

Descomposición de núcleos de Toeplitz generalizados

Arnaldo de la Barrera
Universidad de Pamplona

Osmin Ferrer
Universidad Surcolombiana

Recibido Ago. 03, 2011

Aceptado Nov. 03, 2011

Abstract

In this paper a proof is presented in the setting of generalized Toeplitz kernels, of a version given by Evans and Lewis (see [1] Theorem 3.2), of a classical result of Naimark [6] on regular Toeplitz kernels. This result plays an important role in defining a new type of operator-value kernel, called approximately generalized Toeplitz kernel.

Keywords: kernel, kernel positive definite, Toeplitz kernel, generalized Toeplitz kernel, Kolmogorov decomposition.

MSC(2000): 76M10, 76D03

Resumen

En este trabajo se presenta una prueba en el ambiente de núcleos de Toeplitz generalizados, de una versión dada por Evans y Lewis ver ([1] Teorema 3.2), de un resultado clásico de Naimark [6] referente a núcleos Toeplitz ordinarios. Este resultado juega un papel importante en la definición de un nuevo tipo de núcleo a valores operadores, denominado núcleo aproximadamente Toeplitz generalizado.

Palabras y frases claves: núcleo, núcleo definido positivo, núcleo Toeplitz, núcleo Toeplitz generalizado, descomposición de Kolmogorov.

1 Introducción

En este trabajo se presenta un resultado en el contexto de los núcleos de Toeplitz generalizados, de una demostración dada por Evans y Lewis en ([1] Teorema 3.2), de un resultado clásico de Naimark [6] referente a la descomposición o factorización de núcleos Toeplitz ordinarios, ellos utilizan un teorema de descomposición de Kolmogorov ver ([1], [2]) referente a núcleos definidos positivos a valores operadores.

Sean $\mathbf{H} = \{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia de espacios de Hilbert y $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H_j, H_i)$ una aplicación. Se dice que K es un *núcleo definido positivo* si

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \langle K(i,j)h_j, h_i \rangle \geq 0, \quad (1)$$

para toda sucesión $\{h_n\}$ en $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ con soporte finito (esto es, $h_n = 0$ excepto para un número finito de n), donde como es usual $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ denota la suma de pares ortogonales de subespacios, esto es, $H_i \perp H_j$ para $i \neq j$.

Sean H un espacio de Hilbert y $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H)$ núcleo definido positivo. Se dice que K es *Toeplitz* si existe un operador $T : \mathbb{Z} \rightarrow L(H)$ tal que $K(m,n) = T(m-n)$, para todo $m,n \in \mathbb{Z}$. Existen núcleos definidos positivos

$K_\gamma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H_i, H_j)$ que no son Toeplitz, pero su restricción a los cuadrantes $\mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_j$, donde $i, j = 1, 2$, $\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ y $\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ si lo son. Estos núcleos reciben el nombre de *núcleos de Toeplitz generalizados*, fueron introducidos por Mischa Cotlar y Cora Sadosky en [5], donde se generaliza el Teorema de Bochner (teorema de Bochner generalizado).

En trabajos subsecuentes Arocena, Sadosky y Cotlar ver([8], [11], [9], [12]), demostraron que los núcleos Toeplitz generalizados se pueden utilizar para demostrar varios resultados conocidos sobre problemas de momento, problemas de interpolación y problemas de predicción.

Posteriormente Alegría, Bruzual, Domínguez, Giménez, León, Morán y Marcantognini ver([3], [10], [13]), obtienen nuevos resultados utilizando como herramienta principal los núcleos de Toeplitz Generalizados.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera, en la sección 2 se presentan algunas ideas entorno a los núcleos definidos positivos y los núcleos Toeplitz, en la sección 3 se introduce la noción de espacio de Hilbert inducido por un operador, la sección 4 esta dedicada al estudio del teorema de descomposición de Kolmogorov y la aplicación de este al caso del núcleo Toeplitz definido positivo ordinario, en la sección 5 se presenta la noción de núcleo Toeplitz generalizado. Finalmente, en la sección 6 se da la demostración de la extensión del teorema de Naimark en el contexto de los núcleos de Toeplitz generalizados.

2 Núcleos definidos positivos y núcleos de Toeplitz

Sean H y H_1 espacios de Hilbert, como es usual $L(H, H_1)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales acotados de H a H_1 ; si $H = H_1$, escribiremos $L(H)$ para indicar $L(H, H_1)$.

