



Tamaño de muestra a partir del cual el estimador Bayesiano del parámetro de la distribución Binomial coincide con el estimador de Máxima de verosimilitud

Mary Vanessa Cuero Montaña

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística
Santiago de Cali, Colombia
2024

Tamaño de muestra a partir del cual el estimador Bayesiano del parámetro de la distribución Binomial coincide con el estimador de Máxima de verosimilitud

Mary Vanessa Cuero Montaña

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar por el título de:
Estadística

Director:
José Rafael Tovar Cuevas PhD

Codirector(a):
Rafael Antonio Klinger Angarita

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística
Santiago de Cali, Colombia
2024

Dedicatoria

A Dios, porque sin él habría sido imposible la elaboración de éste documento. A mis padres Epifanio Cuero Castro y Martha Cecilia Montaña Rosero, por siempre creer en mí y apoyarme de forma incondicional. A mis hermanos, Epifanio Cuero Montaña y William Ferney Cuero Montaña, quienes siempre han sido una fuente de orgullo e inspiración para mí.

Mary Vanessa Cuero Montaña

Agradecimientos

A Dios, porque me llenó de paz y fortaleza en todos y cada uno de los momentos en los que sentí que no sería capaz. A mis padres por todo su apoyo incondicional, porque sin ellos ésto tampoco sería posible, porque sé que mis triunfos los alegran mucho más que a mi y por la bendición que ha sido que ellos sean mis papás. A mis hermanos por sostenerme emocionalmente siempre que fue necesario.

Al profesor José Rafael Tovar Cuevas, por toda su inmensa paciencia, por no abandonar éste proyecto aún cuando lo merecí infinidad de veces, por enseñarme a confiar en mí, por su valiosa dirección, por todas y cada una de sus correcciones, por todo su compromiso e interés y por no dejarme abandonar procesos que a la larga fueron necesarios para llegar a la elaboración de éste documento. A mi codirector, el profesor Rafael Antonio Klinger Angarita por aceptarme y buscarme tema aún cuando dirigir trabajos de grado no era una de sus prioridades. A mi hermosa profesora Jennyfer Portilla por siempre estar dispuesta a ayudarme, enseñarme y escucharme.

A mi amiga Taína Sánchez, porque involuntariamente me hizo enamorarse de la Estadística y porque fue un apoyo fundamental para mí a lo largo de mi formación académica. A mi amigo Emmanuel Muriel y a mi esposa académica Karol Marquez, porque no hay triunfo sin apoyo y ambos fueron unos excelentes compañeros de trabajo, siempre sentí una bendición trabajar con ellos. A mi amiga Dallys Sinisterra, por su apoyo, compañía, por secar mis lágrimas y abrazarme siempre que lo necesité. A mi querido Cristian Paz, por todo el tiempo que dedicó a enseñarme a programar y a ayudarme a entender diferentes conceptos. A mi amigo Esteban Vivas, por todas las palabras de aliento que me dio durante todos estos años. A todos aquellos que se quedaron sin mencionar y que estuvieron apoyándome durante mi proceso de formación, ya fuese de forma emocional o académica.

A mi amada Universidad del Valle, mi pequeña selvita dentro de Cali, por la formación y las miles vivencias que tuve en su interior.

Mary Vanessa Cuero Montaña

Romanos 8:20

Y sabemos que a los que aman a Dios, todas las cosas les ayudan a bien...

Resumen

Frecuentemente, en estudios estadísticos se recurre al uso de métodos de estimación para estimar el valor de un parámetro desconocido. El método de estimación, suele depender de la objetividad del investigador, puesto que no hay estudios previos que determinen en qué casos es mejor estimar usando métodos bayesianos, máximo verosímiles o de los momentos. Es por esto que, en ésta investigación se plantea el tamaño de muestra a partir del cual los estimadores bayesianos convergen con el estimador máximo verosímil, cuando los datos provienen de una distribución binomial, para diferentes tamaños de muestra y diferentes probabilidades de ocurrencia, con el fin de definir qué método de estimación es más apropiado en una investigación dado el tamaño de muestra con el que se cuente.

Palabras clave: Distribución binomial, distribución beta, estimación bayesiana, estimación clásica, tamaño de muestra.

Abstract

Often, in statistical studies, estimation methods are used to estimate the value of an unknown parameter. The choice of estimation method often depends on the objectivity of the researcher, since there are no previous studies determining in which cases it is better to estimate using Bayesian methods, maximum likelihood, or moments. This is why, in this research, the sample size is proposed from which Bayesian estimators converge with the maximum likelihood estimator when the data come from a binomial distribution, for different sample sizes and different probabilities of occurrence, in order to define which estimation method is most appropriate in a research given the sample size available.

Key words: Binomial distribution, beta distribution, bayesian estimation, classical estimation, sample size.

Contenido

Lista de Figuras	x
Lista de Tablas	x
1. Introducción	2
2. Planteamiento del problema	3
2.1. Pregunta de investigación	4
3. Justificación	5
4. Objetivos	7
4.1. Objetivo general	7
4.2. Objetivos específicos	7
5. Antecedentes.	8
6. Marco teórico	10
6.1. Distribución Binomial	10
6.2. Distribución Beta	10
6.3. Error cuadrático Medio	11
6.4. Sesgo de un estimador	11
6.5. Estimación por máxima verosimilitud	11
6.5.1. Estimación por máxima verosimilitud	12
6.5.2. Intervalos de confianza	13
6.6. Estimación de Bayes	13
6.6.1. Estimación puntual Bayesiana	14
6.6.2. Distribución previa no informativa de Jeffreys	14
6.6.3. Distribución previa no informativa de Laplace	15
6.6.4. Método de Tovar, para estimar los hiperparámetros de distribución previa informativa	15
6.6.5. Regiones de credibilidad	16
6.7. Tipos de convergencia	16
6.8. Simulación de Montecarlo	17

7. Metodología	18
7.1. Proceso de simulación	18
7.2. Estimación	19
7.2.1. Estimador de Máxima Verosimilitud	19
7.2.2. Estimadores bayesianos	19
7.3. Calculo de los intervalos de confianza y las regiones de credibilidad	22
7.3.1. Intervalos de confianza	22
7.3.2. Regiones de credibilidad	22
7.4. Evaluación de la aproximación entre los estimadores	22
7.4.1. Aproximación por convergencia en probabilidad	22
7.4.2. Aproximación por convergencia casi segura	24
8. Resultados	25
8.1. Evaluación de los estimadores	25
8.2. Aproximación	39
8.2.1. Aproximación por convergencia en probabilidad	40
8.2.2. Aproximaciones por convergencia casi segura	55
9. Conclusiones y recomendaciones	64
9.1. Conclusiones	64
9.2. Recomendaciones	65
A. Código	66
Bibliografía	67

Lista de Figuras

8-1. Sesgo de los estimadores.	36
8-2. Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.005$	36
8-3. Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.01$	37
8-4. Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.05$	37
8-5. Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.1$	38
8-6. Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.25$	38
8-7. Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.5$	39
8-8. Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.005$	40
8-9. Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.01$	41
8-10. Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.05$	41
8-11. Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.1$	42
8-12. Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.25$	42
8-13. Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.5$	43
8-14. Amplitud de las diferencias para $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	45
8-15. Amplitud de las diferencias para $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	45
8-16. Amplitud de las diferencias para $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	46

Lista de Tablas

7-1. Distribuciones Bayesianas informativas.	20
8-1. Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.005$	25
8-2. Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.01$	25
8-3. Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.05$	25
8-4. Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.1$	26
8-5. Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.25$	26
8-6. Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.5$	26
8-7. Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.005$	27
8-8. Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.01$	27
8-9. Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.05$	27
8-10. Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.1$	27
8-11. Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.25$	28
8-12. Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.5$	28
8-13. Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.005$	29
8-14. Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.01$	30
8-15. Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.05$	31
8-16. Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.1$	32
8-17. Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.25$	33
8-18. Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.5$	34
8-19. Valores máximos y mínimos de las diferencias.	44

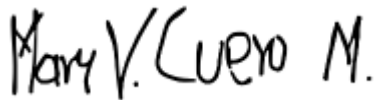
8-20.Valores de ϵ cuando $p = 0.005$	47
8-21.Valores de ϵ cuando $p = 0.01$	48
8-22.Valores de ϵ cuando $p = 0.05$	49
8-23.Valores de ϵ cuando $p = 0.1$	50
8-24.Valores de ϵ cuando $p = 0.25$	51
8-25.Valores de ϵ cuando $p = 0.5$	52
8-26.Proporci3n de que $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_1$	53
8-27.Probabilidad de que $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_2$).	54
8-28.Promedio de los valores de ϵ cuando $p = 0.005$	56
8-29.Promedio de los valores de ϵ cuando $p = 0.01$	57
8-30.Promedio de los valores de ϵ cuando $p = 0.05$	58
8-31.Promedio de los valores de ϵ cuando $p = 0.1$	59
8-32.Promedio de los valores de ϵ cuando $p = 0.25$	60
8-33.Promedio de los valores de ϵ cuando $p = 0.5$	61
8-34.Probabilidad de los promedios de $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_1$	62
8-35.Probabilidad de los promedios de que $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_2$	63

Declaración

Me permito afirmar que he realizado el presente Trabajo de Grado de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en el propio trabajo. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de Tesis o Trabajo de Grado.

Igualmente declaro que los datos utilizados en este trabajo están protegidos por las correspondientes cláusulas de confidencialidad.

Santiago de Cali, mayo del 2024



Mary Vanessa Cuero Montaña

1. Introducción

En el desarrollo de las investigaciones estadísticas, usualmente se recurre al uso de las distribuciones de probabilidad, para entender la forma en que los fenómenos observados ocurren. Estas distribuciones de probabilidad son clasificadas como continuas o discretas.

La distribución binomial ($Bin(n, p)$), es una de las llamadas distribuciones de probabilidad discretas y se usa para modelar los “éxitos” o “aciertos” de una variable observada en una muestra de tamaño n proveniente de una población de tamaño N , cuando las observaciones son independientes y fueron tomadas con reemplazo de una serie de ensayos Bernoulli.

En la literatura se encuentra que cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, el estimador del parámetro de una distribución de probabilidad (para este trabajo será la distribución binomial), obtenido usando el método de estimación Bayesiano será igual que el obtenido por el método de estimación clásico de Máxima verosimilitud. Vale la pena recordar que, a partir del tamaño de la muestra, se puede estimar el valor de la probabilidad p de la distribución binomial, usando estimación Bayesiana o estimación clásica, ya sea por Máxima verosimilitud o por el Método de los momentos.

En este documento se pretende determinar el tamaño de muestra a partir del cual el estimador clásico de Máxima verosimilitud y el estimador de Bayes¹ se aproximan. Es decir, aquí se quiere conocer a partir de qué tamaño de muestra se puede decir que n es lo suficientemente grande como para que los estimadores mencionados sean iguales. Esto con el fin de conocer a partir de qué tamaño de muestra es válido decir que se cuenta con un número de observaciones muy grande como para hacer estimación Bayesiana o en su defecto, muy pequeño como para hacer estimación clásica.

En aras de resolver la necesidad planteada, se realizó un estudio de simulación estadística y se compararon los estimadores Bayesiano y clásico de una distribución binomial, para posteriormente hallar el tamaño de muestra que hace que éstos sean iguales.

¹Se estudiarán los estimadores obtenidos a partir de dos distribuciones Bayesianas no informativas y una informativa.

2. Planteamiento del problema

En el quehacer estadístico, es comúnmente conocido que para el desarrollo de investigaciones en las que se cuenta con un tamaño de muestra “pequeño”, el procesamiento de los datos se debe realizar usando métodos de estimación Bayesiana con el objetivo de que las estimaciones de los parámetros logren ser enriquecidas con información externa, dado que la proporcionada por los datos no lograría dar una aproximación robusta y de la mejor calidad. Al contrario, cuando se tienen tamaños de muestra lo “suficientemente grandes”, lo mejor es usar métodos de estimación clásicos, dado que los datos en sí mismos sí lograrían proporcionar la información suficiente para que la estimación del parámetro sea lo más parecido posible al valor del parámetro poblacional. Sin embargo, en la literatura no se encuentra especificado qué tamaño de muestra puede ser considerado “grande” o “pequeño”, por lo que la decisión de usar uno u otro método de estimación, recae sobre los criterios propios del investigador, dado que no existe un sustento teórico, que a partir del tamaño de muestra limite la elección de los métodos de estimación mencionados.

En (Lehmann & Casella 1998, pág. 488), se puede encontrar un ejemplo de lo planteado, cuando proponen que *“El estimador Bayesiano de la probabilidad de éxito p , adecuadamente normalizado, tiene una distribución límite normal independiente de los parámetros de la distribución previa y es igual a la del MLE”*, esto cuando $n \rightarrow \infty$. No obstante, no se especifica a partir de cuando se puede decir que $n \rightarrow \text{inf}$ y se da dicha igualdad entre los estimadores.

Por otro lado, la igualdad del estimador de la media, obtenido por método Bayesiano con el clásico, de Máxima verosimilitud cuando $n \rightarrow \infty$, se da porque cuando n es lo suficientemente grande, la distribución de las medias muestrales tienden a aproximarse a la distribución normal¹; y tal y como lo plantearon (Gelman et al. 2004, pág. 41), a medida que el tamaño de muestra se hace grande, *“el parámetro de la distribución previa, pierde influencia en la distribución posterior”*, por lo tanto, se podría concluir que el estimador Bayesiano estaría conformado por la información proveniente de los datos. Es decir, por la función de verosimilitud.

Por lo anterior, en aras de conocer a partir de qué tamaño de muestra se da la igualdad entre el estimador Bayesiano y el de Máxima verosimilitud, se propone la siguiente pregunta de investigación.

¹Esto puede corroborarse con la definición del Teorema del límite central en (? , pág. 234)

2.1. Pregunta de investigación

¿A partir de qué tamaño de muestra se puede decir que el estimador de Bayes y el estimador de Máxima verosimilitud del parámetro de una distribución Binomial se aproximan lo suficiente como para ser considerados iguales?

3. Justificación

En el quehacer estadístico es usual recurrir al uso de técnicas de muestreo, cuando se requiere realizar estudios que buscan probar una hipótesis u observar alguna relación entre dos o más variables, pero no se puede medir directamente a toda la población de interés. Algunas situaciones que podrían requerir un estudio por muestreo fueron planteadas por Klinger (2010), por ejemplo: aquellas en las que la población objeto de estudio es infinita o muy grande; la observación o medición de la característica analizada pone en peligro la existencia de la unidad misma; el costo de la medición es muy elevado; es complicado acceder a la unidad objeto de estudio, etc. Por lo tanto, cuando se tiene la necesidad de desarrollar un estudio con métodos de muestreo, es menester determinar el número de individuos que se deben tomar para garantizar que los resultados del estudio sean extrapolables y con ello se garantice su validez externa.

La importancia de conocer el tamaño de la muestra, radica en que: primero, el tamaño de muestra varía según las necesidades del estudio mismo; segundo, tal y como lo mencionaron García et al. (2013) *“Un estudio con un tamaño insuficiente de la muestra estimará un parámetro con poca precisión o será incapaz de detectar diferencias entre los grupos”*; y tercero, dicho por los mismos autores, *“la inclusión de un número excesivo de sujetos encarece el estudio”*. De lo que se sigue que, escoger un tamaño de muestra inadecuado puede conducir a errores de estimación, lo que se resume en pérdida de tiempo, recursos e incluso, un estudio con posibles conclusiones erradas.

Lo anterior demuestra que conocer el tamaño de muestra es fundamental al momento desarrollar investigaciones estadísticas. Sin embargo, determinar el tamaño de muestra es sólo el primer paso. Lo siguiente, es el tratamiento que se le va a dar a los datos recogidos. Entonces, si nos centramos en estudios estadísticos inferenciales, será necesario determinar el parámetro poblacional de interés, cuyo valor real será siempre desconocido, por lo que se tendrá que acudir a métodos de estimación para obtener información de los datos; es entonces cuando el investigador deberá decidir qué métodos de estimación empleará entre el clásico o el bayesiano.

Lo antes expuesto plantea un inconveniente, y es, que en la literatura frecuentemente se habla de que cuando el tamaño de muestra es lo suficientemente grande, el promedio de una serie de estimaciones, tiende a parecerse al parámetro poblacional¹. Sin embargo, no se especifica qué tamaño de muestra puede ser considerado “suficientemente grande”. Por lo tanto, hallar el tamaño de muestra a partir del cuál el estimador de Bayes tiene una buena

¹Esto se sustenta en la Ley de los grandes números.

aproximación al estimador clásico de Máxima verosimilitud, podría contribuir a optimizar el tiempo del desarrollo de futuras investigaciones estadísticas, puesto que permitiría saber a partir de qué tamaño de muestra se hace más viable hacer estudios con inferencia clásica en vez de bayesiana, cuando los datos provienen de una distribución binomial.

En síntesis, éste trabajo busca establecer el tamaño de muestra a partir del cual se logra observar que el estimador bayesiano y el de máxima verosimilitud se aproximan, cuando los datos provienen de una distribución Binomial.

4. Objetivos

4.1. Objetivo general

Realizar un estudio de simulación que permita establecer de manera empírica el tamaño de muestra a partir del cual, el estimador Bayesiano se aproxima al mismo valor que el estimador clásico de Máxima verosimilitud.

4.2. Objetivos específicos

- Comparar los resultados del proceso de estimación clásico y Bayesiano, considerando diferentes tamaños de muestra para el parámetro del modelo Binomial.
- Evaluar la proximidad entre el estimador de Bayes y el de Máxima verosimilitud de forma empírica, usando el concepto de convergencia casi segura, cuando los datos provienen de una distribución Binomial(n, p).
- Evaluar el desempeño y la proximidad entre el estimador de Bayes y el de Máxima verosimilitud de forma empírica, considerando seis valores diferentes del parámetro del modelo Binomial.

5. Antecedentes.

En ésta sección se muestran tres trabajos que se consideraron como antecedentes, en tanto que, en cada uno se hizo un trabajo que compara estimadores máximos verosímiles con estimadores bayesianos, y aunque en éste trabajo el objetivo no es tanto ver qué estimador es mejor que el otro, las investigaciones presentadas a continuación se consideraron relevantes en la medida en que permiten ver, que a lo largo de la historia ha sido importante determinar el método de estimación más conveniente entre el clásico o el bayesiano para un determinado estudio.

Optimal linear estimators: an empirical bayes version with application to the binomial distribution Griffin & Krutchkoff (1971)

Los autores proponen un estimador lineal bayesiano que minimiza el riesgo del error cuadrático de estimación de la media de forma mucho más eficiente que el estimador de máxima verosimilitud. Una vez planteado dicho estimador, especifican su forma para un conjunto de datos que se distribuyan binomial. Luego, calculan el riesgo de estimación del error cuadrático tanto para el estimador clásico de máxima verosimilitud, como para el estimador que ellos proponen y calculan la razón de pérdida de dicho error. Finalmente, concluyen que el estimador lineal reduce el error cuadrático de forma más eficiente que el estimador de máxima verosimilitud.

Cabe mencionar que los autores sostienen su resultado en un estudio de simulación, que para la construcción de la distribución previa del estimador bayesiano calcula n distribuciones $Beta(a, b)$, para cada posible valor de $\theta = P(Exitos)$ de una distribución binomial.

Comparision between maximum likelihood and bayes methods for estimation of binomial probability with sample compositing Chaubey & Li (1995)

A partir de una muestra binomial tomada de una composición de muestras, los autores construyen cuatro estimadores, con el objetivo de proponer un estimador bayesiano que permita estimar la tasa de prevalencia de una población. Los estimadores propuestos son: un estimador de máxima verosimilitud ($\hat{P}_{k(C)}$), resultado de corregir otro estimador de máxima verosimilitud planteado por Garner et al. (1989) ($\hat{P}_k$); y tres estimadores bayesianos, a saber, un estimador de prevalencia ($\hat{P}_{k(B)}$), un estimador de probabilidad ($\hat{P}_{k(B)'}$) y un

estimador usando el método de aproximación bayesiana ($\hat{P}_{k(IB)}$). Luego, para diferentes composiciones, con a su vez diferentes tamaños, calculan cada uno de los estimadores propuestos y los comparan entre sí, para finalmente concluir que, cuando se tiene un conjunto de datos que provienen de una composición de muestras y que distribuye binomial, las mejores estimaciones se obtienen con los estimadores bayesianos propuestos por ellos y específicamente, con el estimador planteado usando el método de aproximación bayesiana.

