UN ESTUDIO HISTÓRICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS Y SUS POTENCIALIDADES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

LEYDI VANESSA LARRAHONDO RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2019

UN ESTUDIO HISTÓRICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS Y SUS POTENCIALIDADES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

LEYDI VANESSA LARRAHONDO RODRÍGUEZ

201427409

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Dirigido por

Mg. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2019

Dedicatoria

A mi madre, por su inmenso amor y su apoyo incondicional; por sus consejos en momentos difíciles y su compañía en los días de desvelo. Y a todos aquellos que aportaron un granito de arena a este proceso.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme sabiduría, fortaleza y resiliencia durante este proceso.

Agradezco mi directora de trabajo de grado, la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo por su acompañamiento, dedicación orientación, paciencia y sus valiosos aportes para mi formación profesional.

A mi familia, por su apoyo incondicional, por sus palabras de ánimo y sus ejemplos de superación, que me llevaron a lograr esta anhelada meta, por estar en los momentos de alegría y tristeza.

A mis evaluadores, los profesores Edgar Alberto Guacaneme y Cristián Andrés Hurtado, por las sugerencias, comentarios y correcciones que enriquecieron el presente trabajo. Así mismo, a todos los profesores que hicieron parte de mi proceso educativo, brindándome una fuente de conocimiento.

Finalmente, un agradecimiento muy especial a todas las personas que me apoyaron, a los compañeros que estuvieron a mi lado durante este ciclo, en especial a Diana M Vélez por escucharme y ser una amiga incondicional.

Leydi Vanessa Larrahondo Rodríguez

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN **9**

ABSTRACT **10**

INTRODUCCIÓN **11**

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN **13**

1.1 Planteamiento del problema 13

1.2 Objetivos 18

1.2.1 Objetivo general 18

1.2.2 Objetivos específicos 18

1.3 Justificación 19

1.4 Antecedentes 22

1.4.1 Algunas investigaciones con relación a *HM-EM* 22

1.4.2 Algunas investigaciones con relación a la *Historia del álgebra* 24

CAPÍTULO 2: MARCO REFERENCIAL CONCEPTUAL **26**

2.1 Perspectiva histórica y epistemológica 26

2.1.1 Los estudios Histórico-Epistemológicos y la EM 26

2.1.2 Los estudios Histórico-Epistemológicos en la FPM 28

2.2 El estudio Histórico-Epistemológico en resolución de problemas algebraicos 30

2.2.1 Mohammed Ibn-musa al-Khwarizmi (780- 850) 32

2.2.2 René Descartes (1596-1650) 36

2.3 Sobre la Formación de Profesores de Matemáticas 37

2.4 Aspectos metodológicos 42

CAPÍTULO 3: ESTUDIO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS **44**

3.1 La resolución de problemas en las matemáticas árabes (al-Khwarizmi) 45

3.1.1 El tratado algebraico de al-Khwarizmi 47

3.1.2 Sobre los problemas y su solución 49

3.1.3 Las formas canónicas 50

3.1.4 Análisis de los problemas de las seis formas en al-Khwarizmi 58

3.1.5 Problemas geométricos 60

3.1.6 Problemas de transacciones mercantiles y testamentos 63

3.1.7 Análisis de los problemas geométricos y mercantiles en al-Khwarizmi 65

3.2 La obra algebraica: La Geometría 67

3.2.1 Sobre los problemas y su solución 70

3.2.2 Problemas planos: El problema de Pappus 71

3.2.3 Problema sobre curvas: Construcción mecánica y ecuación de la hipérbola 76

3.2.4 Problemas sólidos y más sólidos: Trisección del ángulo 78

3.2.5 Análisis de los problemas y su solución en Descartes 79

3.3 Consideraciones finales de las obras históricas 81

3.4 Potencialidades de la historia de la resolución de problemas en la FPM 83

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS 89

4.1 Conclusiones generales 89

4.2 Algunas reflexiones didácticas 93

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 96

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza. Tomado de Ball et al. (2008) en (Godino, 2009, p. 17) 40
Figura 2. Lado de la raíz, multiplicado por un número cualquiera (Elaboración propia) 54
Figura 3. Representación de la completación del cuadrado (Elaboración propia) 54
Figura 4. Representación del cuadrado más diez raíces (Elaboración propia) 56
Figura 5. Representa el cuadrado de superficie AD (Elaboración propia).....57
Figura 6. Representación del cuadrado de cinco brazas de lado 61
Figura 7. Representación del triángulo acutángulo.....62
Figura 8. Representación de la multiplicación desde el teorema de Thales. Tomada de Murcia (2009, p. 42) 68
Figura 9. Representación de la extracción de raíces (Elaboración propia) 70
Figura 10. Representación del problema de Pappus. Tomada de Recalde (2018, p. 202) 72
Figura 11. Representación del ejemplo anterior. Tomado de: Recalde (2018, p. 208) 76
Figura 12. Trisección del ángulo (Elaboración propia).....78

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1. LAS FORMAS CANÓNICAS UTILIZADAS POR AL-KHWARIZMI 33
TABLA 2. REJILLA DE ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS 45
TABLA 3. SOLUCIÓN DE LA FORMA "CUADRADO IGUAL A RAÍCES" 51
TABLA 4. SOLUCIÓN DE LA FORMA "CUADRADO DE LA COSA IGUAL A NÚMERO" 53
TABLA 5. REJILLA DE ANÁLISIS SOBRE LA FPM 84

RESUMEN

El presente trabajo es un estudio histórico sobre la resolución de problemas algebraicos en dos momentos fundamentales de la historia del álgebra. El periodo de los árabes, considerando la obra al-*Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* o *libro del álgebra* de al-Khwarizmi; y por otro lado, el libro *La Geometría* de Descartes, como representante del siglo XVII. Para el estudio, se utiliza una rejilla que permite caracterizar y analizar los problemas y su solución, desde el contenido en los libros históricos señalados**.** Del análisis, se identifica que los problemas en al-Khwarizmi se clasifican en: formas canónicas, geométricas y de transacciones mercantiles-testamentos; y los de Descartes, están relacionados en: planos, sobre curvas y sólidos. El propósito de este trabajo es determinar las potencialidades que este estudio tiene para la Formación de Profesores de Matemáticas; se concluye que los aportes al conocimiento del profesor de matemáticas tienen una fuerte relación con la dimensión del conocimiento de contenido, visto desde el modelo de conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza (MKT), propuesto en Ball, Hill y Schilling (2008).

Palabras claves: Historia de las Matemáticas, Formación de Profesores de Matemáticas**,** solución de problemas algebraicos, al-Khwarizmi, Descartes, Conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza

ABSTRACT

The present work is a historical study on the resolution of algebraic problems in two fundamental moments in the history of algebra. The period of the Arabs, considering his treatise, *al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* or the *al-Khwarizmi* algebra book; on the other hand, the book The Geometry of Descartes, as a representative of the seventeenth century. For this, a grid is used to characterize and analyze the problems and their solution, from the content in the historical books indicated. From the analysis, it is identified that the problems *in al-Khwarizmi* are classified into: canonical, geometric and mercantile transactions-will forms; and those of Descartes, are related in: planes, on curves and solids. The purpose of this work is to determine the potential that this study has for the Mathematics Teacher Training; It is concluded that the contributions to the knowledge of the math teacher have a strong relationship with the dimension of content knowledge, seen from the model of mathematical and didactic knowledge for teaching (MKT), proposed in Ball, Hill and Schilling (2008).

Keywords: Mathematics History, Mathematics Teacher Training, algebraic problem solving, al-Khwarizmi, Descartes, Mathematical and didactic knowledge for teaching

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Grado se inscribe en las líneas de formación de *Historia y Epistemología de las Matemáticas* y *Didáctica de las Matemáticas*, de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad del Valle.

Esta investigación, tiene como propósito caracterizar los aportes que tiene la Historia de las Matemáticas, específicamente desde resolución de problemas algebraicos en la formación del profesor de Matemáticas, para su quehacer profesional. Así pues, este trabajo centra la atención en la historia del álgebra, y tiene como interés analizar algunos problemas algebraicos y la solución de ellos, en los periodos históricos conformados por al-Khwarizmi y Descartes. Teniendo en cuenta lo anterior, el presente estudio se estructura desde dos perspectivas: Historia de las Matemáticas (HM) particularmente en la resolución de problemas algebraicos y Formación de Profesores de Matemáticas (FPM).

Respecto a la organización del trabajo de grado, este se realiza de la siguiente manera: en el primer capítulo se presentan los aspectos generales de la investigación; allí se ubica la problemática, desde el marco legal de las licenciaturas ofrecidas por instituciones de educación superior colombianas, y en el campo de la Educación Matemática (ésta se articula desde una perspectiva que integra la HM y la FPM). Seguidamente, se enuncian los objetivos que enmarcan este estudio, así como la justificación y antecedentes relacionados con los tres ámbitos anteriormente mencionados.

En el segundo capítulo se explicita tanto el marco de referencia conceptual que sustenta el presente estudio, como la metodología que lo orienta. Dicho marco se elabora desde tres perspectivas: 1) histórica y epistemológica desde la FPM, 2) con relación a la resolución de

problemas, desde los tratados de al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala y La Geometría, los cuales corresponden respectivamente a las obras de al-Khwarizmi y Descartes, 3) la perspectiva Didáctica en la formación de los profesores desde el modelo de conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza (MKT[1]), propuesto por Deborah Ball.

El tercer capítulo está conformado tanto por los análisis y algunas consideraciones sobre los problemas y su solución en los libros de al-Khwarizmi y Descartes, y finalmente, se caracteriza algunos aportes de la resolución de problemas desde las consideraciones del conocimiento del profesor de matemáticas del modelo MKT.

El cuarto capítulo contempla las conclusiones generales del estudio, y se proponen algunas reflexiones didácticas, que son producto del estudio realizado.

[1] Mathematical Knowledge for Teaching o modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se aborda los aspectos generales que estructuran el presente trabajo, para lo cual se expone la problemática fundamentada desde el marco legal (lineamientos que rigen las licenciaturas colombianas, específicamente las licenciaturas en matemáticas), como desde el campo de la Educación Matemática (en adelante EM), en una perspectiva que articula la Historia de las Matemáticas (denominado HM) y la Formación de Profesores de Matemáticas (FPM). Así mismo, se presentan los objetivos que orientan el estudio. También se expone la justificación que sustenta la importancia de abordar la HM y la FPM, y finalmente, se reportan algunas investigaciones que sirven de antecedentes desde el estudio la relación de HM – EM y la Historia del álgebra.

1.1 Planteamiento del problema

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2013, 2014) establece que el sistema colombiano de formación de educadores está integrado por tres grandes subsistemas vinculados entre sí: formación inicial, formación en servicio y formación avanzada, refiriéndose, respectivamente, a pregrado, profundización y postgrado.

El primer subsistema hace referencia a la formación de los sujetos interesados en ser educadores de los distintos niveles educativos, áreas de conocimiento y poblaciones específicas; este subsistema toma como punto de partida la preparación del educador y su paso entre niveles de la educación superior.

El segundo se centra en la formación de los educadores vinculados laboralmente al ejercicio de la profesión docente; a partir de su vivencia, se exige que el educador tenga una formación continua y la necesaria cualificación, reflexión, sistematización y socialización de la experiencia educativa y pedagógica.

Por su parte, el tercer subsistema hace referencia a la formación posgradual, representada en las especializaciones, maestrías, estudios doctorales y post doctorales de los educadores. En estos procesos se convoca al diálogo que permita afinar los propósitos y necesidades contextuales de su labor, de tal forma que permita espacios de acción e implementación de los procesos de innovación, investigación y gestión educativa, a partir de la reflexión y consolidación del saber práctico y teórico del campo disciplinar y profesional del educador.

En el marco legal de la formación inicial, regido desde los lineamientos de calidad para las licenciaturas en educación, el MEN (2014) presenta un panorama normativo que constituye las condiciones de calidad que deben ser apropiadas y adaptadas por las Instituciones de Educación Superior (IES[2]), y así obtener una renovación del registro calificado de los programas académicos.

Las diferentes reformas y cambios normativos generados en el país durante las últimas décadas han provocado un sinnúmero de leyes y resoluciones en el marco legal de lineamientos de calidad para las licenciaturas; estos cambios se evidencian en la Resolución 18583 de 2017, que actualmente está vigente; la anterior normativa redefine, organiza y amplía las características específicas de calidad, establecidas por el MEN para las licenciaturas ofertadas por las IES.

[2] En adelante, se utilizan estas siglas para referirse a las Instituciones de Educación Superior

Las especificaciones están relacionadas con aspectos como denominación, contenidos curriculares y organización de actividades académicas. En cuanto al primero, las universidades deben hacer explícito el contenido disciplinar de dichos programas, en el cual esté asegurado un conocimiento disciplinar y pedagógico, que vaya encaminado a desarrollar, articuladamente, los cuatro componentes: saberes específicos y disciplinares, componentes de pedagogía, y de didáctica de las disciplinas. Dentro de los saberes específicos, dicha resolución menciona que se debe tener en cuenta la apropiación, trayectoria histórica y fundamentos epistemológicos del campo disciplinar; el componente de pedagogía debe permitir en los estudiantes de licenciatura, la capacidad de utilizar los conocimientos pedagógicos de una forma integral.

En el marco de la autonomía universitaria, cada IES puede modificar sus estatutos, crear, organizar, desarrollar sus programas académicos y realizar el diseño curricular que se ajuste al perfil profesional, función social y misión institucional. Luego, según la Resolución 18583 de 2017, se puede decir que los programas en formación inicial de educadores en matemáticas asumen la Didáctica de las Matemáticas o EM, como su disciplina fundante y campo interdisciplinar en el que confluyen y se integran los conocimientos matemáticos, didácticos, curriculares, pedagógicos, epistemológicos, filosóficos, entre otros.

En esta misma dirección, Guacaneme, Bautista y Salazar (2011) hicieron una organización académica de los programas de licenciatura en matemáticas (LM), en torno a cuatro núcleos del saber pedagógico, básicos y comunes. Ellos enfatizan que las distintas normas establecidas por el MEN se han dado en un intervalo de tiempo reducido y, por lo tanto, no han conllevado a transformaciones de fondo que se requieren evidenciando la ausencia de una política estable para los programas de formación inicial.

Las consideraciones anteriores, apuntan a que no hay una sustentación clara por parte de las diferentes normativas, que muestren la importancia o el papel de la articulación de las diferentes disciplinas, didácticas, pedagógicas, epistemológicas, filosóficas, entre otros. Aunque señalan la importancia de articular las diferentes disciplinas, no indican qué puede aportar esto, a la formación de los educadores.

Por otro lado, en cuanto a la relación Historia de las Matemáticas–Educación Matemática [HM–EM] ha sido objeto de estudio en diferentes investigaciones. Torres, Guacaneme y Arboleda (2015, 2018), realizaron una investigación que estudia la relación HM-FPM en nueve licenciaturas de matemática ofertadas por diferentes IES de Colombia. En dicha investigación se considera que varios autores han establecido consensos sobre la necesidad histórica en la educación matemática, pero la existencia de tal consenso oculta la problemática profunda y significativa en cuanto a la racionalidad, el lugar y el papel de la historia en matemáticas como un potente eje en la formación de profesores en matemáticas. Por consiguiente, los autores afirman:

> Es natural suponer que los actuales programas colombianos de formación de profesores de Matemáticas abordan la formación en HM de manera singular. Sin embargo, hasta el momento no ha habido un estudio sistemático que exhiba la manera como se realiza esta formación, es decir, un estudio sobre cómo, en el contexto nacional, esta disciplina se incorpora a los procesos de constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas (p. 3).

Como resultado de las investigaciones realizadas por Torres, Guacaneme y Arboleda (2015, 2018) se puede decir que no aún no hay claridad en los siguientes aspectos, en primer lugar, no hay un reconocimiento de las diferentes competencias docentes que se pueden promover con el estudio de la HM; en segundo lugar, el estudio de la historia que se hace en las diferentes

licenciaturas del país es general, no es claro con que tipos de historia son pertinentes para un profesor de matemáticas, no se ha abordado con profundidad.

En tercer lugar, las diferentes metodologías no dan suficiente evidencia de las metodologías curriculares llevadas a cabo por los planes de estudio de las licenciaturas y las particularidades de la HM con la que se relacionan los futuros profesores en su formación, es decir, no hay una orientación clara sobre el papel, los propósitos y la necesidad de incluir la HM y los diferentes usos didácticos en las licenciaturas de matemáticas; y por último la apropiación de dicho conocimiento histórico por parte del profesor y los diferentes usos didácticos son exiguas o no es explícito su papel en las distintas prácticas pedagógicas por parte del profesor.

A pesar de que las diferentes normativas colombianas no muestran una relación explícita en cuanto a los propósitos y la necesidad de incluir una correspondencia en cuanto a formación sobre historia de la matemática y la formación del profesor de matemáticas en los diferentes programas de formación inicial en matemáticas, la investigación sí lo hace.

