



Modelación estadística fractal de datos sísmológicos en los departamentos de Boyacá, Santander y Norte de Santander (Colombia) entre 1996-2017

Programa Académico de Estadística

**Danny Francis Rivera Montero
Edwin Estiven Pulgarin Rodriguez**

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística
Santiago de Cali, Colombia
2017

Modelación estadística fractal de datos sísmológicos en los departamentos de Boyacá, Santander y Norte de Santander (Colombia) entre 1996-2017

Programa Académico de Estadística

**Danny Francis Rivera Montero
Edwin Estiven Pulgarin Rodriguez**

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Estadístico

Director:

M.Sc. Gabriel Conde Arango

Codirector:

Ph.D. Elkin de Jesús Salcedo Hurtado

Universidad del Valle

Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística

Santiago de Cali, Colombia

2017

Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta.

Benoit Mandelbrot. (*The Fractal Geometry of Nature*, 1982)

Agradecimientos

Agradecemos a nuestros familiares mas cercanos por brindarnos apoyo en este largo trayecto, a nuestros directores el M.Sc. Gabriel Conde Arango, docente de la escuela de Estadística y al Ph.D Elkin de Jesús Salcedo Hurtado, docente del departamento de geografía, por guiarnos en la elaboración y adaptación de este trabajo de grado.

A la Universidad del Valle por brindarnos la oportunidad de pertenecer a una de las mejores comunidades universitarias del país.

A todos los docentes y compañeros con quienes compartimos en el transcurso del periodo de aprendizaje, por permitirnos aprender de ellos todas las experiencias vividas en el Alma mater.

Resumen

Se propone una metodología para analizar la actividad sísmica entre los años 1996 y 2016, en los departamentos de Santander, Norte de Santander y Boyacá (Colombia). Se define la magnitud sísmica en escala Richter como variable de estudio, para comprobar que es una variable aleatoria, se hace uso de la ley de Gutenberg-Richter. Luego se procede a realizar métodos de interpolación para analizar la estructura de los datos como una serie de tiempo del tipo discreto en diferentes escalas (meses, semanas, días). Una vez obtenidas las tres series temporales el siguiente paso es hacer el calculo de los principales indicadores fractales para determinar si los datos presentan autosimilitud, memoria larga, comportamiento caótico determinista, entre otras características de la geometría fractal y ademas, darle significado a estos indicadores desde el punto de vista de la sismología.

Por último se modeló con series de tiempo los sismos correspondientes a diferentes escalas de tiempo (diaria, semanal y mensual) mediante modelos temporales ARFIMA, donde el parámetro de diferenciación empleado fue el coeficiente fractal de Hurst y se encontró que los modelos que mejor describen la dinámica sísmica de la región analizada son el ARFIMA(2,0.7710,2), ARFIMA(0,0.7411,1) y ARFIMA(1,0.7145,1) para las tres ventanas de tiempo respectivamente.

Con la aplicación de los indicadores fractales se encontró que el comportamiento de los sismos analizados se comportan de manera caótica, lo cual indica que la evolución del sistema analizado se comporta de manera muy irregular.

Palabras claves: Geometría, Fractales, Sismos, Magnitud, Determinista, Tiempo, Memoria , Autosimilitud, Caos, series de tiempo

Abstract

A methodology is proposed to analyze the seismic activity between 1996 and 2016, in the departments of Santander, Norte de Santander and Boyacá (Colombia). The magnitude seismic in scale Richter is defined as a study variable, to verify that it is a random variable, using the Gutenberg-Richter law. Then we proceed to perform interpolation methods to analyze the structure of the data as a time series of the discrete type in different scales (months, weeks, days). Once the three time series are obtained, the next step is to calculate the main fractal indicators to determine if the data present self-similarity, long memory, deterministic chaotic behavior, among other characteristics of fractal geometry, and also to give meaning to these indicators from the point of view of seismology.

Finally, the earthquakes corresponding to different time scales (daily, weekly and monthly) were modeled with time series using ARFIMA temporal models, where the differentiation parameter used was Hurst's fractal coefficient and it was found that the models that best describe the Seismic dynamics of the analyzed region are ARFIMA (2.0.7710,2), ARFIMA

(0.0.7411,1) and ARFIMA (1.0.7145,1) for the three time windows respectively.

With the application of fractal indicators it was found that the behavior of the analyzed earthquakes behave in a chaotic manner, which indicates that the evolution of the system analyzed behaves very irregularly.

Keywords: Geometry, Fractals, Earthquakes, Magnitude, Deterministic, Time, Memory, Self-similarity, Chaos, Time Series

Contenido

Resumen	VII
Tabla de contenidos	XI
Lista de Figuras	XIII
Lista de Tablas	XIV
1 Introducción	1
2 Planteamiento del Problema	2
3 Justificación del Problema	4
4 Objetivos de la Investigación	5
4.1 Objetivo General	5
4.1.1 Objetivos Específicos	5
5 Marco Teórico y conceptual	6
5.1 Fractal	7
5.1.1 Características de los fractales	7
5.2 Caos	9
5.2.1 Sistemas dinámicos	9
5.2.2 Atractor extraño	9
5.2.3 Reconstrucción de la dinámica	10
5.2.4 Rezago óptimo	10
5.2.5 Dimensión de inserción	11
5.3 Indicadores fractales	11
5.3.1 Dimensión fractal	12
5.3.2 Coeficiente de Hurst	13
5.3.3 Exponente de Lyapunov	15
5.3.4 Coeficiente de Entropía	16
5.3.5 Gráfico de recurrencias	16
5.3.6 Mapa de Poincaré	17

5.4	Sismología	17
5.4.1	La distribución de magnitudes	19
5.4.2	Premonitores y réplicas	20
5.4.3	Interpolación de observaciones sismológicas	20
5.4.4	Actividad sísmica en Colombia	20
5.4.5	La magnitud de completitud (M_c)	21
5.5	Modelos de series temporales	22
5.5.1	Análisis en el dominio de la frecuencia	23
5.5.2	El modelo ARMA fraccionalmente integrado	24
6	Antecedentes	26
7	Metodología del análisis	29
7.1	Construcción del catálogo	29
7.2	Método interpolación de los datos	29
7.3	Análisis exploratorio de datos	30
7.4	Cálculo de los indicadores fractales	30
7.4.1	Construcción de la dinámica caótica	31
7.4.2	Rezago óptimo	31
7.4.3	Dimensión de inserción	31
7.4.4	Cálculo de la dimensión fractal	32
7.4.5	Cálculo del coeficiente de Hurst	34
7.4.6	Cálculo de los exponentes de Lyapunov	34
7.4.7	Coeficiente de Entropía	35
7.4.8	Mapa de Poincaré	36
7.5	Distribución magnitudes sísmicas	37
7.6	Ajuste modelo ARFIMA	37
8	Resultados	41
8.1	Análisis exploratorio	41
8.2	Relación Gutenberg y Richter	48
8.3	Detección de caos en series temporales	50
8.3.1	Tiempo de retardo	50
8.3.2	Dimensión de inserción	51
8.3.3	Gráfico de recurrencias	53
8.3.4	Dimensión fractal	55
8.3.5	Coeficiente de Hurst	56
8.3.6	Entropía	57
8.3.7	Exponente de Lyapunov	57
8.3.8	Mapa de Poincaré	58
8.4	Aplicación series de tiempo	61

9 Conclusiones y recomendaciones	80
9.1 Conclusiones	80
9.2 Recomendaciones	81
10 Anexos	82
10.1 Anexo A	82
10.2 Anexo B	82
Bibliografía	83

Lista de Figuras

5-1. Algoritmo gráfico para construir una montaña fractal. Mandelbrot (2000) . .	6
5-2. Autoafinidad fractal. Mandelbrot (2000)	8
5-3. Medición de la costa de la Gran breaña usando <i>Box-Counting</i> . Tomado de: Mandelbrot (1967)	13
5-4. Series con diferentes valores del coeficiente de Hurst. Mandelbrot (1977) . . .	14
7-1. Box-Counting de un movimiento Browniano. Fuente: Breslin & Belward (1999)	33
7-2. Sección de Poincare del mapa de fases Volumen-Flujo de los registros cíclicos del patrón ventilatorio, normalizado respecto al tiempo. Fuente: González Obregón (2002)	37
8-1. Diagramas de cajas Magnitud Máxima Diaria	42
8-2. Diagramas de cajas Magnitud Máxima Semanal	43
8-3. Diagramas de cajas Magnitud Máxima Mensual	44
8-4. Q-Q plots a diferentes escalas de tiempo	45
8-5. Localización de los eventos	46
8-6. Número de sismos por año.	47
8-7. Histograma de profundidad	48
8-8. Histograma de frecuencias	49
8-9. Diagrama del logaritmo de frecuencias	50
8-10. Cálculo tiempo de rezago óptimo	51
8-11. Cálculo dimensión de inserción escala diaria	52
8-12. Cálculo dimensión de inserción escala semanal y mensual	52
8-13. Dimensión fractal para el máximo y diferentes escalas de tiempo	55
8-14. Cálculo del coeficiente de Lyapunov para el máximo y diferentes escalas de tiempo	58
8-15. Mapa de poincaré para la serie general	59
8-16. Mapa de poincaré serie diaria	59
8-17. Mapa de poincaré serie semanal	60
8-18. Mapa de poincare para el máximo diario	60
8-19. Serie Máximo diario	61
8-20. Transformación Box-Cox serie diaria	61
8-21. Serie diaria transformada y Diferenciada	62
8-22. FAC y FACP serie diaria	63

8-23.FAC y FACP serie diaria transformada y diferenciada fraccionalmente	64
8-24.Análisis normalidad serie diaria	65
8-25.Raíz unitaria serie diaria	66
8-26.Residuales serie diaria	66
8-27.Serie Máximo semanal	67
8-28.Transformación Box-Cox serie semanal	68
8-29.Serie semanal transformada	69
8-30.FAC y FACP serie semanal	69
8-31.FAC y FACP serie semanal transformada y diferenciada fraccionalmente . .	70
8-32.Serie semanal transformada	71
8-33.Raíz unitaria serie semanal	72
8-34.Residuales serie semanal	72
8-35.Serie escala mensual	73
8-36.Transformación Box-Cox serie mensual	74
8-37.Serie semanal transformada	75
8-38.FAC y FACP serie mensual	75
8-39.FAC y FACP Serie Mensual transformada y diferenciada	76
8-40.Normalidad serie mensual transformada	77
8-41.Raíz unitaria serie semanal	78
8-42.Residuales serie semanal	78
10-1.Mapa de estaciones de la Red Sismológica Colombiana	82

Lista de Tablas

7-1. Número de cuadros por cada longitud de cuadro con sus respectivos logaritmos	33
7-2. Tipo de movimiento de acuerdo al valor del máximo exponente de Lyapunov.Kantz (1994)	35
7-3. Tipos de transformación Box-Cox	38
8-1. Magnitud Sísmica Máxima Diaria	42
8-2. Magnitud Sísmica Máxima Semanal	43
8-3. Magnitud Sísmica Máxima Mensual	44
8-4. Gráfico de recurrencias en diferentes escalas de tiempo Vs Ruido Blanco	54
8-5. Cálculo del coeficiente de Hurst para diferentes escalas de tiempo	56
8-6. Cálculo del coeficiente de Entropía para el máximo y diferentes escalas de tiempo	57
8-7. Valores críticos test DFA y KPSS serie diaria	62
8-8. Estimación coeficiente GPH serie diaria	63
8-9. Criterio de selección Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn de la serie diaria	64
8-10. Parámetros estimados, desviación estándar y nivel de significancia	65
8-11. Independencia y homocedasticidad de los residuales	67
8-12. Valores críticos test DFA y KPSS serie semanal	68
8-13. Estimación coeficiente GPH serie semanal	70
8-14. Criterio de selección Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn de la serie semanal	71
8-15. Parámetros estimados, desviación estándar y nivel de significancia	71
8-16. Independencia y homocedasticidad de los residuales	73
8-17. Valores críticos test DFA y KPSS serie mensual	74
8-18. Estimación coeficiente GPH serie mensual	76
8-19. Criterio de selección Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn de la serie semanal	77
8-20. Parámetros estimados, desviación estándar y p-valor	77
8-21. Pruebas sobre los residuales	79

1 Introducción

De acuerdo a los trabajos realizados en las últimas décadas por autores como Mandelbrot (1977) creador de la *Geometría fractal*, se proponen nuevos métodos y elementos que podrían llegar a influir con cambios sustanciales en la manera de modelar los fenómenos aleatorios en realidades sociales o naturales las cuales se vienen abordando desde hace un siglo con métodos considerados *tradicionales* o *clásicos*.