Bayesian and mixed bayesian/likelihood criteria for sample size determination Laurence et al. (1997)

En éste artículo se proponen tres criterios bayesianos, que permiten determinar el tamaño de muestra para datos, que se conoce provienen de una distribución binomial. Los criterios planteados son: *Criterio de cobertura promedio (ACC)*, en el que se permite una probabilidad de cobertura que varía dependiendo de los datos previos, pero la longitud del intervalo de credibilidad se deja fija; *Criterio de duración media (ACL)*, aquí se fija la cobertura de la probabilidad y se permite variar la longitud del intervalo de credibilidad según los datos previos; *Criterio del peor resultado (WOC)*, en éste se garantiza una longitud máxima del intervalo de credibilidad y una probabilidad de cobertura mínima, todo independiente de los datos previos. Una vez propuestos los criterios, los autores plantean cómo se hace el calculo del tamaño de muestra para dos propociones binomiales a partir de cada criterio, y finalmente, concluyen que, el tamaño de muestra más adecuado suele ser proporcionado por los criterios bayesianos propuestos en comparación con el criterio frecuentista (máxima verosimilitud); y entre los criterios propuestos, el que proporciona tamaños de muestra más pequeños sin pérdida de información es el *ACL*.

6. Marco teórico

En ésta sección se presentan los conceptos estadísticos y matemáticos más relevantes que permitirán desarrollar la investigación propuesta en éste documento.

6.1. Distribución Binomial

La distribución binomial es una de las distribuciones de probabilidad discreta, Canavos (1988), la define como sigue:

Definición 4.1 Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito con cualquiera de éstos. Se dice entonces que X tiene una distribución binomial con función de masa de probabilidad (pmf):

$$P(x; n, p) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{(n-x)} & x = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases} \quad 0 \leq p \leq 1 \quad \text{para } n \text{ entero} \quad (6-1)$$

Los parámetros de la distribución binomial son n y p .

Además, su promedio y varianza asociadas están dadas por:

$$E[X] = np \quad ; \quad \text{var}[X] = npq \quad \text{donde } q = 1 - p \quad (6-2)$$

6.2. Distribución Beta

La distribución de probabilidad beta, se caracteriza por tomar valores en el intervalo $(0, 1)$ y ser una de las distribuciones de probabilidad continuas. Graybill et al. (1974) la definen del siguiente modo:

Definición 14. Distribución Beta, si una variable aleatoria tiene una función de densidad de probabilidad (fdp), dada por:

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x) \quad (6-3)$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, entonces X se define para tener una distribución beta.

Su media y varianza asociadas son:

$$E[X] = \frac{a}{a+b} \quad (6-4)$$

$$var[X] = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad (6-5)$$

6.3. Error cuadrático Medio

El Error Cuadrático Medio se usa para medir la cantidad total de variabilidad de un estimador en términos de su precisión (varianza) y su exactitud (sesgo). Casella & Berger (2002) lo definen como:

Definición 7.3.1 *El error cuadrático medio (MSE) de un estimador W de un parámetro θ , es la función de θ definida por $E_{\theta}(W - \theta)^2$.*

Donde, $E_{\theta}(W - \theta)^2 = Var_{\theta}[W] + (sesgo[W])^2$.

6.4. Sesgo de un estimador

Casella & Berger (2002) definen el Sesgo como sigue:

Definición 7.3.2 *El sesgo de un punto del estimador W de un parámetro θ es la diferencia entre la esperanza del valor de W y θ ; esto es, $sesgo[W] = E_{\theta}[W] - \theta$. Un estimador cuyo sesgo es idénticamente (en θ) igual a 0 es llamado insesgado y satisface $E_{\theta}[W] = \theta$ para todo θ .*

6.5. Estimación por máxima verosimilitud

La estimación que se realiza usando el método de máxima verosimilitud, tiene como base fundamental el uso de la función de verosimilitud. Graybill et al. (1974), definen ésta función como:

La Función de verosimilitud de n variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ se define como la densidad conjunta de las n variables aleatorias, digamos $f_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, cuando la misma es considerada una función de θ . En particular, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f(x; \theta)$, entonces la función de verosimilitud es $L(\theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta)$.

Adicionalmente, la función de verosimilitud, es también, la función de masa conjunta de la muestra, sólo que ésta asume a θ como variable no aleatoria, dado que, es una constante desconocida que requiere ser aproximada usando algún método de maximización.

6.5.1. Estimación por máxima verosimilitud

Continuando con la definición de Graybill et al. (1974), ellos definen la estimación por máxima verosimilitud como:

Estimador de máxima verosimilitud Sea $L(\theta) = L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ la función de verosimilitud para las variable aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$. Si $\hat{\theta}$ [donde $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función de las observaciones $x_1, x_2, \dots, x_n$] es el valor de θ en Θ que maximiza $L(\theta)$, entonces $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ . $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el máximo valor estimado de θ para la muestra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

El calculo de los estimadores de máxima verosimilitud es diferente dependiendo de si la distribución de origen de los datos es continua o discreta. Para cada caso el EMV se obtiene como se muestra:

Caso discreto: el estimador de máxima verosimilitud será aquel que maximice la probabilidad de la muestra. Es decir, el EMV será el $\hat{\theta}$ que haga que la probabilidad de que los datos hayan sido generados por un parámetro con valor igual a $\hat{\theta}$ sea máxima. La función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i | \theta) \\ &= L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Caso continuo: el estimador de máxima verosimilitud será el $\hat{\theta}$ que maximice la función de densidad de la muestra. La función de verosimilitud será:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, X_n = x_n | \theta) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \\ &= L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

6.5.2. Intervalos de confianza

Graybill et al. (1974), definen los intervalos de confianza como sigue:

Intervalos de confianza Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria para la densidad $f(\cdot, \theta)$. Sean $T_1 = t_1(X_1, \dots, X_n)$ y $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$ dos estadísticos que satisfacen $T_1 \leq T_2$ para los cuales $P[T_1 < \tau(\theta) < T_2] \equiv \gamma$, donde γ no depende de θ ; Entonces el intervalo aleatorio (T_1, T_2) es llamado 100γ intervalo de confianza porcentual, para $\tau(\theta)$; γ es llamado coeficiente de confianza y T_1 y T_2 son llamados límites de confianza inferior y superior respectivamente, para $\tau(\theta)$. Un valor (t_1, t_2) de un intervalo aleatorio (T_1, T_2) es también llamado 100γ intervalo de confianza porcentual para $\tau(\theta)$.

6.6. Estimación de Bayes

La estimación de Bayes, tiene como base fundamental el teorema del matemático inglés Thomas Bayes, publicado en 1763. Canavos (1988), define el teorema de Bayes como sigue:

Teorema de Bayes Si $B_1, B_2, \dots, B_n$ son n eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, es decir, $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$, entonces:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6-6)$$

Ampliando la definición, Gelman et al. (2004) plantean la Regla de bayes, como sigue.

Para hacer afirmaciones de probabilidad sobre B dado A , debemos comenzar con un modelo que proporcione una distribución de probabilidad conjunta para B y A . La función de masa de probabilidad o de densidad conjunta puede escribirse como un producto de dos densidades que a menudo se conocen como la distribución a priori $p(B)$ y la distribución de muestreo (o distribución de datos) $p(A|B)$ respectivamente:

$$p(B, A) = p(B)p(A|B) \quad (6-7)$$

Simplemente condicionando al valor conocido de los datos A , usando la propiedad básica de la probabilidad condicional conocida como la regla de Bayes, se obtiene la densidad posterior:

$$p(B|A) = \frac{p(B, A)}{p(A)} = \frac{p(B)p(A|B)}{p(A)} \quad (6-8)$$

donde $p(A) = \sum_B p(B)p(A|B)$, y la suma es sobre todos los valores posibles de B (o $p(A) = \int p(B)p(A|B)dB$ en el caso de B continua). Una forma equivalente de

6-8 omite el factor $p(A)$, que no depende de B y, con A fijo, puede considerarse una constante, produciendo la densidad posterior no normalizada, que es el lado derecho de 6-9:

$$P(B|A) \propto p(\theta)p(A|B) \quad (6-9)$$

Estas simples expresiones encapsulan el núcleo técnico de la inferencia bayesiana: la principal tarea de cualquier aplicación específica es desarrollar el modelo $p(B, A)$ y realizar los cálculos necesarios para resumir $p(B|A)$ de manera adecuada.

6.6.1. Estimación puntual Bayesiana

Para obtener más información acerca de las condiciones del PGD¹, es posible hacer un experimento y observar una secuencia de realizaciones de la variable aleatoria $\mathbf{X}$, de modo que ahora, se tiene la información previa representada por $\pi(\theta)$ y la información de la muestra de observaciones $x_1, x_2, \dots, x_n$.

La información acerca del PGD contenida en la muestra se representa usando la función de verosimilitud. Se hace necesario entonces “combinar” las dos formas de información y para esto se utiliza la fórmula de Bayes, procedimiento que da origen a la función de densidad o de masa de la distribución de probabilidad posterior. La *función posterior* representa la nueva información que se tiene del parámetro dada la muestra. Entonces, para Θ dada la muestra $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ la función posterior vendrá dada por:

$$f(\theta|\mathbf{x}) = \frac{L(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta|\mathbf{x})\pi(\theta)d(\theta)} \quad (6-10)$$

6.6.2. Distribución previa no informativa de Jeffreys

La distribución a priori de Jeffreys, es una distribución uniforme en un determinado espacio paramétrico. Se caracteriza por ser una distribución invariante para el vector paramétrico $\vec{\theta}$.

Correa & Barrera (2018) definen ésta distribución como sigue:

*La **distribución a priori de Jeffreys** se define como:*

$$\xi(\theta) \propto \sqrt{|\mathcal{I}(\theta)|} \quad (6-11)$$

Donde, $\mathcal{I}(\theta)$ es la información de Fisher, que está definida como:

$$\mathcal{I}(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log(f(x|\theta))}{\partial \theta^2} \right] \quad (6-12)$$

¹Entiéndase PGD como Proceso Generador de Datos.

Tal que $f(x|\theta)$ es la función de densidad de probabilidad (fdp) de x dado θ y si θ es un vector, la información de Fisher es una matriz $\mathcal{I}(\theta)_{p \times p}$.

Para el caso de las variables discretas, la información de Fisher vendrá dada por $\mathcal{I}(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log(P(x|\theta))}{\partial \theta^2} \right]$, donde $P(x|\theta)$ es la función de masa de probabilidad.

6.6.3. Distribución previa no informativa de Laplace

El *principio de razón insuficiente* de Laplace, plantea que en aquellos casos en los que no se conoce la forma de la distribución del parámetro, se debe asignar la misma probabilidad de ocurrencia a todos los eventos.

Correa & Barrera (2018) plantean de éste principio que:

Si el espacio paramétrico es finito se puede utilizar una distribución a priori uniforme de la forma:

$$\xi(\theta) \propto 1 \quad \text{para } \theta \in \Theta \quad (6-13)$$

Esta distribución busca reflejar la falta de conocimiento acerca de las condiciones del PGD. Entonces, asume que todos los valores de θ tienen la misma probabilidad de ocurrir.

6.6.4. Método de Tovar, para estimar los hiperparámetros de distribución previa informativa

Tovar Cuevas (2012) define θ , como la proporción aleatoria de interés, con una distribución de probabilidad desconocida $\pi(\theta)$. Luego, plantea que si se define $\pi(\theta)$ como una distribución *Beta* con hiperparámetros a y b , usando la información obtenida por alguna fuente, se pueden determinar intervalos de probabilidad de $(1 - \alpha)\%$ con límites θ_1 y θ_2 , tal y como lo propusieron Joseph et al. (1995), dentro de un enfoque de intervalos fijos. Entonces, se tendrá que $(1 - \alpha)\%$ de los valores de θ estará dentro del intervalo (θ_1, θ_2) . Lo siguiente, será que al centrar el intervalo (θ_0) , este se empareja con la media de la distribución *Beta*(a, b), por ejemplo:

$$\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cong \frac{a}{a + b} \quad (6-14)$$

De lo anterior, se obtendrán dos percentiles de la distribución mencionada, a saber, los percentiles $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$, en su primer momento, lo que permite usar la desigualdad de Chebyshev para obtener una aproximación conservadora de la varianza del parámetro para una probabilidad asociada α a la función de densidad beta. Entonces::

$$P(|\theta - E(\theta)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} = \alpha$$

$$P([\theta - E(\theta)]^2 \geq k^2 \sigma^2) \leq \alpha$$

$$P(\alpha[\theta - \theta_0]^2 \geq \sigma^2) \leq \alpha \quad (6-15)$$

A partir de la última línea de la ecuación 6-15, la varianza será la función de probabilidad previa establecida al intervalo que contiene a θ y la distancia entre θ_0 y un percentil de la distribución. Luego, si θ es reemplazado por uno de los valores conocidos de θ_1 o θ_2 , en la ecuación 6-15, un valor aproximado puede ser obtenido para la varianza de la distribución beta previa, como sigue:

$$\sigma^2 \leq \alpha[\theta_1 - \theta_0]^2 \cong \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad (6-16)$$

Como la media $\theta_0 = E(\theta)$ y la varianza $\sigma^2 = V(\theta)$, pueden ser escritas como funciones de los hiperparámetros de la distribución previa *Beta*, entonces el sistema a resolver termina siendo un sistema de ecuaciones con dos incógnitas usando el lado derecho de las ecuaciones 6-14 y 6-16 para encontrar los valores de a y b . Es decir,

$$\omega = \frac{\theta_0}{(1 - \theta_0)} \quad (6-17)$$

$$a = \omega b \quad (6-18)$$

$$b = \frac{\omega - [(\omega + 1)^2 \sigma^2]}{(\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1)\sigma^2} \quad (6-19)$$

6.6.5. Regiones de credibilidad

Son definidas por Cepeda et al. (2008) como:

En la aproximación bayesiana, la estimación por intervalos se define por una evaluación simple de las distribuciones posteriores de los parámetros. Así, si $\theta \in \Theta$ es una cantidad desconocida, $C \subset \Theta$ es una región de $100(1-\alpha)\%$ de credibilidad para θ si $P(\theta \in C|x) \leq 1-\alpha$. En éste caso, $1-\alpha$ es llamado el nivel de credibilidad. Si θ es un escalar, la región C usualmente vendrá dada por un intervalo $[c_1, c_2]$.

6.7. Tipos de convergencia

La **convergencia** es un término, que se define como “*el punto de encuentro entre dos o más elementos*”. La **convergencia estadística**, se define en términos de las teorías de probabilidad. Casella & Berger (2002), plantean tres tipos de convergencia: la convergencia en probabilidad, la convergencia casi segura y la convergencia en distribución. Los autores proponen que dichas convergencias se dan cuando el límite de $n \rightarrow \infty$, toma un valor específico (que varía según el tipo de convergencia).

Puntualizando, Casella & Berger (2002), definen:

- La **convergencia en probabilidad**, es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots$, que convergen en probabilidad a una variable X si, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0 \quad \equiv \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1 \quad (6-20)$$

- La **convergencia casi segura**, es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots$, que convergen casi seguramente a una variable aleatoria X si, para todo $\epsilon > 0$,

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| < \epsilon) = 1 \quad (6-21)$$

- la **convergencia en distribución**, es una secuencia de variables aleatorias, $X_1, X_2, \dots$, que convergen en distribución para una variable aleatoria X si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad (6-22)$$

para todos los puntos de x donde $F_X(x)$ es continua.

6.8. Simulación de Montecarlo

En general los estudios de simulación, tienen como objetivo predecir el comportamiento de un determinado sistema con ciertas características específicas. Law (2015), define el proceso de *Simulación de Montecarlo* como “un esquema que emplea números aleatorios, es decir, variables aleatorias $U(0,1)$; que se utiliza para resolver ciertos problemas estocásticos o deterministas”.

Gentle (2005), plantea que “los estudios de simulación estadística de Montecarlo, deben obedecer a los mismo estándares de cualquier experimentación estadística”. Esto es, el proceso debe estar controlado, ser reproducible, eficiente y tener el debido sustento teórico; por lo que, plantea que la importancia del cumplimiento de éstos estándares radica en que: el control del proceso “relaciona con fidelidad un proceso aleatorio con uno no aleatorio” y que la reproducibilidad y el buen diseño del estudio de simulación mejoran la eficiencia del estudio.

7. Metodología

En ésta sección se desarrolla la metodología usada para dar solución a la pregunta problema, antes planteada.

7.1. Proceso de simulación

Para el desarrollo de éste trabajo no se contó con un archivo de datos observados en el mundo real, por lo que fue necesario recurrir a técnicas de simulación para crear la información de base, compuesta por 60 escenarios de simulación; donde se simulan 1000 muestras binomiales, para 10 tamaños diferentes y para seis probabilidades distintas. Al final, el conjunto base de datos con que se trabajará tendrá un total del 60000 observaciones simuladas.

Sea X_{kjm} la variable aleatoria que distribuye $Bin(n, p)$ donde $n = 10, 20, \dots, 90, 100$ y $p = \{0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5\}$. Sea x_{kjm} la m -ésima repetición de la j -ésima muestra para la k -ésima probabilidad, una realización binomial que se repite 1000 veces, tal que $m = 1, \dots, 1000$; $j = 1, \dots, 10$; $k = 1, \dots, 6$.

El conjunto de datos tendrá la forma:

$$\begin{array}{c}
 p_1 = 0.005 \\
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbf{n} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \cdots & \mathbf{100} \\
 x_{111} & x_{121} & \cdots & x_{1101} \\
 x_{112} & x_{122} & \cdots & x_{1102} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_{11m} & x_{12m} & \cdots & x_{110m}
 \end{array} \\
 p_2 = 0.01 \\
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbf{n} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \cdots & \mathbf{100} \\
 x_{211} & x_{221} & \cdots & x_{2101} \\
 x_{212} & x_{222} & \cdots & x_{2102} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_{21m} & x_{22m} & \cdots & x_{210m}
 \end{array}
 \end{array}$$

Y así sucesivamente para cada una de las k -ésimas probabilidades binomiales p .

7.2. Estimación

7.2.1. Estimador de Máxima Verosimilitud

La función de máxima verosimilitud se presenta en la ecuación 7-1.

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^n \binom{n}{x_i} \theta^{x_i} (1 - \theta)^{n-x_i} \quad (7-1)$$

El estimador de máxima verosimilitud vendrá dado por la ecuación 7-2.

$$\widehat{\theta}_M = \frac{\sum x_i}{n} \quad (7-2)$$

Entonces, el estimador de máxima verosimilitud para cada una de las probabilidades p será:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & p_k & & \\
 & \mathbf{n} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \cdots & \mathbf{100} \\
 & \widehat{\theta}_{M_{k11}} & \widehat{\theta}_{M_{k21}} & \cdots & \widehat{\theta}_{M_{k101}} \\
 & \widehat{\theta}_{M_{k12}} & \widehat{\theta}_{M_{k22}} & \cdots & \widehat{\theta}_{M_{k102}} \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & \widehat{\theta}_{M_{k1m}} & \widehat{\theta}_{M_{k2m}} & \cdots & \widehat{\theta}_{M_{k10m}}
 \end{array}$$

7.2.2. Estimadores bayesianos

Estimador considerando una distribución previa informativa

Éste estimador se calcula usando el método de Tovar.