La norma de un operador T en $L(H, H_1)$ se define por

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| : h \in H, \|h\| \leq 1\}. \quad (2)$$

Sea $T \in L(H)$ un operador auto-adjunto. Se dice que T es *definido positivo* si $\langle Th, h \rangle > 0$ para todo $h \in H$, $h \neq 0$.

Sean $\mathbf{H} = \{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia de espacios de Hilbert y $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H_j, H_i)$ una aplicación. Se dice que K es un *núcleo definido positivo* si

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \langle K(i, j)h_j, h_i \rangle \geq 0, \quad (3)$$

para toda sucesión $\{h_n\}$ en $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ con soporte finito (esto es, $h_n = 0$ excepto para un número finito de n), donde como es usual $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ denota la suma de pares ortogonales de subespacios, esto es $H_i \perp H_j$ para $i \neq j$.

Sea H un espacio de Hilbert y denotemos por $\mathfrak{R}(H)$ el conjunto de todas las funciones $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H)$. Un H - núcleo $K \in \mathfrak{R}(H)$ se dice que es H - *Toeplitz* definido positivo si existe un operador $T : \mathbb{Z} \rightarrow L(H)$ tal que

$$K(i, j) = T(i - j), \quad (4)$$

para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

3 Espacio inducido por un operador

Sean $A \in L(H)$ un operador positivo y $B_A : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ la forma bilineal dada por

$$B_A(f, g) = \langle f, g \rangle_A = \langle Af, g \rangle_H, \quad f, g \in H. \quad (5)$$

Se tiene que B_A satisface todas las propiedades de un producto interior, excepto que el conjunto

$$\mathcal{N}_A = \{h \in H : \langle h, h \rangle_A = 0\}$$

podría ser no trivial.

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es fácil probar la siguiente igualdad

$$\mathcal{N}_A = \{h \in H : \langle h, g \rangle_A = 0 \quad \forall g \in H\}.$$

Resulta que $\mathcal{N}_A$ es un subespacio lineal de H .

Por lo tanto, el espacio cociente $H/\mathcal{N}_A$ es también un espacio lineal. Si $[h]$ denota la clase en $H/\mathcal{N}_A$ de un elemento h entonces, la aplicación en $H/\mathcal{N}_A \times H/\mathcal{N}_A$ dada por

$$\langle [h], [g] \rangle_A = \langle h, g \rangle_A,$$

está bien definida. Es fácil probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ es un producto interior en $H/\mathcal{N}_A$.

La completación del cociente $H/\mathcal{N}_A$ con respecto a la norma inducida por este producto interno es un espacio de Hilbert, el cual se denota por H_A y se llama el espacio inducido por el operador A .

La idea anterior permite introducir la noción de espacio de Hilbert inducido por un núcleo, este concepto jugara un papel importante mas adelante.

Sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H)$ núcleo definido positivo y $B_K : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ la forma bilineal definida por

$$B_K(f, g) = \langle f, g \rangle_K = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_m \overline{a_n} \langle K(m, n) f_m, g_n \rangle, \quad (6)$$

para $f, g \in H$, donde $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m f_m$ y $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n$.

Se tiene que B_K satisface todas las propiedades de un producto interior, excepto que el conjunto

$$\mathcal{N}_K = \{h \in H : \langle h, h \rangle_K = 0\} \quad (7)$$

podría ser no trivial.

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es fácil probar la siguiente igualdad

$$\mathcal{N}_K = \{h \in H : \langle h, g \rangle_K = 0 \quad \forall g \in H\}. \quad (8)$$

Resulta que $\mathcal{N}_K$ es un subespacio lineal de H . Por lo tanto, el espacio cociente $H/\mathcal{N}_K$ es también un espacio lineal. Si $[h]$ denota la clase en $H/\mathcal{N}_K$ de un elemento h entonces, la aplicación en $H/\mathcal{N}_K \times H/\mathcal{N}_K$ dada por

$$\langle [h], [g] \rangle_K = \langle h, g \rangle_K,$$

está bien definida. Se prueba fácilmente que $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ es un producto interior en $H/\mathcal{N}_K$. La completación del cociente $H/\mathcal{N}_K$ con respecto a la norma inducida por este producto interno es un espacio de Hilbert denotado por H_K y lo llamaremos el espacio inducido por K .

4 Descomposición de Kolmogorov

El siguiente teorema es una versión de un resultado clásico de Kolmogorov (para comentarios de la historia de este resultado ver [6]).

