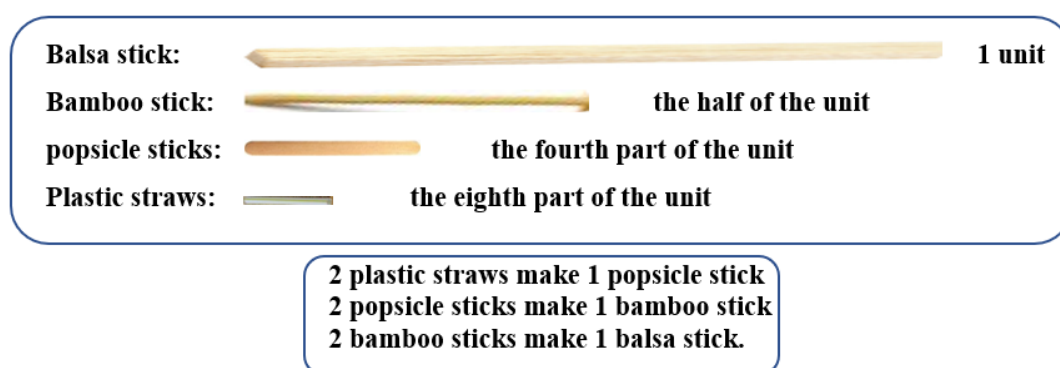


Figura 23. Relación fraccionaria entre las varas de medir

Para realizar las mediciones, los estudiantes reciben cuatro varas de medir y se les explica la relación fraccionaria que hay entre ellas. La primera vara representa una unidad, la segunda vara equivale a la mitad de la unidad, la tercera vara equivale a la cuarta parte de la unidad, y la cuarta vara equivale a la octava parte de la unidad. Una vez los estudiantes tienen las varas de medir, deben medir las tres longitudes de la huerta: el largo, el ancho y la altura usando las varas hasta completar toda la longitud. En la dimensión discursiva, los estudiantes utilizan las expresiones lingüísticas y el vocabulario matemático planteado en la tarea para expresar unidades y fracciones de unidad en inglés.

3.3.6.5 Diseño 1, Situación 4, Tarea 1 y 2 (D1S4T1-2): Medición del Perímetro con unidades no Estandarizadas

Estas dos tareas tienen como objetivo el uso de un instrumento no estandarizado para medir el perímetro de la huerta. Los estudiantes reciben un rollo de cuerda y en grupos de cuatro deben usarla para medir el perímetro y una vez lo tienen, deben cortar el trozo exacto de esa longitud. La segunda parte de esta misma actividad requiere que los estudiantes utilicen las “varas” para medir la longitud de la cuerda que representa el perímetro de la huerta. Se espera que los estudiantes encuentren una definición inicial para el concepto perímetro, y que utilicen términos fraccionarios para expresar la medida encontrada.

3.3.6.6 Diseño 1, Situación 4, Tarea 3 y 4 (D1S4T3-4): Conservación e Invariancia de la Magnitud Longitud

Esta tarea perteneciente a la situación 4 tiene como objetivo la reflexión sobre la conservación e invariancia de la longitud bajo deformaciones o flexiones. A los estudiantes se les pide que usando la misma cuerda con la que midieron el perímetro de la huerta, ahora formen dos figuras distintas en el suelo. Esta actividad permite que los niños usen el mismo perímetro, pero cambiando la forma de manera que logren disociar el perímetro de la forma de la superficie. Se espera que los estudiantes puedan comprender que, sin importar la deformación o flexión de la longitud de la cuerda, el perímetro sigue siendo siempre el mismo. De la misma manera se espera que puedan expresar este hallazgo de manera apropiada en inglés.

3.3.6.7 Diseño 1, Situación 5 (D1S5): Carácter unidimensional del Perímetro

Durante las situaciones anteriores se pasó del uso de las unidades antropométricas, al uso de las “varas de medir” como unidad de medida. En esta situación se utiliza la longitud de un lado del cuadrado como nueva unidad de medida. Este cambio de registro permitirá al estudiante el acercamiento al uso de la unidad de medida estandarizada. En esta situación se espera que los estudiantes formen en el papel cuadriculado figuras con igual perímetro, y realicen conteos y sumas de sus lados unidimensionales para hallar perímetros.

3.3.7 *Análisis a Priori de la Secuencia de Situaciones sobre Perímetro y Área*

El segundo diseño sobre perímetro y área parte de los aprendizajes realizados en el primer diseño sobre longitud y perímetro. En este diseño³⁰, se pretende lograr la comprensión de la noción de área y de su independencia del perímetro.

3.3.7.1 Diseño 2, Situación 1, Tarea 1, 2 y 3 (D2S1T1-2-3): Comparación de Áreas

Esta situación tiene como objetivo reconocer el área como cantidad de plano ocupado y el área como número de unidades que recubren la superficie. Los estudiantes realizan un conteo de unidades cuadradas para reconocer el área de cada una de las figuras, y luego comparan las áreas entre sí. Estas comparaciones de áreas permiten el adecuado desarrollo de esta magnitud.

³⁰ Ver anexo 2

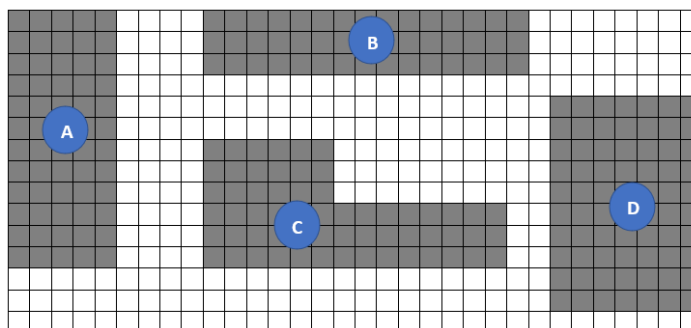


Figura 24. Situación de comparación de áreas

Para realizar las comparaciones y siguiendo el principio de comunicación CLIL, se hace explícito en el diseño el vocabulario y las estructuras gramaticales necesarias para comunicar de manera oral y escrita los resultados que se obtienen.

Use any of these adjectives to compare the surfaces:

- Great

- Small

Use any of these grammar structures:

- Much _____ than
- less _____ than

- not as _____ as _____
- as _____ as _____

Figura 25. Vocabulario y estructuras gramaticales para la comparación de áreas

3.3.7.2 Diseño 2, Situación 1, Tarea 4, 5 y 6 (D2S1T4-5-6): Disociación entre el área y la forma de la superficie

En estas tres tareas de la primera situación de este diseño, se pretende que los estudiantes disocien entre el área y la forma de la superficie, y superen la creencia de que el área de una figura depende de la medida de sus lados o su perímetro. La siguiente figura contiene las preguntas que conducen al objetivo planteado en esta situación.

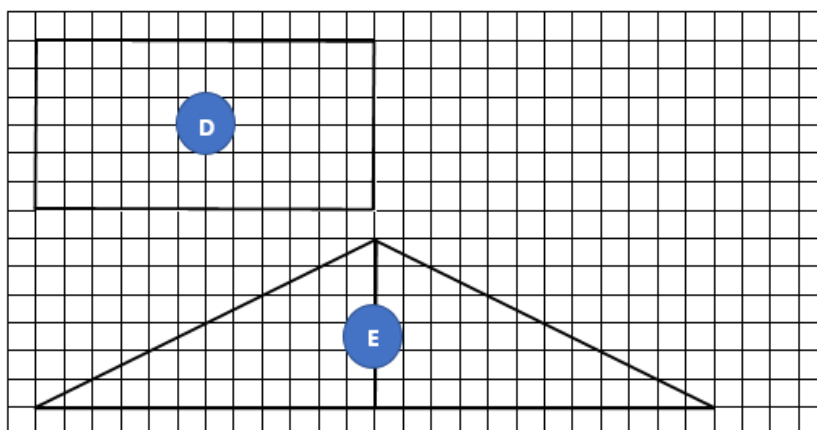
4. Which garden, the garden with the greatest surface or the garden with the smallest surface, need more bamboo sticks to be enclosed? Explain your findings. _____

5. Which gardens have the same surface or area to grow vegetables?
 Garden ____ and garden ____.
- a) Do these two gardens with the same surface also need the same length of bamboo sticks to be enclosed? Explain. _____
 _____.
6. Write True or False and explain your answer.
- a) The garden with the greatest area also has the longest perimeter _____
 Because _____
 _____.
- b) The garden with the smallest area also has the shortest perimeter _____
 Because _____
 _____.

Figura 26. Tarea D2S1T4-5-6

3.3.7.3 Diseño 2, Situación 2 (D2S2T1-2): Conservación del Área. Descomposición de la Superficie con Procedimientos Geométricos

Esta situación tiene como objetivo la disociación entre el área y la forma de la superficie, y razonar sobre las propiedades de la conservación del área: propiedad aditiva, propiedad de invarianza, propiedad de la unidad, y propiedad de la disección. En la primera tarea los estudiantes deben usar la propiedad de la adición y la propiedad de la unidad para recomponer las regiones y formar unidades cuadradas, y deben utilizar procedimientos geométricos para descomponer de manera conveniente la figura. Se espera también la comprensión del área de un triángulo como la mitad del área del rectángulo de misma base y altura.



1. Does any of the two gardens in the picture above have a greater area than the other one to grow vegetables? Why? Explain your answer. _____

Figura 27. Figuras de la tarea D2S2T1

Luego, los estudiantes deben utilizar la propiedad de la disección para reconfigurar el área de la figura anterior y formar otra región con la misma área dentro de una cuadrícula entregada.

2. Draw the same garden as garden D but with the different shape. Make sure you keep the same number of square units.

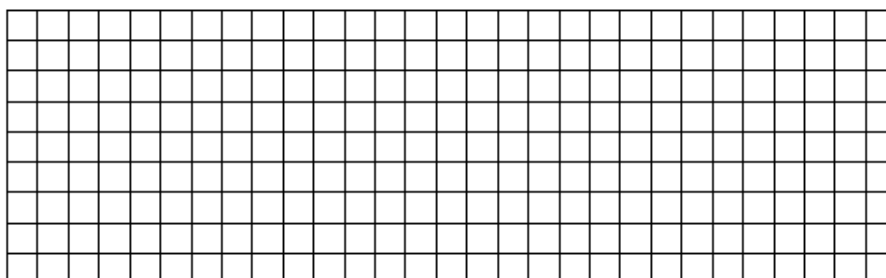


Figura 28. Tarea D2S2T2

3.3.7.4 Diseño 2, Situación 3 (D2S3): Disociación del Área del Perímetro

En esta situación se pretende que los estudiantes superen la creencia que existe de que el área de una figura es igual a la medida de sus lados o su perímetro. Las preguntas se contextualizan en la huerta y se les pregunta a los estudiantes cuál de las huertas tiene más área

para cultivar vegetales y cuál de las huertas necesita más palos de guadua para ser encerrado. En esta situación, la figura con mayor área tiene menor perímetro y la figura con mayor perímetro tiene menor área.

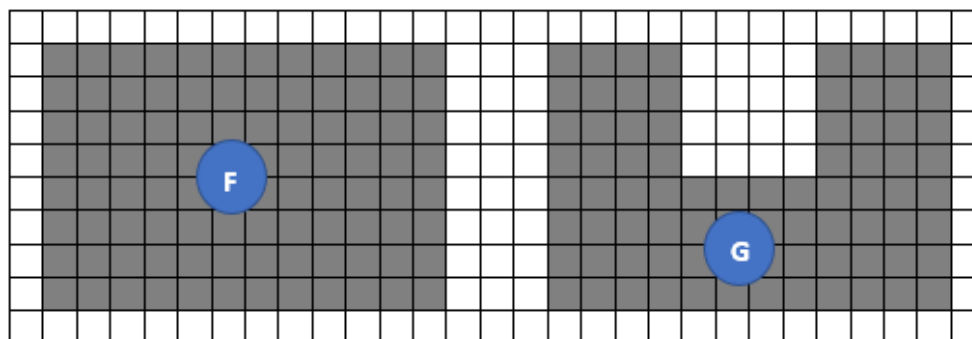


Figura 29. Figuras de la tarea D2S3

3.3.7.5 Diseño 2, Situación 4, Tarea 1 (D2S4T1): Recubrimiento de la Superficie

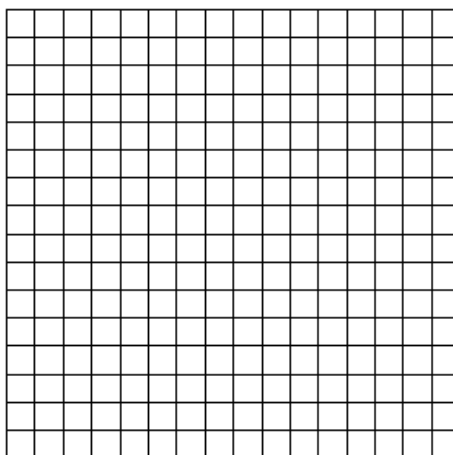
Esta situación se lleva a cabo nuevamente en la huerta y tiene como objetivo concebir el área como el número de unidades que recubren la superficie. Se da a los estudiantes las siete piezas del Tangram en papel de manera que, a través de procedimientos geométricos, compongan el área de la huerta con un número finito de regiones, y de esta manera puedan comprender que el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas. Los recubrimientos en papel dan la posibilidad de manipular, de trasladar, y de girar. La huerta se dividió en dos partes teniendo en cuenta que en la parte que se realiza la medición (área 1), el largo fuera dos veces su ancho, de manera que las piezas del Tangram fueran suficientes para recubrir esta superficie.



Figura 30. Piezas del Tangram para recubrir el área 1 de la huerta.

3.3.7.6 Diseño 2, Situación 4, Tarea 2 (D2S4T2): Conservación del Área

Esta tarea tiene como objetivo observar si los estudiantes comprenden que, si una superficie puede ser diseccionada en varias partes y esas partes reorganizadas para formar otra superficie, entonces las dos regiones tienen la misma área. Los estudiantes deben usar las mismas siete piezas del Tangram y formar una huerta en forma cuadrada en el suelo. Una vez han realizado el cuadrado deben contestar la pregunta si las dos huertas tienen la misma área o si creen que algún área es mayor que la otra. Los estudiantes deben dibujar las piezas del Tangram dentro del cuadrado que se les entrega en el diseño.



2. Do both gardens, the “Area 1” of the school garden, and the design of the garden in the shape of a square you made on the floor, have the same area to grow vegetables? Is any greater than the other one? Why? Explain your answer. _____
-

Figura 31. Cuadricula para formar el cuadrado con las piezas del Tangram.

3.3.8 Experimentación

A la luz de los datos recogidos, se concretaron los objetivos instruccionales, los instrumentos de recogida de datos, el diseño de las actividades, la gestión en el aula y en la huerta del colegio, y la temporalización de cada una de las sesiones que en la fase anterior se habían planificado.

El docente-investigador ejecutó las intervenciones en el aula y en la huerta escolar, y en compañía del tutor colaboró en la revisión, análisis e interpretación de los datos recogidos. Este doble papel de investigador-docente se gestionó apropiadamente ciñéndose a los objetivos instruccionales de cada intervención.

Se recogieron datos sobre el pensamiento de los alumnos mientras resolvían las situaciones de medición en la huerta escolar, sobre su comunicación en la lengua de enseñanza, sobre las intervenciones del investigador-docente. La recolección de datos en este proceso cualitativo incluyó observaciones participantes, análisis de los documentos, grabaciones de audio y video.

