



APROXIMACIÓN EPISTÉMICA Y FILOSÓFICA DEL PROGRAMA FORMALISTA DE
DAVID HILBERT

Carolina Gómez Sánchez
Cristian Andrés Avila Fernandez

Licenciatura en matemáticas y física

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS, TECNOLOGÍAS Y CULTURAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2024



APROXIMACIÓN EPISTÉMICA Y FILOSÓFICA DEL PROGRAMA FORMALISTA DE
DAVID HILBERT

Carolina Gómez Sánchez
Cristian Andrés Avila Fernandez

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciada y licenciado en Matemáticas y Física.

Director
Sergio Ivan Valencia Marín

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS, TECNOLOGÍAS Y CULTURAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2024

Agradecimientos

Le agradecemos a nuestras familias, compañeros y amigos por el apoyo incondicional en todo momento, por sus consejos, por creer que este logro llegaría y sobre todo por mostrarnos el valor de la perseverancia, la responsabilidad y la disciplina.

Le agradecemos a los profesores de la universidad del valle que hicieron parte de nuestra formación como licenciados en matemáticas y física, especialmente a los profesores Edgar Fernando Galvez y Sergio Valencia por su paciencia, consejos y conocimientos compartidos, por creer en nosotros, por darnos la oportunidad de terminar nuestra formación como licenciados y por estar siempre con la mejor disposición en las asesorías.

Resumen

Dentro de las ramas de investigación en Educación Matemática se encuentra la historia y filosofía de las matemáticas y cómo esta afecta de manera implícita el quehacer docente, de modo que en el presente trabajo se abordan los aspectos epistemológicos y filosóficos del formalismo, especialmente el proyecto formalista de David Hilbert. Iniciando con los referentes históricos que toma Hilbert para su fundamentación de la geometría, seguido de la presentación de su método axiomático y cual es la diferencia con el método genético. Luego, se realiza un análisis sobre las exigencias que debe tener todo sistema axiomático y con esto se abre paso al enfoque puramente formal de Hilbert, dando paso a la metamatemática abordada desde los enfoques: formal, lógico e intuicionista.

Palabras claves: método axiomático, método genético, formalismo, intuición y lógica.

Abstract

Within the branches of research in Mathematics Education is found the history and philosophy of mathematics and how this implicitly affects the teaching task, so that in this work, the epistemological and philosophical aspects of formalism are addressed, especially with a specific focus on David Hilbert's formalist project. Beginning with the historical references that Hilbert takes for his foundation of geometry, followed by the presentation of his axiomatic method and the distinction from the genetic method. Subsequently, an analysis is made concerning the requirements that any axiomatic system must have, thus paving the way to Hilbert's purely formal approach, leading to the metamathematics approached from the formal, logical and intuitionist perspectives.

Key words: Axiomatic method, genetic method, formalism, intuition and logic.

Tabla de Contenido

Introducción	8
Capítulo I: Antecedentes Euclidianos al Proyecto Fundacionista de Hilbert	10
I.1 Referente Histórico de Axiomatización de las Matemáticas	10
I.1.1 La Naturaleza del Sistema Axiomático de Euclides	10
I.1.1.1 Plataforma filosófica sobre la naturaleza de las cosas geométricas	25
I.1.2 Geometría euclídea de Hilbert	37
I.2 Pensamiento Axiomático de Hilbert	46
I.2.1 Métodos de Investigación en Matemáticas: del Método Genético al Método Axiomático de Hilbert	46
Capítulo II: Arquitectura Del Proyecto Fundacionista De Hilbert	56
II.1 Exigencias a los sistemas axiomáticos	56
II.1.1 Análisis de Dependencia e Independencia	57
Nivel 1. Análisis cerrado dentro del sistema axiomático	57
Nivel 2. Análisis cerrado dentro de una disciplina científica	59
Nivel 3. Análisis abierto dentro de las disciplinas científicas	60
II.1.2 Prueba de consistencia	62
Escenario I. Consistencia interna de los sistemas axiomáticos de las teorías científicas	65
i. Consistencia interna que se establece de forma externa.	65
ii. Consistencia interna que no se puede establecer de forma externa.	66
Escenario II. Aquí se identifican dos caminos	66
(i) Reducción de las teorías científicas a la consistencia externa de teorías elementales de las matemáticas.	66
(ii) No viabilidad de reducción de las teorías científicas a la consistencia externa de teorías elementales de las matemáticas.	67
II.2 Formalismo	68
II.2.1 Desenlace del Problema de la Fundamentación de las Matemáticas	68
II.2.2 Plataforma Formalista de Hilbert	70
II.2.3 La metamatemática o teoría de la demostración	77
II.2.4 Obstáculo Lógico en el Desarrollo de la Metamatemática	80
II.3 Lógica e Intuición	82
II.3.1 Una formulación de las matemáticas: formalista, segura, finitista e inconclusa	83
II.3.2 ¿Cuándo se trasciende por primera vez la esfera de lo finito y nos adentramos en la esfera de lo infinito?	87
II.3.3 Axioma V: Axioma de transfinitud	94
II.4 Hallazgos posteriores (1926 a 1930)	98
Conclusiones	102

Lista de tablas

Tabla 1

Signos concretos dentro de la teoría elemental de los números **69**

Tabla 2

Signos del formalismo de Hilbert para las matemáticas **71**

Tabla 3

Fórmulas matemáticas de Hilbert **73**

Tabla 4

Axiomas de la teoría elemental de los números según Hilbert. **83**

Introducción

El presente trabajo de grado se realiza para optar por el título de Licenciados en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle; dicho trabajo se elaboró con el fin de indagar acerca de los aportes epistemológicos presentes en el programa formalista de David Hilbert (1862 - 1943) en las Matemáticas e identificar en estos, elementos que permitan analizar los procesos de enseñanza de las Matemáticas, en los cuales se ven involucrados sistemas axiomáticos y formales.

Los aspectos histórico-filosóficos de la fundamentación de las matemáticas, especialmente de la geometría y la aritmética, han sido uno de los focos de mayor impacto en el campo de investigación de la Educación Matemática, dichos focos han permitido que los docentes en formación se pregunten por los principios históricos de las teorías matemáticas y además, exaltan los enfoques de las escuelas filosóficas: logicista, formalista, intuicionista, estructuralista, entre otras.

En consecuencia de lo anterior, la presente investigación pretende ahondar en todo el proceso del proyecto formalista del matemático David Hilbert, realizando un análisis epistemológico de sus principales obras en la escuela formalista. Tomando en cuenta que el programa formalista ha sido pilar para el desarrollo de la concepción moderna de las matemáticas y su general reduccionismo de las consecuencias epistemológicas de su propuesta axiomática y formal, para esta investigación será fundamental tomar tres enfoques que permitan analizar su propuesta, los cuales se presentarán en los capítulos de este trabajo.

En el primer capítulo, tomando en cuenta que uno de los primeros acercamientos de la fundamentación de la matemática por Hilbert fue en la rama de la geometría y resaltando la labor realizada por Euclides en los *Elementos*; resulta de gran interés resaltar

algunas comparaciones entre las axiomáticas de Euclides e Hilbert; para ello se exhibe la plataforma filosófica que se encuentra en el sistema Euclidiano; se esclarecen las motivaciones iniciales del porque Hilbert hace una formulación axiomática de la geometría y como esta le permite extenderse hacia el análisis. Luego, se presentan los ítems fundamentales en los que se diferencian las formulaciones axiomáticas de Hilbert con respecto a Euclides, por último, se presentará el método de investigación de Hilbert para continuar con su estudio de los fundamentos de las matemáticas, pero en la rama de la aritmética.

En el segundo capítulo, se presentan las exigencias que debe tener todo sistema axiomático en la formulación hilbertiana dentro de una disciplina científica para ser válida, después de abordar el método axiomático como plataforma epistémica para la constitución del conocimiento matemático, se presenta la formalización de la aritmética expuesta por Hilbert en sus artículos *Acerca del concepto de número (1900a)*, *From mathematical problems (1900b)*, *El pensamiento axiomático (1917)*, *La nueva fundamentación de las matemáticas (1922)*, *Los fundamentos lógicos de las matemáticas (1923)*, entre otras. Por último, se esboza el tipo de relación que tiene la lógica y la intuición en el programa formalista de Hilbert.

Finalmente, se presentan las conclusiones tomando en cuenta la problemática inicial que impulsó este trabajo y se expondrán algunos beneficios que tiene esta investigación para el proceso de la formación de los docentes en matemáticas, tomando en cuenta que la epistemología de los sistemas formales y axiomáticos, ayudan en el que hacer docentes.

Capítulo I: Antecedentes Euclidianos al Proyecto Fundacionista de Hilbert

I.1 Referente Histórico de Axiomatización de las Matemáticas

Para este capítulo se toma como referente principal la *Introducción filosófica a los elementos de Geometría*, presente en los *Elementos de Geometría (1944)* de Juan David García Bacca, debido a que es un texto muy pertinente y esclarecedor, en cuanto a la presentación de las motivaciones y diferencias que existen entre la geometría de Euclides y la de Hilbert, adicional a lo anterior este texto sirve como introducción a los *Fundamentos de la geometría* en español.

I.1.1 La Naturaleza del Sistema Axiomático de Euclides

El referente histórico de axiomatización más conocido en el campo de las ciencias, es el sistema axiomático elaborado por Euclides tal y como está registrado en los *Elementos*; dicho sistema fue un intento de presentar de manera ordenada y unificada los numerosos resultados geométricos, que hacían parte del compendio del conocimiento geométrico griego para la época; la idea era poder establecer un único sistema conceptual, a partir del cual, los resultados matemáticos ya conocidos fueran deducidos como consecuencias lógicas del mismo, por medio de cuatro elementos importantes: las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las proposiciones.

La idea central de este apartado es esclarecer brevemente la naturaleza del sistema axiomático de Euclides, sus motivaciones y los supuestos filosóficos que sustentan dichas motivaciones. Esto con el fin de adelantar un proceso similar con el trabajo axiomático de Hilbert, haciendo hincapié en los elementos principales de su propuesta axiomática y sus motivaciones. Al final de este apartado se espera poder establecer un contraste entre las visiones y motivaciones de estas dos importantes figuras del pensamiento axiomático para las ciencias matemáticas.

Los *Elementos* es una obra que por su importancia histórica en el desarrollo del pensamiento matemático y científico, es considerada invaluable y ha sido objeto de múltiples estudios académicos. Por lo tanto, ofrecer una breve presentación de sus elementos es una tarea bastante ingenua aunque se intentará adelantar, con el fin de brindar un contexto importante en el desarrollo del pensamiento axiomático, tal y como, llegó a ser concebido por Hilbert.

En los *Elementos*, un tratado que se remonta al 300 a.c., Euclides ofreció una presentación axiomática, extremadamente ordenada y estructurada, del corpus de conocimiento transmitido por los matemáticos pitagóricos y platónicos. Su presentación, influida por las reflexiones aristotélicas sobre la lógica, poseía una característica muy destacable: un enorme rigor a la hora de demostrar cada teorema. (Madrid, 2013, p. 26)

En los estudios realizados a la obra se destacan las siguientes palabras: presentación axiomática, orden, estructura y lógica; y con base en ellas se adelanta la breve presentación del sistema axiomático euclidiano para la geometría.

Euclides, ante todo en los *Elementos* hace una presentación axiomática, es decir, crea una forma de estudiar la disciplina geométrica que tal como se entendía para el antiguo pensamiento griego, reunía el estudio de las medidas (geometría plana y esférica actual) y de las cantidades (aritmética). Por supuesto, existen muchas formas de presentar esta aparente dicotomía entre la medida y la cantidad, como lo son los conceptos actuales de número y magnitud, sin embargo, para la época helénica, dicha dicotomía era un hecho mismo de la disciplina geométrica y por lo tanto, se lograban establecer los resultados propios de las magnitudes sin necesidad de apelar a las cantidades numéricas conocidas para ese momento.

En consecuencia, hablar de los *Elementos* es hablar de un hecho clave en la teoría científica del conocimiento, esto es, la aparición de un sistema axiomático, una forma particular de exponer los resultados conceptuales que dan cuenta de las propiedades de los objetos y fenómenos de la realidad física, no como resultados aislados, sino como resultados derivados lógicamente de unos elementos generales y previamente constituidos. En el caso del sistema axiomático euclídeo, estos elementos son: las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las proposiciones¹.

Las *definiciones* son delimitaciones específicas de objetos geométricos, es decir, se establece un mismo marco semántico que hace referencia a un único objeto geométrico por medio de su nombre; de modo que,

(...) los objetos geométricos son casi como entes naturales, cada uno de su especie bien distintos entre sí; y se llegará a hablar de “la” circunferencia y de “la” línea recta y de “el” triángulo, etc., cual hablamos de hombre, caballo, alelí, etc. (García, 1944, p. LXVIII)

Euclides consideró pertinente usar 23 definiciones en su primer libro como parte fundamental de su presentación axiomática, estas definiciones se pueden clasificar en cuatro grupos en función del tipo de delimitación que establece, como lo presentó García (1944).

1. Definiciones con forma de *proposición*, que no solo supone que “existe” el sujeto, sino que afirma que le conviene un cierto predicado.² Por ejemplo, D.I.1 - El punto

¹ El papel de las proposiciones en el sistema axiomático Euclidiano es fundamental, sin embargo, por fines de la investigación no se abordan a profundidad, ya que se busca es estudiar más la diferencia en la noción de axioma que tiene Euclides e Hilbert.

² Así, las definiciones: D.I.1 - D.I.8, D.I.10, D.I.13 - D.I.15, D.I.17 - D.I.19 y D.I.23 del libro I, de los *elementos* de Euclides.

es aquello que ya no tiene partes.- En este caso además de presentarnos que existe el punto, le asigna un predicado para cumplir con la función delimitadora.

2. Definiciones puramente *nominales*, que aplican un nombre más o menos técnico o corriente, a un objeto dado o definido precedentemente por una definición proposicional y en forma general.³ Por ejemplo, D.I.9 - Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo. - Se puede observar primero, la definición proposicional general con base en las rectas y luego, se nombra en función de dicha proposición y característica de las rectas.

3. Definiciones que no solo son proposiciones sino criterios y exigencias de *finitud* y *constitución* de objetos geométricos bien definidos y visibles y que, por tanto, son preliminares a las definiciones con forma de proposición, pues construyen los objetos a definir y a ver.⁴ Por ejemplo, D.I.3 - Extremos de líneas son puntos.- Esta definición construye el objeto geométrico de punto en función de ser una cierta parte específica constitutiva de una línea, es por consiguiente, anterior a la definición proposicional de punto y se construye, pues requiere del trazo mental o físico de la línea.

4. Definiciones de objetos *privilegiados* para la geometría griega.⁵ Por ejemplo, D.I.4. - La línea recta es aquella que descansa según igualdad sobre sus puntos - Puesto que no hay porqué definir aparte la línea recta, una vez no definida en toda su generalidad la línea por la Def. I.2. - línea es longitud sin latitud - si no se da un motivo extra-científico para tal excepción, frente a las innumerables clases de líneas algebraicamente posibles y matemáticamente equivalentes.

³ Así, las definiciones: D.I.9, D.I.11, D.I.12, D.I.16 y D.I.20 - D.I.22 del libro I, de los *elementos* de Euclides.

⁴ Así, las definiciones: D.I.3, D.I.6 y D.I.13 del libro I, de los *elementos* de Euclides.

⁵ Así, las definiciones: D.I.4, D.I.7 y D.I.15 del libro I, de los *elementos* de Euclides.

Ahora, una vez delimitados los objetos geométricos considerados esenciales para Euclides, procede a establecer lo que serán conocidos como los *postulados*, esto es, una serie de enunciados a los cuales no se les exige una prueba de veracidad, sino que se *pide* que se tomen como verdaderos.

Pero, ¿qué es lo que Euclides debe de pedir? Debe de pedir al entendimiento que acepte como verdades ciertas proposiciones no evidentes, al no ser parte de la intuición. Para el antiguo griego esto quería decir, aquello que no es evidente para la *intuición geométrica*, y por intuición se designa aquello que se correspondía con la relación de causa-efecto experimentada en la realidad sensible de las *cosas geométricas*,⁶ los cuales al constituirse como *objetos geométricos*⁷ heredan esta premisa de intuición.

De modo que, si no es evidente en la realidad sensible para las cosas geométricas, tampoco lo es para los objetos geométricos y requieren de un proceso adicional, este proceso es el de *construcción*.

Siendo Euclides, como buen griego visual nato no pide nada de lo que le esté dado inmediatamente en la intuición geométrica. (...) la construcción no es para el matemático griego un medio de *hacer existir* los objetos geométricos para después investigar las proposiciones que se “deduzcan” de la construcción, sin tener que construirlas. La construcción no es una “prueba de existencia” como se dice ahora, para el geómetra griego, pues para él el criterio de existencia es “su existencia visible” inmediata o no; solo si la cosa no está inmediatamente visible el procedimiento que emplee no será pura y simplemente una construcción, sino una *construcción* que haga posible una *visión*. (García, 1944, pp. LXXIV - LXXV)

⁶ Todo lo que se presenta con los aspectos sensibles inmediatos.

⁷ Lo que es presentado con aspectos analíticos.

Es decir, existen dos clases de construcciones: por un lado las construcciones que brindan una visión geométrica de un objeto o relación geométrica no intuitiva y por otro lado, las construcciones de objetos o relaciones geométricas inmediatamente visibles.

Entonces, ¿cuántos objetos o relaciones geométricas, Euclides consideró no le eran dados en la intuición? Fueron cinco y establece un procedimiento de construcción visualizadora, en cada uno de sus postulados.

Postulado I⁸: “exigencia de completar la visibilidad “semántica” o imperfecta del punto o de dos puntos con la visibilidad más perfecta de la línea recta.” (García, 1944, p. LXXV) En otras palabras, Euclides solicita al entendimiento que tome como intuitivo la construcción de una línea recta entre dos puntos cualesquiera, pues de esa manera garantiza dos hechos: Primero, un proceso siempre válido de construcción de la línea recta por medio de los puntos aislados; segundo, asegurar la existencia aislada inestable de los puntos por medio de la existencia más *estable* de la línea recta.

Postulado II⁹: exigencia de prolongar de manera indefinida, una línea recta hasta otro punto ya establecido. Euclides solicita al entendimiento que tome como intuitivo “poder prolongar o sacar una cosa de su estado natural de “determinación o finitud”.” (García, 1944, p. LXXVI) De esa manera garantiza que: primero, abarcar el infinito sin indeterminación, pues es posible prolongar la recta tanto como se quiera de punto en punto; segundo, conecta el postulado I, el cual ya garantiza el procedimiento de extensión por recursión.

Postulado III¹⁰: exigencia de “convertir cada punto en centro de la figura perfecta por excelencia que es para el griego la circunferencia” (García, 1944, p. LXXVII) Euclides

⁸ Postulado I: “trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.” (García, 1944, p.75)

⁹ Postulado II: “prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada.” (García, 1944, p.75)

¹⁰ Postulado III: “para cada centro y radio describir su círculo.” (García, 1944, p.75)

solicita al entendimiento que tome como intuitivo la construcción de circunferencias a partir de dos puntos cualesquiera, los cuales determinan uno de los infinitos radios (segmentos rectos) de la circunferencia. De esta manera se garantiza como menciona García (1944), que podrían elevarse a figuras perfectas o a partes de figura perfecta, todos los demás elementos de la geometría.

Postulado IV¹¹: exigencia de “homogeneidad e isotropía del espacio euclídeo o que el transporte no altera las figuras” (García, 1944, p. LXXVIII) Euclides solicita al entendimiento que tome como intuitivo el hecho de que todos los ángulos rectos ya sean próximo o remotos, sean iguales entre sí, esto es debido a que Euclides se percató de que existe un hecho “no justificado visualmente y que con el postulado presente quede más segura y plenamente visualizado, asegurado para la intuición.” (García, 1944, p. LXXVII)

Por la D.I.10¹² Euclides introduce la definición de ángulo recto, pero él necesita garantizar que sin importar que las rectas perpendiculares que los formen sean *distantes* y *distintas* entre sí, los ángulos formados son rectos y por lo tanto, iguales entre sí, ahí es donde el postulado IV entra a hacer su petición, de modo que,

Equivale por lo tanto, al postulado II: pues en este se pide prolongar la misma recta en línea recta y por continuidad, y en este otro se pide prolongar todo un ángulo recto y sus partes (...) se postula de consiguiente el desplazamiento de una figura en sentido amplio de la palabra. (García, 1944, p. LXXVII - LXXVIII)

¹¹ Postulado IV: “Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.” (García, 1944, p.75)

¹² Definición 10 del libro I de Euclides: “Cuando una recta levantada sobre otra forma ángulos contiguos iguales el uno al otro, cada uno de los dos ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular con respecto a aquella sobre que está levantada.” (García, 1944, p.73)

Al final la máxima garantía que Euclides obtiene con esta exigencia es conceptualizar que la igualdad no es función de la distancia, es una invariante frente al desplazamiento.

Postulado V¹³: exigencia de la determinación de la coincidencia de rectas en el infinito. Euclides solicita al entendimiento que tome como intuitivo el hecho de que si se prolongan dos rectas de manera indefinida estas se cortan en algún punto si dichas rectas no satisfacen la D.I.23¹⁴ de rectas paralelas.

De modo que, logra Euclides proporcionar un criterio para garantizar que ocurre en el infinito indeterminado del que habla la D.I.23 y por lo tanto, bajo la condición de que dichas rectas al prolongarse indefinidamente “hagan ángulos de mismo lado menores que dos rectos coincidan si se las prolonga indefinidamente; pudiendo coincidir a dos pasos, a cien pasos, a dos millones de estadios, es decir, a una distancia *bien determinada*.” (García, 1944, p. LXXIX)

Por lo cual, Euclides consigue establecer un criterio para la intersección de rectas en el infinito y por otro lado, restringe el caso de regiones abiertas, es decir, aquellas que no se constituyen en figuras según la definición D.I.14¹⁵

Porque si el ángulo, en el caso dicho, es mayor que dos rectos es claro que no resulta figura, vence la infinidad e indeterminación, si además se dan casos de ángulos menores en total que dos rectos y en que se cierre y defina la región habrá

¹³ Postulado V: “Que si una recta incide sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirá por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos.” (García, 1944, p.75)

¹⁴ Definición 23 del libro I de Euclides: “son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y prolongadas al infinito por ambas partes por ninguna coinciden.” (García, 1944, p.75)

¹⁵ Definición 14 del libro I de Euclides: “figura es lo comprendido por un límite o por varios” (García, 1944, p.73)

que añadir un nuevo dominio de la infinidad e indeterminación. (García, 1944, p. LXXX)

De esta manera, Euclides limita la proliferación de dichas regiones indefinidas, apoyando la opinión de García (1944) en la que expresa que el postulado V, no se corresponde con una exigencia de la geometría como ciencia, sino a la configuración mental de la forma de pensar del griego helénico.