En este sentido, este estudio pretende ser un aporte en el campo de formación de profesores de matemáticas, al buscar dar respuesta a la pregunta siguiente:

¿Qué potencialidades tiene un estudio histórico sobre la resolución de problemas algebraico en la historia de las matemáticas para la formación de profesores de matemáticas?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Determinar las potencialidades que aporta la historia de la resolución de problemas algebraicos a la formación de profesores de matemáticas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Documentar la problemática desde el papel de la HM en la Educación Matemática, la formación de profesores de matemáticas y la resolución de problemas algebraicos.
- Caracterizar los tipos de problemas y su solución en los periodos históricos de los árabes a través de al-Khwarizmi, y del siglo XVII en Descartes.
- Determinar los aportes o potencialidades de la solución de problemas de la historia del álgebra a la FPM a través de un análisis que integre elementos del modelo MKT propuesto por Deborah Ball.

1.3 Justificación

El presente trabajo pretende dar una justificación, en cuanto a determinar qué beneficios tiene el estudio de la HM en la FPM, de qué manera la resolución de problemas puede contribuir en la práctica docente y cómo este trabajo aporta a la formación investigativa de la autora.

A nivel nacional e internacional, la preocupación por la educación y en particular por la formación matemática ha propiciado críticas y reflexiones que han conllevado a reformas o cambios en la reestructuración del sistema educativo y en el currículo de matemáticas, pero, a pesar de que hay un activo estado del arte en la formación de profesores, las diferentes evaluaciones nacionales e internacionales como Prueba Saber, PISA, entre otras[3], demuestran que siguen existiendo problemáticas en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, durante las últimas décadas, diferentes investigaciones nacionales e internacionales en el campo de EM se han orientado a dar contribuciones en el campo de la formación de profesores de matemáticas.

Investigaciones sobre la relación HM- FPM como las de Guacaneme (2016) y Espinosa (2014), resaltan la importancia de abordar esta articulación porque la HM es vista como una herramienta de tipo didáctico, conceptual y epistemológico, que permite dilucidar los obstáculos epistemológicos, errores o dificultades que los matemáticos tuvieron en su momento para el

[3] Tomado de https://www.elpais.com.co/colombia/estudiantes-nos-no-saben-resolver-problemas-segun-pruebas-pisa.html

desarrollo del concepto matemático, así mismo puede advertir al profesor de las situaciones que se pueden presentar en el aula.

De esta manera la HM en la formación de los profesores a nivel nacional e internacional transforma su visión de la matemática, favorece sus competencias personales y profesionales, así mismo, le proporciona instrumentos para implementar materiales o recursos para la enseñanza y cambia la manera habitual en que se aborda la matemática. Del mismo modo, las diferentes investigaciones en este ámbito generan aportes en cuanto a la cualificación y mejoramiento de los modelos del conocimiento del profesor.

Por otro lado, se ha evidenciado que a lo largo de la historia la transición de la aritmética al álgebra ha generado múltiples dificultades en estudiantes de educación básica, problemas que también se han evidenciado en estudiantes de educación superior, una de esas dificultades radica en la falta de comprensión que tienen los estudiantes para resolver problemas. Estas consideraciones, sobre las dificultades presentes en los estudiantes son importantes, debido a que las formas en que se promueve se estructuran y conceptualizan el aprendizaje de los estudiantes están directamente relacionadas con la formación y desarrollo profesional que han tenido los profesores de matemáticas. Con base en la anterior idea, Hernández (citado en Azañero, 2013) también afirma:

> Ahora bien, la resolución de problemas se ha mostrado en todos los niveles como el tópico de mayor dificultad para los alumnos. Esta dificultad puede tener algo inherente a su propia complejidad, pero muchas veces ha sido el resultado de unos planteamientos metodológicos inadecuados, un desconocimiento de los procesos que siguen los alumnos o consecuencia de no haber sido éstos suficientemente motivados (p. 9).

Al respecto, Charbonneau y Lefebvre (1996) y Bell (1996), analizan el papel de los problemas algebraicos en la historia y afirman que la resolución de problemas es una ruta histórica para introducir el algebra, así mismo que, los estudios históricos en matemáticas permiten mirar o buscar los problemas que conllevan al desarrollo de las matemáticas.

En la misma dirección, Santos (2012) afirma que es crucial que, en el conocimiento de formación de profesores, promueva en actividades de resolución de problemas. Así mismo, enfatiza que el docente de matemáticas no solo se debe poseer una sólida formación matemática, sino que es indispensable que él tenga una gran formación didáctica y complementaria, siendo capaz de orientar e interpretar los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, mostrando diversas maneras de razonamiento y capacidades de resolución de problemas.

Por su parte, Torres (2010), Anacona. (2003) reconocen que la importancia del uso de la historia desde la resolución de problemas algebraicos potencializa la determinación de las características fundamentales del objeto matemático particular y su construcción lógica, en una teoría matemática; la introducción del álgebra debería seguir la aproximación de la "resolución de problemas".

Por lo anterior, es importante señalar que para pensar en el desarrollo del álgebra, específicamente la resolución de problemas, es crucial considerar dos momentos claves (al-Khwarizmi y Descartes), porque estas etapas dejan ver dos ideas distintas en cuanto al tratamiento simbólico, el método de solución, los tipos de problemas, las validaciones de los métodos y resultados.

Finalmente, cabe mencionar que este trabajo aporta a la formación profesional investigativa de la autora porque las reflexiones que surjan conceden experiencias significativas y enriquecedoras

en su conocimiento profesional. También se considera de suma importancia el presente trabajo en el campo de la educación matemática, porque no hay referentes teóricos con propuestas en las que se aborde un estudio histórico del álgebra clásica sobre la resolución de problemas desde la perspectiva de HM-FPM.

1.4 Antecedentes

Aquí se muestra una recopilación de las diferentes producciones que de una u otra forma, tiene que ver con el problema de investigación. Es así como este apartado esta relacionado con dos consideraciones: en primer lugar, con relación a la Historia de la matemática y la formación de profesores, y, en segundo lugar, los trabajos relacionados con la historia del álgebra.

1.4.1 Algunas investigaciones con relación a *HM-EM*

Escobar (2012) realiza una indagación que tiene como eje principal la inclusión de una perspectiva histórica para la enseñanza de la función logarítmica, ella propone una serie de libros históricos a profesores que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de dicho objeto matemático en los grados 8° y 9° de la Educación Básica. En aspectos metodológicos, la autora diseña, aplica y sistematiza entrevistas realizadas a algunos docentes de la ciudad de Cali a partir de las entrevistas. La autora concluye, que la utilización de la Historia de las Matemáticas en clase debe dotar aspectos de significado matemático, pedagógico y cultural para el estudiante. También resalta que, aunque el profesorado reconoce la importancia de involucrar la Historia de las

Matemáticas en el aula y a muchos les agrada leerla, no se utiliza permanente ni con métodos innovadores.

Espinosa (2014) documenta las potencialidades que aportar el estudio de las ecuaciones de tercer grado según Omar Al-Khayyām a la formación del profesor de matemáticas. La metodología que planteó la autora es desde una perspectiva descriptiva con relación a la teoría geométrica para solucionar ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām y al papel de la Historia en la formación de los profesores. La autora concluye en su trabajo que, los estudios históricos permiten observar la evolución de los conceptos matemáticos, en las aulas de clase, es así como la historia enriquecer las explicaciones del profesor ofreciendo un carácter dinámico del saber matemático permitiendo que pueda movilizarse con gran habilidad en el tema que enseña creando nexos entre diversos tópicos.

Guacaneme (2016) muestra el papel de la historia como disciplina integral en la constitución del conocimiento del profesor, como objeto matemático específico se dispone la historia de la razón y la proporción y dentro de ella la historia de la teoría euclidiana expuesta en el libro V de Elementos de Euclides. Con base en lo anterior, el autor establece unas preguntas que categorizan el papel de la HM en la formación del profesor y emplea una metodología esencialmente cualitativa en el que incluye una extensa selección de trabajos que han aportado reflexiones académicas y acciones en el campo de la HM-EM.

El autor resalta que la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores permite dotar al profesor de artefactos adecuados e insumos para la utilización de estrategias necesarias en el aula y el currículo. Así mismo considera que el estudio de la historia debe estar acompañado de un trabajo didáctico que sea generado de la discusión y reflexión sobre

los procesos educativos que subyacen en el discurso histórico que promueva el desarrollo de competencias personales y profesionales por parte del profesor de matemáticas.

1.4.2 Algunas investigaciones con relación a la *Historia del álgebra*

Torres (2010) realiza un estudio histórico epistemológico, identificando fenómenos que organiza el concepto de ecuación en la evolución histórica de al-Khwarizmi, Cardano y Descartes desde la teoría fenomenológica propuesta por Hans Freudenthal, reconociendo las potencialidades de del estudio en procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en ámbitos escolares síntesis, uno de los resultados importantes del estudio histórico epistemológico, tal estudio permite que la autora concluya que es importante reconocer que en la introducción de los objetos matemáticos en la escuela se debe privilegiar la construcción de campos amplios de significación fenomenológica, así mismo, la identificación de problemáticas y procesos históricos permiten comprender problemáticas didácticas.

Hurtado (2014), en su trabajo de maestría, propone una unidad didáctica relativa a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real para estudiantes de octavo grado de la Educación Básica, que es puesta en consideración por un grupo de profesores en ejercicio para identificar algunos de los conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos que manifiestan cuando la analizan. La metodología adoptada se basa en un análisis didáctico, específicamente en el análisis de contenido existen unos sub-análisis entre ellos están el análisis histórico y el fenomenológico.

Desde el análisis histórico el autor hace una descripción de los aspectos históricos de las ecuaciones en el álgebra clásica, es decir, presenta de manera clara y explícita el desarrollo del

álgebra aludiendo a al-Khwarizmi. Vieta, Cardano y Descartes. De la implementación y análisis, el autor concluye que desde la perspectiva fenomenológica es importante que el docente reconozca que es primordial identificar los fenómenos que permite describir, expresar y cuantificar las ecuaciones de primer grado como modelo matemático.

También enfatiza que análisis didáctico como propuesta metodológica para el diseño de unidades didácticas es potente, debido a que permite que los profesores adquieran elementos que son útiles para abordar su quehacer cotidiano y aportando en ellos su formación.

En la revisión de los antecedentes se evidencia un reconocimiento teórico y metodológico sobre la relación HM-FPM, pero, no se evidencia trabajos sobre la solución de problemas históricos en la FPM.

Las dos clasificaciones abordadas muestran independientemente la importancia de la formación de profesores, la historia y a su vez objetos matemáticos del algebra, pero, no muestra la articulación entre ellas desde el panorama Didáctico-Histórico.

Por lo anterior, los anteriores antecedentes dan cuenta de la importancia la FPM, la HM y a su vez los objetos matemáticos relacionados con el álgebra. Por lo tanto, tener en cuenta estas investigaciones es de gran importancia, debido a que se constituyen como un referente y apoyo.

CAPÍTULO 2: MARCO REFERENCIAL CONCEPTUAL

Este apartado presenta algunos referentes teóricos que sustentan el desarrollo de este de trabajo de grado. Dichos referentes se presentan en las siguientes perspectivas: histórico–epistemológico concerniente a la Educación Matemática y una perspectiva matemática que se centra en la resolución de problemas algebraicos, por último, la perspectiva didáctica relativa a la formación de profesores de matemáticas.

2.1 Perspectiva histórica y epistemológica

En este apartado se presentan algunos elementos que permiten apreciar la importancia de los estudios Histórico– Epistemológicos desde un contexto general que es la educación matemática y desde lo especifico, referente a la formación de profesores de matemáticas.

2.1.1 Los estudios Histórico-Epistemológicos y la EM

Diferentes investigaciones afirman que el estudio de la historia nos permite apreciar mejor la complejidad de ciertos objetos matemáticos y las diferentes rupturas que han surgido desde su construcción. Teniendo en cuenta esta idea Arboleda (2011) afirman que los estudios históricos le proporcionan al profesor de matemáticas motivos para su quehacer, ya que permiten apreciar los esfuerzos anteriores en la historia para poder viabilizar una enseñanza de las matemáticas.

En esta misma dirección estos autores también afirman que para los matemáticos los objetos matemáticos poseen una realidad profunda, por cuanto a los historiadores matemáticos les resulta útil el estudio del desarrollo de las matemáticas como una actividad humana, así mismo los profesores de matemáticas no pueden ignorar los componentes ideológicos en el diseño y ejecución de estrategias viables de intervención en el aula. En suma, una dimensión de las ideas es tan importantes para los educadores de matemáticas como para los historiadores y matemáticos. Por lo tanto, los estudios históricos se constituyen como un método de investigación que contribuyen a fomentar procesos de construcción teórica.

Anacona (2003) afirma que los estudios históricos deben estar inmersos en dos posturas, filosófica y metodológica, en las cuales se tenga en cuenta la evolución, construcción propia y consolidación de los conceptos que se desarrollen en contextos sociocultural. Teniendo en cuenta dichas posturas, la utilización de textos históricos resulta un camino muy atractivo para los estudiantes, quienes se sorprenden con las técnicas, los símbolos y lenguajes utilizados, ampliando así su panorama de resolución del problema. Este tipo de análisis permite que las matemáticas no se vean como incomprensibles, ya que al comparar las diferentes maneras de abordar un ejercicio genera mejor comprensión para el estudiante.

En esta misma línea, la construcción de una teoría a través de un estudio histórico-epistemológico, permiten observar la complejidad que los rodea y todos los aspectos que surgieron en su construcción teórica hasta constituirse en un conocimiento formal y elaborado. A su vez aportan significativamente a la Educación Matemática porque permite formarse una idea completa y enriquecida de un objeto matemático, y en su estudio, pueden evidenciarse aspectos, conceptos o métodos históricos que pueden incidir directa o indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.1.2 Los estudios Histórico-Epistemológicos en la FPM

Teniendo en cuenta el punto anterior, que enfatiza en los estudios históricos permiten investigar aspectos teóricos de un objeto matemático y con el objetivo de mostrar una visión más específica de los estudios históricos se hace referencia en los avances que se pueden exaltar en el desarrollo de la formación del profesor de matemáticas.

En este sentido, investigaciones como la de Guacaneme (2016) a parte de contribuir en el desarrollo teórico de un objetivo matemático, da luces del desarrollo histórico dentro del campo de la educación matemática que sirvan considerar componentes que emergen de las prácticas de aulas. Este autor afirma que existen planos/líneas de investigación de la educación matemática que se relacionan con la historia de la matemática, dichos planos se categorizan en: prácticas profesionales de los profesores de matemáticas, conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, formación de los profesores de Matemáticas y conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas. Así mismo considerar la historia de la matemática en el plano de formación de profesores conlleva a que el autor afirme:

> Así, entre otras, reconocemos preguntas acerca de: las estrategias curriculares de integración de la HM en los planes de estudio de los programas de formación de profesores de Matemáticas; los modos en que la HM participa de los lineamientos, políticas o normatividad para la formulación de programas de formación de profesores de Matemáticas; las formas en que la HM participa de las interacciones en las comunidades de práctica de formadores de profesores de Matemáticas; o, las necesidades, surgidas de las prácticas formativas, de recurrir al estudio del discurso histórico como recurso para la acción docente del formador y los aprendizajes logrados a través de este a favor de los procesos de docencia del formador (p. 24).

Por otro lado, el papel que se le asigna a la historia de las matemáticas en el estudio del conocimiento del profesor de matemática está referido en dos perspectivas. En primer lugar, desde el conocimiento del profesor en general, en la cual no se especifica la disciplina; en segundo lugar, desde el mismo conocimiento del profesor de matemáticas.

De lo anterior, el autor afirma que hay una exigua integración de la Historia de las Matemáticas a la discusión sobre la educación del profesor de Matemáticas y reconoce que esta perspectiva hace parte de un terreno de indagación, al parecer, poco explorado por esta comunidad.

De otra parte, con relación a los estudios históricos en la formación de los profesores de matemáticas, el autor afirma que:

> […] consideramos que la HM se incorpora en la educación de los profesores porque: existen gentes o comunidades que tienen interés en hacerlo, hay una valoración social de la historicidad de las Matemáticas, se reconoce en la HM una cornucopia de visiones, y se asume la HM como una fuente de artefactos potencialmente convertibles en herramientas para la actividad docente (p.214).

Por otra parte, Vasco (2002) señala que los maestros y profesores de matemáticas se ven enfrentados a distintas concepciones de las matemáticas, de la historia de las matemáticas y de la didáctica de las matemáticas, por lo cual les es imposible llegar a síntesis potentes y viables que les permitan articular la historia de las matemáticas con su enseñanza, por la tanto si los diversos investigadores no se ponen de acuerdo entre las distintas concepciones de la historia y de la historia de las matemáticas, mucho menos pueden pedirle a los profesores de matemáticas que posean posiciones ante tan difíciles debates filosóficos.