Tabla 3. *Características Generales de la Investigación*

Tiempo Destinado a la Implementación	Objetivos	Actividades	Recolección de Datos
Noviembre 15 al 19	Introducción a la noción de longitud e introducción a las estructuras gramaticales en inglés para comparar longitudes.	Entrega del primer diseño a los estudiantes	Registro de información en el diseño. Toma de fotografías
		Presentación del proyecto y desplazamiento a la huerta para reconocer el contexto del trabajo	
		Reconocimiento de las tres medidas de longitud: largo, ancho y altura	
		Explicación de los comparativos y superlativos	
Noviembre 24 al 30	Uso de comparativos y superlativos en inglés para comparar longitudes.	Explicación gramatical de los comparativos y superlativos	Registro de información en el diseño.
		Comparación de las longitudes, largo, ancho y altura de la huerta	Toma de fotografías
			Grabación en video
Noviembre 30 a Diciembre 1	Medición de longitudes usando partes del cuerpo como unidades de medida	Estimación de longitudes	Registro de información en el diseño. Toma de fotografías Grabación en video
		Explicación de las expresiones lingüísticas necesarias para expresar estimaciones.	
		Uso de las partes del cuerpo para medir longitudes.	
		Explicación del vocabulario referente a las partes del cuerpo, y las expresiones	

		lingüísticas que los estudiantes deben utilizar para expresar medición de longitudes en inglés.	
Diciembre 1 al 6	Medición de longitudes con varas de medir no estandarizadas	Explicación de la relación proporcional entre las varas de medida: unidad, la mitad, la cuarta parte y la octava parte.	Registro de información en el diseño.
		Uso de las varas para medir cada una de las tres longitudes de la huerta.	Toma de fotografías Grabación en video
Diciembre 3 al 7	Medición del perímetro de la huerta con cuerdas y varas de medir	Entrega de la cuerda a los estudiantes organizados en grupos de 4 para medir la longitud de las paredes de la huerta.	Registro de información en el diseño.
	Independencia del perímetro y la forma de la superficie	Medición de la longitud de la cuerda con las varas de medir.	Toma de fotografías
		Realización de figuras distintas usando la misma longitud de la cuerda.	Grabación en video
		Encontrar una definición para perímetro.	
		Formación de figuras con el mismo perímetro usando el perímetro de la huerta.	
Diciembre 3 al 7	División de figuras en partes con igual perímetro	Explicación de la independencia de perímetro y la forma de la superficie que contiene.	Registro de información en el diseño.
		Explicación de la longitud del lado de un cuadrado como unidad de medida de perímetro.	Toma de fotografías
		Dibujo de figuras con el mismo perímetro sin importar la forma.	Grabación en video
		Dividir figuras en 2, 3 y 4 partes que tengan el mismo perímetro, pero no necesariamente la misma forma.	
Diciembre 9 al 14 y de Enero 13 al 27	Comparación de áreas rectangulares	Entrega del segundo diseño sobre perímetro y áreas	Registro de información en el diseño.

Comparación del área de una figura triangular con otra de forma rectangular	Comparación de áreas usando los adjetivos y las estructuras gramaticales respectivas, comparativos y superlativos. Explicación de procedimientos de composición y recubrimiento de áreas para formar las unidades cuadradas.	Toma de fotografías Grabación en video
---	---	---

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS RETROSPECTIVOS

En este capítulo se presentan los análisis de los datos obtenidos en la implementación de los diseños sobre perímetro y área en el contexto de la huerta escolar, los cuales fueron ya explicados en el análisis a priori presentado en el capítulo anterior. Estos análisis provienen de las producciones escritas presentes en los diseños entregados a los estudiantes, de las grabaciones de audio y video durante los trabajos individuales y grupales, y de las grabaciones de las interacciones individuales de los estudiantes con el maestro-investigador. En la primera parte de este capítulo se exponen los hallazgos de las intervenciones, y luego se presenta el análisis retrospectivo.

Los análisis se llevaron a cabo a partir de las confrontaciones de las producciones orales y escritas de los estudiantes con las variables macro y micro didácticas, el marco referencial y los objetivos de esta investigación. Se utilizaron 12 categorías de análisis, y a partir de estas categorías, se realizaron los análisis a las producciones de los estudiantes seleccionados, tanto del objeto matemático como del discurso en inglés.

El diálogo constante que se mantuvo en la implementación de los diseños y la teoría permitió la revisión y modificación del segundo objetivo específico, y también permitió la precisión matemática y discursiva en algunas tareas de los diseños. El segundo objetivo pasó de decir “Determinar los avances comunicativos de los estudiantes para poder expresar de manera oral y escrita en inglés los conocimientos sobre perímetro y área adquiridos dentro de este contexto pedagógico”, a “Determinar si la metodología CLIL facilitó el desarrollo del discurso de los estudiantes tanto de manera oral como escrita, para expresar los conocimientos adquiridos sobre las nociones de perímetro y área dentro del contexto de la huerta escolar.” Esta precisión

permitió enfocarse más en la metodología CLIL como herramienta lingüística para el aprendizaje del contenido matemático, que en el aprendizaje del inglés como lengua extranjera en una dimensión más general.

4.1 RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS LOCALES

Este experimento de enseñanza constaba de dos diseños, cada uno de ellos contenía una secuencia de tareas las cuales partían del contexto de la huerta del colegio, y buscaban dar respuesta a la pregunta problematizadora y a los objetivos de la investigación.

En esta primera parte del capítulo, se presenta una síntesis de los resultados de los análisis locales, los cuales se organizaron en dos grupos: los que están relacionados con el aprendizaje de las nociones de longitud y perímetro, y los que están relacionados con el aprendizaje del perímetro y del área. El análisis de las producciones en inglés se realizó de manera conjunta con el análisis de las nociones de perímetro y área, en cuanto esta lengua fue el canal de comunicación del conocimiento matemático adquirido. Se debe tener en cuenta que tanto el aprendizaje de conocimiento matemático, y el aprendizaje del discurso en inglés estuvieron interrelacionados, se necesitó del aprendizaje matemático para así expresarlo en inglés, y se necesitó del inglés para comunicar el aprendizaje matemático. Ambos ámbitos, el conocimiento matemático y el de la nueva lengua, aparecieron en todo momento de manera simultánea en las actuaciones de los estudiantes, y por consiguiente ambos se analizaron dentro de la misma tarea a la que correspondía; es decir, se analizaron las producciones en inglés en tanto que permitieron la comunicación de los aprendizajes matemáticos, y por lo tanto no se analizó el aprendizaje del inglés de manera independiente del conocimiento adquirido.

En los siguientes análisis locales se utilizó la nomenclatura descrita en el capítulo 3. Se utilizó “D” para Diseño, “S” para Situación, y “T” para Tarea. Por ejemplo, D1S1T1 corresponde al diseño 1, situación 1 y tarea 1. También se utilizó la nomenclatura “Gr” para las intervenciones grupales, “E” para las intervenciones de un estudiante en específico, y Mi para designar al maestro-investigador.

4.1.1 Desarrollo del Concepto de Perímetro

Al inicio de esta investigación, se le hizo entrega a cada estudiante de una carpeta, la cual contenía legajado el primer diseño que constaba de 5 situaciones y cada situación constaba de varias tareas. Durante la implementación de este diseño se hizo uso constante del computador y del televisor del salón de clase, como apoyo para mostrar las actividades, y las imágenes correspondientes a cada situación y tarea a realizar. Los estudiantes desarrollaron el diseño tanto en las visitas a la huerta del colegio, como en el salón de clases.

Para iniciar la implementación de la primera tarea del primer diseño D1S1T1, se llevó a los estudiantes a la huerta de manera que ellos reconocieran el lugar y a su vez tuvieran el primer contacto experiencial con la magnitud abstracta de la longitud a través de las magnitudes concretas del largo, el ancho y la altura³¹. Después de realizar este primer reconocimiento del sitio donde se desarrolló el experimento, y los estudiantes percibieron la magnitud longitud se regresó al salón de clase para continuar con la trayectoria. Esta primera tarea fue a manera introductoria, y a su vez fue necesaria para poder luego abordar la medición de esas longitudes y avanzar hacia la construcción del concepto de perímetro.

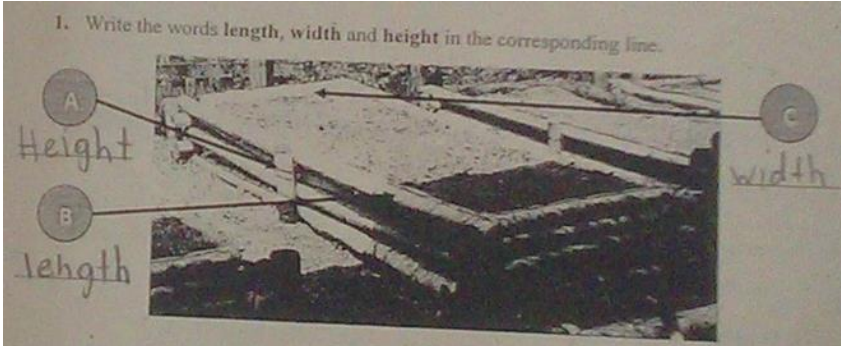
³¹ Ver D1SIT1

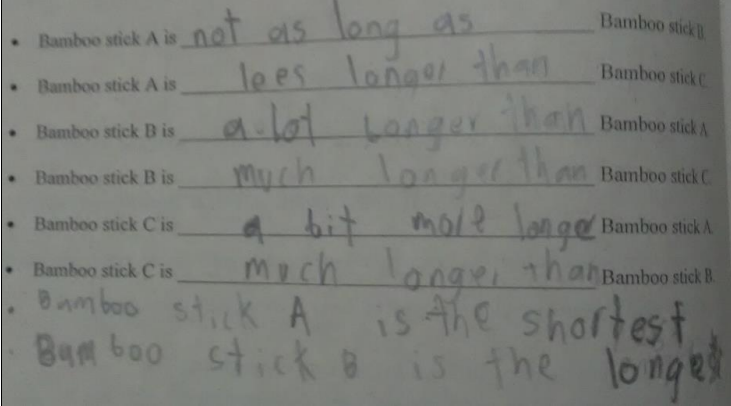
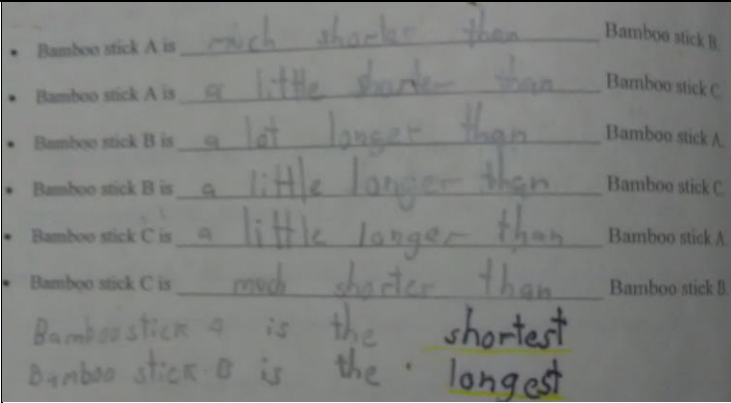
Para abordar la siguiente tarea D1S1T2 la cual tenía como objetivo la comparación de las longitudes de cada dimensión de la huerta, se indagó en el aula de clase acerca del conocimiento que tenían los estudiantes sobre el uso de los comparativos y superlativos en inglés, y se destinó un tiempo a explicar este aspecto gramatical antes de abordar esta tarea. Con el fin de profundizar en este conocimiento de la lengua, se acordó también con el profesor de inglés de los estudiantes realizar un apoyo en la enseñanza de estas estructuras gramaticales desde su área y su tiempo de clase, de manera que se fortaleciera este aspecto de la lengua y así se favoreciera el desarrollo de la investigación. Después de abordada esta explicación gramatical y del vocabulario respectivo, tanto por el maestro-investigador como por el maestro de inglés que apoyó este aspecto, se procedió a ir a la huerta para que los estudiantes compararan la longitud de cada dimensión usando las estructuras gramaticales aprendidas, y registraran sus observaciones en el diseño.

En el desarrollo de esta tarea de comparación de longitudes, se hizo explícito el uso de los superlativos para poder brindar a los estudiantes mayores recursos lingüísticos. Por esta razón, se procedió a anexar a la tarea D1S1T2 del diseño, las palabras “*The longest* y *The shortest*”, de manera que los estudiantes contasen con estructuras adicionales para realizar las comparaciones de longitudes apropiadamente. Cabe recordar que, en la metodología de experimentos de enseñanza, la investigación está en constante diálogo con la teoría, y los rediseños son parte misma del proceso de la investigación.

En la tabla 4, se muestran, la consigna de la tarea, una imagen tomada del desarrollo de la tarea D1S1T1 de uno de los estudiantes que ilustra las magnitudes concretas de la huerta, se muestran los elementos del lenguaje (vocabulario y las estructuras gramaticales) dados a los estudiantes para que ellos realizaran las comparaciones de las longitudes respectivas, al igual que algunas de las producciones escritas y orales de los estudiantes.

Tabla 4. Comparación de Longitudes (D1S1T2)

Situación	Enunciado de la tarea
D1S1T2	Compare the length of the bamboo sticks in the garden. 
Lenguaje del Aprendizaje y para el Aprendizaje	
Use any of these adjectives to compare the lengths • Short • Long Use any of these grammar structures: • much _____ than • a lot _____ than • a little _____ • a bit _____ • less _____ than • not as _____ as • The _____ -est • Bamboo stick A is _____ Bamboo stick B. • Bamboo stick A is _____ Bamboo stick C. • Bamboo stick B is _____ Bamboo stick A. • Bamboo stick B is _____ Bamboo stick C. • Bamboo stick C is _____ Bamboo stick A. • Bamboo stick C is _____ Bamboo stick B. • Bamboo stick A is the _____ of all. • Bamboo stick B is the _____ of all.	
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje

E2	 https://drive.google.com/file/d/1cgLhWjkCqvMsUZvY62Vp3o1GAxVWWlst/view?usp=sharing	
E3	 https://drive.google.com/file/d/1Z80RwZGNoyReLpQXxJufvNpWpGXugoyn/view?usp=sharing	

Para los estudiantes fue fundamental acercarse, explorar y descubrir a través de sus sentidos la magnitud longitud en la huerta del colegio. Este acercamiento vivencial les permitió reconocer las aplicaciones prácticas que tiene esta magnitud, pudieron comparar a través de la vista y el tacto las longitudes de largo, el ancho y la altura de manera directa, y esto les abrió la puerta al desarrollo de las nociones de perímetro y área que se llevaron a cabo en esta investigación.

La aplicación del principio de Comunicación de la metodología CLIL en el desarrollo de esta tarea, permitió a los estudiantes la posibilidad de expresar con mayores recursos lingüísticos sus observaciones sobre las longitudes del largo, el ancho y la altura representadas en las guaduas que encerraban la huerta. Todos los estudiantes hicieron uso del “lenguaje del y para el

aprendizaje”³² en sus discursos. Algunos estudiantes, como el estudiante E2 usaron aún más elementos del lenguaje que los enseñados en este diseño para expresar sus estimaciones. Se presenta un pequeño fragmento de la intervención oral realizada por este estudiante quien utilizó los conceptos de mitad y doble en sus comparaciones:

E2: Bamboo stick A is the half of the Bamboo stick C and Bamboo stick C is the half of Bamboo stick B.

Estos elementos matemáticos y lingüísticos no se habían hecho explícitos en el diseño, pero el estudiante E2 pudo traerlos a este contexto desde sus aprendizajes realizados en anteriores clases de matemáticas.

Luego de desarrollar la primera situación D1S1 sobre el reconocimiento de la magnitud longitud y sobre las comparaciones de las tres longitudes concretas de la huerta, se procedió a explicar la segunda situación D1S2 acerca del uso de las partes del cuerpo como instrumentos iniciales para medir longitudes. Para iniciar con el uso de unidades antropométricas, se hizo explícito el vocabulario referente a las partes del cuerpo (lenguaje de aprendizaje, y de igual manera las expresiones lingüísticas necesarias para expresar estimaciones (lenguaje para el aprendizaje). Luego, se procedió a llevar a los estudiantes a la huerta para que ellos primero, estimaran el número de partes del cuerpo que se necesitarían para medir cada una de las longitudes de las guaduas, y una vez hecha la estimación, realizaran la medición correspondiente con aquella parte del cuerpo seleccionada.