En el método de Tovar se requiere usar dos valores límite en los que se cree que con una alta probabilidad se encuentra la mayor densidad de valores del parámetro, los cuales deben ser aproximados usando información elicitada. Sin embargo, al éste ser un estudio con datos simulados, no se tiene la posibilidad de llevar a cabalidad dicho proceso de elicitación. No obstante, se define un intervalo de elicitación arbitrario para los valores de las probabilidades p , de tal forma que se pueda usar éste método de estimación. Entonces, se tendrá que los parámetros de la distribución Beta estimados se obtendrán como se muestra:

El intervalo de elicitación se define como:

$$P_1 = p - c \ ; \ P_2 = p + c \quad (7-3)$$

Donde c es un valor constante.

$$\sigma^2 \leq \alpha [P_1 - P_2]^2 \quad (7-4)$$

Luego,

$$\hat{\omega} = \frac{P_0}{(1 - P_0)} \quad (7-5)$$

P_0 es el punto medio de la región de elicitación, por tanto $P_0 \cong p$.

$$\hat{a} = \omega b \quad (7-6)$$

$$\hat{b} = \frac{\omega - [(\omega + 1)^2 \sigma^2]}{(\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1)\sigma^2} \quad (7-7)$$

La distribución beta previa será $Beta(a, b)$ y la distribución beta posterior, estará dada por $Beta(a + x, b + (n - x))$. Se tendrá una distribución beta previa y otra posterior, para cada una de las probabilidades p . Pues, para cada p , el valor de c que determina la región de elicitación será diferente.

Las regiones de elicitación, las varianzas a usar y las distribuciones previas y posteriores se presentan en la tabla **7-1**.

Tabla 7-1.: Distribuciones Bayesianas informativas.

Probabilidad p	Región de elicitación	Varianza	Dis. Previa	Dis. Posterior
0.005	(0.00025, 0.00975)	$1.128125e^{-06}$	$Beta(22, 4387)$	$Beta(22 + x, 4387 + (n - x))$
0.01	(0.00050, 0.01950)	$4.512500e^{-06}$	$Beta(22, 2171)$	$Beta(22 + x, 2171 + (n - x))$
0.05	(0.00250, 0.09750)	$1.128125e^{-04}$	$Beta(21, 399)$	$Beta(21 + x, 399 + (n - x))$
0.1	(0.00500, 0.19500)	$4.512500e^{-04}$	$Beta(20, 179)$	$Beta(20 + x, 179 + (n - x))$
0.25	(0.01250, 0.48750)	$2.820312e^{-03}$	$Beta(16, 49)$	$Beta(16 + x, 49 + (n - x))$
0.5	(0.02500, 0.97500)	$1.128125e^{-02}$	$Beta(11, 11)$	$Beta(11 + x, 11 + (n - x))$

Una vez obtenidas las distribuciones beta posteriores, se procede a calcular la matriz de estimaciones, que será de la forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 & p_k & & & \\
 & \mathbf{n} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \cdots & \mathbf{100} \\
 & \widehat{\theta_{BT_{k11}}} & \widehat{\theta_{BT_{k21}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BT_{k101}}} \\
 & \widehat{\theta_{BT_{k12}}} & \widehat{\theta_{BT_{k22}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BT_{k102}}} \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & \widehat{\theta_{BT_{k1m}}} & \widehat{\theta_{BT_{k2m}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BT_{k10m}}}
 \end{array}$$

Estimador usando la distribución previa no informativa de Jeffreys

Para variables que distribuyen binomial, se tiene que la distribución previa no informativa obtenida por el método de Jeffreys, viene dada por

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\theta)} = \sqrt{\frac{n}{\theta(1-\theta)}} \propto \theta^{\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (7-8)$$

Donde θ tendrá una distribución previa $Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y las distribuciones posteriores serán de la forma $Beta\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + (n-x)\right)$.

La matriz de estimadores estará dada por:

$$p_k \quad \begin{matrix} \mathbf{n} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \cdots & \mathbf{100} \\ & \widehat{\theta_{BJ_{k11}}} & \widehat{\theta_{BJ_{k21}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BJ_{k101}}} \\ & \widehat{\theta_{BJ_{k12}}} & \widehat{\theta_{BJ_{k22}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BJ_{k102}}} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \widehat{\theta_{BJ_{k1m}}} & \widehat{\theta_{BJ_{k2m}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BJ_{k10m}}} \end{matrix}$$

Estimador usando la distribución previa no informativa de Laplace

La distribución previa no informativa de Laplace, viene dada por $\pi(\theta) = Uniforme(0, 1) = Beta(1, 1)$; su distribución posterior asociada, será de la forma $Beta(1+x, 1+(n-x))$.

La matriz asociada a éste estimador, será:

$$p_k \quad \begin{matrix} \mathbf{n} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \cdots & \mathbf{100} \\ & \widehat{\theta_{BL_{k11}}} & \widehat{\theta_{BL_{k21}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BL_{k101}}} \\ & \widehat{\theta_{BL_{k12}}} & \widehat{\theta_{BL_{k22}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BL_{k102}}} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \widehat{\theta_{BL_{k1m}}} & \widehat{\theta_{BL_{k2m}}} & \cdots & \widehat{\theta_{BL_{k10m}}} \end{matrix}$$

Nota: Todos los estimadores Bayesianos fueron calculados, a partir de la definición teórica de la media de la distribución Beta, a saber $\hat{\theta} = \frac{\hat{a}+x}{(\hat{a}+x)+(\hat{b}+(n-x))} = \frac{\hat{a}+x}{\hat{a}+\hat{b}+n}$.

7.3. Cálculo de los intervalos de confianza y las regiones de credibilidad

7.3.1. Intervalos de confianza

Los intervalos de confianza para la matriz de estimadores clásicos, bajo el supuesto de que se cumple el Teorema Central del Límite de modo que la distribución límite del estimador $\hat{\theta}$ es una distribución normal de probabilidades, tendrá la forma:

$$E[\hat{\theta}_M] \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_{\hat{\theta}_M}}{\sqrt{n}} \quad (7-9)$$

7.3.2. Regiones de credibilidad

Las regiones de credibilidad Bayesianas se calculan a partir de la identificación de los percentiles 0.025 y 0.975, que son los puntos límites de confianza del 95 % en dónde se espera que se muevan los parámetros Bayesianos dada la probabilidad correspondiente.

7.4. Evaluación de la aproximación entre los estimadores

Antes de evaluar la aproximación por convergencia en probabilidad y casi segura, es importante revisar que los estimadores sean precisos y exactos. Vale recordar que, la exactitud se refiere al grado de cercanía que tiene el estimador al parámetro real y se mide con el sesgo. En cambio, la precisión, está vinculada al nivel de dispersión de, en éste caso, los valores estimados entre sí y se la mide a partir de la varianza existente entre los datos.

Para evaluar la exactitud y la precisión de los estimadores, se calcularon la esperanza de los mil estimadores, de cada tamaño de muestra y para cada una de las probabilidades p , y su varianza correspondiente.

7.4.1. Aproximación por convergencia en probabilidad

Como se definió en el capítulo anterior, la convergencia en probabilidad es definida por Casella & Berger (2002) como $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$, con $\epsilon > 0$. Como aquí lo que se quiere es mostrar en qué momento se da esta aproximación entre dos estimadores, se halló $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_M - \hat{\theta}_B| < \epsilon) = 1$.

Inicialmente, se calculó el valor absoluto de la diferencia entre los estimadores $\Delta_{\hat{\theta}_M - \hat{\theta}_B} = |\hat{\theta}_M - \hat{\theta}_B|$, de lo que se obtuvo una matriz de diferencias de la forma:

Una vez se obtuvo la matriz de diferencias, se identificaron los valores máximos y mínimos en cada tamaño de muestra, para conocer el rango de valores en el que se mueven. Esto, porque hay un interés especial en identificar las diferencias mínimas. Ya que, dichas diferencias se

p_k				
n	10	20	...	100
	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k11}}$	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k21}}$	$\cdots$	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k101}}$
	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k12}}$	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k22}}$	$\cdots$	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k102}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k1m}}$	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k2m}}$	$\cdots$	$\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)_{k10m}}$

darán cuando los estimadores sean parecidos, o en su defecto sean iguales, caso en el que las diferencias tendrían que ser cero; y en el que se estaría dando la aproximación ideal entre los estimadores.

La aproximación por convergencia en probabilidad será evaluada a partir de tres valores de ϵ : el primero, será el valor de ϵ que permita que la probabilidad de aproximación entre los estimadores sea uno. Este épsilon vendrá dado por $\epsilon = \max(\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)}) - \min(\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)})$; el segundo, ϵ_1 que cumple la condición de ser mayor que cero y que se espera permita concentrar una buena proporción de diferencias iguales a cero o muy cercanas. Este épsilon será definido como $\epsilon_1 = \sup(\min(\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)})) * 0.05$; y finalmente, $\epsilon_2 = (p * 0.1)$ que es el 10 % del parámetro de interés y con el que se construirá un intervalo que contenga diferencias pequeñas pero que no necesariamente sean cero.

Una vez identificados los valores de cada uno de los épsilon, se construyen los intervalos en los que se evaluará la aproximación entre los estimadores; en cada intervalo, se calcula el número de veces en los que las diferencias entre los estimadores en todos los tamaños de muestra pertenecen al intervalo. El tamaño de muestra a partir del cual se empieza a dar una cantidad decente¹ de aproximaciones entre los estimadores, será el tamaño de muestra a partir del cual se puede concluir que el estimador clásico y el bayesiano “convergen”.

Cabe mencionar que, pese a que el interés de la investigación está en las diferencias de los estimadores que son mínimas, no se construyó el intervalo entre el supremo de los mínimos y su ínfimo ($[\inf(\min(\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)}), \sup(\min(\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B)}))]$), porque hay ocasiones en las que dichos valores extremos son incluso mayores al parámetro, lo que denota que la diferencia entre los estimadores es muy grande. Un ejemplo puntual, se da cuando para $\Delta_{(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})}$, con $p = 0.005$ y $n = 10$, se obtiene el intervalo (0.0049, 0.1945), que como se puede notar, ambos extremos indican, que en realidad no hay una buena aproximación entre los estimadores. Sin embargo, al rededor del 95 % de las diferencias obtenidas en el tamaño de muestra y probabilidad señalados, caerían dentro del intervalo y lo ideal sería que las diferencias fueran cero o casi cero. Lo anterior puede corroborarse en la tabla **8-19**.

¹Una cantidad “decente” podría ser un número mayor a 900.

7.4.2. Aproximación por convergencia casi segura

La convergencia casi segura es definida por Casella & Berger (2002) como $P(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| < \epsilon) = 1$, con $\epsilon > 0$. Nuevamente, dado que el interés en ésta investigación es hallar el punto de aproximación entre dos estimadores, a partir de esta convergencia, se halló $P(\lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B| < \epsilon) = 1$.

Para hallar la aproximación por convergencia casi segura, se replicó el proceso de simulación planteado con anterioridad 1000 veces. Entonces, inicialmente se crearon 1000 matrices de realizaciones binomiales, cada una con los 10 tamaños de muestra de interés. luego, a cada una de esas matrices, se le calcularon las cuatro matrices de estimadores. Posteriormente, se calcularon las diferencias entre los estimadores, los valores de los diferentes épsilons y se construyeron los intervalos². Finalmente, se hizo el conteo del número de diferencias que pertenecen a cada uno de los intervalos para evaluar si se dan las aproximaciones o no.

Nuevamente, el tamaño de muestra a partir del cual se observe que un número significativo de aproximaciones, es el que determina desde dónde se puede concluir que el estimador clásico y el bayesiano encuentran su punto de “convergencia”.

Cabe mencionar que a lo largo de éste documento no se habla de “convergencia” puntualmente, porque su definición, requiere que el parámetro tenga un valor fijo, para que el estimador converja a él y, como se puede notar, en éste caso ambos estimadores varían según el número de éxitos que se hayan dado en las realizaciones binomiales.

²Tanto los valores de ϵ como los intervalos, se calcularon de la forma en que se describió en la sección anterior.

8. Resultados

8.1. Evaluación de los estimadores

Intervalos de confianza

En las tablas desde la **8-1** a **8-6**, se presentan los promedios de los anchos de los intervalos de confianza calculados para los estimadores clásicos, así como su porcentaje de cobertura. Los anchos de los intervalos vienen dados por $\Delta_M = \text{Lim}_{sup} - \text{Lim}_{inf}$.

Tabla 8-1.: Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.005$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_M]$	0.02056	0.0202	0.0186	0.0169	0.0188	0.0182	0.0183	0.0168	0.0182	0.0173
% Cobertura	0.055	0.104	0.141	0.167	0.230	0.263	0.304	0.320	0.382	0.409

Tabla 8-2.: Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.01$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_M]$	0.0355	0.0350	0.0359	0.0361	0.0345	0.0339	0.0305	0.0315	0.0315	0.0309
% Cobertura	0.094	0.176	0.264	0.348	0.406	0.471	0.474	0.547	0.605	0.652

Tabla 8-3.: Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.05$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_M]$	0.1558	0.1515	0.1348	0.1218	0.1119	0.1038	0.0966	0.0898	0.0864	0.0826
% Cobertura	0.384	0.657	0.800	0.871	0.915	0.807	0.857	0.900	0.938	0.865

Tabla 8-4.: Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.1$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_M]$	0.2832	0.2325	0.2013	0.1782	0.1610	0.1479	0.1390	0.1282	0.1223	0.1161
% Cobertura	0.656	0.863	0.811	0.917	0.868	0.929	0.921	0.900	0.945	0.942

Tabla 8-5.: Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.25$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_M]$	0.4991	0.3634	0.3023	0.2637	0.2362	0.2170	0.2006	0.1879	0.1781	0.1683
% Cobertura	0.939	0.883	0.925	0.939	0.943	0.941	0.939	0.937	0.947	0.952

Tabla 8-6.: Promedio del ancho de los intervalos de confianza y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.5$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_M]$	0.5894	0.4261	0.3513	0.3060	0.2744	0.2509	0.2326	0.2178	0.2054	0.1950
% Cobertura	0.908	0.953	0.951	0.932	0.942	0.948	0.937	0.953	0.965	0.957

Las tablas anteriores permiten observar que en general, a medida que aumenta el tamaño de muestra, el ancho medio de los intervalos de confianza disminuye, cosa que no ocurre con los porcentajes de cobertura, que tienden a ser fluctuantes, dado que aumentan hasta cierto punto junto con el tamaño de muestra, luego disminuyen aunque el tamaño de muestra permanezca en aumento y finalmente vuelven a aumentar, para los tamaños de muestra más grandes.

Cabe mencionar que, pese a que cuando $p = 0.005$ y $p = 0.01$ los porcentajes de cobertura permanecen en aumento constantemente, éste no alcanza a superar el 45 % en el primer caso y el 70 % en el segundo. Al contrario, para las probabilidades p mayores a las antes mencionadas, el porcentaje de cobertura de los intervalos de confianza está por encima del 70 % en la mayoría de los casos; lo que podría sugerir que para probabilidades grandes, se pueden estar obteniendo estimaciones más cercanas al parámetro, cosa que pareciera no ocurrir cuando la probabilidad p toma valores pequeños.

Regiones de credibilidad

Las tablas de la 8-7 a 8-12 muestran el promedio de los anchos de las regiones así como su porcentaje de cobertura. Los anchos de los intervalos vienen dados por $\Delta_B = Lim_{sup} - Lim_{inf}$.

Tabla 8-7.: Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.005$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_{BT}]$	0.004142	0.004138	0.004133	0.004127	0.004124	0.004120	0.004116	0.004108	0.004108	0.004100
% Cobertura	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$E[\Delta_{BJ}]$	0.2256	0.1261	0.0888	0.0691	0.0585	0.0504	0.0449	0.0398	0.0373	0.0341
% Cobertura	0.945	0.896	0.989	0.980	0.971	0.955	0.941	0.941	0.988	0.987
$E[\Delta_{BL}]$	0.2885	0.1670	0.1184	0.0922	0.0770	0.0659	0.0581	0.0514	0.0474	0.0432
% Cobertura	0.945	0.896	0.859	0.833	0.971	0.955	0.941	0.941	0.911	0.920

Tabla 8-8.: Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.01$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_{BT}]$	0.008275	0.008255	0.008238	0.008222	0.008202	0.008184	0.008158	0.008148	0.008134	0.008115
% Cobertura	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$E[\Delta_{BJ}]$	0.2319	0.1333	0.0977	0.0792	0.0670	0.0591	0.0520	0.0486	0.0454	0.0425
% Cobertura	0.906	0.980	0.961	0.943	0.987	0.977	0.977	0.947	0.987	0.984
$E[\Delta_{BL}]$	0.2930	0.1725	0.1254	0.1001	0.0838	0.0729	0.0639	0.0586	0.0542	0.0502
% Cobertura	0.906	0.824	0.961	0.943	0.913	0.887	0.977	0.947	0.929	0.914

Tabla 8-9.: Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.05$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_{BT}]$	0.0409	0.0405	0.0400	0.0396	0.0392	0.0387	0.0383	0.0379	0.0375	0.0372
% Cobertura	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$E[\Delta_{BJ}]$	0.2849	0.1955	0.1560	0.1342	0.1196	0.1089	0.1002	0.0928	0.0886	0.0844
% Cobertura	0.992	0.980	0.983	0.988	0.882	0.927	9.959	0.962	0.955	0.934
$E[\Delta_{BL}]$	0.3307	0.2206	0.1723	0.1456	0.1282	0.1156	0.1056	0.0974	0.0924	0.0876
% Cobertura	0.909	0.916	0.935	0.946	0.960	0.973	0.980	0.933	0.955	0.963

Tabla 8-10.: Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.1$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_{BT}]$	0.0809	0.0790	0.0773	0.0756	0.0741	0.0727	0.0715	0.0699	0.0688	0.0677
% Cobertura	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$E[\Delta_{BJ}]$	0.3456	0.2480	0.2060	0.1798	0.1617	0.1483	0.1391	0.1284	0.1224	0.1162
% Cobertura	0.989	0.948	0.924	0.969	0.931	0.952	0.949	0.943	0.948	0.952
$E[\Delta_{BL}]$	0.3745	0.2630	0.2147	0.1856	0.1660	0.1515	0.1416	0.1305	0.1241	0.1176
% Cobertura	0.926	0.948	0.973	0.939	0.965	0.952	0.924	0.960	0.948	0.939

Tabla 8-11.: Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.25$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_{BT}]$	0.193	0.181	0.171	0.163	0.156	0.150	0.144	0.139	0.135	0.130
% Cobertura	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.993	0.993	0.989	0.987	0.997
$E[\Delta_{BJ}]$	0.467	0.348	0.293	0.257	0.231	0.213	0.197	0.185	0.176	0.166
% Cobertura	0.939	0.934	0.925	0.962	0.942	0.952	0.949	0.949	0.958	0.957
$E[\Delta_{BL}]$	0.455	0.347	0.292	0.256	0.231	0.213	0.197	0.185	0.175	0.166
% Cobertura	0.976	0.934	0.959	0.962	0.942	0.952	0.949	0.949	0.958	0.957

Tabla 8-12.: Promedio del ancho de las regiones de credibilidad y sus porcentajes de cobertura cuando $p = 0.5$

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E[\Delta_{BT}]$	0.341	0.298	0.268	0.246	0.228	0.214	0.202	0.192	0.184	0.176
% Cobertura	1.000	0.995	0.978	0.988	0.991	0.974	0.983	0.978	0.982	0.977
$E[\Delta_{BJ}]$	0.529	0.402	0.337	0.297	0.268	0.246	0.228	0.214	0.202	0.192
% Cobertura	0.983	0.953	0.951	0.972	0.942	0.948	0.963	0.953	0.965	0.957
$E[\Delta_{BL}]$	0.513	0.394	0.333	0.293	0.265	0.244	0.227	0.213	0.201	0.191
% Cobertura	0.983	0.953	0.951	0.972	0.942	0.948	0.963	0.953	0.965	0.957

Las tablas anteriores permiten observar que las regiones de credibilidad son más estrechas para el estimador bayesiano informativo que además cuenta con un porcentaje de cobertura del 100 % en la mayoría de los casos. También se puede ver que en general, para los estimadores bayesianos no informativos, las regiones de credibilidad tienden a hacerse más estrechas a medida que aumenta el tamaño de muestra. No obstante, su porcentaje de cobertura no tiene una tendencia marcada a aumentar a medida que el tamaño de muestra lo hace, tal y como sucede con los intervalos de confianza. Además, pese a que las regiones fueron calculadas esperando contener los estimadores el 95 % de las veces, cuando éstos no son informativos, se ve que la cobertura no siempre alcanza ese 95 %, lo que puede denotar que se estén presentando problemas de subestimación o en su defecto, de sobreestimación.

Evaluación de los estimadores a través del sesgo y la varianza

En las tablas de la 8-13 a la 8-18 se muestran la esperanza, la varianza, el sesgo y el error cuadrático medio de los estimadores. En color púrpura se resaltan los estimadores con el valor más pequeño.