Teorema 1. *Sea K un núcleo definido positivo. Entonces existe un espacio de Hilbert H_K y una aplicación $V : \mathbb{Z} \rightarrow L(H_n, H_K)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y además se cumple*

1. $K(i, j) = V^*(i)V(j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$.
2. $H_K = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} V(n)H_n$.
3. Si existe otro espacio de Hilbert H' , una aplicación $V' : \mathbb{Z} \rightarrow L(H_n, H')$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y además se satisfacen (1), (2), entonces existe un operador unitario $\Phi : H_K \rightarrow H'$ tal que $\Phi V(n) = V'(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Este teorema y su demostración pueden verse en [1, Teorema 3.1]

Una aplicación V que satisface la propiedad (1) del teorema anterior se llama una descomposición del núcleo K .

Un resultado similar al teorema 1 se tiene para núcleos Toeplitz ordinarios. El siguiente teorema es un resultado clásico debido a Naimark [7] (ver también Teorema 3.2 de [1]).

Teorema 2 (Naimark). *Sea K un núcleo Toeplitz definido positivo. Entonces existen un espacio de Hilbert H_K , un operador unitario S en $L(H)$ y un operador Q en $L(H, H_K)$ tales que*

1. $K(i, j) = Q^* S^{j-i} Q$, $i, j \in \mathbb{Z}$.
2. $H_K = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} S^n QH$.
3. Si existe otro espacio de Hilbert H' , un operador unitario S' en $L(H')$, un operador Q' en $L(H, H')$ y además se satisfacen (1), (2), entonces existe un operador unitario $\Phi : H_K \rightarrow H'$ tal que $\Phi Qh = Q'h$ para todo $h \in H$ y además $S'\Phi = \Phi S$.

Demostración. Por el teorema 1, existe un espacio de Hilbert H_K y una aplicación $V : \mathbb{Z} \rightarrow L(H, H_K)$ tal que las siguientes afirmaciones son ciertas:

(1') $K(i, j) = V^*(i)V(j)$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$ y (2') $H_K = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} V(n)H$.

Definamos la aplicación $S : H_K \rightarrow H_K$ de la siguiente manera

$$S\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n)h_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n+1)h_n,$$

donde $h_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $h_n \neq 0$ solamente para un número finito de índices $n \in \mathbb{Z}$. Es fácil probar que S esta bien definida y es lineal. Por otra parte, dado que K es un núcleo Toeplitz definido positivo, utilizando la igualdad 6 y el teorema 1, se sigue :

$$\begin{aligned} \|S\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n)h_n\right)\|_K^2 &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n+1)h_n \right\|_K^2 \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \langle V(j+i)h_j, V(i+1)h_i \rangle_K \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \langle V^*(i+1)V(j+1)h_j, h_i \rangle \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \langle K(i+1, j+1)h_j, h_i \rangle \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \langle K(i, j)h_j, h_i \rangle \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \langle V^*(i)V(j)h_j, h_i \rangle \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \langle V(j)h_j, V(i)h_i \rangle \\ &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n)h_n \right\|_K^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de lo anterior y de la definición del operador S , se tiene que $SV(n) = V(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. De la ultima igualdad, tomando $i, j \in \mathbb{Z}$ y $j > i$, se sigue que $S^{j-i}V(0) = V(0+j-i)$. Luego

$$K(i, j) = K(0, j-i) = V^*(0)V(j-i) = V^*(0)S^{j-i}V(0).$$

De esta manera, se obtiene la parte (1) tomando $Q = V(0)$.

La parte (2) se sigue inmediatamente de (2') y del resultado anterior.

(3) se obtiene de un proceso similar al utilizado para demostrar la parte (3) del teorema 1.

□

Observación 1. La primera parte del resultado anterior se puede ilustrar mediante el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 H_K & \xrightarrow{S^{j-i}} & H_K \\
 Q \uparrow & & \downarrow Q^* \\
 H & \xrightarrow{K(i,j)} & H
 \end{array}$$

5 Núcleos Toeplitz generalizados

5.1 Caso discreto

Consideraremos los conjuntos $\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, $\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$ y $\mathbb{Z}_\alpha - \mathbb{Z}_\beta = \{m - n : m \in \mathbb{Z}_\alpha, n \in \mathbb{Z}_\beta\}$.