³² Ver aparte 2.5.1.4 Comunicación en el marco Teórico

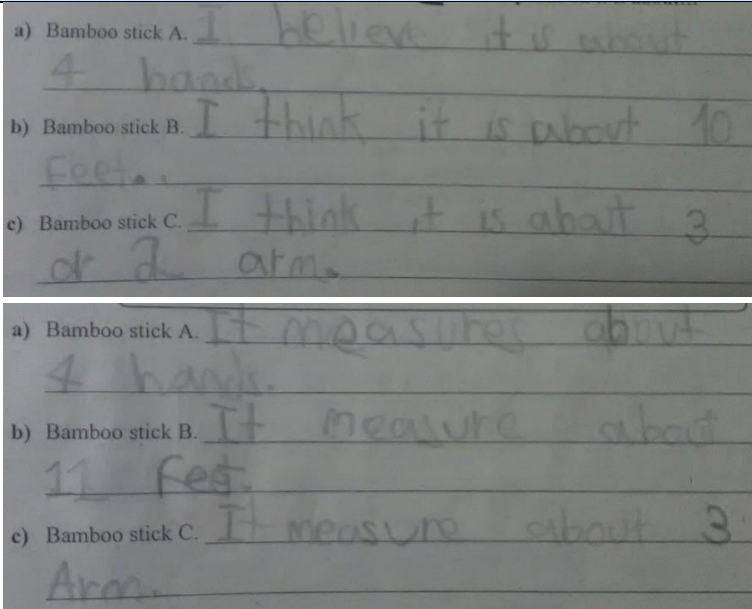
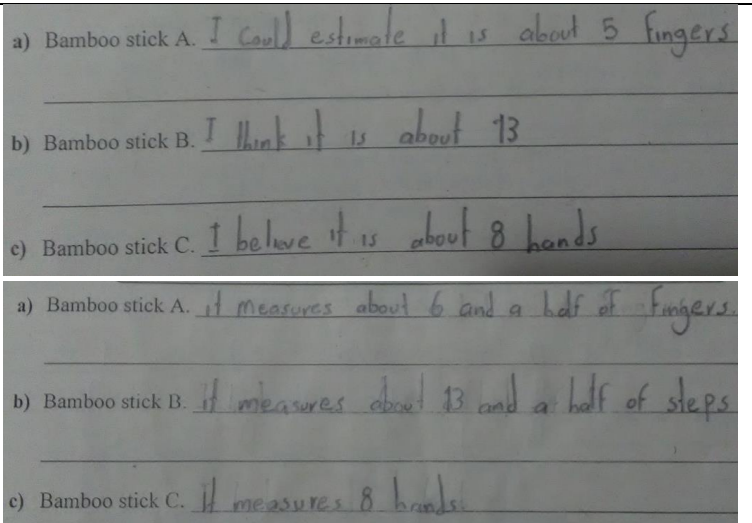


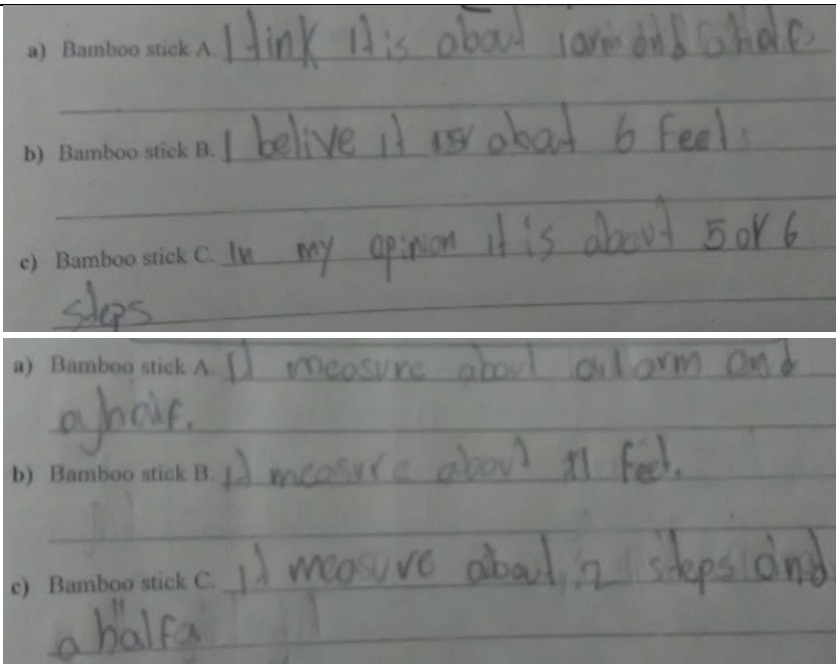
Figura 32. Mediciones Antropométricas realizadas por los estudiantes.

En la siguiente tabla se muestran las 3 consignas dadas a los estudiantes en esta tarea: la primera sobre el vocabulario a utilizar, la segunda sobre la estimación, y la tercera sobre la medición de las longitudes. Se muestra el lenguaje del y para el aprendizaje que se utilizó para el desarrollo de las tareas, e igualmente se muestran algunas producciones escritas y orales de los estudiantes.

Tabla 5. Estimación y Medición de Longitudes con Instrumentos Antropométricos (D1S2)

Situación	Enunciado de la tarea
D1S2	• We can measure the length of each bamboo stick using our body parts. Which body parts could you better use to measure the length of each of the bamboo sticks? • Select one of your body parts and estimate the number of units “of that body part” you would need to measure the length of each bamboo stick. Do not get close to the bamboos and do not use your body parts to measure, just observe and estimate. • Select one of your body parts and measure the length of each bamboo stick.
Lenguaje del Aprendizaje y para el Aprendizaje	

	Parts of the body you might want to use: HandPalm FingerFoot ArmStep • I could estimate it is about... • I think it is about... • I believe it is about... • I consider that it is about ... • In my opinion it is about... • It depends on... It measures about Use expressions like these ones: • I could measure the ... • I can maybe measure ... • I could use ...
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
E1	 https://drive.google.com/file/d/1AgUkp581FwhEtK9Ft-mJWpSTsHyQc6Ll/view?usp=sharing
E4	 https://drive.google.com/file/d/16Wia0hQmsDApAC2o6coXorlepYBWJMWZ/view?usp=sharing

E5	 https://drive.google.com/file/d/1mVuZHeNU5QlKH060NzEtsUebwooROkOR/view?usp=sharing
-----------	---

Los estudiantes estimaron cada una de las longitudes de la huerta, y luego verificaron sus estimaciones acercándose y midiendo directamente con su cuerpo. Como se conjeturaba en el análisis macro y micro didáctico, y sustentado en el marco teórico, los estudiantes iban a utilizar su lengua materna para expresar sus resultados, el cambio de código lingüístico ocurrió con naturalidad durante los diálogos entre estudiantes y con el maestro-investigador. En el siguiente fragmento del dialogo sostenido con la estudiante E4, se pudo evidenciar el cambio de código lingüístico o “Code Swtiching”, y la importancia de la intervención del maestro-investigador en la producción de nuevo conocimiento matemático y lingüístico.

Mi: How many hands?

E4: como cinco y un poquito más, como la mitad de seis.

Mi: How can you say that in English? It measures about...

E4: It measures about a half of six.

Mi: Six and a half. Six and a half what? Hands or fingers.

E4: fingers.

Mi: Six and a half fingers.

El maestro-investigador facilitó el lenguaje que necesitaba la estudiante E4 para que lograra expresar el resultado de sus mediciones antropométricas apropiadamente. Ella constantemente cometió errores de producción oral y fue necesaria la intervención desde el lenguaje para favorecer la construcción del discurso matemático. En las intervenciones orales y escritas de los estudiantes se evidenció el uso de los recursos del lenguaje del y para el aprendizaje para la producción del conocimiento matemático.

Durante la utilización de los instrumentos antropométricos, los estudiantes hicieron uso constante de la fracción un medio para sus conteos, como se puede evidenciar en la producción oral y escrita de la estudiante E4. Aquí un fragmento de sus respuestas escritas:

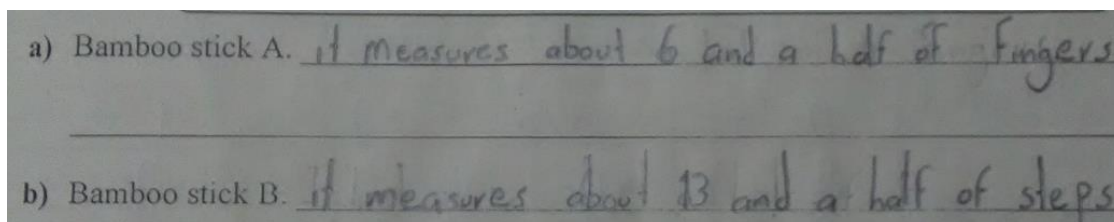


Figura 33. Uso de fracciones en las mediciones antropométricas de la estudiante E4.

Después de abordar la medición de las longitudes con instrumentos antropométricos, se les entregó a los estudiantes cada una de las varas de medir ilustradas en el análisis a priori, y se

encontró junto con los estudiantes la relación entre cada una de ellas, la unidad, la mitad de la unidad, la cuarta parte y la octava parte de la unidad³³.

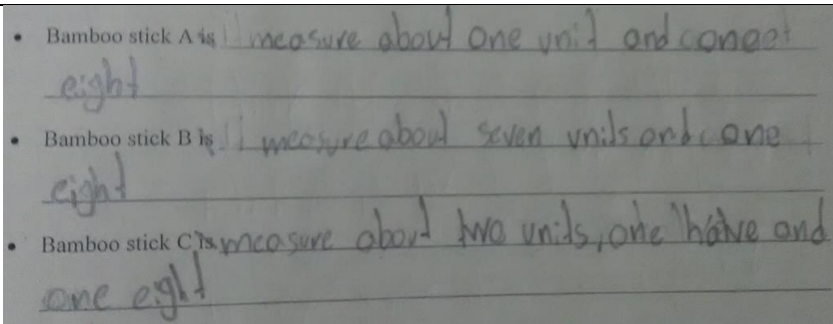
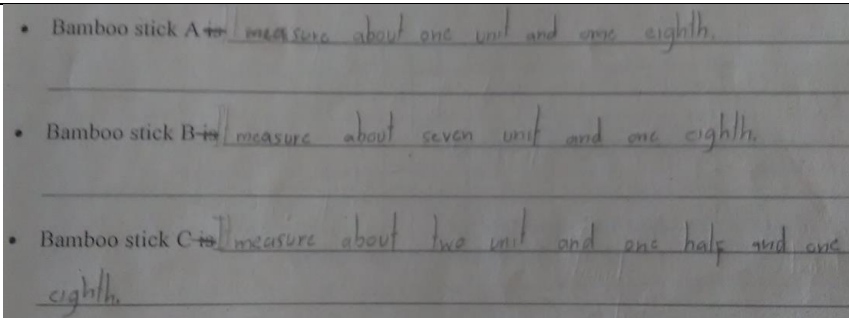
En el aula de clase se realizaron ejemplos de medición con estas varas, y después de asegurarse que los estudiantes comprendían la consigna y el uso de cada una de las varas, se procedió a ir a la huerta para desarrollar la tarea. En la huerta, los estudiantes utilizaron las varas y midieron cada una de las tres longitudes concretas del largo, el ancho y la altura, y se tomaron los registros del caso.

En la siguiente tabla se muestra el enunciado de la tarea, las expresiones lingüísticas, el vocabulario matemático para expresar algunas medidas fraccionarias, y las producciones de algunos estudiantes.

Tabla 6. Medición de Longitudes con Unidades no Estandarizadas (D1S3)

Situación	Enunciado de la tarea
D1S3	You will receive a plastic bag from the teacher which contains the following materials: plastic straws, popsicle sticks, bamboo sticks and balsa sticks. Balsa stick:  1 unit Bamboo stick:  the half of the unit popsicle sticks:  the fourth part of the unit Plastic straws:  the eighth part of the unit 2 plastic straws make 1 popsicle stick 2 popsicle sticks make 1 bamboo stick 2 bamboo sticks make 1 balsa stick. Use these objects to measure the length of each of the bamboo sticks. How long is each one of them?
Lenguaje del Aprendizaje y para el Aprendizaje	

³³ Ver figura 23.

Use language expressions like these ones: • It measures about / around... • Units • a half • a fourth / two fourths / three fourths • an eighth / three eighths / five eighths / seven eighths	
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
E1 and E2	“Bamboo stick A is 1 unit, 1 fourth and 1 eighth” https://drive.google.com/file/d/1Co2nLz3gLUjG22vxfDKaMGrseXmqEiFv/view?usp=sharing https://drive.google.com/file/d/1aMAUNoAo-D7ZvKrsIYPkkDosniKU8H_M/view?usp=sharing
E5	 https://drive.google.com/file/d/1OptZ8lishFKCpg2UwGZcYsuo6rtYrXPA/view?usp=sharing
E6	
Gr1	Bamboo stick C is about two and a half https://drive.google.com/file/d/1CPmVMzcRGQyZd9Bk53fbAR-lTO0kFwZd/view?usp=sharing
Gr2	https://drive.google.com/file/d/11hpBGPNHtUOVOiw2STHWMiFWeszQousf/view?usp=sharing

El uso de las varas de medir diseñadas por el maestro-investigador y entregadas a los estudiantes para la medición de longitudes, permitió el acercamiento de los estudiantes a la construcción de la unidad y al uso de medidas fraccionarias. La medición de longitudes con estos

instrumentos les puso en el escenario de resolver situaciones de continuidad de la medida cuando la longitud a medir ya no podía ser cubierta totalmente con el uso repetido de la vara que representaba la unidad, en estos casos, las varas que representaban las fracciones de unidad, como un medio, un cuarto y un octavo, fueron utilizadas por los estudiantes de manera eficiente para medir la parte faltante de la longitud.

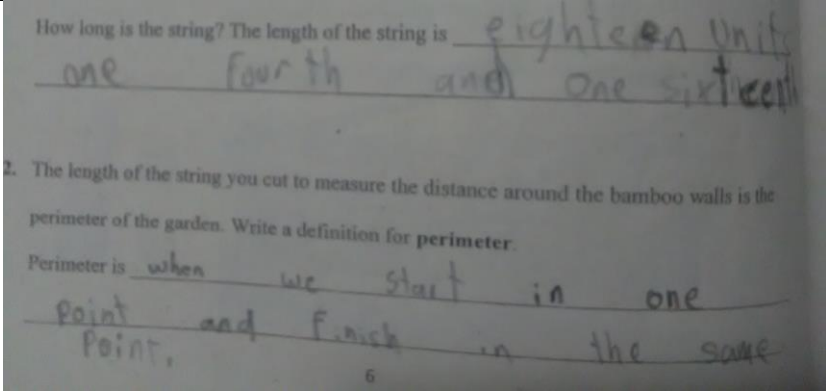
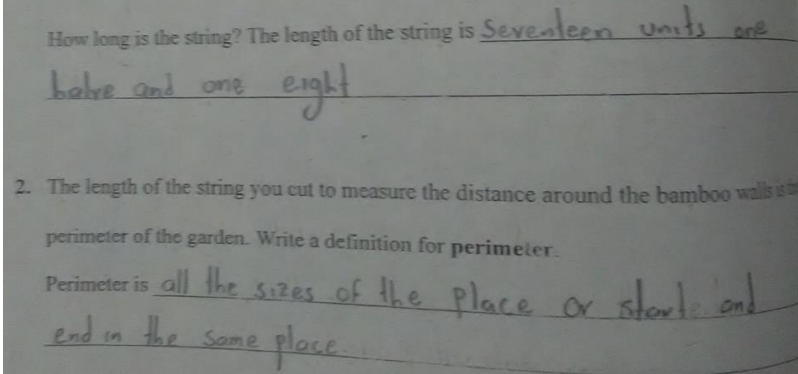
En la siguiente actividad de la trayectoria D1S4T1-2, los estudiantes debían usar las mismas varas de medir, pero en este caso para hallar el perímetro de la huerta representado en las guaduas que la encierran. En la clase se conversó con los estudiantes sobre las posibles formas de medir la longitud de las cuatro paredes de la huerta, y como posible solución a esta tarea, se les entregó a los estudiantes una cuerda que debían de utilizar para tal medición. Se procedió a ir a la huerta para realizar la medición respectiva, los estudiantes trabajaron en grupos de 3 o 4, utilizaron la cuerda entregada para medir el perímetro de la huerta, cortaron la cuerda en la parte que representaba el perímetro, y luego midieron la longitud de esa cuerda con las varas de medir ilustradas en la figura 23.