A modo de conclusión, los postulados dentro de los elementos principales del sistema axiomático euclidiano tenían la función de proveer los cimientos faltantes de cinco exigencias geométricas no dadas por la intuición, dichos cimientos se logran por medio de construcciones que permitan la visualización en forma de intuición mental de dichas exigencia y se les pueda otorgar la calidad de verdades evidentes.

No obstante, esa es una función epistemológica de los postulados desde el punto de vista procedimental, es decir, en el quehacer matemático; “los postulados son métodos para resolver problemas (ecuaciones), mientras que las nociones comunes serían métodos de demostración (métodos de identidad mediata).” (García, 1944, p. LXXXI)

Desde ese punto de vista del quehacer matemático, en efecto los postulados parecen centrarse en plantear una serie de resultados fundamentales por medio de procedimientos específicos “para construcciones geométricas de líneas o figuras que directamente no están dadas y tienen que ser hechas según determinados métodos para después, como decía Marino, poder intuir las, con un tipo de intuición mental que sigue a la construcción.” (García, 1944, p. LXXXI)

Por otra parte, las *nociones comunes* desde el quehacer matemático cumplen una función más cercana al proceso de demostración, es decir, en la validación de resultados. El apelativo de “comunes”, se refiere al hecho de que son de apreciación, conocimiento o

posesión general de todo aquel que comparta intelecto, de manera que, vendrían a ser reglas de validación dadas por la intuición y por lo tanto, todos los hombres en sentido amplio, son capaces de aceptarlas como ciertas y aplicables a los razonamientos geométricos

(...) a las nociones comunes no se hace solamente por su evidencia intrínseca, sino por la evidencia “interior”, en virtud de la cual cada hombre y todos en común pueden llegar a notar que son como órganos naturales o nacidos con el entendimiento humano pudiendo, de consiguiente, usarlos con la misma seguridad con que nos servimos de las manos o de los oídos. (García, 1944, p. LXXXIII)

Euclides, considero que eran nueve estos principios de conocimiento demostrativo innatos; dichas nociones comunes se presentan con una interpretación moderna de la siguiente manera,

N.I¹⁶ Principio transitivo de la igualdad.

N.II¹⁷ Principio de conservación de la igualdad para la adición de una misma cantidad.

N.III¹⁸ Principio de conservación de la igualdad para la sustracción de una misma cantidad.

N.IV¹⁹ Principio de conservación de la desigualdad para la adición de una misma cantidad.

N.V²⁰ Principio de conservación de la igualdad para la multiplicación de una constante natural.

¹⁶ Noción común I: cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí.

¹⁷ Noción común II: y si a cosas iguales se añaden otras iguales, las totales son iguales.

¹⁸ Noción común III: y si a cosas iguales se quitan otras iguales, las restantes son iguales.

¹⁹ Noción común IV: y si a cosas desiguales se añaden otras iguales, las totales son desiguales.

²⁰ Noción común V: y las cosas dobles que una y la misma son iguales entre sí.

N.VI²¹ Principio de conservación de la igualdad para la multiplicación de una constante racional.

N.VII²² Principio de conservación de magnitud bajo una transformación isométrica.

N.VIII²³ Principio finitista sobre los conjuntos infinitos.

N.IX²⁴ Consecuencia lógica del postulado V.

Tomando las nociones comunes N.I, N.II, N.III, N.V. y N.VI, Euclides toma como intuitivas las propiedades de la igualdad para el cuerpo de los números reales, para entonces, solo contaba con el conjunto de números naturales y algunas cantidades racionales (aquellas que resultan de hacer particiones enteras a la unidad), así se pueden reconocer en la forma original de la expresión de las nociones comunes de la N. I a la N.III, la aceptación de las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad, de modo que, Euclides acepta a la igualdad con las cantidades numéricas antes mencionadas como una relación de equivalencia.

La noción N.VII da cuenta de la propiedad isométrica en la geometría euclidiana, es decir, la conservación de distancias bajo transformaciones que tengan como consecuencia la comparación por superposición de las figuras geométricas.

La noción N.VIII da cuenta de un hecho fundamental, y es que la intuición humana respecto al infinito queda anclada por su relación con lo finito, por lo tanto, Euclides la asume como un principio lógico válido para todos los conjuntos, sin distinción de cantidades finitas e infinitas. Mientras las cantidades aludidas sean finitas, el principio es válido, pero en cuanto las cantidades son infinitas, el principio queda al menos en duda,

²¹ Noción común VI: y las cosas mitades de una y la misma cosa son iguales entre sí.

²² Noción común VII: y las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí.

²³ Noción común VIII: y el todo es mayor que la parte.

²⁴ Noción común IX: y dos rectas no circundan región.

como fue señalado por Galileo²⁵ con su famosa paradoja y fue de manera sistemática expuesto como un error en el pensamiento matemático, a partir de la investigación del infinito adelantada por Cantor.²⁶

Respecto a la noción N.IX, Euclides sentencia una consecuencia lógica derivada de la aceptación del postulado V; en el contexto del postulado V al tomar dos líneas rectas paralelas y un punto fuera de ellas, no se puede trazar una tercera línea que pase por el punto y sea paralela a ambas líneas originales. En otras palabras, las dos rectas originales y la tercera línea no pueden estar todas en el mismo plano. Esto implica que, en el sistema de Euclides, dos rectas no determinan una región cerrada ya que no podemos asegurar que las líneas sean coplanares y por esto, no pueden formar una región.

En conclusión, las nociones comunes cumplen una función lógica relacionada con la validación y demostración de las proposiciones geométricas. Pero se plantea, ¿qué tan rígido y estricto resulta en la práctica, esta función lógica? En palabras de García (1944) está dado en dos roles: por una lado en forma de *silogismo proposicional*,²⁷ con la identificación plena de las dos premisas y la conclusión en la noción común y de otro lado, en forma de *silogismo relacional*,²⁸ de manera que, es posible descomponerla en tres

²⁵ En su último trabajo científico, *Dos nuevas ciencias*, Galileo Galilei hizo dos afirmaciones aparentemente contradictorias acerca de los números enteros positivos. Primero, algunos números tienen la propiedad de ser un cuadrado perfecto, mientras que otros no la tienen. Por ello, el conjunto de todos los números, incluyendo tanto a los cuadrados como a los no cuadrados, tiene que ser mayor que el conjunto de los cuadrados. Sin embargo, por cada cuadrado hay exactamente un número que es su raíz cuadrada, y por cada número hay exactamente un cuadrado. Por lo tanto, no puede haber más de un tipo que de otro. (Paradoja de Galileo, 2023)

²⁶ En el siglo XIX, Cantor demostró que a pesar de que el resultado de Galileo era correcto si se aplicaba a los números enteros, o incluso a los racionales, la conclusión general no era cierta: algunos conjuntos infinitos son mayores que otros, en el sentido en el que no se pueden relacionar en una correspondencia uno-a-uno. (Paradoja de Galileo, 2023)

²⁷ SyII.P. o silogismos proposicional corriente: $[(p \rightarrow q) \ \& (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$, donde & es el signo de la operación lógica “y” (unión copulativa).

²⁸ SyII.R. o silogismo relacional: 1) a base de las nociones comunes, sobre todo de la I y de la VIII, empleadas como fórmulas de demostración. vgr $[(a-b) \ \& (b-c)] \rightarrow (a \rightarrow c)$ donde - es el signo de la relación de igualdad. Teniendo presente que cada uno de los paréntesis es una proposición que suele demostrarse aparte. 2) a base de sustitución dentro de la relación. vgr. $[(a+b-2R) \ \& (a+b > m+n)] \rightarrow (m-n < 2R)$, donde R simboliza ángulo recto.

proposiciones relacionadas. Así, Euclides tenía dos formas de hacer uso de sus nociones comunes y, por lo tanto,

(...) según esto diría que la formulación de las nociones comunes tal cual se encuentran en Euclides no tiene carácter estrictamente lógico: ni de proposición (...) ni de silogismo relacional (...) Euclides las formula y entiende en sentido *neutral* a relación y proposición, cual instrumento que se puede usar de muchas maneras. (García, 1944, p. LXXXV)

Es con base en lo que García (1944) denomina la *neutralidad* o *indiferencia lógica*, en la formulación de las nociones comunes, que afirma que la geometría clásica no está constituida en plan puramente deductivo o lógico estricto. Es decir, es posible analizar en una demostración adelantada por Euclides los fundamentos: los postulados, definiciones, nociones comunes y teoremas ya demostrados en los que se apoya y aun así, evidenciar que las justificaciones en buena parte, se dan en función de principios no explícitamente definidos, en otras palabras, bajo una permisividad intuitiva que doblega y oscurece el enfoque lógico que se pretende.

Hasta el momento se han dado a conocer de manera breve los elementos principales que constituyen la propuesta axiomática de Euclides. Sin embargo, ¿cuál fue la motivación de Euclides para edificar dicha propuesta? Y ¿por qué la propuesta axiomática de Euclides es como es? Para la primera pregunta, se recurre al impacto epistemológico de los elementos en la práctica matemática y para la segunda, se hace hincapié en los supuestos filosóficos que sustentan en buena parte la visión del conocimiento en los tiempos de Euclides.

El impacto epistemológico de los elementos para el conocimiento científico posterior, está determinado por la presentación axiomática del cuerpo de conocimiento geométrico conocido para la época. Euclides proporcionó un sistema de presentación que se caracteriza por ofrecer a las disciplinas un orden y rigurosidad sistemática en dos sentidos: la presentación del conocimiento y la validación del conocimiento.

Desde el punto de vista de la presentación, le ofreció a las disciplinas científicas un camino para identificar sus elementos fundamentales: definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones. Por el lado de la validación del conocimiento, ofrece el método hipotético-deductivo que hace uso de los elementos fundamentales de las disciplinas previamente presentados y permite, por medio de una deducción lógica *demostrar* que los resultados hallados en el marco de una disciplina (*proposiciones*) son verdaderos.

Todo lo anterior, solo fue un instrumento usado por Euclides para dar cuenta de su verdadera motivación al escribir los *Elementos*, dicha motivación fue la de crear un *mundo*, en palabras de García (1944)

La conciencia intelectual no consiste solamente en darse cuenta de lo que le pasa a uno en el orden de las ideas, cayendo a la vez en cuenta de que tiene que entender las cosas según el orden y conexión que haya entre ellas; es falso que el orden y conexión entre las ideas sean el orden y conexión entre las cosas. La vida intelectual puede no solamente convertir las *cosas* en *objetos*, dándoles nueva *esencia* mediante las formas a priori de que disponga, sino que puede hacerse para sí un “*Mundo*”, distinto en su conexión interior de la conexión que tenga el Universo (*Das All, das Ganze*) de todas las cosas. (p. XLVII)

Euclides, edifica un *Mundo* geométrico por medio de la presentación axiomática de los hechos geométricos y de esa manera crea un mundo intelectual único por medio del

cual, según García (1944) se concretan dos condiciones: primero, transforma las *cosas* en *objetos*, es decir, les ofrece la ocasión de presentarse en formas a priori -espacio, tiempo, categorías- y segundo, organiza los *objetos* según un *plan* o proyecto propio de la conciencia intelectual, convirtiendo el *Universo* de las cosas en *Mundo*.

En dicho *Mundo*, Euclides toma de las *cosas* del universo o realidad física aquellas características y relaciones que le son de interés en función de la naturaleza de la investigación de dichas *cosas*, y para ello, las *cosas* del universo se despojan de características y de realidad, para ser transformadas en *objetos* del mundo geométrico.

Es importante entender que esta acción de construir *Mundo* por medio de la acción intelectual, no es exclusiva del sistema axiomático geométrico de Euclides, pues en sentido general, funciona para los sistemas axiomáticos para las geometrías no euclidianas, no arquimediana, entre otras. No obstante, en Euclides adquiere una connotación especial y característica, dado que varias de las proposiciones de los elementos ya eran resultados conocidos y exhibidos dentro del compendio de conocimiento griego, pero eran tenidos como resultados aislados, es decir, verdades que si bien eran verificables, no eran parte de un mismo sistema y, por lo tanto, no se consideran partes íntegras de un todo de investigación.

En consecuencia, Euclides crea un mundo intelectual en el cual todos esos hechos, no se considerarán como resultados particulares de los objetos geométricos, sino como consecuencias lógicas de las relaciones, propiedades y reglas de conexión de dichos objetos en el mundo geométrico, un mundo soportado por la presentación axiomática en los *Elementos*.

A modo de conclusión, la motivación principal de Euclides con su presentación axiomática para la geometría, fue la de concebir un *Mundo*. Este mundo se caracteriza por

brindar una presentación específica, ordenada y constructiva de los objetos geométricos que habitan dicho mundo y además, por brindar un método hipotético-deductivo que demuestra que las relaciones y propiedades que se dan en el marco de dicho mundo, son susceptibles de un análisis lógico.

El mundo de la geometría que Euclides concibe, al cual se hará referencia como *geometría euclidiana*, goza de unas características particulares que exhiben una plataforma filosófica acerca de cómo se concibe la naturaleza de las *cosas* de la realidad física, el cómo se nos presentan dichas *cosas* y sobre cómo las conocemos, es decir, el cómo se consigue conocimiento.

1.1.1.1 Plataforma filosófica sobre la naturaleza de las cosas geométricas

Para el griego clásico, existía una condición principal que le era natural a la verdad de las cosas, es decir, a lo que se postula acerca de las cosas y era la unicidad de tres importantes aspectos de estas: el *ser*, la *verdad óptica del ser* y la *verdad ontológica del ser*. Por *ser*, se hace referencia a la esencia de las cosas, esto es, lo que las cosas son en sí mismas y que hace que una cosa sea ella misma y ninguna otra; en el caso de la *verdad óptica del ser* se refiere al modo como las cosas se nos muestran y, por lo tanto, exhiben sus propiedades, finalmente la *verdad ontológica del ser* tiene que ver con la forma como creamos conocimiento acerca de las cosas, en otras palabras, es una mediación entre la manifestación del ser y los procesos internos que me permiten conocer las cosas, es decir, el entendimiento.

Para el griego clásico, esos tres aspectos: ser, verdad óptica del ser y verdad ontológica del ser, deben ser únicos, es decir, la esencia de las cosas, las manifestaciones del ser de las cosas y la forma de acceder al conocimiento de las cosas, debía ser una sola

La unicidad de las cosas geométricas es tal en la geometría griega y clásica que las cosas geométricas *tienen que manifestar* o estar haciendo patente lo que son y además solo *pueden estar en un estado* geométrico, su verdad es unitaria, su tipo de manifestación es único. A unidad en el tipo de ser, unidad en el tipo de verdad entitativa. (García, 1944, p. XII)

Tal como señala García (1944) los procedimientos modernos de transformaciones métricas y más aún topológicas, no tendrían mayor sentido para el geómetra griego, pues esas transformaciones deforman el ser de las cosas. Por el contrario, solo se admitiría como válidos, aquellas que permitan conservar la triple unicidad antes mencionada, estas son las transformaciones lineales, dado que en la concepción griega, los movimientos rectos son puros, simples y uniformes, por lo tanto, no afectan las propiedades ni físicas ni geométricas de las cosas.

Como consecuencia de lo anterior, conviene subrayar que “(...) de un prejuicio acerca de la verdad de las cosas: *que las cosas sólo pueden ser de una manera y que sólo de una manera pueden ostentar lo que son*” (García, 1944, p. XIII) se obtiene una restricción en el contenido y los métodos de la geometría griega. La principal restricción es la convicción de que el sistema de verdades geométricas sólo puede ser de una manera, es decir, que solo existe una geometría posible que da cuenta de la única verdad geométrica de la realidad física.

Llegado a este punto, es importante conceptualizar la noción de *entendimiento* por parte del antiguo griego, dado que la forma en que el griego concibe por dentro el conocer, es un soporte directo a la concepción de una única y limitada disciplina geométrica. Tal como destaca García (1944) Aristóteles, de manera ya clásica, comenta que el *entendimiento* como facultad humana es como, un tablero escolar y al igual que este no

existe de antemano algo escrito en él, esto es que en principio está vacío y todo lo que llega a ser escrito sobre él se puede borrar, más aún, lo que se escribe sobre él no transforma al tablero y no se puede tomar como propiedad de éste, pues, todo lo que puede llegar a ser escrito sobre él solo es una afección o pasión transitoria y superficial.

Con lo anterior se quiere decir que, el entendimiento, la posibilidad humana de conocer sobre la verdad de las cosas, presenta una naturaleza pasiva, de modo que asigna al sujeto el rol de contemplar la verdad de las cosas y no ser partícipe de ella

(...) si el entendimiento de cada hombre se siente pasivo frente al ser y a la verdad de las cosas y estas no le presentan sino un solo tipo de verdad óntica, es decir, solo se le manifiestan de si de una sola manera, el entendimiento no podrá ver sino una sola y al formularla, solo nos dará **un** sistema de proposiciones básicas o axiomas.

(García, 1944, p. XIV)

De este modo, el proceso de conocimiento tal como era concebido por los griegos, propició una construcción geométrica que sólo permitía la construcción de una geometría que reproducía las mismas relaciones que se obtenían de la intuición contemplativa de los objetos. Así, la geometría estaba, bajo estas condiciones, configurada a ser única, limitada a la intuición contemplativa y, por lo tanto, dependiente de esta “Mientras en la historia de la vida intelectual humana se note el conocer como *pasión o recepción*, -y se sostenga fundándose en esta sensación radical interna que “*el entendimiento es pasivo*”- la geometría de tales épocas históricas será única.” (García, 1944, p. XV).

Es importante señalar que esa plataforma filosófica de la triple unicidad, empieza a tener una serie de cuestionamientos que parten de las reflexiones de la escuela estoica y escéptica. En general, para los griegos existían fuera de la elucidación, es decir, de la

actividad misma que da cuenta del entendimiento, dos operaciones mentales; afirmación y negación, pero la concibieron como parte de esta

Toda la filosofía griega clásica está guiada por una suposición implícita, a saber, que el entendimiento *tiene que* afirmar la verdad y por tanto dar forma de proposiciones afirmativas a las proposiciones sobre las cosas, y que tiene que negar lo falso, dando forma de proposición negativa a las proposiciones que no expresen lo que una cosa es. (García, 1944, XVIII)

A partir de esa línea de pensamiento, se infiere que tanto la afirmación como la negación son una necesidad inherente al proceso de conocer, es decir, se dan como consecuencia inmediata del entendimiento, en la búsqueda de la verdad. Pero los estoicos plantean que dicha necesidad no existe, en otras palabras, que el ser humano no está obligado a dar rienda suelta al proceso de conocer, que es posible abstenerse a dicho proceso.

Una consecuencia importante de esta línea de razonamiento, es el hecho de que la generación de proposiciones, es decir, de conocimiento formal, que es el resultado de afirmar o negar, no es un acto inmediato sino que el ser humano puede decidir no hacerlo, esto es, abstenerse de conocer

La verdad ontológica, la adecuación entre entendimiento y realidad, ambos en estado de potencia, no es algo necesario, depende de un acto *libre y espontáneo* del entendimiento de la afirmación o de la negación, que por este motivo arraigan en otro acto más hondo, en el *abstención* o *continencia* intelectual. (García, 1944, p. XX)

En palabras de García (1944) no es posible ignorar la existencia de las cosas, pues las manifestaciones de las cosas nos asaltan, pero es posible por medio de la abstención, no

indagar qué son dichas cosas. De manera, que por medio de la abstención, se pueden disociar la verdad del ser y óntica por un lado, y la verdad ontológica por otro, esta es la base de la doble identidad, es decir, en donde se conserva la correspondencia estricta, certera y única entre ser y la verdad óntica del ser, pero se presenta una brecha insalvable respecto a la verdad ontológica del ser, es un paradigma nuevo en el que la triple unicidad de las verdades ya no se sostiene.

Existen una serie de consecuencias importantes que deben ser tomadas en cuenta, con la introducción de la abstención en el proceso de conocer. Se ha señalado que la forma de acercarse al conocimiento por parte de los griegos se caracterizaba por ser una *contemplación* de la realidad, es decir, desempeñando un rol pasivo-receptivo, de manera que la intuición se posiciona como un elemento de vital importancia, para dar cuenta de un soporte de veracidad en las afirmaciones planteadas acerca de las cosas de la realidad.

Pero al establecerse la posibilidad de *abstenerse* y por oposición la opción de tomar una *posición*, es posible desligarse de lo inmediato e intuitivo y establecer una manera lógica formal de proceder, “hacer lógica formal es librarse de la *intuición*, dejando la prominencia a la acción “relacionante”, a la función, como se dirá siglos más tarde” (García, 1944, p. XXVI)

A partir de esta nueva perspectiva, de lograr liberarse de afirmar proposiciones explícitas y lograr afirmar proposiciones indeterminadas, se generan una serie de innovaciones en el campo de la lógica, las cuales García (1944) sintetizó como:

1. Formulación técnica de la ley de reducción *ad absurdum*: Su característica principal es que posee una forma relacional²⁹, en donde el primer elemento aludido, no se corresponde con una proposición concreta ni a objetos.
2. Equiparación entre silogismos categóricos e hipotéticos: Más allá de la equiparación, lo relevante fue que otorgó una preeminencia de estos últimos. Existe una relación entre las proposiciones y silogismos categóricos³⁰ y las acciones de afirmar y negar, dado que en dichas proposiciones y silogismos se contiene la exigencia de afirmar o negar, es decir, no se puede hacer una sin la otra; por lo tanto, esos silogismos categóricos van en sentido opuesto a la facultad de abstención y posición.
3. Por otro lado, las proposiciones hipotéticas³¹ están sujetas a la operación mental de posición, la cual es previa a la afirmación y negación, y a su vez más cercana a la tesis, en el sentido de que no queda completamente definidas, dado que no son afirmadas o negadas, es decir, su valor de verdad está en función de las relaciones que establece en potencia.