Tabla 8-13.: Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.005$

n	Estimador	$E(\hat{\theta})$	Varianza($\hat{\theta}$)	Sesgo($\hat{\theta}$)	ECM($\hat{\theta}$)
10	$\widehat{\theta}_M$	0.0056	$5.491e^{-04}$	$6.000e^{-04}$	$5.495e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$2.812e^{-09}$	$1.135e^{-06}$	$2.814e^{-09}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0505	$4.538e^{-04}$	0.0455	$2.528e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0880	$3.813e^{-04}$	0.0830	$7.270e^{-03}$
20	$\widehat{\theta}_M$	0.0054	$2.680e^{-04}$	$4.500e^{-04}$	$2.682e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$5.466e^{-09}$	$2.032e^{-06}$	$2.470e^{-09}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0290	$2.431e^{-04}$	0.0240	$8.191e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0504	$2.215e^{-04}$	0.0454	$2.283e^{-03}$
30	$\widehat{\theta}_M$	0.0050	$1.678e^{-04}$	$6.666e^{-05}$	$1.678e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$7.665e^{-09}$	$4.504e^{-07}$	$7.665e^{-09}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0210	$1.571e^{-04}$	0.0160	$4.142e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0360	$1.475e^{-04}$	0.0310	$1.108e^{-03}$
40	$\widehat{\theta}_M$	0.0047	$1.259e^{-04}$	$-2.750e^{-04}$	$1.260e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0049	$1.017e^{-08}$	$-2.471e^{-06}$	$1.018e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0168	$1.198e^{-04}$	0.0118	$2.592e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0283	$1.142e^{-04}$	0.0233	$6.575e^{-04}$
50	$\widehat{\theta}_M$	0.0052	$1.072e^{-04}$	$2.600e^{-04}$	$1.073e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$1.348e^{-08}$	$2.915e^{-06}$	$1.349e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0149	$1.030e^{-04}$	0.0099	$2.022e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0242	$9.914e^{-05}$	0.0192	$4.711e^{-04}$
60	$\widehat{\theta}_M$	0.0051	$8.672e^{-05}$	$1.666e^{-04}$	$8.675e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$1.563e^{-08}$	$2.237e^{-06}$	$1.563e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0132	$8.390e^{-05}$	0.0082	$1.524e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0211	$8.122e^{-05}$	0.0161	$3.413e^{-04}$
70	$\widehat{\theta}_M$	0.0053	$7.872e^{-05}$	$3.000e^{-04}$	$7.881e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$1.922e^{-08}$	$4.688e^{-06}$	$1.925e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0122	$7.652e^{-05}$	0.0072	$1.293e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0190	$7.441e^{-05}$	0.0140	$2.715e^{-04}$
80	$\widehat{\theta}_M$	0.0048	$5.924e^{-05}$	$-1.875e^{-04}$	$5.927e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0049	$1.881e^{-08}$	$-3.341e^{-06}$	$1.882e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0109	$5.778e^{-05}$	0.0059	$9.290e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0168	$5.638e^{-05}$	0.0118	$5.638e^{-05}$
90	$\widehat{\theta}_M$	0.0053	$5.953e^{-05}$	$3.777e^{-04}$	$5.967e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$2.382e^{-08}$	$7.557e^{-06}$	$2.388e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0108	$5.823e^{-05}$	0.0058	$9.202e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0161	$5.697e^{-05}$	0.0111	$1.390e^{-04}$
100	$\widehat{\theta}_M$	0.0050	$4.624e^{-05}$	$2.000e^{-05}$	$4.624e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0050	$2.271e^{-08}$	$4.435e^{-07}$	$2.274e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0099	$4.533e^{-05}$	0.0049	$6.954e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0147	$4.445e^{-05}$	0.0097	$1.390e^{-04}$

Tabla 8-14.: Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.01$

n	Estimador	$E(\hat{\theta})$	Varianza($\hat{\theta}$)	Sesgo($\hat{\theta}$)	ECM($\hat{\theta}$)
10	$\widehat{\theta}_M$	0.0099	$9.929e^{-04}$	-0.0001	$9.929e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0099	$2.046e^{-08}$	$-4.539e^{-07}$	$2.046e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0544	$8.206e^{-04}$	0.0444	$0.796e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0915	$6.895e^{-04}$	0.0815	$7.345e^{-03}$
20	$\widehat{\theta}_M$	0.0098	$4.944e^{-04}$	0.0002	$4.944e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0099	$4.038e^{-08}$	$-1.807e^{-06}$	$4.039e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0331	$4.484e^{-04}$	0.0231	$9.840e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0543	$4.086e^{-04}$	0.0443	$2.376e^{-03}$
30	$\widehat{\theta}_M$	0.0102	$3.362e^{-04}$	0.0002	$3.361e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$6.125e^{-08}$	$2.699e^{-06}$	$6.125e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0260	$3.149e^{-04}$	0.0160	$5.709e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0408	$2.955e^{-04}$	0.0308	$1.244e^{-03}$
40	$\widehat{\theta}_M$	0.0104	$2.508e^{-04}$	0.0004	$2.510e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$8.049e^{-08}$	$7.165e^{-06}$	$8.054e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0223	$2.387e^{-04}$	0.0123	$3.910e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0337	$2.275e^{-04}$	0.0237	$7.898e^{-04}$
50	$\widehat{\theta}_M$	0.0101	$1.977e^{-04}$	0.0001	$1.977e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$9.828e^{-08}$	$4.0126e^{-06}$	$9.829e^{-08}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0197	$1.900e^{-04}$	0.0097	$2.858e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0290	$1.828e^{-04}$	0.0190	$5.445e^{-04}$
60	$\widehat{\theta}_M$	0.0101	$1.584e^{-04}$	0.0001	$1.584e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$1.123e^{-07}$	$4.438e^{-06}$	$1.124e^{-07}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0181	$1.533e^{-04}$	0.0081	$2.204e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0259	$1.484e^{-04}$	0.0159	$4.033e^{-04}$
70	$\widehat{\theta}_M$	0.0095	$1.393e^{-04}$	-0.0004	$1.395e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0099	$1.333e^{-07}$	$-1.458e^{-05}$	$1.135e^{-07}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0164	$1.354e^{-04}$	0.0064	$1.768e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0231	$1.317e^{-04}$	0.0131	$3.047e^{-04}$
80	$\widehat{\theta}_M$	0.0101	$1.308e^{-04}$	0.0001	$1.308e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$1.621e^{-07}$	$5.279e^{-06}$	$1.621e^{-07}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0161	$1.276e^{-04}$	0.0061	$1.660e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0220	$1.245e^{-04}$	0.0120	$3.047e^{-04}$
90	$\widehat{\theta}_M$	0.0103	$1.133e^{-04}$	0.0003	$1.134e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$1.762e^{-07}$	$1.401e^{-05}$	$1.763e^{-07}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0157	$1.108e^{-04}$	0.0057	$1.437e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0210	$1.084e^{-04}$	0.0110	$2.294e^{-04}$
100	$\widehat{\theta}_M$	0.0102	$9.753e^{-05}$	0.0002	$9.759e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0100	$1.855e^{-07}$	$1.090e^{-05}$	$1.856e^{-07}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0150	$9.561e^{-05}$	0.0050	$1.216e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0190	$9.374e^{-05}$	0.0047	$2.320e^{-05}$

Tabla 8-15.: Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.05$

n	Estimador	$E(\hat{\theta})$	Varianza($\hat{\theta}$)	Sesgo($\hat{\theta}$)	ECM($\hat{\theta}$)
10	$\widehat{\theta}_M$	0.0489	0.0048	$-1.100e^{-03}$	0.0049
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0499	$2.608e^{-06}$	$-2.557e^{-05}$	$2.608e^{-06}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0899	$3.986e^{-03}$	0.0399	$5.579e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1240	$3.349e^{-03}$	0.0740	$8.838e^{-03}$
20	$\widehat{\theta}_M$	0.0524	0.0025	$2.450e^{-03}$	0.0025
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0501	$5.172e^{-06}$	$1.113e^{-04}$	$5.184e^{-06}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0737	$2.271e^{-03}$	0.0237	$2.835e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0931	$2.069e^{-03}$	0.0431	$3.930e^{-03}$
30	$\widehat{\theta}_M$	0.0509	0.0015	$9.000e^{-04}$	0.0015
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0500	$7.063e^{-06}$	$5.999e^{-05}$	$7.067e^{-06}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0653	$1.488e^{-03}$	0.0153	$1.725e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0789	$1.397e^{-03}$	0.0289	$2.236e^{-03}$
40	$\widehat{\theta}_M$	0.0500	0.0011	$7.250e^{-04}$	0.0011
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0500	$8.930e^{-06}$	$6.303e^{-05}$	$8.934e^{-06}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0616	$1.124e^{-03}$	0.0116	$1.260e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0721	$1.071e^{-03}$	0.0221	$1.682e^{-04}$
50	$\widehat{\theta}_M$	0.0507	0.0010	$7.400e^{-04}$	0.0010
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0500	$1.151e^{-05}$	$7.871e^{-05}$	$1.152e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0595	$9.785e^{-04}$	0.0095	$1.069e^{-03}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0680	$9.412e^{-04}$	0.0180	$1.265e^{-03}$
60	$\widehat{\theta}_M$	0.0500	$7.777e^{-04}$	$8.333e^{-05}$	$7.777e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0500	$1.214e^{-05}$	$1.041e^{-05}$	$1.214e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0574	$7.524e^{-04}$	0.0054	$8.080e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0645	$7.283e^{-04}$	0.0145	$9.414e^{-04}$
70	$\widehat{\theta}_M$	0.0490	$6.398e^{-04}$	$-9.142e^{-04}$	$6.406e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0498	$1.305e^{-05}$	$-1.305e^{-04}$	$1.307e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0554	$6.219e^{-04}$	0.0054	$6.514e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0616	$6.047e^{-04}$	0.0116	$7.395e^{-04}$
80	$\widehat{\theta}_M$	0.0482	$5.766e^{-04}$	$-1.725e^{-03}$	$5.796e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0497	$1.475e^{-05}$	$-2.759e^{-04}$	$1.483e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0538	$5.625e^{-04}$	0.0038	$5.773e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0592	$5.488e^{-04}$	0.0092	$6.352e^{-04}$
90	$\widehat{\theta}_M$	0.0494	$5.291e^{-04}$	$-5.555e^{-04}$	$5.294e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0499	$1.647e^{-05}$	$-9.802e^{-05}$	$1.648e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0543	$5.175e^{-04}$	0.0043	$5.368e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0592	$5.063e^{-04}$	0.0092	$5.917e^{-04}$
100	$\widehat{\theta}_M$	0.0498	$4.961e^{-04}$	$-1.500e^{-04}$	$4.961e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0499	$1.834e^{-05}$	$-2.884e^{-05}$	$1.834e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.0543	$4.863e^{-04}$	0.0043	$5.049e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.0586	$4.769e^{-04}$	0.0086	$5.521e^{-04}$

Tabla 8-16.: Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.1$

n	Estimador	$E(\hat{\theta})$	Varianza($\hat{\theta}$)	Sesgo($\hat{\theta}$)	ECM($\hat{\theta}$)
10	$\widehat{\theta}_M$	0.1010	0.0090	0.0010	0.0090
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1000	$2.087e^{-05}$	$4.797e^{-05}$	$2.087e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1372	0.0074	0.0372	0.0088
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1672	0.0062	0.0675	0.0108
20	$\widehat{\theta}_M$	0.1007	0.0048	0.0007	0.0048
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1000	$4.081e^{-05}$	$6.408e^{-05}$	$4.082e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1197	0.0044	0.0197	0.0048
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1370	0.0040	0.0370	0.0053
30	$\widehat{\theta}_M$	0.1004	0.0029	0.0004	0.0029
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1000	$5.143e^{-05}$	$6.128e^{-05}$	$5.144e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1133	0.0027	0.0133	0.0029
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1254	0.0026	0.0254	0.0032
40	$\widehat{\theta}_M$	0.0998	0.0021	-0.0002	0.0021
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0999	$6.168e^{-05}$	$-3.355e^{-05}$	$6.169e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1095	0.0020	0.0095	0.0021
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1188	0.0019	0.0188	0.0023
50	$\widehat{\theta}_M$	0.1004	0.0019	0.0004	0.0019
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1000	$7.823e^{-05}$	$8.452e^{-05}$	$7.824e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1082	0.0018	0.0082	0.0019
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1157	0.0017	0.0157	0.0020
60	$\widehat{\theta}_M$	0.1003	0.0015	0.0003	0.0015
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1000	$8.537e^{-05}$	$7.31e^{-05}$	$8.537e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1068	0.0015	0.0068	0.0015
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1132	0.0014	0.0132	0.0016
70	$\widehat{\theta}_M$	0.1023	0.0013	0.0023	0.0013
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1006	$9.175e^{-05}$	$6.146e^{-04}$	$9.213e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1079	0.0013	0.0079	0.0013
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1134	0.0012	0.0134	0.0014
80	$\widehat{\theta}_M$	0.0987	0.0011	-0.0012	0.0011
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.0996	$9.425e^{-05}$	$-3.627e^{-04}$	$9.439e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1036	0.0011	0.0036	0.0011
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1085	0.0010	0.0085	0.0011
90	$\widehat{\theta}_M$	0.1008	0.0010	0.0008	0.0010
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1002	$1.003e^{-04}$	$2.669e^{-04}$	$1.003e^{-04}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1052	0.0010	0.0043	0.0010
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1095	0.0009	0.0095	0.0010
100	$\widehat{\theta}_M$	0.1004	0.0008	0.0004	0.0008
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.1001	$9.922e^{-05}$	$1.440e^{-04}$	$9.924e^{-05}$
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.1043	0.0008	0.0043	0.0008
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.1082	0.0008	0.0082	0.0009

Tabla 8-17.: Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.25$

n	Estimador	$E(\hat{\theta})$	Varianza($\hat{\theta}$)	Sesgo($\hat{\theta}$)	ECM($\hat{\theta}$)
10	$\widehat{\theta}_M$	0.2581	0.0186	0.0081	0.0187
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2510	0.0007	-0.0003	0.0003
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2800	0.0154	0.0300	0.0163
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2984	0.0129	0.0484	0.0153
20	$\widehat{\theta}_M$	0.2472	0.0095	-0.0027	0.0095
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2493	0.0005	-0.0006	0.0005
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2592	0.0086	0.0092	0.0087
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2702	0.0079	0.0202	0.0083
30	$\widehat{\theta}_M$	0.2505	0.0066	0.0005	0.0066
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2501	0.0006	0.0001	0.0006
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2585	0.0062	0.0085	0.0063
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2660	0.0058	0.0160	0.0061
40	$\widehat{\theta}_M$	0.2505	0.0048	0.0005	0.0048
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2501	0.0006	0.0001	0.0006
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2566	0.0046	0.0066	0.0046
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2624	0.0044	0.0124	0.0045
50	$\widehat{\theta}_M$	0.2490	0.0040	-0.0009	0.0040
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2495	0.0007	-0.0004	0.0007
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2539	0.0038	0.0039	0.0038
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2587	0.0037	0.0087	0.0038
60	$\widehat{\theta}_M$	0.2509	0.0030	0.0009	0.0027
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2496	0.0006	0.0004	0.0006
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2550	0.0029	0.0050	0.0029
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2589	0.0028	0.0089	0.0029
70	$\widehat{\theta}_M$	0.2492	0.0027	-0.0007	0.0027
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2496	0.0007	-0.0003	0.0007
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2528	0.0026	0.0028	0.0026
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2562	0.0025	0.0062	0.0025
80	$\widehat{\theta}_M$	0.2491	0.0023	-0.0008	0.0023
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2495	0.0007	-0.0004	0.0007
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2522	0.0023	0.0022	0.0023
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2552	0.0022	0.0052	0.0022
90	$\widehat{\theta}_M$	0.2524	0.0020	0.0024	0.0021
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2513	0.0007	0.0013	0.0007
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2551	0.0020	0.0051	0.0020
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2577	0.0020	0.0077	0.0020
100	$\widehat{\theta}_M$	0.2488	0.0017	-0.0012	0.0017
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.2492	0.0006	-0.0007	0.0006
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.2512	0.0017	0.0012	0.0017
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.2537	0.0016	0.0037	0.0017

Tabla 8-18.: Evaluación de los estimadores cuando $p = 0.5$

n	Estimador	$E(\hat{\theta})$	Varianza($\hat{\theta}$)	Sesgo($\hat{\theta}$)	ECM($\hat{\theta}$)
10	$\widehat{\theta}_M$	0.5114	0.0225	0.0114	0.0226
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.5036	0.0023	0.0036	0.0023
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.5103	0.0186	0.0103	0.0187
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.5095	0.0156	0.0095	0.0157
20	$\widehat{\theta}_M$	0.5003	0.0132	0.0003	0.0132
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.5001	0.0031	0.0001	0.0031
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.5002	0.0120	0.0002	0.0120
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.5002	0.0109	0.0002	0.0109
30	$\widehat{\theta}_M$	0.5005	0.0088	0.0005	0.0088
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.5002	0.0030	0.0002	0.0030
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.5004	0.0082	0.0004	0.0082
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.5004	0.0077	0.0004	0.0077
40	$\widehat{\theta}_M$	0.5028	0.0060	0.0028	0.0060
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.5018	0.0025	0.0018	0.0025
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.5027	0.0057	0.0027	0.0057
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.5026	0.0054	0.0026	0.0055
50	$\widehat{\theta}_M$	0.4966	0.0047	-0.0033	0.0047
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.4976	0.0023	-0.0023	0.0023
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.4967	0.0046	-0.0032	0.0046
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.4968	0.0044	-0.0031	0.0044
60	$\widehat{\theta}_M$	0.4982	0.0041	-0.0018	0.0041
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.4986	0.0022	-0.0013	0.0022
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.4982	0.0039	-0.0017	0.0039
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.4982	0.0038	-0.0017	0.0038
70	$\widehat{\theta}_M$	0.5012	0.0035	0.0012	0.0035
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.5009	0.0020	0.0009	0.0020
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.5012	0.0034	0.0012	0.0034
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.5011	0.0033	0.0011	0.0033
80	$\widehat{\theta}_M$	0.4981	0.0028	-0.0018	0.0028
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.4985	0.0017	-0.0014	0.0017
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.4982	0.0027	-0.0017	0.0027
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.4982	0.0027	-0.0017	0.0027
90	$\widehat{\theta}_M$	0.4980	0.0027	0.0019	0.0028
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.4984	0.0018	-0.0015	0.0018
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.4980	0.0027	-0.0019	0.0027
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.4980	0.0026	-0.0019	0.0026
100	$\widehat{\theta}_M$	0.5019	0.0023	0.0019	0.0023
	$\widehat{\theta}_{BT}$	0.5016	0.0016	0.0016	0.0016
	$\widehat{\theta}_{BJ}$	0.5019	0.0023	0.0019	0.0023
	$\widehat{\theta}_{BL}$	0.5019	0.0022	0.0019	0.0022

Las tablas de la **8-13** a la **8-18** permiten observar de manera general que, a medida que aumentan los tamaños de muestra, disminuyen la varianza, el sesgo¹ y el ECM de los todos los estimadores. Sin embargo, en los casos particulares de los estimadores bayesianos no informativos, cuando $p = 0.005$ y $p = 0.01$ el sesgo es relativamente grande, pese a que los ECM podrían considerarse pequeños, lo que implica que éstos estimadores son precisos pero inexactos; lo que a su vez suscita nuevamente, que podrían estar sobreestimando.

En cuanto al caso del estimador de máxima verosimilitud y del estimador bayesiano informativo, se observa que tanto su varianza como su sesgo y su ECM son pequeños, lo que implica que ambos estimadores son precisos y exactos. Adicionalmente, cabe resaltar que, en el caso particular del estimador bayesiano informativo, este es el que presenta la menor varianza y el ECM más pequeño en todos los tamaños de muestra y para todas las probabilidades, lo que permite concluir que, agregar información externa a los datos, permite construir un estimador mucho más parecido al parámetro real.