Figura 34. Medición del Perímetro de la Huerta realizada por un grupo de estudiantes.

En la siguiente tabla se encuentra el enunciado de la tarea, las expresiones del lenguaje a utilizar para resolver la tarea, y las producciones de algunos estudiantes sobre la medición del perímetro de la huerta.

Tabla 7. Medición del Perímetro con unidades no Estandarizadas (D1S4T1-2)

Situación	Enunciado de la tarea
D1S4T1-2	Use a piece of string given by the teacher and use it to measure the distance around the bamboo walls. Cut the piece of string to have the exact length of the garden. • Use the materials given by the teacher and measure the length of the string. • The length of the string you cut to measure the distance around the bamboo walls is the perimeter of the garden. Write a definition for perimeter.
Lenguaje del Aprendizaje y para el Aprendizaje	
Use language expressions like these ones: • Units • a half • a fourth / two fourths / three fourths • an eighth / three eighths / five eighths / seven eighths	
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
E1 and E2	 https://drive.google.com/file/d/1eLiq5fWQ7aA10nPkCJGQcXGruFPwKCqi/view?usp=sharing
E4	
Gr1	https://drive.google.com/file/d/1pAwfRSn_22Y_5SF8qGoCUI-bXZG97UTB/view?usp=sharing

Gr2	https://drive.google.com/file/d/1EXo4zq_Rrc5G_HlsHYyVB4NCvKPc-IdJ/view?usp=sharing
-----	---

La medición de la longitud de la cuerda que representaba el perímetro de la huerta llevó a los estudiantes a enfrentarse a un nuevo problema de medición de longitudes al encontrar que las varas de medir que utilizaron no eran suficientes para completar la medición. Los estudiantes E1 y E2 los cuales trabajaron en conjunto en la resolución de esta actividad, lograron hallar con la ayuda del maestro-investigador, una nueva fracción no representada en las varas de medir que estaban utilizando.



Figura 35. Resolución de un conflicto cognitivo cuando no se logra capturar la medida de una longitud

Los estudiantes E1 y E2 al encontrar la situación ilustrada en la figura 35, intuyen que la medida que necesitan utilizar es la mitad de la vara que representa un octavo de la unidad, con la ayuda del maestro-investigador, lograron encontrar la fracción necesaria para completar la medida, la cual era un dieciseisavo de la unidad. En el siguiente fragmento se evidencia la resolución del problema.

E1: No, it is too much. Teacher, it is one fourth and a half of one eighth.

Mi: Do you know how we can call the half of the eighth.

E1: one fourth, one tenth

E: profe, Podemos hacer algo, podemos cortar el palito para que quede...

Mi: Look at this, this is the half of the half, and we call it one fourth, this is the half of the

fourth and we call it one eighth, what about the half of the eighth?

How can we call the half of the eighth?...

E2: Si, es como la mitad. Sixteenth

Mi: One sixteenth

E2: Teacher, it is eighteen units, one fourth and one sixteenth.

Después de las intervenciones del maestro-investigador sobre la relación fraccionaria de las varas de medir, el estudiante E2 concluye que la vara que se necesita para completar la medición de la longitud es la mitad de la vara que representa un octavo, y encuentra que esta se llamaría “one sixteenth”.

El Gr2 realizó una relación de equivalencias al usar en la medición de la longitud de la cuerda dos varas de un octavo, la cual comprendieron que podía cambiarse por una vara que representaba un cuarto de la unidad.



Figura 36. Equivalencia entre vas de medir encontrada por un grupo.

Después de tener la medición del perímetro de la huerta en términos de las varas de medir entregadas a los estudiantes, se procedió a pedirles en la siguiente tarea D1S4T3-4, que realizaran tres figuras distintas usando la misma longitud de la cuerda, el maestro-investigador observó y preguntó a cada grupo de estudiantes si el perímetro de la huerta del colegio era igual o distinto al perímetro de cada una de las figuras que acababan de realizar. Los estudiantes comprendieron a través de las preguntas y reflexiones que se realizaban en torno a la tarea que, sin importar la forma de la figura, el perímetro sí permanecía igual.

Sucedio con los estudiantes de uno de los grupos, los cuales realizaron en una clase la medición del perímetro de la huerta, y por falta de tiempo en esa clase debieron realizar las figuras en el suelo en la siguiente clase que, mostraron mayor dificultad en reconocer que las figuras sí mantuvieron el mismo perímetro. Esto sucedió debido a que debían hacer un esfuerzo mayor en traer la in, el perímetro sí era el mismo, pues les parecía que las figuras realizadas eran más grandes o más pequeñas que la forma de la huerta, pero al llevarlos a reflexionar sobre la actividad de la clase anterior y la medida del perímetro de la huerta, inmediatamente cambiaron su pensamiento respecto a la invarianza de la longitud bajo deformaciones. (ver video https://drive.google.com/file/d/1OHGL-jOk0xLtY9H-FFFjtvvST-zt_ctf/view?usp=sharing)



Figura 37. Figuras realizadas por los estudiantes al transformar la forma de la huerta manteniendo el mismo perímetro.

Una vez en el aula de clase, se reflexionó nuevamente con los estudiantes en la definición de perímetro y de su independencia de la forma haciendo alusión a las figuras formadas en el suelo las cuales usaban la misma longitud del perímetro de la huerta del Colegio. Algunas de las figuras tenían lados rectos, mientras que otras tenían curvas lo que permitió reflexionar en la invariancia de la longitud de arco, la cual al enderezar nuevamente la cuerda no se sufrió

acortamientos ni alargamientos. En la siguiente tabla se encuentra la consigna de la tarea, y las producciones orales y escritas de los estudiantes.

Tabla 8. *Conservación e Invariancia de la Magnitud Longitud (D1S4T3-4)*

Situación	Enunciado de la tarea
D1S4T3-4	Now, use the string to form on the ground, two different shapes. Draw the shapes here. Write your comments about the perimeter of each of the shapes.
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
E5	
E6	
E7	
E2	https://drive.google.com/file/d/1m7w2ihth1P0XUS6DH7wDQ3QLlYFVn0Cj/view?usp=sharing
Gr1	https://drive.google.com/file/d/17w74ArKm7LUHsUpHPxNJRZTJ2qkVyOzl/view?usp=sharing
Gr2	https://drive.google.com/file/d/1OHGL-jOk0xLtY9H-FFFjtvvST-zt_ctf/view?usp=sharing

En el siguiente aparte del dialogo sobre la invariancia de la longitud con el estudiante **E2** se evidencia la conclusión a la que llegaron como grupo sobre el perímetro de la huerta y el perímetro de la figura realizada en el suelo con la misma cuerda que representaba el perímetro de la huerta.

Mi: Does the figure you just made have the same perimeter of the garden? Yes or no and why?

E2: Yes, because if you change the figure, eso no cambia el perímetro. (Code switching)

Mi: It doesn't change

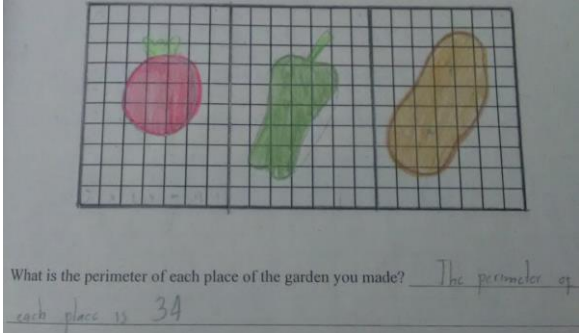
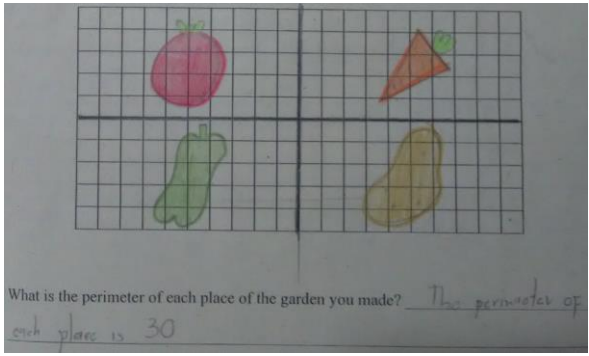
E2: It doesn't change the perimeter because you don't cut for make the other figure...

La intervención del maestro-investigador es una vez más necesaria para brindar a los estudiantes el lenguaje necesario para expresar el conocimiento matemático adquirido durante la tarea.

En la siguiente tarea D1S5 hubo un cambio en la unidad de medida de las longitudes, ya no se utilizaron las unidades antropométricas de la actividad D1S3, ni las varas de medir y su relación fraccionaria de la actividad D1S4, sino que se utilizaron las unidades unidimensionales de los lados de cada cuadrado de la hoja, como la unidad de conteo. Como introducción a la tarea, se realizó en el tablero algunas figuras con el mismo perímetro, pero con distinta forma, se realizaron los conteos de las unidades de cada longitud para verificar que sus perímetros eran iguales, y se hizo énfasis en que, aunque las formas eran distintas el perímetro de las figuras permaneció igual.

En la tarea D1S5 los estudiantes debían dividir las cuadrículas dibujadas en el diseño, en 2, 3 y 4 partes que tuvieran el mismo perímetro, pero no necesariamente la misma forma. Todos los estudiantes dividieron las huertas en formas rectangulares de igual forma, pues les aseguraba tener el mismo perímetro más fácilmente.

Tabla 9. *Carácter unidimensional del Perímetro (D1S5)*

Situación	Enunciado de la tarea
D1S5	We must make a design for the garden. The garden should be divided in different parts with the same perimeter to grow different kinds of vegetables in each one. • Divide the garden in two places which have the same perimeter each. Draw in the rectangle below, a design for what your garden might look like. • Divide the garden in three places which have the same perimeter each. Draw in the rectangle below, a design for what your garden might look like. • Now, divide the garden in four places which have the same perimeter each. Draw in the rectangle below, a design for what your garden might look like.
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
E6	 The perimeter of each of the place of the garden is 40  What is the perimeter of each place of the garden you made? The perimeter of each place is 34  What is the perimeter of each place of the garden you made? The perimeter of each place is 30
E2	https://drive.google.com/file/d/1FIG_B1qWlmlmP65M2ftjlnNGkjjEAMUa/view?usp=sharing

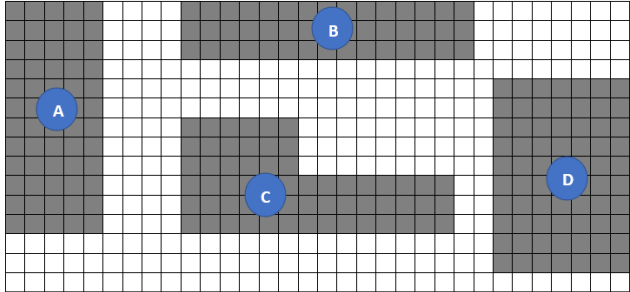
Los estudiantes debían comprender el carácter unidimensional del perímetro, el cual se obtiene al sumar sus dimensiones unidimensionales. Al principio experimentaron un conflicto para hallar el perímetro de cada figura con los bordes de las regiones que eran compartidas, el cual se fue superando con las intervenciones del maestro-investigador. Los estudiantes lograron así comprender el carácter unidimensional del perímetro.

4.1.2 Desarrollo del Concepto de Perímetro y Área

Para iniciar esta segunda parte, se anexó el segundo diseño sobre perímetro y área a la carpeta que tenían los estudiantes, este diseño constaba de 4 situaciones con varias tareas en cada una. Durante la implementación de este diseño también se hizo uso constante del computador y del televisor del salón de clase, como apoyo para mostrar las actividades, las imágenes correspondientes a cada situación y las tareas a realizar. Las tres primeras situaciones de este segundo diseño se desarrollaron en el salón de clases, y la última situación se desarrolló en la huerta del colegio.

Se les mostró en el televisor la primera tarea del segundo diseño, y se les pidió a los estudiantes comparar las áreas de las figuras usando los adjetivos y las estructuras gramaticales correspondientes a los comparativos y superlativos. Los estudiantes debieron hallar primeramente el área de cada una de las huertas en términos del número de unidades que recubren la superficie, para así poder hacer las respectivas comparaciones. En la siguiente tabla se muestran las figuras que representan las huertas, las consignas, el lenguaje del y para el aprendizaje, y finalmente algunas producciones de los estudiantes.

Tabla 10. Comparación de Áreas. El Área como número de Unidades que recubren la Superficie (D2S1T1-2-3)

Situación	Enunciado de la tarea	
D2S1T1-2-3		• Which garden has the greatest surface to grow vegetables? Why? Explain your answer. • Which garden has the smallest surface to grow vegetables? Why? Explain your answer.
Lenguaje del Aprendizaje y para el Aprendizaje		
1. Use the following adjectives and grammar structures to compare the surface of the gardens above. Use any of these adjectives to compare the surfaces: • Great • Small Use any of these grammar structures: • Much _____ than • less _____ than • not as _____ as • as _____ as • Garden A is _____ Garden B. • Garden A is _____ Garden C. • Garden A is _____ Garden D. • Garden B is _____ Garden C. • Garden B is _____ Garden D. • Garden C is _____ Garden D.		
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje	

E4	- Garden A is <u>little greater than</u> Garden B. - Garden A is <u>as equal as</u> Garden C. - Garden A is <u>little smaller than</u> Garden D. - Garden B is <u>much smaller than</u> Garden C. - Garden B is <u>less smaller than</u> Garden D. - Garden C is <u>little smaller than</u> Garden D. 2. Which garden has the greatest surface to grow vegetables? Why? Explain your answer. Garden <u>D</u> has the <u>greatest surface</u> of all because <u>it has 70 units</u> 3. Which garden has the smallest surface to grow vegetables? Why? Explain your answer. Garden <u>B</u> has the <u>smallest surface</u> of all because <u>it has 45 units</u>
E8	https://drive.google.com/file/d/1pmHMmObcCnQDTqjmC2I3po9eZyUSYpCK/view?usp=sharing
E9	https://drive.google.com/file/d/1xQ2rihaglggk3UnhTQMJOJNdArcEVNd0/view?usp=sharing

Los estudiantes tuvieron que enfrentarse al conteo de las unidades de medida que recubrían cada figura, y de esta manera se planteó la necesidad de buscar métodos alternativos de medición. Algunos estudiantes encontraron procedimientos numéricos como conteos repetidos y como el producto de las dos unidades unidimensionales. El siguiente fragmento muestra el procedimiento alternativo al conteo que realizó el estudiante E9:

Mi: How many units? Did you count the units?

E9: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60

Mi: it has sixty units. What about Garden B, how many units does it have?

E9: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45.

Mi: forty-five units. So, Garden A is greater.

La estudiante E8 encontró el procedimiento numérico de hallar el producto de las dos unidades unidimensionales de los rectángulos. En el siguiente fragmento se describe el procedimiento que utilizó para hallar el área de la figura A:

Mi: and the area is?

E9: 60

Mi: why?

E9: because twelve multiplied by five is sixty.