En este mismo sentido Vasco (2002) señala que existen algunas tensiones que muestran la dificultad de incorporar la historia de las matemáticas en la enseñanza. Por lo tanto, él afirma que

esta dificultad apunta a la necesidad de muchos esfuerzos sostenidos de investigación, formación continuada y otras estrategias de difusión. Del mismo modo, este autor señala que, con referencia a los estudios históricos, es importante hacer investigación: iniciar investigaciones en la historia de las matemáticas y de la educación matemática en cada país, no es sólo un lujo teórico, sino una necesidad cultural para recuperar la historia de las ideas, las ciencias y las artes en el propio país, y el mejor vehículo para la autoformación y para involucrar y entusiasmar a otros docentes por la historia de las matemáticas.

2.2 El estudio Histórico-Epistemológico en resolución de problemas algebraicos

Kieran (1992) destaca que el desarrollo del simbolismo algebraico tuvo una serie de episodios históricos que permitieron la evolución en la estructura simbólica del álgebra, resumida en tres etapas: Retórica, Lacónica y Simbólica. La primera se caracterizó por el uso del lenguaje ordinario con una ausencia total de simbolismo; mientras tanto, la segunda se introduce el uso de las letras para representar cantidades desconocidas; y por último la utilización de letras permite pensar cantidades dadas y en incógnitas, en esta etapa se empiezan a expresar soluciones generales y a formular reglas para relaciones numéricas.

Es importante precisar que dentro de estas tres etapas la historia menciona a matemáticos como al-Khwarizmi y Descartes, por lo tanto, es relevante considerar las obras de los anteriores autores, debido a que son pieza fundamental para evidenciar las rupturas dadas en el desarrollo del álgebra, a partir de las diferentes validaciones de la época, la simbología, los métodos de solución y los diferentes tipos de problemas durante tal desarrollo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se considera importante tomar el momento histórico del al-khwarizmi porque es ahí donde inicia una teoría de ecuaciones, una forma particular de tratar los problemas, y esto marca toda la corriente algebraica en la historia de las matemáticas. Tal como lo señala Torres (2010).

> En el primer momento se ha restituido un acontecimiento, la aparición del libro de al- Khawarizmi en álgebra, pues es en esta obra de principios del siglo IX cuando por primera vez en la historia el álgebra aparece como una disciplina autónoma y en posesión de su nombre, marcando así toda una corriente de investigación posterior. Es decir, usando el texto de al-Khawarizmi daremos cuenta de aspectos del origen del álgebra (p.50).

También, es preciso decir que se escoge el momento histórico correspondiente a Descartes porque hay un cambio fundamental en la historia del álgebra, por el carácter matemático expuesto en su obra *La Geometría*. La homogenización entre el algebra y la geometría constituyen un terreno fundamental para la consolidación de una nueva manera o método de resolver los problemas eminentemente geométricos. En ese sentido Hurtado (2014) afirma:

> La nueva manera de concebir la relaciones entre número y magnitud, distinta a la tradición griega, la consolidación de una "aritmética de símbolos", más que una "aritmética de magnitudes1", la novedosa manera de ver la posibilidad de trabajar con expresiones no necesariamente homogéneas (mismo grado para los monomios que la componen), la introducción de un método propio para solucionar problemas matemáticos fundamentales, la manera de entender las ecuaciones como medios para resolver problemas geométricos, entre otras muchas cuestiones, fueron importantes avances para la maduración del álgebra en la célebre propuesta de Descarte (p. 85).

Las consideraciones anteriores permiten tomar como base de indagación los trabajos de al-Khwarizmi y Descartes, estos dos momentos dejan ver dos tipos de tratamiento de problemas, diferentes formas de solución. Por tanto, estas dos épocas son tomadas en cuenta para el presente estudio.

2.2.1 Mohammed Ibn-musa al-Khwarizmi (780- 850)

Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi, nombre real al que se reconocemos como al-Khwarizmi, nació alrededor del año 780 en la península de Arabia, durante el auge científico árabe se creó la casa de la sabiduría, en ella trabajó al-Khwarizmi permitiendo dar inicio a una disciplina científica con la elaboración en sus obras.

La más importante de sus obras en la historia matemática, es su tratado del álgebra. Cuyo título completo es ***al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala.***

al-Jwarizmi[4] (2009) divide la obra en dos partes, la primera de ellas se fracciona en varios capítulos. El primero está destinada a presentar los términos necesarios que utiliza al-Khwarizmi [5] para solucionar sus problemas. Son tres los términos principales o como lo denomina él las tres especies de números.

- **Raíces:** Es llamado también como la "cosa" (sea la unidad, números mayores que ella o fracciones más pequeñas que ella)
- **Cuadrados:** Es la raíz multiplicada por sí misma, también llamada tesoro

[4] En adelante nos referimos con al-Jwarizmi al libro utilizado

[5] En adelante cuando escribamos al-Khwarizmi, nos referimos al árabe como persona.

- **Números aislados:** Es cualquiera expresable como tal sin relación a raíz o cuadrado**.** Así pues, mediante la presentación de los términos primitivos, se establece las combinaciones posibles para poder representar y resolver problemas. En ellas se establecen las seis relaciones, tres compuestas y tres simples.

A continuación, se presenta las seis formas normales o canónicas, haciendo uso del lenguaje retórico y el lenguaje actual, utilizado en la traducción realizada por Moreno Ricardo (2009).

Tabla 1. Las formas canónicas utilizadas por al-Khwarizmi

FORMAS CANÓNICAS (LENGUAJE RETÓRICO)	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA
Cuadrado de la cosa igual a cosas[6]	x^2= bx
Cuadrado de la cosa igual a número	x^2 = c
Cosa igual a número	bx = c
Cuadrado de la cosa más cosa igual a número	x^2 +bx = c
Cuadrado de la cosa más número igual a cosas	x^2 + c = bx
Cuadrado de la cosa igual a cosas más número	x^2 = bx + c

La instauración de estos términos primitivos y sus posibles combinaciones, es decir las formales normales, permiten en ese momento histórico que al-Khwarizmi mostrara un sistema de representación que en la actualidad podamos traducir un enunciado (ecuación) en lengua natural a uno en lengua formal.

[6] al-Jwarizmi M (2009) cuando se habla de la cosa se refiere a la incógnita, es decir las raíces

Las letras que conforman las formas normales están representadas en el conjunto de los números racionales positivos, lo que da a entender que al-Khwarizmi no concibe con números negativos en las operaciones que el maneja: suma, resta, multiplicación, división y radicación (+, -, ÷, ×,√).

El tratado histórico, está dividido en dos partes, cada una contiene diversos capítulos. La primera parte del tratado algebraico prosigue con algunos ejemplos de los seis tipos de ecuaciones o formas normales utilizando en algunas construcciones geométricas que demuestren la validez general. Dos capítulos posteriores tratan sobre las reglas de cálculo para transformar una ecuación en las diferentes formas normales multiplicando binomios y calculando raíces cuadradas. En los dos últimos capítulos aplican los métodos aprendidos anteriormente y así se reducen a las seis formas normales y el último presenta una colección de varios problemas algebraicos.

En lo que concierne la segunda parte del tratado, se aborda problemas geométricos del libro Elementos de Euclides para desarrollarlos.

La tercera parte del libro ocupa gran parte de él, en el cual se muestra una colección de sesenta problemas sobre herencias y legados. Las ecuaciones que dan lugar a los problemas son indeterminadas.

Sobre el tipo de problema y la resolución que propone al-Khwarizmi, se puede ver que, en la primera parte del libro, respecto a los seis problemas estos se clasifican en:

- Reparticiones
- Problemas de números

En esta sección los problemas no tienen un contexto, ya que, su intención es dar ejemplos para las seis formas canónicas.

En cuanto a la segunda parte del tratado, se presenta una sección de transacciones y de geometría, el tipo de problema utilizado en este apartado empieza a tener un contexto, que parten de las necesidades de la época, los problemas se clasifican en:

Transacciones mercantiles

- Problemas de trabajo
- Medias inversamente proporcionales
- Economía

Geometría

- Problemas de longitudes, áreas y volúmenes en figuras como circulo, cuadrado, rombos pirámides.
- Dimensiones de terreno

Finalmente, en el último capítulo aborda **problemas sobre testamentos** clasificados en:

- Herencias desiguales
- Herencias con cantidades fijas
- Herencias por complemento
- Herencia por manumite
- Devolución de dotes
- Pagos

En esta sección los problemas, siguen teniendo un contexto, particularmente en el entorno económico de la época, además cabe resaltar que este último apartado ocupa una gran parte del libro, y estos tipos de problemas son de ecuaciones de primer grado; contrario a los apartados anteriores que incluyen ecuaciones de segundo grado como de primer grado.

En conclusión, en tratado de al-Khwarizmi está permeado por la matemática griega, ya que involucra en sus validaciones construcciones geométricas, métodos de solución para poder resolver problemas de la época. Por lo tanto, este tratado dio luces a la matemática moderna a que sucesores de al-Khwarizmi ampliar el plan teórico establecido por él mostrando otras maneras de solucionar problemas.

2.2.2 René Descartes (1596-1650)

Diferentes escritos dicen que Descartes nació el 31 de marzo de 1596 en la ciudad de la Haye (Francia), muere en Estocolmo el 11 de febrero de 1650.

Descartes (1996) y Chica (2001) esbozar la obra ***"La geometría"***, que es objeto de estudio en este apartado, la obra se compone por tres libros, el primero trata sobre los problemas que se pueden construir empleando sólo con círculos y rectas; el segundo libro, aborda la naturaleza de las líneas curvas; y por último el libro tercero está dedicado a la construcción de problemas sólidos y súper sólidos.

Descartes empieza su trabajo basándose en dos aspectos fundamentales, en primer lugar, reconociendo que, así como en aritmética hay operaciones, en geometría se puede hacer una relación tomando un segmento como unidad y comparándolo con otros segmentos, llegando a

efectuar la operación y así determinar el resultado; en segundo lugar, si bien las operaciones aritméticas como la suma y producto cumplen ciertas propiedades como conmutatividad, neutro, entre otras, para las magnitudes geométricas no sucede lo mismo. Es por ello que la estructura algebraica entre los segmentos se convierte en un obstáculo para Descartes.

En cuanto a la resolución de problemas su gran aporte es la combinación de recursos algebraicos y geométricos. Los problemas se pueden clasificar en:

- Problemas con enunciado aritméticos
- Problemas Geométricos: triángulos,
- Problemas planos: utilizando líneas, rectas y círculos.

2.3 Sobre la Formación de Profesores de Matemáticas

Durante las últimas décadas el campo de la investigación en educación matemática ha tenido significativos aportes con relación a la formación de los profesores, este hecho surge como preocupación de los conocimientos que posee un docente, además proporcionar elementos que ayude a mejorar dicho conocimiento y maximizar las prácticas de enseñanza. Por lo tanto, La formación de los docentes depende en gran medida de la calidad de sus prácticas. A partir de lo anterior se puede enfatizar en que:

> Una de estas nociones generales consiste en la concepción del futuro profesor de matemáticas como un profesional formado y reflexivo, con dominio de las matemáticas escolares, para lo cual necesita de un plan de formación inicial que le aporte los necesarios conocimientos sobre teoría curricular, nociones generales de didáctica de la matemática y principios organizadores para considerar y

> mostrar la pluralidad de significados del conocimiento matemático, a los efectos de ser enseñado y aprendido (Bedoya, 2002, p. 40).

Lo anterior permite decir que todo profesor y particularmente el de matemáticas debe tener unos conocimientos, habilidades y destrezas que lo hacen un profesional íntegro, reflexivo y capaz en contribuir a procesos de aprendizaje y enseñanza. En cuanto al conocimiento profesional del profesor de matemáticas (CCPM) hay diferentes estudios o referentes que han aportado al respecto.

En esta dirección, Shulman (citado por Godino, 2009), es reconocido como pionero, que ha dado un gran aporte en el campo del CCPM, éste establece tres categorías en las que se constituye el conocimiento del profesor, ellas son: conocimiento de la materia o conocimiento de contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular.

La investigación de Shulman ha sido referente para implementar distintas propuestas curriculares para la formación de profesores, ya que, ha sido de base para dicho conocimiento, aspectos relacionados a la formación académica de enseñar, la estructura de la profesión docente, los fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer docente, la sabiduría que conlleva las prácticas, entre otras.

Por otra parte, Ball, Hill y Schilling (2008) en su investigación y también citados en Godino (2009) han hecho un gran aporte al campo de Educación Matemática, su investigación se relaciona con el conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Este conocimiento que posee el profesor está encerrado en dos grandes grupos: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido. Para el primer grupo, se destacan, el conocimiento común de contenido, el conocimiento de horizonte matemático y por último el conocimiento especializado de contenido.

El conocimiento común de contenido se refiere al tipo de conocimientos y habilidades utilizadas por un individuo cualquiera, los que son utilizados en diferentes entornos socioculturales. En cuanto al conocimiento especializado de contenido, es el tipo de conocimientos que debe tener un docente para el desarrollo de sus prácticas de aula, estas habilidades en matemáticas se desarrollan en todos los niveles de escolar de escolaridad de un profesor, de igual manera se fortalecen a lo largo de su ejercicio docente. Por último, el conocimiento de horizonte matemático hace referencia las relaciones que se establecen entre distintos contenidos o temas matemáticos y a su vez la conexión que tiene con los distintos contextos.

De igual manera, en el segundo grupo, referido al conocimiento pedagógico de contenido, se integra de los siguientes componentes: conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y su enseñanza, por último, el conocimiento del currículo. Este segundo grupo se concibe como los conocimientos básicos o fundamentales relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El conocimiento de contenido y los estudiantes se tienen en cuenta los procesos de aprendizaje y de razonamiento desarrollado que tienen los estudiantes, la forma en que se presentan los errores, las dificultades y las estrategias que permiten corregir dichas barreras.

El segundo componente, Conocimiento del contenido y enseñanza, se refiere a las diferentes herramientas empleadas por el profesor para acercar un contenido a sus estudiantes, también, interviene la capacidad que tiene el maestro para corregir los errores y concepciones adoptadas por sus aprendices. Finalmente, el conocimiento del currículo tiene que ver con el conocimiento que tiene el profesor sobre la organización curricular, la planificación de las diferentes actividades de los contenidos matemáticos dentro del nivel educativo en el que se desempeña. La siguiente figura presenta una síntesis de los componentes propuestos por Ball et al. (2008).

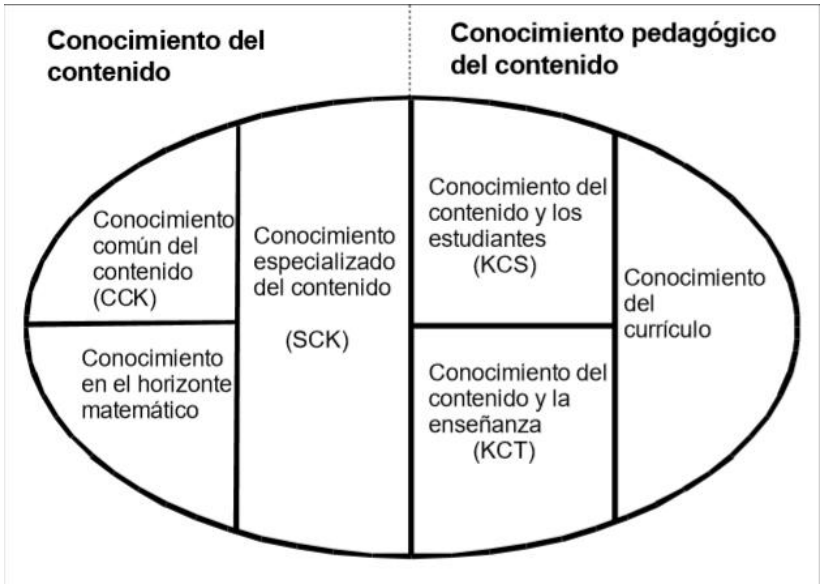

Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza. Tomado de Ball et al. (2008) en (Godino, 2009, p. 17)

En la misma línea, investigaciones como la de Mosvold, Jakobsen y Jankvist (2014), ilustran a partir de varios ejemplos las diferentes maneras en que los estudios de la historia de las matemáticas contribuyen a los dos grandes grupos: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido del modelo propuesto por Ball, Hill y Schilling. (2008). Para el primer grupo, los diferentes obstáculos epistemológicos encontrados en los estudiantes sobre cierto concepto pueden ser fortalecidos desde la evolución que ofrece la historia del mismo concepto, beneficiando así el conocimiento común de contenido.

De igual modo, la utilización de textos históricos puede ayudar a los profesores en el desarrollo de un mejor conocimiento de la historia de las matemáticas y de las matemáticas mismas, de esta manera el profesor puede encuentra una mejor manera de ayudar a sus estudiantes a entender el concepto en sí mismo, es así como la historia puede favorecer el conocimiento especializado del contenido.