Un ejemplo de los métodos clásicos corresponde a la *Geometría euclidiana* la cual estudia las formas regulares, tales como el círculo o el triángulo; el problema radica en que al aplicar este tipo de Geometría en formas irregulares esto resulta infructuoso. Según Mandelbrot (2000) esto mismo sucede en el estudio de los fenómenos naturales, y es aquí de donde se requiere de una Geometría que sea capaz de describir fenómenos más complicados como los que usualmente se presentan en la naturaleza, los cuales normalmente no pueden esquematizarse con las geometrías tradicionales posiblemente por su composición interna la cual no presenta comportamientos *suaves* que son clásicamente tratados con la Geometría euclidiana.

Es por ello que se realizará una aproximación a la Geometría fractal desde sus aspectos básicos (como el determinismo, el caos determinístico, la aleatoriedad, los sistemas dinámicos, los procesos estocásticos, las series de tiempo), y sus aplicaciones prácticas con series temporales con datos simológicos.

Además se quiere descubrir posibles relaciones del análisis fractal en contextos aún más generales como a los que en las últimas décadas se les han llamado *Complejos* desde el punto de vista de una disciplina del conocimiento, la cual está en plena construcción teórica. Surge entonces la necesidad de considerar nuevas técnicas, puesto que muchos de los sistemas existentes de interés se basan en dinámicas complicadas, como por ejemplo los modelos sismológicos, el clima, el precio de una acción, entre otros.

2 Planteamiento del Problema

Según Mandelbrot (2000) el análisis fractal en el contexto de *complejidad* o *sistemas complejos* es una teoría en plena construcción con gran potencial en la utilización científica, tecnológica y social. La estadística es la disciplina mas adecuada para tratar tal tema, ya que se han realizado muchos trabajos desde el punto de vista de las series temporales como por ejemplo el de Joher & Montoro (2008)(fractales en los mercados financieros Tesina Máster mercados financieros), el trabajo de Pérez López (2006) (Sobre la teoría del caos aplicada en sismotectónica: Geometría fractal de fallas y terremotos), entre otros, en donde se le ha dado sentido a indicadores de la teoría fractal tales como la dimensión fractal, el coeficiente de Hurts y otros, siempre dentro de los contextos de su campo interés en el que se esta trabajando y asociando casi en todos los casos con las series de tiempo.

Mirando hacia el campo de la sismología y sus múltiples vertientes, los terremotos son de gran interés en el campo científico, puesto que estos fenómenos naturales impactan de diferentes formas la región perjudicada, dado que ante un fuerte movimiento sísmico existe la posibilidad de pérdidas de vidas humanas, cuantiosas pérdidas económicas y un estancamiento en el crecimiento social de la zona afectada.

Gutenberg & Richter (1954), estudiaron las diferentes propiedades de los terremotos, y observaron que en ellos se presenta la propiedad de autosemejanza; propiedad intrínseca de los fractales. Es por esto que se cree que la teoría fractal es aplicable en los sismos. Por lo anterior se ha planteado una series de retos interesantes a desarrollar, los cuales se especifican a continuación:

- El estudio, entendimiento y formulación de las propiedades matemáticas de la Geometría Fractal con la finalidad de encontrar sus relaciones en el marco de la teoría estadística y sus respectivas aplicaciones en temáticas como las series temporales y los procesos estocásticos con la posibilidad de construir modelos que logren interpretaciones adecuadas de la realidad.
- Construir una síntesis no muy extensa donde se expliquen los temas y conceptos principales que se abordan en el campo de la sismología.

En resumen, se tiene una teoría interesante muy asociada a los métodos estadísticos donde se tiene la oportunidad y necesidad de aplicarla en la práctica para modelar la realidad. La propuesta es abordar el análisis fractal en series de datos sismológicos y a partir de ella

estimar e interpretar de manera coherente algunos exponentes o parámetros de la teoría fractal y estadística y así encontrar posibles patrones a diferentes escalas que podrían ser de interés.

3 Justificación del Problema

Este trabajo tiene como objetivo principal estudiar la actividad sísmica de los departamentos de Boyacá, Norte de Santander y Santander (Colombia) pues según el Servicio Geológico Colombiano la sismicidad en estos departamentos es de carácter profundo e intermedio atribuido a una posible antigua subducción. Además de acuerdo a cálculos realizados dicha zona recoge el 70,38 % de todos los sismos a nivel nacional en los últimos 20 años (1996-2016).

Se trabajará con la magnitud sísmica máxima registrada a diferente escalas de tiempo (Mensual, Semanal y Diaria), por ser el máximo un estadístico apropiado y representativo sismológico, y se ajustará un modelo ARMA fraccionalmente integrado (ARFIMA) en caso que se compruebe que las series de tiempo presentan memoria larga. La premisa de memoria larga se debe a que los autores Granger & Joyeux (1980) afirman que es usual que las series de tiempo asociadas a fenómenos naturales presenten la propiedad de persistencia (memoria larga).

También se tiene como objetivo el de encontrar posibles patrones a diferentes escalas que se pudiesen presentar en las series de tiempo bajo estudio. La utilidad en esto radica en que dichos patrones son de gran interés, pues estos permiten la caracterización de la red sismológica estudiada, y de esta manera obtener conclusiones de gran relevancia. Además de la búsqueda de dichos patrones, también se propone el estudio e implementación de diferentes indicadores para el análisis fractal con el fin de determinar si las series presentan comportamiento caótico.

Además se propone que este trabajo sea un aporte al campo del análisis fractal y pueda servir como referencia para posteriores trabajos en este mismo campo de estudio u otros afines, pues es limitada la producción bibliográfica sobre estas temáticas y escasos los trabajos de investigación sobre la aplicación fractal en los terremotos. De acuerdo a lo expuesto se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cual es la interpretación y el significado de los principales indicadores de la teoría fractal en el análisis de una serie de tiempo de una red sismológica?

4 Objetivos de la Investigación

4.1. Objetivo General

Analizar la actividad sísmica entre 1996 y 2016 en los departamentos de Santander, Norte de Santander y Boyacá, empleando técnicas estadísticas y métodos de la geometría fractal aplicados a las series de tiempo.

4.1.1. Objetivos Específicos

- Describir mediante el análisis exploratorio de datos el comportamiento de los sismos registrados en cada departamento bajo análisis.
- Calcular e interpretar los indicadores más importantes de la teoría fractal, tales como el coeficiente de Hurts, el exponente de Lyapunov, la dimensión fractal, entre otros, dentro del campo de interés, que son las redes sismológicas.
- Analizar la estructura de los datos como una serie de tiempo fijando la magnitud de los sismos en función del tiempo, para un posterior análisis fractal y estadístico.
- Estimar o proponer modelos en los cuales se logre encontrar y describir patrones de acuerdo a la dinámica de la actividad sísmica a través del enfoque fractal-estadístico además de posibles modelos dinámicos con todos sus parámetros e indicadores asociados a las interpretaciones respectivas (reconstrucción de una dinámica caótica).

5 Marco Teórico y conceptual

Muchos procesos regidos por leyes estrictamente deterministas pueden dar lugar a futuros impredecibles de los cuales lo único que se sabe es que deambulan aleatoriamente por regiones geométricas de estructuras muy irregulares. Estos son denominados como *Procesos caóticos* de tipo determinista de los cuales se obtienen *formas irregulares y caprichosas*. (De Guzman Ozamiz (1993))

Muchas de las *formas irregulares y caprichosas* mencionadas anteriormente pueden ser modeladas mediante el *análisis fractal*. La geometría fractal ofrece un modelo alternativo que busca patrones entre el conjunto completo, y cada una de sus partes. En la Figura 1 se muestra como se puede recrear una montaña a través de los fractales:

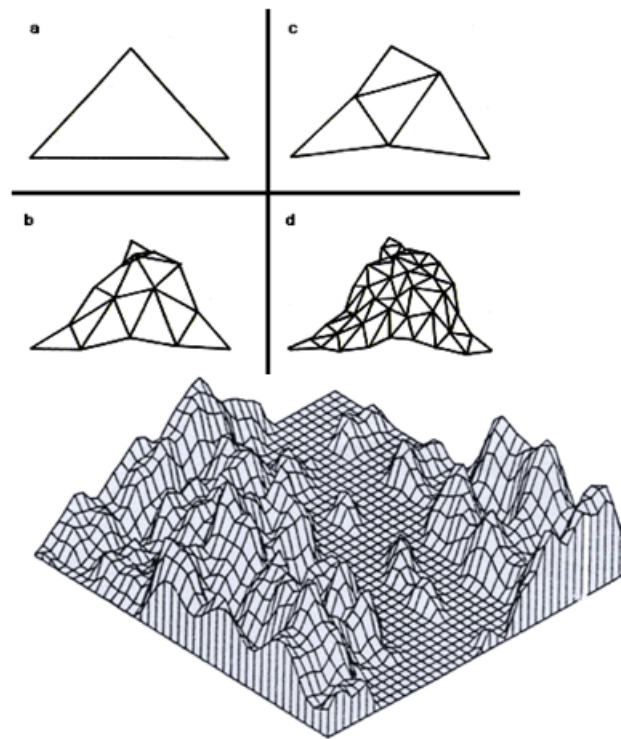


Figura 5-1: Algoritmo gráfico para construir una montaña fractal. Mandelbrot (2000)

No obstante, es importante aclarar que no toda forma irregular es un fractal, dado

que estos objetos deben cumplir con ciertas características específicas que se definirán mas adelante. A continuación se define que es un fractal:

5.1. Fractal

En la literatura no existe solo una definición de *fractal*, y por el contrario son muchas las definiciones que se encuentran sobre este término, algunas de las mas importantes son:

- Son una forma geométrica rugosa o fragmentada que puede subdividirse en partes, cada una de las cuales es (al menos aproximadamente) una copia reducida de la forma original.
- Son conjuntos matemáticos con un alto grado de complejidad geométrica que puede modelar muchos fenómenos naturales. Casi todos los objetos naturales pueden ser observados como fractales tales como árboles, montañas, nubes, entre otros.(Mandelbrot (1977))
- La geometría fractal busca y estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala. (De Guzman Ozamiz (1993)).

5.1.1. Características de los fractales

Los patrones que se observan en la *Figura 5-2* a cualquier escala temporal mantienen una apariencia similar, se parecen entre sí. Ésta es la propiedad principal de los fractales: la *autoafinidad*.