Ahora bien, tal como menciona García (1944) pero a lo cual se hará mención de manera directa, los estoicos con el modo de trabajar con las proposiciones en la disciplina lógica, lograron descubrir “las dos reglas modernas de deducción: a. El esquema de deducción o *modus ponens* y b. La regla de sustitución” (p. XXIX). -Las cuales como se verá en el siguiente apartado, son cruciales para el desarrollo metamatemática en la obra

²⁹ Si de la negación de lo primero se sigue la afirmación de lo primero, se sigue la afirmación de lo primero. En forma moderna $((\sim p) \rightarrow p) \rightarrow p$

³⁰ Están compuestas por tres proposiciones categóricas (dos premisas y una conclusión). Una proposición es categórica cuando tiene las siguientes cuatro formas: universal afirmativa, universal negativa, particular afirmativa y particular negativa.

³¹ Están compuestas de una secuencia condicional para una o ambas de sus premisas. En lógica proposicional, el silogismo hipotético es una regla de inferencia válida conocida como regla de la cadena o el principio de transitividad.

fundacionista de Hilbert- pero García (1944) señala la importancia de este descubrimiento al sostener que

Toda ciencia constituida en plan de ciencia “formal”, - con la característica básica de la regla de sustitución, no con la especificación de géneros- supone un primer grado de desvinculación entre verdad ontológica por una parte y verdad óptica y ser por otra, puesto que en una ciencia formal ya no interesan ni tienen importancia la verdad o falsedad de las proposiciones empleadas ni su carácter afirmativo o negativo. (García, 1944, p. XXIX)

En otras palabras, la verdad de las fórmulas lógicas, es decir, de las proposiciones, ya no está ligada al contenido específico de las proposiciones, sino que, depende de la distribución funcional de los valores de verdad. Así pues, la geometría euclidiana se nutre de estas relaciones lógicas establecidas, alejadas de una dependencia exclusiva a la intuición inmediata, aunque sea un ejercicio deductivo en una forma modesta.

Para este momento, desde el punto de vista filosófico, se tiene una separación entre las equivalencias de las verdades sobre los objetos geométricos: un grupo conformado por la verdad del ser y la verdad óptica del ser y del otro lado, la verdad ontológica del ser. De manera que existe a partir de ahora con la abstención y posición, como actos anteriores a la afirmación y la negación, la posibilidad de ofrecer una visión formal de la geometría con Euclides.

No obstante, el dúo aún persistente de verdad del ser y la verdad óptica del ser, no resistió el paso del siglo XVII de la mano de uno, de los descubrimientos más impactante para las aún persistente nociones clásicas de unicidad de la verdad del ser y de la verdad óptica del ser.

De la mano de Descartes, en palabras de García (1944)

La vida mental humana comienza a descubrir muchas cosas, y entre otras menos interesantes para nuestro intento, una capital: que los objetos geométricos -líneas rectas, curvas, sus combinaciones...,- pueden presentar un aspecto inmediato, intuitivo (...) que se corresponde en nuestra terminología a una *verdad óptica inmediata*; pero notó Descartes que, además de esta cara de todos los días, los objetos geométricos podían presentar otra enteramente nueva, a saber: una cara o *aspecto algebraico*, admitir una definición analítica. (p. XXXIV)

Ahora, más allá del hecho de que existan manifestaciones de los objetos geométricos que no sean intuitivamente inmediatos, es decir, que no poseen una única manifestación de su ser, es necesario comprender que existe una correspondencia, una coordinación entre sus manifestaciones, y dicha manifestación es dada por Descartes al inventar y hacer uso de un sistema coordenado rectangular que permite la conversión entre las manifestaciones del objeto. Ahora, lo que es importante resaltar de lo anterior, es que permite establecer que la verdad óptica de los objetos geométricos no es unitaria y, además, no es independiente de la acción del entendimiento.³²

Así, es claro que con el surgimiento del artificio coordenado que permite explorar las manifestaciones geométrico intuitivas y algebraicas de los objetos, muestra que la verdad óptica geométrica, depende de la verdad ontológica mental y aún más importante, desde el punto de vista de la concepción filosófica del griego clásico con

Descartes se consigue ya desvincular para siempre objetos geométricos y verdad óptica o ser y verdad: quedando solamente una coordinación, no una identidad, entre

³² La verdad óptica, de tipo algebraico con la que las cosas geométricas ostentan lo que son algebraicamente, -sus definiciones y propiedades analíticas- depende de la verdad ontológica, del artificio de las coordenadas y de la coordinación “libre” que el entendimiento establezca entre lo geométrico y lo algebraico. (García, 1944, p. XXXV)

cosas u objetos geométricos, verdad geométrica y verdad ontológica, correspondiendo a los objetos geométricos varias maneras independientes de ostentar lo que son, varios tipos de verdad óptica. (García, 1944, p. XXXVIII)

En conclusión, se puede establecer que por medio del artificio coordinado introducido por Descartes, se logra exhibir que la identidad establecida por la plataforma de pensamiento griega entre el ser y la verdad óptica del ser, era solo un paradigma del pensamiento y que en realidad, lo que existe entre ellos es una coordinación que requiere de un medio mental, una intervención del entendimiento del individuo y que no está dado, por lo tanto, fuera de su subjetividad.

Hasta este punto, se ha logrado establecer como la plataforma filosófica que sostiene buena parte de la infraestructura filosófica de la axiomática euclidiana, es decir, la triple identidad entre el ser, la verdad óptica del ser y la verdad ontológica del ser, fue desvirtuada a partir de dos grandes aportes: el primero, se originó a partir de los aportes de las reflexiones de los estoicos y escépticos, al identificar que el acto de conocer y generar afirmaciones o negaciones de los objetos, no es una necesidad sino una elección, por lo tanto, es posible abstenerse de conocer o por el contrario optar por una posición ya sea afirmar o negar. Este aporte género que la triple identidad, se convirtiera en una doble identidad entre ser y verdad óptica con una separación de la verdad ontológica del ser.

En segundo lugar, a partir de las investigaciones de Descartes, se hace patente que los objetos geométricos no poseen una única manifestación, sino que por el contrario existen al menos dos manifestaciones para un objeto geométrico: una representación intuitiva inmediata (geométrica) y una representación algebraica (analítica); a su vez estas dos representaciones se pueden coordinar por medio de un plano coordinado que hace evidente la participación de la mente en el proceso de exponer dichas manifestaciones. Este

aporte género una separación entre el ser y la verdad óptica del ser, de modo que se consigue al final una triple separación entre el ser, verdad óptica del ser y la verdad ontológica del ser.

Entonces, ¿al final bajo qué plataforma filosófica queda sustentada la geometría euclidiana? Desde el principio se expuso que la geometría euclidiana, se debía a la forma del pensamiento griego, la cual estaba ligada a la concepción de la triple unicidad, por lo tanto, el trabajo adelantado por Euclides y su sistema axiomático está sujeto a esta concepción de la relación entre ser y verdad.

Aun así, no sería del todo correcto afirmar que el mundo geométrico de Euclides está estructurado en un solo plan intuitivo inmediato, pues es evidente en su desarrollo sistemático e incluso en las herramientas lógicas explícitas (nociones comunes) e implícitas usadas, que el mundo euclidiano es uno formal, es decir, uno en donde se hace uso de un sistema ordenado y conectado por medio de unas relaciones lógicas establecidas y procesos de demostración válidos. Así pues, la geometría euclidiana construida en plan estoico y escéptico, goza también de una concepción filosófica caracterizada por la doble identidad entre ser y verdad óptica con separación de la verdad ontológica.

A pesar de que es posible identificar elementos formales en la geometría euclidiana, es asimismo posible seguir evidenciando en su desarrollo, que siguen presentes las impresiones intuitivas inmediatas que son tan características de la triple unicidad, y esto se debe a que los objetos siguieron siendo los protagonistas en la presentación axiomática euclidiana. De manera que sin importar que se logrará una doble separación e inclusive la triple separación con los aportes de Descartes, la geometría euclidiana siguió conservando epistémicamente a los objetos intuitivos inmediatos de la geometría como el centro entero de la presentación axiomática y la lógica servía como un complemento útil para validar las

posturas sobre sus relaciones y propiedades, complemento que no logró anular el contenido concreto de los objetos geométricos definidos de Euclides.

A partir de estos análisis de las plataformas de pensamiento detrás del mundo euclidiano, García (1944) propone la existencia de tres niveles de constitución de la geometría,³³ en este orden:

1. Geometría intuitiva, con triple identidad entre verdad ontológica, óntica y seres geométricos. Nivel pre euclídeo y pre estoico.
2. Geometría formal, con separación entre verdad ontológica por una parte y verdad óntica y seres geométricos por otra; siendo efectos de tal separación el carácter formal (regla de sustitución) de la geometría y su carácter deductivo sistemático (forma hipotética e implicativa). Geometría euclídea, construida en plan vital estoico, no en plan platónico o aristotélico.
3. Geometría trascendental, que hará posible varias geometrías y una fundamentación axiomática de la ciencia, en que, entre otras cosas ya no existe verdad óntica independiente, sino sometida a la verdad ontológica o trascendental. (p.XXXII)

Es posible observar a partir de la descripción de la geometría formal por García (1944) que considera a la geometría euclídea como una formal, siempre y cuando esté encaminada en las reflexiones estoicas y escépticas al respecto de la abstención e inclusión más generalizada de la lógica formal. Es decir, que la geometría formal es consciente de la doble identidad entre ser y verdad óntica por un lado y separa la verdad ontológica del ser.

³³ En realidad García no solo toma estos tres estadios o niveles de desarrollo solo para la geometría, sino para las disciplinas científicas en general.

A pesar de lo anterior expuesto, esta geometría formal estaba limitada aun por varias de las consecuencias originales de la plataforma de pensamiento griego, es decir el hecho de que solo se reconociera y generará una única geometría válida, que esa geometría aún hablará de las cosas geométricas partiendo de la intuición inmediata y les añadiera la lógica formal como herramienta complementaria para establecer la verdad y orden de los resultados, más no como parte esencial de la misma en el establecimiento de sus relaciones y constitución de los objetos.

De esta manera, se tenía que,

Las cosas geométricas³⁴ que en Euclides no tenían esencia analítica ni eran definidas analíticamente por ecuaciones poseen desde Descartes esencia analítica, definición algebraica. Pero el entendimiento quedaba aún esclavo del mismo sistema de cosas puesto que al convertirlas en objetos, el sistema de objetos geométricos era el mismo que el sistema de cosas. (García, 1944, p. XL - XLI)

Así pues, dado que en realidad incluso con la introducción de las definiciones algebraicas de las intuitivas cosas geométricas, el sistema de cosas del cual se hablaba en geometría seguía siendo el mismo desde Euclides, se logró dar el paso definitivo para reformular el enfoque de la geometría a partir del trabajo de David Hilbert, su aporte en el campo de los fundamentos de la geometría y posteriormente en los fundamentos de las matemáticas, permitió establecer la plataforma de lo que se conoce como la formulación moderna de la ciencia matemática.

³⁴ “convengamos en llamar “cosas geométricas” a todo lo que se presente con los aspectos sensibles inmediatos. Y llamemos “objetos geométricos” a lo que se presente con aspecto analítico” (García, 1944, p. XL)

I.1.2 Geometría euclídea de Hilbert

David Hilbert, en palabras de Madrid (2013)

(...) fue pionero en ascender del nivel puramente matemático en que se estudia la geometría al nivel metamatemático o metageométrico, que se preocupa por las propiedades que debe cumplir todo sistema axiomático, en particular el que él estaba prescribiendo para la geometría. (p. 37)

Hilbert se cansó de la teoría de números y se pasa al estudio de los fundamentos de la geometría, el cual se convierte en el primer hito de la corriente axiomática moderna, *Los fundamentos de la geometría* de 1899, se convirtió así en un paradigma esencial para la investigación de fundamentos y promovió la práctica axiomática en el siglo XX lo mismo que los *Elementos* hicieron en el siglo anterior.

Para Hilbert la geometría de Euclides con todos sus elementos vistos hasta ahora, no vislumbra completamente el establecimiento del mínimo número de suposiciones del cual se pudiera derivar toda la geometría, de modo que,

Es así que propuso un total de veintiún axiomas, que Hilbert no se sacó de la chistera, sino que venían siendo empleados implícita o explícitamente desde antiguo y que, en todo caso, no eran solo fruto del pensamiento puro, sino también de la intuición sensorial. (Madrid, 2013, p.35)

Hilbert a diferencia de Euclides no define los entes geométricos primitivos (punto, recta, y plano) sino que formula axiomas para estos sistemas de objetos que resultan ser indefinidos, “porque los axiomas hilbertianos valen de cualquier objeto, mientras cumplan las condiciones ideológicas fijadas por los axiomas”. (García, 1944, p. LXXXVII) es decir, son los axiomas (sin ideas preconcebidas o dibujo alguno) quienes entran a definir

implícitamente los objetos elementales a través del establecimiento de las relaciones existentes entre ellos.

Hilbert presenta así un compendio de veintiún axiomas que por fines del trabajo no se evidenciara cada uno de ellos, sin embargo, se mencionara cómo se construyen y clasifican en cinco grupos, como lo afirma Madrid (2013)

- ❖ Axiomas de incidencia o enlace,³⁵ que conectan entre sí los diferentes objetos y, por ejemplo, permiten afirmar que «este punto yace en esta recta» o «esta recta yace en este plano».
- ❖ Axiomas de orden,³⁶ que permiten decir, por ejemplo, «este punto está entre estos dos» (como notará Pasch, esta clase de axiomas estaba completamente ausente de la lista de postulados euclídeos).
- ❖ Axiomas de paralelismo,³⁷ un grupo de axiomas que sólo contiene el célebre axioma de paralelas.
- ❖ Axiomas de congruencia,³⁸ que sirven para comparar e igualar segmentos.
- ❖ Axiomas de continuidad,³⁹ que son dos axiomas en realidad. Por un lado, el llamado *axioma de Arquímedes*,⁴⁰ que establece que dados dos segmentos arbitrarios, si

³⁵ I. 1-7 *Axiomas de enlace* estos se dividen en dos subcategorías: los axiomas *planos del grupo 1*: 1-2 y los *especiales*: 3-7. (García, 1944, pp. 4 - 5)

³⁶ II. 1-5 *Axiomas de orden* estos se dividen en dos subcategorías: los axiomas *lineales del grupo 2*: 1-4 y los *planos del grupo 2*: 5. (García, 1944, pp. 6 -7)

³⁷ III. *Axioma de paralelismo (axioma euclídeo)*. “En un plano ∞ por un punto A fuera de una recta a se puede trazar siempre una y una sola recta que no corte a la recta a, tal recta se llama la paralela con a en el punto A.” (García, 1944, p.11)

³⁸ IV. 1-6 *Axiomas de congruencia* estos se dividen en dos subcategorías: los axiomas *lineales del grupo IV*: 1-3, *congruencia de ángulos*: 4-5, el 6 une los conceptos de congruencia para ángulos y segmentos, los *planos del grupo IV*: 4-6. (García, 1944, pp. 11 - 14)

³⁹ V. *Axioma de continuidad* este es el axioma de Arquímedes y está catalogado como axioma *lineal*. ya que este permite introducir a la geometría el concepto de continuidad. (García, 1944, p.15)

⁴⁰ *Axioma de arquímedes*: “Sea A_1 un punto cualquiera sobre una recta entre dos puntos cualesquiera AB, constrúyase los puntos $A_2, A_3, \dots$ tales que A_1 este entre A y A_2 , A_2 entre A_1 y A_2 y A_3 entre A_2 , etc y a la vez sean los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$, iguales entre sí, en este caso se dará siempre en la serie de puntos $A_2, A_3, A_4, \dots$ un punto A_n tal que B se hallará entre A y A_n .” (García, 1944, p.15)

repetimos sucesivas veces cualquiera de ellos, podemos lograr construir un segmento mayor que el otro en un número finito de pasos; y, por otro, el *axioma de plenitud lineal* o *de continuidad de la recta*: los puntos de una recta forman un sistema que no es susceptible de ampliación alguna bajo la condición de conservar la ordenación lineal, los axiomas de congruencia y el axioma de Arquímedes.(p. 35)

Aquí es importante resaltar que el último grupo de axiomas aquí presentado brillaba por su ausencia en la geometría de Euclides, a pesar de que su uso es indispensable para demostrar la proposición I del libro I de los *Elementos*.

El postulado de “continuidad” (cf. Postulado V de Hilbert) se halla formulado en Euclides por la definición D.I.13. Mas no como postulado o axioma, en sentido moderno, sino como exigencia natural de la mente helénica, cuál postulado de *finitud intrínseca* de los objetos geométricos. (García, 1944, p. LXVII)

Según lo expuesto, los axiomas deben de cumplir unas relaciones entre ellos pero ¿qué tipo de propiedades o relaciones deben de cumplir estos? Hilbert señala que son tres las propiedades: independencia, consistencia y completitud.

La geometría euclídea de Hilbert hoy comienza con plantear ese sistema de ecuaciones proporcionales que son los axiomas, hoy y al mostrar qué tal sistema de acción más no encierra contradicción, que los axiomas son independientes entre sí, qué son suficientes con una suficiencia tal que el sistema no admite ampliación (...) queda demostrada la *existencia* de objetos que cumplen tal sistema de ecuaciones ideológicas, sin que sea menester buscar y señalar con el dedo qué objetos concretos la satisfacen, pudiéndose dar el caso de que sean varios los sistemas de objetos que los satisfagan. (García, 1944, p. LXXXVI)

En el capítulo II del presente trabajo se abordará con mayor detenimiento cada una de las condiciones que deben de satisfacer los sistemas axiomáticos para Hilbert, además, se abordará las preguntas fundamentales que se hace Hilbert sobre la relación que existe entre la demostración y la verdad, ¿es verdadero todo lo demostrable? Y ¿es demostrable todo lo verdadero?

Adelantando un poco el análisis del capítulo II, “un sistema de axiomas es consistente si no genera contradicciones, si no puede deducirse ninguna contradicción a partir de ellos. También se dice que el sistema de axiomas es, entonces, coherente o compatible.” (Madrid, 2013, p. 39) entonces, ¿era consistente la geometría de Euclides?

Hilbert demostró la consistencia de la geometría euclídea en relación a la aritmética, ofreciendo por vez primera un modelo puramente numérico. Construyó un conjunto de números que satisface todos los axiomas geométricos, donde los puntos son ciertos pares de números algebraicos; las rectas, ciertas ternas de esos números; donde la incidencia de una recta en un punto quiere decir que se verifica cierta ecuación numérica, etc. (Madrid, 2013, p. 40)

En consecuencia de lo anterior, se requiere un análisis más profundo, sobre la no contradicción de los axiomas de Hilbert en la Geometría Euclidiana, para ello se analiza el capítulo segundo de los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert, escrita por García (1944) donde se expresa que los grupos de axiomas ya mencionados, no se contradicen mutuamente, es decir, no existe procedimientos lógicos que conlleve a la deducción de algo que esté en contradicción con los axiomas.

Hilbert presenta la demostración de la no contradicción de su grupo de axiomas en la geometría plana relacionándola con la aritmética, ya que para la geometría del espacio se

pueden tomar las mismas consideraciones sin mayor dificultad; de modo que, la demostración es la siguiente:

Considérese el dominio Ω de todos aquellos números algebraicos que resultan partiendo del número 1 y aplicando un número infinito de veces las cuatro operaciones del cálculo; adición, sustracción, multiplicación, división y además la quinta $\sqrt{1 + \omega^2}$ donde ω designa en cada caso un número obtenido ya por las cinco operaciones. Pensemos un par de números (x, y) del dominio Ω como si fuera un punto y las relaciones de dos puntos cualesquiera $(u: v: w)$ del dominio Ω como una recta, caso de que u, v no sean de vez cero; además el que valga la ecuación

$$ux + vy = 0$$

expresara que el punto (x, y) se encuentra en la recta $(u: v: w)$. (García, 1944, p.17)

Lo anterior permite vislumbrar el cumplimiento del *axioma de paralelismo*⁴¹ (grupo III) y *los axiomas de enlace* 1 y 2⁴² (grupo I), como se dijo anteriormente el dominio Ω está compuesto de números algebraicos los cuales son todos aquellos números reales y por tanto, se pueden ordenar según su magnitud, de modo que si se realiza la misma convención para los puntos y rectas, se logra cumplir también *los axiomas de orden* (grupo II), esto último se presenta en García (1944) como sigue:

En efecto, sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ puntos cualesquiera de una recta; y sea éste su orden de sucesión en la recta, si los números $x_1, x_2, x_3, \dots$, o los $y_1, y_2, y_3, \dots$, tomados en este orden crecen o disminuyen constantemente. (p.17)

⁴¹ En un plano ∞ por un punto A fuera de una recta **a** se puede trazar siempre una y una sola recta que no corte a la recta **a**; tal recta se llama la paralela con **a** por el punto A. (García, 1944, p.11)

⁴² **I.1** Dos puntos diversos A, B determinan siempre una recta **a** y pondremos AB-**a** o bien BA-**a**.

I.2 Dos puntos diversos cuales quiera de una recta determinan esa misma recta; esto es: si AB-**a** y AC-**a**, y B $\neq$ C, será también BC-**a**. (García, 1944, p.4)

Para el axioma 5 del grupo II,⁴³ se debe de asegurar de que todos los puntos (x, y) para los que $(ux + vy + w) < 0$ o $(ux + vy + w) > 0$, han de caer correlativamente en uno de los lados de la recta. De modo que será fácil convencerse que esto concuerda con lo anterior permitiendo así determinar el orden de sucesión de los puntos de la recta.

En García (1944) se presentan las transformaciones de los segmentos y ángulos, tomando en consideración el método conocido de la geometría para el desplazamiento paralelo, se realiza mediante las ecuaciones: $x' = x + a$ y $y' = y + b$.