Definición 1. Un núcleo Toeplitz generalizado a valores operadores, es un sistema K que consiste de los siguientes objetos:

1. Un par (H_1, H_2) de espacios de Hilbert;
2. Cuatro funciones $K_{\alpha\beta} : \mathbb{Z}_\alpha - \mathbb{Z}_\beta \rightarrow L(H_\alpha, H_\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$ con $K_{21}(n) = K_{12}^*(-n)$ para todo $n \leq 0$.

Observación 2. Si $H_1 = H_2$, $K_{11}(n) = K_{22}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y $K_{12}(n) = K_{11}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_1$, entonces el núcleo Toeplitz generalizado K puede ser identificado con el núcleo Toeplitz ordinario $K(m, n) \in L(H_1)$, donde $K(m, n) = K_{11}(m - n)$.

Sea S el espacio vectorial de todos los pares, o sumas $h = (h_1, h_2) = h_1 + h_2$, donde $h_\alpha : \mathbb{Z}_\alpha \rightarrow H_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, es una función de soporte finito. Se dice que el núcleo de Toeplitz generalizado K , definido en (1) es *definido positivo* (pd) si

$$\sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle K_{\alpha\beta}(i-j)h_\alpha(i), h_\beta(j) \rangle_{H_\beta} \geq 0. \quad (9)$$

Si K se reduce a un núcleo Toeplitz ordinario, entonces la definición anterior se reduce a la definición usual.

5.2 Caso continuo

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $0 < a \leq \infty$, $I(a) := (-2a, 2a)$, $I_1(a) := (-2a, 0)$, $I_2(a) := (0, 2a)$ y $K : I(a) \times I(a) \rightarrow L(H_\alpha, H_\beta)$ un núcleo, con $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que K es *núcleo Toeplitz generalizado a valores operadores* si existen cuatro funciones débilmente continuas

$$K_{\alpha\beta} : I_\alpha(a) - I_\beta(a) \rightarrow L(H_\alpha, H_\beta) \quad (10)$$

tal que $K(s, t) = K_{\alpha\beta}(s - t)$ para $s \in I_\alpha(a)$, $t \in I_\beta(a)$ y $K_{12}(-t) = K_{21}^*(t)$ para $t \in (0, 4a)$; esto es, $K_{11} : (-2a, 2a) \rightarrow L(H_1)$, $K_{12} : (-4a, 0) \rightarrow L(H_2, H_1)$, $K_{21} : (0, 4a) \rightarrow L(H_1, H_2)$ y $K_{22} : (-2a, 2a) \rightarrow L(H_2)$.

Se dice que K es *definido positivo* si

$$\sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{s \in I_\alpha(a) - t \in I_\beta(a)} \langle K_{\beta\alpha}(s - t)h_\alpha(s), h_\beta(t) \rangle_{H_\beta} \geq 0, \quad (11)$$

para todo par de funciones $h_\alpha : I_\alpha(a) \rightarrow H_\alpha$ con soporte finito y $\alpha = 1, 2$.

6 Descomposición de núcleos Toeplitz generalizados

El siguiente teorema es una versión para núcleos de Toeplitz generalizados del teorema dado por Naimark (ver Teorema 2) referente a núcleos Toeplitz ordinarios. Este resultado es de vital importancia en la definición e investigación de un nuevo tipo de núcleo llamado aproximadamente Toeplitz generalizado (trabajo en proceso).

Teorema 3. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $\alpha, \beta = 1, 2$ y $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow L(H_\alpha, H_\beta)$ núcleo Toeplitz generalizado. Entonces existen un espacio de Hilbert H_K , un operador unitario S en $L(H_K)$, operadores Q_1 en $L(H_1, H_K)$ y Q_2 en $L(H_2, H_K)$ tales que

1. (a) $K(i, j) = Q_1^* S^{j-i} Q_1$ si $i, j \in \mathbb{Z}_1$
 (b) $K(i, j) = Q_2^* S^{j-i} Q_2$ si $i, j \in \mathbb{Z}_2$
 (c) $K(i, j) = Q_2^* S^{j-i} Q_1$ si $i \in \mathbb{Z}_1$ y $j \in \mathbb{Z}_2$
 (d) $K(i, j) = Q_1^* S^{j-i} Q_2$ si $i \in \mathbb{Z}_2$ y $j \in \mathbb{Z}_1$
2. $H_K = \bigvee_{\alpha=1,2} \bigvee_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} S^n Q_\alpha H_\alpha$.
3. Si existe otro espacio de Hilbert H' , un operador unitario S' en $L(H')$ y operadores Q'_α con $\alpha = 1, 2$ que satisfacen (1), (2), entonces existe un operador unitario $\Phi : H_K \rightarrow H'$ tal que $\Phi S^n Q_\alpha = (S')^n Q'_\alpha$, para todo $h \in H_\alpha$ y además $S'\Phi = \Phi S$.