Según Mandelbrot (2000), ejemplos típicos son las hojas de los helechos, el brócoli, los caracoles, los copos de nieve, las colmenas de las abejas, las redes fluviales, las costas, los girasoles o los cristales minerales. Otra característica propia de los fractales es que son especialmente sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

Pues bien, ésta es la idea que subyace bajo las teorías que relacionan los fractales con diversos procesos. Numerosos fenómenos de la naturaleza son caóticos e impredecibles, con patrones que se repiten de forma similar y que pueden alterarse muy fácilmente por muy diversas causas. Las características más importantes son:

- Su proceso de formación se repite indefinidamente.
- Son objetos cuya longitud es infinita. Esto se debe a que el proceso de formación añade más y más detalle a cada paso, se extiende su longitud sin límite alguno, haciendo imposible su medición (Talanquer (2002)).
- Estos objetos no son diferenciables: A causa del número incontable de quiebres es imposible dibujar una recta tangente que tenga una inclinación única a lo largo de su perímetro (Talanquer (2002)).

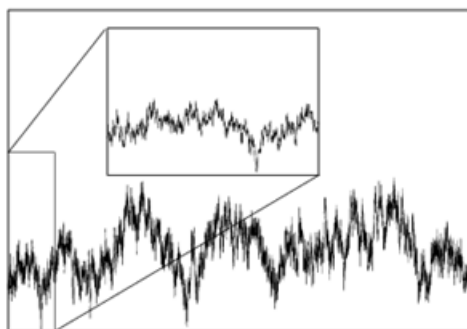


Figura 5-2: Autoafinidad fractal. Mandelbrot (2000)

- Estos objetos tienen dimensión fraccional, es la extensión real de un cuerpo en el espacio, la cual está entre dos dimensiones pero no es ni una ni otra (Talanquer (2002)).
- No es simétrico entre sí, en otras palabras, no siempre presenta el mismo comportamiento (Talanquer (2002)).
- Estos objetos cumplen con la propiedad de *autosimilaridad*, dada parte que lo conforma es igual al total, es decir, su apariencia es la misma a cualquier escala (Mandelbrot (1977)).
- Un fractal es estrictamente auto-similar. Dicha propiedad se presenta en algunos objetos clásicos, denominados por algunos autores como *monstruos fractales*, algunas de estas son: el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, el conjunto de Cantor, ..., etc.). Esta característica no se presenta muy a menudo en la naturaleza.
- En la naturaleza, habitualmente los objetos no son la unión de copias exactas reducidas del conjunto completo. Observar una parte del todo, no reproducirá exactamente todo el objeto, pero tendrá la misma apariencia cualitativa. Esta propiedad se llama *auto-similitud estadística* o *semi-auto-similitud*.

Estas características que comparten los fractales contradicen los supuestos de normalidad e independencia de las hipótesis de los modelos clásicos, y han dado lugar a una medida como el “coeficiente de Hurst” (que se definirá más adelante) para determinar la autocorrelación en las series de tiempo. Esta medida está estrechamente relacionada con la dimensión fractal.

Los fractales tienen una dimensión no entera, que indica el grado de “rugosidad” del objeto. Para el caso de las series temporales, la dimensión fractal está comprendida entre 1 y 2, de esta manera si la dimensión fractal de la serie tiende a 1 significa que la serie es menos “rugosa” (más irregular), mientras que si la dimensión fractal tiende a 2 sería más “rugosa” (menos irregular).

5.2. Caos

Un proceso es considerado como caótico si tiene tres características: impredecibilidad, imposibilidad de descomposición, más un elemento de regularidad. Según Penrose & Sanz (1996) los sistemas caóticos son sistemas físicos en evolución dinámica en los que el comportamiento futuro del sistema depende de forma extremadamente crítica del estado inicial exacto del mismo.

Aunque los sistemas caóticos ordinarios son completamente deterministas, en la práctica pueden comportarse como si no fuesen deterministas en absoluto. Esto se debe a que la precisión que se necesita conocer el estado inicial, para una predicción determinista de su comportamiento futuro puede estar absolutamente más allá de cualquier cosa que sea concebiblemente medible, por lo cual los sistemas caóticos tienen un comportamiento **impredecible**. (Penrose & Sanz (1996)).

5.2.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es aquel proceso que varía con el tiempo. Según De Guzmán et al.(1993) en sistemas dinámicos, el valor inicial x_0 de un estado en el presente se ve transformado con el tiempo, sometido a una ley fija F , y va tomando los valores futuros, es decir:

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1) \dots x_n = F(x_{n-1}) \dots \quad (5-1)$$

que bajo ciertas condiciones se van acercando a un conjunto A llamado *atractor* del sistema. A veces ocurre que dicho atractor tiene una estructura fractal (*atractor extraño*), hecho que suele ir unido a la circunstancia de que dos presentes próximos x_0 y x_0^* pueden dar lugar a futuros que se acercan y se alejan con el tiempo de forma aleatoria, de los que lo único que se sabe es que están, o se acercan con el tiempo al *atractor extraño*. (De Guzman Ozamiz (1993))

Anteriormente se presentó un escenario que aunque es de carácter *determinista* es de hecho impredecible. Este tipo de fenómenos pertenecen al *caos determinista*.

5.2.2. Atractor extraño

Según un *atractor* es una región del **espacio de fase** (espacio de resultados) a la cual convergen las trayectorias de un sistema dinámico, entendiéndose por trayectoria la evolución temporal del sistema a partir de una condición inicial específica. (Strogatz (2014))

Un atractor será *extraño* si exhibe una dependencia sensible de las condiciones iniciales del sistema y por lo tanto el comportamiento de la serie bajo análisis será *caótico*.

5.2.3. Reconstrucción de la dinámica

La órbita de un sistema dinámico es una colección de puntos relacionados por la función de evolución del sistema dinámico. Para comprobar si un proceso presenta un comportamiento caótico se debe analizar la evolución de la **órbita del sistema**. La órbita del sistema es la colección de puntos que describen la función de evolución del sistema dinámico analizado. Para conocer la órbita, se tiene que conocer la evolución de todos los componentes del proceso, el problema es que en este caso solo se dispone de una serie temporal de escalares que se supone que proceden de dicho sistema. (Takens et al. (1996))

Sin embargo, gracias a una transformación propuesta por Takens et al. (1981), es posible que con los valores de las serie observados se pueda encontrar un vector con m elementos con los cuales se pueda trabajar y se espera que estos tengan una estructura que presente una trayectoria similar a la que poseía la órbita original. El tamaño m del vector se conoce como **Dimensión de inserción** y el tiempo τ que debe pasar entre observación y observación dentro de la misma m - historia se conoce como **Rezago óptimo**. Los valores que toman m y τ no son aleatorios y se debe aplicar un método óptimo para hallarlos. (Takens et al. (1981))

5.2.4. Rezago óptimo

Los autores Kantz & Schreiber (2004) proponen utilizar la Función de autocorrelación para estimar un rezago apropiado para la serie temporal estudiada. No obstante, los autores denotan que la FAC es una función lineal, por lo que no es apropiada para dinámicas no lineales. Por eso es que para tener en cuenta las correlaciones no lineales se puede utilizar la función de **Información Mutua Promedio**(IMP). (Kantz y Schreiber, 1997)

La información mutua mide la información que dos variables tienen en común, es decir, mide como conociendo una de estas variables se reduce la incertidumbre sobre la otra. Por ejemplo, en el caso de que ambas variables sean independientes, entonces conocer alguna de ellas no da ninguna información sobre la otra y por lo tanto la información mutua es cero.

La **información mutua promedio** se define como:

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) I(x_i; y_j) \quad (5-2)$$

En el contexto del análisis de series de tiempo, la IMP permite cuantificar la cantidad de conocimiento adquirido sobre el valor de $X_{(t+\tau)}$ al observar $X_{(t)}$, y esta definida como (Kantz & Schreiber (2004)):

$$IMP = \sum_t \sum_j p_{tj} \ln(p_{tj}) - \sum_j p_j \ln(p_j) - \sum_t p_t \ln(p_t) \quad (5-3)$$

Donde p_i es la frecuencia relativa de los segmentos recurrentes de determinada longitud. (Sepulveda (2004)).

Para elegir el tiempo de rezago, el criterio que aplicará será tomar el primer mínimo de la función de información mutua calculado entre las componentes de la misma serie. Este criterio es el sugerido por los autores Kantz & Schreiber (2004) pues lo resaltan como el método más apropiado en el campo del análisis no lineal.

5.2.5. Dimensión de inserción

La *dimensión de inserción* m es un estimador de la dimensión del sistema original y su cálculo es importante pues con este valor y el *rezago óptimo* se calculan los indicadores fractales. El valor de m debe ser calculado de manera óptima dado que si se asumen valores de m demasiado altos se incrementa artificialmente el ruido (puntos originalmente próximos aparecerán aislados) siendo imposible que los indicadores fractales puedan determinar un comportamiento caótico de las series temporales, mientras que cuando se asumen valores de m demasiado bajos no es posible analizar todos los puntos pertenecientes a la órbita del sistema original. (Sepulveda (2004)).

Para el cálculo de dicha dimensión se aplicará el algoritmo de *Cao* propuesto por Cao (1997).

El algoritmo de Cao utiliza 2 funciones para estimar el valor m para una determinada serie de tiempo: las funciones $E_1(d)$ y $E_2(d)$, donde d denota la dimensión. Se tiene que $E_1(d)$ deja de variar cuando d es igual que la dimensión de inserción, permaneciendo cerca a 1. La función $E_2(d)$ permite caracterizar la naturaleza del proceso, de tal manera que si $E_2(d)$ es diferente de 1, el proceso es determinista mientras que si $E_2(d)$ es aproximadamente uno el proceso es estocástico.

5.3. Indicadores fractales

Un **atractor** es un conjunto hacia el cual el sistema tiende a medida que avanza el tiempo, según Sepulveda (2004). Dado que un sistema determinista con atractor caótico (extraño) puede ser confundido con un sistema aleatorio, la idea es implementar medidas de detección que permitan identificar si el sistema es producido por una dependencia caótica o si por el contrario fue generado por una dependencia aleatoria y de esta manera determinar si la dinámica de las series mencionadas sigue un comportamiento complejo.

Para cumplir con este objetivo, se calcularán entonces algunos indicadores fractales no lineales para estudiar dicha complejidad, según Plazas Nossa et al. (2014) los principales exponentes y/o coeficientes fractales son: dimensión fractal, el coeficiente de Hurst, la dimensión de correlación, el exponente mayor de Lyapunov, los mapas de Poincaré y la entropía, con el propósito de detectar conductas caóticas de las series temporales. En este trabajo de grado también se calcularán gráficos de recurrencia pues estos pueden ser una potente herramienta visual, aunque se asume el riesgo de que tales no arrojen resultados

significativos. Se hará especial énfasis en el coeficiente de Hurst, pues es este el que tiene más relación en las series temporales y por ende en el campo estadístico. (Plazas Nossa et al. (2014))

5.3.1. Dimensión fractal

La definición de dimensión fractal surge por el hecho de que la mayoría de los objetos de la naturaleza no tienen una dimensión entera, sino que por el contrario tienen una dimensión fraccional. Esto difiere con parte de la teoría euclidiana clásica, a continuación se adjuntan algunas definiciones de dicho término:

- Es el número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. ((Mandelbrot (1977)))
- Mide el grado de fragmentación o irregularidad de los fractales a múltiples escalas. ((Mandelbrot (1977)))
- Determina cómo el fractal difiere de los objetos euclidianos (punto, línea, plano, círculo, etc.) ((Mandelbrot (1977)))

En este trabajo se empleará la dimensión fractal para medir el grado de caos en cada una de las series. Es por ello que a medida que la dimensión fractal aumente será síntoma de que existe un atractor caótico mientras que si sucede lo contrario se dirá que el proceso es aleatorio. Para el cálculo de la dimensión fractal se empleará el método "Boxcounting". (Sepulveda (2004))

El método del recuento de cajas consiste en cubrir el patrón analizado con una cuadrícula y luego contar cuántos cuadros de la cuadrícula están cubriendo parte de la imagen. Después se realiza de nuevo el proceso anterior, pero esta vez usando una rejilla más fina con cajas más pequeñas. Al reducir el tamaño de la cuadrícula repetidamente, terminamos capturando con mayor precisión la estructura del patrón.