Al hallar el área de cada huerta representada en esta figura, los estudiantes trabajaron en el área como la cantidad de plano ocupado por la superficie, y en la disociación entre el área y la forma de la superficie al comparar la huerta A con la huerta C que tenían distinta forma, pero igual área, y en romper la creencia que tienen los niños que, una figura más larga tiene mayor área, al fijarse en una única dimensión. Tal fue el caso de la figura B que, al ser más larga, el estudiante E9 supuso al inicio que su área era mayor que la de la figura A.

Tal cual sucedió en el primer diseño, la presentación del lenguaje del y para el aprendizaje fue fundamental para el desarrollo de esta tarea. Los estudiantes usaron los comparativos y superlativos con los adjetivos propias de la comparación de superficies para resolver la tarea.

En las tres tareas siguientes D2S1T4-5-6, se pretende que los estudiantes disocien entre el área y la forma de la superficie, y superen la creencia de que el área de una figura depende de la medida de sus lados o su perímetro. La siguiente figura contiene las preguntas que conducen al objetivo planteado en esta situación.

Tabla 11. *Disociación entre el Área y la Forma de la Superficie (D2S1T4-5-6)*

Situación	Enunciado de la tarea
D2S1T4-5-6	- Which garden, the garden with the greatest surface or the garden with the smallest surface, need more bamboo sticks to be enclosed? Explain your findings. - Which gardens have the same surface or area to grow vegetables? Do these two gardens with the same surface also need the same length of bamboo sticks to be enclosed? Explain. Write True or False and explain your answer. - The garden with the greatest area also has the longest perimeter - The garden with the smallest area also has the shortest perimeter
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje

E1

4. Which garden, the garden with the greatest surface or the garden with the smallest surface, need more bamboo sticks to be enclosed? Explain your findings. B
needs more bamboo stick to
be enclosed than D because
B have 36 units and D 34
units
5. Which gardens have the same surface or area to grow vegetables?
 Garden A and garden C.
- a) Do these two gardens with the same surface also need the same length of bamboo sticks to be enclosed? Explain. C need bamboo more
sticks to be enclosed.
6. Write True or False and explain your answer.
- a) Does the garden with the greatest area also have the longest perimeter? false
 Because garden D is the biggest
area and also is dosent bigger
perimeter.
- b) Does the garden with the smallest area also have the shortest perimeter? False
 Because garden B is the smallest
area and perimetet.

E4	4. Which garden, the garden with the greatest surface or the garden with the smallest surface, need more bamboo sticks to be enclosed? Explain your findings. _____ <i>Garden B needs more bamboo sticks because it has 36 of perimeter.</i> 5. Which gardens have the same surface or area to grow vegetables? Garden <u>A</u> and garden <u>C</u>. a) Do these two gardens with the same surface also need the same length of bamboo sticks to be enclosed? Explain. <i>no because garden A has the smallest perimeter and garden C has the greatest.</i> 6. Write True or False and explain your answer. a) Does the garden with the greatest area also have the longest perimeter? <u>no</u> Because <i>there are have the same perimeter with 34 it is the small perimeter</i> b) Does the garden with the smallest area also have the shortest perimeter? <u>no</u> Because <i>it is different perimeter, it have 45 of surface and 36 of perimeter</i> https://drive.google.com/file/d/1adM8K2zsSuKVtkIip3sCmEKhdyIoDBPu/view?usp=sharing
E3	https://drive.google.com/file/d/1QVo7G5gVSmsaXPIVOYOv_9IFkFoxDwMq/view?usp=sharing

En esta tarea, los estudiantes debían medir el área de cada huerta a la vez que su perímetro para así lograr disociar entre el área y el perímetro. En la pregunta 4 de la tarea los estudiantes debían encontrar si la huerta con la mayor cantidad de área también tenía mayor perímetro, lo cual requirió la ejecución de procedimientos numéricos de conteos, de sumas y de multiplicaciones. Todos los estudiantes observados hallaron que la huerta B que tenía menor cantidad de área era la que tenía un mayor perímetro que la huerta D que tenía mayor área.

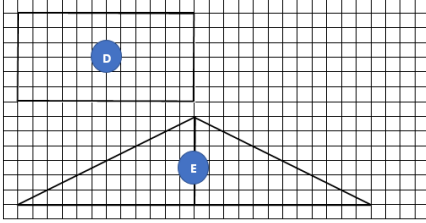
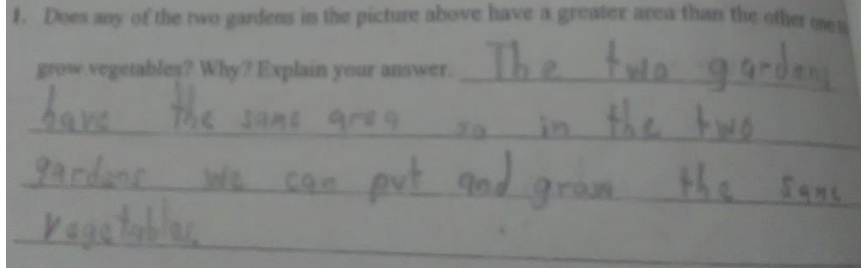
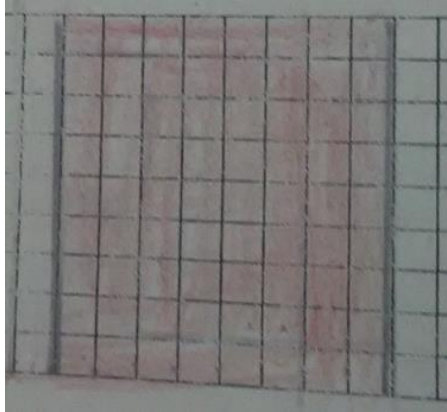
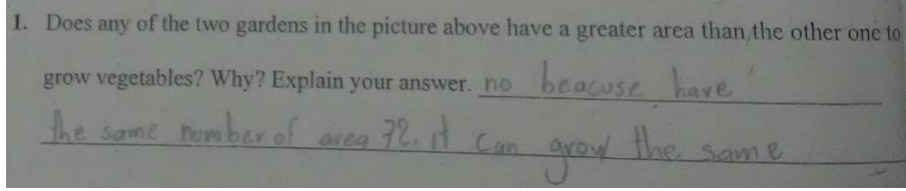
En la pregunta 5 de la tarea los estudiantes debían encontrar si las dos huertas con la misma área también tenían necesitaban la misma cantidad de guaduas para poder encerrarlas, es decir, si también tenían el mismo perímetro. Los estudiantes hallaron que no necesariamente se tenía el mismo perímetro aún cuando se tenga la misma área.

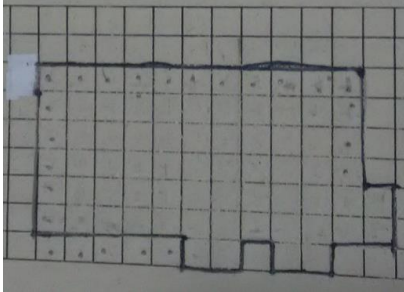
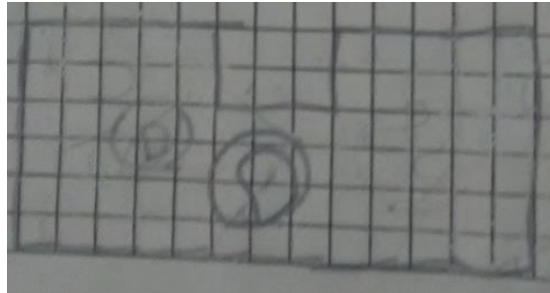
Y la pregunta 6 de la tarea, los estudiantes debían explicar si a mayor cantidad de área, también se tenía mayor perímetro, y si a menor cantidad de área también se tenía menor cantidad de perímetro. Los estudiantes expresaron en sus respuestas que el área no era dependiente del perímetro.

Una de las dificultades encontradas durante el desarrollo de esta tarea, sucedió cuando algunos estudiantes midieron el perímetro usando unidades cuadradas, no comprendiendo en un inicio, la medida de la longitud como una unidad unidimensional.

La siguiente tarea D2S2 tenía como objetivo la disociación entre el área y la forma de la superficie, y razonar sobre las propiedades de la conservación del área: propiedad aditiva, propiedad de invarianza, propiedad de la unidad, y propiedad de la disección. En la primera tarea los estudiantes deben usar la propiedad de la adición y la propiedad de la unidad para recomponer las regiones y formar unidades cuadradas. En la siguiente tabla se muestran el enunciado y las imágenes de la tarea.

Tabla 12. *Conservación del Área. Descomposición de la Superficie con Procedimientos**Geométricos (D2S2)*

Situación	Enunciado de la tarea	
D2S2		• Does any of the two gardens in the picture above have a greater area than the other one to grow vegetables? Why? Explain your answer. • Draw the same garden as garden D but with the different shape. Make sure you keep the same number of square units.
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje	
E3	 	https://drive.google.com/file/d/1_vJDcO47i0ZNI4jXwJ6mXu70f_0ao0rK/view?usp=sharing
E4		

	 https://drive.google.com/file/d/1_jeIWS5iP_e56ZGW_t-UqgZZ-MAPkiW_/view?usp=sharing
E5	1. Does any of the two gardens in the picture above have a greater area than the other one to grow vegetables? Why? Explain your answer. <i>yes because they have the same area to grow vegetables. I have 72 and E have 72</i>  https://drive.google.com/file/d/19N3AI3WknchwxNXXKH_yoEjGF-DsQDNT/view?usp=sharing

Los estudiantes utilizaron procedimientos geométricos de descomposición conveniente de la superficie E para formar unidades cuadradas y así encontrar la cantidad de estas unidades que recubren la superficie. La estudiante E2 en una participación en el aula de clase logró encontrar y explicar a sus compañeros que la figura triangular E podía recomponerse a través de procedimientos geométricos y quedar igual que la figura D, y que por lo tanto ambas figuras tendrían la misma área.

Los estudiantes lograron a través de procedimientos geométricos y de conteos encontrar que el área es independiente de la forma.

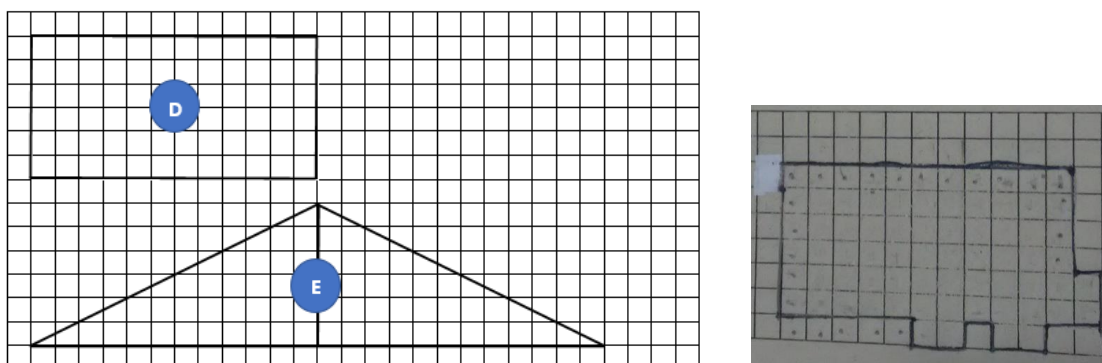


Figura 38. Huerta en forma de elefante creada por la estudiante E4 de igual área que las huertas D y E.

Las producciones discursivas de los estudiantes contaron con el vocabulario y las estructuras gramaticales apropiadas para expresar el conocimiento matemático adquirido. Se evidenció fluidez y precisión para comunicarse dentro de este contexto y dentro de esta tarea matemática.

En la siguiente tarea se pretendió nuevamente que los estudiantes generaran estrategias de procedimientos numéricos para hallar el área de una figura, que los estudiantes comprendieran el área como la cantidad de plano ocupado por la superficie, y que los estudiantes superaran la creencia que existe de que, el área de una figura depende de la medida de sus lados o su perímetro. Las preguntas se siguieron contextualizando en la huerta y se les preguntó a los estudiantes cuál de las huertas tenía más área para cultivar vegetales y cuál de las huertas necesitaría de más palos de guadua para ser encerrada. En esta tarea, la figura con mayor área F tiene menor perímetro y la figura con mayor perímetro G tiene menor área. En la siguiente tabla se muestran las preguntas, la imagen y las producciones de algunos estudiantes.

Tabla 13. Disociación del Área del Perímetro (D2S3)

Situación	Enunciado de la tarea
D2S3	Look at these two gardens and answer the questions below. - In which garden can more vegetables be grown? Why? Explain your answer. - Which garden needs more bamboo sticks to enclose it? Why? Explain your answer. - Do you think that the garden which has a greater area to grow vegetables, also needs more bamboo sticks to enclose it? Explain your answer.
Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
E7	1. In which garden can more vegetables be grown? Why? Explain your answer. <i>In the garden F because have 96 units and garden G have 80 units.</i> 2. Which garden needs more bamboo sticks to enclose it? Why? Explain your answer. <i>The garden G because it needs 48 Bamboo stick to be enclose and the garden F need 40.</i> 3. Do you think that the garden which has a greater area to grow vegetables, also needs more bamboo sticks to enclose it? Explain your answer. <i>The garden G need more bambo sticks to be enclosed because have more sides if a figure has the greater area it has not mind and it have the greater perimeter.</i>

E8	1. In which garden can more vegetables be grown? Why? Explain your answer. <u>In the garden F because have 46 units and garden G have 80 units</u> 2. Which garden needs more bamboo sticks to enclose it? Why? Explain your answer. <u>the garden G because it need 48 bamboo stick to be enclosed and the garden F need 40.</u> 3. Do you think that the garden which has a greater area to grow vegetables, also needs more bamboo sticks to enclose it? Explain your answer. <u>The garden G need more bamboo sticks to be enclosed because have more sides</u>
E2	https://drive.google.com/file/d/1g1mVI2EL28A5wQsP8j8HvJQfUoUT8A5w/view?usp=sharing
E1 and E2	https://drive.google.com/file/d/1NaJd0e3sMUxmf6FEC7guA4uAHp0eHin8/view?usp=sharing

En el primer punto de esta tarea, los estudiantes debían con procedimientos numéricos hallar el área de cada una de las huertas y responder cual tenía mayor área para cultivar verduras. Los estudiantes encontraron el área de manera apropiada a través de conteos uno a uno, de conteos repetidos y del uso de la multiplicación de las longitudes unidimensionales.

En el segundo punto de esta tarea, los estudiantes debían hallar el perímetro de cada figura bordeándolas y contando las unidades unidimensionales. Los estudiantes lograron hallar el perímetro de cada huerta de manera apropiada. Una vez más la pregunta planteada estaba ligada al contexto de la huerta y preguntaba por la longitud de guaduas necesarias para encerrar cada huerta. Los estudiantes respondieron dentro de este contexto afirmando que la huerta G requería una mayor longitud de guaduas para poder encerrarla.

En la pregunta tres de esta tarea, los estudiantes deben dar sus argumentos respecto a que la huerta con mayor área no necesariamente tiene el mayor perímetro, a lo cual todos responden de manera correcta.

La siguiente situación D2S4 tiene dos tareas, y se llevaron a cabo nuevamente en la huerta. El objetivo de la primera tarea fue la de concebir el área como el número de unidades que recubren la superficie, y para este fin se dio a los estudiantes las siete piezas del Tangram en cartulina de manera que, a través de procedimientos geométricos, compusieran el área de la huerta con un número finito de regiones, y de esta manera pudieran comprender que el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.

Para el desarrollo de esta tarea la huerta fue dividida en dos partes, y solo se utilizó el área 1 la cual se preparó de antemano teniendo en cuenta que el largo fuera dos veces su ancho, de manera que las siete piezas del Tangram fueran suficientes para recubrir esta superficie en forma rectangular. Los estudiantes fueron a la huerta y recubrieron el área 1 de la superficie de la huerta con las 7 piezas del Tangram, y la forma que debían hacer era un rectángulo. Estos recubrimientos en papel les dieron a los estudiantes la posibilidad de manipular, de trasladar, y de girar las piezas.