Por otro lado, desde el conocimiento del contenido del horizonte, el uso de ejemplos históricos es una manera de introducir significativamente un concepto avanzado desde un punto de vista elemental, permitiendo que el profesor aprecie y comprenda las matemáticas desde los razonamientos realizados por sus estudiantes, promoviendo así un aprendizaje colectivo.

Para el segundo grupo, la historia puede favorecer el conocimiento del contenido y de los estudiantes a través de la compresión que hagan los docentes sobre las concepciones y conceptos erróneos de sus alumnos, por medio de la historia, se puede encontrar información sobre por qué cierto concepto fue rechazado o abandonado históricamente, así mismo, cómo los desarrollos históricos permitieron remediar las concepciones erróneas sobre la materia. Por otro lado, la historia con relación al conocimiento del contenido y de su enseñanza, permite que se diseñen proyectos basados en lecturas de fuentes históricas, ayudando a que los estudiantes se motiven a aceptar construcciones o teorías que fundamente el desarrollo del concepto en sí mismo.

Finalmente, para el conocimiento del contenido del currículo, la historia de las matemáticas puede proporcionar a los maestros una base más estable en relación con el saber presente con los materiales curriculares de un contenido matemático, permitiendo la elaboración de planes de estudios con base las consideraciones realizadas por matemáticos de un momento determinado de la historia.

En conclusión, las consideraciones tenidas en cuenta en la perspectiva didáctica de este trabajo son dirigidas a la formación de profesores, que buscan proporcionar competencias y conocimientos que debe poseer todo profesor de matemáticas, así pues, estas consideraciones pretenden mejorar la calidad de aprendizaje y enseñanza dentro del proceso formativo.

2.4 Aspectos metodológicos

Este trabajo está enmarcado bajo el marco metodológico de tipo exploratorio y descriptivo. Según Jimenes (1998). Los trabajos del primer tipo se relacionan por abordar campos poco conocidos, incluyendo amplias revisiones de literatura para aclarar el campo en el que se enmarca el trabajo, se considera este tipo de investigación exploratoria en el sentido de identificar las potencialidades de la HM en la FPM y en el papel que juega la resolución de problemas algebraicos. Esto, debido a que las en las investigaciones consultadas, se puede evidenciar que es un tema poco explorado, al menos desde el ámbito nacional.

Por otro lado, los trabajos del segundo tipo se sitúan sobre la base de unos conocimientos sólidos que de algún modo han alcanzado un grado de claridad, pero aún se necesita información para establecer caminos que muestren relaciones entre el campo de estudio que se aborda, en este caso, hay cierta información sobre los estudios históricos- epistemológicos, pero hace falta más claridad para relacionar este campo en la formación de los profesores de matemáticas.

Para llevar a cabo la propuesta, se considera cuatro fases, las cuales permiten dar respuesta a la pregunta de interés.

La primera y segunda fase, tiene en cuenta, los aspectos generales que enmarcan el presente trabajo es así como se realiza la presentación y documentación de la problemática, los objetivos, justificación y así mismo, se presenta el marco teórico de referencia, compuesto por dos perspectivas, histórica y epistemológica, dentro de esta se destacan dos sub perspectivas: los estudios históricos epistemológicos en la formación de profesores matemática y la resolución de

problemas algebraicos desde los tratados de al-Khwarizmi, y Descartes; por último se presenta la perspectiva didáctica de formación de profesores , bajo el modelo de Deborah Ball.

En la tercera etapa, se tienen en cuenta dos libros históricos: *al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala y The Geometry* (al-Khwarizmi, y Descartes), con base en los problemas que presentan los libros se realiza una rejilla de análisis de los problemas para caracterizar aspectos en común de los dos libros históricos sus soluciones. También se propone un análisis de los aportes de la solución de los problemas históricos a la formación del profesor de matemáticas propuestos por Deborah Ball.

Finalmente, la fase cuatro exhibe las conclusiones y reflexiones generales que son fruto del desarrollo de este trabajo y tienen relación a los objetivos específicos que guiaron la propuesta de investigación. A partir de esta investigación, y con base a las reflexiones se espera generar aportes al campo de educación matemática y la formación histórica de profesores de matemáticas, teniendo en cuenta la solución de problemas para el conocimiento del profesor.

CAPÍTULO 3: ESTUDIO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En esta sección se presenta los aspectos que corresponden al estudio histórico de la solución de problemas. Para lo cual se hace una descripción de dos obras históricas de matemáticas, por un lado, el tratado de al-Khwarizmi, **al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala**de la versión traducida por Ricardo Moreno al-Jwarizmi (2009); y, por otro lado, la obra **The Geometry** traducida por Ron Sánchez. Descartes (1996).

Para presentar el desarrollo histórico se opta por dividir el capítulo en cuatro apartados. El primer apartado, considera aspectos preliminares, como la descripción de la obra de al-Khwarizmi, también se caracterizan, enuncian y se presenta una solución de cada uno de los tipos de problemas, también se realiza un análisis de estos. En el segundo, también se realiza una caracterización de los problemas, su solución y se presenta un análisis de ellos. El tercero, ilustra los aspectos o consideraciones finales encontradas en las dos obras. Finalmente, se presenta una caracterización de las potencialidades de la solución de problemas para la formación de los profesores de matemáticas

A continuación, se presenta la tabla 2, corresponde a la construcción de una rejilla, siendo esta un aporte propio al trabajo. Es así, como se incluye algunas categorías que surgen del estudio preliminar de una selección aleatoria de algunos problemas, presentados en las obras. Para establecer dichas categorías se tiene en cuenta inicialmente las situaciones en que se presenta el problema, permitiendo así su clasificación y posteriormente se tiene en cuenta la solución de ellos, el tipo de lenguaje y otros. Es así pues que, a medida que se estudian las obras van surgiendo las categorías que constituyen una guía para el análisis de los problemas de cada texto histórico.

Tabla 2. Rejilla de análisis de los problemas

Categorías	Descripción de la categoría
Relaciones entre cantidades	Aquí se analiza si las relaciones son aditivas, multiplicativas, aditivas y multiplicativas, racionales, etc.
Tipo de problemas	Se presenta y clasifica la relación de los problemas con el medio, o la situación en el cual se plantea el problema.
Tipo de números involucrados	En esta categoría se describe el conjunto numérico al cual pertenece el número o la cantidad, la talla del número, el sistema de numeración.
Relaciones lineales	Es objeto de análisis la relación de las ecuaciones involucradas; teniendo en cuenta si intervienen ecuaciones lineales o cuadráticas.
Proceso de resolución	Se identifica el método de solución utilizado, mirando los procedimientos puestos en juego; observando de este modo las formas de interpretación a que se llegue.
Sistemas de representación	Se describe el sistema de representación inmerso en los problemas, si se presentan tablas, símbolos, gráficos y si el lenguaje corresponde a sincopados.

3.1 La resolución de problemas en las matemáticas árabes (al-Khwarizmi)

Alrededor del siglo VII en la península de Arabia, después de morir el profeta Mahoma, líder del movimiento islámico, se empieza a gestar una época de conquistas, a mano de sus sucesores, los califas. De las conquistas, los árabes se interesaron por la cultura de los pueblos conquistados, la asimilaron y la transmitieron de generación en generación, de esta manera esta civilización tuvo accesos a los saberes hindúes, griegos y otras tradiciones científicas, desde ese momento se inicia un periodo de desarrollo y contribuciones a ramas de la matemática, astronomía y otras (al-Jwarizmi, 2009).

En ese mismo sentido, investigaciones como Recalde, (2018); Meavilla, (2005); al-Jwarizmi, (2009) concuerdan que, en el año 641, con la caída de Alejandría, se pierde gran parte de la

memoria matemática antigua debido a los saqueos y desmanes causados a la biblioteca por los invasores. Lo anterior, deja entrever que bajo las conquistas hubo un periodo de decadencia en la actividad matemática. Por suerte, bajo el gobierno del califa abbasí al-Mansur se empezó a gestar un trabajo cultural como el de Alejandría, además, bajo el mandato de él, se traslada la capital de la península árabe a la ciudad de Bagdad y se convoca a científicos, traductores y otros sabios para empezar un desarrollo investigativo.

Terminado el periodo de Al-Mansur, continúan dos gobiernos, incluyendo el de Harun Al-Rasid, es en ese periodo en el que empieza la época dorada del gobierno de Bagdad. El califa, Harun, decreta buscar y recopilar manuscritos griegos, traduciendo así obras de Ptolomeo, Hipócrates y Euclides. Después del gobierno de Harun Al-Rasid, le sucede su hijo al-Mamún, la época resplandeciente de las matemáticas árabes se alcanzó bajo dicho mandato, y es en ese momento que se funda un centro de investigación y debates destinado para desarrollar los adelantos científicos de la civilización musulmana, denominado “La casa de la sabiduría”, la cual contaba con características similares a la biblioteca de Alejandría. En ella trabajó al-Khwarizmi.

Trabajos como el de Meavilla (2005) enuncia algunos métodos antiguos para la resolución de problemas elementales, utilizados por varios matemáticos de las antiguas civilizaciones, entre ellas la musulmana. Dentro de los métodos usados, se encuentra el de inversión, esta técnica consiste en hacer lo contrario a lo que se pide en el enunciado matemático, es decir, si se pide sumar, se debe restar, para llegar a la solución del problema se debe empezar desde la última parte del problema, en otras palabras, se debe iniciar de atrás hacia delante. En este sentido, la segunda técnica utilizada es el de la falsa posición, este procedimiento se usaba principalmente para resolver ciertos problemas que contenían ecuaciones de primer grado con una incógnita, sin necesidad de recurrir al simbolismo algebraico.

Finalmente, una de las características principales de la resolución de problemas en la cultura arábica de la época es que los problemas dejaron de ser resueltos desde un proceso estrictamente aritmético, articulando así demostraciones geométricas. Según Mora (2001):

> Las matemáticas árabes deben recordarse por ser muy sintéticas en geometría (Euclides) y álgebra del Oriente, que comenzó con la solución geométrica de ecuaciones cuadráticas por al- Khwarizmi y culminó en la solución geométrica de ecuaciones cúbicas a cargo de Omar Khayyam (p. 40).

3.1.1 El tratado algebraico de al-Khwarizmi

Este apartado desarrolla aspectos preliminares en cuanto a la estructura organizacional del libro, también trataremos de captar la idea de los tipos de problemas y la resolución de estos.

Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi, alrededor del año 820, tras adquirir una reputación de científico dotado, fue invitado por el califa Al-Mamun a trasladarse a Bagdad, donde fue nombrado, primero astrónomo y después, jefe de la biblioteca de la Casa de la Sabiduría. Este matemático, escribió más de media docena de obras astronómicas y matemáticas. Además de tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol, escribió dos libros sobre aritmética y álgebra que jugaron un papel muy importante en la historia de las matemáticas. La obra principal de Al-Khwarizmi es Hisab al-jabr wa'lmuqqabala que significa "ciencia de la trasposición y la reducción"escrita alrededor del año 813 y 833 bajo el reino del califa al-Mamun.

La versión del libro utilizada en el presente trabajo es una traducción de Ricardo Moreno. El texto está dividido en tres partes. La primera parte, hace una introducción histórica del Al-Khwarizmi y del tratado original, seguidamente empieza el desarrollo teórico de la obra titulado

“El libro del algebra” presentando la clase de números y las diferentes formas canónicas en varios problemas, mostrando algunos ejemplos de los seis tipos de formas normales utilizando en algunas construcciones geométricas que demuestren la validez general. Esta misma parte, también aborda las reglas de cálculo para transformar una ecuación en las diferentes formas normales multiplicandos binomios y calculando raíces cuadradas y finalmente, aplica los métodos aprendidos anteriormente y así se reducen a las seis formas normales.

La segunda parte, trata de la Geometría. En ella se aborda cuestiones breves que se resuelven algebraicamente, los diversos problemas que se presenta consideran figuras planas como círculos, diferentes clases de triángulos y cuadriláteros; y cuerpos solidos como pirámides. La última parte, ocupa la mitad del libro, presenta una colección de varios problemas de herencias y legados, en los cuales se consideran las diferentes posibilidades testamentarias y distribución de herederos.

Es importante anotar que el libro presenta una sección de notas dadas por el traductor, en las que se amplían cuestiones que sirven para la comprensión de los problemas, así mismo en parte de la introducción se enuncia que el proyecto algebraico de al-Khwarizmi es un encargo del califica, pretendiendo ser un manual que contenga problemas del contexto de la época, como de terrenos, herencias, transacciones mercantiles y otros.

También, se resalta que el libro está escrito en un lenguaje retorico, es decir, una ausencia de simbolismo, su lenguaje es puramente en lengua natural. Como lo señala Torres:

> Es importante anotar, que en el libro no aparecen símbolos matemáticos en el sentido actual; ni siquiera los números aparecen escritos en cifras, sino en palabras, es decir, no utiliza la llamada numeración arábiga. Estamos en el nivel del álgebra retórica, un texto escrito en la lengua árabe y

> con algunas representaciones geométricas para validar las reglas; en otras palabras, el sistema matemático de signos corresponde fundamentalmente al lenguaje natural (2010, p. 66).

3.1.2 Sobre los problemas y su solución

En el tratado algebraico, los problemas aparecen en dos partes. La primera parte, introduce problemas y ejemplos para sustentar aspectos teóricos, es decir, que, en dicha parte, los problemas son modelos de acuerdo con las seis diferentes formas canónicas.

Todos los problemas presentados en la parte teórica se pueden trabajar con cálculos aritméticos, y todos son resueltos por al-Khwarizmi estableciendo todas las posibilidades de combinación de las especies de números con las especies y resuelve un gran número de problemas.

> Ese gesto combinatorio sitúa el proyecto de al-Khwārizmī en el corazón de lo que hemos llamado el proyecto algebraico: la determinación de cuales son todas las posibilidades es el paso fundamental para poder resolver el *problema problematum*, el problema de los problemas, resolver todos los problemas (Puig, 2010, p.90)

al-Khwarizmi reconoce seis posibles formas canónicas, tres simples y tres compuestas a saber:

1. Tesoro igual a raíces
2. Tesoro igual a numero
3. Raíces igual a numero
4. Tesoro y raíces igual a numero
5. Tesoro y número igual a raíces
6. Raíces y número igual a tesoro

Por su parte, la segunda parte del tratado presenta problemas relacionados con la geometría y contextos comerciales o herencias. Los relacionados con la geometría aborda cuestiones breves que se resuelven a partir de fórmulas dadas; en cuanto a los problemas comerciales, estos son resueltos a partir de las formas canónicas dadas en la primera parte del tratado. Todos los problemas presentados en el tratado.

3.1.3 Las formas canónicas

A continuación, se presentan como ejemplo algunas de las seis formas canónicas, exhibidos en la primera parte del tratado. Para las formas simples, se muestra una tabla que contiene dos columnas, que ilustra la solución dada por al-Khwarizmi en lenguaje retórico y la otra es la construcción dada por la autora del presente trabajo, teniendo en cuenta las notas dadas en la traducción de Ricardo Moreno en al-Jwarizmi (2009). En cuanto a las formas compuestas, se realiza la solución desde el lenguaje retórico presentado en el libro, igualmente se ilustra la construcción de la regla.

Formas simples

- **Cuadrado igual a raíces (x^2= bx)**

Esta es la primera forma canónica que al-Khwarizmi presenta en su tratado; en lenguaje moderno matemático los problemas de esta forma se escriben como: $\boldsymbol{x^2}$= bx

En primer lugar, al-Khwarizmi propone algunos ejemplos que sirven para modelar la forma $\boldsymbol{x^2}$= b*x*, estos ejemplos se caracterizan porque hay una relación lineal entre cantidades multiplicativas.

En segundo lugar, los problemas de este tipo de forma son presentados en el capítulo que corresponde a: “sobre los seis problemas” y “diversos problemas”, ambos capítulos pertenecen al tratado algebraico. Los modelos que se presentan en el libro son de relaciones numéricas y relaciones entre el todo y la parte, estas relaciones se caracterizan por tener la siguiente insignia “divide un algo en dos partes”. A continuación, se muestra algunos problemas de la forma anteriormente señalada.

Problema 1: *Divides diez en dos partes, y multiplicas una de las dos por la otra. Después multiplicas una de ellas por sí mima, y sucede que el resultado de esta multiplicación por sí misma es igual a cuatro veces el producto de una de las partes por la otra.*

Tabla 3. Solución de la forma “Cuadrado igual a raíces”

Solución en Lenguaje Simbólico	**Solución en Lenguaje Retórico**
$(10-x)\,(x) = 10x - x^2$	La solución está en poner una de las dos partes como la raíz, la otra como diez menos la raíz, y multiplicar la raíz por diez menos la cosa., que resulta ser diez cosas menos un cuadrado.
$4x\,(10-x) = 40x-4\,x^2$	Después multiplicas por cuatro, y es cuatro veces el producto de una parte por otra, que es a su vez cuarenta cosas menos cuatro cuadrados.