En la Figura **8-1** se muestran los sesgos de los estimadores presentados en las tablas anteriores. En dicha gráfica se puede observar que cuando $p = 0.5$, el sesgo de todos los estimadores es muy pequeño, para todos los tamaños de muestra. No obstante, cuando las probabilidades son pequeñas ($p = 0.005$, $p = 0.01$ y $p = 0.05$), los sesgos de los estimadores bayesianos no informativos, son relativamente grandes y tienden a disminuir a medida que n de aumenta, lo que denota que, para tamaños de muestra pequeños, con las probabilidades señaladas, éstos estimadores tienden a sobreestimar el parámetro². Adicionalmente, cabe señalar que, en general los estimadores de máxima verosimilitud y bayesiano informativo, son los que presentan el menor sesgo para los diferentes valores de las probabilidades p . De éstos, el mejor estimador es el bayesiano que se construyó considerando una distribución previa informativa.

¹Los casos en los que el sesgo fue negativo, denotan que el estimador era menor que el parámetro.

²El parámetro se marca con la línea rosada.

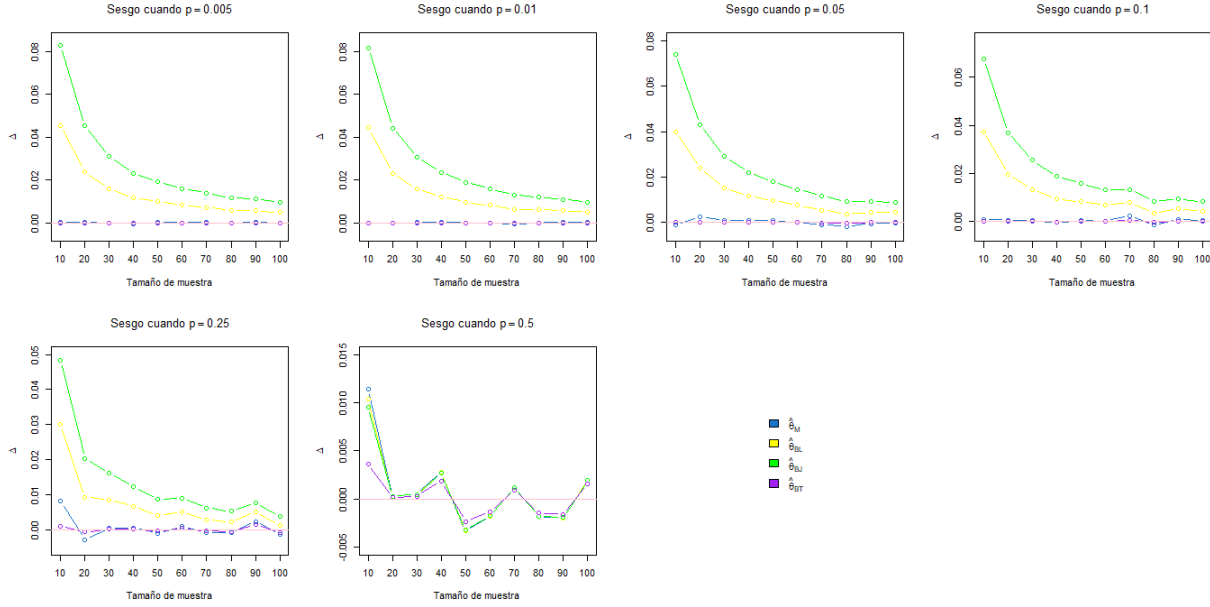


Figura 8-1.: Sesgo de los estimadores.

Las figuras de la 8-2 a la 8-7, muestran las estimaciones realizadas en cada tamaño de muestra y para cada probabilidad correspondiente. La línea roja horizontal, marca la ubicación del parámetro p .

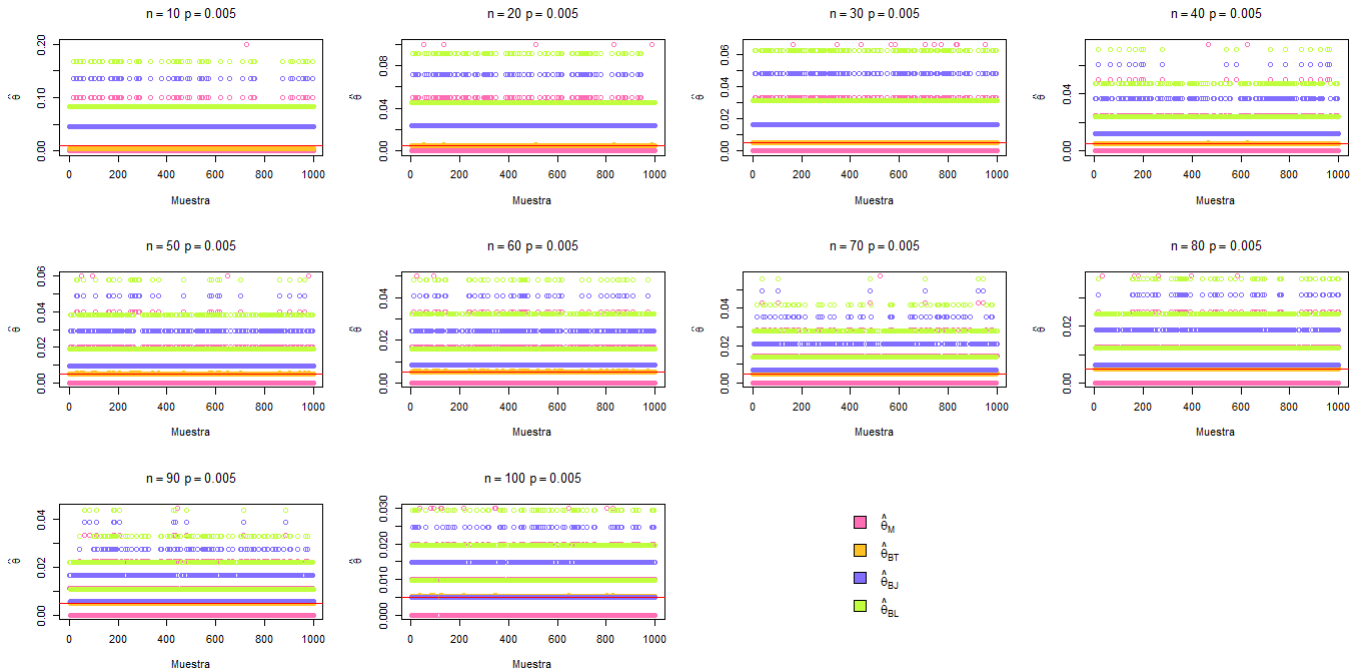


Figura 8-2.: Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.005$

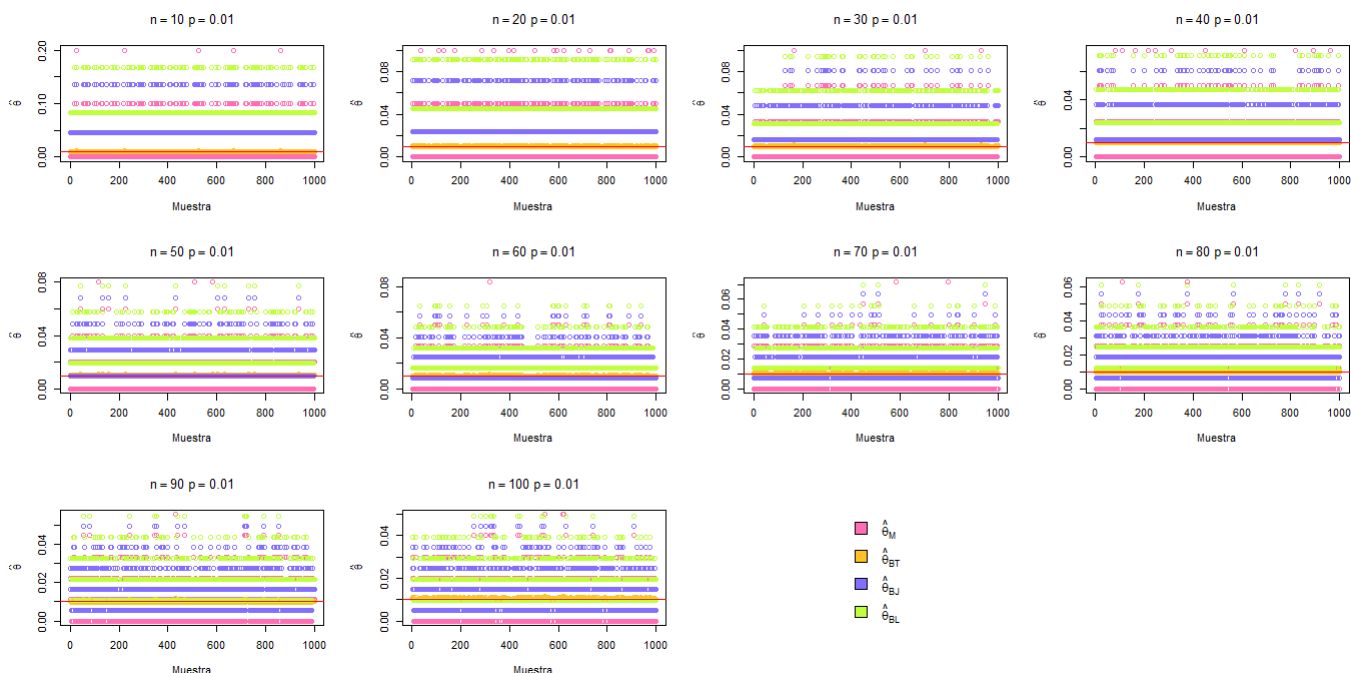


Figura 8-3.: Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.01$

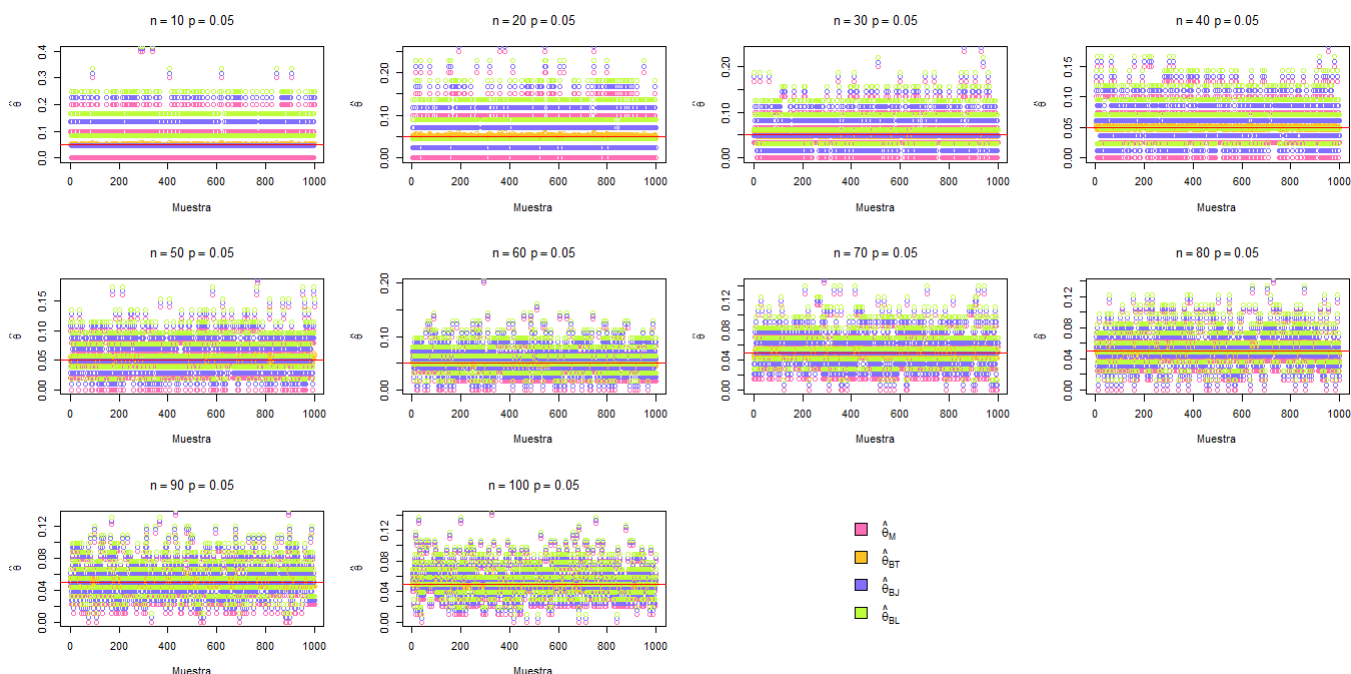


Figura 8-4.: Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.05$

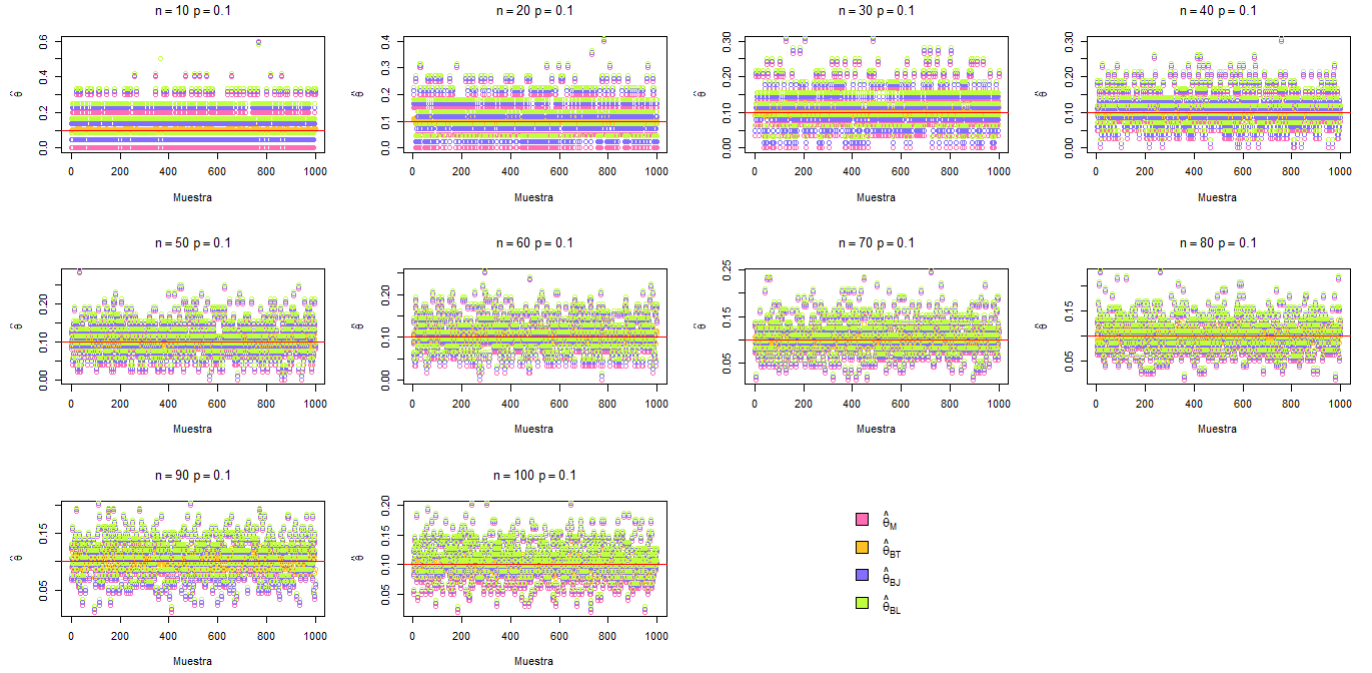


Figura 8-5.: Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.1$

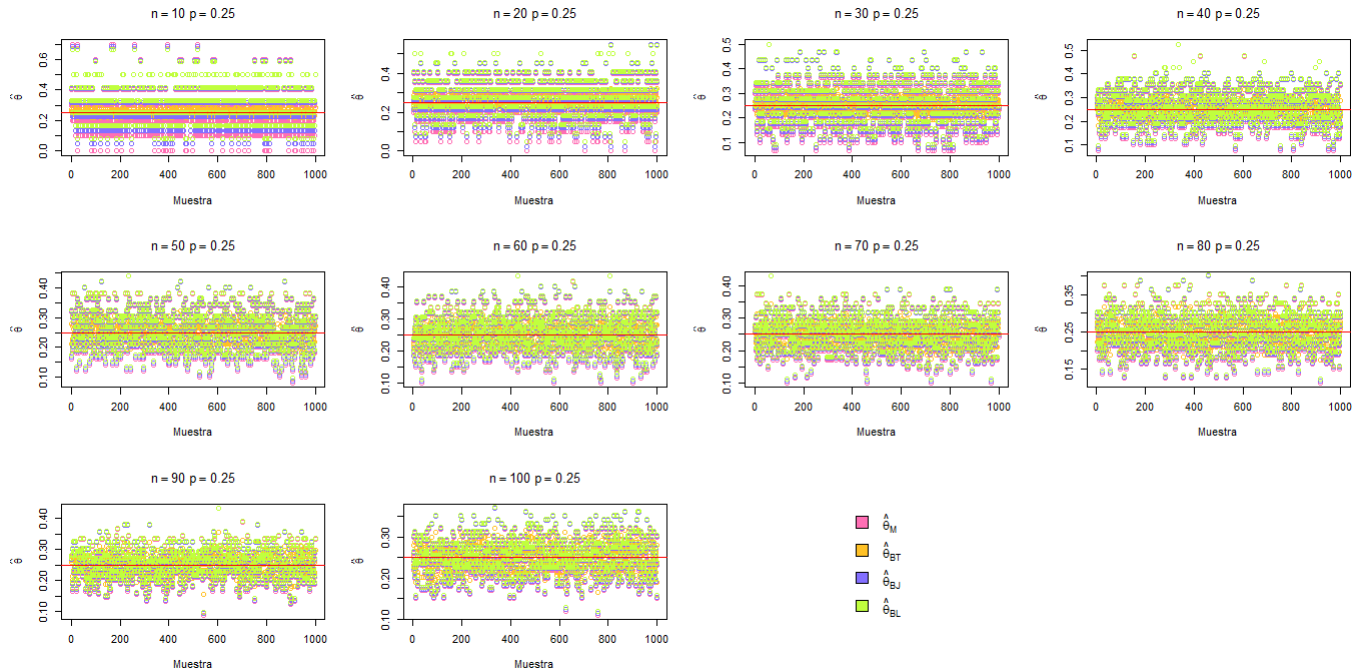


Figura 8-6.: Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.25$

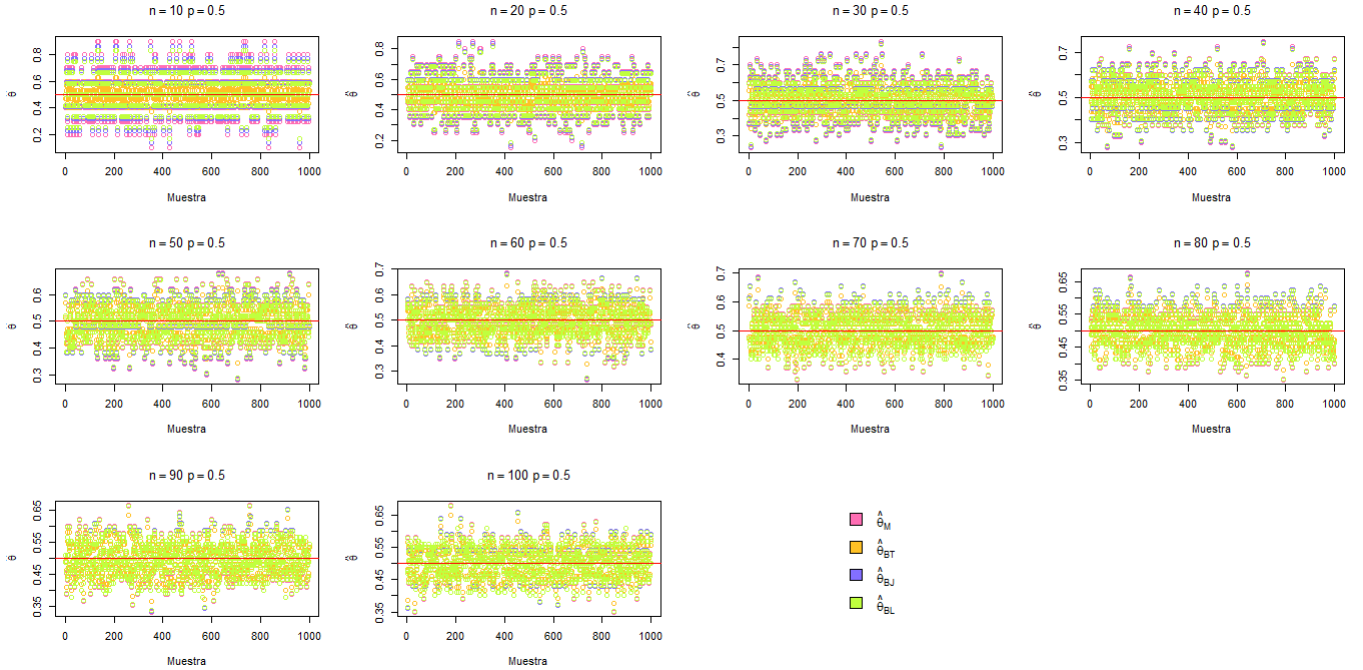


Figura 8-7.: Comparación de los estimadores con el parámetro cuando $p = 0.5$

De las figuras 8-2 y 8-3, puede observarse, que tal y como se esperaba, los estimadores bayesianos no informativos, sobreestiman el parámetro y pese a que cuando $n = 100$ el rango de estimación se reduce notablemente, la sobreestimación persiste. Por otro lado, en lo que refiere al estimador de máxima verosimilitud, se observa que aunque sí fue más exacto, que los dos antes mencionados, tiene un grado de subestimación y sobreestimación que no se corrige del todo a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Caso contrario, al de los tres estimadores mencionados, ocurre con el estimador bayesiano informativo, que permanece muy cercano al parámetro, en todos los tamaños de n .