Demostración. Por el teorema 1, existen un espacio de Hilbert H_K , una aplicación $V : \mathbb{Z} \rightarrow L(H, H_K)$, tales que $H_K = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} V(n)H$ y

$$K(i, j) = V^*(i)V(j), \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Definamos el operador $S : H_K \rightarrow H_K$ de la siguiente manera

$$S \left(\sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} V(n)h_n^\alpha \right) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} V(n+1)h_n^\alpha,$$

donde $\{h_n^\alpha\}_{n \in \mathbb{Z}_\alpha}$ es una sucesión de elementos en H_α con soporte finito, es decir, $h_n^\alpha \neq 0$ solamente para un número finito de índices.

Por otra parte, dado que K es un núcleo Toeplitz generalizado definido positivo, por (6) y teorema 1, se tiene

$$\begin{aligned}
\|S(\sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} V(n)h_n^\alpha)\|_K^2 &= \|\sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} V(n+1)h_n^\alpha\|_K^2 \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle V(j+1)h_j^\alpha, V(i+1)h_i^\beta \rangle_K \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle V(i+1)^*V(j+1)h_j^\alpha, h_i^\beta \rangle_{H_\beta} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle K(i+1, j+1)h_j^\alpha, h_i^\beta \rangle_{H_\beta} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle K(i, j)h_j^\alpha, h_i^\beta \rangle_{H_\beta} \\
&= \|\sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} V(n)h_n^\alpha\|_K^2.
\end{aligned}$$

Luego S es una isometría, además $SV(n) = V(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_\alpha$, donde $\alpha = 1, 2$.

(a) De lo anterior, si $i, j \in \mathbb{Z}_1$ y $j > i$, entonces

$$S^{j-i}V(0) = V(0 + j - i).$$

Por lo tanto

$$K(i, j) = K(0, j - i) = V^*(0)V(j - i) = V^*(0)S^{j-i}V(0).$$

Así, se cumple que existe $Q_1 \in L(H_1, H_K)$ tomando $Q_1 = V(0)$.

(b) De forma similar, si $i, j \in \mathbb{Z}_2$ y $j > i$, entonces

$$S^{j-i}V(0) = V(0 + j - i).$$

Por consiguiente

$$K(i, j) = K(0, j - i) = V^*(0)V(j - i) = V^*(0)S^{j-i}V(0).$$

Luego se tiene que existe $Q_2 \in L(H_2, H_K)$ tomando $Q_2 = V(0)$.

Las partes (c) y (d) se siguen fácilmente de:

$$Q_1 \in L(H_1, H_K), Q_2 \in L(H_2, H_K), Q_1^* \in L(H_K, H_1), Q_2^* \in L(H_K, H_2),$$

$T_{12}(j-i) \in L(H_1, H_2), T_{21}(j-i) \in L(H_2, H_1), T_{11}(j-i) \in L(H_1), T_{22}(j-i) \in L(H_2)$ y del diagrama conmutativo adjunto

$$\begin{array}{ccccc}
H_1 & \xrightarrow{T_{11}(j-i)} & H_1 & & \\
& \searrow Q_1 & & \nearrow Q_1^* & \\
T_{12}(j-i) \uparrow & H_K & \xrightarrow{S^{j-i}} & H_K & \downarrow T_{12}^*(j-i) = T_{21}(j-i) \\
& \nearrow Q_2 & & \searrow Q_2^* & \\
H_2 & \xrightarrow{T_{22}(j-i)} & H_2 & &
\end{array}$$

(2) Sea $H = H_1 + H_2$. Por hipótesis $H_K = \bigvee_{\alpha=1,2} \bigvee_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} V(n)H_\alpha$, usando las expresiones para $K(i, j)$ dadas en la parte (1), se tiene que

$$S^n V(0) = V(n) = S^n Q_\alpha, \quad \text{para } \alpha = 1, 2.$$

Por lo tanto se sigue el resultado.