Usando el método del conteo de cajas, la dimensión fractal es de nuevo la *pendiente* de la línea cuando trazamos el valor de $\log(N)$ en el eje Y contra el valor de $\log(r)$ en el eje X. La misma ecuación se utiliza para definir la dimensión fractal D . Donde N es el número de cajas que cubren el patrón, y r es la ampliación. Es decir que la dimensión fractal es igual a:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(r)} \quad (5-4)$$

De esta manera, una pendiente más pronunciada significa que el objeto es más *rugoso*, es decir, que gana en complejidad a medida que disminuye el tamaño de la caja. Una pendiente más plana y de menor valor significa que el objeto está más cerca de una línea recta, menos *áspero*, y que la cantidad de detalle no crece tan rápidamente, a medida que se amplía el tamaño de las rejillas.

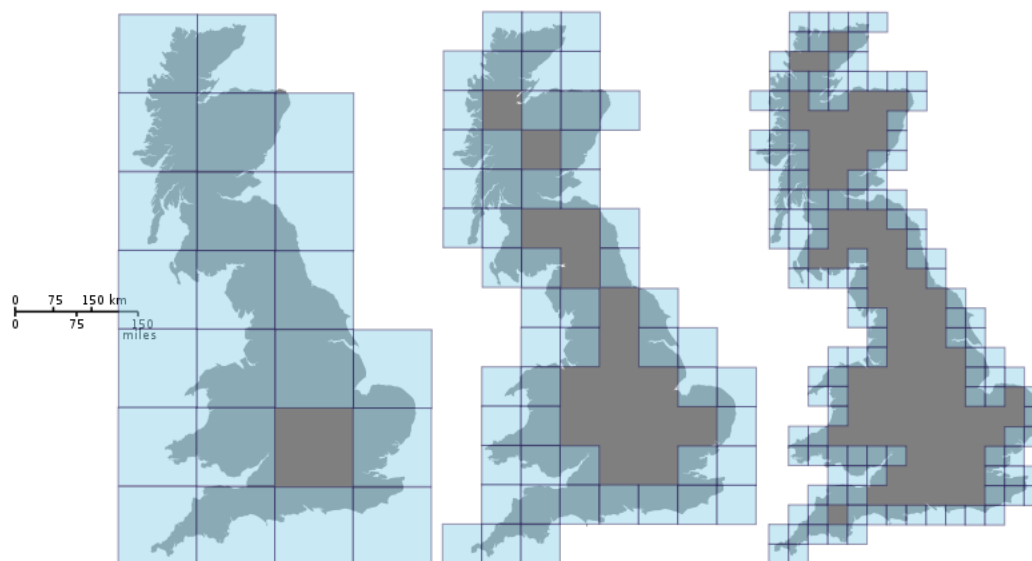


Figura 5-3: Medición de la costa de la Gran Bretaña usando *Box-Counting*. Tomado de: Mandelbrot (1967)

En el análisis de series temporales la dimensión fractal oscila entre 1 y 2, que corresponde al rango entre una línea recta (dimensión=1) y una línea tan ondulada que llena completamente un plano bidimensional (dimensión=2). (Liebovitch & Toth (1989))

El cálculo de la dimensión fractal, puede llegar a ser engorroso pues este consiste en un conteo por iteración. No obstante en la actualidad existen diversos Software (como el lenguaje de programación R con el paquete *tseriesChaos*) que realizan el cálculo de este coeficiente.

5.3.2. Coeficiente de Hurst

El coeficiente de Hurst (llamado así en honor al británico Harold Edwin Hurst 1880-1978), es una técnica que se utiliza para medir la rugosidad de un objeto geométrico. Harold Hurst era un hidrólogo quien creó una metodología estadística para determinar si existían tendencias o patrones en las series fractales, correspondiente a datos de las fluctuaciones de las alturas del nivel del Río Nilo. (Hurst (1951))

Durante el estudio de dicha serie, Hurst encontró que con el cálculo de este coeficiente es posible detectar si una serie de tiempo tiene memoria de largo plazo, es decir, que los eventos actuales de un proceso, influye en los procesos futuros. (Hurst (1951))

Pérez López (2006) brinda un ejemplo muy intuitivo sobre la definición del coeficiente de Hurst, en el que explica la variación del caudal de un río ante la lluvia. Este menciona que aunque un día llueva muy fuerte, esto no garantiza que el caudal del río se vaya a

incrementar dado que el río es un sistema con memoria a largo plazo el cual puede *recordar* sequías anteriores.

Después del aporte de Mandelbrot en 1977 al campo de los fractales, se observó como ciertos fenómenos naturales presentan correlaciones temporales inesperadas a largo plazo: memoria a largo plazo o persistencia, siendo además muy sensibles a las condiciones iniciales, como es el caso sismológico. (Mandelbrot (1977))

La principal ventaja de este coeficiente es que no es necesario verificar el supuesto de estacionariedad para aplicar este criterio, como si hay que hacerlo con otros criterios de detección de memoria a largo plazo.

La interpretación del coeficiente de Hurst es la siguiente (Plazas Nossa et al. (2014)):

- Si $0.5 < H \leq 1$, la serie es persistente. Esto es, la tendencia se mantendrá a largo plazo y por lo tanto la serie tiene *memoria larga*. Si la serie tiene una tendencia creciente, continuará siendo creciente, y viceversa.
- Si $0 \leq H < 0.5$, la serie es antipersistente. Es decir, se alternan continuamente tendencias alcistas y bajistas. Un valor alto irá muy probablemente seguido de uno bajo, y al revés.
- Si $H=0.5$, la serie está caracterizada por ausencia de autocorrelación y su movimiento es similar a un paseo aleatorio.

En la *Figura 3* se muestra un ejemplo de como sería el comportamiento de la serie en estudio bajo diferentes valores del coeficiente de Hurst.

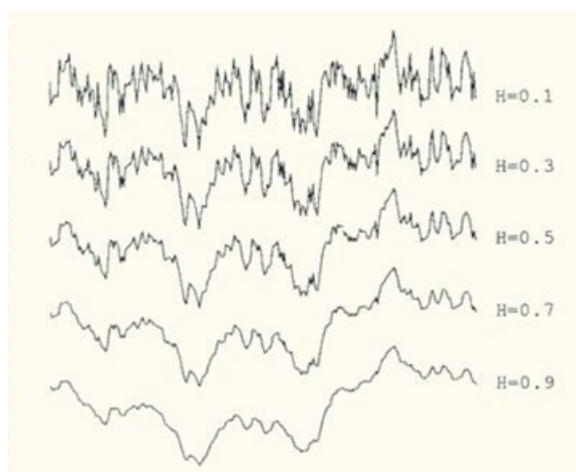


Figura 5-4: Series con diferentes valores del coeficiente de Hurst. Mandelbrot (1977)

El exponente de Hurst (H) está relacionado con la dimensión fractal (D) mediante la fórmula:

$$D = 2 - H \quad (5-5)$$

Es usado el análisis R/S (Rango Escalado) para el cálculo del coeficiente de Hurts, en el se calcula la distancia que el sistema recorre en una unidad de tiempo n. Se dice que es reescalado o normalizado(Joher & Montoro (2008)). Para el cálculo del coeficiente de Hurst se utiliza la siguiente ley de potencia:

$$R/S(N) = a * N^H \quad (5-6)$$

Donde:

- a: es una constante
- N: es el número de observaciones
- H: es el coeficiente de Hurst

El estadístico propuesto por Hurst mide el rango de las desviaciones de las sumas parciales de una serie respecto de su media, lo cual se divide sobre las desviación típica de la serie, el estadístico es el siguiente:

$$[R/S]_n = \frac{R_n \max \sum_{j=t_0+1}^k (X_j - \bar{X}_K) - \min \sum_{j=t_0+1}^k (X_j - \bar{X}_K)}{S_n \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{j=t_0+1}^k (X_j - \bar{X}_K)^2)}} \quad (5-7)$$

donde $[X]_{t_0+k}^{j=t_0+1}$ es una submuestra que cuenta con k observaciones consecutivas de la serie, $\bar{X}_k$ es la media de dicha submuestra.(Sepulveda (2004))

5.3.3. Exponente de Lyapunov

A diferencia de otros exponentes fractales, los de Lyapunov son una función de exponentes y no un indicador puntual, los cuales son indicadores de la sensibilidad a las pequeñas perturbaciones de las órbitas en un sistema, por ende permiten determinar si una serie presenta comportamiento caótico. (Sepulveda (2004))

Se define el exponente de Lyapunov h como (Lara et al. (2003)):

$$h = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \frac{dx_T}{dx_0} \quad (5-8)$$

En este trabajo se empleará el método sugerido por Wolf et al. (1985) para el cálculo de este exponente. El cual consiste en tomar puntos cercanos del espacio de fases X_0 y $X_0 + \epsilon$,

de tal manera que después de N iteraciones estos dos puntos próximos se han convertido en $f^N(X_0)$ y $f^N(X_0 + \epsilon)$. (Wolf et al. (1985))

El exponente de Lyapunov de una función unidimensional está dada como la tasa promedio exponencial de divergencia de condiciones iniciales infinitamente cercanas. Esto es en promedio, el crecimiento exponencial en la medida en que dos puntos x_0 y $x_0 + dx_0$ separados por una fracción infinitesimal inicialmente son transformados por una función M que representa una dinámica caótica. (Lara et al. (2003))

5.3.4. Coeficiente de Entropía

El concepto de Entropía fue desarrollado por Shannon (1948) en su artículo *Mathematical Theory of communication*, y allí define la Entropía como una medida de la dispersión y/o variación de los datos de una serie. Si los datos son muy uniformes, la Entropía será alta de lo contrario será baja. Coloquialmente hablando, Shannon le dio sentido matemático, desde la base de la probabilidad, al término *incertidumbre*, al cual denominó *Entropía*.