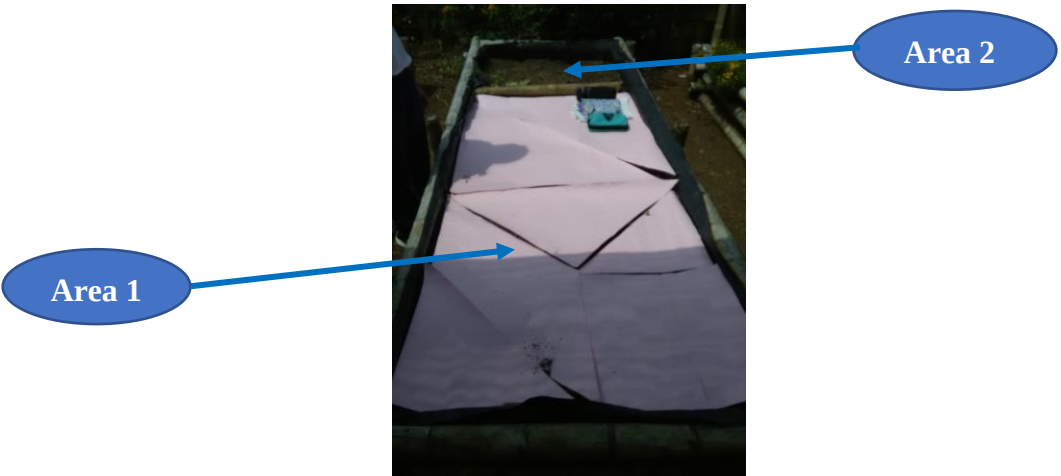
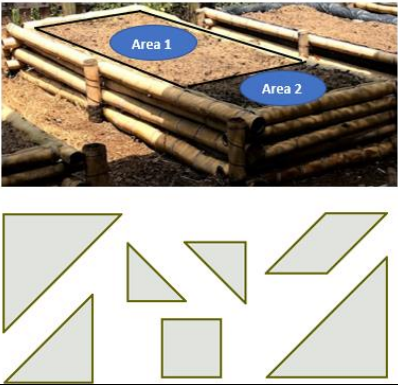


Figura 39. Recubrimiento del Área 1 de la Huerta realizado por un grupo de estudiantes.

En la siguiente tabla se muestran las piezas del Tangram, la huerta dividida en dos áreas, las consignas de la tarea, las imágenes de los recubrimientos del área 1 realizados por algunos grupos, y un video que muestra los procedimientos geométricos realizados por los estudiantes para realizar el recubrimiento de la superficie.

Tabla 14. Recubrimiento de la Superficie por procedimientos geométricos (D2S4T1)

Situación	Enunciado de la tarea	
D2S4T1		The teacher is going to give you seven pieces to cover the “Area 1” of the surface of the school garden like shown in the picture below. Go to the school garden and try to cover that surface with all the pieces without overlapping them.

Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje
Gr1	
Gr2	
Gr3	
Gr1,2,3,4	https://drive.google.com/file/d/1RsVseH9kbru_y_EKJOEDKMYPPYJU6b65/view?usp=sharing

Los estudiantes trabajaron en la huerta haciendo recubrimientos de la superficie utilizando procedimientos geométricos para componer el área 1. Los estudiantes realizaron rotaciones,

traslaciones, y reflexiones de las piezas para lograr recubrir la superficie. La tarea fue bien lograda por todos los estudiantes quienes tardaron alrededor de 20 minutos en resolverla.

La siguiente tarea D2S4T2 tiene como objetivo observar si los estudiantes comprenden que, si una superficie puede ser diseccionada en varias partes y esas partes reorganizadas para formar otra superficie, entonces las dos regiones tienen la misma área. Los estudiantes deben usar las mismas siete piezas del Tangram y formar una huerta de forma cuadrada en el suelo. Una vez han realizado el cuadrado deben contestar la pregunta si las dos huertas tienen la misma área o si creen que algún área es mayor que la otra. Los estudiantes deben dibujar las piezas del Tangram dentro del cuadrado que se les entrega en el diseño.

En la siguiente tabla se encuentran los enunciados de la tarea, se muestran las piezas del Tangram organizadas en forma de cuadrado realizados por algunos grupos, y un video que muestra los procedimientos geométricos realizados por los estudiantes para componer de nuevo el área de la huerta en forma de cuadrado.

Tabla 15. *Conservación del Área (D2S4T2)*

Situación	Enunciado de la tarea
D2S4T2	- Now, use the same seven pieces given by the teacher and make on the floor a garden in the shape of a square. Draw what your garden looks like in the grid below. - Do both gardens, the “Area 1” of the school garden, and the design of the garden in the shape of a square you made on the floor, have the same area to grow vegetables? Is any greater than the other one? Why? Explain your answer.

Estudiante / Grupo	Producción / Lenguaje a través del Aprendizaje	
Gr1		
Gr2		
Gr3		
Gr1,2,3,4	https://drive.google.com/file/d/1WyMQteWT3RwtfqOurLsimsZq1eK5mj0O/view?usp=sharing	

Esta tarea tenía distintos objetivos, como la disociación entre el área y la forma de la superficie, la conservación del área, el romper con la creencia de que una figura más larga tiene mayor área al fijarse en una única dimensión, el procedimiento geométrico de rotación, reflexión y traslación de las piezas para componer una superficie.

Observar a través de procedimientos geométricos, si al descomponer la región de la huerta en un número finito de regiones, los estudiantes comprenden que el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.

Observar si los estudiantes comprenden que, si una huerta puede ser diseccionada en varias partes y esas partes reorganizadas para formar otra huerta, entonces las dos regiones tienen la misma área.

Los estudiantes tardaron alrededor de 30 minutos en encontrar la forma de hacer un cuadrado con las mismas piezas que usaron para recubrir la superficie rectangular de la huerta, y todos concluyeron que, la reorganización de la huerta en una forma distinta no alteró su área.

4.2 ANÁLISIS RETROSPECTIVO

Una vez terminadas las intervenciones en la huerta del colegio y en el aula de clase, y de realizados los análisis locales, se inició el análisis retrospectivo. Se observaron los procesos de construcción de las nociones de longitud y perímetro, luego se percibieron los procesos de construcción del área y su independencia del perímetro, se observó el uso de instrumentos de medida a lo largo de las tareas de medición de longitudes y superficies, se observó el contexto de la huerta como lugar de aprendizaje, y también los aspectos del lenguaje que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del discurso matemático. Estos análisis aportaron elementos para dar respuesta al objetivo general de la investigación: *“Analizar los alcances de la implementación de un diseño basado en la metodología CLIL, que integra la enseñanza de las nociones de perímetro y área con el desarrollo de la competencia comunicativa en inglés, en el contexto de la huerta escolar con estudiantes bilingües del grado cuarto de primaria.”*

Las tareas sobre longitud, perímetro y área partieron del contexto de la huerta del colegio lo que le permitió en todo momento al estudiante encontrar relaciones interdisciplinarias con otras áreas del conocimiento y con la vida misma. Las actividades combinaron lo experiencial con el trabajo en el aula de clase, los estudiantes tuvieron una exigencia tanto en el aprendizaje

matemático, como en el aprendizaje del inglés a través del conocimiento aprendido. En todo momento debían dar razón de sus aprendizajes en la lengua vehicular que era el inglés. El análisis constante de los hallazgos durante la implementación permitió ir ajustando la trayectoria en sus consignas, y en los elementos del lenguaje que debían ser más explícitos en el diseño para que el andamiaje discursivo estuviera mejor fundamentado.

La mirada sobre la huerta escolar permitió evidenciar que sí cumplió su función de contexto significativo tanto para el aprendizaje de las nociones de perímetro y área, como para el aprendizaje del lenguaje necesario para elaborar el discurso matemático. La huerta como contexto de enseñanza sí respondió a la pregunta sobre la importancia de este concepto matemático abordado con la vida y con la cultura, permitiendo abordar las nociones de perímetro y área desde donde surgieron históricamente. Los estudiantes reconstruyeron el proceso de medir longitudes, perímetros y áreas desde este lugar, a través de estimaciones y mediciones antropométricas, a través de varas de medir, a través de recubrimientos reales de la superficie, y avanzaron en el conocimiento matemático a través de la resolución de situaciones problema donde pusieron en juego estrategias numéricas y geométricas de resolución, como también el uso de la fracción de la unidad para completar mediciones donde la unidad no fue suficiente.

Se tuvo una mirada sobre la construcción de la magnitud longitud, la cual se atendió a través de observaciones y comparaciones de las magnitudes concretas del largo, ancho y altura de la huerta. Las primeras observaciones de esta magnitud se realizaron, como lo afirma Freudenthal, a través del uso de parejas de adjetivos, y del uso de comparativos y superlativos, lo que requirió un esfuerzo importante en la enseñanza de este vocabulario y estructuras gramaticales en inglés a los estudiantes de manera que lograran alcanzar el objetivo matemático planteado. Se transitó por el uso de estimación y medición con unidades de medida

antropométricas, luego con varas de medir, y luego con unidades unidimensionales de la cuadrícula. Esta medición de longitudes con instrumentos antropométricos y con varas de medir llevó a los estudiantes al uso de fracciones para poder capturar la longitud total del objeto que se media. Una vez la medición de longitudes estaba abordada en el diseño se procedió a la medición del perímetro de la huerta y a abordar la conservación e invariancia de la longitud bajo deformaciones o flexiones. La actividad experimental les permitió a los estudiantes la manipulación del instrumento y el objeto a medir y a poder concluir que, sin importar el cambio de forma, la longitud, o en este caso el perímetro permaneció igual, algunos estudiantes realizaron con la cuerda de medir objetos en forma de arco, lo que permitió analizar una vez más que en el enderezamiento del objeto no se sufren acortamientos o alargamientos. Se abordó el carácter unidimensional del perímetro, para luego abordar el carácter bidimensional del área

La mirada sobre la trayectoria fue avanzando al concepto de área planteado en el segundo diseño, donde se inicia con el área como cantidad de plano ocupado y como el número de unidades que recubren la superficie. Los estudiantes debieron enfrentarse a los conteos uno a uno y así lograron generar estrategias de conteo repetido y de producto de dos medidas unidimensionales. El hallar el área fue esencial para que lograran comparar las áreas y hallar que el área es independiente de la superficie. Luego de abordar el uso de procedimientos numéricos, se observó el uso de procedimientos geométricos para recomponer regiones para así hallar y poder comparar su área. Se realizó una mirada a la independencia entre el área y el perímetro, para observar procedimientos geométricos de recubrimientos de superficie, y de recomposición de un área y la recomposición del área.

Durante la mirada realizada a las nociones de longitud, perímetro y área, se abordó de igual manera el lenguaje de aprendizaje, el cual es la lengua que los estudiantes necesitaron para

acceder al contenido, como las palabras clave, las estructuras gramaticales, la pronunciación de las palabras; se abordó el lenguaje para el aprendizaje, el cual es el tipo de lenguaje que los estudiantes necesitaron para llevar a cabo las tareas en el salón de clases y en el contexto de la huerta; y también se abordó el lenguaje a través del aprendizaje durante los diálogos con los estudiantes para determinar sus aprendizajes. Durante las producciones orales y escritas de los estudiantes en la lengua extranjera, se evidenció que los estudiantes lograban utilizar el lenguaje del y para el aprendizaje propuesto en los diseños, y a su vez utilizaban conocimientos matemáticos, vocabulario y expresiones lingüísticas utilizadas en clases anteriores.

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta investigación se comprobó que la enseñanza de las magnitudes longitud y superficie deberán privilegiar siempre la experimentación y la acción en contextos reales, pues es en estos escenarios que los estudiantes podrán desarrollar habilidades matemáticas como la comparación, la percepción, la estimación, la manipulación de los objetos a ser medidos y de los instrumentos de medida, y la medición a través de la iteración de la unidad y a través del uso de fracciones de unidad. Fue a través de la manipulación del perímetro de la huerta que, los estudiantes lograron captar la propiedad de la invariancia de la longitud bajo flexiones o deformaciones, también fue a través de la medición directa de las longitudes que los estudiantes se enfrentaron y resolvieron los problemas de la medición incorporando el uso de fracciones de unidad, fue también a través de los recubrimientos directos de la superficie de la huerta y la reorganización de las regiones de la superficie en otra forma que, los estudiantes pudieron igualmente captar la propiedad de la conservación del área. El contexto de la huerta escolar les permitió definitivamente a los estudiantes reinventar bajo la guía del maestro-investigador las magnitudes de longitud y superficie y sus medidas.

Las intervenciones del maestro-investigador con los estudiantes, y el trabajo grupal entre estudiantes fueron igualmente esenciales para que ellos alcanzaran el conocimiento matemático y el desarrollo discursivo en la lengua vehicular que se esperaba. Estas interacciones constantes entre todos los participantes de la investigación bajo el contexto de la huerta fueron fundamentales en la generación de aprendizaje matemático y de nuevo lenguaje confirmando así los postulados de la Educación Matemática Realista de Freudenthal y de la metodología CLIL sobre el aprendizaje como un acto social, de la importancia de conexión con el contexto, y de la

necesidad de trabajar con grupos heterogéneos para beneficiarse de los distintos niveles de comprensión.

La trayectoria seguida en este experimento de enseñanza también permitió concluir que, para el aprendizaje de las nociones de las magnitudes de longitud y superficie y sus medidas en la básica primaria como lo afirma Corberan, se debe iniciar con la observación y la comparación visual y directa de las longitudes y superficies en el mundo real, se deben privilegiar las estimaciones, la iteración de la unidad de medida, el uso de unidades no estandarizadas para recubrir superficies, el uso de lo icónico para la disociación entre perímetro y área, para luego sí pasar al uso de medidas estandarizadas. De igual manera, se debe privilegiar la descomposición y la recomposición de la superficie, los recubrimientos o pavimentaciones del plano ocupados por la superficie mediante procedimientos geométricos como numéricos, y la disociación del área de una superficie de su forma.

También se concluye que el uso de imágenes fue fundamental para el abandono de la intuición “a mayor perímetro-mayor área”. El proporcionar a los estudiantes figuras las cuales estaban conectadas al contexto de la huerta, llevarlos al uso de estrategias numéricas y geométricas para hallar sus perímetros y sus áreas, les permitió descubrir, visualizar y reflexionar sobre esta relación. La concavidad de una de las figuras también fue útil para permitirles visualizar que, aunque la concavidad aumenta el perímetro, su área se disminuye, y de igual manera la visualización de imágenes con la misma área y distinto perímetro ayudó también a la disociación de estos dos conceptos.

Este experimento confirma también la metodología CLIL como recurso apropiado para la enseñanza de las magnitudes de longitud y superficie y su medida, y se generaliza a la enseñanza

de las matemáticas a través de una lengua extranjera. La implementación del lenguaje de aprendizaje, para el aprendizaje, y a través del aprendizaje como lo propone Coyle, fue fundamental para el desarrollo del discurso matemático en los estudiantes. Los estudiantes hicieron uso del lenguaje requerido para cada tarea, y en las actuaciones discursivas con el maestro-investigador y con su constante intervención, lograron comunicar apropiadamente sus ideas matemáticas en la nueva lengua.

Como lo afirmó Moschkovich, este experimento también confirmó que, la participación de los estudiantes a través de diversas intervenciones orales y escritas para explicar procesos, describir conjeturas, proveer conclusiones, presentar argumentaciones, construir significados, relacionar datos, sacar ideas centrales, deducir conclusiones, fue fundamental para el alcance de la competencia matemática. Gracias a las intervenciones del lenguaje incluidas en los diseños, los estudiantes tuvieron mayores recursos lingüísticos al momento de sus intervenciones orales y escritas.