En las figuras 8-4 a 8-7 se puede observar que los problemas de sobre y subestimación de los estimadores bayesianos no informativos y del estimador máximo verosímil, tienden a corregirse a medida que aumenta el tamaño de muestra, en todas las probabilidades correspondientes, tanto que parecen tomar valores muy cercanos al estimador bayesiano informativo.

En general, los estimadores parecen aproximarse mucho a partir de $n = 20$ cuando $p = 0.5$; de $n = 60$ para $p = 0.25$; de $n = 90$ si $p = 0.1$; empezar a homogeneizarse cuando $n = 100$ y $p = 0.05$; y finalmente, no muestran patrón de proximidad en ningunos de los tamaños de muestra planteados, para $p = 0.01$ y $p = 0.005$.

8.2. Aproximación

En esta sección se revisan los resultados de los dos tipos de aproximaciones planteadas.

8.2.1. Aproximación por convergencia en probabilidad

Las figuras de la 8-8 a 8-13, muestran los resultados de las diferencias $\Delta_{\hat{\theta}_M - \hat{\theta}_B}$ calculadas entre los estimadores. La línea roja señala el cero, por ser éste el valor ideal, en el que se puede hablar de una buena aproximación.

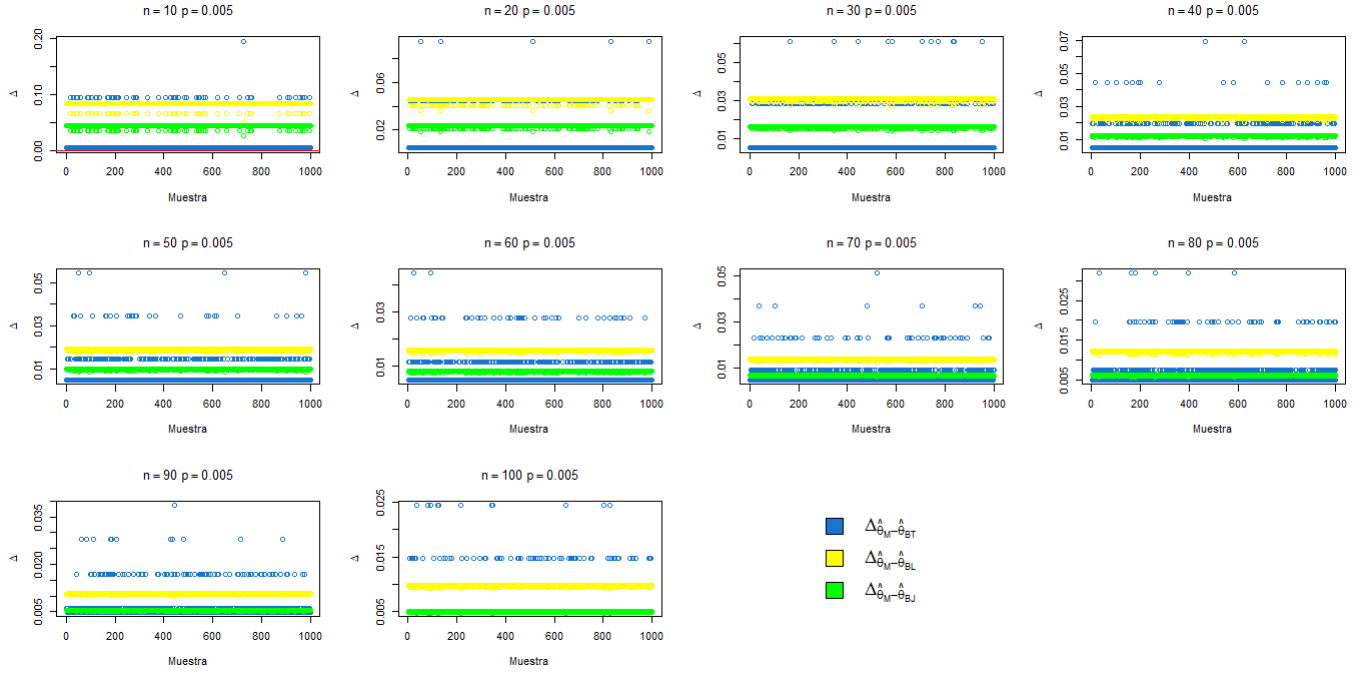
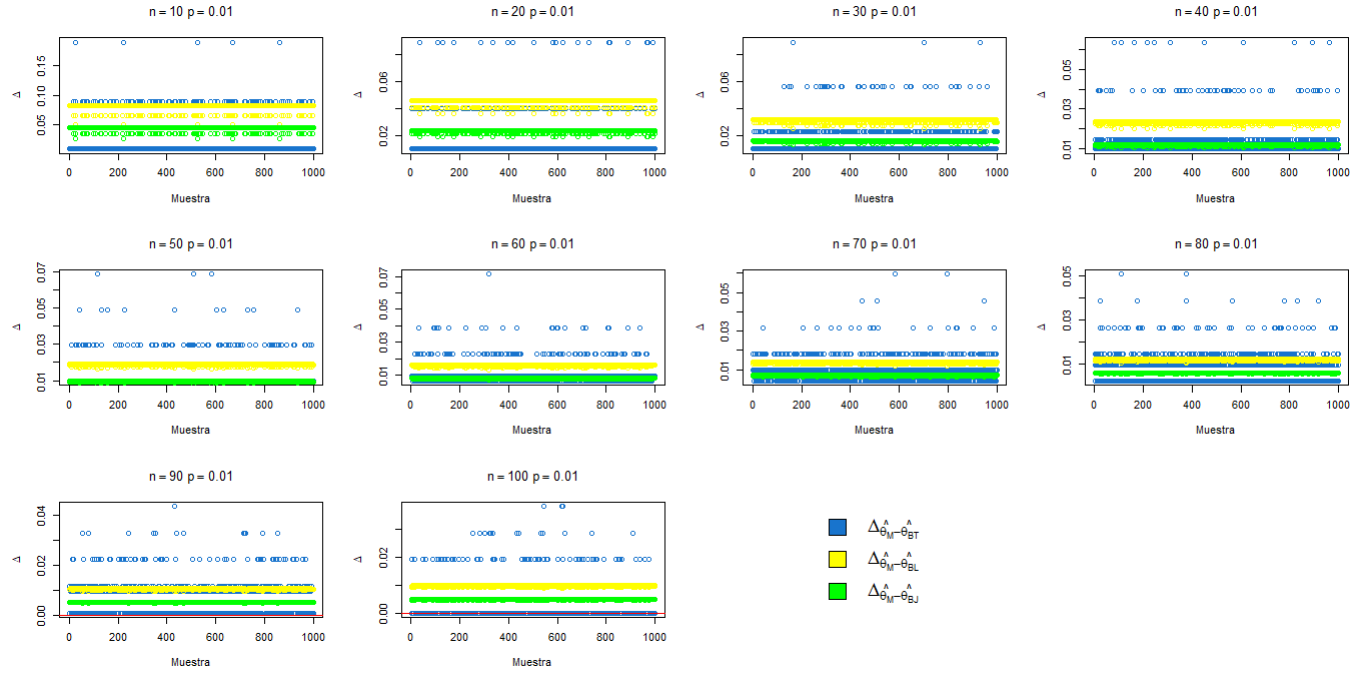
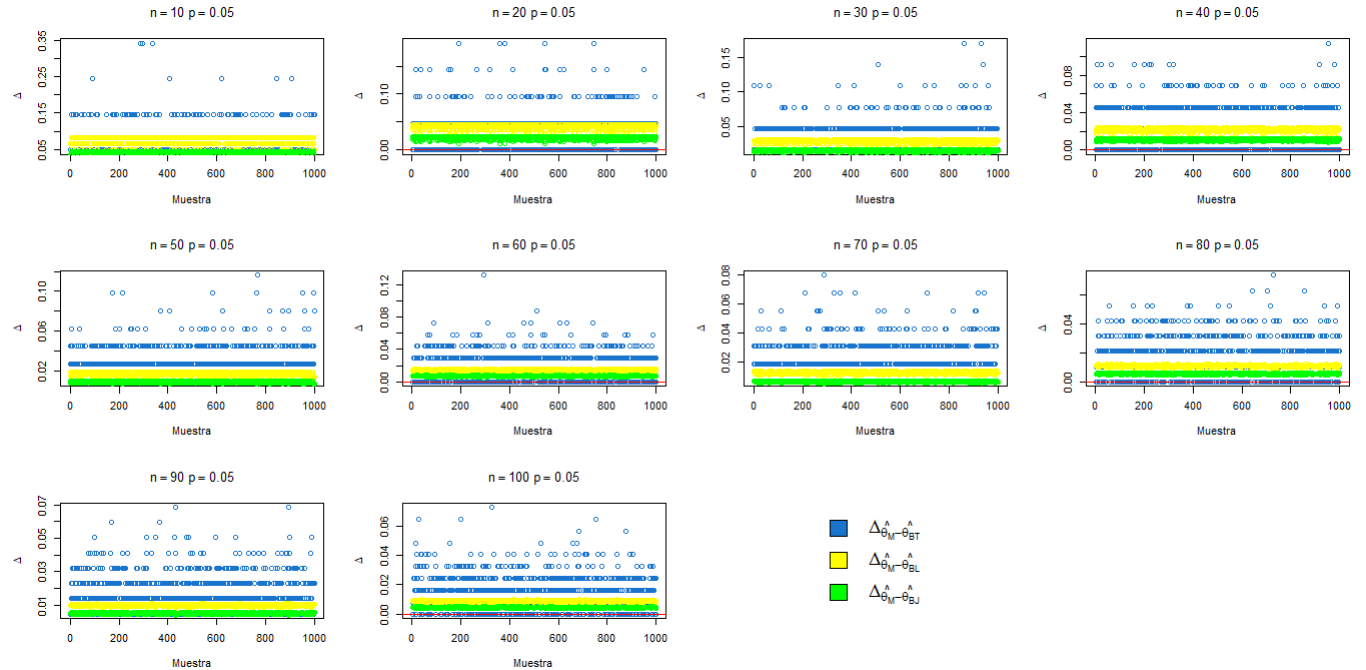


Figura 8-8.: Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.005$

Figura 8-9.: Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.01$ Figura 8-10.: Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.05$

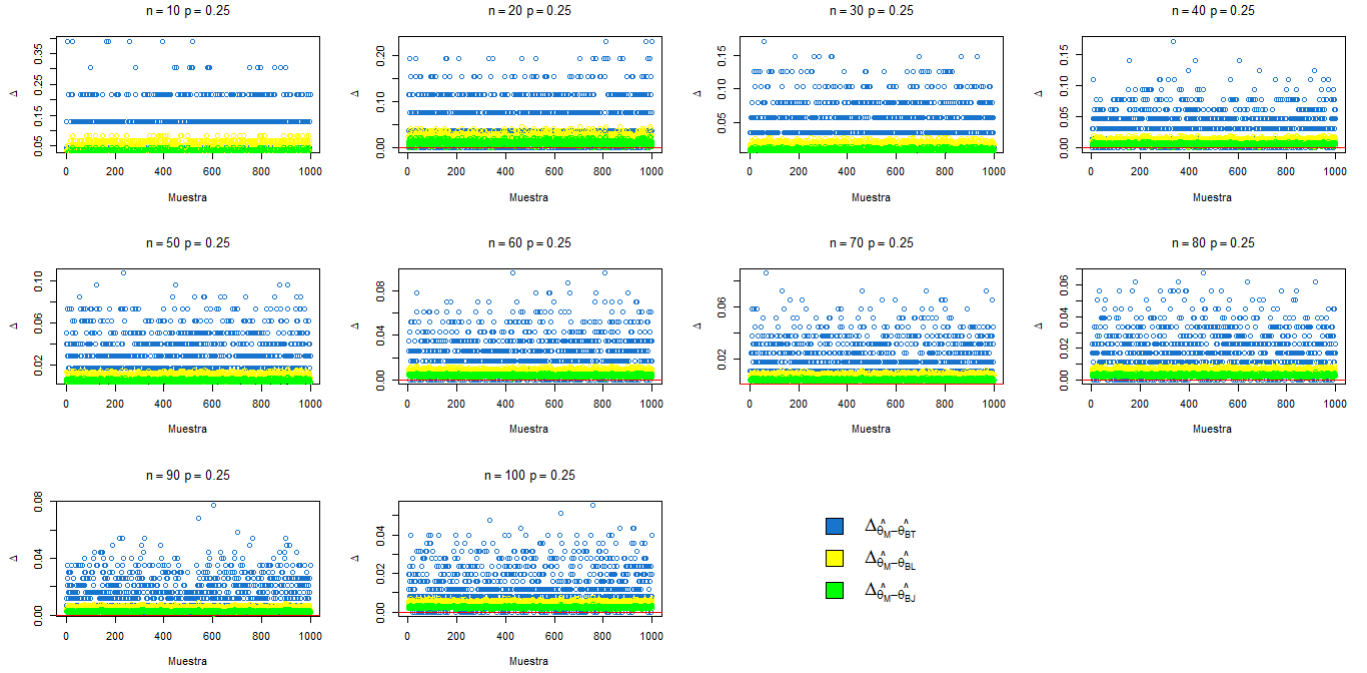


Figura 8-11.: Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.1$

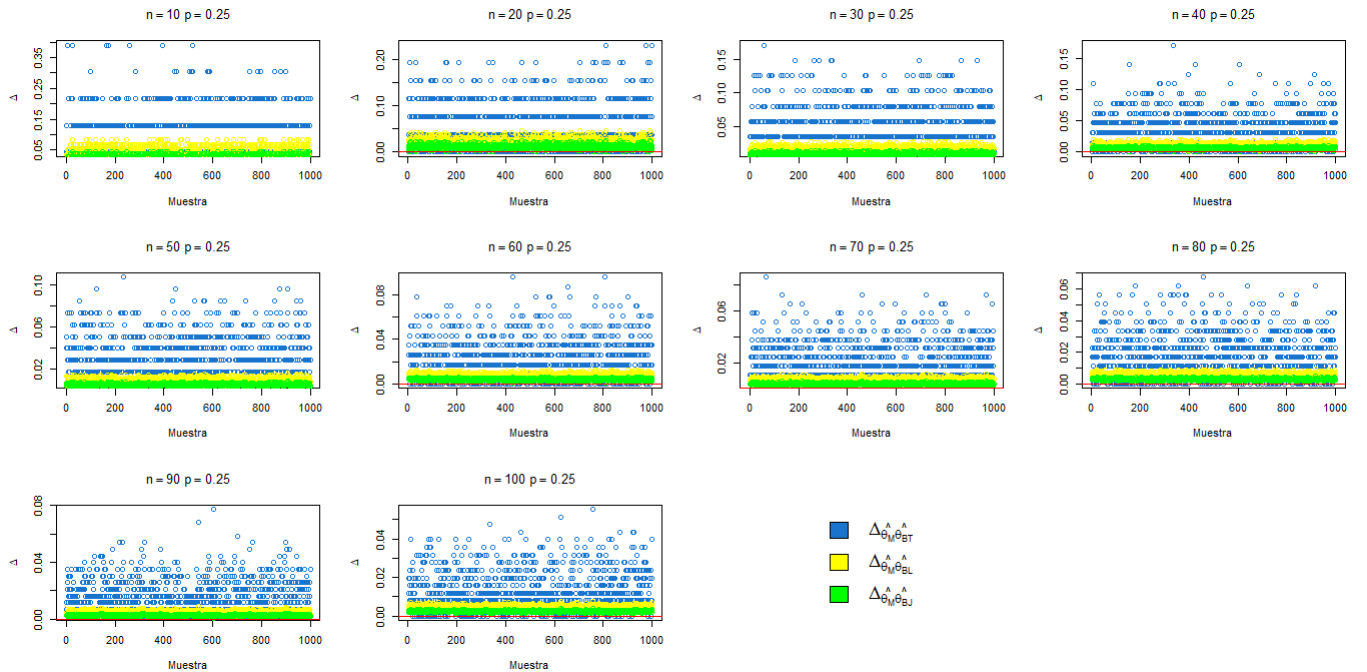


Figura 8-12.: Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.25$

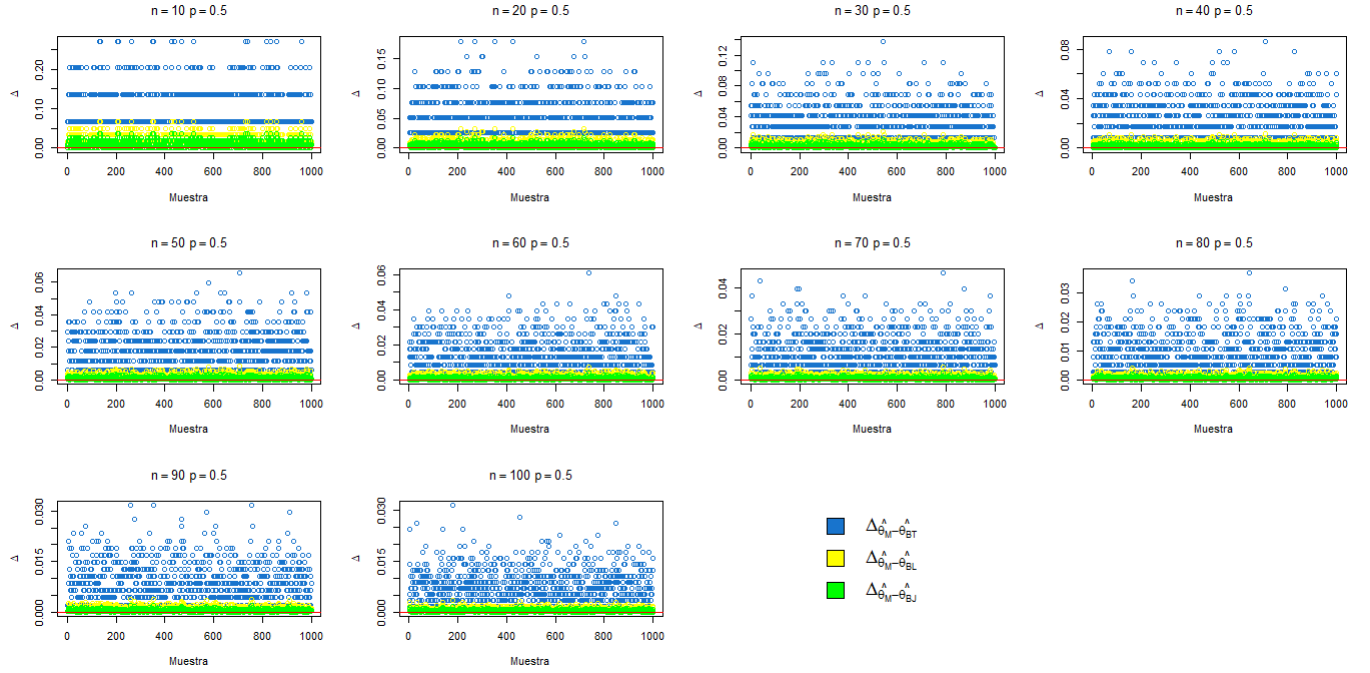


Figura 8-13.: Diferencias entre los estimadores cuando $p = 0.5$

Las figuras 8-8 y 8-9 muestran que las diferencias del estimador máximo verosímil con los estimadores bayesianos no informativos, son precisas pero no exactas y pese a que a medida que n aumenta, mejoran su exactitud, ésta no alcanza a ser suficiente como para creer que se está dando una buena aproximación entre ellos. Contrario a lo que se esperaba, la diferencia entre el estimador de máxima verosimilitud con el estimador bayesiano informativo, parece ser más exacta sólo en algunos puntos. Además, tampoco muestra patrones claros de aproximación cuando $p = 0.005$, cosa que sí ocurre a partir de $n = 90$ para $p = 0.01$.