Si además se designa el punto $(0,0)$ con O, el punto $(1,0)$ con E y un punto cualquiera (a, b) con C, por giro sobre el ángulo $\angle(COE)$ siendo O el punto fijo, el punto arbitrario (x, y) dará el punto

(x', y') poniendo

$$x' = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) x - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) y$$

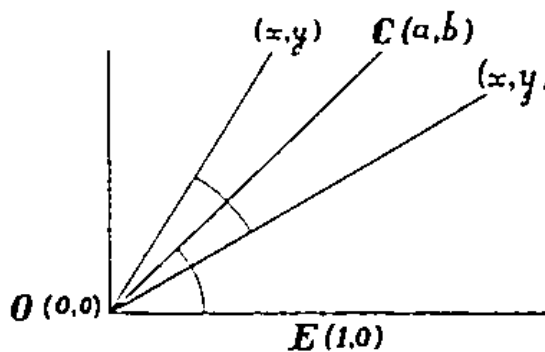
$$y' = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) x + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) y$$

y puesto que el número

$\sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ pertenece al dominio Ω , valdrán con las fijaciones

predichas los axiomas de congruencia grupo IV, y además es claro que se cumplirá el axioma de Arquímedes. (García, 1944, p.18)

Con lo anterior es evidente que Hilbert reduce la consistencia de la geometría euclídea a la aritmética, de modo que, la inconsistencia en el sistema axiomático de la



⁴³ II. 5 Sean A, B, C tres puntos no colocados en línea recta y sea $\mathbf{a}$ una recta en el plano ABC, no tocando tal recta ninguno de los puntos A, B, C; si la recta $\mathbf{a}$ pasa por un punto interior al segmento AB, pasará siempre o por un punto del segmento BC o por un punto del segmento AC. (García, 1944, p.7)

geometría desembocará en una inconsistencia en la aritmética lo que refleja un problema abierto dentro de la fundamentación de las matemáticas, por ende, probar que la aritmética es un sistema formal que no conlleva a contradicciones, será conocido como el segundo problema de los veintitrés problemas más influyentes para las matemáticas en el siglo XX, expuestos por Hilbert en la conferencia de París del *Congreso internacional de matemáticas* de 1900, como se expone en su artículo *From Mathematical problems* (1900b); de este modo, se tiene que la motivación inicial de Hilbert para fundamentar la aritmética, está dada en la solución de la anterior problemática, como se presenta en apartados posteriores del presente trabajo.

Sin embargo, lo anterior no es la única característica distintiva se separa la geometría de Euclides de la Hilbertiana, según García (1944) se pueden evidenciar algunas otras tales como:

- En la geometría de Euclides hay proposiciones en el sentido clásico a saber: “que no sólo enuncian un *contenido*, sino que afirman *ser verdadero o falso*, tendiendo a eliminar de la ciencia toda afirmación de la que no conste su valor de verdad.” (p. LXXXVII) además, las definiciones aseguran la existencia plena del objeto definido, como ya lo hemos expuesto antes; sin embargo, en la geometría euclidiana de Hilbert “No hay en rigor Proposiciones, pues no hay objetos definidos explícitamente de los que puedan formularse predicados que den una proposición verdaderas o falsas.” (p. LXXXVIII)
- Hilbert cuenta con una fundamentación algebraica de la geometría, mientras que para Euclides los elementos algebraicos están implícitos e implicados en lo geométrico mismo; al proporcionar a los objetos geométricos una definición algebraica se reconoce que lo intuitivo está de alguna manera indeterminado. De

modo que, “se rebaja en sus pretensiones científicas o lo sensible y a la intuición sensible, encaminándose ya decididamente a la inteligibilidad intrínseca de la materia para transformarla al entendimiento, a las ideas innatas o a las categorías.”

(p. XIC) por ende,

El grado de definición implícita de los elementos de una ciencia es índice sutil y seguro del grado de visualización que una ciencia ha llegado a adquirir. Y de consiguiente: la ciencia está en nuestros días muchísimo más vitalizada que en tiempos de los griegos que, por otra parte, hoy y no solo por este criterio de la estructura de la geometría vivían extrovertidos, con un mínimo de vida interior. (p. XC)

- En la geometría griega la lógica es una contextura implícita; las nociones comunes pueden funcionar de dos maneras: una proposición estricta, cual premisa de silogismos y otra, por modo de silogismo relacional como ya fue presentado anteriormente, así que más lejos de dar definiciones algebraicas de lo geométrico, la geometría de Euclides se encontraba mucho más distante de las definiciones lógicas de lo geométrico. “La intuición externa de las cosas que era su fuerte y su flaco, desplaza del campo de percepción aspectos que no son directamente intuibles cual los algebraicos y lógicos.” (p. XCI) Pero desde Descartes se tiende a definir las cosas geométricas no por lo que se creía que eran sus géneros propios y diferencias, sino por nociones de “otro” orden, por ejemplo, la definición de lo algebraico no se define por sí mismo o dentro de su mismo orden, sino que asciende a la lógica pura.

A pesar de las diferencias entre estas dos geometrías se ha logrado evidenciar a lo largo del apartado el papel fundamental que la axiomática ha tenido dentro de la fundamentación de la geometría, además, tomando en cuenta que la consistencia de esta

rama de la matemática, Hilbert, la atribuye a la consistencia de la aritmética, entonces ¿cuál es el papel de la axiomatización en la aritmética?

I.2 Pensamiento Axiomático de Hilbert

I.2.1 Métodos de Investigación en Matemáticas: del Método Genético al Método Axiomático de Hilbert

El artículo *Acerca del concepto de número (1900a)* de David Hilbert está irremediablemente ligado a los fundamentos de las matemáticas⁴⁴, si bien el problema de los fundamentos es una parte importante de su obra completa, no constituye un problema de inicio sino por el contrario, se perfila como un problema final y completo de una cuestión más elemental: establecer un criterio certero, general y fructífero en términos de investigación para los contenidos de una rama de las matemáticas, es decir, establecer un *método de investigación* riguroso y lógicamente seguro.

Este problema es abordado con éxito en sus *Fundamentos de geometría (1885)*⁴⁵, en dicha obra Hilbert logra establecer un cuerpo teórico de gran alcance investigativo de todos los hechos geométricos conocidos para la época; el criterio que uso para esa labor fue el *método axiomático*, una elección natural dado que dicho método fue establecido de manera exitosa por Euclides para la geometría, camino que Hilbert recorre, al someter las partes de la axiomática euclidiana a una reformulación y reconocer un estatuto epistémico más elevado para el conocimiento matemático y científico general respecto al ya alcanzado en los *Elementos (300 a.c)*, aspectos que fueron abordados desde el apartado anterior y que se retomarán más adelante.

⁴⁴ Es una problemática abierta en campos de investigación en matemáticas, lógica y filosofía de las matemáticas, que constituye un cimiento adecuado para las teorías más elementales de las matemáticas, con el fin de asegurar el edificio de las matemáticas. Hilbert afirma que “Tenemos la plena confianza de que los fundamentos de las matemáticas pueden ser objeto de una clarificación y un conocimiento plenos, pero también de que, aunque sumamente complicado, el problema de la fundamentación de nuestra disciplina es susceptible de una solución definitiva” (Hilbert, 1922, p.37).

⁴⁵ Monografía que presenta los 21 axiomas para la geometría, organizados en cinco grupos donde el quinto contiene al axioma de Arquímedes, el cual es considerado como una de las mayores contribuciones que Hilbert hace a las matemáticas modernas. Además, esta monografía constituye una de las instancias históricas más influyentes para el método axiomático formal, presentando una nueva manera de concebir la naturaleza de las matemáticas en general, gracias a las ideas metodológicas y fundacionales que allí se plantean.

A partir del resultado alcanzado en este punto con la geometría, Hilbert se plantea la posibilidad de ampliar sus horizontes hacia otra rama de las matemáticas, como la aritmética, tomando en cuenta que,

In geometry, the proof of the compatibility of the axioms can be affected by constructing a suitable field of numbers, such that analogous relations between the numbers of this field correspond to the geometrical axioms. Any contradiction in the deductions from the geometrical axioms must thereupon be recognizable in the arithmetic of this field of numbers. In this way the desired proof for the compatibility of the geometrical axioms is made to depend upon the theorem of the compatibility of the arithmetical axioms.⁴⁶ (Hilbert, 1900b, p.8)

Problema del que se ocupa en los *Fundamentos de las matemáticas* iniciando con su artículo *Acerca del concepto del número* (1900a). Hilbert reconoce allí que históricamente el tratamiento de los fundamentos y la investigación de los objetos de la aritmética, los números, se había realizado de una manera distinta a la geometría, es aquí donde él reconoce la existencia de otro método de investigación en las matemáticas, que llamó *método genético*, el cual se basa en la generación de conjuntos de objetos nuevos, a través de un procedimiento de extensión de propiedades algebraicas y operaciones válidas para un conjunto de objetos iniciales.

Para el caso de la aritmética, el conjunto de objetos iniciales es el conjunto de números naturales (N), y por medio de un procedimiento de extensión de las propiedades

⁴⁶ En geometría, la prueba de la consistencia de los axiomas puede efectuarse construyendo un campo de números adecuado, de modo que relaciones análogas entre los números de este campo correspondan a los axiomas geométricos. Cualquier contradicción en las deducciones de los axiomas geométricos debe ser reconocible en la aritmética de este campo de números. De esta manera, la prueba deseada de la consistencia de los axiomas geométricos se hace depender del teorema de la consistencia de los axiomas aritméticos. (traducción realizada del artículo *From Mathematical problems* por los autores del presente trabajo).

algebraicas⁴⁷ y operaciones (sustracción) se genera un conjunto de objetos nuevos, los números enteros (Z), los cuales *heredan* las propiedades del conjunto inicial y a su vez garantizan la generalidad de las operaciones. La aplicación de este proceso de manera continua y rigurosa, matemáticos como Dedekind y Cantor, habían logrado definir el conjunto de los números reales (R), como el producto último y final de los procesos de extensión de propiedades y operaciones de los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Hilbert estaba al tanto de los logros que por medio del método genético se habían conseguido, en términos de constituir algunos sistemas numéricos y permitir vislumbrar algunos objetos y propiedades relevantes del continuo de los números reales; sin embargo, su experiencia con la geometría le había llevado a tomar una postura crítica frente a los beneficios y el rigor lógico del método genético, “a pesar del gran valor pedagógico y heurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento” (Hilbert, 1900a, p. 18).

Ahora bien, en virtud de lo anterior cabe preguntarse ¿por qué Hilbert prefería el método axiomático sobre el genético para la aritmética? Para aproximar una respuesta es indispensable establecer qué es el método axiomático y cuáles fueron las reformulaciones introducidas por Hilbert. En líneas generales el método axiomático es un procedimiento de investigación que parte de la consideración inicial de la existencia de sistemas de objetos, cuyas relaciones están establecidas por una serie de principios elementales denominados *axiomas*. El conjunto de todos los axiomas se conoce como *sistema axiomático*; a partir de

⁴⁷ En el sistema axiomático de Hilbert para los números reales, estas propiedades están garantizadas por tres grupos de axiomas: conexión, operaciones y orden.

ellos y la aplicación de los principios lógicos y del razonamiento hipotético deductivo, se logran establecer todos los hechos relevantes del sistema de objetos, los cuales se denominan *teoremas*.

Hilbert (1917) introduce una serie de reformulaciones importantes en torno a los axiomas y teoremas, elementos constitutivos del paradigma axiomático euclidiano. Recordemos que Euclides considera los axiomas como verdades sencillas, intuitivas, fundamentales e indiscutibles, es decir, proposiciones tan evidentes que no requieren y no son susceptibles de ser demostradas, en contraposición a los teoremas cuyo valor de verdad está sujeto a una demostración.

No obstante, para Hilbert, si bien un axioma es una proposición intuitiva, fundamental y sencilla, puede ser susceptible de demostración, pues afirma que “(...) nada nos impide tomar como axiomas proposiciones demostrables o proposiciones que pensamos que son susceptibles de prueba. La historia nos ofrece en verdad evidencia clara de lo adecuado de este procedimiento” (Hilbert, 1917, p. 42). Esto pareciera borrar la línea divisoria entre un axioma y un teorema, pero esta aparente semejanza se disipa cuando se constata de que en Hilbert un axioma establece relaciones lógicas fundamentales con el resto de axiomas, es decir, en la conformación de *grupos de axiomas*⁴⁸ que constituyen todo el sistema axiomático; pero que adquiere un carácter elemental cuando establece relaciones lógicas específicas en el interior del sistema axiomático en el momento de constituir los objetos sobre los cuales predicen.

⁴⁸ Los grupos de axiomas estructuran un conjunto de relaciones con una misma naturaleza. Desde un punto de vista epistémico, se puede afirmar que son las estructuras axiomáticas más elementales de un sistema axiomático y posibilitan la obtención y exhibición de una serie de propiedades matemáticas específicas para los objetos definidos por el sistema de axiomas.

En este punto Hilbert introduce una reformulación en relación con axiomática, los objetos matemáticos se constituyen de manera implícita mediante las relaciones que presenta el sistema axiomático, por lo cual se hace innecesario añadir definiciones al sistema. De esta manera, los objetos matemáticos no son introducidos antes que el sistema axiomático, son un producto directo del mismo y mediante este cambio se pone de manifiesto que su existencia está ligada a la certeza lógica del sistema⁴⁹; esto constituye una condición epistémica y ontológica fuerte para la existencia de objetos matemáticos.

Ahora bien, una vez establecidos los aspectos relevantes de la axiomática de Hilbert, se está en condición de abordar las razones por las cuales Hilbert favorece el método axiomático sobre el genético para la aritmética. Desde el punto de vista genético, solo se puede tener un acercamiento individual a los objetos constitutivos del conjunto de números reales, como, por ejemplo, en las construcciones de Dedekind o Cantor, es decir, a partir de conjuntos previos se establece una extensión operatoria que permite la generación del nuevo conjunto numérico que a su vez hereda las propiedades de su antecesor. Dicho proceso, según Hilbert, introduce una serie de incertidumbres epistémicas sobre la validez general de las propiedades fundamentales del conjunto, especialmente, su continuidad, debido a que en los procesos genéticos como las cortaduras o sucesiones fundamentales, se generan de manera individual cada elemento real y por lo tanto, solo contamos con la veracidad de las propiedades para el elemento generado y no para todo el conjunto.

Estos problemas son inexistentes si se considera un sistema axiomático para los números reales, ya que éstos son el producto directo de las relaciones establecidas por el

⁴⁹ Hilbert establece una condición fuerte de existencia de objetos matemáticos a partir de la consistencia del sistema axiomático del cual se originan. Es decir, establece una equivalencia epistemológica entre existencia y verdad matemática.

grupo de cuatro axiomas (conexión, orden, operatorios y continuidad) que constituyen el sistema axiomático para los números reales.

Lo anterior supone un esclarecimiento epistemológico fundamental en tanto que brinda un mayor alcance, en términos de certeza investigativa, en aritmética, al menos en dos sentidos: por un lado, dado que el método axiomático permite considerar la totalidad del conjunto de los números reales como el producto final de un sistema finito y cerrado de axiomas, desde un punto de vista epistemológico, se transita desde la suposición de un conjunto completo de números reales hasta el aseguramiento de la existencia de dicho conjunto, por medio de un criterio de validación con una prueba de consistencia. Por otro lado, el sistema axiomático de números reales ofrece medios de demostración lógicamente válidos, para abordar todos los hechos relevantes de la aritmética en el interior del sistema axiomático, con lo que se posibilita la revisión y aseguramiento lógico de las verdades de la aritmética, en un número finito de pasos.

De modo que, el método axiomático de Hilbert es una plataforma investigativa que permite establecer de manera lógica y segura, la identificación de verdades sobre los números reales y, a su vez, garantizar la existencia de estos objetos como un todo completo y acabado. Claramente esta relación entre las verdades aritméticas, la existencia de objetos matemáticos y la lógica, toman en Hilbert la forma de exigencias lógicas para los sistemas axiomáticos, en términos de dependencia e independencia y consistencia, nociones que serán abordadas más adelante en el capítulo II.

Es importante señalar que la experiencia obtenida por Hilbert en la aplicación de sus axiomáticas para la geometría y la aritmética, le ofrecen los medios necesarios para vislumbrar que, desde un punto de vista epistemológico, el método axiomático tiene un papel fundamental en las matemáticas, así como éstas en el conocimiento científico. A

partir de 1900, Hilbert adelanta una serie de incursiones en varias ramas de las matemáticas y de la física, con el fin de establecer los sistemas axiomáticos apropiados para estas dos disciplinas; dicha labor fue sistematizada en el artículo *Pensamiento Axiomático* (1917), en el cual presenta interesantes observaciones respecto a los efectos del método axiomático sobre algunas ramas de las matemáticas y de la física, principalmente:

- i. *La relativización de los axiomas en relación con la demostración*: una consecuencia directa sobre las teorías de las disciplinas matemáticas y físicas, en el momento de introducir el método axiomático, se presentó en el intento de probar los principios de las teorías, los cuales se tomaban por axiomas; ese proceso solo produjo la generación de unos principios más fundamentales, es decir, aquellos que se constituirán en los verdaderos axiomas.

Estos “axiomas” representan un nivel más profundo en cuanto a principios axiomáticos que los axiomas mencionados en relación a cada una de esas esferas del conocimiento. El procedimiento del método axiomático, tal y como se presenta equivale a una *ubicación más profunda de los fundamentos* de las ciencias particulares. (Hilbert, 1917, p.25)

A pesar del obstáculo hallado para establecer las pruebas de los principios iniciales del sistema axiomático, la obtención de los que ahora se constituyen verdaderos axiomas fue relevante para adelantar investigaciones sobre los fundamentos de las esferas de conocimiento particulares, a través de un sistema axiomático que ofrece la construcción rigurosa de las teorías. Esta relativización de los axiomas en relación con sus demostraciones planteó un escenario fructífero para las investigaciones de Hilbert, pues supuso un primer reconocimiento de la existencia del problema de concretar la noción de

demostración en matemáticas, esto se constituyó en un pilar fundamental de su propuesta fundacionista para las matemáticas.

- ii. *El papel central del método axiomático para ordenar y orientar el aparato conceptual de las disciplinas.* Para Hilbert, las teorías asociadas a las disciplinas científicas particulares poseen dos objetivos: ordenamiento y orientación. El ordenamiento es un proceso de relación y jerarquización lógica entre los componentes básicos de las teorías asociadas a la disciplina científica, lo que permite establecer la arquitectura lógica de la disciplina.

La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una cierta *trama de conceptos* relacionados entre sí, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo de conocimiento de que se trate les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la *teoría* de esa esfera del saber. (Hilbert, 1917, p.23)

Este orden es un proceso que, aunque es sistemático, pasa por una serie de consideraciones importantes, que van más allá de establecer una jerarquía entre los componentes de la teoría, pues son las relaciones lógicas entre los conceptos las que determinan características de la teoría en términos de pertinencia, eficacia, sencillez demostrativa, entre otras que garantizan la orientación.

Por *orientación* se hace referencia a la capacidad de las teorías de establecer la relevancia de sus problemáticas para garantizar el desarrollo posterior de las disciplinas a las cuales se deben. Esta relevancia de una problemática sobre otra está fuertemente vinculada con la arquitectura lógica de la disciplina, pero esta arquitectura no se corresponde únicamente con un esquema interno de relación sino también con uno externo

a la disciplina, de manera que la relevancia de una problemática también está dada en virtud de su importancia para un entramado más general en la teoría del conocimiento científico.

iii. *La axiomática como indicador de madurez de las teorías científicas.*

Según Hilbert (1917)

Todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal de que haya alcanzado un cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático, y, por lo tanto, de las matemáticas. (p. 35)

De manera que la axiomática es una meta necesaria a la que deben llegar las teorías científicas para que éstas gocen de dicho nivel. Este modo de pensar trae consigo una serie de consecuencias importantes, entre las que se destacan dos: en primer lugar, las teorías encuentran un requerimiento formal y homogéneo para lograr obtener el rótulo de disciplina científica avalada: contar con un sistema axiomático asociado a la teoría. En segundo lugar, establece un rol preponderante de la lógica y las matemáticas como plataformas epistemológicas inamovibles en la constitución del conocimiento científico. Así, resulta inviable formular teorías científicas que no sean abordables en términos de una formulación axiomática o de un medio de comprobación lógico – matemático.

iv. *El rol unificador que desempeña la axiomática para la teoría del conocimiento científico.* El método axiomático, en los términos defendidos por Hilbert, no se corresponde solo con un protocolo de presentación, formulación y desarrollo de las teorías científicas. El propósito fundamental que subyace al método axiomático es la de ser una plataforma epistemológica común para la teoría del conocimiento científico.

Esta plataforma epistémica, a su vez, expone una visión de unidad en las múltiples vertientes del conocimiento científico, es decir, presupone la existencia de un marco común

para este, y a su vez, ofrece medios lógicos para establecer dichas conexiones en la conformación de un entramado unificado en términos de ordenamiento y orientación, extendidos hacia todas las teorías científicas, para el cual la lógica y las matemáticas son esenciales.

Capítulo II: Arquitectura Del Proyecto Fundacionista De Hilbert

II.1 Exigencias a los sistemas axiomáticos

Una vez abordado el método axiomático como plataforma epistémica para la constitución del conocimiento científico, se presenta la cuestión acerca de los medios a disposición para adelantar este proceso de constitución. En este punto, la relevancia de la lógica y las matemáticas deben ser tomadas altamente en cuenta, dado que el método axiomático es un producto lógico que encuentra en las matemáticas un escenario ideal para su desarrollo e implementación inicial. De manera que, para asegurar la plataforma epistémica axiomática para la teoría del conocimiento científico, es necesario adelantar dicho trabajo en el marco de la matemática.

Hilbert materializa estos medios de constitución de conocimiento científico, de manera inicial con los sistemas axiomáticos de las disciplinas matemáticas, por medio de la instauración de una problemática que se denominará *garantía axiomática*. Esta garantía se traduce en una serie de exigencias sobre los sistemas axiomáticos, las cuales adquieren un papel fundamental en relación con la *verdad matemática*. De hecho, Hilbert (1917) establece que:

Si la teoría de una esfera particular del conocimiento, esto es, el aparato conceptual que le es propio ha de cumplir sus objetivos de orientación y ordenamiento, debe satisfacer ante todo dos exigencias fundamentales. Debe, *en primer lugar*, proporcionarnos una visión de conjunto de *la dependencia* (o *independencia*) de los enunciados de la teoría; y debe también, *en segundo lugar*, ofrecernos una garantía de la *consistencia* de todos los enunciados de la teoría. (pp. 26 -27)

De manera que, son dos las exigencias sobre los sistemas axiomáticos: análisis de dependencia e independencia y una prueba de consistencia de sus axiomas. Ambas

exigencias están vinculadas, en la propuesta axiomática de Hilbert, con la noción de verdad en matemática y en el conocimiento científico. Son las verdades matemáticas las llamadas a desempeñar un papel central en el proyecto de axiomatización de las ciencias. Resolver el problema del establecimiento de las dos exigencias anteriormente mencionadas, en las matemáticas, supone hallar la base y los medios para hacerlo para el resto del conocimiento científico.