El enfoque discursivo y la perspectiva sociocultural que enmarcaron esta investigación encauzaron apropiadamente el manejo de los errores y deficiencias lingüísticas de los estudiantes. Se concluye que el permitir a los estudiantes utilizar sus recursos discursivos y aún en el uso de ambas lenguas, la nativa y el inglés como lengua extranjera en el desarrollo del discurso matemático les permitieron alcanzar los aprendizajes esperados. El haberse enfocado en el vocabulario, la corrección gramatical, o la pronunciación hubiese desviado el enfoque de lo discursivo que es donde realmente ocurrió el aprendizaje. Se recomienda como se evidenció en esta investigación que, las correcciones de vocabulario, de estructuras gramaticales y de pronunciación se realicen mientras ocurre el discurso oral sin coartarlo, y que la intervención en el discurso escrito se realice durante o a través de retroalimentaciones posteriores.

El fenómeno de cambio de código o “code switching” ocurrió naturalmente durante las intervenciones de los estudiantes, especialmente cuando interactuaban entre ellos. Al ser el maestro-investigador el referente lingüístico inmediato, los estudiantes hacía un mayor uso de la lengua extranjera en las intervenciones con él. Este fenómeno no afectó, sino que, al contrario, fomentó el desarrollo de los aprendizajes pues eliminó la abstención a la participación que podría suceder bajo un enfoque de prohibición de uso de la lengua nativa. Se recomienda fomentar la participación oral de todos los estudiantes con el maestro de manera que se desarrolle el discurso oral en la nueva lengua de forma apropiada.

En conclusión, la articulación del enfoque metodológico CLIL con el enfoque discursivo y sociocultural para la enseñanza de las matemáticas y de las lenguas, junto con la implementación de tareas de visualización inductiva en la enseñanza de las nociones de perímetro y área, favorecieron el aprendizaje de estas nociones matemáticas, al igual que favoreció el uso del inglés como lengua vehicular de enseñanza-aprendizaje. Este resultado es útil para la formación docente y para el desarrollo de investigaciones posteriores bajo esta línea de investigación.

REFERENCIAS

- Adoniou, M., & Qing, Y. (2014). Language, Mathematics and English Language Learners. *Australian Mathematics Teacher*, 70(3), 3-13.
- Ávila, A., & García, S. (2019). Relaciones entre área y perímetro: De la intuición inicial a la deducción operatoria. *Perfiles Educativos*, 42(167), 31-52.
<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2019.167.58890>
- Baker, C. (2006). *Foundations of bilingual education and bilingualism*. Multilingual Matters.
- Borjas, B. (2007). Lenguaje y pensamiento. *IESALC UNESCO*.
<https://scioteca.caf.com/handle/123456789/551>
- Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. 11.
- Chamorro, M. del C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=2960>
- Chamorro, M. del C., & Belmonte, J. M. (2000). *El Problema de la Medida. Didáctica de las Magnitudes Lineales*. Editorial Síntesis, S.A. <https://www.agapea.com/libros/El-problema-de-la-medida-Didactica-de-las-magnitudes-lineales-9788477380122-i.htm>
- Corberan, R. (1997). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* [Universitat de València]. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=9975>
- Coyle, D. (2005). Planning and Monitoring CLIL. *University of Nottingham*, 17.

- Coyle, D. (2015). Strengthening integrated learning: Towards a new era for pluriliteracies and intercultural learning. *Latin American Journal of Content & Language Integrated Learning*, 8(2), 84-103. <https://doi.org/10.5294/5915>
- Coyle, D., Hood, P., & Marsh, D. (2010). Content and language integrated learning. *Ernst Klett Sprachen*.
- Cummins, J. (1991). Interdependence of first- and second-language proficiency in bilingual children. En E. Bialystok (Ed.), *Language Processing in Bilingual Children* (1.^a ed., pp. 70-89). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511620652.006>
- D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 39-68.
- Darn, S. (2006). Content and Language Integrated Learning (CLIL): A European Overview. *Online Submission*.
- Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X>
- Georgiou, I., & Pavlou, P. (2011). *Guidelines for CLIL Implementation in Primary and Pre-primary Education*. Socrates.
- Guadaño, E. B. (2004). *Lenguaje, Comunicación y Cognición: Temas Básicos*.
https://www.academia.edu/8595232/LENGUAJE_COMUNICACION_Y_COGNICION_TEMAS_BASICOS

- Jäppinen, A.-K. (2005). Thinking and Content Learning of Mathematics and Science as Cognitive Development in Content and Language Integrated Learning (CLIL): Teaching Through a Foreign Language in Finland. *Language and Education*, 19(2), 147-168. <https://doi.org/10.1080/09500780508668671>
- Los idiomas más hablados en el mundo*. (2021). Statista. <https://es.statista.com/estadisticas/635631/los-idiommas-mas-hablados-en-el-mundo/>
- Lucci, M. A. (2006). La Propuesta de Vygotsky: La Psicología Socio-Histórica. *Pontificia Universidade Católica de São Paulo*, 11.
- Marmolejo, G.-A., Sánchez, N., & Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 12(2), 1-14.
- MEN. (1998, junio). *Lineamientos curriculares—Ministerio de Educación Nacional de Colombia*. <https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares>
- MEN (Ed.). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (1. ed). Ministerio.
- Molina, J. D. G., Ramírez, Z. M. S., & Cano, R. A. L. (2013). Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café en estudiantes del grado 6º. *Revista Científica*, 258-262. <https://doi.org/10.14483/23448350.6556>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.-L., & Castro, E. (2011). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*.

- Moschkovich, J. (2002). A Situated and Sociocultural Perspective on Bilingual Mathematics Learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(2-3), 189-212.
https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023_5
- Moschkovich, J. (2007). Using Two Languages When Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64(2), 121-144. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9005-1>
- Perez, D. R. P. (2016). *CLIL as a strategy to fulfill mathematics content and language needs at primary levels: A case study at Aspaen Gimnasio los Corales*. 323.
- Pifarre, M., Sanuy, J., Huguet, A., & Vendrell, C. (2003). Rendimiento matemático en contextos bilingües: Análisis de la incidencia de algunas variables del contexto socio-educativo. <http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=007200330500>, 21, 183-199.
<https://doi.org/10.6018/rie.21.1.99161>
- Richards, J. C. (2006). *Communicative-Language Teaching Today.pdf*.
<https://docs.google.com/viewerng/viewer?url=http://www.professorjackrichards.com/wp-content/uploads/Richards-Communicative-Language.pdf>
- Rodríguez, L. (2011). *Establecimiento del Inglés como Lengua Franca*. 32.
- Rodríguez, M. (2011). CLILL: Colombia Leading into Content Language Learning. *Íkala, Revista de Lenguaje y Cultura*, 16(2), 79-89.
- Romberg, T. A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*, num 294, 323-406.
- Sandoval C., C. A. (1996). *Investigación cualitativa*.
<http://148.202.167.116:8080/xmlui/handle/123456789/2815>

- Santamaria, F. I. (2006). *La Contextualización de la Matemática en la Escuela Primaria de Holanda*. <https://docplayer.es/12979482-La-contextualizacion-de-la-matematica-en-la-escuela-primaria-de-holanda.html>
- Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (primera). Universidad del Valle.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (1996). The Role of Intuitive Rules in Science and Mathematics Education. *European Journal of Teacher Education - EUR J TEACH EDUC*, 19, 109-119. <https://doi.org/10.1080/0261976960190203>
- Surmont, J., Struys, E., Noort, M., & Craen, P. (2016). The effects of CLIL on mathematical content learning: A longitudinal study. *Studies in Second Language Learning and Teaching*, 6, 319. <https://doi.org/10.14746/ssllt.2016.6.2.7>
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). *El Uso Didáctico de Modelos en la Educación Matemática Realista: Un ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje*. 23.
- Vigotsky, L. S. (1978). *El desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. Editorial Crítica.
- Wilhelmer, N. (2008). *Content and Language Integrated Learning (CLIL): Teaching Mathematics in English*. VDM Verlag.
- Zapata, F. N. Z., & Cano, N. (2008). *La Enseñanza de la Magnitud Área*. 6.

ANEXOS

A. ANEXO 1. DISEÑO SOBRE LONGITUDES Y PERÍMETROS

ACTIVITY 1: EXPLORING LENGTH AND PERIMETER IN THE SCHOOL GARDEN

I. OBSERVING AND COMPARING THE LENGTH OF BAMBOO STICKS

To cultivate in the school garden, a place was designed using bamboo sticks like the ones in the picture. Letters were used to name each of the bamboo sticks in the garden.

1. Write the words **length**, **width**, and **height** in the corresponding line.



2. Compare the length of the bamboo sticks in the garden.

Use any of these adjectives to compare the lengths

• Short

• Long

Use any of these grammar structures:

• much _____ than

• a lot _____ than

• a little _____

• a bit _____

• less _____ than

• not as _____ as _____

• The _____-est

- Bamboo stick A is _____ Bamboo stick B.
- Bamboo stick A is _____ Bamboo stick C.
- Bamboo stick B is _____ Bamboo stick A.
- Bamboo stick B is _____ Bamboo stick C.
- Bamboo stick C is _____ Bamboo stick A.
- Bamboo stick C is _____ Bamboo stick B.
- Bamboo stick A is the _____ of all.
- Bamboo stick B is the _____ of all.

II. ESTIMATING AND MEASURING THE LENGTH OF THE BAMBOO STICKS USING PARTS OF OUR BODY

Use expressions like these ones:

- I could measure the ...
- I can maybe measure ...
- I could use ...

Parts of the body you might want to use:

Hand	Palm
Finger	Foot
Arm	Step

1. We can measure the length of each bamboo stick using our body parts. Which body parts could you better use to measure the length of each of the bamboo sticks?

Bamboo stick A. _____

Bamboo stick B. _____

Bamboo stick C. _____

2. Select one of your body parts and **estimate** the number of units “of that body part” you would need to measure the length of each bamboo stick. Do not get close to the bamboos and do not use your body parts to measure, just observe and estimate.

Use language expressions like these ones:

- 
- I could estimate it is about...
 - I think it is about...
 - I believe it is about...
 - I consider that it is about ...
 - In my opinion it is about...
 - It depends on...

a) Bamboo stick A. _____

b) Bamboo stick B. _____

c) Bamboo stick C. _____

3. Select one of your body parts and **measure** the length of each bamboo stick.

Use language expressions like this one: **It measures about**

a) Bamboo stick A. _____

b) Bamboo stick B. _____

c) Bamboo stick C. _____

Now, write the length of each one of the bamboo sticks.

Use language expressions like these ones:

- **It measures about / around...**
- **Units**
- **a half**
- **a fourth / two fourths / three fourths**
- **an eighth / three eighths / five eighths / seven eighths**

- Bamboo stick A is _____

- Bamboo stick B is _____

- Bamboo stick C is _____

IV. EXPLORING AND MEASURING THE PERIMETER OF THE GARDEN

Use a piece of string given by the teacher and use it to measure the distance around the bamboo walls. Cut the piece of string to have the exact length of the garden.



Use this vocabulary:

Balsa stick:  **1 unit**

Bamboo stick:  **the half of the unit**

popsicle sticks:  **the fourth part of the unit**

Plastic straws:  **the eighth part of the unit**

Use language expressions like these ones:

- Units
- a half
- a fourth / two fourths / three fourths
- an eighth / three eighths / five eighths / seven eighths

1. Use the materials given by the teacher and measure the length of the string. Complete the chart.

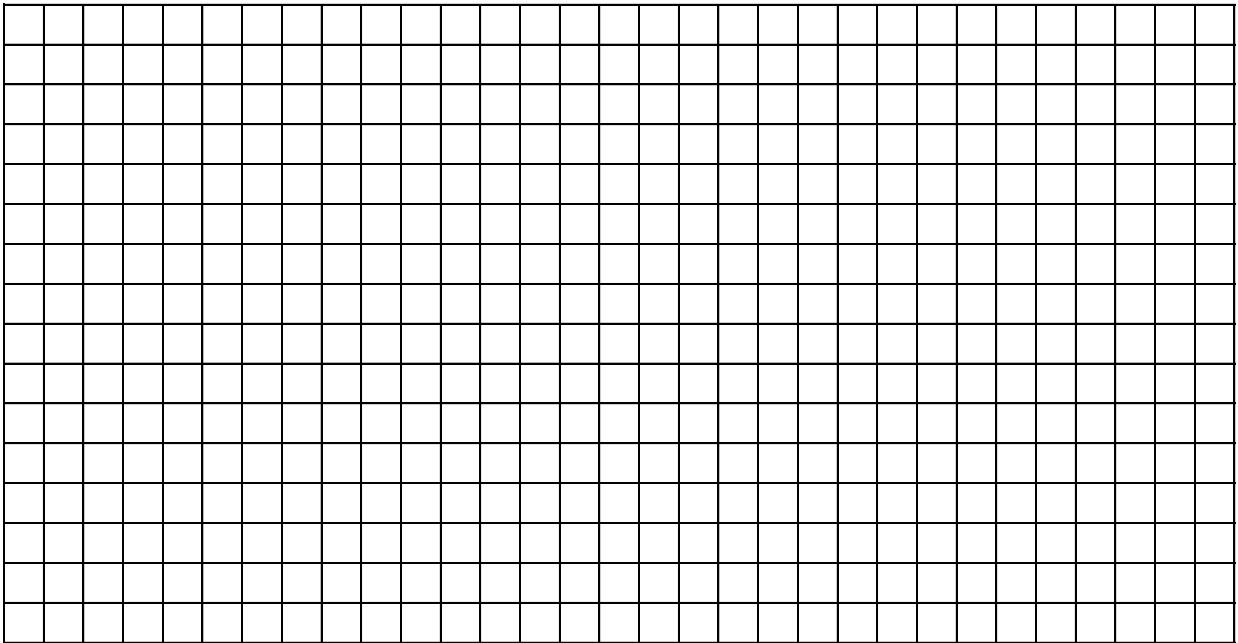
	Total number of units (Balsa sticks)	Total number of halves of the unit (Bamboo sticks)	Total number of fourth parts of the unit (popsicle sticks)	Total number of eighth parts of the unit (Plastic straws)
Length of the string				

How long is the string? The length of the string is _____

2. The length of the string you cut to measure the distance around the bamboo walls is the perimeter of the garden. Write a definition for **perimeter**.

Perimeter is _____
 _____.

3. Now, use the string to form on the ground, two different shapes. Draw the shapes here.



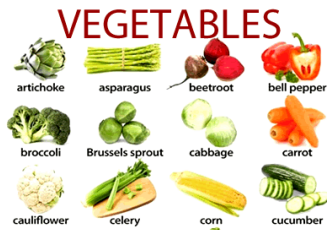
4. Write your comments about the perimeter of each of the shapes.

 _____.

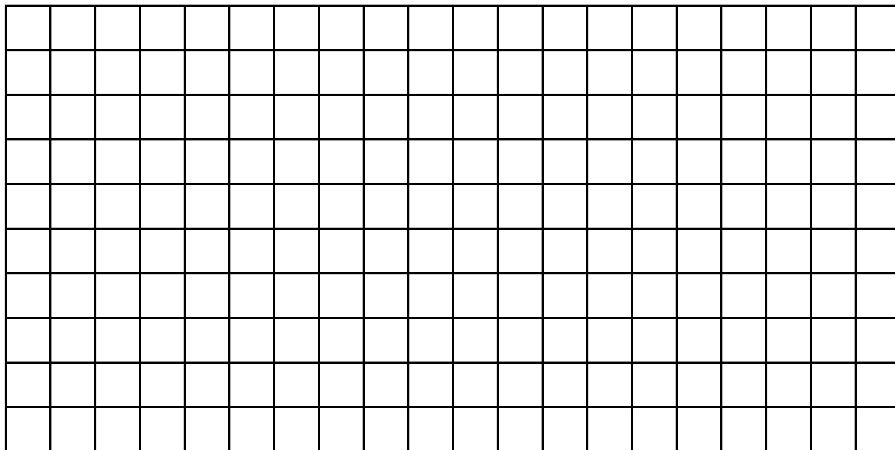
 _____.