Boltzmann (1935) observó que la entropía de un sistema físico se puede considerar como una medida del desorden del mismo (Pardo Llorente (1993)). El mismo expresó este hecho matemáticamente desde el punto de vista de la probabilidad y la Estadística. (Bronowski et al. (1979))

En un sistema físico, como por ejemplo un gas, la entropía es el número que mide el desorden del sistema, es decir, el número de configuraciones posibles de las partículas del gas en un espacio determinado, además mide también la incertidumbre en relación a los estados de las partículas en un momento dado. (Pardo Llorente (1993))

Como la medición de la entropía está en términos de una función de distribución de probabilidad (discreta o continua), la entropía tendrá valor máximo cuando la distribución sea del tipo uniforme (Preckel (2001)). El valor mínimo de la entropía se obtiene cuando la distribución de probabilidad se concentra en un solo valor. Se puede afirmar finalmente que a mayor grado de entropía, mayor grado de incertidumbre en la distribución y entre menor grado de entropía más determinístico el sistema. (Preckel (2001))

5.3.5. Gráfico de recurrencias

El gráfico de recurrencias fue propuesto por Eckmann et al. (1987) en el artículo *Recurrence plots of Dynamical Systems* (Gráfico de recurrencias de sistemas dinámicos), en dicho escrito el autor lo propone como una nueva herramienta de diagnóstico que permiten identificar órbitas periódicas inestables, que son un signo de comportamiento caótico, además brinda información sobre la estructura del atractor extraño. (Eckmann et al. (1987))

El gráfico de recurrencia es una matriz de puntos en un arreglo $N \times N$ (N es el número de datos de la serie temporal), donde un punto se coloca en (i, j) siempre que $x_{(j)}$ sea suficientemente cercano a $x_{(i)}$. Estos gráficos permiten identificar órbitas periódicas

inestables, que son signo de comportamiento caótico. De esta manera para el análisis de estas órbitas no es necesario de la construcción de un coeficiente o exponente si no que esto se puede realizar de forma gráfica con el *Gráfico de Recurrencias* según Gilmore (1993).

En el ámbito de las series temporales, si hay observaciones que se encuentren próximas a una órbita periódica estas procederán de un atractor extraño, y por lo tanto existirá evidencia de comportamiento caótico. (Sepulveda (2004))

5.3.6. Mapa de Poincaré

Los mapas de Poincaré permiten examinar la existencia de un atractor extraño, lo cual indicaría que la serie tiene comportamiento caótico. Si en el plano de Poincaré los puntos se acumulan en un extremo es porque existe un atractor extraño. En caso de que la serie se comporte Ruido Blanco, las puntos tienden a extenderse sobre todo el plano sin ninguna tendencia marcada. (Kantz & Schreiber (2004))

Para hablar de mapas de Poincaré, primero se debe abordar lo que son los **mapas de fase**, los cuales se definen como configuraciones abstractas comunmente bidimensionales de dos variables parametrizadas de un sistema dinámico en particular (González Obregón (2002)). Estos mapas tienen la característica gráfica de mostrar el conjunto de soluciones que se puede obtener del sistema en estudio.(González Obregón (2002)).

Si se evidencia en el mapa de fase un atractor extraño, se determina que el sistema es complejo con dinámica caótica, es decir, estamos hablando sobre un fractal (Prigogine & Nicolis (1994)). Algunos ejemplos de dinámicas que no cuentan con atractores extraños son los puntos fijos, los ciclos límite y las dinámicas oscilatorias periódicas (González Obregón (2002)).

5.4. Sismología

La sismología es la ciencia que estudia todo lo referente a los sismos: la fuente que los produce, las ondas elásticas que generan y el medio físico que atraviesan dichas ondas en la superficie de la Tierra, mientras que un sismo es una serie de movimientos a consecuencia de una perturbación que produce una liberación de energía. Habitualmente a un sismo se le denomina *temblor* cuando es un movimiento leve y *terremoto* cuando se produce un evento violento que produce víctimas. (Nava (2011))

Un concepto importante es la **falla**. Una falla es una estructura tectónica sobre la cual se ha producido una fractura, o desplazamiento lento. La sismología se centra en las **fallas activas** las cuales son aquellas de las cuales se tiene evidencia de desplazamientos o sismicidad durante los últimos 10.000 años, mientras que las **fallas inactivas** son aquellas sobre las cuales no existe evidencia de algun movimiento en igual periodo de tiempo. (Pérez & Padilla (2001))

Según el Servicio Geológico Colombiano no se conoce con exactitud el origen de los sismos, aunque existe una teoría la cual es la más aceptada por la comunidad científica llamada la *Deriva Continental*, la cual establece que estos obedecen a fuerzas bajo la corteza terrestre. La teoría enuncia que hace unos 200 millones de años los continentes estuvieron unidos formando un único continente denominado *Pangea* el cual gradualmente se separó y formó los cinco continentes. Dichos continentes están formados por grandes placas que se mueven en diferentes direcciones y velocidades, el movimiento a velocidades pequeñas de estas placas del orden de centímetros por año, hace que se generen en su interior grandes presiones, lo cual hace que la corteza terrestre se fracture y se desplace súbitamente. (S.G.C (2013))

A nivel mundial, los sismos ocurren en zonas caracterizadas por alta deformación tectónica ubicadas en los bordes de las placas tectónicas. Aquellos sismos que ocurren en dichas zonas se conocen como *sismos interplaca*. No obstante existen sismos que ocurren en el interior de estas placas (son poco comunes) y se denominan *sismos intraplacas* y suelen ser muy destructores. (Torres (2001))

Para cuantificar los temblores se utilizan las escalas de magnitud e intensidad. La intensidad se relaciona con los daños producidos por el sismo. Ambas escalas son necesarias puesto que miden aspectos diferentes de la ocurrencia de un temblor. La escala de magnitud es una medida instrumental relativa relacionada con la cantidad de energía liberada como ondas sísmicas, y la más utilizada es la de Richter. (Espíndola (1994))

La clasificación de sismos según la magnitud (Torres (2001)):

- Menores a 3: Muy pequeño
- De 3 a 3.9: Pequeño
- De 4 a 4.9: Suaves o ligeros
- De 5 a 5.9: Moderado
- De 6 a 6.9: Fuerte
- De 7 a 7.9: Muy fuerte
- Sobre 8: Extremadamente fuerte

Según el Servicio Geológico Colombiano, en la actualidad no es posible predecir la ocurrencia de un sismo, simplemente se puede hablar de probabilidades de ocurrencia y que características probables puede tener el movimiento. (S.G.C (2013))

Es posible que la red sísmica no detecte todos los sismos, según Husen & Hardebeck (2010) existen múltiples razones para ello:

- El evento es demasiado pequeño y su señal no se distingue del ruido de fondo en el sismógrafo.
- El evento es demasiado pequeño para ser registrado en un número suficientemente grande de estaciones, esto se debe a que el evento debe ser registrado en un número mínimo de estaciones para iniciar el procedimiento de localización.
- Los operadores de las estaciones de medición decidieron que los eventos por debajo de cierto umbral no son de interés.
- Algunos eventos son demasiado pequeños para ser detectados dentro de otros eventos más grandes.

5.4.1. La distribución de magnitudes

Es lógico pensar que en una cierta región y durante un periodo de tiempo, el número de sismos pequeños es mucho mayor que el de grandes. Aunque se desconoce exactamente la forma en que se libera la energía en una placa tectónica, se ha comprobado que la magnitud es una variable aleatoria, cuya función acumulada de distribución es (Omori (1889)):

$$F(M) = 1 - e^{-\beta M} \quad \text{para} \quad M > 0 \quad (5-9)$$

Donde el parámetro $\beta > 0$. La ecuación (5-4) corresponde a la función de distribución acumulada exponencial.

La anterior ecuación fue propuesta más tarde por Gutenberg & Richter (1944), en 1944, en la forma:

$$\log_{10} N(M) = a - b * M \quad (5-10)$$

Donde N es el número de sismos con magnitud mayor que M , a es la constante sísmica que representa la intersección de la recta con el eje de las ordenadas, y b es la constante sísmica que tiene un significado físico en el análisis que depende de la región de estudio. Las variaciones del valor de b dan cierta idea del comportamiento sísmico de la región. (Udías & Mezcuca (1986))

La constante b suele oscilar entre 0.6 y 1.5. Valores altos de b indican que predominan sismos de pequeña magnitud, y, por tanto la región tiene poca resistencia, mientras que valores bajos indican que predominan los sismos de magnitud mayor. La variación con el tiempo del valor de b para una región en específico se ha utilizado para la predicción de sismos. (Udías & Mezcuca (1986))

5.4.2. Premonitores y réplicas

El Servicio Geológico Colombiano (S.G.C) describe que en una serie de sismos ocurridos en una zona, al sismo de esta serie con mayor magnitud generalmente se lo conoce como *sismo principal*, los sismos precedentes como *premonitores* y a los menores como *réplicas*. Las réplicas son debidas al reajuste de esfuerzos, aunque dependiendo de las características del sismo no necesariamente se van a presentar. Un sismo principal será premonitorio si el siguiente sismo de la serie tiene una magnitud mayor.(S.G.C (2015))

Cuando en una serie de terremotos no se distingue ningún sismo principal, se denomina un *enjambre de terremotos*. Una clasificación bastante específica, se encuentra en (Udías & Mezcua (1986)), y es la siguiente:

- *Tipo 1*: No se producen premonitores. Ocurre un sismo principal al cual le siguen una serie de sismos de menor magnitud. A este le sigue una serie de réplicas.
- *Tipo 2*: Se dan premonitores cuyo número aumenta rápidamente, antes del sismo principal.
- *Tipo 3*: La secuencia de sismos ocurre en la forma de un enjambre en el que no se distingue un evento principal.

5.4.3. Interpolación de observaciones sismológicas

La mayoría de la metodología de series temporales está diseñada para observaciones que miden variables a intervalos de tiempo uniformemente espaciados. No obstante, cuando se deben analizar observaciones espaciadas irregularmente, la metodología estadística es limitada.(Feigelson & Babu (2012))

Es por ello que surge la necesidad de abordar métodos de interpolación que permitan convertir una serie con observaciones irregulares a una serie cuyas observaciones sean equidistantes y de esta manera aplicar los métodos temporales tradicionales. Los autores Feigelson & Babu (2012) proponen el uso de estadísticos como el promedio, como método de interpolación, sin embargo, el promedio no es adecuado en el estudio de observaciones sismológicas pues con este se estarían combinando eventos que provienen de diversas fuentes, por lo anterior se propone el Máximo como método de interpolación en lo que sigue de este trabajo.

5.4.4. Actividad sísmica en Colombia

Según el Servicio Geológico Colombiano la mayor parte de la actividad sísmica en Colombia se encuentra concentrada en el departamento de Santander, en un sitio conocido como el *Nido sísmico de Bucaramanga*, más específicamente en el municipio *Los Santos*, en

el cual diariamente se registran en promedio 5 sismos. Dicha actividad sísmica en esta región no ha sido catalogada como destructora. (S.G.C (2015))

La recurrencia de sismos en el territorio colombiano se debe principalmente por la convergencia de las placas Nazca, Suramericana y Caribe. Además parte de la sismicidad superficial es producto del proceso de deformación actual de la corteza, enmarcada geográficamente dentro de la Zona Andina, contigua a los principales sistemas de fallas del país. (S.G.C (2015))

Es notable también la sismicidad al noroccidente del país (más específicamente en Chocó y límite con Panamá), donde se observa una sismicidad importante cerca del municipio de Murindó-Antioquia, con la presencia de fallas catalogadas como activas. Pérez & Padilla (2001)

5.4.5. La magnitud de completitud (M_c)

Los catálogos sismológicos son uno de los productos más importantes que las redes sísmicas proporcionan, los cuales deben calibrarse antes de cualquier análisis. No obstante existe incertidumbre desde la detección de las primeras ondas sísmicas hasta la determinación de la ubicación y la magnitud de un evento. Así, el catálogo bajo análisis en este trabajo de grado tampoco es ajeno a las problemáticas anteriormente mencionadas, y parecen existir algunas incongruencias que son propias de todo catálogo.