$(x)(x) = x^2$ $\downarrow$ x^2=40x-4x^2	Después multiplicas la raíz por la raíz, que es una de las dos partes, y resulta que el cuadrado es igual a cuarenta raíces menos cuatro cuadrados.
x^2=40x-4x^2 $\downarrow$ $5x^2 = 40x$ $x^2 = \frac{40x}{5}$ $\downarrow$ $x^2 = 8x$	Reduces los cuatro cuadrados sumándolos sobre el cuadrado, y quedan cuarenta raíces igual a cinco cuadrados
$x^2 = 64$ x=8 $\downarrow$ 10-x = 2; x =8	y el cuadrado es igual a ocho raíces, entonces es sesenta y cuatro, y la raíz es ocho, que es aquella de las dos partes que se multiplica por sí misma. Y del diez queda 2, que es otra de las dos partes

Durante la exposición de las formas se afirma lo siguiente: “Siempre que haya varios cuadrados o una fracción del cuadrado, se convierte en un solo cuadrado, haciendo sobre las raíces lo mismo que se hizo con los cuadrados” (al-Jwarizmi, 2009, p.25). De lo anterior, se puede decir que es una manera retórica enunciada en el tratado para presentar los diferentes procedimientos, es decir, si se tiene una relación entre cantidades multiplicativas, los términos se convierten en cantidades racionales positivas, en otras palabras, se hace una transposición de términos, lo que está dividiendo pasa a multiplicar y viceversa.

- **Cuadrado de la cosa igual a número x^2= c**

Problema 2: *Divides diez en dos partes, y multiplicas cada parte por sí misma, después multiplicas diez por sí mismo, y lo que resulta de multiplicar diez por sí mismo es igual a una de las dos partes multiplicada por sí misma y multiplicada por dos más siete novenos, o igual a la otra parte por sí misma multiplicada por seis más un cuarto.*

Tabla 4. Solución de la forma “Cuadrado de la cosa igual a número”

Solución en Lenguaje Simbólico	Solución en Lenguaje Retórico
(10-*x) y (x)*	La solución está en poner una de las dos partes como la raíz, la otra como diez menos la raíz.
$\frac{(10-x)}{(x)}$= 4	Después se divide el diez menos la raíz entre la raíz para que su resultado sea cuatro
(10-*x*) =*4x*	Al multiplicar el cociente por el divisor sale la cantidad dividida, lo que da que cuatro cosas es igual a diez menos la raíz. Se separa el diez de la raíz y se suma raíces con raíces.
10 =*5x*	El resultado de la suma es cinco veces la raíz igual a diez
2=*x*	Entonces, se llega al razonamiento de que la raíz, una sola vez, es igual a dos, que es una de las dos partes

Formas compuestas

- **“Cuadrado más cosas igual a número”x^2+ bx=c**

Problema 3: *Un cuadrado más diez raíces igual a treinta y nueve dirhams, en el tratado esto significa que ¿cuál es el cuadrado que cuando sumas sobre él diez veces la raíz da igual a treinta y nueve?*

$$x^2+10x= 39$$

Se representa el cuadrado como la figura AC, cuyos lados son desconocidos. Cada uno de los lados del cuadrado equivale a la raíz, al multiplicarse con un número cualquiera sale un cierto número de raíces. Cuando se dice que con el cuadrado hay diez raíces (ver Figura 2).

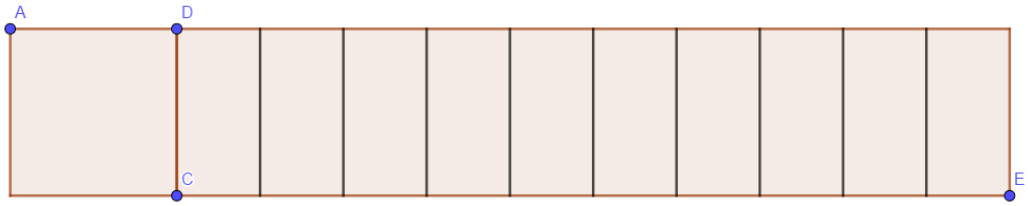

Figura 2. Lado de la raíz, multiplicado por un número cualquiera (Elaboración propia)

A continuación, se coge un cuarto de diez, y se dibuja esa cantidad en cada lado del cuadrado AC, de tal manera que se complete un cuadrado de lado igual a $2\left(\frac{10}{4}\right)$ más la raíz del cuadrado AC que tiene lado desconocido. La superficie de cada cuadrado que se formó en las esquinas del cuadrado grande equivale a $\frac{25}{4}$ (ver Figura 3)

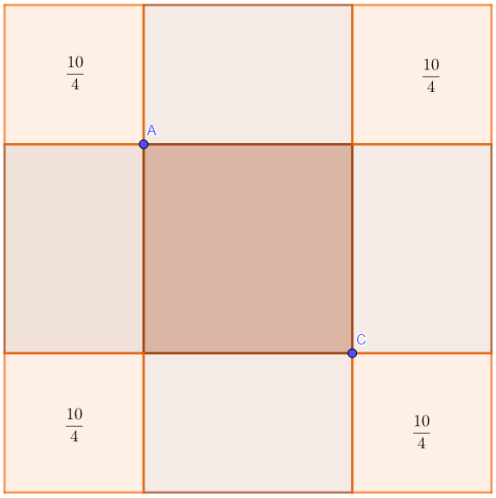

Figura 3. Representación de la completación del cuadrado (Elaboración propia)

Teniendo en cuenta la figura anterior, sabe que la superficie del cuadrado AC más las cuatro superficies que están a su alrededor (que son diez raíces) suman treinta y nueve. Por lo tanto, cuando se añaden las esquinas de valor $\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}$. Se tiene que el total de la superficie del cuadrado grande es 39 + $\mathbf{4}\left(\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}\right)$ = 39 + 25 = 64.

Entonces, todo ello vale 64, y uno de los lados del cuadrado es su raíz, que es ocho, al restar de la raíz la cuarta parte del diez dos veces (que son los extremos del lado de la figura grande), que es cinco, queda el lado 3, y esa es la raíz del cuadrado.

$$8\text{-}\ 2\left(\frac{10}{4}\right) = 8 - 5 = 3$$

- **"Cuadrado más número igual a raíces" x^2+c=bx**

Problema 4: *"Un cuadrado más veintiún dirhams es igual a diez de sus raíces"*

Se representa el cuadrado mediante una figura cuadrada *AD* cuyo lado es desconocido. Después se añade un rectángulo paralelo cuya superficie es HB y anchura HN es igual a uno de los lados de la superficie AD. La longitud del lado de las dos figuras juntas es HC, y se sabe que es diez., porque en cualquier cuadrado, si se multiplica uno de los lados por uno, se tiene la raíz de ese cuadrado. Entonces cuando se dice que un cuadrado más veintiuno es igual a diez raíces, sabemos que la longitud de lado HC es diez porque el lado CD es la raíz del cuadrado (ver Figura 4).

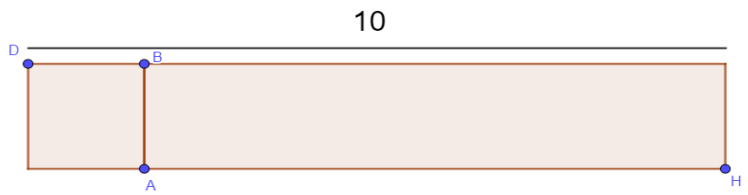

Figura 4. Representación del cuadrado más diez raíces (Elaboración propia)

Se divide el lado HC en dos mitades por el punto G. Es evidente que el segmento HG es igual al segmento GC, y que también son iguales los segmentos GT y CD. Y se prolonga el lado GT hasta una longitud igual a GC, para cuadrar la figura, y se tiene el segmento KT es igual a KM, resultando un cuadrado MT, cuyo lado es GT es evidentemente cinco (por ser lados iguales) y su superficie es veinticinco (que es el producto de la mitad del número de raíces por sí mismo). Entonces la superficie de HB es el veintiuno que se le sumo al cuadrado.

Entonces la superficie de la figura *MT* es veinticinco, cuando se quita de TM el rectángulo TH y el rectángulo RM (que suman veintiuno), queda el cuadrado pequeño RK, que es la diferencia entre veinticinco y veintiuno, que es cuatro, y su raíz es el segmento RG, igual al segmento GA, que vale dos. Y si se resta del segmento CG (que es la mitad del número de raíces), queda AC, que es tres, la raíz del cuadrado inicial. Y si se agrega sobre CG (que es la mitad del número de raíces) queda siete, que es el segmento RC que es la raíz del cuadrado mayor que ese, y cuando se aumenta sobre el veintiuno, queda igual a diez veces la raíz.

- **"Cuadrado más número igual a raíces" $x^2+c=bx$**

Problema 5: *"Un cuadrado más veintiún dirhams es igual a diez de sus raíces"*

Se representa el cuadrado mediante la figura AD de lado desconocido, y este, cubre las tres raíces y los cuatro números mencionados. En todo cuadrado uno de sus lados es igual a uno por una raíz (ver Figura 5).

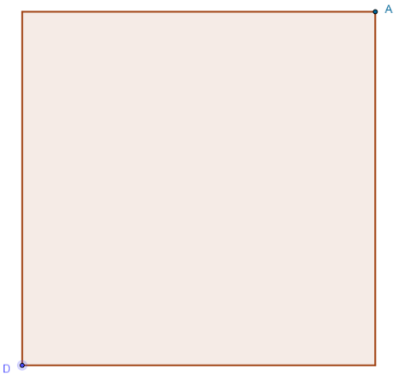

Figura 5. Representa el cuadrado de superficie AD (Elaboración propia)

Se corta del cuadrado AD, la figura HD, suponiendo que uno de sus lados, el lado HG es tres, el número de raíces es igual RD y el rectángulo HB es el cuatro que suma las raíces.

Se corta el lado GH (que es el número de raíces) en dos partes mediante el punto Y, y se dibuja con él la figura cuadrada TH, que es el producto de la mitad del número de raíces (que es uno y medio) por sí mismo, y es dos más un cuarto. Después se suma el segmento TY y TL (para igualarlo a AY). Y se tiene que LY es igual a AY y el segmento KN igual a TL. Se sabe que el rectángulo AR es el cuatro que suma a las tres raíces, y el rectángulo AN más el rectángulo KL es igual al rectángulo AR, el cual es cuatro. Es evidente que el cuadrado MY es la mitad del número de raíces (que es uno más un medio) por sí mismo (que es dos más un cuarto) más cuatro, que es la suma de los rectángulos AN más KL. Y sobra del lado del cuadrado inicial (el cuadrado AD representa al cuadrado de la raíz).

3.1.4 Análisis de los problemas de las seis formas en al-Khwarizmi

A partir del trabajo realizado por al-Khwarizmi se hace posible identificar una técnica para resolver problemas y la introducción de términos que permiten resolver un problema. Con respecto a las relaciones entre cantidades, su carácter numérico hace que exista un dominio de los números racionales positivos, teniendo en cuenta las operaciones aritméticas que actualmente se simbolizan de la siguiente manera ($+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{}$). Dentro del cálculo que él hace con la combinación de las tres especies de números (Raíz, cuadrado y número), se puede identificar que para la manipulación de las cantidades se utiliza la técnica de reducir y completar, con el objetivo de cambiar la expresión algebraicas a una de las formas canónicas, operando términos de la misma especie, de tal manera que en la construcción de la ecuación no exista ninguna cantidad negativa.

En cuanto a las relaciones lineales, los problemas de la primera parte del *cálculo de al-jabr y al-muqâbala,* se resuelven con ecuaciones cuadráticas y de primer grado, que involucran hay cantidades conocidas y desconocidas, y a su vez estas son generalmente muy pequeñas y positivas, los números pertenecen al conjunto de los números naturales y racionales positivos, así mismo se puede apreciar que los problemas que aluden a las seis formas canónicas están situados en una relación un todo y la parte (*Una cantidad dividida entre el total, menos una parte*).

Por otro lado, los problemas presentados hasta aquí no se desarrollan dentro de un contexto que modelen situaciones de la vida real. Estos se presentan desde un escenario matemático. Como lo enuncia Torres (2010) A pesar del compromiso antológico de los objetos algebraicos con lo numérico, en al-Khwarizmi, no hay una independencia antológica con lo geométrico, que compromete la validación de las reglas.

Durante la presentación de estos, no aparecen símbolos numéricos y/o matemáticos como se usan en la actualidad; los problemas y su solución aparecen escritos en lenguaje retorico, es decir, que se expresa en lenguaje natural. En otras palabras, “el algebra de al-Khwarizmi no es simbólica en este sentido: ni las especies ni las cantidades desconocidas ni las cantidades conocidas están representadas mediante letras, ningún signo distinto de las palabras del lenguaje vernáculo” (Puig, 2010, p 101).

A su vez, la clase de problemas tratados en la primera parte del libro están presentados en dos clases de enunciados: sobre un número que se ha dividido en dos partes, y su incógnita está representada en las dos partes que se ha dividido diez; mientras que en la segunda categoría esta relacionadas a partir de una especie de número que se le ha realizado algunas operaciones aritméticas y se da el resultado de estas en dirhams.

El tratado algebraico deja apreciar una exposición de la teoría de ecuaciones, en las que estas son trasformadas a partir de varias operaciones llevando un problema numérico o geométrico a uno de los modelos permitidos

La resolución de los problemas de la primera parte del libro de al-Khwarizmi se desarrolla en varias en etapas, la primera, es la construcción de la ecuación a partir del enunciado del problema en sí, la reducción a la forma, la aplicación de la regla y finalmente se obtiene el resultado.

La clase problemas presentados anteriormente y tomados del tratado algebraico de al-Khwarizmi se caracterizan por ser relaciones: de números entre el todo y la parte y entre cantidades multiplicativas y aditivas que son conocidas y desconocidas.

3.1.5 Problemas geométricos

A continuación, se presentan como ejemplo algunos problemas geométricos, que abordan cuestiones sencillas de problemas de medidas de áreas, longitudes y volúmenes de figuras geométricas. Exhibidos, así mismo, se ilustra la solución dada por al-Khwarizmi en lenguaje retórico y la otra es la construcción dada por la autora del presente trabajo, teniendo en cuenta las notas dadas en la traducción de Ricardo Moreno.

Cuadriláteros

Esta categoría presenta ejemplos relacionados con figuras planas como cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos. Iniciando el capítulo sobre los problemas geométrico, Al- Kwharizmi presenta la fórmula para solucionar problemas que involucren figuras como las mencionadas anteriormente. A continuación, se presenta algunos de los ejemplos propuestos en el tratado algebraico.

- ***Cuadrados***

Problema 6: *Un trozo de tierra cuadrado en la que cada lado mide cinco brazas, su superficie es veinticinco brazas, cuadradas (ver Figura 6).*

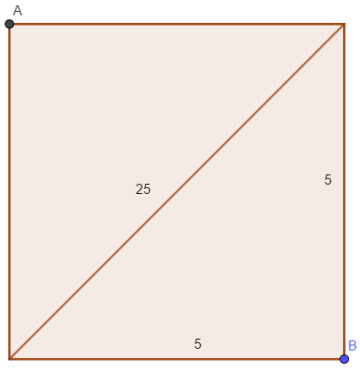

Figura 6. Representación del cuadrado de cinco brazas de lado

Solución. En lo que toca a los cuadriláteros, para hallar la superficie de la figura solo se debe multiplica el largo por el ancho.

$$L \times A = \text{Superficie}$$

$$5 \times 5 = 25$$

- ***Triángulos***

En esta categoría se presentan 3 ejemplos de problemas. Cada problema está relacionado a tres tipos de triángulos: Rectángulo, Obtusángulo y Acutángulo, dependiendo del tipo de triangulo la fórmula suministrada en el libro es diferente. Seguidamente exponemos algunos ejemplos para cada clase, pero, solo se dará la solución de uno de ellos.

Triángulo Acutángulo

Problema 7: *Sea un triángulo de lados iguales y ángulos agudos, cada uno de cuyos lados mide diez brazas (ver Figura 7).*

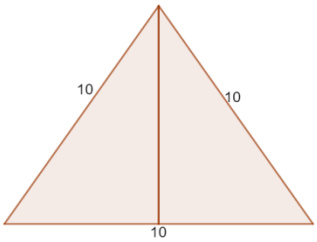

Figura 7. Representación del triángulo acutángulo

Solución. La superficie de este triángulo se conoce sabiendo su altura y el pie de su altura. Se debe saber que en todo par de lados iguales de un triángulo sale una altura sobre su base, con la cual forma un ángulo recto sobre el punto medio (Cuando son iguales los lados). En este triángulo el pie de la altura de cualquiera de sus lados no cae sino en la mitad, en este caso cinco brazas. Para calcular la altura se multiplica cinco por sí mismo, y uno de los lados que es diez, por sí mismo, y salen cien, se resta de ello, el resultado del cinco por sí mismo (que es veinticinco) y queda setenta y cinco, se coge su raíz y esa es la altura, que se convierte en uno de los lados del triángulo rectángulo. Y si se quiere saber su superficie, se multiplica la raíz de setenta y cinco por la mitad de la base (cinco). Luego, se multiplica cinco por sí mismo para que sea la raíz de setenta y cinco, se coge la raíz de esto y ésa es la superficie, que es igual a cuarenta y tres más algo pequeño.