II.1.1 Análisis de Dependencia e Independencia

Consiste en identificar y explicitar las relaciones lógicas de dependencia e independencia que se establecen entre los componentes de la axiomática sometida a análisis. Relaciones que se pueden determinar al menos en tres niveles: el primero de ellos es interno, este busca que en todo sistema axiomático se hagan explícitas los vínculos entre los axiomas que constituyen el sistema. El segundo indaga sobre las relaciones lógicas externas entre los sistemas axiomáticos que pertenecen a una misma disciplina científica. El último, tiene que ver con el establecimiento de las relaciones lógicas externas que sostienen los sistemas axiomáticos que pertenecen a distintas disciplinas científicas.

Nivel 1. Análisis cerrado dentro del sistema axiomático

En este nivel, los análisis de relación lógica de dependencia e independencia se restringen al sistema axiomático. Así, el análisis de *dependencia interna* está relacionado con la exhibición de una prueba dentro de un sistema axiomático T , por medio del cual se demuestre que un axioma A_0 es la conclusión lógica válida de un proceso de inferencias, en las cuales se toma como punto inicial a otros axiomas $A_1, A_2, \dots, A_n$ del sistema T . Por ejemplo, en la axiomática de Hilbert para los números reales, “la existencia del número 1 (axioma I.6) se obtiene a partir de los axiomas I.4, I.5 y II.3, por lo que se encuentra

íntimamente relacionada con la ley asociativa para la multiplicación” (Hilbert, 1900a, p. 20). Se puede apreciar que para Hilbert, el análisis de dependencia cumple una función investigativa importante a fin de establecer relaciones fundamentales entre los objetos y los conceptos de la teoría; en el ejemplo anterior, se logra esclarecer la naturaleza de la identidad multiplicativa con la ley asociativa de dicha operación.

El análisis de *independencia interna* está relacionado con la inexistencia de una prueba en el interior del sistema axiomático T , por medio de la cual se demuestre que un axioma A_0 es la conclusión lógica de un proceso de inferencias, en las cuales se tomaron como puntos de partida otros axiomas $A_1, A_2, \dots, A_n$ de dicho sistema.

Un ejemplo clásico de lo anteriormente dicho es el caso del axioma de las paralelas para la geometría de Euclides, este axioma no es un producto lógico de una prueba en el sistema axiomático de Euclides, ya que “el problema de si el enunciado de las paralelas se encuentra condicionado por los otros axiomas es resuelto ya de manera negativa por Euclides mismo al considerarlo como uno de sus axiomas” (Hilbert, 1917, p. 26). A partir del modelo axiomático de Euclides, en el cual los postulados son verdades evidentes que no requieren de demostración y, por lo tanto, se aceptan por su alto grado de compatibilidad con nuestra intuición; la declaración de Hilbert implica que el axioma de las paralelas no puede ser derivado como producto lógico de una prueba en el sistema axiomático de Euclides que involucre el resto de los postulados.

Lo anterior permite establecer una relación de este nivel con el problema de la *indecibilidad* en la lógica, es decir, dada una sentencia s , se le da el calificativo de indecidible en una teoría lógica T a la circunstancia en la que T no demuestra ni refuta s ; con lo cual se establece que no es posible, a partir de T , demostrar que s es falsa o

verdadera en T . En el caso de la dependencia, estaría vinculado con el caso en que se da la *decibilidad*, es decir, contrario al caso anterior.

A partir de lo anterior, se puede entender como un problema de decibilidad cuando Hilbert (1900a) afirma que:

La ley conmutativa para la multiplicación (axioma II.6) se obtiene de los axiomas I, II. 1-5, III y IV.1, pero no se puede llegar a ella a partir de los axiomas I, II. 1-5 y III. Es decir, el principio se obtiene a partir del resto de los axiomas si y solamente si se añade también el axioma de Arquímedes (axioma IV.1). (P. 21)

De lo anterior, resulta que la ley de conmutatividad para la multiplicación es decidible a partir del sistema axiomático de los números reales propuesto por Hilbert, puesto que, se puede probar con auxilio de los axiomas I, II. 1-5, III y IV.1. Si dicho sistema axiomático careciera del axioma de Arquímedes (IV.1), la ley conmutativa será *indecidable* en dicho sistema, o, en términos de Hilbert, independiente.

De hecho, es importante señalar que es precisamente en esta característica de la existencia de axiomas independientes en las teorías científicas, donde Hilbert rescata el carácter relativo y múltiple de los sistemas axiomáticos, es decir, para una misma teoría científica se pueden establecer más de un sistema axiomático en virtud del análisis de dependencia e independencia de los axiomas.

Nivel 2. Análisis cerrado dentro de una disciplina científica

Establece las relaciones lógicas externas entre los sistemas axiomáticos que pertenecen a una misma disciplina científica. Hilbert (1917) plantea que:

Si en la fundamentación de la teoría de las ecuaciones de Galois consideramos como un axioma la existencia de las raíces de una ecuación, podemos tener la certeza de que lo que obtendremos es un axioma dependiente, pues como Gauss ha mostrado,

toda proposición de existencia es demostrable a partir de los axiomas de la aritmética. (p. 26)

Así, se establecen unas relaciones de dependencia lógica entre los sistemas axiomáticos de la teoría de ecuaciones de Galois con la teoría de los números, ambas teorías en el marco de la disciplina matemática. Este caso, tal como lo muestra Hilbert, no es aislado y se presenta también en otras teorías matemáticas como: la teoría de los números primos en relación con la aritmética. De esta manera, se puede lograr esquematizar las relaciones de dependencia e independencia de los sistemas axiomáticos en el seno de las teorías matemáticas, lo que permite construir una suerte de jerarquización lógica entre las teorías del conocimiento matemático.

Nivel 3. Análisis abierto dentro de las disciplinas científicas

Se pretende establecer un esquema de las relaciones de dependencia e independencia lógico – epistémicas entre las axiomáticas de los distintos campos de la teoría del conocimiento científico. Un caso particular está dado por el axioma de continuidad; este axioma tiene varias presentaciones que dependen de la teoría científica en cuestión. Por ejemplo, en el sistema axiomático de Hilbert para la teoría de los números reales, está compuesto por dos axiomas: IV.1 (Arquímedes) y IV.2 (completitud).

A propósito del axioma IV.1, en el marco de la aritmética se ha establecido su independencia del resto del sistema axiomático. Sin embargo, IV.1 guarda una relación importante con la geometría, en tanto que fundamenta el proceso de medición, razón por la cual se le conoce también como *axioma de la medida*⁵⁰. Así, el axioma de continuidad es

⁵⁰ El *axioma de la medida* o *axioma de Arquímedes* permite definir para cada segmento, de manera única, un número (positivo), que se identifica con la longitud de ese segmento (Giovannini, 2013, p.143).

esencial para establecer una relación lógica, matemática y epistemológica, entre las cantidades numéricas y las magnitudes de los segmentos.

En física Hilbert interpreta el axioma de continuidad como una expresión epistemológica fundamental en la constitución misma de la realidad física observable, en particular a la posibilidad de expresar métricamente distancias por composición.

El hecho de que podamos llegar por composición de distancias terrestres a dimensiones y distancias de cuerpos en el espacio, es decir, el hecho de que con una medida terrestre resulten conmensurables las longitudes celestes y que las distancias en el interior del átomo puedan también ser expresadas con una medida métrica, no es una mera consecuencia lógica de los principios relativos a las congruencias triangulares y a la configuración geométrica, sino que constituyen un resultado de la investigación empírica. (Hilbert, 1917, p.27)

A partir de lo anterior, sitúa el axioma de Arquímedes como una problemática física, al considerarlo un hecho físico que requiere de una constatación experimental, de la misma forma que se corrobora el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo sea equivalente a la medida de un ángulo llano. Es así como el axioma de continuidad en la física⁵¹ parece capturar la esencia misma del proceso de experimentación en la disciplina científica, debido a su relación con la incertidumbre en las medidas y su relación con el proceso de validación empírica.

Una consecuencia epistémica importante de estas reflexiones se halla en la postulación o más bien defensa de la existencia de una teoría unificada del conocimiento científico, es decir, que el conocimiento científico está íntimamente relacionado entre sí, de

⁵¹ Si para la validez de un enunciado de la física se hace necesario un grado arbitrario de exactitud, entonces es posible encontrar intervalos pequeños dentro de los cuales las suposiciones del enunciado pueden variar libremente, sin que la desviación del enunciado supere el grado requerido de exactitud. (Hilbert, 1917, p. 27)

manera que la comprensión de los fenómenos de la naturaleza, está anclada a desentrañar esa unidad como una única realidad cognoscible, de modo que las relaciones lógicas, físicas y epistemológicas de la realidad están íntimamente vinculadas, y para Hilbert, es la ciencia matemática la llamada a establecer y exponer esas relaciones que permitan hallar y reconocer dicha unidad.

II.1.2 Prueba de consistencia

Para Hilbert la *consistencia* es una propiedad que permite establecer el valor de una teoría científica; por valor, él parece aludir a la confiabilidad de las descripciones, análisis, resultados y predicciones sobre los fenómenos y objetos que estudia. Desde el punto de vista lógico, la consistencia está relacionada con la preservación en el entramado conceptual de las teorías científicas, del principio lógico del *tercero excluido*⁵². Cuando este principio no se satisface se tendría que $\sim (s \vee \sim s) \Rightarrow \sim s \wedge s$ Es decir, una *contradicción*. En síntesis, el hecho de que una teoría científica sea consistente garantiza la validez de todo el aparato conceptual que soporta dicha teoría, al dejar por fuera la posibilidad de que existan contradicciones en su desarrollo.

Hilbert comienza por poner de manifiesto un hecho que parece ser paradójico: la consistencia es un requerimiento vital en la constitución y valor de una teoría científica, pero así mismo, se suele ignorar que es una característica que debe ser demostrada, “con frecuencia se considera como algo obvio que una teoría sea consistente. Sin embargo, es necesario llevar a cabo un desarrollo matemático de bastante profundidad para demostrarlo” (Hilbert, 1917, p.28). Así mismo, establece que la determinación de consistencia para un sistema axiomático en el seno de una teoría científica requiere de

⁵² En el interior de un sistema lógico T, para una afirmación s solo se puede presentar uno de estos dos casos: que s sea verdadera o $\sim s$ sea verdadera, sin admitir una tercera opción. Así, en el interior del desarrollo lógico del sistema T se debe cumplir $s \vee \sim s$.

un despliegue matemático de alto nivel, con lo cual la determinación de pruebas de consistencias se perfila como un problema central para las matemáticas, en el aseguramiento del desarrollo axiomático en las distintas disciplinas del conocimiento científico.

Ahora, ¿cuál es la naturaleza del despliegue matemático, que permite dar cuenta de la prueba de consistencia? Según Hilbert, para hallar rutas seguras para la prueba de la consistencia, es importante tener completo el análisis de dependencia e independencia de los sistemas axiomáticos de la teoría, dado que proporcionan las razones epistemológicas y lógicas que dan lugar a dicha prueba. De igual modo, plantea que los requerimientos de consistencia para las teorías científicas son relativos, en función de su naturaleza y el lugar que ocupen en la jerarquía de la teoría del conocimiento científico. Este pensamiento podría enunciarse así: los requerimientos de consistencia de las teorías científicas son directamente proporcionales a la distancia que separe dichas teorías científicas de las teorías matemáticas fundamentales.

Por ejemplo, en el marco de la física las exigencias de consistencia al interior de las teorías conceptuales de las ramas de la física, son de una naturaleza coyuntural, es decir, se espera que la investigación física ofrezca el descubrimiento de principios o fenómenos que entren en contradicción con las teorías y modelos preexistentes, y, a partir de este choque, se inicie un proceso de reformulación axiomática que permita al conjunto teórico de la disciplina física gozar de un nuevo estado de consistencia.

Sin embargo, en las teorías matemáticas el panorama es bastante diferente. Muchas de sus teorías son puramente teóricas y esto supone un proceso de validación que está sujeto a la lógica, donde esta es la realidad metafísica bajo la cual se debe contrastar la consistencia interna y externa de las teorías matemáticas. La aparición de contradicciones

son amenazas letales, que pueden causar el derrumbamiento de todo el desarrollo axiomático, hasta reducirlo a la nada. Un ejemplo de esto último se encuentra en la teoría de conjuntos con *la paradoja del conjunto de todos los conjuntos* de Cantor. A este respecto, Hilbert (1917) afirma que,

La importancia de esta paradoja es tan grande que matemáticos de la talla de Kronecker y Poincaré se vieron obligados a negarle el derecho a la existencia a la teoría de conjuntos en su totalidad, a pesar de constituir esta, en nuestra opinión, una de las ramas más fructíferas y vigorosas de las matemáticas en general. (P. 30)

Sin embargo, para Hilbert la aparición de paradojas en el seno de una teoría no debería conducir de manera radical a la eliminación de dicho desarrollo en el interior de la disciplina matemática, más bien, se debe de proceder a establecer un análisis riguroso respecto a la fuerza e importancia conceptual de la teoría en sí. De esta manera, Hilbert defiende las partes constitutivas de las matemáticas: los objetos, resultados, métodos y teorías que desde la disciplina matemática han permitido grandes avances; no obstante, el contraste de estas teorías es puramente conceptual, de modo que se requiere una garantía de consistencia para éstas. Esta postura proteccionista de las partes constitutivas de las matemáticas, a las cuales Hilbert otorga mucho valor, en función de la potencia para cimentar y edificar las matemáticas, fue un sello característico de todo su proyecto.

Así, Hilbert esboza el camino que veía favorable: establecer una formulación axiomática satisfactoria que conservará la fuerza conceptual de las teorías matemáticas y, a su vez, no incluyeran en su formulación las paradojas que hayan sido identificadas en una etapa de planteamiento inicial. Sin embargo, para las matemáticas esta no es una tarea fácil, debido a que sus teorías puramente conceptuales guardan una jerarquía importante con las

teorías científicas, por tanto, hacer reformulaciones en la axiomática de las matemáticas no será suficiente, para que la jerarquía se mantenga.

De modo que es fundamental exhibir una exigencia de consistencia estructural, que se caracterice por asegurar que, en el seno de las teorías matemáticas, no se presenten contradicciones conforme se avance en el desarrollo axiomático de las teorías, como lo afirma Hilbert (1917), “la exigencia de principio de una teoría axiomática debe, más bien, extenderse hasta el punto de mostrar que las contradicciones resultan *imposibles* dentro de una esfera del conocimiento demarcada por un cierto sistema de axiomas” (p. 30). Y es este precisamente uno de los problemas centrales que encaminó el proyecto fundacionista de Hilbert.

Pensando en las teorías científicas en general, es posible establecer una serie de escenarios que esbozan la implementación del proceso anterior, pasando desde las exigencias “flexibles” a las más “rigurosas”, tal como se presenta:

Escenario I. Consistencia interna de los sistemas axiomáticos de las teorías científicas

Una vez el análisis de dependencia e independencia ha terminado, el estudio de la consistencia interna de los sistemas axiomáticos de las teorías científicas puede tomar dos caminos posibles:

- i. Consistencia interna que se establece de forma externa.*** Son pruebas de consistencia de sistemas axiomáticos que dependen de axiomáticas dentro de la misma disciplina científica, o de axiomáticas de teorías de otras disciplinas científicas.

Por ejemplo, en la disciplina matemática Hilbert (1917) hace alusión al trabajo elaborado en *Los fundamentos de la geometría* respecto a la consistencia de la geometría y

comenta “El procedimiento seguido allí es el de probar que cualquier contradicción que se presente como consecuencia de los axiomas de la geometría, conduce necesariamente a un resultado similar en la aritmética del sistema de los números reales” (p.30). De esta manera, se pone de manifiesto que la prueba de consistencia interna de la geometría se establece en forma externa, en el momento en que se logre probar la consistencia de la aritmética.

ii. Consistencia interna que no se puede establecer de forma externa. Si el camino de la consistencia es interno y no se pueden establecer relaciones externas de ningún tipo para la prueba de consistencia, se habrá llegado a teorías axiomáticas fundamentales de la disciplina matemática.

La prueba de consistencia de teorías matemáticas como la teoría de números enteros y la teoría de conjuntos, no se logra establecer debido a que dichas teorías sólo se podrían vincular con la lógica⁵³, razón por la cual suponen un problema por resolver.

Escenario II. Aquí se identifican dos caminos

(i) Reducción de las teorías científicas a la consistencia externa de teorías elementales de las matemáticas. Establecer la relación de dependencia con las teorías matemáticas más cercanas al aparato conceptual de la teoría científica; luego, llevar a cabo i del escenario I, es decir, la búsqueda de pruebas internas de consistencia en las teorías matemáticas elementales.

En la matemática se tiene el caso de la teoría de números reales: “El problema de la consistencia de un sistema de axiomas para los números reales remite al problema

⁵³ Hilbert reitera la importancia de la lógica para el problema de la consistencia, pero se distancia de los logicistas al no defender que sólo la lógica es capaz de brindar una prueba de consistencia para toda la disciplina matemática, más bien opta por un punto de vista complementario, es decir, se requiere de la lógica pero también de nociones intuitivas propias de la disciplina matemática, a partir de esta idea se desencadena la creación de la metamatemática, “debido al estrecho vínculo y al carácter insoluble de las verdades aritméticas y lógicas resulta necesario llevar a cabo una construcción simultánea de la aritmética y de la lógica formal” (Hilbert, 1922, p.59).

correspondiente en relación a los números enteros. Este es un resultado de las teorías de Weierstrass y Dedekind para los números irracionales” (Hilbert, 1917, p.31).

(ii) No viabilidad de reducción de las teorías científicas a la consistencia externa de teorías elementales de las matemáticas. Este caso nos lleva a la variante “ii” del escenario I, y supone un problema abierto fundamental, dado el carácter inevitable de una demostración de consistencia para algunas teorías matemáticas elementales.

Para Hilbert, las segundas variantes de los escenarios I y II suponen un único y verdadero problema por resolver para establecer una prueba definitiva de la consistencia de las matemáticas y por ende de las teorías científicas. Esto, en virtud de que la consistencia de las teorías matemáticas e inclusive de las teorías físicas, estaba resuelta bajo la premisa de asegurar la consistencia de estos sistemas axiomáticos, razón por la cual probar que en efecto los sistemas axiomáticos son consistentes supondría la conclusión de esta labor.

Las reflexiones de Hilbert respecto a esta problemática le llevarían a dar un salto enorme en su proyecto axiomático para las matemáticas y las ciencias; orienta el núcleo de sus reflexiones en busca de establecer un nuevo campo de las matemáticas e identifica una serie de problemáticas abiertas, a partir del cual pretende zanjar las relaciones específicas y definitivas entre la lógica y las matemáticas; se plantea una plataforma epistémico – ontológica adecuada para el aseguramiento de la verdad matemática, la existencia de los objetos matemáticos, a través de una investigación profunda de la noción de la demostración.

II.2 Formalismo

II.2.1 Desenlace del Problema de la Fundamentación de las Matemáticas

La problemática anterior ha tenido un fuerte reconocimiento en la filosofía de las matemáticas, no obstante, en la época antes de Hilbert no se vislumbra una solución clara y efectiva, con un enfoque estrictamente matemático. Según Hilbert (1922) un ejemplo de esta problemática es el intento de fundamentar la teoría de los números y el análisis en la teoría de conjuntos, dentro de la lógica. Tanto Frege⁵⁴ como Dedekind⁵⁵, han querido ofrecer una fundamentación de la aritmética, recurriendo a la lógica por un lado y a la teoría de conjuntos por el otro; no obstante, el fuerte impacto que esta problemática tuvo en la aritmética ha llevado a que se presenten críticas modernas para el análisis matemático, sin embargo, como afirma Hilbert (1922):

Esta crítica no "desemboca", como quiere Weyl, "en el caos y el vacío", sino más bien por una parte, en teorías (particularmente las de Zermelo y Russell) de gran profundidad y que se encuentran provistas de una base axiomática y, por la otra, en un desarrollo idóneo del llamado cálculo lógico, cuyas ideas se han convertido con el tiempo en un instrumento absolutamente imprescindible para la investigación lógico-matemática. (P. 43)

⁵⁴ Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) es considerado como el fundador de la lógica moderna y el precursor del logicismo por presentar la tesis central de esta corriente filosófica. "La tesis fundamental del logicismo es: la Matemática se reduce a la Lógica. Para probar su tesis, los partidarios del logicismo desarrollaron inmensamente la lógica, dotándola de un algoritmo simbólico parecido al del álgebra y de métodos supremamente potentes de análisis, que permitieran definir las expresiones matemáticas en términos lógicos." (Fonseca, 1984, p.72)

⁵⁵ Richard Dedekind (1831-1916) considerado como uno de los pioneros de la teoría de conjuntos como una rama de la matemática, desarrolla la base de su pensamiento en su texto *¿Qué son y para qué sirven los números?* "El pensamiento matemático de Dedekind giraba alrededor de la idea de que la matemática era la ciencia de los números, cuyo soporte lo constituía la noción de conjunto. Para Dedekind un conjunto era una noción lógica. La lógica, a su vez, era la ciencia que daba cuenta de las leyes del pensamiento. El programa matemático de Dedekind, era entonces, un programa logicista." (Reclade, 2018, p.346)

De esta forma se plantean las problemáticas generales, que han surgido en la búsqueda de unos fundamentos de las matemáticas. Para Hilbert, esto solo se puede lograr a través de la solución del *problema de la consistencia* de los axiomas del análisis. “Al ofrecer una demostración de este tipo, estaríamos constatando al mismo tiempo el carácter indubitable y definitivo de los teoremas matemáticos, un hecho que por su naturaleza filosófica general resulta de gran interés y significación” (Hilbert, 1922, p. 43).