Calcular la magnitud de completitud M_c del catálogo de terremotos es un paso esencial y obligatorio para cualquier análisis de sismicidad. La magnitud de completitud es definida como la magnitud más baja a la que se detectan el 100 % de los terremotos (Rydelek & Sacks (1989)). De esta manera una estimación correcta de M_c es crucial ya que un valor demasiado alto privaría al conjunto de datos de información potencialmente valiosa, mientras que un valor demasiado bajo conduce a estimaciones erróneas de los parámetros sísmicos utilizando datos que podrían ser *ruido* en lugar de registros sísmicos de importancia. (Mignan & Woessner (2012))

La ecuación de Gutenberg y Richter puede ser escrita en términos del M_c de la siguiente manera:

$$\log_{10} N(m_i > m) = a - b(m - M_c) \quad (5-11)$$

Donde m_i es la magnitud i -ésima observada. Es decir que todos los eventos de magnitud $m < M_c$ se descartan del análisis. Para el caso en que se trabaje con la relación:

$$\log_{10} N = a - b * m \quad (5-12)$$

La ecuación 5-7 indica que el umbral elegido es cero, y se trabaja entonces con el catálogo en su totalidad. Existen varios métodos para el cálculo del valor de M_c , no obstante en este

trabajo se utilizará el método de la *curvatura máxima* y será utilizado para calcular los valores de la relación de Gutenberg y Richter.

Método de la curvatura máxima

El método de la curvatura máxima es un procedimiento que permite estimar el valor de la *Magnitud de completitud*, el cual consiste en calcular el punto en que se produce la máxima deflexión de una función analizada calculando el valor máximo de la primera derivada. La función a analizar en el caso de observaciones sismológicas es la trazada en el diagrama de frecuencias sísmicas desacumulado. (Mignan & Woessner (2012))

El valor obtenido por el método de la curvatura máxima es un estimador que no subestima a la Magnitud de Completitud (M_c) y suele requerir menos observaciones que otras técnicas para alcanzar un resultado estable. Dada una función $y = f(x)$, el valor de la curvatura máxima de y es (Mignan & Woessner (2012)):

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (5-13)$$

5.5. Modelos de series temporales

En sismología es usual hablar de *ciclos sísmicos*, pues existen algunos periodos que tienen una actividad sísmica mayor que otros. La distribución de sismos en el tiempo es variable y no periódica, con un comportamiento no dinámico que presenta baja predictibilidad, además es de esperarse que sean de memoria a largo plazo (Pérez López (2006)). Es por ello que si bien en este trabajo se construirán modelos de series temporales (ARFIMA), esto se realiza con fines exclusivamente descriptivos y no con el objetivo de predecir futuros eventos sísmicos, en caso de realizarse una predicción será solo con fines académicos.

Después de analizar los resultados previos en cuanto al análisis de los modelos ARMA, se encontró que las series bajo análisis en este trabajo no se pueden modelar bajo estos modelos puesto que los modelos ajustados no cumplen con ninguno de los supuestos y pruebas aplicadas (raíz unitaria, entre otros), además según Castaño Velez (2016) este tipo de modelos no es apropiado en series asociadas a fenómenos naturales.

Esto se debe a que los modelos ARMA (p, q) son procesos de memoria corta, pues en este tipo de modelos las autocorrelaciones decrecen exponencialmente a medida que crece el número de rezagos. De esta manera esta clase de modelos no se adaptan bien en procesos con memoria larga los cuales ocurren con frecuencia en la serie de datos sismológicos. (Chung (1996))

En la sección de Resultados se demostrará mediante el Coeficiente de Hurst que todas las series son de memoria larga, es por ello que surge la necesidad inmediata de abordar otro

tipo de procesos estocásticos alternativos como es el caso de los modelos ARFIMA (modelo ARIMA fraccionalmente integrados), con los cuales se espera obtener un mejor ajuste.

5.5.1. Análisis en el dominio de la frecuencia

Función de distribución espectral

La función de distribución espectral descompone la varianza de la serie en las contribuciones correspondiente a los distintos ciclos. De esta manera para un número de componentes cíclicos h se tiene que (Arteche (2008)):

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & -\pi < \lambda < -\lambda_h \\ \frac{\sigma_h^2}{2} & -\lambda_h < \lambda < -\lambda_{h-1} \\ \frac{\sigma_h^2 + \sigma_{h-1}^2}{2} & -\lambda_{h-1} < \lambda < -\lambda_{h-2} \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^h \frac{\sigma_j^2}{2} & -\lambda_1 < \lambda < -\lambda_1 \\ \sum_{j=1}^h \frac{\sigma_j^2}{2} + \frac{\sigma_1^2}{2} & \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^h \frac{\sigma_j^2}{2} + \sum_{j=1}^{h-1} \frac{\sigma_j^2}{2} & \lambda_{h-1} \leq \lambda < \lambda_h \\ \sum_{j=1}^h \sigma_j^2 = \gamma_0 & \lambda_h \leq \lambda \leq \pi \end{cases} \quad (5-14)$$

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^h \sigma_j^2 \cos(\lambda_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda k) dF(\lambda) + i \int_0^{\pi} \sin(\lambda k) (dF(\lambda) - dF(-\lambda)) \quad (5-15)$$

Función de densidad espectral (FDE)

En el caso en que $F(\lambda)$ no presente saltos, se podrá obtener $dF(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ y

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda k) f(\lambda) d\lambda = 2 \int_0^{\pi} \cos(\lambda k) f(\lambda) d\lambda \quad (5-16)$$

donde $f(\lambda)$ es la **función de densidad espectral**(FDE). Como $\gamma_0 = \int_0^\pi f(\lambda)d\lambda$, la FDE nos da la contribución de cada frecuencia (intervalo de frecuencias) entre $-\pi$ y π a la variación de de la serie analizada. (Arteche (2008))

El periodograma

La importancia de cada frecuencia λ_j en la variación de x_t se determina por el **periodograma**. El periodograma es un estimador de la *Función de densidad espectral*. Para una serie $x_1, x_2, \dots, x_T$ en la frecuencia λ es definido como:

$$I_x(\lambda) = |W_x(\lambda)|^2 \quad W_x(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{t=1}^T x_t e^{-i\lambda t} \quad (5-17)$$

Dado que $I(\lambda)$ es periódico de periodo 2π , se tiene que $\lambda \in (-\pi, \pi)$.(Arteche (2008))

El periodograma tambien puede ser expresado como:

$$I(\lambda_j) = a_j^2 + b_j^2 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5-18)$$

Donde a y b son los coeficientes de la transformada de Fourier. La descomposición de la serie por frecuencias, se puede ver gráficamente con el periodograma. Este muestra la importancia de cada frecuencia de Fourier en la representación de la serie. Se puede graficar por período o por frecuencia, donde el eje vertical es la suma de los cuadrados del seno y coseno, por lo que los datos de mayor valor son las frecuencias más representativas de la serie.

5.5.2. El modelo ARMA fraccionalmente integrado

En primer lugar se definen los modelos ARIMA como:

$$\phi(B)\Delta^d Y_t = \phi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B)a_t \quad (5-19)$$

Donde $\Delta^d Y_t = (1 - B)^d Y_t$ es un proceso estacionario, d es un número entero positivo, B es el operador de retardo, $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco con distribución $N(0, \sigma^2)$, y $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ es el polinomio característico del modelo autorregresivo (AR) y $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ el polinomio del modelo de media móvil (MA).(Castaño Velez et al. (2010))

Por otra parte según Castaño Velez (2016), se dice que un proceso estocástico $\{Z_t\}$ sigue un proceso ARFIMA(p,d,q) si es una solución a la ecuación:

$$\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)a_t \quad t = 1, \dots, T \quad (5-20)$$

Además θ_0 es una constante y d , a diferencia del modelo ARIMA, es un número real no entero, al que se denomina usualmente como el *parámetro de diferenciación fraccional*.

Análogamente al modelo ARIMA, a_t son variables aleatorias i.i.d con media cero y varianza finita σ_a^2 (Castaño Velez (2016)) y :

$$(1 - B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j \quad (5-21)$$

- Si los polinomios $\phi(B)$ y $\theta(B)$ tienen sus raíces fuera del círculo unidad, y los valores del parámetro d se encuentran en el intervalo $-1/2 < d < 1/2$, $d \neq 0$, el proceso ARFIMA(p,d,q) es estacionario e invertible.(Castaño Velez et al. (2008))
- Si $d > |1/2|$ el proceso en este caso será no estacionario.
- La componente ARMA(p,q) del modelo ARFIMA es denominada la componente de corto plazo.
- Finalmente se puede enunciar que los modelos ARFIMA se escriben en forma semejante a los ARIMA, con la diferencia que en el modelo ARFIMA el parámetro de diferenciación fraccional varía entre $(-0.5, 0.5)$.

6 Antecedentes

Una de las propiedades principales de los sismos es que presentan un patrón temporal de ocurrencia, el cual se examina desde un punto de vista estadístico mediante el análisis de los correspondientes catálogos sismológicos. Muchos estudios de estos catálogos en diferentes zonas han demostrado que la distribución temporal de los terremotos, en una región por lo general, sigue una distribución probabilística Poisson, lo que indica la independencia temporal de los eventos sísmicos registrados. (Corral (2004))

Dicha independencia temporal es una característica que se presenta principalmente en grandes terremotos, que se espera que ocurran como un proceso estacionario de Poisson dentro de una zona determinada. Algunos autores también proponen modelos diferentes al Poisson, que según ellos son más precisos y tienen en cuenta el pasado de la región bajo análisis, como lo son los procesos de Markov. (Kostić et al. (2014))

A diferencia de los modelos mencionados anteriormente, en los cuales se supone que los terremotos son eventos independientes, también se ha abordado en diferentes investigaciones el supuesto de que los terremotos podrían presentar un comportamiento caótico, como resultado de extensos análisis de la teoría del caos. Son importantes los estudios realizados por los autores Beltrami & Mareschal (1993), los cuales trataron de encontrar un atractor extraño de la serie de terremotos registrados entre 1969 y 1987 en Parkfield-California, la cual es la zona de la tierra donde ocurren el mayor número de sismos y es llamado por muchos como *El pueblo de los terremotos* dada su alta actividad sísmica. No obstante los investigadores no corrieron con suerte pues sus resultados resultaron confusos.

Matcharashvili et al. (2000) encontraron evidencia de atractores para los terremotos en la región caucásica mediante el análisis de tiempos entre eventos sucesivos. El resultado más relevante de su estudio fue que la dinámica de los sismos en esta área se caracteriza por una mezcla de comportamiento estocástico y caótico. Otros artículos donde se han abordado temáticas importantes de sismología y fractales son:

Siguiendo la línea del comportamiento caótico y fractal presentes en los temblores, Matsuzaki (1994) presenta las principales leyes de potencia que caracterizan a los fenómenos sísmicos; entre ellas están: La distribución magnitud-frecuencia, la distribución de energía liberada, la distribución de frecuencia de tamaño de los sismos, la distribución espacial de los hipocentros, la ley de potencia de las réplicas las cuales poseen la característica importante de invarianza a escala y por último la función de correlación de ocurrencia. Los anteriores modelos pretendían explicar las características fractales de los fenómenos sísmicos en Japón.