La altura del triángulo se halla mediante el teorema de Pitágoras:

$$Altura = \sqrt[2]{10^2 \ - 5^2} = \sqrt[2]{100 - 25} = \sqrt[2]{75}$$

Para calcular la superficie del triángulo al-Khwarizmi introduce factores dentro de la raíz, contrario a lo que se hace en la actualidad.

$$\text{Superficie} = 5\sqrt[2]{75} = \ \sqrt[2]{75 \times 25} = \sqrt[2]{1875} = \ 43{,}301 \ldots$$

La parte decimal es lo que Al-Khwarizmi llama en la solución “algo pequeño o parte pequeña”

3.1.6 Problemas de transacciones mercantiles y testamentos

Los problemas caracterizados en esta sección son de tres tipos: Trabajo, medidas inversamente proporcionales y herencias Cada uno se soluciona teniendo en cuenta las seis formas normales presentadas en el tratado.

Los siguientes problemas, exhiben los diferentes tipos de problemas que se trabajan en la sección de herencias y transacciones mercantiles del tratado.

- ***Trabajo***

Problema 8: *Un comerciante paga a alguien diez dirhams por mes. Si trabajó seis días ¿Qué tanto le corresponde?*

La solución está en poner los treinta días que tiene el mes como la medida, los diez dirhams es el precio, seis es la cantidad y la porción a la que se quiere llegar es el total.

$$\frac{30}{10} = \frac{6}{x}$$

Por propiedad de proporciones se tiene que:

$$30x = 60$$

$$x = \frac{60}{30}$$

Entonces, el total de lo que corresponde es 2 dirhams.

- ***Medias inversamente proporcionales***

Problema 9: *Obtienes diez a cambio de seis ¿Cuánto obtienes a cambio de cuatro?*

Solución. Entonces, al-Khwarizmi supone que diez es la medida, seis es el precio, el cuanto puedes obtener es el número desconocido y cuatro es el total. La medida (diez) es inversamente proporcional al total (cuatro), y se multiplica el diez por el cuatro, que corresponde a las dos medidas inversamente proporcionales, y el resultado es cuarenta, ese valor se divide entre el precio (seis), y salen dos más dos tercios, y ese es el número desconocido.

1) $\frac{10}{6} = \frac{x}{4}$

Por propiedad de proporciones se tiene que:

2) $10 \times 4 = 6x$ Realizando la multiplicación se tiene: $40 = 6x$

3) Finamente $\frac{40}{6} = x$

La cantidad desconocida corresponde: $x = 6 + \frac{2}{3}$

3.1.7 Análisis de los problemas geométricos y mercantiles en al-Khwarizmi

Teniendo en cuenta los dos últimos apartados o capítulos del libro de al-Khwarizmi, se puede apreciar que se mantiene una estrecha relación entre los problemas que modelan específicamente cada forma normal con los que se refiere a los dos apartados posteriores de (geométricos, transacciones mercantiles), en dichas categorías.

El primer aspecto que se debe reconocer es la relación entre las cantidades involucradas. Para los problemas geométricos se evidencia una relación entre magnitudes que son aditivas y multiplicativas, así mismo siempre intervienen cantidades positivas. Por otro lado, en los problemas de transacciones mercantiles y herencias, intervienen cantidades corresponde a enteros y racionales positivos, también se puede apreciar que en todos los enunciados siempre existe un carácter monetario que se asocia a las tres clases de números.

Otro aspecto relevante, corresponde a la relación que tiene los problemas geométricos, de herencias y de transacciones mercantiles, respecto al contexto, es que todos los enunciados están permeados de las características sociales, políticas y geográficas de la época, así mismo a las necesidades de la civilización árabe, un claro ejemplo de estos problemas puede ser los que están relacionados con las áreas de un terreno, los legados y herencia de una generación a otra y los que tienen que ver con asuntos comerciales. En suma, todos los problemas que están en las dos últimas partes del libro corresponden a situaciones de la realidad.

En cuanto a la resolución y la clase de problemas relacionados en la categoría de geometría corresponden a relaciones numéricas, hay una correspondencia entre número y la magnitud, así mismo, en esta categoría al-Khwarizmi hace uso de la representación de figuras geométricas planas

y de sólidos, con el deseo de que sirva como herramienta para el lector como validación visual. En los problemas de comerciales y de herencias no se utiliza ninguna ilustración o grafico que sirva de apoyo para el razonamiento, en esta categoría hay relaciones entre magnitudes, expresiones entre el todo y la parte, el tipo de cantidades que se trabajan son proporcionales, enteras y racionales positivas, todas ellas representadas desde un lenguaje retorico, en el que existe una total ausencia del simbolismo matemático.

En cuanto al proceso de resolución, el árabe utiliza la misma metodología descrita en el análisis de los problemas anteriores. Teniendo en cuenta lo anterior, al-Khwarizmi opera las expresiones dadas en los enunciados transformándolas a las formas seis formas normales, dando una ecuación de segundo grado. Contrario a los problemas geométricos, en estos el algebrista propone una formula general que se va modificando, dependiendo de la forma geométrica a la que se refiere, es decir, para el caso de los triángulos, él propone tres métodos y cada uno depende de la clase de la figura (obtuso, rectángulo, acutángulo), así mismo para el caso de los cuadriláteros, en el rombo la regla no es largo por ancho (A x L).

Finalmente, el lugar de la pregunta de los problemas descritos anteriormente solo es evidente en los casos que tiene que ver con: trabajos y medidas inversamente proporcionales. Por lo anterior, se puede decir, que, sí hay lugar para la pregunta, pero solo en algunos problemas, para los demás se presenta un enunciado que permite modelarlo a una expresión algebraica que pueda ser resuelta.

3.2 La obra algebraica: La Geometría

La Geometría o The Geometry de René Descartes está compuesto de tres libros: el primero, presenta las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, además expone brevemente la designación de segmentos por letras y finalmente aborda asuntos sobre los problemas que se pueden construir empleando solo rectas y círculos.

El segundo libro trata sobre la clasificación de curvas y se plantea los problemas planos, sólidos y lineales que se resuelven con ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado y finalmente aborda el problema de Pappus para llegar a la ecuación de segundo grado.

En cuanto al tercer libro, aborda los problemas sólidos y super sólidos. Así mimo, se hace una discusión sobre las raíces y el número de soluciones de una ecuación dependiendo de su grado. Finalmente trabaja los problemas de la trisección del ángulo y duplicación del cubo y enfatiza en que estos problemas pueden reducirse a los problemas de tercer grado.

Por otro lado, Álvarez (2000) refiere que las operaciones definidas en la Geometría, constituye una de las primeras propuestas para la construcción de los problemas geométricos. En el tratado Descartes no define las operaciones de suma y de resta, pero si define la multiplicación, división y extracción de raíz.

Descartes plantea la multiplicación de la siguiente forma: Sea, por ejemplo, AB la unidad y que sea preciso multiplicar BD por BC; solo debo unir los puntos A y C, trazando DE paralela a CA, siendo BE el resultado de esta multiplicación (ver Figura 8).

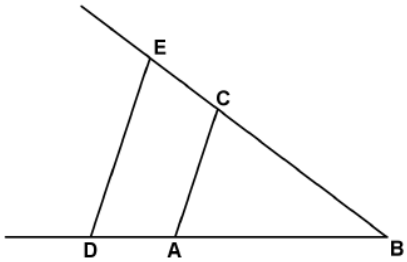

Figura 8. Representación de la multiplicación desde el teorema de Thales. Tomada de Murcia (2009, p. 42)

En este caso Descartes resuelve la operación desde la semejanza de triángulos.

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE}$$

Descartes considera el segmento BA como la unidad. Entonces, se tiene:

$$BE \times BA = BC \times BD$$

Lo anterior se puede reescribir como: $BE = BC \times BD$

De acuerdo con lo anterior, para garantizar que la operación del producto sea cerrada y este bien definida. Para realizar las diferentes operaciones es necesario designar magnitudes de los segmentos en forma algebraica. Al respecto Álvarez (2000) afirma que:

> Claramente el objetivo cartesiano es precisamente el de eliminar esta diferencia existente entre distintas magnitudes geométricas mediante la búsqueda de una *forma única de la magnitud*, dada a través de los segmentos. Es esta, a nuestro juicio, la condición de posibilidad de que pueda surgir una lectura algebraica de la geometría: cuando el objetivo de esta, el estudio de las magnitudes continuas es susceptible de un tratamiento unitario a través de una *forma* por medio de la cual todas ellas pueden

> ser representadas, haciendo posible así el manejo de la forma abstracta de la magnitud geométrica (p. 37)

Para la división, Descartes hace uso de la cuarta proporcionalidad O bien, si es preciso dividir *LE* por *BD*, habiendo unido los puntos *E* y *D*, se traza *CA* paralela a *DE*, siendo pues *BC* es el resultado de tal división.

Teniendo en cuenta la Figura 8, se tiene la proporción:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$$

Sabiendo que BA es el segmento unidad, y utilizando el teorema de Thales tenemos:

$$\frac{BE}{BD} \times BA = BC$$

$$\frac{BE}{BD} = BC$$

En cuanto la extracción de raíces, se hace la siguiente conversión FG = μ, GH = a, se tiene que:

$$\frac{GI}{\mu} = \frac{a}{GI}$$

Entonces, se tiene que GI × GI = $\mu \times a$

es decir que $(GI)^2 = a$; por consiguiente, $\sqrt[2]{GI} = a^2$

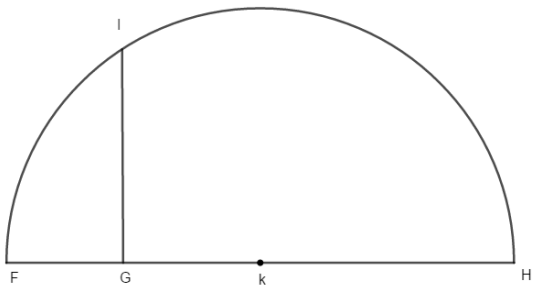

Figura 9. Representación de la extracción de raíces (Elaboración propia)

Álvarez 2000 Las operaciones definidas para los segmentos, con las cuales descartes pretende reducir el tratado de magnitudes dado por Euclides, no es suficiente para explicar la necesidad de dicho recurso para la construcción de los problemas geométrico.

3.2.1 Sobre los problemas y su solución

En su tratado, Descartes propone el método analítico para poner en ecuaciones cualquier problema geométrico y así encontrar la solución**.** Álvarez (2000) refiere que todos los problemas de Geometría pueden fácilmente ser reducidos a términos tales,que se reconozcan la longitud de algunas líneas. En el mismo sentido, Bello y Forero (2016), enfatizan que Descartes tenía un método fundamentado en suponer que el problema estaba resuelto para establecer relaciones geométricas entre segmentos y así emplear un método simbólico, que le daba la posibilidad de moverse con los algoritmos y procedimientos para llegar a la conclusión a partir de expresiones obtenidas

La técnica algebraica cartesiana utilizada por este celebre francés para poner un problema en ecuaciones, enunciado en Malagón y Valoyes (2018); Álvarez (2000) se sintetiza en los siguientes puntos:

1. Suponer que el problema ya se encuentra resuelto.
2. Nombrar todas las líneas involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.
3. Bajo la condición 1, se debe encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las desconocidas.
4. Bajo el último punto es posible expresar de dos maneras distinta una misma relación. La igualdad de estas dos expresiones es lo que constituye una ecuación.
5. La ecuación se debe resolver. Los requerimientos constructivos del problema están dados por los requerimientos constructivos de la ecuación. (Álvarez, 2000, p. 43).

3.2.2 Problemas planos: El problema de Pappus

> Teniendo tres, cuatro o un número mayor de rectas dadas en posición, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto, guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no haya sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro. O bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de la

multiplicación de cuatro guarde la proporción dada con el resultado obtenido de las otras cuatro (Descartes, 1996, p. 401).

Teniendo en cuenta los pasos anteriores, para la resolución de este problema Descartes asume que existe un punto C que satisface las condiciones dadas en el problema y toma las cuatro líneas dadas en posición (ver Figura 10).

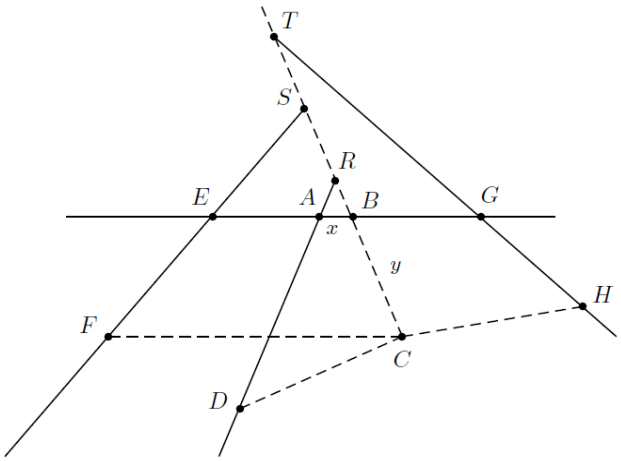

Figura 10. Representación del problema de Pappus. Tomada de Recalde (2018, p. 202)

1) Para la solución del problema, Descartes supone que el problema se encuentra resuelto.

Así mismo, él asume lo siguiente:

Sean AB, AD, EF y GH, etc., varias líneas dadas, debiendo hallarse un punto como C, desde el que trazando varias rectas sobre líneas dadas, como CB, CD, CF y CH, de modo que los ángulos CBA, CDA, CFE y CHG sea dados, y de modo tal que resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema (Descartes, 1996, pp. 402-403)

Dado lo anterior es posible suponer que el resultado de la multiplicación de dos de las líneas es igual al producto de las otras dos:

CB × CH = CD × CF

2) El segundo paso del método es designar las líneas conocidas y desconocidas. En ese caso, Descartes asigna como x al segmento de la línea AB comprendido entre los puntos A y B; y como y a CB. Las líneas se prolongan de modo que se corte la líneaAB en los puntos A, E, G, así mismo corta BC en puntos R, S, T. Como los ángulos dados del triángulo formado por los puntos ARB son dados.

La solución de este problema pretende encontrar todos los puntos (*x, y*) que constituyen la curva.

> Entonces, la designación mediante simbolismo algebraico de las magnitudes involucradas en el problema representa para descartes una "economía de pensamiento", ya que puede abandonar -aunque momentáneamente- el campo geométrico y procede en el sintáctico algebraico, lo que nos permite concluir que dicha asignación no solo es nominalista sino fundamentalmente operatoria. (Malagón y Valoyes, 2011, p,109)

3) Identificar las relaciones entre las magnitudes dadas en la condición 1, supone comparar las magnitudes mediante el establecimiento de las proporciones entre ellas. Para poder efectuar las proporciones se da el parámetro *z* como la unidad común a todas las relaciones. Descartes establece la proporción que hay entre los lados AB y BR que es dada, como *z* a *b* (se puede encontrar b como la cuarta proporcional). De esta manera se tiene:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$$

Como *AB* es igual a *x*, a partir de la definición dada para el producto y el cociente, y dado la homogeneidad entre las cuatro magnitudes se tiene:

$$(BR).z = (AB)\ .b$$

Reemplazando se tiene:

$$\text{BR}= \frac{xb}{z}$$

Teniendo en cuenta la figura, se tiene lo siguiente:

CR= $y + \frac{xb}{z}$

Entonces, en el triángulo DRC se conocen los tres ángulos que son dados, también se tiene la proporción que hay entre los lados CR y CD, se indica como *z* a *c*, de modo que si

CR= $y + \frac{xb}{z}$**,** entonces se tienen:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$$

Después se procede a multiplicar las magnitudes

$$(CD).z = CR\ .c$$

Se despeja CD:

$$CD = \frac{c.CR}{z}$$

$CD = y + \frac{xb}{z}\left(\frac{c}{z}\right)$

Finalmente se tiene: $CD = \frac{cy}{z} + \frac{cxb}{z^2}$

Mediante la técnica de comparar magnitudes utilizada por Descartes, se procede de la misma manera para tener la longitud de los segmentos CF y CH. Encontrando así que las cuatro líneas CH, CD, CF y CB se expresan de la siguiente manera:

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

$$CF = \frac{bcx + czy}{z^2}$$

$$CD = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

$$CB = y$$

Cada una de las líneas anteriores, tiene una expresión del tipo $\Lambda = \alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x$

4) En este sentido, el cuarto paso de la técnica consiste en expresar de dos maneras distintas una misma relación.