Tomando en cuenta el problema planteado por Hilbert, es importante saber que la función de las inferencias lógicas en esta nueva propuesta es distinta a su función en la lógica, es decir, aquí las inferencias lógicas no serían por sí solas la base firme que brinda seguridad a los sistemas axiomáticos; lo que se hace “como medida previa a la aplicación de inferencias y operaciones lógicas es la existencia en la representación, como algo dado, de ciertos objetos extralógicos discretos. Intuitivamente presentes antes de cualquier pensamiento como vivencia inmediata” (Hilbert, 1922, p. 44).

Los objetos *extralógicos discretos* que se mencionan serán los *signos* dentro de la matemática de Hilbert. El signo es “algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de manera segura, puede ser identificado” (Hilbert, 1922, p. 45).

Estos objetos son susceptibles de una visión global y completa de todas sus partes, además de que su extensión y postulación dentro de las teorías matemáticas y en general, de todo el pensamiento científico, deben ser intuitivas. Estas son las ideas filosóficas que hasta ahora Hilbert nos ha presentado, sin embargo, esta filosofía va en contraposición con las opiniones de Frege y Dedekind, por tanto, serán tema de discusión posteriormente.

II.2.2 Plataforma Formalista de Hilbert

En la filosofía propuesta por Hilbert se da inicio a la caracterización del *signo concreto*, ya que estos son los objetos de la teoría más elemental de las matemáticas: *la aritmética*. Observando la tabla 1, se encuentran dos subcategorías para estos signos: *los numerales* o *signos numéricos* y los *signos de comunicación*, además, se identifica la función de cada uno de estos signos concretos dentro de esta teoría elemental.

Tabla 1

Signos concretos dentro de la teoría elemental de los números

Tipos de signos	Forma	Descripción o función
Numéricos (numerales)	1, 1+1, ... a, b, c	Constituyen estrictamente números.
comunicación	2, 3, 4, ... =, >	Su función es comunicar (extensiones o igualdades) y no representan fórmulas ⁵⁶ dentro de la teoría.

Conviene subrayar que los signos de la tabla 1 no constituyen en sí mismos ningún axioma o contradicción dentro de la teoría de los números, es decir, solo nos sirven para operar y hacer afirmaciones concretas. Probar que $a + b = b + a$, dentro de esta teoría no sería más que un proceso de composición y descomposición de signos numéricos, y esto difiere con el principio de *inducción matemática*, que resulta ser clave para la aritmética.

Los signos de la tabla 1 entonces resultan ser insuficientes para dar cuenta de la totalidad de las matemáticas, y es precisamente aquí cuando Hilbert establece que la fundamentación del análisis desde el enfoque presentado, requiere de fórmulas reales y no de comunicaciones concretas como en el caso de la teoría de los números; no obstante, si se

⁵⁶ $b > a$ no es entonces una fórmula sino tan sólo la comunicación de que el numeral b es más extenso que el numeral a.

piensa este enfoque desde un nivel “superior” se llega a los objetos que fundamentan el análisis.

En este último enfoque,

(...) los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de una teoría matemática constituyen propiamente el objeto de una investigación concreta. Para este fin debemos reemplazar las argumentaciones concretas normales en una teoría matemática por fórmulas y reglas, representarlas por medio de formalismos. Es decir, es necesario llevar a cabo una formalización estricta de la totalidad de la teoría matemática que incluya sus demostraciones de tal manera que tanto las inferencias como la construcción de conceptos en ella sean integrados, siguiendo el modelo del cálculo lógico-matemático, como elementos formales al edificio matemático. (Hilbert, 1922, pp. 47-48)

Es así como los axiomas, las fórmulas y la demostración serán la fuente para hacer consideraciones concretas dentro del análisis, además, las inferencias y las construcciones provenientes de ellas deben de ser incluidas dentro de la base de la teoría. Es precisamente en este punto donde Hilbert hace la demarcación estricta y sistemática, sobre la fórmula y la demostración por una parte, y los argumentos y las condiciones concretas por otra.

En conclusión, se exhibe el proyecto formalista así: primero se pretende formalizar, es decir, presentar el *enfoque formal* que se propone para fundamentar las matemáticas, de modo que se exhiban los signos que permiten obtener la totalidad de las matemáticas. Segundo, se esboza la solución del problema inicial relativo a *la demostración de la consistencia* de los axiomas de la aritmética y el análisis.

II.2.2.1 Enfoque Formal

Para Hilbert (1922) la tabla 2 presenta los signos de la totalidad de las matemáticas.

Tabla 2

Signos del formalismo de Hilbert para las matemáticas

Tipos de signos	Forma	Descripción o función
I. Individuales (generalmente letras griegas)	a) $1, +$	a) Constituyentes de los numerales.
	b) $\varphi(*), \psi(*)$	b) Funciones de <i>individuos</i> con un lugar vacío.
	c) $\sigma(*, *), \delta(*, *)$	c) Funciones de funciones de individuos.
	d) $\varphi(1), \varphi(a)$	d) Funciones particulares de única variable.
	e) $\sigma(\varphi, *)$	e) Composición de funciones particulares.
	f) $=, \neq, >$	f) Signos matemáticos: igualdad, desigualdad y mayor que.
	g) Z, Φ	g) Predicados sobre individuos: Z (Ser un número), Φ (ser una función)
	h) $\rightarrow$	h) (Implicación) signo lógico.
	i) $()$	i) Cuantificador lógico: cuantificación universal (un paréntesis izquierdo y uno derecho con una variable entre ambos).
II. Variables (Letras latinas)	a) $a, b, c, d \dots$	a) Variables primitivas (<i>variables de números reales</i>)
	b) $f(*), g(*)$	b) Variables funcionales, variables de función de función.
	c) $f(a)$ $f(\varphi(*))$	c) Variables que indican cualquier función de individuos con un lugar vacío.
	d) $g(f(a))$ $g(\sigma(*, *))$	d) <i>Variables que indican cualquier función de función.</i>
	e) $A, B, C, D \dots$	e) Variables para fórmulas (<i>son variables para las implicaciones entre fórmulas elementales, fórmulas variables y fórmulas de implicación, ej. $A = Z(a) \rightarrow Z(a)$; $B = A \rightarrow A$</i>)

III. Comunicación	a) a, b, c, ...	a) Funcionales (ej. $a = a$, $b = \varphi(a)$)
	(letras góticas) b) A, B, R, ...	b) Fórmulas (ej. $A: B \rightarrow C$, $B: R \rightarrow S$, $C: a = b$)

¿Cómo se trabaja con estos signos? Según Hilbert (1922) las categorías I y II serán las únicas que hacen parte del cálculo matemático, es decir, son las encargadas de constituir la estructura formal de las matemáticas, mientras que la III solo se encarga de comunicar argumentos y consideraciones concretas, son *signos de abreviación*⁵⁷ y, por tanto, resultan necesarios exclusivamente en la operación concreta de las demostraciones formales.

Entre la última categoría, existen unos signos que son importantes para crear fórmulas y llevar a cabo las demostraciones, estos son los *funcionales* (III. a). Una funcional es un signo complejo formado solamente por los signos I. (a-c) y II. (a-b). Adicionalmente los signos “formales” se pueden yuxtaponer y esto llevaría a la creación de *cadena*s y estas a su vez también se pueden yuxtaponer formando así *figuras*.

Sin lugar a dudas, Hilbert tiene razón cuando argumenta que la caracterización de los signos es un paso importante para las matemáticas, sin embargo, también manifiesta que no es posible que las teorías científicas sólo se queden con dicha caracterización, estas tienen que dar un salto significativo hacia la axiomática; en el caso particular de las matemáticas es necesario incluir *axiomas* en sus teorías dominantes (por ejemplo, el análisis real).

Ahora, los *axiomas* no son más que ciertas *fórmulas* que sirven como base para el edificio formal de las matemáticas. Las *fórmulas* no son más que *cadena*s de signos de la tabla 2. A partir de Hilbert (1922), fue posible realizar una categorización de las *fórmulas matemáticas*, como se presenta en la tabla 3.

⁵⁷ La introducción de estos signos es de vital importancia para la construcción de significado en las matemáticas.

Tabla 3

Fórmulas matemáticas de Hilbert

Tipo de Fórmula	Forma	Descripción o función
<i>Elemental</i>	a = b	A ambos lados del signo = o del signo $\neq$ y al predicado Z se le coloca una funcional.
	a $\neq$ b	
	Z (a)	
<i>Implicación</i>	a = b $\rightarrow$ c = d B: B $\rightarrow$ C	Si a ambos lados del signo lógico de implicación (I.h) colocamos una fórmula elemental o una fórmula variable (II.e).
<i>Fórmula</i>	B: R $\rightarrow$ S	Cadena resultante al colocar una fórmula elemental, de implicación o variable (II.e) a ambos lados de implicación.

El manejo de los axiomas dentro de la teoría debe de ser mediado por una serie de reglas que serán importantes para el desarrollo de las matemáticas, según Hilbert (1922) los signos individuales (I) no pueden ser objeto de un reemplazo y las variables primitivas (II.a) pueden ser reemplazadas por cualquier funcional.

Es común dentro de las matemáticas hacer uso de los paréntesis para hacer abreviaciones, aclaraciones, sustituciones, entre otros. En el enfoque formal los paréntesis sirven para separar partes de signos, para indicar lugares libres y para la sustitución de cadenas, además, dan cuenta de un signo lógico: el *signo de cuantificación universal* (I.i).

A propósito del manejo y alcance del *signo lógico* (I.i) Hilbert (1922) hace la siguiente aclaración: “El segmento de fórmula que sigue al cuantificador y que, en general contiene esa variable se delimita por medio de un paréntesis especial que indica claramente el alcance del cuantificador” (p. 51). De este modo, el cuantificador universal requiere de un manejo especial, mediado por tres reglas que Hilbert (1922) presenta de la siguiente forma:

- i. Una variable en una fórmula se encuentra libre si no se encuentra un signo de cuantificación en esa fórmula. Podemos siempre anteponer a una fórmula un signo de cuantificación con una variable libre; la totalidad de esa fórmula constituye entonces el alcance de ese cuantificador. Por el contrario, podemos prescindir de un signo de cuantificación cuyo alcance es el resto de la fórmula. (p. 51)
- ii. Una variable que se encuentra dentro de un signo de cuantificación puede ser reemplazada en ese sitio y en la fórmula afectada por ese cuantificador por cualquier otra variable que no aparezca en esa fórmula. (p. 51)
- iii. Dos signos de cuantificación yuxtapuestos y con el mismo alcance pueden intercambiarse entre sí. (p. 51)

En consecuencia, del estudio sobre el uso de los signos y los axiomas en las matemáticas resulta necesario presentar la forma cómo se introducen los *teoremas* que se relacionan con las operaciones elementales de las matemáticas: identidad, asociatividad, sucesor, simplificación, transitividad, entre otras. Sin embargo, para esta tarea primero es importante dar cuenta de todos los axiomas que le permitan al formalismo llegar a una demostración de los teoremas en las matemáticas y es por ello que es indispensable precisar el uso de los axiomas y explicar con más profundidad lo que para Hilbert será una demostración “formal” en matemáticas.

De esta manera, se aborda primero el punto sobre la demostración “formal” para llegar a una caracterización más profunda del axioma. Para Hilbert (1922),

Una *demostración* es una figura que se presenta ante nosotros de manera intuitiva.

Una demostración consta de inferencias justificadas por el esquema

$$\frac{S}{S \rightarrow T}$$

T

donde cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas **S** y **S** $\rightarrow$ **T** es un axioma (es decir, se obtuvo directamente de un axioma por sustitución) o coincide con *fórmula final* de una inferencia previa en la demostración, o bien resulta de una fórmula final por sustitución. (p. 53)

De lo anterior se infiere que las *fórmulas demostrables* son: axiomas, sustitución de un axioma, una fórmula final de una demostración previa o sustitución en una fórmula final. Estas inferencias nos llevan a recordar el principal objetivo del enfoque formalista de Hilbert, ya que si los axiomas son considerados como fórmulas demostrables, entonces, es posible dar cuenta de la consistencia de los axiomas que viven dentro de una teoría; sin embargo, esto no es tan sencillo; por tanto, lo que hasta aquí se tiene son fórmulas que son afirmaciones positivas dentro de una teoría. Aquí las contradicciones no podrían existir, es decir, “podríamos aceptar, aparte de $1 = 1$, $1 = 1 + 1$ como fórmula, con tal de que ésta se estableciera como una fórmula demostrable por medio de las reglas de inferencia” (Hilbert, 1922, p. 54).

¿Será necesario dar un carácter formal a las contradicciones concretas dentro de una teoría? Según Hilbert (1922), sí sería necesario y es justamente el signo de *desigualdad* (I.f); dicho signo tendrá un papel especial dentro de las teorías matemáticas porque permitirá la introducción de axiomas que lo contengan, siempre y cuando se establezca la consistencia del sistema axiomático en cuestión. De modo que, un sistema es *consistente* si en él no se puede encontrar a la vez fórmulas demostrables **a = b** y **a $\neq$ b**.

Aunque comprender y hacer uso del signo *desigualdad* (I.f) para dar cuenta de la consistencia de un axioma, fórmula o teorema dentro de un sistema axiomático parezca sencillo, no lo es. La consistencia requiere de algo más, ese algo Hilbert lo ha denominado

metamatemática, esta no es más que la teoría encargada de estudiar la demostración como objeto fundamental de su teoría, de modo que permite dar cuenta del lugar y del sentido de las consideraciones y las argumentaciones concretas, dentro de la matemática, y por ende dentro del enfoque formal expuesto.

II.2.3 La metamatemática o teoría de la demostración

La teoría de la demostración que plantea Hilbert (1922) debe satisfacer el método axiomático para las teorías del conocimiento científico, de la misma forma como se trabajó para el análisis real; de este modo, se inicia con la demostración de las operaciones matemáticas elementales dentro de la teoría, tomando en cuenta que las operaciones matemáticas ahora incluyen el axioma cuyo signo de comunicación es la *desigualdad* y prescinden de la *asociatividad*, en virtud de su sencillez.

La demostración de estos axiomas u operaciones no es difícil de comprender, lo importante es tener presente los siguientes *lemas* que se llevan a cabo en las demostraciones⁵⁸:

Lema 1. Una fórmula demostrable puede contener el signo $\rightarrow$ dos veces como máximo.

Lema 2. Una fórmula $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ es demostrable sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son el mismo signo.

Con la demostración de la validez del lema 2, Hilbert (1922) ha reducido el problema de la consistencia del sistema axiomático de la siguiente manera: con los axiomas y los lemas anteriores se puede demostrar que nunca se podrá tener como fórmula demostrable: $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}$ donde $\mathbf{a}$ es un funcional.

⁵⁸ La demostración de los lemas no se llevará a cabo en este trabajo por razones de orden práctico, para una mayor profundización ver Hilbert (1922) pág. 55-57.

Por lo anterior, Hilbert logra demostrar la consistencia de los primeros siete axiomas⁵⁹, que constituirán tan solo una parte de la aritmética que se necesita para la metamatemática, los cuales cuentan con signos matemáticos (I. f) y el signo lógico de implicación (I. h).

Los axiomas anteriores incluyen el signo matemático (I. f) el cual no representa problema alguno para la teoría, dado que, al incluir la desigualdad entre los axiomas, Hilbert (1922) sólo está representando desde lo concreto la negación formal única de la igualdad, además, este signo sólo se usa para la prueba de la consistencia del sistema.

Es sabido que introducir una formalización de la operación lógica de la *negación* no es una tarea fácil, sin embargo, en los *fundamentos de la lógica* Hilbert ha caracterizado el signo ($\neg$) como el signo lógico para la negación, pero, a diferencia del anterior, este puede traer consecuencias ontológicas para la teoría de la demostración. Por tanto, esta operación lógica se discutirá a profundidad en la parte tres de este capítulo.

Hasta aquí, la teoría de la demostración carece de una representación directa y segura de la negación lógica, lo que nos lleva a tener cuidado con el uso de conceptos lógicos, tales como: “todos” y “existe”, dado que es común en la lógica argumentar que el segundo no es más que la negación del primero y viceversa.

Hilbert (1922) afirma que el “todos” está en la teoría gracias al cuantificador universal y sus reglas dentro de las teorías matemáticas, y el “existe”, como expresión formalizada, “se logra introduciendo signos de función individuales por medio de una especie de definición implícita, esto es, produciendo realmente “lo que existe”” (Hilbert, 1922, p. 58).

⁵⁹ Ver Hilbert (1922) pág. 57

No obstante, lo anterior será discutido con más profundidad en el ítem *Lógica e intuición*. Por ahora, volvamos al objetivo de fundamentar las matemáticas recordando los dos escenarios vistos y que son consecuentes entre sí.

Escenario I.

Todo aquello que hasta ahora ha constituido a las matemáticas reales se convierte en objeto de una formalización estricta; *las matemáticas reales*, esto es, las matemáticas en un sentido estricto se convierten de esa manera en un conjunto de fórmulas demostrables. (Hilbert, 1922, p. 59)

Aquí las fórmulas contienen signos matemáticos (I. f), signos lógicos (I. h-i) y los signos para enunciados (III), de modo que sustenta la existencia de una relación estrecha entre aritmética y lógica. De modo que Hilbert (1923) ha mostrado la importancia de llevar a cabo una construcción simultánea de la lógica formal y la aritmética.

Escenario II.

A esta matemática real debe añadirse una nueva matemática, una *metamatemática*, cuya función es asegurar a la primera, protegiéndola tanto del terror de las prohibiciones innecesarias como de la preocupación de las paradojas. En contraposición a los principios deductivos puramente formales de las matemáticas reales, en la metamatemática se utiliza la inferencia concreta, por ejemplo, para el establecimiento de la consistencia de los axiomas. (Hilbert, 1922, p. 59)

En consecuencia, el desarrollo de la matemática debe desarrollarse en la perspectiva de dos objetivos: primero, obtener nuevas fórmulas demostrables a partir de los axiomas y

las inferencias formales⁶⁰. Segundo, introducir axiomas al sistema junto con su prueba de consistencia, mediante inferencias concretas⁶¹.

Tomando en cuenta los escenarios I y II, Hilbert se dispone a dar una nueva fundamentación de las matemáticas que lleve consigo todo lo anterior. Como se ha señalado antes, los primeros siete axiomas cuyo carácter es puramente aritmético, no son suficientes para fundamentar la matemática. Por tanto, es necesario en primer lugar, introducir el signo lógico de función Z (ser entero racional positivo). Segundo, utilizar el signo -1 en vez de δ (*). Tercero, eliminar los axiomas 3-5 por ser ahora fórmulas demostrables (teoremas), llegando así a ocho principios que serán los axiomas de la aritmética (axiomas 2, 16-23)⁶². Cuarto, introducir nuevos axiomas con variables relativas a fórmulas (III. b); y es así como Hilbert introduce los axiomas 8 (*de la igualdad matemática*), 9 (*de la inducción completa*), 10-13 (*de la inferencia lógica*) y 14-15 (*de la desigualdad matemática*).

Un sistema conformado de esta manera, es decir, un sistema que conste de los axiomas 1,8-23 permite establecer, mediante la simple aplicación de las reglas que hemos expuesto, esto es, formalmente, la totalidad de las fórmulas y teoremas de la aritmética. (Hilbert, 1922, p. 61)

Sin embargo, el objetivo de Hilbert es dar una prueba de la constancia de este compendio de axiomas 1, 8-23, este camino es viable siempre y cuando se haga uso del *principio lógico del tercero excluido* para totalidades infinitas. Es decir, es mediante la

⁶⁰ Los axiomas y teoremas, esto es, las fórmulas que surgen en estas transformaciones son las representaciones [Abeldar] de las ideas que constituyen los procedimientos utilizados hasta ahora en las matemáticas, sin constituir ellos mismos verdades en un sentido absoluto. (Hilbert, 1922, p. 65)

⁶¹ Como verdades absolutas han de considerarse más bien los resultados relativos a la demostrabilidad ya la consistencia de esos sistemas de fórmulas que se obtienen gracias a mi teoría de la demostración. (Hilbert, 1922, p. 65)

⁶² Ver (Hilbert, 1922, p. 61)

demostración de este principio que es posible una fundamentación segura y satisfactoria de la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos, pero esto no resulta una tarea fácil.

II.2.4 Obstáculo Lógico en el Desarrollo de la Metamatemática

A pesar de las ventajas que ofrece la metamatemática para la fundamentación de la matemática y principalmente, de la aritmética y el análisis, los axiomas que constituyen para Hilbert todo el cuerpo de la aritmética presentan todavía un problema epistémico fuerte: garantizar la consistencia de este sistema axiomático. Hilbert hizo varios intentos para dar solución a dicho problema epistémico, por ejemplo, partir de la demostración del *principio del tercero excluido* para dar solución a la problemática principal de su proyecto:

(...) la demostración de la aplicabilidad del principio lógico del tercero excluido a totalidades infinitas de números, funciones o funciones de funciones para inferir que una afirmación es válida para todos esos números, todas esas funciones o todas esas funciones de funciones, o que necesariamente existe entre estos objetos uno (un número, una función o una función de funciones) para el que la afirmación resulta falsa, constituye, sin embargo, una tarea inconclusa. (Hilbert, 1922, p. 61)

Es así como el esclarecimiento epistemológico del principio del tercero excluido por medio de la metamatemática fue necesario para intentar desbloquear la fundamentación completa de todas las matemáticas, aunque este sea un camino inconcluso todavía.

II.3 Lógica e Intuición

Como se ha observado, hasta el momento para lograr el proyecto de fundamentación de las matemáticas, en los términos de Hilbert, esté ha tenido que plantear una serie de preguntas y respuestas en torno a las formas en que las matemáticas, como ciencia central y primordial, en la jerarquía epistémica de las ciencias, deben de expresarse en términos de presentación, investigación, alcance y certeza. Es bajo estas condiciones, que se ha adelantado una serie de preguntas claves y a su vez, se esbozan las respuestas desde la perspectiva de Hilbert, como se abordará posteriormente.

¿Cuál es el sistema de expresión y desarrollo idóneo para las disciplinas matemáticas? La axiomática; pero no cualquier axiomática: una que por un lado establece una noción moderna de la naturaleza del axioma y los sistemas axiomáticos y por otro lado, posiciona a los sistemas axiomáticos como productos de un proceso estricto de *ordenación y orientación*, lo que a su vez conduce a una serie de exigencias lógicas estrictas, es decir, el análisis de dependencia e independencia y exhibir una prueba de consistencia.