Patino Ortiz (2009), determinó que un análisis fractal era pertinente para describir la actividad sísmica presentada en la placa de Cocos en México en el periodo de 1988 a 2004; aplicando diversos análisis a los datos obtenidos por el Instituto de Geofísica de la UNAM, se logró encontrar varios resultados de interés desde el punto de vista estadístico-fractal:

- Se detectó valores menores a 1 para b y se observó que en cuanto a ocurrencia y magnitud se presentó una distribución que obedece a un ajuste de leyes de potencia.
- Se encontró que en cuanto a la energía liberada en forma de ondas sísmicas y la evolución de este, se puede modelar mediante series de tiempo.
- Se logró determinar resultados importantes de autosemejanza en el proceso sísmico, esto es, la sismicidad está organizada jerárquicamente presentando la misma estructura en diferentes escalas de observación, que es el comportamiento típico de los fractales.
- Se evidenciaron correlaciones a largo plazo de magnitudes relacionadas con el escalamiento dinámico de fluctuaciones de actividad sísmica, esto permite el uso de herramientas de la teoría de la rugosidad cinética para modelar y predecir fluctuaciones de la actividad sísmica.

Con el objetivo de combinar los métodos estadísticos y fractales Hough (1995) elaboró un modelo híbrido que permite una distribución fractal de ruptura de áreas, este modelo consiste en combinar el momento sísmico y la magnitud de momento con la distribución log-normal de sismicidad. Esto con el fin de determinar la tasa esperada de terremotos moderados y grandes en la región metropolitana de los Ángeles. Se espera que la mayor parte de la liberación de la energía sea absorbida por eventos poco frecuentes pero extremadamente grandes.

Montanari et al. (1997) plantearon el cálculo del coeficiente de Hurst para determinar si la serie de observaciones diarias, entre 1943 y 1994 correspondiente al afluente del Lago Mayor ubicado entre los países Italia y Suiza, presenta corta o larga memoria, en donde se espera que la serie presente memoria larga dado que dicho proceso hidrológico podría ser asociado a un fenómeno natural.

En lo que respecta a la metodologías estadísticas como las series de tiempo, los procesos de memoria larga son de gran utilidad para explicar fenómenos naturales estudiados en geofísica, biología y otras áreas del conocimiento. Uno de estos procesos son los modelos ARFIMA. Estos modelos de memoria larga van más allá de la presencia de caminatas aleatorias o raíces unitarias y su principal objetivo es tratar de explicar la correlación a largo plazo persistente en los datos de una serie de tiempo natural (Contreras-Reyes & Palma (2013)). El parámetro d de diferenciación fraccional de un proceso estocástico ARFIMA(q,d,p), calculado por medio del algoritmo Whittle, es además un indicador de memoria larga de los datos siempre y cuando $d \in (-1;0,5)$ (Contreras-Reyes & Palma (2013)).

En el campo de la fractalidad ciertos fenómenos naturales, como los sismos, presentan correlaciones o persistencias a largo plazo (Mandelbrot (1977)), por ende, se cree que es de vital importancia relacionar los procesos de memoria larga, como los ARFIMA, con la teoría fractal mediante el cálculo del parámetro de diferenciación fraccional d .

Para comparar el desempeño de estimar el parámetro d bajo diferentes procedimientos, Reisen et al. (2001) se plantearon como objetivo realizar un estudio de simulación donde se evaluaron un total de 5 métodos, de los cuales 4 de estos son estimadores semiparamétricos (periodograma, periodograma suavizado, Robinson, GPH) y uno de ellos paramétrico (Whittle). Para la identificación y estimación de los parámetros de los diferentes modelos ARFIMA los autores decidieron simular observaciones asumiendo una distribución Normal estándar. Para la aplicación de cada uno de los procedimientos para el cálculo de d , Reisen et al. (2001) asumieron un valor fijo para cada uno de los parámetros involucrados en el estadístico del procedimiento, esto se realizó puesto que el software BCONF que se utilizó así lo exigía.

Para comparar la eficiencia de las estimaciones del parámetro d se examinó la desviación estándar, el error cuadrático medio, el sesgo y además las estimaciones se realizaron para diferentes tamaños de muestra ($n=150$, $n=300$, $n=10.000$). Reisen et al. (2001) concluyeron que cuando se realizan las estimaciones con componentes AR y MA, los estimadores semiparamétricos resultaron ser más precisos que el método de Whittle. El método Robinson resultó ser siempre el que presentó resultados más desfavorables pues presentaba siempre sesgo, error cuadrático medio y desviación estándar mayor que el resto de procedimientos.

7 Metodología del análisis

7.1. Construcción del catálogo

En sismología es de vital importancia la construcción de un conjunto de observaciones en una área específica a la que se le denomina **catálogo**. Estos catálogos se construyen sobre regiones extendidas que a menudo se eligen como una cuestión de conveniencia, acceso y representan a menudo fronteras políticas. (Udías & Mezcua (1986))

El catálogo ha sido extraído de la página web de la Red Sismológica Nacional de Colombia la cual es de dominio público. Este además de contar con la variable magnitud, tiene otras variables de interés como fecha, hora exacta, coordenadas geográficas (latitud y longitud), profundidad, ubicación política (departamento y municipio) para cada uno de los eventos.

7.2. Método interpolación de los datos

No es posible proceder con el análisis usual de series temporales puesto que las observaciones del catálogo no son susceptibles a ser analizados como una serie de tiempo dado que estas no se encuentran uniformemente espaciadas, por lo cual no es posible aplicar los modelos tradicionales de ajuste como lo son el ARMA, ARIMA, entre otros. Esto se debe a que dichos modelos llevan consigo la premisa de que el conjunto de observaciones bajo análisis deben ser equidistantes.

Aunque en la actualidad, existe un modelo llamado CARFIMA (Proceso de media móvil fraccionalmente integrado y auto-regresivo en tiempo continuo) bajo el cual la premisa de equidistancia de las observaciones no es un requisito. No obstante el modelo CARFIMA lleva consigo cálculos y aspectos teóricos con un alto grado de complejidad, el cual no está al alcance de este trabajo de grado.

Por suerte en la práctica se puede escoger algún método de interpolación, que permita construir nuevos puntos de datos dentro del rango de un conjunto discreto de puntos de datos, y de esta manera transformar las observaciones en uniformemente espaciadas. Según Feigelson & Babu (2012) se puede escoger algún estadístico como método de interpolación tal como el Máximo, el Mínimo, el Promedio.

En este informe se ha decidido trabajar con el Máximo diario, semanal y mensual, dado que en el contexto del análisis sísmico es de importancia examinar aquellos eventos de gran magnitud. Y en el contexto del análisis fractal es importante encontrar algún indicio de

apariencia similar en diferentes escalas, las cuales pueden ser temporales o de medición. Esto es de gran interés ya que Según Mandelbrot (2000) la *autosimilitud* o *autoafinidad* son características intrínsecas de los objetos fractales. Adicionalmente, con estas tres ventanas temporales se dispone de un buen número de datos que permiten el cálculo de indicadores fractales y permiten ver las series temporales en tiempo discreto y equidistante.

No se elige el promedio puesto que no tendría significado en un contexto práctico además que se estaría posiblemente cometiendo el error de relacionar sismos provenientes de distintos orígenes, mientras que con el mínimo se estaría trabajando quizá con réplicas y no con sismos importantes.

7.3. Análisis exploratorio de datos

Para cualquier investigación científica se necesita una base de información resumida que sirva de punto de partida y que facilite la identificación de patrones que permitan responder las cuestiones de interés.

Los datos objeto de análisis son de naturaleza continua, y pertenecen a la variable de interés **magnitud**, medida en la escala de Richter (rango de 0-10). Corresponden a eventos sísmicos registrados desde 1.996 hasta 2.017, en los departamentos de Boyacá, Norte de Santander y Santander, para un total de 98.653 observaciones.

Se plantea como primer paso un análisis descriptivo de los datos obtenidos, incluyendo un boxplot, estadísticos (tales como mediana, moda y cuartiles) y una representación espacial de los eventos analizados para las tres ventanas de tiempo, esto con el fin de determinar si se cumple *autosemejanza*, propiedad esencial de los fractales. Posteriormente se calculará un histograma del número de sismos por año, el número de sismos por profundidad, y se propone un análisis descriptivo por cada uno de los departamentos analizados con el fin de determinar si existen diferencias significativas entre estos y así caracterizar aún mejor la zona de estudio.

Como parte final del análisis exploratorio se calculará el valor óptimo de la *Magnitud de Completitud* por el criterio de la curvatura máxima, el histograma de frecuencias para todo el conjunto de datos, el logaritmo del número de eventos des acumulativo y posteriormente la estimación de los parámetros a y b de la relación de Gutenberg y Richter para posterior interpretación desde el punto de vista sismológico.

7.4. Cálculo de los indicadores fractales

En esta etapa se calculan los principales indicadores de la teoría fractal. Después de calcular estos coeficientes se interpretarán en el contexto de la sismología. No es posible calcular los indicadores fractales sin antes calcular el *rezago óptimo* y la *dimensión de inserción*.

7.4.1. Construcción de la dinámica caótica

En sistemas dinámicos, el valor inicial del sistema se ve transformado con el tiempo, y bajo ciertas condiciones se van acercando a un conjunto llamado **atractor** del sistema. A veces ocurre que dicho atractor tiene una estructura fractal. Es de interés en esta etapa encontrar el atractor asociado a la serie de datos.

La existencia y la dimensión de un atractor en una serie temporal puede ser tratada mediante el método de dimensión de recuento por cajas (*Box Counting*), que se trató en el marco teórico. De otro lado, debido a que los atractores son regiones de convergencia en el espacio de fase y la estabilidad de un sistema depende del comportamiento ulterior, la serie de datos en el tiempo deberá ser suficientemente grande de tal manera que garantice dicha convergencia y estabilidad. En este caso se cuenta con un total de 7.670,1.096 y 252 observaciones comprendidas entre los periodos 1.996 y 2.017.

7.4.2. Rezago óptimo

Según Gallego Valencia et al. (n.d.) el cálculo del rezago óptimo es apropiado mediante la función de información mutua promedio (IMP).

La *IMP* mide la dependencia entre una variable aleatoria X con posibles valores x_i , dado que se conoce el comportamiento de otra variable Y con posibles valores y_j :

$$I(x_i; y_j) = \frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)} \quad (7-1)$$

Donde $P(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j)$ y $P(x_i) = P(X = x_i)$ para $i=1,2,\dots,n$ y $j=1,2,\dots,m$.

El procedimiento a seguir para el análisis de series de tiempo será calcular la información mutua promedio entre las observaciones de la misma serie analizada. Sea la serie diaria, mensual y/o semanal igual a x_n , su IMP es igual a:

$$I(x_i; x_i) = \frac{P(x_i|x_i)}{P(x_i)} \quad (7-2)$$

Se considerará entonces como valor óptimo aquel valor que minimice la función de **Información Mutua Promedio(IMP)**.

7.4.3. Dimensión de inserción

Mediante el cálculo de la dimensión de inserción se busca determinar un número necesario de coordenadas que permitan analizar el sistema de manera global. Se utiliza el algoritmo de Cao (1997) para el cálculo de esta dimensión.

Algoritmo de Cao (Cao (1997))

Denominado también como el *Método de Falsos Vecinos Cercanos Promediados*, y su gran ventaja según Cao (1997) es que no se requiere más que el tiempo de *rezago óptimo* para la implementación de este.

Para el cálculo de la dimensión de inserción de la serie y_n , se debe despejar d_θ de la ecuación:

$$y(n) = [s(n), s(n+T), s(n+2T), \dots, s(n - (d_\theta - 1)\tau_\theta)] \quad (7-3)$$

Con $n = 1, \dots, N - (d_\theta - 1)\tau_\theta$.