Las condiciones dadas al inicio del problema permiten suponer que el productor de dos líneas es igual al producto de otras dos:

CB × CH = CD × CF

Dado a que en el paso anterior se había encontrado expresiones algebraicas para las líneas CH, CD, CF y CB, el producto de la multiplicación es equivalente a lo siguiente:

$$y\,(\alpha_1 x + \beta_1 x + \gamma_1 x) = (\alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3 x)\,(\alpha_2 x + \beta_2 x + \gamma_2 x)$$

$$x^2 = \pm\, ax \pm b^2$$

3.2.3 Problema sobre curvas: Construcción mecánica y ecuación de la hipérbola

A continuación, se toma como ejemplo uno de los problemas presentados en el capítulo III en Descarte (1996)

Supongamos que deseo saber a qué clase pertenece la línea EC, que imagino descrita por la intersección de la regla GL, y del plano rectilíneo CNKL cuyo lado KN es prolongado indefinidamente hacia C, y que moviéndose sobre el plano en línea recta (de tal forma que su diámetro KL se encuentre siempre aplicado sobre algún lugar de la línea BA, prolongada por ambos extremos) da lugar a un movimiento circular de esta regla GL, alrededor del punto G, puesto que tal regla está unida de modo a CNKL que pasa siempre por el punto L (ver Figura 11).

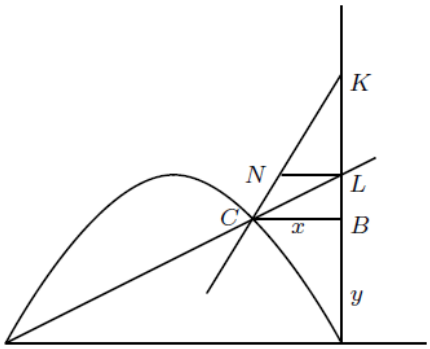

Figura 11. Representación del ejemplo anterior. Tomado de: Recalde (2018, p. 208)

El procedimiento es el siguiente:

Se establece las relaciones entre las magnitudes

$$\frac{LN}{LK} = \frac{CB}{BK}$$

Se hace una conversión entre las magnitudes involucradas

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$$

Se despeja el segmento BK y se tiene lo siguiente

$$BK = \frac{b}{c} y$$

$$BL = BK - b = \left(\frac{b}{c}\right) y - b$$

$$AL = x + \left(\frac{b}{c}\right) y - b$$

Como los triángulos LBC y LAG son semejantes, se tiene que:

$$\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{LA}$$

Lo anterior, implica una cadena de ecuaciones

$$\frac{y}{\left(\frac{b}{c}\right) y - b} = \frac{a}{x + \left(\frac{b}{c}\right) y - b}$$

Al realizar las operaciones correspondientes de las ecuaciones se tiene:

$$y \left(x + \left(\frac{b}{c}\right) y - b\right) = a \left(\left(\frac{b}{c}\right) y - b\right)$$

Finalmente se tiene, $y^2 = ay - \frac{c}{b} xy + cy - a$

Como la ecuación que Descartes reconoce como la ecuación de una hipérbola.

3.2.4 Problemas sólidos y más sólidos: Trisección del ángulo

Si deseamos dividir el ángulo NOP, o bien el arco o porción del circulo NQTP en tres partes iguales, tomando NO =1 como el radio del circulo, NP = q como la cuerda del arco dado y NQ = z para la cuerda que corresponde al tercio del arco dado, tenemos que la ecuación es $z^3 = 3z - q$ (ver Figura 12)

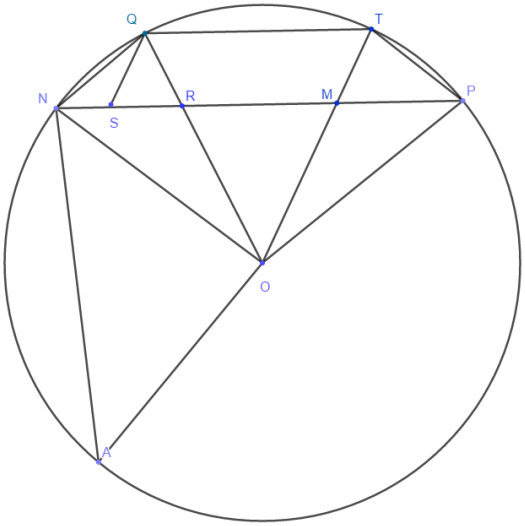

Figura 12. Trisección del ángulo (Elaboración propia)

Al tomar QS paralelo a TO se tiene que:

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR}$$

De los triángulos inscritos en la circunferencia se establece una semejanza:

$$\frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}$$

Como los triángulos QNR y QRS son semejantes. De las dos igualdades se tiene:

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}$$

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{z}{z^2} \; y \quad \frac{QR}{RS} = \frac{z^2}{z^3}$$

De los pasos anteriores, Descartes llega al razonamiento;

$$z^3 = 3z - q$$

3.2.5 Análisis de los problemas y su solución en Descartes

Se finaliza este apartado presentando un análisis de los problemas y algunas características de la resolución de ellos, en el libro de la Geometría de Descartes.

En primer lugar, se puede reconocer que los problemas presentados a lo largo del libro se caracterizan por ser de tres tipos: planos, sobre curvas y los sólidos. Para la solución de cada clase, Descartes establece una comparación entre magnitudes llevando a establecer una proporción en ellas, permitiendo la manipulación entre los objetos inmersos.

En segundo lugar, los problemas presentados en la Geometría están dados en un contexto netamente matemático y geométrico, sin ninguna conexión con situaciones de la vida real. Así mismo, se puede evidenciar que Descartes realiza cálculos con radicales, razones y proporciones a partir de la representación gráfica de segmentos, esto deja entrever que, al otorgar unas estructuras operatorias, se establece una relación entre el número y la longitud de los segmentos.

De igual manera, se puede evidenciar que para la solución de los problemas se trabajan diferentes casos a partir de una ecuación. Estos tipos son: cuadráticas o de segundo grado que incluyen una o dos variables y estos corresponden a los problemas planos, y las de grado superior a tres que son reducida a una expresión cubica, que están relacionados con el tercer tipo, que son

los sólidos. De otro lado, en el proceso de resolución de cada problema, se puede identificar un método o regla denominada la técnica algebraica cartesiana, que se basa en cinco pasos. Este modelo permite homogenizar el algebra y la geometría, logrando así resolver cualquier tipo problema.

La asignación de incógnitas, parámetros y letras para las líneas o segmentos involucrados permiten la operación entre segmentos como si tuvieran un carácter numérico siendo posible caracterizar la dependencia y divisibilidad que existe entre los objectos involucrados, de esta relación permite encontrar una ecuación general que expresa la relación entre los segmentos designados, llegando a la resolución de la expresión encontrada, pues tal como lo reconoce Murcia (2009) Al dotar de estructura algébrica a los segmentos Descartes establece una correspondencia operatoria entre los números y las longitudes de los segmentos. Por lo tanto, no se opera con los segmentos sino con la representación algebraica de sus longitudes.

Por lo que se refiere al sistema de representación, se resalta que a lo largo de la resolución del problema Descartes siempre incluye gráficas y una interpretación geométrica, de las que involucran variables y parámetros. Para los primeros generalmente utiliza las primeras letras del abecedario y en las últimas se denominan con las primeras letras.

3.3 Consideraciones finales de las obras históricas

Se finaliza este capítulo presentando algunos aspectos en común de los problemas y su solución que fueron ilustrados de los libros. En primer lugar, en las obras estudiadas se puede evidenciar que la representación de las cantidades dadas en los problemas se exhibidas desde dos etapas del lenguaje algebraico, por un lado, está el lenguaje simbólico, en el que se introduce una notación y la solución a los problemas matemáticos se expresa mediante fórmulas; por otro lado, el retorico, con una total ausencia de simbolismo. En ambas, la mayoría de los conceptos son definidos, como en el caso de las operaciones empleadas en la aritmética. En un apartado anterior se expresa que en el tratado de al-Khwarizmi aborda un lenguaje retorico, a pesar de que no había una evolución en cuanto al simbolismo algebraico se incluye la noción de igualdad y se toma la extracción de raíz como una operación fundamental.

Por lo que se refiere a Descarte, la designación de las magnitudes geométricas a través de letras mayúsculas y la utilización de gráficos permiten establecer un estatus diferente en cuanto a la manera de solucionar problemas.

De lo anterior, se podría pensar que, a pesar de la ausencia simbólica en el álgebra árabe, el establecimiento de formas canónicas permitió un avance hacia procesos de generalización para representar diferentes situaciones del contexto histórico, lo que da pie a que sucesores como Descartes puedan tomar esos legados y fundar una homogenización de procesos algebraicos, geométricos y aritméticos para la solución de problemas.

En segundo lugar, los problemas presentados en la Geometría están inmersos en un contexto netamente matemático y geométrico, sin ninguna conexión con situaciones de la vida real. Este

carácter, permite que Descartes manipule mejor los objetos tratados, así mismo este carácter permitió un avance en cuanto al simbolismo con relación al del árabe.

A partir de los procedimientos realizados por al-Khwarizmi y Descartes se resalta que la representación gráfica tuvo un papel predominante para apoyar los razonamientos y poder complementar los argumentos desde dos niveles, geométrico y algebraico.

> Descartes enriquece no solo el método, sino también las cualidades investigativas en quien resuelve problemas; fortalece la idea de uso de representaciones y herramientas en la solución de problemas geométricos, y lleva a la persona que resuelve a cultivar una actividad principal en matemáticas, la del *descubrimiento* (Bello y Forero, 2016, p. 55).

En suma, se puede señalar que el texto de al-Khwarizmi tiene como objetivo ser un manual para las personas que les pueda servir sobre problemas de la época, como transacciones comerciales, terrenos y otros. En el texto se exponen diferentes clases de problemas desde un conjunto de formas y procedimientos posibles, contrario al tratado La Geometría, este libro no es un manual, el tratado no puede estar clasificado a lo que hoy se conoce como texto escolar, porque en él se presentan resultados y afirmaciones que requieren para su comprensión reconstruir las demostraciones y pasos intermedios que el autor ha utilizado, pero que no aparecen escritos (Murcia, 2009).

De acuerdo con lo anterior, una diferencia notoria, es que en al-Khwarizmi, el uso y la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas emergen como una necesidad de tratar problemas de la vida cotidiana tales como repartición de herencias, agrimensura y comercio. Por consiguiente, como afirma Bello & Forero (2016) el trabajo cartesiano es bastante enriquecedor en cuanto al uso de una diversidad de representaciones para referirse a las situaciones geométricas planteadas,

además presenta diferentes relaciones entre estas representaciones, lo que hace un fundamento principal en el trabajo del álgebra y geometría.

3.4 Potencialidades de la historia de la resolución de problemas en la FPM

En este apartado se presenta un análisis, en cuanto a los aportes de la solución de problemas en la historia del álgebra a la formación inicial de profesores de matemáticas. De lo anterior, se acoge el modelo planteado por Ball, Hill y Schilling (2008), porque es una de las teorías más recientes en el campo de la EM y se basa en las categorías propuestas por Shulman (Citado en Godino, 2009), pero las dimensiones propuestas por Ball, Hill y Schilling (2008), se organizan de manera diferente y estas dimensiones están relacionadas desde el conocimiento matemático a enseñar y desde la misma, También es preciso señalar que esta teoría escogida tiene una estrecha relación entre la HM y la FPM.

La siguiente tabla, corresponde a una rejilla de análisis, que surge desde la comprensión y estudio preliminar de las categorías del conocimiento matemático y pedagógico que debe tener un profesor propuestas por Ball, Hill y Schilling (2008). En este sentido, lo encontrado en los análisis de los problemas se articula con la siguiente rejilla, desde las consideraciones de la FPM y la HM mostradas por Mosvold, Jakobsen y Jankvist (2014), permitiendo llegar a una caracterización de las potencialidades.

Tabla 5. Rejilla de análisis sobre la FPM

Categoría		Descripción
Conocimiento matemático del contenido	**Conocimiento común de contenido**	En esta categoría los profesores deben tener un vasto dominio de las matemáticas, que incluya habilidades de resolución de problemas, conceptos, teoremas y operaciones matemáticas.
	Conocimiento especializado del contenido	Es el tipo de conocimientos que es exclusivo de la profesión docente, que contribuye al desarrollo de las prácticas de aula.
	Conocimiento del horizonte matemático	Los profesores deben conocer cómo está compuesto los diferentes conceptos matemáticos y de qué manera están relacionados con otros contenidos.
Conocimiento pedagógico del contenido	**Conocimiento de contenido y de los estudiantes**	Los profesores necesitan conocer las diferentes teorías sobre como los estudiantes piensan conocen y aprenden matemáticas.
	Conocimiento contenido y la enseñanza	El profesor debe hacer uso de diferentes herramientas didácticas para enseñar un tema.
	Conocimiento del currículo	Debe tener un conocimiento sobre los diferentes modelos, objetivos, organización y planificación de los planes de estudios que deben de ser enseñados dentro del nivel educativo que desempeñan.

Caracterización de las potencialidades de la solución de problemas integrando elementos del conocimiento del profesor de matemáticas.

A continuación, se mencionan algunos aportes del estudio histórico realizado desde las categorías presentes en el modelo del conocimiento matemático MKT. Estas consideraciones o aportes son producto de la articulación entre los análisis presentados en las dos obras históricas y las categorías dadas en la rejilla de análisis anterior.

La solución de problemas en al-Khwarizmi y Descartes, desde conocimiento común aporta a la formación del profesor y a su conocimiento profesional en los siguientes aspectos:

- Tener un vasto dominio sobre las matemáticas elementales, en el sentido de conocer conceptos, problemas, diferentes técnicas de solución y teoremas, ofreciéndole un horizonte para reconocer las dificultades y limitaciones adquiridas de una manera incorrecta por sus estudiantes. Así mismo, el conocimiento sobre la solución de problemas algebraicos al fomenta el establecimiento de relaciones sobre procesos, de validación geométrica y matemática.

- Las reglas o procedimientos utilizados por al-Khwarizmi y Descartes permiten apreciar la evolución y las dificultades que se tuvo en la formación de conceptos como la teoría de las ecuaciones y los métodos de resolución. El conocimiento histórico de las teorías matemáticas beneficia a los profesores en las diferentes orientaciones para que los estudiantes adquieran conocimiento sobre la generalización y las también de la evolución de los diferentes técnicas o procesos de resolución y los sistemas de representación inmersos en ciertos conceptos.

La solución de problemas desde el punto de vista del conocimiento especializado potencializa el conocimiento del profesor en lo siguiente:

- La solución de los problemas presentados en este trabajo, pueden proporcionar insumos al profesor para conocer los ejemplos o problemas que son relevantes en la historia, llevarlos a la clase con la intención de que los estudiantes entiendan relación de la geometría y el álgebra. Al utilizar libros históricos como los abordados en este trabajo, en la enseñanza o

el aprendizaje de alguna teoría matemática, así mismo desde la utilización de herramientas pedagógicas como la selección de ejemplos relevantes para su actividad de aula, selección de ejercicios apropiados, evaluación de tareas, diseño de problemas matemáticos, puede ser un aporte a la formación de profesores.

- Conocer el desarrollo que tuvo teoría de ecuaciones desde los trabajos realizados permiten comprender las limitaciones del lenguaje algebraico, la ausencia simbólica en el álgebra árabe para el establecimiento de unas clases de ecuaciones permitiendo así la evolución histórica del concepto matemático hacia procesos de generalización, aportan a la compresión del objeto por parte del profesor, también le permiten comprender porque cierto concepto puede ser difícil en el aprendizaje, desde los diferentes obstáculos que estuvieron presentes en el desarrollo del concepto.

- El estudio histórico realizado de los problemas de al-Khwarizmi y Descartes, se puede considerar como una fuente de insumos para el profesor en su quehacer educativo, desde el punto de vista que él puede ayudar a que sus estudiantes a que entiendan otras maneras de solucionar una ecuación cuadrática, como la regla o completar cuadrados utilizados por al-Khwarizmi para solucionar problemas de la quinta y sexta forma canónica propuestas. Así mismo, este tipo de conocimiento permite que el profesor comprenda el carácter matemático de la técnica cartesiana, de establecer comparación entre longitudes de segmentos involucrados para solucionar ecuaciones de grado dos y superiores, también puede proporcionar otro método de solución.