No obstante, establecer la consistencia de los sistemas, esto es demostrar que en el seno de un sistema axiomático es imposible que surja una contradicción, resultó ser un problema de mayor envergadura, incluso para la más sencilla pero central disciplina matemática, la aritmética, de modo que ¿cómo es posible asegurar la consistencia de la aritmética y con ella, la del edificio de las matemáticas? Desde el punto de vista de Hilbert, se debe adelantar un proceso de formalización estricto, este proceso que en principio parece ser una solución de orden sintáctico al despojar de ambigüedades semánticas a las partes constitutivas de la disciplina matemática, por medio de la *traducción* directa a un *sistema simbólico específico*.

Lo anterior expone una respuesta profunda sobre cuál es la naturaleza de la demostración en matemáticas y cómo se pueden asegurar las matemáticas como disciplina, es decir, sus resultados, métodos y en general sus partes constitutivas por medio del desarrollo de una nueva disciplina la *metamatemática*, la cual, establece una unión epistémica entre las matemáticas y la lógica, para soportar tanto el sistema simbólico de la formalización, como los métodos de demostración al interior del sistema formal de las disciplinas matemáticas así constituido.

A pesar, de que el formalismo⁶³ Se constituye como una plataforma viable, al poner en el centro de la problemática de fundamentación, la noción de demostración matemática surgió un inconveniente con uno de sus baluartes: *el principio del tercero excluido*. Es decir, establecer la naturaleza de este principio, con el fin de establecer su correcta aplicación dentro del formalismo de la metamatemática, lo cual permite formular la pregunta ¿Cuál es el problema que subyace al *principio del tercio excluido* y cuál es su solución dentro del formalismo de la metamatemática?

II.3.1 Una formulación de las matemáticas: formalista, segura, finitista e inconclusa

A partir de su formalismo, Hilbert fue capaz de formular un sistema axiomático a partir del cual “(...) es posible obtener la teoría elemental de los números, sin que para ello se tenga que recurrir a modos de inferencia dudosos o de alguna manera problemáticos” (Hilbert, 1923, pp. 66-67). Este sistema está conformado por los siguientes axiomas:

⁶³ Respuesta lógico-matemática para la viabilidad de la prueba de consistencia de las disciplinas matemáticas.

Tabla 4

Axiomas de la teoría elemental de los números según Hilbert.

Tipos de axiomas	Nº del axioma	Nombre del axioma	Representación lógica
I. Axiomas de la implicación	1	Adición de una suposición.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
	2	Supresión de suposiciones.	$\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$
	3	Intercambio de suposiciones.	$\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
	4	Eliminación de proposiciones.	$(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
II. Axiomas de la negación	5	Ley de contradicción.	$A \rightarrow (\underline{A} \rightarrow B)$
	6	Principio del tercero excluido.	$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\underline{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}$
III. Axiomas de la igualdad	7		$a = a$
	8		$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$
IV. Axiomas numéricos	9		$a + 1 \neq 0^{64}$
	10		$\delta(a + 1) = a$

Este sistema formal de cuatro grupos de axiomas posee una serie de características deseables en términos de seguridad y certeza, la más importante es la que Hilbert menciona como la carencia de *modos de inferencia dudosos o de alguna manera problemáticos*; entonces ¿a qué se refiere con modos de inferencia dudosos y porque son en todo caso problemáticos? Es posible esbozar una parte de la respuesta haciendo énfasis en la descripción de las características del sistema anterior.

⁶⁴ En relación al axioma 9 es necesario tener presente que la negación formal de $a=b$, se escribe también $a \neq b$. y que, además, $a + 1 \neq 0$ es la negación formal de $a + 1 = 0$.

Con base en los axiomas 1-10 es fácil obtener todos los números enteros positivos, lo mismo que las ecuaciones numéricas válidas que a ellos se refieren. A partir de estas bases y haciendo uso de una lógica "finitista" al realizar consideraciones puramente intuitivas (entre las que, sin duda, hay que contar a la recursión y a la inducción intuitiva para totalidades finitas). (Hilbert, 1923, p.66)

De modo que para Hilbert, lo que permite darle una calidad de segura en este punto del desarrollo, a la teoría de los números enteros positivos a partir del sistema axiomático formal de la tabla 4, es el hecho de que cuenta con una lógica finitista e intuitiva; estos términos parecen estar directamente ligados a la cardinalidad de las totalidades sobre las cuales las inferencias son aplicadas, en otras palabras, la seguridad de los modos de inferencia están involucrados en función de si estos son utilizados en totalidades finitas o infinitas.

Lo más importante aquí es que Hilbert establece un estándar de seguridad, fiabilidad y certeza respecto a los sistemas matemáticos, vinculados directamente con las condiciones de finitismo e intuición⁶⁵, esto es, que en procesos como la recursión o la inducción se tenga un acceso individual a los objetos que componen el sistema matemático, es decir, se obliga a una *concreción* de esos objetos. Así, al adelantar procesos como la recursión o la inducción de manera finita, se garantiza la existencia individual de esos objetos por medio de su concreción, en otras palabras se alcanza una certeza epistémica fundamental de esas entidades, por medio del acceso a las mismas.⁶⁶

⁶⁵ La condición de que las existencias sean finitas obliga adelantar *consideraciones puramente intuitivas*.

⁶⁶ Dicha certeza epistémica está dada por la corriente intuicionista, ya que "para los intuicionistas, la existencia matemática de un objeto está supeditada a la exhibición de un proceso constructivo. Esto es, la exposición de una secuencia finita que solo haga uso de la recursión propia del proceso de contar que se da en los números naturales" (Recalde, 2018, p.381).

Ahora, sobre el sistema de axiomas de la tabla 4, Hilbert (1923) afirma que “Los teoremas obtenidos de acuerdo con este punto de vista tienen, todos ellos, un carácter finitista. Es decir, puede llegarse concretamente a los pensamientos que representan, sin recurrir a ningún axioma, considerando solamente totalidades finitas” (p.67). Lo anterior establece un limitante importante, al uso de los axiomas y las implicaciones de su uso en cuanto a la concreción de los pensamientos que representan, es decir, los objetos y sistemas matemáticos tras el formalismo estricto, el uso de los axiomas oscurece la certeza epistémica de la concreción anteriormente señalada, de hecho, el uso de los axiomas es evitable en el proceso de investigación de las propiedades de los sistemas matemáticos si estos tienen como base totalidades finitas, de manera que, la importancia de los axiomas en el escenario de la metamatemática, está en el terreno de aseguramiento de los objetos y el sistema matemático en las totalidades infinitas.

Por supuesto, si Hilbert hubiera deseado constituir a partir de la metamatemática un sistema matemático exclusivamente finitista, intuitivo y concreto, habría tomado el sistema axiomático (tabla 4) y hubiera adelantado n recursiones como n inducciones intuitivas, edificando así los teoremas para los números enteros positivos.

Sin embargo, Hilbert reconoce que a pesar de la seguridad de ese proceso, esa matemática con base en una lógica finitista está inconclusa, y debe ser superada

En la teoría de la demostración queremos, además, ir más allá de la esfera de la lógica finitaria y obtener aquellos teoremas que representan a los teoremas transfinitos de la matemática usual. En nuestra opinión, la verdadera fuerza y validez de la teoría de la demostración se pone de manifiesto precisamente porque con ella nos resulta posible dar una prueba de consistencia, una vez que hemos aceptado ciertos axiomas adicionales de carácter transfinito. (Hilbert, 1923, p.67)

De modo que, a pesar de la seguridad que ofrece en términos epistémicos en función de la concreción y el acceso a los objetos que componen el sistema numérico, el sistema finitista formal de los axiomas (tabla 4) no permite establecer una prueba de consistencia para todo el sistema numérico, al interior de la metamatemática, es decir, no podría garantizar la validez de sus propiedades como un todo formal. De manera, que Hilbert entiende que existe un problema de concreción de segundo orden, en otras palabras el problema de la concreción formal del sistema numérico de los enteros positivos como un todo y evidencia que el problema está en legitimar una lógica transfinita, esto es una lógica aplicable a cantidades infinitas, para lo cual, su solución es la introducción de una serie de axiomas que compartan dicha naturaleza transfinita.

II.3.2 ¿Cuándo se trasciende por primera vez la esfera de lo finito y nos adentramos en la esfera de lo infinito?

Para entender, el problema de la legitimación de la lógica transfinita y a su vez, poder abordar con más detenimiento la introducción de los axiomas de naturaleza transfinita, que como ya se ha observado, son un paso más en la meta de establecer la prueba de consistencia de la aritmética, es importante abordar la naturaleza de lo transfinito. Cuando Hilbert, hace mención a lo transfinito, lo hace como una figura de la transformación, transición y el tránsito de lo finito a lo infinito, y de la cual como metáfora no aceptaría un puente ni cualquier medio material que suponga una transición continua, en caso tal, dicha figura de tránsito sería un salto “¿en qué momento se trasciende por primera ocasión la esfera de lo intuitivo y finito? Evidentemente, cuando nos servimos de los conceptos “todo” y “existe”” (Hilbert, 1923, p.67).

Hilbert, señala que la transición de lo finito a lo infinito, viene acompañada de una ruptura sutil en apariencia pero agresiva en consecuencias, respecto a la intuición: el uso de

los cuantificadores para “todo” y “existe” al momento de predicar, es de uso común tanto en el lenguaje natural como en el formal, y no parece ser bajo una primera mirada un verdadero inconveniente al menos en el lenguaje natural, pues, es una evidencia física que las totalidades sobre las que se predica son finitas. Sin embargo, en el lenguaje formal en la disciplina matemática, se evidencia una ruptura, al momento de atender la interpretación de estas predicaciones sobre totalidades infinitas, al menos en cuanto a lo que la intuición como guía de proceso de veracidad tiene para ofrecer. Se procederá a analizar esta idea con mayor detalle.

Hilbert, hace hincapié que en los conceptos "todo" y "existe", se encuentran encapsulados procesos de orden lógico, por medio de los cuales se ancla un proceso de inspección y selección de existencias. Así pues

Lo característico de estos conceptos es lo siguiente. La afirmación de que todos los objetos de una totalidad finita dada de la que se puede tener una visión completa poseen una cierta propiedad es equivalente a la yuxtaposición de varios enunciados particulares por medio de la palabra “y”. Afirmar que todos los asientos de este auditorio son de madera equivale a decir: este asiento es de madera y ese asiento es de madera y ... y el asiento de allá es de madera. (Hilbert, 1923, p.67)

De manera análoga, la afirmación de que en una totalidad finita existe un objeto con una cierta propiedad es equivalente a una composición de enunciados particulares por medio de la palabra “o”, Por ejemplo, el enunciado de que entre estas tizas hay una roja equivale a decir: esta tiza es roja o esa tiza es roja o ... o esa tiza de allá es roja. (Hilbert, 1923, p.67)

Por el momento la exposición de los procesos en el "todo" y "existe", se ha mantenido para cantidades finitas. Se señala que en ambos conceptos, se presentan de

manera sobrepuesta un proceso de inspección y selección de existencias, que en el caso del “todo” se corresponde con una operación de conjunción y en el caso del “existe” es una disyunción. Es importante, por consiguiente, señalar que existe un soporte concreto para la inspección y la selección de los objetos sobre los que se predica, es decir, la intuición válida el acceso a estas existencias, debido a que son parte de una totalidad finita, de manera que es posible aludir a un proceso de soporte o asociación incluso física, para dar cuenta de la inspección y selección sin importar si es una conjunción o disyunción.

Tomando en consideración, lo anteriormente expuesto, Hilbert (1923) añade a las predicaciones con el “todo” y “existe” en totalidades finitas una formulación del principio del tercero excluido

(...) o bien todos los objetos poseen una cierta propiedad o bien existe entre ellos uno que no la posee. Al mismo tiempo utilizando los signos corrientes de cuantificación universal y existencial - “para toda a ”: (a) ; “no para toda a ”: $(\underline{a})$; “existe una a ”: (Ea) ; “no existe ninguna a ”: $(\underline{Ea})$ obtenemos la validez estricta de las equivalencias:

$$(\underline{a})A(a) \text{ equiv. } (Ea)\underline{A}$$

$$(\underline{Ea})A(a) \text{ equiv. } (a)\underline{A}(a)$$

Donde $A(a)$ representa un enunciado con una variable a , esto es, un predicado”.

(pp.67-68)

En la anterior formulación del principio del tercero excluido para totalidades finitas, se pone de manifiesto, cómo esa calidad de validez estricta tanto del principio como de las equivalencias formuladas, se establece en función de que los procesos de inspección y selección en totalidades finitas, dan cuenta de una concreción del contenido de los enunciados cuantificados, es decir, de una exhibición intuitiva de los objetos; así, la

negación del para todo respecto a un predicado de una variable, es equivalente a la existencia (exhibición) de un elemento que no cumple el predicado, de modo que, la equivalencia se sustenta en función de la posibilidad intuitiva de señalar, exhibir, concretar y acceder tanto a todos los elementos como a uno particular en las totalidades finitas.

¿Cuál es el estado de esta posibilidad intuitiva de acceso concreto cuando trascendemos a totalidades infinitas? Hilbert (1923), señala que existe un gran descuido en la forma como se hace uso de estos cuantificadores al momento de predicar sobre totalidades infinitas

Ahora bien, es usual en las matemáticas suponer sin más la validez de estas equivalencias, inclusive cuando se habla de totalidades infinitas de individuos. Con ello, sin embargo, hemos abandonado el terreno de lo finito, adentrándonos en la esfera de los modos de las inferencias transfinitas. (p.68)

El punto central de Hilbert (1923), está en hacer relevante el hecho de que los modos de inferencia usuales en matemáticas se soportan en términos de legitimidad cuando estos son capaces de conservar las características finitistas, intuitivas y concretas que son tan naturales al momento de cuantificar predicados sobre totalidades finitas. No obstante, en la práctica científica matemática, ha preponderado a manera de paradigma, dar por ciertas esas características al cuantificar predicados sobre totalidades infinitas, sin percatarse de que al trascender la esfera de lo finito, los modos de inferencia finitos dan un salto y se ven ahora mutados en modos de inferencia transfinitos, sobre los cuales no se puede dar por sentado, ninguna de las consecuencias ya estudiadas en las inferencias finitas.

Algo semejante ocurre con la exigencia de la consistencia de los sistemas axiomáticos de las disciplinas matemáticas, no se puede dar por sentado la conservación o

el cumplimiento de la propiedad, se debe adelantar un análisis que permita desentrañar la naturaleza tras los modos de inferencia y a partir de éste, esbozar una forma de garantizar la conservación de las propiedades en totalidades infinitas. Además, de manera coincidente tanto para adelantar una prueba de consistencia de la disciplina matemática, como para desentrañar la naturaleza de estos modos de inferencia transfinitos, Hilbert (1923) afirma que su metamatemática puede proporcionar la solución

(...) cuando en la esfera de lo infinito utilizamos sin reparos de ninguna índole un procedimiento válido en el terreno de lo finito, lo que estamos haciendo es, en realidad, abrir de par en par las puertas para que en nuestras consideraciones se deslicen errores. (...) no deben ser tratados como si fueran finitos, a no ser que la teoría de la demostración lo permita. (p.68)

Al inicio de este apartado, se prometió dar cuenta de la siguiente pregunta ¿Cuál es el problema que subyace al principio del tercero excluido y cuál es su solución dentro del formalismo de la metamatemática? Pues, bien, ya estamos en calidad de dar cuenta de la primera parte de ella. El problema con el principio del tercero excluido radica en su libre aplicación sobre totalidades infinitas, lo cual implica que las propiedades, equivalencias y resultados obtenidos a partir de modos de inferencia finitos, deben ser reexaminados en función de la transición a los modos de inferencia transfinitos.

Para empezar es importante analizar las equivalencias lógicas anteriormente mencionadas, al ser establecidas en totalidades infinitas

Cuando se considera una infinidad de objetos, ni la negación del juicio general $(\forall x)Ax$ ni la negación del juicio existencial $(\exists x)Ax$ tienen en principio, un contenido preciso. En ocasiones, sin embargo, pueden adquirir un sentido, por ejemplo, cuando la afirmación $(\forall x)Ax$ es contradicha por un contraejemplo, o cuando a partir

de la suposición $(a)Aa$ o de $(Ea)Aa$ se deriva una contradicción. Sin embargo, estos casos no se oponen por contradicción, pues aunque $A(a)$ no sea válido para toda a todavía no sabemos que realmente haya un objeto con la propiedad $\underline{A}$. Por razones análogas, tampoco podemos decir sin más que o bien $(a)Aa$ es válido, o bien que $(Ea)Aa$ lo es, o bien que estas afirmaciones exhiben realmente una contradicción. Las expresiones "hay" y "se presenta, aparece" tienen obviamente el mismo significado cuando se habla de totalidades finitas. En relación a totalidades infinitas solamente el segundo de estos conceptos tiene cierta claridad. (Hilbert, 1923, p.68-69)

Hilbert (1923) señala en esencia dos problemas epistémicos pero de naturalezas distintas, existe un problema de orden intuitivo, a saber la imposibilidad de concretar de manera general el contenido de los predicados cuantificados sobre totalidades infinitas así como sus equivalencias, es decir, no se satisface la propiedad de concreción general característica en los modos de inferencia finitos y con ello se pierde la calidad intuitiva y segura de sus resultados y procedimientos. El otro problema es de orden lógico, se hace inviable adelantar juicios de validación de los predicados cuantificados sobre totalidades infinitas, es decir, se hace inviable garantizar la validez del predicado e incluso evidenciar una contradicción en caso de hallar una.

Al final, con el señalamiento de estos dos problemas epistémicos dentro de lo intuitivo y la lógica, estamos en condición de abordar la segunda parte de nuestra pregunta inicial⁶⁷; la solución a esta debe poseer una serie de características, en relación a lo planteado por Hilbert: En primer lugar, proveer a los modos de inferencia transfinitos de

⁶⁷ ¿Cuál es el problema que subyace al principio excluido y cuál es su solución dentro del formalismo de la metamatemática?

una condición de seguridad y certeza equiparables a los modos de inferencia finitos, es decir, en términos de intuición, finitud y concreción. En segundo lugar y como consecuencia de lo anterior, solucionar los dos problemas epistémicos anteriores.

Dicha solución, es como ya se había señalado anteriormente, la introducción de una serie de axiomas de naturaleza transfinita, lo cual demarca en Hilbert la forma como pretende dar seguridad y certeza a los modos de inferencia transfinita. Sin embargo, cuando se habla de los modos de inferencia transfinita, hasta el momento solo se menciona el principio del tercero excluido, pero este, no es nada más que uno de los modos más esenciales y antiguos de esta clase “Estos se designan en el lenguaje corriente por medio de frases como *“todos”, “hay”, “tercero excluido”, “inducción completa”, “principio de Aristóteles”, “de la existencia”, “de la reducción”, “de la completud” y “de elección”*” (Hilbert, 1923, p.69).

Hilbert (1923) identifica en todos los anteriores un núcleo epistémico común que determina la naturaleza de los modos de inferencia transfinitos, de hecho se sirve del tercero excluido y de los cuantificadores “todo” y “existe”, para exhibir el problema intuitivo y lógico a resolver, pero así mismo, hace uso de los modos de inferencia finitos para exhibir las características que debe imitar lo transfinito: intuitivo, finitista y concreto.

Es en este punto, en donde la forma como Hilbert, plantea la solución es: preservar lo intuitivo y lo concreto por medio de una formalización metamatemática del núcleo epistémico común de los modos de inferencia transfinitos, es decir, la inserción de un axioma de naturaleza transfinita y asegurar el finitismo de los procesos, al establecer un número finito de estos axiomas y con ello, que las inferencias en un proceso de demostración sean finitas.

II.3.3 Axioma V: Axioma de transfinitud

Hilbert (1923), hace uso del trasfondo del principio de elección, para darle forma al núcleo epistémico común de los modos de inferencia transfinitos y a partir de este, concretar el axioma de transfinitud

Voy a servirme de la idea que subyace al principio de elección para introducir una función lógica $\tau(A)$ o bien $\tau(A(a))$, que asigna a cada predicado $A(a)$, esto es, a cada enunciado con una variable a , un objeto definido $\tau(A)$. Más aún, esta función τ debe satisfacer el siguiente axioma $A(\tau A) \rightarrow A(a)$.

Expresado en el lenguaje común este axioma nos dice que cuando un predicado A se aplica al objeto τA , también se aplica a todo objeto a . La función τA es una función individual definida de una sola variable A de predicados. Podemos llamarla la función transfinita, dando al mismo tiempo al axioma, el nombre de *axioma de transfinitud*. (Hilbert, 1923, p.69)

A partir de lo anterior, es de relevancia abordar en qué sentido la formulación del axioma de transfinitud, permite capturar los elementos que ofrecen seguridad y certeza a las inferencias transfinitas. Al centrar la atención sobre la función transfinita, se puede determinar que existe un propósito de concreción en su interpretación, es decir, se pasa de tener un predicado A de una variable⁶⁸ a un objeto matemático concreto, o sea τA , que da cuenta del conjunto ligado al predicado A .

Desde la perspectiva anterior, τA es una concreción individual del conjunto ligado al predicado A , de manera que al momento de iniciar un proceso de inferencia sobre los elementos en A , no es necesario recurrir a recursiones e inducciones infinitas, por el

⁶⁸ Un conjunto infinito de valores a determinados por la propiedad A .

contrario, se pasa a examinar solo el elemento τA . Por tanto, la función τA es una representación epistemológica concreta del conjunto infinito A , que permite en primera instancia abordar un proceso de inferencia lógica transfinita sobre los elementos de A desde una plataforma concreta, intuitiva y finitista por medio del elemento formal τA . En palabras de Hilbert (1923)

Para aclarar su contenido, tomemos, por ejemplo, en lugar de A el predicado “ser sobornable”. Tenemos entonces que τA designa a una persona definida, con un sentido de la honestidad tan inquebrantable que del hecho de que ella resultase sobornable se seguiría que toda persona lo sería igualmente. (p.69)

A partir de lo anterior, es posible comprender que el principal objetivo de Hilbert con la introducción del axioma V de transfinitud era introducir un objeto formal por medio del cual se solucione el problema de la inspección de propiedades sobre los infinitos elementos de un conjunto, y más bien solo se requiera de la inspección de dicha propiedad sobre un objeto definido a partir del cuál la inspección sobre él bastará para dar cuenta de todo el conjunto infinito. Así pues, Hilbert establece el axioma V de transfinitud como el origen de todos los conceptos, principios y axiomas transfinitos; y a partir de él logra establecer equivalencias lógicas con los cuantificadores existencial y universal, de modo que, formula el principio del tercero excluido para totalidades infinitas.⁶⁹

Llegados a este punto, es importante ofrecer una idea concreta acerca de las conclusiones a las cuales Hilbert había llegado al lograr solucionar el problema de la fundamentación de los procesos transfinitos que involucran la capacidad de demostración de proposiciones sobre totalidades infinitas.