(3) Consideremos el espacio de Hilbert H' y definamos la aplicación $\Phi : H_K \rightarrow H'$ de la siguiente manera

$$\Phi\left(\sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} S^n Q_\alpha h_n^\alpha\right) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} (S')^n Q'_\alpha h_n^\alpha.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|\Phi\left(\sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} S^n Q_\alpha h_n^\alpha\right)\|^2 &= \left\| \sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} (S')^n Q'_\alpha h_n^\alpha \right\|^2 \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle (S')^j Q'_\alpha h_j^\alpha, (S')^i Q'_\beta h_i^\beta \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle (Q')^* (S')^{j-i} Q'_\alpha h_j^\alpha, h_i^\beta \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \langle K(i, j) h_j^\alpha, h_i^\beta \rangle \\
&= \left\| \sum_{\alpha=1,2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_\alpha} S^n Q_\alpha h_n^\alpha \right\|_K^2,
\end{aligned}$$

lo cual muestra que la aplicación Φ puede ser extendida por continuidad a un operador unitario de H_K en H' , además $\Phi S^n Q_\alpha = (S')^n Q'_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}_\alpha$. $\square$

7 Conclusiones

En este trabajo se ha obtenido una extensión del teorema dado por Naimark (ver Teorema 2) referente a núcleos de Toeplitz ordinarios, en el contexto de los núcleos de Toeplitz generalizados a valores operadores (Teorema 3). Este teorema juega un papel importante en el estudio de un nuevo tipo de núcleo llamado núcleo aproximadamente Toeplitz generalizado.

En trabajos subsecuentes sería interesante investigar la posibilidad de obtener una nueva versión del resultado anterior en el ambiente de los espacios de Krein. Cabe anotar que para el caso de núcleos de Toeplitz ordinarios ya existe un resultado en estos espacios ver [2].

Referencias

- [1] Constantinescu, T.: Schur Parameters, Factorization and Dilation Problems (1st edit.), Birkhäuser Verlag, 1996.
- [2] Constantinescu, T. and Gheondea, A.: Representations of Hermitian Kernels by Means of Krein Spaces, Publ. RIMS, 33(1997), pp. 917-951.
- [3] Cotlar, M. Bruzual, R. Alegría, P. Domínguez, M. Giménez J. y Marcantognini, S.: Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación, Mérida, Venezuela, 1990.
- [4] Cotlar, M. y Maestripieri, A.: Representaciones de Fourier, Factorizaciones Triangulares y operadores diferenciales canónicos, Caracas, Venezuela, 2004.
- [5] Cotlar, M. and Sadosky, C.: On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels, Proc. Symp. Pure Math. AMS., 35-I(1979), pp. 383-407.
- [6] Evans, D. E. and Lewis, J. T.: Dilations of Irreversible Evolutions in Algebraic Quantum Theory, Communications of the Dublin Institute of Advanced Studies, Series A(Theoretical Physics), 1977.
- [7] Naimark, M. A.: Self-adjoint extensions of the second kind of a symmetric operator, Bulletin Acad. Sci. URSS (Ser. Math.), 4(1940), pp. 53-104.
- [8] Arocena, R.: On Generalized Toeplitz Kernels and their relation with a paper of Adamjan, Arov and Krein, North-Holland Math. Stud, 86(1984), pp. 1-12.
- [9] Cotlar, M. and Sadosky, C.: The Generalized Bochner theorem in algebraic scattering systems, London. Stud, Lectures-Notes Ser, Cambridge University, 138(1989), pp. 144-169.
- [10] Domínguez, M.: Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups, Integral Equations Operators theory, 40(2001), pp. 212-230.
- [11] Arocena, R. and Cotlar, M.: Generalized Toeplitz kernels and Adamjan, Arov and Krein moment problems, in Operator Theory, adv and appl, 4(1982), pp. 37-55.

- [12] Cotlar, M.: Núcleos Invariantes y Teoremas de Dilatación, Parametrización y Predicción, Asociación Matemática Venezolana, Boletín, Vol.1, 1(1994), pp. 51-74.
- [13] Bruzual, R.: Representation of measurable positive definite generalized Toeplitz kernels in $\mathbb{R}$, Integral equations and operator theory, 29(1997), pp. 251-260.

Dirección de los autores

Arnaldo de la Barrera — Departamento de Matemáticas, Universidad de Pamplona, Pamplona - Colombia

e-mail: abarrera1994@gmail.com

Osmín Ferrer — Departamento de Matemáticas, Universidad Surcolombiana, Neiva - Colombia

e-mail: osmin.ferrer@usco.edu.co