V. SETTING THE GARDEN TO GROW VEGETABLES

We must make a design for the garden. The garden should be divided in different parts with the same perimeter to grow different kinds of vegetables in each one.

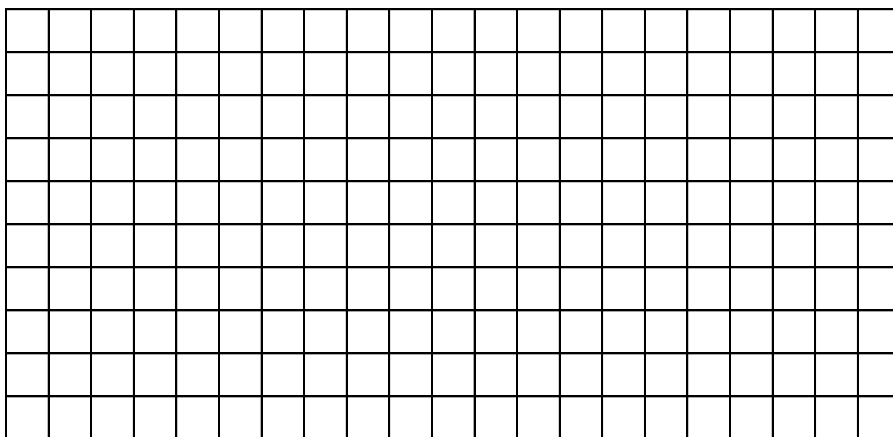


1. Divide the garden in two places which have the same perimeter each. Draw in the rectangle below, a design for what your garden might look like.



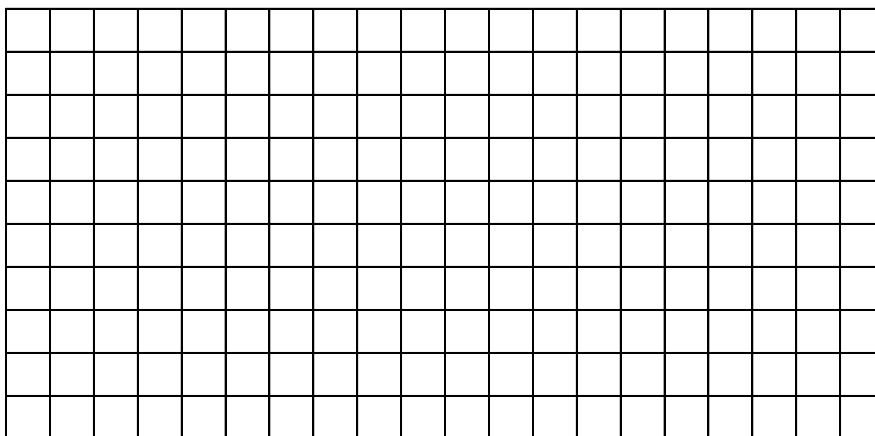
What is the perimeter of each place of the garden you made? _____

2. Divide the garden in three places which have the same perimeter each. Draw in the rectangle below, a design for what your garden might look like.



What is the perimeter of each place of the garden you made? _____

3. Now, divide the garden in four places which have the same perimeter each. Draw in the rectangle below, a design for what your garden might look like.



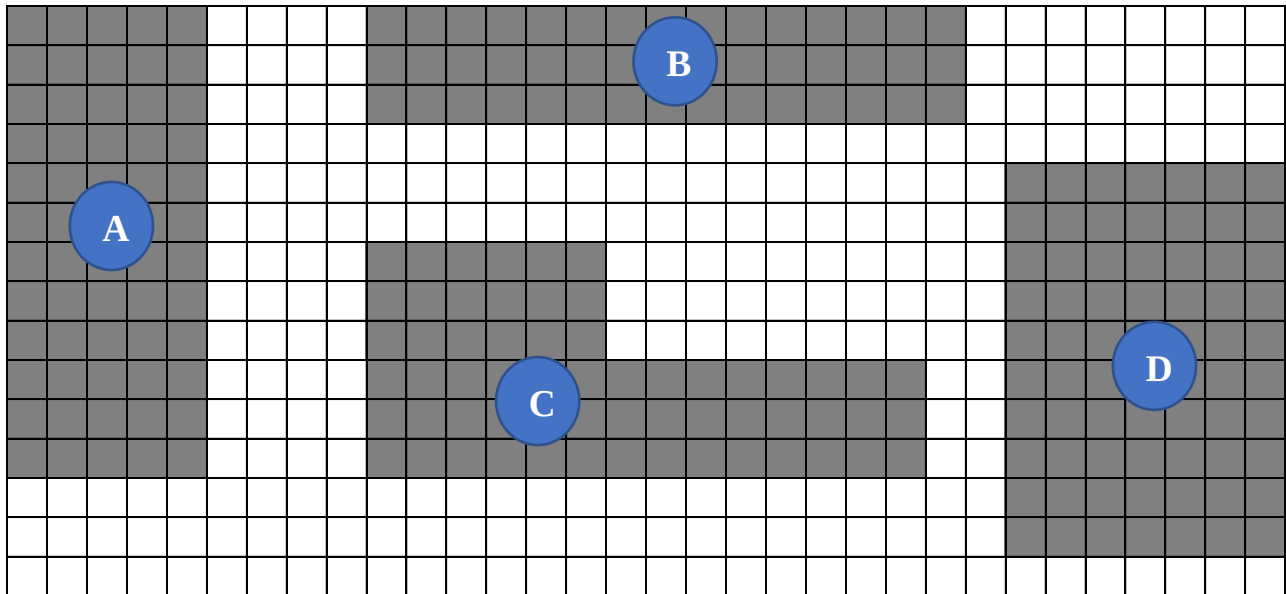
What is the perimeter of each place of the garden you made? _____

B. ANEXO 2. DISEÑO SOBRE PERIMETRO Y ÁREA

ACTIVITY 2: EXPLORING PERIMETER AND AREA IN THE SCHOOL GARDEN

I. COMPARING THE SURFACES OF THE GARDENS

Look at these four gardens and then, solve the situations below:



1. Use the following adjectives and grammar structures to compare the **surface** of the gardens above.

Use any of these adjectives to compare the surfaces:

- Great
- Small

Use any of these grammar structures:

- Much _____ than
- less _____ than
- not as _____ as _____
- as _____ as _____

- Garden A is _____ Garden B.
- Garden A is _____ Garden C.
- Garden A is _____ Garden D.
- Garden B is _____ Garden C.
- Garden B is _____ Garden D.
- Garden C is _____ Garden D.

2. Which garden has **the greatest surface** to grow vegetables? Why? Explain your answer.

Garden ____ has the _____ of all because _____

_____.

3. Which garden has **the smallest surface** to grow vegetables? Why? Explain your answer.

Garden ____ has the _____ of all because _____

_____.

4. Which garden, the garden with the greatest surface or the garden with the smallest surface, need more bamboo sticks to be enclosed? Explain your findings. _____

_____.

5. Which gardens have the same surface or area to grow vegetables?

Garden ____ and garden ____.

a) Do these two gardens with the same surface also need the same length of bamboo sticks to be enclosed? Explain. _____

_____.

6. Write True or False and explain your answer.

a) The garden with the greatest area also has the longest perimeter _____

Because _____

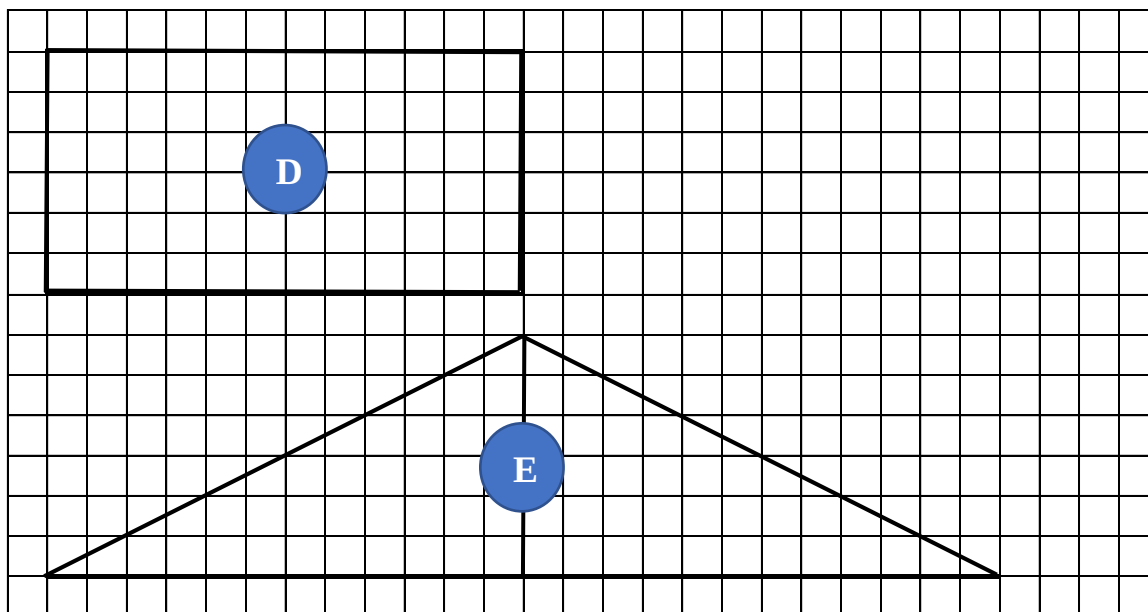
_____.

b) The garden with the smallest area also has the shortest perimeter _____

Because _____

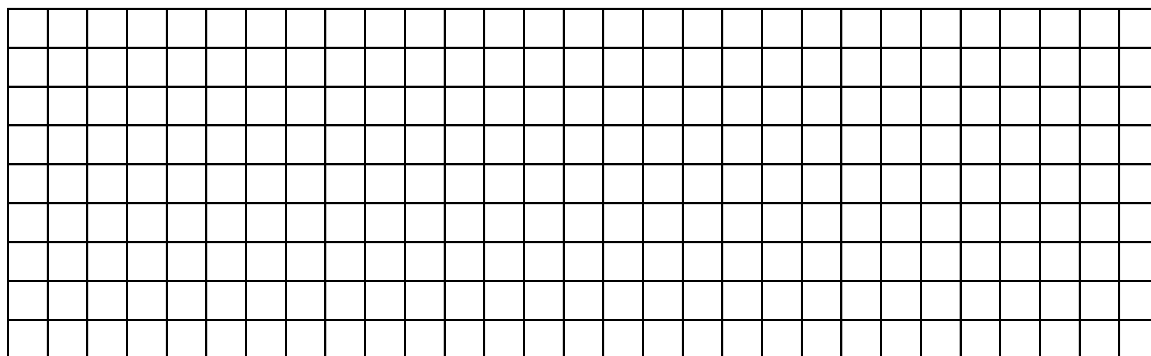
_____.

II. COMPARING THE AREA OF MORE GARDENS



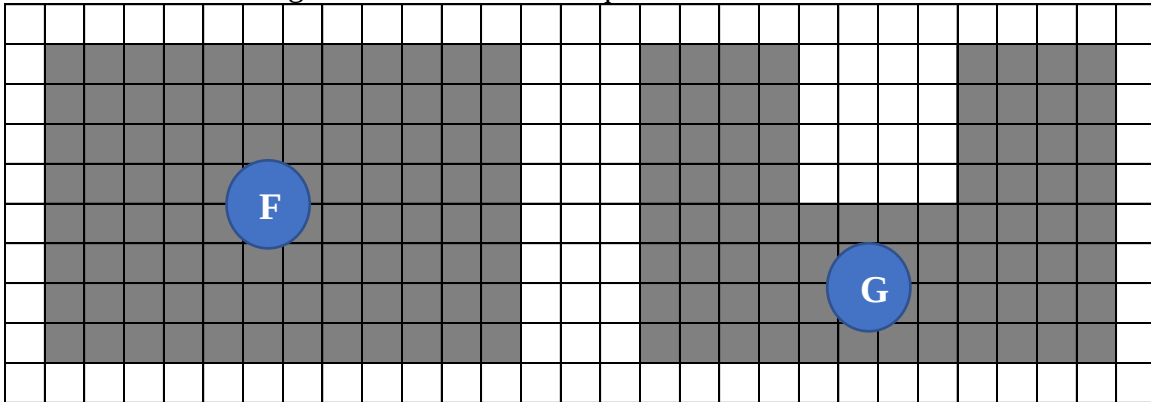
- Does any of the two gardens in the picture above have a greater area than the other one to grow vegetables? Why? Explain your answer. _____

 _____.
- Draw the same garden as garden D but with the different shape. Make sure you keep the same number of square units.



III. COMPARING THE AREA OF THE GARDENS TO THEIR PERIMETERS.

Look at these two gardens and answer the questions below.



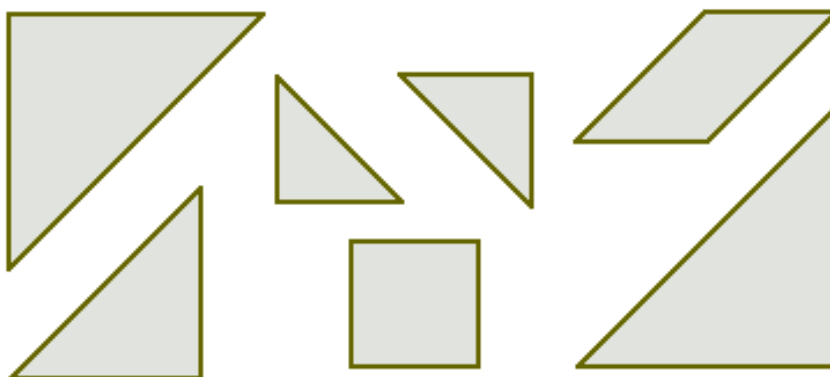
1. In which garden can more vegetables be grown? Why? Explain your answer. _____

2. Which garden needs more bamboo sticks to enclose it? Why? Explain your answer. _____

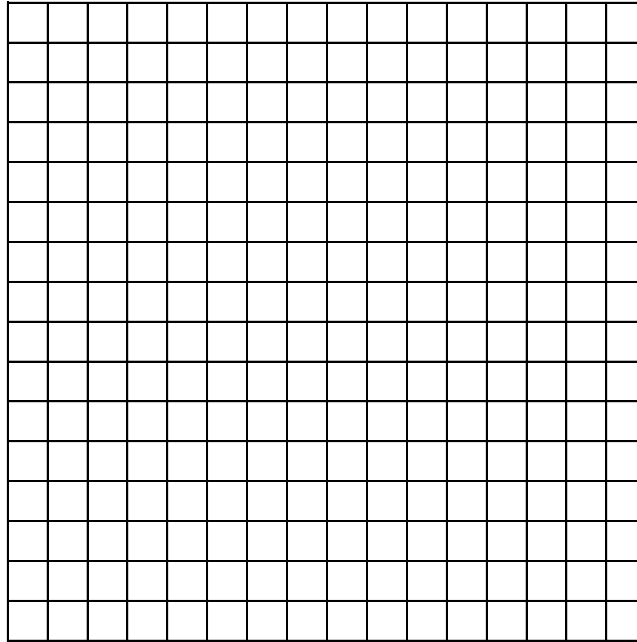
3. Do you think that the garden which has a greater area to grow vegetables, also needs more bamboo sticks to enclose it? Explain your answer. _____

IV. MAKING A DIFFERENT SHAPE OF A GARDEN WITH THE SAME AREA TO GROW VEGETABLES

The teacher is going to give you seven pieces to cover the “Area 1” of the surface of the school garden like shown in the picture below. Go to the school garden and try to cover that surface with all the pieces without overlapping them.



1. Now, use the same seven pieces given by the teacher and make on the floor a garden in the shape of a **square**. Draw what your garden looks like in the grid below.



2. Do both gardens, the “Area 1” of the school garden, and the design of the garden in the shape of a square you made on the floor, have the same area to grow vegetables? Is any greater than the other one? Why? Explain your answer. _____