La solución de problemas aporta a la formación del profesor desde conocimiento del horizonte en el siguiente aspecto:

- La integración de métodos de solución desde los diferentes saberes disciplinas integradas en la formación de profesores, permiten establecer relaciones, reflexiones y discusiones de manera significativa sobre el conocimiento integral que debe tener un profesor. De este modo, esta categoría, benefician la historia y la formación del maestro, en cuanto las diferentes apreciaciones o compresiones que puede llegar a tener un profesor sobre las matemáticas

En cuanto la categoría del conocimiento de contenido y de los estudiantes, los aportes son los siguientes:

- El diseño de actividades también se puede ser estrategia didáctica potente para la enseñanza y aprendizaje, puede brindar acercamientos sobre limitaciones o concepciones erróneas, ofrecerle al profesor diferentes caminos para dar a conocer un concepto, establecer comparaciones sobre diferentes teorías que giren entorno a un tema, comprensión de diferentes maneras para llevar a cabo una demostración. Otro aporte, se relaciona con el argumento dado por Espinosa (2014) “En este sentido, conocer maneras alternas de solucionar ecuaciones algebraicas a través de su historia puede enriquecer las explicaciones del profesor, y permite que pueda movilizarse con gran habilidad en el tema que enseña creando nexos entre diversos tópicos” (p.203).

- Utilizar los problemas como una herramienta de enseñanza, permiten que el profesor pueda anticipar respuestas sobre ideas que hayan sido rechazadas históricamente, o sobre técnicas

de resolución que no se tengan en cuenta para la enseñanza de un concepto. En este sentido, tener un conocimiento sobre la utilización actividades que integren elementos de la solución de problemas, puede ser estrategia didáctica potente para la enseñanza y aprendizaje. Puede brindar acercamientos sobre limitaciones o concepciones erróneas, ofrecerle al profesor diferentes caminos para dar a conocer un concepto.

- Con relación al punto anterior, también se puede decir que estudio de problemas históricos contribuye al conocimiento profesional, porque de esta manera los profesores de matemática pueden integrar al aula la enseñanza las diferentes clases de problemas, como los presentados en este trabajo (planos, geométricos, transacciones) generando espacios de discusión entre los estudiantes, dándole así sentido a las matemáticas que aprenden.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS

4.1 Conclusiones generales

En este último apartado se presentan las conclusiones sobre el trabajo realizado, las cuales están relacionadas con la solución de problemas algebraicos y sus aportes a la formación de profesores de matemáticas. Lo anterior, se evidencia a través del alcance de los objetivos. Las conclusiones surgen desde el marco teórico presentado, los análisis presentados a las dos obras y finalmente las consideraciones sobre las potencialidades de la historia en la FPM presentadas en el apartado anterior.

En relación con el primer objetivo específico, sobre documentación del papel de la HM desde la FPM, EM y la resolución de problemas se puede concluir lo siguiente:

- La HM contribuye al conocimiento profesional de los licenciados. Porque de esta manera los profesores en formación matemática pueden reflexionar sobre el modo en que se llevan al aula la enseñanza de varios temas que forman parte de un plan de estudios. También se logra generar espacios de discusión entre los estudiantes acerca de los elementos que han desempeñado un papel significativo en la concepción, reconocimiento y desarrollo de un concepto, entendiendo que la evolución de este se da sentido a las matemáticas que aprenden.

- Desde la perspectiva en Educación Matemática, se retoma lo afirmado por Anacona (2003) la utilización de textos históricos resulta un camino muy atractivo para los estudiantes,

quienes se sorprenden con las técnicas, los símbolos y lenguajes utilizados, ampliando así su panorama de resolución del problema. Este tipo de análisis permite que las matemáticas no se vean como incomprensibles, ya que al comparar las diferentes maneras de abordar un ejercicio genera mejor comprensión para el estudiante. Permiten concluir que integrar la historia en la enseñanza es una herramienta para comprender un tema en específico. A demás se reconoce que este tipo de estudios histórico, que incluyen libros históricos como los abordados en este trabajo, deben hacer parte de discusiones y reflexiones en la formación del profesor de matemáticas.

- Desde la resolución de problemas. Mostrar algunas diferencias en cuanto a los procesos de resolución de problemas en varios momentos de la historia de la matemática, permite que los profesores en formación adquieran herramientas para la enseñanza, mostrando las diferentes etapas que tuvo del lenguaje algebraico, el tipo de números o cantidades involucradas, las técnicas de resolución. Así mismo, comprender que los procesos de razonamiento y solución de problemas en al-Khwarizmi y descartes, hacen parte de un legado científico, influenciado por las dificultades del momento y suministran un pilar al profesor para acercarse a la comprensión del concepto matemático.

En relación con el segundo objetivo específico, se pudo caracterizar los tipos de problemas y su solución, desde el estudio realizado se concluye:

- En la documentación de la solución de los tipos de problemas en al-Khwarizmi, se identificaron cuatro clases o especies diferentes de problemas: números entre un todo y la parte (reparticiones), geométricos, transacciones comerciales y herencias; así, mismo los

métodos de solución utilizados por al-Khwarizmi muestran un análisis de encadenamientos lógicos para transformar cualquier problema a las seis formas, así mismo el uso de la técnica elemental utilizada (completación de cuadrado) como otro método de solución, todas estas consideraciones permitieron entrever de una teoría de ecuaciones, como uno de los mayores aportes de al-Khwarizmi. Por otro lado, las clases de problemas en Descartes son de tres tipos: planos, curvas y sólidos; en cuanto a las formas de solución que se relacionan los problemas enunciados, se reconoce el uso de construcciones y representaciones simbólicas asociadas a las magnitudes involucradas.

- Una de las diferencias más relevantes encontradas en el estudio de ambos tratados históricos, es el tipo de ecuaciones involucradas. En el árabe, estas se relacionan con la necesidad de abordar problemas que se modelen con ecuaciones lineales y cuadráticas; mientras que en Descartes es la manera de relacionar los segmentos y establecer operaciones entre ellos, permitieron la solución y a validación de estas de las ecuaciones de grado tercero y cuarto. Igualmente, se puede considerar el papel tan diferente que se lo otorga a la geometría en ambos tratados. Para el árabe, la utilización de esta en la completación de cuadrados se hace para validar la resolución de las formas normales compuestas, y en Descartes se incluye la geometría para solucionar problemas provenientes de este contexto, pero no como validación de tratamientos.

- Teniendo en cuenta la rejilla de análisis de los problemas y las consideraciones finales del estudio histórico en el capítulo anterior, se pudo encontrar que la solución de los problemas en ambos tratados, hacen parte de un razonamiento lógico basados en procesos geométricos, dotados de unas reglas y operaciones. Así mismo, se pudo observar que las

dificultades para la consolidación de objetos matemáticos presentes como lo es la incógnita o variable estuvieron relacionadas con lenguaje algebraico.

Por otra parte, y en términos del tercer objetivo específico, los aportes de la resolución de problemas algebraicos desde el modelo MT propuesto por Deborah Ball están presentes de manera significativa desde los siguientes conocimientos: contenido, especializado, horizonte y desde contenido y de los estudiantes. De lo anterior se puede concluir:

- Conocer y tener dominio sobre las matemáticas elementales, en el sentido de comprender conceptos, problemas, diferentes técnicas de solución y teoremas, le ofrece al profesor un horizonte para reconocer las dificultades y limitaciones adquiridas de una manera incorrecta por sus estudiantes.

- Desde el estudio histórico realizado, las tres categorías que hacen parte del conocimiento del contenido, aportan a la historia de los problemas y a la formación del profesor, en el sentido que los diferentes conocimientos que adquiera el profesor le permiten cambiar su visión, conlleva a brindarle pautas sobre el diseño de estrategias, una compresión amplia sobre un concepto y la motivación a generar espacios de discusión sobre elementos que formen parte de la historia; como construcciones, tipos de representaciones y otros.

- El diseño de actividades es una estrategia didáctica potente para la enseñanza y aprendizaje, puede brindar acercamientos sobre limitaciones o concepciones erróneas. Le ofrece al profesor diferentes caminos para dar a conocer un concepto, establecer comparaciones sobre diferentes teorías que giren entorno a un tema, comprensión en cuanto a las diferentes maneras para llevar a cabo una demostración.

- El estudio histórico realizado de los problemas de al-Khwarizmi y Descartes, se puede considerar como una fuente de insumos para el profesor en su quehacer educativo, al seleccionar ejemplos o problemas históricos relevantes para su actividad de aula, puede ayudarle al maestro a que sus estudiantes entiendan otras maneras de solucionar una ecuación cuadrática, como la regla o completar cuadrados utilizados por al al-Khwarizmi para solucionar problemas de la quinta y sexta forma canónica propuestas , así mismo, la técnica cartesiana, de establecer comparación entre longitudes de segmentos involucrados para solucionar ecuaciones de grado dos y superiores, también puede proporcionar otro método de solución.

Por lo tanto, el objetivo general se logra porque en el capítulo 2 y3 se realiza una documentación y análisis sobre los aportes de la HM, la FPM y resolución de problemas algebraicos. Es así como se puede decir que la historia puede enriquecer la comprensión de los docentes para conocer las diferentes concepciones y conceptos, de igual manera permite que el profesor amplíe su visión sobre la historia. La integración de problemas y su solución puede ser estrategia didáctica potente para la enseñanza y aprendizaje.

4.2 Algunas reflexiones didácticas

Del estudio realizado, subyace la intención de que en los diferentes subsistemas vinculados a la formación del profesor de matemáticas se creen espacios de discusión sobre las orientaciones, necesidades e implicaciones sobre la importancia de integrar la HM en los procesos de enseñanza

y aprendizaje de las matemáticas porque permiten comprender la naturaleza particular los objetos matemáticos y su amplia evolución cultural.

En el primer capítulo, se pudo evidenciar que, desde el marco legal de las licenciaturas en matemáticas ofrecidas en Colombia, se reconoce la historia en varios programas, pero no se reconoce los aportes de la historia. Desde este punto de vista el modelo de conocimiento para la enseñanza propuesto por Debora Ball ofrece un panorama de la manera de integrar en los diferentes currículos, desde el punto de vista en que los profesores de matemáticas requieren conocer sobre un conocimiento de contenido y otro pedagógico.

Finalmente, la formación de profesores de matemáticas debe apuntar a desarrollar o potenciar el conocimiento profesional, crear espacios de reflexión sobre la importancia de la historia en la enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se debe impulsar a que se realicen más investigaciones relacionen la historia y la formación de profesores, desde otras perspectivas didácticas. Tal como lo plantea Vasco (2002), es importante hacer investigación: iniciar investigaciones en la historia de las matemáticas y de la educación matemática en cada país, no es sólo un lujo teórico, sino una necesidad cultural para recuperar la historia de las ideas, las ciencias y las artes en el propio país, y el mejor vehículo para la autoformación y para involucrar y entusiasmar a otros docentes por la historia de las matemáticas.

Proyecciones del Trabajo de Grado

En el desarrollo de este trabajo surgieron algunas consideraciones y preguntas que estaban por fuera del alcance de los objetivos planteados. A continuación, se presenta cuestiones que pueden tomadas en cuenta para trabajos posteriores:

- Se considera importante hacer una reflexión sobre la importancia de los estudios históricos, en momentos de al-Khwarizmi y Descartes abordados en este trabajo, desde la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través del diseño de propuestas de aula, que dé respuesta a lo siguiente ¿Qué potencialidades pueden obtener los estudiantes de educación básica, si se diseña e implementa un recurso didáctico que incorpore aspectos históricos y epistemológicos?

- Desde esa misma perspectiva también se relacionan las siguientes ¿Cómo se podría diseñar una propuesta de aula que permita al estudiante la comprensión de problemas desde otros momentos de la historia de álgebra?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Jwarizmi M (2009) El libro del Álgebra [Al-musjtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala]. Tradución y editado por Ricardo Moreno. España, NIVOLA libros y ediciones S.L.

Álvarez, C. (2000) Descartes lectores de Euclides. En Álvarez, C., Martínez, R. (*coords.)* Descartes y la ciencia del siglo XVII (pp. 15-68) México: Ed. s.a de c.v.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, *8*(1), 30-46. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf

Arboleda L (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática En L. Recalde y G. Arbeláez (Comps.), Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico-epistemológica (pp.19-38). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Azañero L (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales*. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las matemáticas) Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5064

Ball, D. Hill, H y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowlwdge: conceptualizing and measuring teachers` Topic- specific knowledge of students. *Journal for research in Mathematics Education* (39) 4, 372- 400. Recuperado de https://pdfs.semanticscholar.org/9a72/f2765a4e0880a413f32e0a7ddc7e53046b60.pdf

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de: https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/5501/descargar/

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: two aspects. En Bednarz N., Kieran C., Lee L (Eds)., Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching (pp.167- 186), Dordrecht: Kluwer Academics Publisher.

Bello, J., Forero, A. (2016). El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas: una experiencia con la geometría de Descartes. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Charbonneau L y Lefebvre J (1996). Placement and function of problems in algebraic treatises from Diophantus to Viète. En Bednarz N., Kieran C., Lee L (Eds)., Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching (pp.155-166), Dordrecht: Kluwer Academics Publisher.

Chica, A. (2001). Descartes: Geometría y método. Madrid, España: NIVOLA libros y ediciones.

Descartes, R. (1996). Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría. (J. M. Sánchez Ron, Ed. & G. Quintás, Trad.) Barcelona: Círculo de lectores.

Escobar, N. (2012). *Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica* (Trabajo de pregrado para optar el título de Licenciada en Matemáticas y Física). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: http://hdl.handle.net/10893/4709

Espinosa, M (2014). *La solución de la ecuación de tercer grado según Omar Alkhayyām.: Potencialidades de su uso en la formación profesional de un profesor de matemáticas*. (Trabajo de pregrado para optar el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: http://hdl.handle.net/10893/7708

Godino (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNIÓN, revista iberoamericana de Educación matemática*, 20, 13-31. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* (Tesis doctoral en educación) Universidad del Valle, Santiago de Cali. Recuperado de: http://hdl.handle.net/10893/10093

Guacaneme, E., Bautista, M. y Salazar, C. (2011). El contexto normativo de formulación de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas. *Voces y silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(1), 62-77. Recuperado de: https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/4058680.pdf

Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica* (Tesis maestría en Educación) Universidad del Valle, Santiago de Cali

Jimenes, R. (1998). Metodología de la investigación elementos básicos para la investigación clínica. *Editorial Ciencias Médicas,* La Habana. Recuperado de http://www.sld.cu/galerias/pdf/sitios/rehabilitacion-doc/metodologia_dela_investigacion-texto.pdf

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra.* Grows, D.A. Ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Traducción al Español Luis Puig.

El País (2014) Estudiantes colombianos no saben resolver problemas, según pruebas Pisa. Periódico El País. Recuperado de https://www.elpais.com.co/colombia/estudiantes-nos-no-saben-resolver-problemas-segun-pruebas-pisa.html

Malagón, M. y Valoyes L. (2011). El papel de la técnica algebraica cartesiana en los procesos de objetivación de los reales. En Recalde L. y Arbeláez G. (Comps.), Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico-epistemológica (pp.103-133). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Meavilla, V. (2005). Métodos no algebraicos para la resolución de problemas matemáticos: algunos ejemplos rescatados de viejos libros. *Revista de Educación Matemática*, 20(3), 3-14. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10776/11375

Ministerio de Educación Nacional (2013). Sistema Colombiano de Formación de Educadores y Lineamientos de Política. Bogotá: MEN. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-345485_anexo1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2014). Lineamientos de calidad para las licenciaturas en educación (programas de formación inicial de maestros). Bogotá: MEN. Recuperado de http://mineducacion.gov.co/1621/articles-344483_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017). Resolución 18583.Bogotá: MEN. Recuperado de: https://www.usbcali.edu.co/sites/default/files/resolucion_final_18583_de_2017deroga_2041.pdf

Mora, E. (2001). Las matemáticas del islam. Recuperado de:http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf

Mosvold R, Jakobsen A y Jankvist U (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. Springer link. 23(1) 47-60. Doi:10.1007/s11191-013-9612-7

Murcia, L. (2009). La transición del álgebra clásica al álgebra moderna: algunos aspectos históricos-epistemológicos en el desarrollo de la noción de estructura a través de la teoría de ecuaciones (Trabajo de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4a entrega). El proyecto algebraico. *Revista Suma,* 65, p.p 87-94. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/65/087-094.pdf

Recalde, L. (2018). Cuarta lectura: Las raíces del álgebra: Diofanto y al-Khwarizmi. En Recalde L (2018) *Lecturas de historia de las matemáticas* (118-148), Cali, Colombia, Universidad del Valle

Santos, M. (2012). El Papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 10(1) 151- 163.* Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/10566/10003/

Torres, L. (2010). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela* (Tesis de maestría en educación) Universidad del Valle, Santiago de Cali. Recuperado de http://hdl.handle.net/10893/9000

Torres, L., Guacaneme, E. y Arboleda, L. (2015). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, *16*(2), 203-224. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/282676506_La_Historia_de_las_Matematicas_en_la_formacion_de_profesores_de_Matematicas

Torres, L., Guacaneme, E. y Arboleda, L. (2019). Estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de Matemáticas en Colombia. Universidad del Valle, Santiago de Cali. T*ecné Episteme Y Didaxis: TED*, (46). Recuperado de: https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/10540/7584

Vasco, C. (2002). Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas. Conferencia inaugural de la Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas, ELHEM1. Universidad del Valle, Santiago de Cali