En las figuras 8-10 a 8-13, se puede observar que la diferencia entre el estimador máximo verosímil y el estimador bayesiano informativo muestra tener algunos puntos de aproximación buenos a partir de $n = 20$ para los diferentes valores de p . También, para valores de $p = 0.25$ y $p = 0.5$, pareciera que éste fuese menos preciso y menos exacto que las diferencias entre el estimador máximo verosímil con los estimadores bayesianos no informativos. No obstante, si se observa con detenimiento, se puede ver que a medida que aumenta el tamaño de n , el rango de la diferencia tiende a disminuir de forma considerable.

Por otro lado, en lo que respecta a las diferencias entre el estimador de máxima verosimilitud con los estimadores bayesianos no informativos, se puede notar que pese a que éstas diferencias parecen ser precisas, no son del todo exactas. Sin embargo, dicha exactitud tiende a mejorar a medida que n se hace grande. No obstante, a partir de las gráficas no se puede determinar que haya una buena aproximación entre los estimadores mencionados.

En la tabla 8-19 se muestran los valores máximos y mínimos de las diferencias en cada tamaño de muestra y para cada probabilidad.

Tabla 8-19.: Valores máximos y mínimos de las diferencias.

Probabilidad	Diferencia	Tamaños de muestra									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p=0.005	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1T}}$	(0.00498,0.1945)	(0.00497,0.0945)	(0.00496,0.0612)	(0.00495,0.0693)	(0.00494,0.0543)	(0.00493,0.0443)	(0.00492,0.0513)	(0.00491,0.0319)	(0.00489,0.0386)	(0.00488,0.0244)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1J}}$	(0.0272,0.0454)	(0.0190,0.0238)	(0.0139,0.0161)	(0.0103,0.0121)	(0.0086,0.0098)	(0.0073,0.0081)	(0.0062,0.0070)	(0.0057,0.0061)	(0.0050,0.0054)	(0.0046,0.0049)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1L}}$	(0.0500,0.0833)	(0.0363,0.0454)	(0.0270,0.0312)	(0.0202,0.0238)	(0.0169,0.0192)	(0.0145,0.0161)	(0.0123,0.0138)	(0.0112,0.0121)	(0.0099,0.0108)	(0.0092,0.0098)
p=0.01	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1T}}$	(0.00995,0.18913)	(0.00990,0.08918)	(0.00986,0.08878)	(0.00982,0.0638)	(0.0097,0.0684)	(0.0064,0.0713)	(0.0041,0.0595)	(0.0024,0.0506)	(0.0010,0.0437)	(0.0.0382)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1J}}$	(0.0272,0.0454)	(0.0190,0.0238)	(0.0129,0.0161)	(0.0103,0.0121)	(0.0082,0.0098)	(0.0068,0.0081)	(0.0060,0.0070)	(0.0054,0.0061)	(0.0048,0.0054)	(0.0044,0.0049)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1L}}$	(0.0500,0.0833)	(0.0363,0.0454)	(0.0250,0.0312)	(0.0202,0.0238)	(0.0161,0.0192)	(0.0134,0.0161)	(0.0119,0.0138)	(0.0106,0.0121)	(0.0096,0.0108)	(0.0088,0.0098)
p=0.05	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1T}}$	(4.883e ⁻⁰² ,0.341)	(6.938e ⁻¹⁸ ,0.190)	(1.555e ⁻⁰² ,0.171)	(6.938e ⁻¹⁸ ,0.114)	(8.936e ⁻⁰³ ,0.116)	(6.938e ⁻¹⁸ ,0.131)	(6.122e ⁻⁰³ ,0.079)	(6.938e ⁻¹⁸ ,0.073)	(4.575e ⁻⁰³ ,0.068)	(6.938e ⁻¹⁸ ,0.072)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1J}}$	(0.0090,0.0454)	(0.0119,0.0238)	(0.0086,0.0161)	(0.0079,0.0121)	(0.0062,0.0098)	(0.0049,0.0081)	(0.0050,0.0070)	(0.0044,0.0061)	(0.0040,0.0054)	(0.0035,0.0049)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1L}}$	(0.0166,0.0833)	(0.0227,0.0454)	(0.0166,0.0312)	(0.0154,0.0238)	(0.0123,0.0192)	(0.0096,0.0161)	(0.0099,0.0138)	(0.0088,0.0121)	(0.0079,0.0108)	(0.0070,0.0098)
p=0.1	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1T}}$	(0.0.476)	(0.0.272)	(0.0.173)	(0.0.166)	(0.0.143)	(1.387e ⁻¹⁷ ,0.115)	(1.387e ⁻¹⁷ ,0.105)	(1.387e ⁻¹⁷ ,0.089)	(1.387e ⁻¹⁷ ,0.068)	(1.387e ⁻¹⁷ ,0.066)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1J}}$	(0.0.0454)	(0.0047,0.0238)	(0.0064,0.0161)	(0.0048,0.0121)	(0.0043,0.0098)	(0.0040,0.0081)	(0.0036,0.0068)	(0.0033,0.0060)	(0.0032,0.0053)	(0.0029,0.0047)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1L}}$	(0.0.0833)	(0.0090,0.0454)	(0.0125,0.0312)	(0.0095,0.0238)	(0.0084,0.0192)	(0.0080,0.0161)	(0.0071,0.0134)	(0.0067,0.0118)	(0.0065,0.0106)	(0.0058,0.0094)
p=0.25	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1T}}$	(0.043,0.390)	(0.0.229)	(0.011,0.171)	(0.0.170)	(0.005,0.107)	(0.0.095)	(0.003,0.086)	(0.0.067)	(0.002,0.077)	(0.0.055)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1J}}$	(0.0.0454)	(0.0.0238)	(0.0.0139)	(0.0006,0.0103)	(0.0011,0.0082)	(0.0010,0.0065)	(0.0010,0.0056)	(0.0012,0.0047)	(0.0007,0.0045)	(0.0012,0.0038)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1L}}$	(0.0.0833)	(0.0.0454)	(0.0.0270)	(0.0011,0.0202)	(0.0023,0.0161)	(0.0021,0.0129)	(0.0019,0.0111)	(0.0024,0.0094)	(0.0014,0.0089)	(0.0025,0.0076)
p=0.5	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1T}}$	(0.0.271)	(0.0.179)	(0.0.137)	(0.0.086)	(0.0.065)	(0.0.060)	(0.0.046)	(0.0.036)	(0.0.031)	(0.0.031)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1J}}$	(0.0.0363)	(0.0.0166)	(0.0.0107)	(0.0.0060)	(0.0.0043)	(0.0.0038)	(0.0.0028)	(0.0.0021)	(0.0.0018)	(0.0.0017)
	$\Delta_{\hat{\theta}_{12}-\hat{\theta}_{1L}}$	(0.0.0666)	(0.0.0318)	(0.0.0208)	(0.0.0119)	(0.0.0084)	(0.0.0075)	(0.0.0055)	(0.0.0042)	(0.0.0036)	(0.0.0035)

En la tabla **8-19** se puede observar que, a medida que aumentan los tamaños de muestra, los valores máximos y mínimos entre las diferencias, tienden a disminuir. Además, cabe resaltar que, cuando las probabilidades son $p = 0.005$ y $p = 0.01$, los valores máximos tienden a ser incluso mayores al parámetro, lo que da indicio de que, tal y como también se observa en las gráficas **8-8** y **8-9**, parece que los estimadores no se aproximan entre sí.

Un caso particular que vale la pena mencionar, es cuando $p = 0.5$, donde vemos que los valores máximos en todos los tamaños de muestra, son relativamente pequeños con respecto al parámetro; y el rango de valores en que varían las diferencias, no solo tiende a disminuir a medida que aumenta n ; sino que incluso desde que $n = 10$, se puede pensar que los estimadores tienen a aproximarse. Aquí, vale recordar que la tabla **8-18** muestra que el promedio de los estimadores es muy cercano al parámetro, lo que de cierta forma hace coherente que las diferencias entre los estimadores no tengan un rango de variación muy amplio.

Las figuras de la **8-14** a **8-16** muestran los rangos de variación de los valores de las diferencias. En ellas se pueden observar tres cosas puntuales: la primera, que efectivamente, a medida que el tamaño de muestra aumenta, la amplitud de los valores que pueden tomar las diferencias disminuye; la segunda, que el ancho de los valores de las diferencias entre el estimador máximo verosímil y los bayesianos no informativos, disminuyen su tamaño mucho mas rápido en comparación con los valores que toman las diferencias entre el estimador de máxima verosimilitud con el bayesiano informativo, a medida que $n \rightarrow 100$; y tercera, que las amplitudes más pequeñas son las representadas en la figura **8-14**.

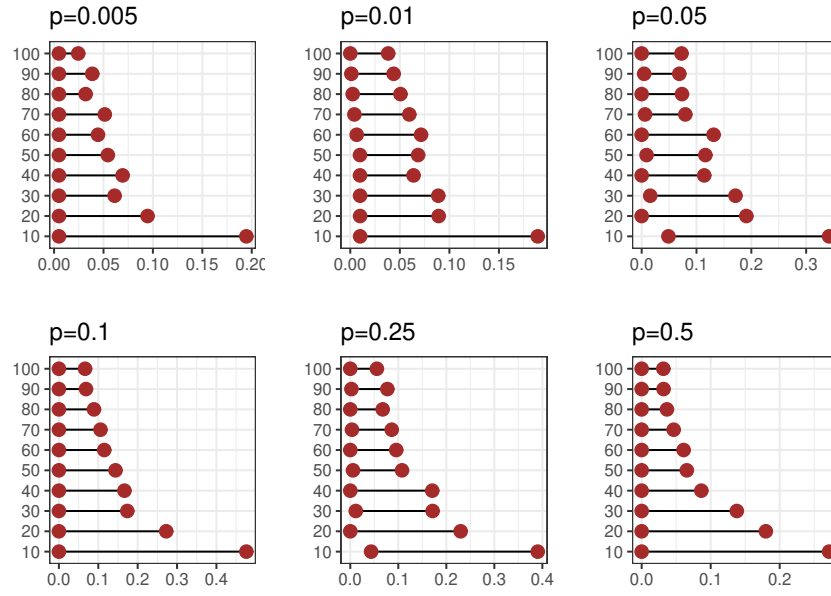


Figura 8-14.: Amplitud de las diferencias para $\Delta_{\theta_M - \theta_{BT}}$.

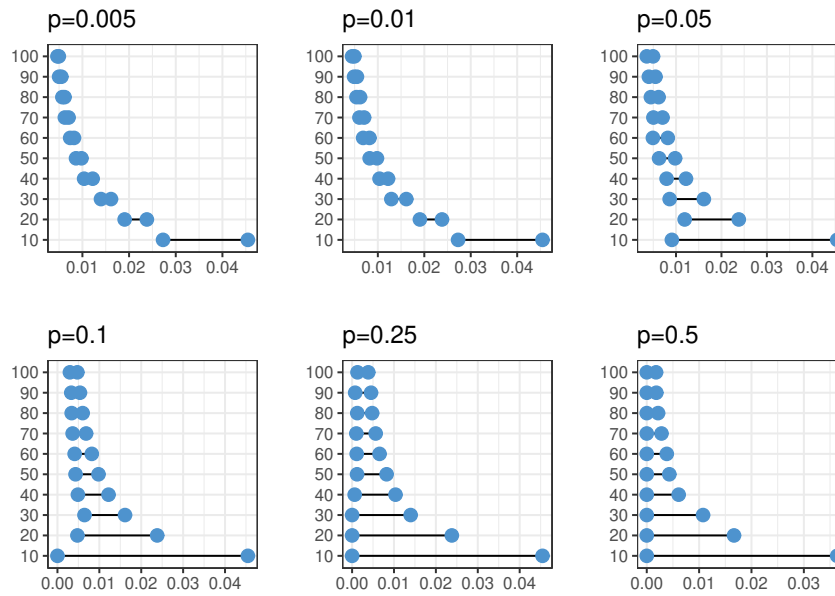


Figura 8-15.: Amplitud de las diferencias para $\Delta_{\theta_M - \theta_{BJ}}$.

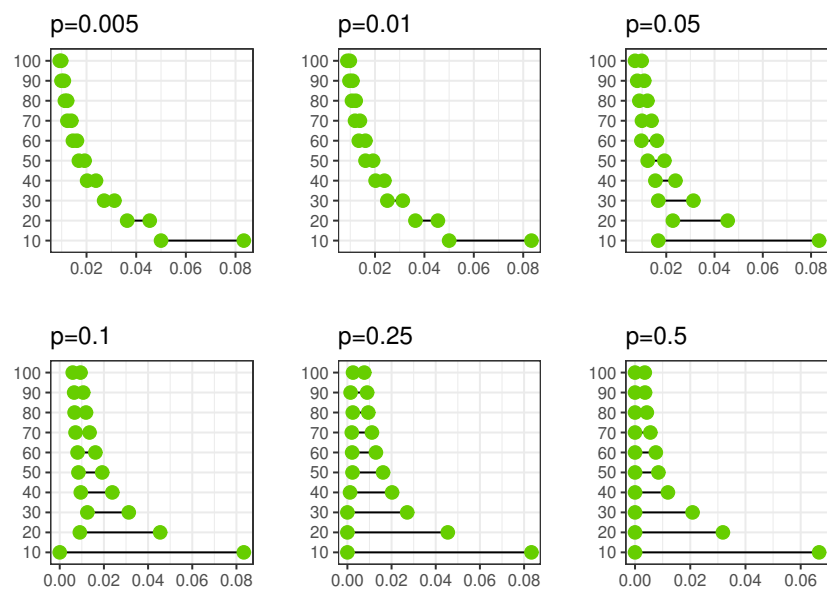


Figura 8-16.: Amplitud de las diferencias para $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$.

Las tablas 8-20 a la 8-25, muestran los valores de los épsilons calculados.

Tabla 8-20.: Valores de épsilon cuando $p = 0.005$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.18957	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01818	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03333	0.00250	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08959	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00476	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00909	0.00250	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05628	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00215	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00417	0.00250	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06442	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00183	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00357	0.00250	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04944	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00118	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00231	0.00250	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03946	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00082	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00161	0.00250	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04641	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00080	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00159	0.00250	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.02701	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00046	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00091	0.00250	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03376	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00049	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00097	0.00250	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.01956	0.00024	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00030	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00059	0.00250	

Tabla 8-21.: Valores de épsilon cuando $p = 0.01$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.17918	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01818	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03333	0.00250	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07928	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00476	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00909	0.00250	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07892	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00323	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00625	0.00250	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05401	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00183	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00357	0.00250	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05866	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00157	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00308	0.00250	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06489	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00137	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00269	0.00250	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05538	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00101	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00198	0.00250	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04824	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00077	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00152	0.00250	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04269	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00061	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00121	0.00250	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03826	0.00049	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00050	0.00136	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00098	0.00250	

Tabla 8-22.: Valores de épsilon cuando $p = 0.05$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.29302	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.03636	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.06667	0.00113	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.19091	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01190	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02273	0.00113	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.15556	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00753	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01458	0.00113	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.11413	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00427	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00833	0.00113	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.10724	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00353	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00692	0.00113	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.13125	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00328	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00645	0.00113	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07347	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00201	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00397	0.00113	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07350	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00170	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00335	0.00113	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06405	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00147	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00290	0.00113	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07269	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00139	0.00059	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00275	0.00113	

Tabla 8-23.: Valores de épsilon cuando $p = 0.1$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.47601	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.04545	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.08333	0.00062	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.27253	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01905	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03636	0.00062	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.17374	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00968	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01875	0.00062	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.16645	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00732	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01429	0.00062	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.14377	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00549	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01077	0.00062	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.11518	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00410	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00806	0.00062	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.10561	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00322	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00635	0.00062	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08909	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00262	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00518	0.00062	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06880	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00208	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00411	0.00062	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06649	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00178	0.00032	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00353	0.00062	

Tabla 8-24.: Valores de épsilon cuando $p = 0.25$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.34701	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.04545	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.08333	0.00012	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.22981	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.02381	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.04545	0.00012	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.16002	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01398	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02708	0.00012	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.17072	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00976	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01905	0.00012	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.10207	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00706	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01385	0.00012	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.09567	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00546	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01075	0.00012	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08286	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00463	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00913	0.00012	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06752	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00355	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00701	0.00012	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07487	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00379	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00749	0.00012	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05540	0.00216	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00257	0.00006	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00510	0.00012	

Tabla 8-25.: Valores de épsilon cuando $p = 0.5$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.27163	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.03636	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.06667	0.00000	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.17993	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01667	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03182	0.00000	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.13787	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01075	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02083	0.00000	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08650	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00610	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01190	0.00000	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06542	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00431	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00846	0.00000	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06084	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00383	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00753	0.00000	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04642	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00282	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00556	0.00000	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03661	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00216	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00427	0.00000	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03173	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00183	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00362	0.00000	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03144	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00178	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00353	0.00000	

En las tablas de la **8-20** a la **8-25** se puede observar que: primero, ϵ toma un valor diferente en cada tamaño de muestra y en cada probabilidad p , y en general toma valores incluso mayores al parámetro, por lo que construir un intervalo con él, implica construir intervalos muy amplios; segundo, ϵ_1 parece ser el indicado para construir un intervalo que permita concentrar la proporción de diferencias más pequeñas, pues todos los valores que toma, son menores al parámetro; y tercero, ϵ_2 por ser el 10 % del parámetro, es el mismo para todas las diferencias, en todos los tamaños de muestra y para un p determinado.

Una vez obtenidos los valores de épsilon, se crean los intervalos para los cuales se evaluará la aproximación por convergencia en probabilidad. Los intervalos son:

$$I_1 = (\inf(\min(\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B})) - \epsilon_1, \inf(\min(\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B})) + \epsilon_1)$$

$$I_2 = (0, \epsilon_2)$$

Cabe aclarar que no se crea el intervalo $I = (\inf(\min(\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B})), \epsilon)$, porque ϵ toma los valores que garantizan que para cada tamaño de muestra y en cada probabilidad p , se de la convergencia entre los estimadores.

En las tablas **8-26** y **8-27** se presenta la probabilidad de que las diferencias pertenezcan a los intervalos I_1 y I_2 respectivamente.

Tabla 8-26.: Proporción de que $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_1$.

Probabilidad	Diferencia	Tamaños de muestra									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p=0.005	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.920
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.013
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.013
p=0.01	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.384
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.003
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.003
p=0.05	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.384	0	0.296	0	0.236	0	0.203	0	0.165
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.001
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.001
p=0.1	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.394	0.265	0.240	0.217	0.175	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.25	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.202	0	0.135	0	0.119	0	0.103	0	0.098
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.064	0.014	0.001	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.064	0.014	0.001	0	0	0	0	0	0	0
p=0.5	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.271	0.182	0.128	0.126	0.110	0.099	0.091	0.082	0.081	0.086
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.271	0.182	0.128	0.126	0.110	0.099	0.091	0.082	0.081	0.086
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.271	0.182	0.128	0.126	0.110	0.099	0.091	0.082	0.081	0.086

Sobre la información que se muestra en la tabla **8-26** cabe mencionar que, para las probabilidades $p = 0.1$, $p = 0.25$ y $p = 0.5$ los valores que se muestran, además de ser la probabilidad de que las diferencias pertenezcan al intervalo señalado, también representan la proporción de veces en las que los respectivos estimadores se aproximaron lo suficiente, como para que la diferencia entre ellos fuera cero. Es decir, $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} = 0$.