⁶⁹ El desarrollo de la prueba que demuestra el principio del tercero excluido para totalidades infinitas excede los propósitos de este trabajo, y puede ser consultado a modo de esbozo en el artículo *Los fundamentos lógicos de las matemáticas* de Hilbert (1923).

Para empezar, es importante mencionar que la solución al problema de la veracidad de las proposiciones sobre cantidades infinitas se da en el marco de la teoría de la demostración y que la teoría de la demostración además de funcionar como una disciplina que se nutre de los procesos y el lenguaje de la lógica por medio de la introducción, como objetos lógicos, de conceptos y procesos estrictamente matemáticos da cuenta de la forma como nuestro pensamiento se constituye como fuente fiable y capaz de validar el conocimiento. A decir verdad, la fundamentación de la matemática para Hilbert, es paralela a la fundamentación del pensamiento humano y de esta manera, demanda a la metamatemática la tarea de fundamentar los aspectos de las matemáticas bajo los criterios mismos del funcionamiento del pensamiento humano, tal como menciona Hilbert (1923)

Nuestro pensamiento es finito, y cuando pensamos tiene lugar un proceso finito. Esta verdad, evidente en sí misma, se incorpora en la teoría de la demostración de la siguiente manera. Si en algún sitio surgiera una contradicción, al tiempo que nos percatamos de ella, tendría que realizarse una elección correspondiente entre la totalidad infinita de cosas involucradas en ella. De acuerdo con esto, en la teoría de la demostración no se afirma que pueda encontrarse siempre un objeto entre la infinidad de objetos, sino tan solo que puede procederse siempre sin riesgo de error, como si, en efecto, se hubiera llevado a cabo la elección. (p.74)

Con lo anterior, Hilbert (1923) destaca la valía de la introducción de la función τA y más aún la importancia de establecer la teoría de la demostración como un soporte análogo a la forma como el pensamiento humano procede, en donde el infinito que llamamos actual no tiene cabida y por lo tanto, los pilares del proceso de verificación deben caracterizarse por ser finitos, verificables y concretos. Desde ese punto de vista, el ejercicio de fundamentación de Hilbert, se caracteriza por brindar la infraestructura lógico-matemática

(Es decir, su teoría de la demostración) que permita anclar una plataforma epistemológica en las matemáticas que garantice soluciones de naturaleza finita, verificable y concreta en el seno de los más importantes elementos y procedimientos de naturaleza transfinita en la disciplina matemática.

Por supuesto, dicha infraestructura, al intentar replicar el éxito en términos de veracidad y comprobación epistémica de los procesos lógicos en cantidades finitas, los toma en su forma axiomática y más bien les añade los axiomas y las fórmulas transfinitas

(...) de manera análoga a como en la teoría de los números complejos a los elementos reales se añaden las imaginarias. Se puede, en verdad, afirmar que en la teoría de la demostración el éxito de esta manera de proceder es el mismo que en los casos mencionados, a saber: la simplicidad y el carácter deductivamente cerrado de la teoría. (Hilbert, 1923, p.74)

Al final de ese proceso, se espera contar con el sistema axiomático definitivo formado por los axiomas finitos y transfinitos que son capaces de dar cuenta de todos los elementos y procedimientos que constituyen las matemáticas, de manera que sobre ellos no quede duda alguna acerca de su segura y fiable aplicabilidad en los ámbitos científicos del pensamientos.

II.4 Hallazgos posteriores (1926 a 1930)

Es de conocimiento general que el infinito está presente en la disciplina matemática principalmente de dos formas: primero, en la constitución de objetos, fórmulas y resultados de gran valor para la constitución y desarrollo de la disciplina matemática; segundo, en modos de inferencia que validan resultados. Pero esta presencia del infinito en la disciplina matemática ha generado un problema, donde la resolución a dicho problema es un paso crucial para poder establecer un fundamento seguro a las matemáticas en general. Principalmente al poder garantizar la seguridad de los resultados y modos de inferencia que tienen en su constitución interna algún aspecto del infinito.

Asegurar el infinito permite asegurar la certeza de las demostraciones y mediante estas, los modos de inferencias problemáticos y en conclusión garantizar las verdades de la ciencia matemática, Hilbert (1926) plantea dos aspectos de este problema, donde se tiene el infinito potencial (productos de totalidades infinitas) y el infinito actual (producto de la operación de paso al límite) para este último plantea una resolución donde “debemos mostrar que el infinito, en tanto que totalidad infinita, tal y como ésta se pone de manifiesto en los principios de inferencia usuales, es algo meramente aparente.” (p.84)

Es decir, el carácter aparente de lo infinito como totalidad, está dado por el hecho de que su base está dada por procesos finitos que dan cuenta de las mismas implicaciones y resultados; es decir, se busca la legalización del infinito como totalidad a partir de relaciones finitas, donde Hilbert (1926) afirma que, “es esta precisamente la intención principal de mi teoría. Es decir, mi teoría se propone como objetivo central conferir una seguridad definitiva al método matemático, una seguridad a la que el periodo crítico del cálculo infinitesimal no pudo llegar.” (p.84) durante todo su artículo se dispuso a trabajar su objetivo llegando a la conclusión que,

El infinito no tiene ningún tipo de realidad, no existe en la naturaleza ni es aceptable como fundamento de nuestro pensamiento intelectual. Es decir, en relación al infinito se da una notable y armonía coincidencia entre el ser y el pensar. (...) existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que resultan imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta. Las operaciones con el infinito necesitan para ser seguras de una base finita.

El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de está, como un concepto de la razón que supera toda experiencia y por medio del cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad. pero a la vez el infinito es una idea en la que podemos confiar sin reservas en el marco de la teoría que acabo de delinear. (Hilbert, 1926, p.121)

Posteriormente Hilbert en su artículo *Lógica y conocimiento de la naturaleza* de 1930, expone dos ideas centrales: primero, abordar el viejo problema filosófico de la controvertida cuestión sobre la participación del pensamiento, por una parte, y la experiencia, por otra, en el conocimiento; segundo, determinar a partir de la respuesta al problema filosófico anterior el carácter general de nuestro conocimiento en la ciencias naturales, así como el sentido en que el conocimiento que recopilamos en la empresa científica es verdadero.

Para su primera idea concluye que el conocimiento tiene tres fuentes principales: La experiencia, la lógica (Razón Pura) y el a priori; la constitución del conocimiento requiere de la participación sinérgica de experiencia y pensamiento, estas relaciones se pueden evidenciar al menos desde tres perspectivas distintas: Análisis del infinito, Unidad y Armonía preestablecida (*estructuralismo*). De estas tres la más importante es la Armonía

preestablecida, pues da cuenta de un papel crucial desempeñado por las matemáticas en la relación naturaleza – pensamiento, entre la experiencia y la lógica.

Sin embargo, para el aseguramiento de origen de los marcos teóricos es indispensable y necesario, el reconocimiento de lo a priori. “El a priori es nada más y nada menos que una perspectiva fundamental, o la expresión de ciertas precondiciones indispensables del pensamiento y la experiencia” (Hilbert, 1930, p. 1161).

No obstante, el a priori hilbertiano es homólogo al kantiano en principio

Así, la idea más general y fundamental de la epistemología kantiana conserva su significado: a saber, el problema filosófico de determinar esa perspectiva intuitiva, a priori y, por lo tanto, de investigar la condición de posibilidad de todo conocimiento conceptual y de toda experiencia. (Hilbert, 1930, pp. 1161-1162)

El a priori hilbertiano, es consecuencia de una crítica al a priori kantiano, que tiene como puntos de partida los resultados indiscutibles en el marco de la ciencia moderna a finales del siglo XIX e inicios del XX, así como de avances igualmente valiosos dados en este periodo en la ciencia lógica (en parte a investigaciones de la mano de Hilbert).

Esta crítica hilbertiana al a priori kantiano, se puede poner de esta manera en establecer límites al desbordado a priori kantiano, dado que aún conserva muchas concepciones, ideas y prejuicios que dan cuenta del carácter humano de la percepción del mundo, pero que no estaban justificados por la ciencia de manera adecuada. De esta forma, con el conocimiento científico – lógico adecuado, Hilbert fue capaz de brindar el enfoque a priori definitivo y pertinente para las matemáticas y la ciencia en general: a priori finitista.

Para su segunda idea central se concluye que el carácter general de nuestro conocimiento está garantizado por el enfoque a priori finitista, lo cual da el soporte necesario y correcto para el establecimiento del método axiomático en el seno de las teorías

científicas. Un análisis adecuado del pensamiento axiomático, revela que las matemáticas cumplen un rol fundamental, en el empalme entre naturaleza y pensamiento, tal como lo sugiere Hilbert (1930)

El instrumento que media entre la teoría y la práctica, entre el pensamiento y la observación, es la matemática; construye los puentes de conexión y los hace cada vez más sólidos. Así sucede que toda nuestra cultura moderna, en la medida en que se basa en la penetración y utilización de la naturaleza, tiene su fundamento en las matemáticas. (p.1163)

La fortificación de esto es el fenómeno de la armonía preestablecida, el cual da cuenta de relaciones trascendentales, que sólo la matemática puede dar cuenta.

De esta manera, como Kant menciona en el artículo de Hilbert (1930) “Sostengo que en cada ciencia natural particular, la cantidad de matemáticas que contiene es igual a la cantidad de ciencia genuina que podemos encontrar en ella”. (p. 1164) de modo que, el sentido en que el conocimiento que recopilamos en la empresa científica es verdadero, está dado precisamente por el desentrañamiento de la armonía preestablecida en el núcleo de las teorías científicas.

Conclusiones

Como se presenta a lo largo de este trabajo el objetivo general era indagar acerca de los aportes epistemológicos presentes en el programa formalista de Hilbert en las matemáticas e identificar en estos, elementos que permitan fortalecer la labor docente donde se ven involucrados sistemas axiomáticos y formales.

Para cumplir con lo anterior fue necesario hacer una comparación entre las axiomáticas de Euclides e Hilbert, tomando en cuenta que en un momento de la historia Hilbert se interesa por la fundamentación de la geometría dejando de lado la teoría de los números, evidenciando que el interés de Hilbert por axiomatizar la geometría euclidiana, se debe a que en Euclides no se vislumbra completamente el establecimiento del mínimo de suposiciones del cual se pueda derivar toda la geometría, además, de realizar definiciones de objetos geométricos para garantizar su existencia dentro de la teoría.

De este modo Hilbert (1900b) manifestó que cuando se dedica a la investigación de la fundamentación de una ciencia cualquiera que sea se debe de establecer sistemas de axiomas que contengan una descripción exacta y completa de las relaciones existentes entre las ideas elementales de la ciencia. Por ende, los axiomas así establecidos son al mismo tiempo las definiciones de dichos elementos y en ningún momento un elemento o enunciado podría ser considerado correcto a menos que se pueda derivar por medio de un número finito de pasos lógicos con la ayuda de los axiomas ya planteados en la base de la ciencia.

Por tanto, la llegada de Hilbert a la fundamentación de la geometría fue de gran impacto en la fundamentación de las matemáticas del siglo XX, ya que para garantizar la existencia de ciertos entes geométricos sólo es necesario formular axiomas que cumplirán

las condiciones ideológicas fijadas, las cuales con: independencia, consistencia y completitud.

De esta manera Hilbert (1900b) se plantea la pregunta sobre si ciertos enunciados de axiomas individuales dependen o no unos de otros y si los axiomas, por lo tanto, no contiene ciertas partes en común, que se deben aislar si se desea llegar a un sistema axiomático que sea totalmente independiente entre sí. Adicional a lo anterior, para garantizar la consistencia del sistema axiomático de la geometría propuesto por Hilbert, este le atribuye un papel fundamental a la aritmética, donde la consistencia del sistema axiomático de la aritmética garantiza la consistencia de la fundamentación de la geometría, por medio de su método axiomático.

En consecuencia y tomando en cuenta que Hilbert le ha concedido a la aritmética este rol tan importante en la fundamentación de las matemáticas, surge la pregunta ¿el sistema axiomático de la aritmética es consistente? Donde la solución a esta pregunta constituye uno de los problemas más influyentes del siglo XX planteados por Hilbert y que hasta el momento según diversas investigaciones se tiene soluciones parciales dado que es complejo establecer sistemas consistentes, finitistas y axiomáticos, lo cual se espera para la solución del problema N°2 de Hilbert el cual consiste en probar que los axiomas de la aritmética son consistentes.

Con el propósito de avanzar en la solución de este problema fundamental, Hilbert empieza su estudio en la fundamentación de la aritmética, como fue presentado en el capítulo II del presente trabajo, donde se presenta el sistema axiomático y además, del análisis de las condiciones que este debe de cumplir, llegando así a que el análisis de la dependencia e independencia en el sistema axiomático, se realiza en tres niveles: cerrado

dentro del sistema axiomático, cerrado dentro de una disciplina científica y abierto dentro de las disciplinas científicas.

Para la prueba de consistencia esta se puede trabajar en dos escenarios, primero el de la consistencia interna de los sistemas axiomáticos de las teorías científicas ya sea de forma externa o las que no se pueden de forma externa. Segundo, reduciendo las teorías científicas a la consistencia externa de teorías elementales de las matemáticas y la no reducción de las teorías científicas a la consistencia externa de teorías elementales. Sin embargo, la garantía de consistencia es un problema mucho más complejo donde Hilbert manifiesta que la solución de este problema daría fin al problema de la fundamentación de las matemáticas.

Por ende según Hilbert (1922) al llegar a una demostración de este tipo, se estaría constatando el carácter indeducible y definitivo de los teoremas matemáticos, lo cual resulta de gran interés y significado en la naturaleza de la filosofía en general. Lo cual lo lleva a él primero a presentar toda su plataforma formalista, con sus signos concretos dentro de la teoría elemental de los números (tabla 1) y los signos formales de su propuesta (tabla 2) y pasando luego a las fórmulas matemáticas (tabla 3) y por último, los axiomas de la teoría elemental de los números (tabla 4).

Hilbert evidencia en su plataforma formalista que se requiere de una *metamatemática* o teoría de la demostración, de modo que permite dar cuenta del lugar y del sentido de las consideraciones y las argumentaciones concretas, dentro de la matemática, y por ende dentro del enfoque formal expuesto durante el trabajo, dicha teoría debe de satisfacer su método axiomático.

Pero las ventajas de la metamatemática para la fundamentación de la matemática no son suficientes para que los axiomas de la aritmética dejen de presentar problemas

epistémicos fuertes, tales como, garantizar la consistencia de ese sistema axiomático; sin embargo, Hilbert intentó darle solución a dicho problema, por ejemplo, realizando la demostración del principio del tercero excluido, dado que dicha demostración permite el esclarecimiento epistémico del principio llegando así a un posible desbloqueo completo de la fundamentación de las matemáticas, sin embargo ese seguía siendo un tema inconcluso.

Entonces, ¿cuál es el problema que subyace al *principio del tercio excluido* y cuál es su solución dentro del formalismo de la metamatemática? El problema con el principio del tercero excluido radica en su libre aplicación sobre totalidades infinitas, lo cual implica que las propiedades, equivalencias y resultados obtenidos a partir de modos de inferencia finitos, deben ser reexaminados en función de la transición a los modos de inferencia transfinitos.

Algo semejante a lo anterior le sucede a la exigencia de la consistencia de los sistemas axiomáticos, ya que no se puede dar por sentado el cumplimiento de las propiedades, se debe adelantar un análisis que permita desentrañar la naturaleza tras los modos de inferencia y a partir de ellos, garantizar la conservación de las propiedades en totalidades infinitas; este problema Hilbert lo aborda desde la matemática, abordando la formulación del sistema de transfinitud, el cual permite capturar los elementos que ofrecen certeza y seguridad a las inferencias transfinitas.

A partir de lo anterior, es de relevancia abordar en qué sentido la formulación del axioma de transfinitud, permite capturar los elementos que ofrecen seguridad y certeza a las inferencias transfinitas. Al centrar la atención sobre la función transfinita, se puede determinar que existe un propósito de concreción en su interpretación, es decir, se pasa de tener un predicado A de una variable a un objeto matemático concreto, o sea τA , que da cuenta del conjunto ligado al predicado A .

Algunos textos históricos y filosóficos presentan el formalismo de Hilbert según Panza (2019) como “caricaturescos” para llegar a la tarea más fácil de la crítica hacia su trabajo, donde el trabajo formalista es reducir las matemáticas a un juego formal en el que solo intervienen sucesiones y transformaciones de símbolos, haciendo así que el formalismo sólo haga malabares con símbolos donde estos no tendrían ningún significado diferente al que se le asigne según las reglas sintácticas que regulen sus combinaciones.

Sin embargo, lo anterior es un absurdo que ningún matemático ha podido sostener, debido a que,

La convicción de Hilbert era que los encadenamientos lógicos, no directamente constructivos y finitistas, propios de una teoría matemática, deben ser aptos para ser traducidos en pruebas formales conducidas dentro de sistemas. De estos se podrá demostrar finitista y constructivamente la coherencia (que para todo enunciado p formulable en el sistema, p y no p no son al mismo tiempo teoremas) y la completitud sintáctica (que para todo enunciado p formulable en el sistema, o bien p es un teorema, o bien es un teorema no- p). (Panza, 2019, p.90)

La reflexión que deja este trabajo para la formación docente en matemáticas, es que para proceder al entendimiento y manejo de los elementos base de una disciplina matemática se necesita que las teorías sean sustentadas por una plataforma sólida que no conlleve al obstáculo del avance de las matemáticas, de tal forma, que cuente con un método apropiado que permita la expansión del conocimiento matemático, como se evidencia en este trabajo, el método axiomático trabajado desde varias décadas atrás es un buen indicio de teorías sólidas, sin embargo, estos sistemas deben de cumplir con las condiciones necesarias para garantizar su fundamentación no solo en lo finito sino también en lo transfinito; tomando en cuenta que

El formalismo no es pensado por un matemático como una forma de presentación y/o una modalidad de objetivación de ideas profundas, relacionadas con la estructura de un mundo que el matemático pretende interrogar y comprender. Es así como se deben de estudiar y comprender las teorías formales: no como sistemas cerrados y desprovistos de toda razón exterior, sino como el resultado del esfuerzo de comprensión de una realidad previa. (Panza, 2019, p.90)

Con lo anterior se evidencia que los docentes de matemáticas deben de perder el miedo hablar sobre lo formal o el formalismo en su proceso de formación o en su que hacer docente, dejando en evidencia la importancia que tuvo esto en los avances matemáticos y cómo apporto en las matemáticas que hoy se enseña, ya que como lo manifiesto Panza (2019) en la cita anterior, el formalismo no se puede ver como un sistema cerrado sino que se debe de ver como el compendio de grandes avances en la matemática, dejando así la puerta abierta a más investigaciones en la línea de Historia de la matemática.

En consecuencia, es indispensable que los docentes de matemáticas se apropien de la teoría en profundidad, sus problemas ontológicos y epistemológicos, además, que comprendan que la formalización de una teoría no garantiza el cierre de dicha teoría, de modo que, en la práctica las bases de la teoría deben ser explicadas de manera clara y con bases sólidas, sin embargo, siempre exhibiendo que las matemáticas son algo más allá de lo que ahí se les presenta; por ende, un docente que conoce la historia de las teorías matemáticas en este caso el formalismo, le permite proyectarse ideas sobre los posibles obstáculos y dificultades epistémicas que se pueden general en el aula, al momento de la enseñanza y aprendizaje de las teorías matemáticas.

Referencias

- Fonseca, L. E. S. (1984). Filosofía-lógica-matemáticas. *Universitas Philosophica*, 1(2). Pp. 65-78
- García, J. (1944). Elementos de geometría. *Universidad nacional autónoma de México*. Pp. IX - XCII
- Giovannini, E. (2013). Completitud y continuidad en Fundamentos de la geometría de Hilbert: acerca del Vollständigkeitsaxiom. *Theoria*. Vol. 76. Pp. 139-163
- Hilbert, D. (1900a). Acerca del concepto de número. En D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas* (L. F. Segura, Trad., págs. 17-22). Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Hilbert, D. (1900b). From Mathematical problems [De problemas matemáticos]. En w. Ewad, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. II, págs. 1096-1105). The Inited States by Oxford university press Inc., New York.
- Hilbert, D. (1917). El pensamiento axiomático. En D. Hilbert, *fundamentos de las matemáticas* (L. F. Segura, Trad., págs. 23-35). Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Hilbert, D. (1922). La nueva fundamentación de las matemáticas. En D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas* (L. F. Segura, Trad., págs. 37-62). Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Hilbert, D. (1923). Los fundamentos lógicos de las matemáticas. En D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas* (L. F. Segura, Trad., págs. 63-82). Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

- Hilbert, D. (1926). Acerca del infinito. En D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas* (L. F. Segura, Trad., págs. 83-122). Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Hilbert, D. (1930). Logic and the knowledge of nature [Lógica y conocimiento de la naturaleza]. En w. Ewad, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. II, págs. 1157-1165). The Inited States by Oxford university press Inc., New York.
- Madrid, C. (2013). Las bases de la matemática Hilbert. En el principio fue el axioma. *EDITEC - España*. pp. 15 a 46.
- Panza, M. (2019). Números: Elementos de matemáticas para filósofos. 1a. edición traducida - Cali: Universidad del valle. Págs. 1-95
- Paradoja de Galileo. (2023, 18 de abril). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 08:13, abril 18, 2023 desde: https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Galileo.
- Recalde, L. (2018). Lecturas de historia de las matemáticas. *Cali-Colombia: Universidad del Valle*.