Adicionalmente, en el caso de las diferencias entre el estimador de máxima verosimilitud con los estimadores bayesianos no informativos, cuando $p = 0.005$, $p = 0.01$ y $p = 0.05$

las diferencias entre los estimadores tienden a ser cercanas al valor del parámetro, lo que denota poca cercanía entre ellos. De ahí que, en la tabla **8-26** la proporción de diferencias pertenecientes al intervalo señalado, en su mayoría sea cero. En lo referente a las diferencias entre el estimador máximo verosímil y el bayesiano informativo, cuando $p = 0.05$ y $p = 0.01$, la proporción de diferencias que caen en el intervalo I_1 , es a lo más el 38 % de ellas cuando $n = 20$ y $n = 100$ respectivamente. Cabe mencionar que, dichas diferencias son muy pequeñas (la mayoría son $6.938e^{-18}$); y para $p = 0.005$ en su mayoría, en los distintos valores de n la proporción de diferencias que caen en el intervalo I_1 es cero, a excepción de cuando $n = 100$. En general, cuando $p = 0.5$, en todas diferencias $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B}$, la proporción que pertenece al intervalo señalado, fueron aquellas en las que los estimadores son casi iguales.

Tabla 8-27.: Probabilidad de que $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_2$.

Probabilidad	Diferencia	Tamaños de muestra									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p=0.005	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.01	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.384
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.05	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.384	0	0.296	0	0.236	0	0.203	0.397	0.165
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0.044	0.458	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.1	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	00.394	0.265	0.240	0.217	0.175	0.158	0.154	0.411	0.400	0.392
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.011	0.010	0.069	0.578	1	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0.016	0.169	0.537	0.981	1
p=0.25	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.202	0.299	0.388	0.451	0.550	0.720	0.764	0.772	0.870
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.490	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.228	0.575	0.988	1	1	1	1	1	1	1
p=0.5	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.271	0.474	0.795	0.932	0.991	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.941	1	1	1	1	1	1	1	1	1

En la tabla **8-27** se puede observar que: primero, para $p = 0.005$ y $p = 0.01$, no se hallan buenas aproximaciones entre los estimadores (porque incluso en el caso en el que $n = 100$ y $p = 0.01$, el intervalo no recoge más del 4 % de las diferencias entre el estimador máximo verosímil y el bayesiano informativo); segundo, cuando $p = 0.5$ se logra observar que las diferencias entre el estimador de máxima verosimilitud con los bayesianos no informativos, parecen tener una buena aproximación desde $n = 10$; tercero, cuando $p = 0.25$, la aproximación entre los estimadores antes mencionados, se da a partir de $n = 20$, para el caso que relaciona al estimador clasico con el bayesiano obtenido con el método de Jeffreys, y a partir de $n = 30$, cuando el estimador no informativo fue obtenido usando el método propuesto por Laplace; cuarto, en $p = 0.1$ los estimadores que mejor se aproximan entre sí, son el máximo verosímil y el bayesiano no informativo obtenido con el procedimiento plantado por Jeffreys.

Continuando con lo observado en la tabla **8-27**, en lo referente a las diferencias entre el estimador de máxima verosimilitud y el bayesiano informativo, se puede ver que entre

ellas tienden a darse buenas aproximaciones a partir de $n = 70$ cuando $p = 0.25$ (en las probabilidades que se muestran antes de $p = 0.25$, se ve que hay aproximaciones, pero no hay un patrón claro que permita concluir que dichas aproximaciones aumentan a partir de un valor de n específico); y cuando $p = 0.5$, hay un patrón claro de buenas aproximaciones entre los estimadores, a partir de $n = 40$.

Por otro lado, se observa que, parecen haber mejores aproximaciones entre el estimador máximo verosímil y los bayesianos no informativos, que entre el estimador de máxima verosimilitud y el bayesiano informativo. Esto puede deberse, a que tal y como se observa en las gráficas **8-2** a **8-7**, el estimador máximo verosímil tiende a sobreestimar en algunas ocasiones, al igual que lo hacen los bayesianos no informativos, lo que hace que haya más igualdad entre ellos. Además, al ser estimadores no informativos, la verosimilitud predomina; cosa que no sucede entre el estimador máximo verosímil y el bayesiano informativo. Pues, éste último no sólo brinda mejores estimaciones del parámetro, sino que también, tiene el efecto de la distribución previa.

8.2.2. Aproximaciones por convergencia casi segura

En las tablas de la **8-28** a la **8-33** se muestra el promedio de los valores de los diferentes épsilon calculados en las mil realizaciones del proceso de simulación. En ella, se puede observar que los valores medios de ϵ , pese a que disminuyeron, no variaron de forma significativa, con respecto a los obtenidos en el proceso anterior, y que se presentaron en las tablas **8-20** a la **8-25**.

Tabla 8-28.: Promedio de los valores de épsilon cuando $p = 0.005$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.15973	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01531	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02789	0.00277	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.09546	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00504	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00962	0.00277	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06919	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00259	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00497	0.00277	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05708	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00165	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00323	0.00277	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04920	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00116	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00231	0.00277	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04256	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00087	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00171	0.00277	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03712	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00067	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00134	0.00277	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03423	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00046	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00109	0.00277	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03131	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00046	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00091	0.00277	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.02946	0.00025	0.0005
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00039	0.00151	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00077	0.00277	

Tabla 8-29.: Promedio de los valores de épsilon cuando $p = 0.01$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.18903	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01903	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03516	0.00242	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.011237	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00636	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01228	0.00242	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08437	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00340	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00664	0.00242	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06710	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00216	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00420	0.00242	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05725	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00154	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00303	0.00242	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05347	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00117	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00228	0.00242	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04954	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00092	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00182	0.00242	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04674	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00075	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00148	0.00242	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04504	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00062	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00126	0.00242	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04269	0.00050	0.0010
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00053	0.00132	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00106	0.00242	

Tabla 8-30.: Promedio de los valores de épsilon cuando $p = 0.05$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.26254	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.03344	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.06158	0.00131	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.20403	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01247	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02390	0.00131	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.13904	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00696	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01344	0.00131	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.12798	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00465	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00907	0.00131	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.10144	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00339	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00665	0.00131	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.09770	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00264	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00520	0.00131	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08112	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00213	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00421	0.00131	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07908	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00177	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00351	0.00131	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06798	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00151	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00299	0.00131	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06685	0.00244	0.0050
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00132	0.00070	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00260	0.00131	

Tabla 8-31.: Promedio de los valores de épsilon cuando $p = 0.1$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.37319	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.04336	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.0797	0.00071	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.24119	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01735	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03326	0.00071	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.18265	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01007	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01944	0.00071	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.14982	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00680	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01337	0.00071	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.12610	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00506	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00998	0.00071	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.10931	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00394	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00777	0.00071	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.09779	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00315	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00620	0.00071	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08741	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00260	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00514	0.00071	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07892	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00219	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00434	0.00071	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07187	0.00000	0.01
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00187	0.00038	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00371	0.00071	

Tabla 8-32.: Promedio de los valores de épsilon cuando $p = 0.25$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.37641	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.04545	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.08333	0.00013	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.25945	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.02370	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.04523	0.00013	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.17787	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01489	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02889	0.00013	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.14714	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01030	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.02019	0.00013	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.11450	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00754	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01491	0.00013	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.10078	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00581	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01146	0.00013	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.08309	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00462	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00918	0.00013	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07537	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00380	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00755	0.00013	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.06419	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00321	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00638	0.00013	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05882	0.00217	0.025
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00274	0.00007	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00545	0.00013	

Tabla 8-33.: Promedio de los valores de épsilon cuando $p = 0.5$

n	Diferencias	ϵ	ϵ_1	ϵ_2
10	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.32989	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.04419	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.08106	0.00000	
20	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.18738	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.01743	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.03319	0.00000	
30	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.12568	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00976	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01900	0.00000	
40	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.09185	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00651	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.01256	0.00000	
50	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.07093	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00469	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00918	0.00000	
60	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.05681	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00358	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00704	0.00000	
70	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.04722	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00285	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00563	0.00000	
80	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03978	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00233	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00463	0.00000	
90	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.03423	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00196	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00391	0.00000	
100	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT})$	0.02981	0.00000	0.05
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ})$	0.00169	0.00000	
	$\Delta(\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL})$	0.00333	0.00000	

En las tablas **8-28** a **8-33** se puede observar que, en $p = 0.005$, $p = 0.01$ y $p = 0.05$ el promedio de los valores de ϵ es mayor que el parámetro, en las diferencias entre el estimador de máxima verosimilitud con el estimador bayesiano informativo. Para las probabilidades mencionadas, las diferencias entre el estimador máximo verosímil y los bayesianos no informativos, los ϵ tienden a tomar valores incluso menores al parámetro, cuando $n \rightarrow 100$. Lo que denota que, las diferencias entre éstos últimos estimadores pueden considerarse pequeñas. No obstante, es importante recordar que para estos valores específicos de p , tanto los estimadores bayesianos no informativos, como el estimador de máxima verosimilitud, tienden a subestimar y sobreestimar el parámetro.

En lo que respecta al ϵ_1 , se puede ver que el promedio de sus valores, es muy cercano a los de los épsilons calculados en la sección anterior. Adicionalmente, en lo que se refiere al ϵ_2 , por su propia definición, es el mismo que se calculó antes.

En la tabla **8-34**, se presentan los promedios de las diferencias que caen en el intervalo I_1 en cada una de las probabilidades p .

Tabla 8-34.: Probabilidad de los promedios de $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_1$.

Probabilidad	Diferencia	Tamaños de muestra									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p=0.005	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.909
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.003
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.003
p=0.01	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.369
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.002
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.002
p=0.05	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.377	0	0.277	0	0.230	0	0.200	0	0.180
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.001
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.001
p=0.1	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.388	0.284	0.236	0.206	0.184	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.25	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.202	0	0.144	0	0.118	0	0.102	0	0.091
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.058	0.009	0.001	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.058	0.009	0.001	0	0	0	0	0	0	0
p=0.5	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.245	0.176	0.144	0.125	0.112	0.102	0.094	0.088	0.083	0.079
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.246	0.176	0.144	0.125	0.112	0.102	0.094	0.088	0.084	0.079
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.245	0.175	0.144	0.125	0.112	0.102	0.094	0.089	0.084	0.079

Partiendo de los resultados de la tabla **8-34**, se puede deducir que: primero, los resultados obtenidos no varían mucho con respecto a los obtenidos con anterioridad y que se muestran en la tabla **8-26**; y segundo, siempre que las diferencias se calculen en el intervalo propuesto I_1 , parece que las aproximaciones muy cercanas a cero entre los estimadores, no van a tener un comportamiento o tendencia específicos, por lo que no se puede concluir que a partir de un tamaño de muestra específico, los estimadores empiezan a encontrar un punto de cercanía.

En la tabla **8-35** se muestran los promedios de las diferencias que caen en el intervalo I_2 .

Tabla 8-35.: Probabilidad de los promedios de que $\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_B} \in I_2$.

Probabilidad	Diferencia	Tamaños de muestra									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p=0.005	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	00	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.01	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.368
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.05	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.377	0	0.278	0	0.229	0	0.200	0.369	0.179
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0	0	0	0	0	0	0	0.046	0.469	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p=0.1	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.387	0.285	0.236	0.205	0.184	0.169	0.156	0.423	0.400	0.382
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.012	0.011	0.072	0.576	1	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0	0	0	0	0	0.014	0.158	0.554	0.983	1
p=0.25	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0	0.201	0.325	0.415	0.485	0.544	0.729	0.755	0.777	0.868
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	0.473	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.220	0.585	0.989	1	1	1	1	1	1	1
p=0.5	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BT}}$	0.246	0.497	0.799	0.919	0.984	0.997	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BJ}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\Delta_{\widehat{\theta}_M - \widehat{\theta}_{BL}}$	0.933	1	1	1	1	1	1	1	1	1

En la tabla **8-35** se puede notar que: primero, no hay diferencias significativas entre los resultados obtenidos aquí y los presentados en la tabla **8-27**; segundo, nuevamente, se observa más proximidad entre los estimadores bayesianos no informativos y el de máxima verosimilitud, que entre el estimador bayesiano informativo y el estimador máximo verosímil; tercero, no se reflejan patrones de aproximaciones claras entre los estimadores, para valores pequeños de p ($p = 0.005$, $p = 0.01$ y $p = 0.05$).

Puntualizando, cuando $p = 0.1$, se observa que hay una buena aproximación entre el estimador de máxima verosimilitud y el bayesiano no informativo obtenido por el método de Jeffreys, a partir de $n = 50$. Para el caso de la proximidad entre el estimador máximo verosímil y el bayesiano no informativo propuesto por Laplace, se da desde $n = 90$. Para éste valor de p , no hay un número de proximidades destacables entre el estimador bayesiano informativo y el de máxima verosimilitud.

Con respecto a la aproximación de los estimadores bayesianos no informativos propuestos por Jeffreys y Laplace, con el estimador de máxima verosimilitud, cuando $p = 0.25$, se puede ver que, dicha proximidad se da a partir de $n = 20$ y $n = 30$ respectivamente. En cuanto a la proximidad entre el estimador bayesiano informativo y el máximo verosímil, se da desde $n = 100$.

Para el caso en el que $p = 0.5$ los estimadores bayesianos no informativos se aproximan de forma significativa al estimador de máxima verosimilitud, a partir de $n = 10$. Con respecto a la aproximación entre el estimador máximo verosímil y el bayesiano informativo, se da desde $n = 40$.

9. Conclusiones y recomendaciones

En ésta sección se presentan las principales conclusiones de la investigación y algunas recomendaciones.

9.1. Conclusiones

En las tablas 8-26 y 8-34, se tiene que en general, cuando se observan las aproximaciones entre estimadores en el intervalo I_1 , estos logran aproximar a lo más 25 % de la veces, cuando $p = 0.5$, y $n = 10$. Por otro lado, para las aproximaciones entre el estimador de máxima verosimilitud y los bayesianos no informativos, en el intervalo mencionado y cuando $p = 0.1$, las aproximaciones se dan menos del 1 % de la veces. En cambio, las aproximaciones entre el estimador máximo verosímil y el bayesiano informativo, para esa misma probabilidad, podría esperarse que se dieran a lo más un 40 % de las ocasiones; y que se den máximo el 20 % de las veces, si $p = 0.25$.

Se encontró que cuando las diferencias se observan en el intervalo I_2 , sí se logra observar un patrón de aproximaciones a partir de determinados tamaños de muestra, sobre todo para las probabilidades grandes. Puntualmente:

- 1) El estimador de máxima verosimilitud y el bayes no informativo obtenido con el método de Jeffreys, tuvieron una buena proporción de aproximaciones cuando $p = 0.1$ y a partir de $n = 50$, para $p = 0.25$ y $n = 20$; y en $p = 0.5$ con $n = 10$.
- 2) La proporción de aproximaciones favorables, que se dio entre el estimador de máximo verosimilitud y el bayesiano no informativo obtenido con el método de Laplace, se dio para $p = 0.1$ y $n = 90$; en $p = 0.25$ y en $n = 30$; y en $p = 0.5$, a partir de $n = 20$.
- 3) La proporción de veces en que se dieron buenas aproximaciones entre el estimador de máxima verosimilitud y el bayes que incluye información previa, se da cuando $p = 0.25$ y $n = 100$; y para $p = 0.5$ y $n = 40$. Cabe mencionar que aunque la proporción de aproximaciones de éste estimador cuando, $p = 0.05$ y $p = 0.01$, fue baja, en los tamaños de muestra en que se dan, se alcanzan a tener hasta un 40 %, cosa que no sucede cuando se observa la diferencia entre el estimador de máximo verosímil y los bayesianos no informativos.

Otra conclusión importante, es que el mejor estimador del parámetro para los diferentes valores propuestos de p , fue el bayes informativo. Y puntualmente, cuando $p = 0.005$, $p =$

0.01 y $p = 0.05$, para tamaños de muestra $10 \leq n \leq 100$, se recomienda hacer estimación bayesiana con un estimador informativo, pues, al agregarle información, el estimador no presenta los problemas de sobreestimación o de subestimación, que sí se generan en los otros.

9.2. Recomendaciones

Se podría llegar a replicar el estudio con un tamaño de muestra más grande, sobre todo para las probabilidades más pequeñas ($p = 0.005$, $p = 0.1$ y $p = 0.05$), para ver si los estimadores llegan a aproximarse mucho más de lo que se observó aquí, o si incluso, llegan a tener aproximación perfecta.

En los casos en los que se vio que hay buenas aproximaciones entre los estimadores, cuando se los ve en el intervalo I_2 , sería interesante revisar a partir de qué n se dan dichas aproximaciones, pero para valores de n que cambien uno a uno.

En una investigación eventual, podría estudiarse si la aproximación entre los estimadores bayesianos con el de máxima verosimilitud que se planteó aquí, logra darse cuando los datos provienen de otra distribución, por ejemplo de una normal o de una exponencial.

Para futuras investigaciones, se puede abordar el problema aquí planteado, comprobando la convergencia de cada uno de los estimadores al parámetro, por separado, y luego, ver si dicha convergencia se da a partir del mismo tamaño de muestra.

A. Código

El código se encuentra adjunto en <https://www.dropbox.com/scl/fo/snfnyyd7003l4p23qqm2w/AHr0t0HZuXGbmxfaoeRZ7X4?rlkey=x7dw15mt2y13go1li7x63g599&st=2x0gvwl2&dl=0>

Bibliografía

- Canavos, G. C. (1988), *Probabilidad y Estadística, aplicaciones y métodos*, first edn, McGraw-Hill.
- Casella, G. & Berger, R. (2002), *Statistical Inference*, second edn, DUXBURY.
- Cepeda, E., Aguilar, W., Cervantes, V., Corrales, M., Díaz, I. & Rodríguez, D. (2008), 'Intervalos de confianza e intervalos de credibilidad para una proporción', *Revista Colombiana de Estadística* pp. 211–228.
- Chaubey, Y. P. & Li, W. (1995), 'Comparision between maximum likelihood and bayes methods for estimation of binomial probability with sample compositing', *Journal of Official Statistics* pp. 370–390.
- Correa, J. & Barrera, C. (2018), *Introducción a la Estadística Bayesiana*, first edn, Fondo Editorial IDM.
- García, J., Reding, A. & López, J. (2013), 'Cálculo del tamaño de la muestra en investigación en educación médica', *Investigación en Educación Médica* pp. 217–224.
- Gelman, A., Calin, J. B., Stern, H. S. & Rubin, D. B. (2004), *Bayesian Data Analysis*, second edn, CHAPMAN & HALL/CRC.
- Gentle, E. J. (2005), *Statistics and computing*, second edn, Springer.
- Graybill, F., Mood, A. & Boes, D. C. (1974), *Introduction to the theory of statistics*, three edn, McGraw-Hill.
- Griffin, B. S. & Krutchkoff, R. G. (1971), 'Optimal linear estimators: an empirical bayes version with application to the binomial distribution', *Biometrika* pp. 195–201.
- Joseph, L., Gyorkos, T. W. & Coupal, L. (1995), 'Bayesian estimation of disease prevalence and the parameters of diagnostic tests in the absence of a gold standard', *Am. J. Epideiol* pp. 263–272.
- Klinger, R. (2010), *Muestreo Estadístico: Métodos, Aplicaciones y Ejercicios*, first edn.
- Laurence, J., Du Berger, R. & Bélisle, P. (1997), 'Bayesian and mixed bayesian/likelihood criteria for sample size determination', *Statistics in medicine* pp. 769–781.

Law, A. M. (2015), *Simulation Modeling and Analysis*, fifth edn, McGraw-Hill.

Lehmann, E. & Casella, G. (1998), *Theory of point estimation*, second edn, Springer.

Tovar Cuevas, J. R. (2012), ‘Eliciting beta prior distributions for binomial sampling’, .
Revista Brasileira de Biometria pp. 159–172.