Después de despejar d_θ se procede con el cálculo de la cantidad:

$$a(n, d) = \frac{\|y_n(d+1) - y_{k(n,d)}(d+1)\|}{\|y_n(d) - y_{k(n,d)}(d)\|} \quad (7-4)$$

Donde $\| * \|$ es la norma. Con la cantidad de la ecuación anterior se calcula la función promediada:

$$E(d) = \frac{1}{N - d_{\tau_\theta}} \sum_{n=1}^{N-d_{\tau_\theta}} a(n, d) \quad (7-5)$$

Y posteriormente:

$$E_1(d) = \frac{E(d+1)}{E(d)} \quad (7-6)$$

A medida que el valor de la dimensión de inserción d crece, el valor del parámetro $E_1(d)$ se estabiliza en un valor d_0 en caso de que la serie provenga de algun proceso determinístico. (Cao (1997))

7.4.4. Cálculo de la dimensión fractal

Para el cálculo de la dimensión fractal de un conjunto de datos existen diversos procedimientos. El más popular de ellos es el *Box-Counting* (conteo de cajas). El método del recuento de cajas consiste en cubrir la imagen con una cuadrícula y luego contar cuántos cuadros de la cuadrícula están cubriendo parte de la imagen. Después se realiza de nuevo el proceso anterior, pero esta vez usando una rejilla más fina con cajas más pequeñas. Al reducir el tamaño de la cuadrícula repetidamente, terminamos capturando con mayor precisión la estructura del patrón.

Usando el método del conteo de cajas, la dimensión fractal es de nuevo la pendiente de la línea cuando trazamos el valor de $\log(N)$ en el eje Y contra el valor de $\log(\delta)$ en el eje X. Donde N es el número de cajas que cubren el patrón, y δ es la ampliación como se ilustra en la Figura 1.

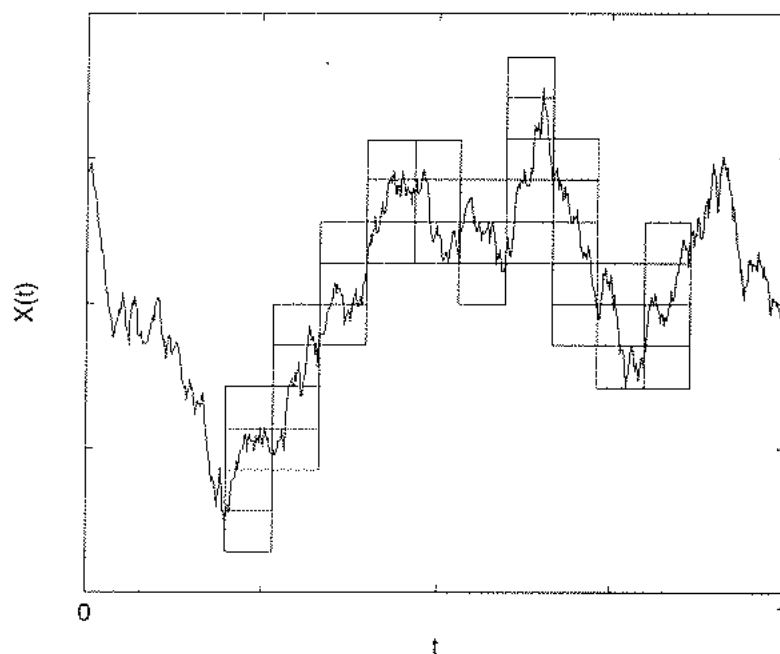


Figura 7-1: Box-Counting de un movimiento Browniano. Fuente: Breslin & Belward (1999)

Algoritmo

Se implementa el método Box-Counting para el cálculo de la dimensión fractal. En primer lugar se procede a seleccionar cuadros de longitud L que no se superpongan y cubran toda la gráfica, después se procede a contar cuantos (N) cuadros fueron necesarios para esto. Luego se debe realizar este mismo paso pero con una longitud de cuadro $\delta = L/2$ y se repite este procedimiento sucesivamente hasta llegar a $\delta = L/2^m$. Donde m varía desde 0 hasta un valor especificado, en este caso va a hacer el valor de la dimensión de inserción y L tomará el valor de τ o rezago óptimo. Luego se tabula los valores de la siguiente forma:

N	δ	$Ln(N)$	$Ln(\frac{1}{\delta})$
N_1	δ_1	$Ln(N_1)$	$Ln(\frac{1}{\delta_1})$
N_2	δ_2	$Ln(N_2)$	$Ln(\frac{1}{\delta_2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N_m	δ_m	$Ln(N_m)$	$Ln(\frac{1}{\delta_m})$

Tabla 7-1: Número de cuadros por cada longitud de cuadro con sus respectivos logaritmos

El siguiente paso es hacer una regresión lineal simple con $Ln(\frac{1}{\delta})$ como variable regresora y $Ln(N)$ como variable predictiva. El valor de la pendiente de esta recta será la dimensión fractal de la serie de tiempo en estudio.

7.4.5. Cálculo del coeficiente de Hurst

Los autores Plazas Nossa et al. (2014) describen el cálculo del exponente de Hurst, y explican que se realiza por medio del análisis del Rango Reescalado (R/S), llamado así por Benoit Mandelbrot quien generalizó el trabajo de Hurst. Los pasos para calcular el exponente de Hurst son los siguientes:

1. Dividir la serie de datos (N) en particiones (conjuntos de datos más pequeños (n)).
2. Calcular los estadísticos de cada partición: la media, la desviación de la media, la suma acumulada de las desviaciones y finalmente la desviación estándar S, para cada partición.
3. Calcular el rango de cada partición
4. Realizar la tabla y gráfica del logaritmo natural del rango de cada partición (n) contra el logaritmo natural del rango dividido entre la desviación estándar (R/S) Reescalado.
5. Determinar la ecuación o modelo de ajuste para la gráfica. La pendiente obtenida en la ecuación es, en este caso, el exponente o parámetro de Hurst (H). El ajuste del modelo se realiza por medio de la regresión lineal.

$$\ln[\text{Reescalado}(R/S)] = \ln(A) + H * \ln(n) \quad (7-7)$$

Donde $\ln A$ es el intercepto y H es la pendiente de la recta de ajuste y es el exponente de Hurst.

El valor del exponente de Hurst (H) está delimitado entre 0 y 1, lo que explica que el fenómeno se produjo debido a una invariancia del cambio de escala, que es una característica clave en las series de tiempo de tipo fractal. (Plazas Nossa et al. (2014))

7.4.6. Cálculo de los exponentes de Lyapunov

El algoritmo propuesto para el cálculo de los exponentes de Lyapunov es el propuesto por Kantz & Schreiber (2004) el cual consiste en calcular el mayor exponente de la función de exponentes de Lyapunov buscando todas las observaciones más cercanas, denominadas *vecinos*, calculando la distancia promedio entre cada uno de los datos en función del tiempo.

El algoritmo calcula los valores de Lyapunov de la siguiente ecuación:

$$S(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \left(\frac{1}{|U_t|} \sum_{i \in U_t} |x_{t+\tau} - x_{i+\tau}| \right) \quad (7-8)$$

Donde x_t , es un punto arbitrario de las series de tiempo; U_t es un conjunto de observaciones cercanas (vecinos); x_i es un vecino puntual de x_t ; τ es el tiempo de rezago óptimo y T es la longitud de las series de tiempo.

Según el valor del máximo exponente de Lyapunov, el tipo de movimiento de las órbitas puede ser dividido en varios grupos (Kantz (1994)):

Tipo de movimiento	Máximo Exponente de Lyapunov
Caos	$0 < \lambda < \infty$
Ruido	$\lambda = \infty$
Punto fijo estable	$\lambda < 0$
Ciclo de límite estable	$\lambda = 0$

Tabla 7-2: Tipo de movimiento de acuerdo al valor del máximo exponente de Lyapunov. Kantz (1994)

Si un sistema determinista es perturbado por algún tipo de ruido, su exponente máximo de Lyapunov es infinito. En caso de que los exponentes máximos de Lyapunov tomen valores entre $(0, \infty)$ sera evidencia suficiente de que el sistema tiene comportamiento caótico y por lo tanto existe un atractor extraño en el sistema.

7.4.7. Coeficiente de Entropía

Para una serie de datos la Entropía de Shannon se podría definir como una medida de incertidumbre promedio, la cual se obtiene de la siguiente forma (Shannon (1948)):

$$E = - \sum_i p_i \log_2(p_i) \quad (7-9)$$

Donde p_i es la probabilidad de que en la serie se dé el valor i .

Otra versión de esta medida en forma de una función de densidad continua, podría darse de la siguiente forma:

$$E = - \int_{\Omega} f(x) \ln [f(x)] dx \quad (7-10)$$

Donde $f(x)$ es la densidad en x y Ω es el conjunto de valores que puede tomar x (Preckel (2001)).

Para los dos casos mencionados se debe hacer una estimación de la probabilidad de que se dé un evento o valor:

- En el caso discreto se debe obtener una proporción del evento i en la serie de datos (Wang et al. (2015)).
- Para el caso continuo se debe estimar o asumir una función de densidad que puede tomar x , esto es calcular estimadores de los parámetros de una función teórica en específico en el conjunto de datos (Wang et al. (2015)).

- Esta función de probabilidad asumida debe de tratar de cumplir con el principio máximo de entropía de Jayne el cual establece que cuando se tiene cierta idea sobre la distribución desconocida de los datos, pero no lo suficiente para definirla completamente, se debe seleccionar una única distribución que logre conjuntamente, maximizar la medida de entropía, al mismo tiempo que cumpla con los criterios de la información conocida sobre la distribución (Preckel (2001)).

7.4.8. Mapa de Poincaré

Para el cálculo del mapa de Poincaré se supone inicialmente que la serie temporal bajo análisis es un conjunto de observaciones resultantes de un muestreo uniforme de $S(t)$, donde $S(t)$ es una medida (posiblemente ruidosa) de un sistema no lineal determinista.

Por ser los datos en estudio observaciones en el tiempo (magnitud máxima mensual, semanal y diaria), estamos hablando de un sistema unidimensional. Para este caso los mapas de fase se pueden generar mediante la representación de la variable contra si misma, por lo cual es necesario evaluarla con un retardo (τ), es decir, X_t contra $X_{t+\tau}$ (González Obregón (2002)). Por lo cual, se debe utilizar el rezago óptimo calculado de la información promedio mutua (IPM).

Un aspecto importante de los mapas de fase es que ellos se ven afectados por la cantidad de datos analizados que este caso varían de acuerdo a la ventana de tiempo analizada, es decir, la graficación es sensible de variar en función de las n -observaciones a trabajar (González Obregón (2002)). Sin embargo, se espera que al variar la escala de tiempo, los mapas sean similares con el fin de corroborar la propiedad de autosemejanza.

(González Obregón (2002)) sugiere que para completar la información en los mapas de fase es necesario aplicar los diagramas de Poincaré, los cuales poseen la característica de que cada órbita del atractor está representada por un único punto.

Estos puntos están proyectados sobre un plano perpendicular a las trayectorias del mapa de fases, esto con el objetivo de obtener una visión en dos dimensiones del atractor del sistema original (González Obregón (2002)). Con los mapas de Poincaré se podrá determinar si existe un atractor extraño en cada una de las series y por lo tanto concluir que las series tienen comportamiento caótico.

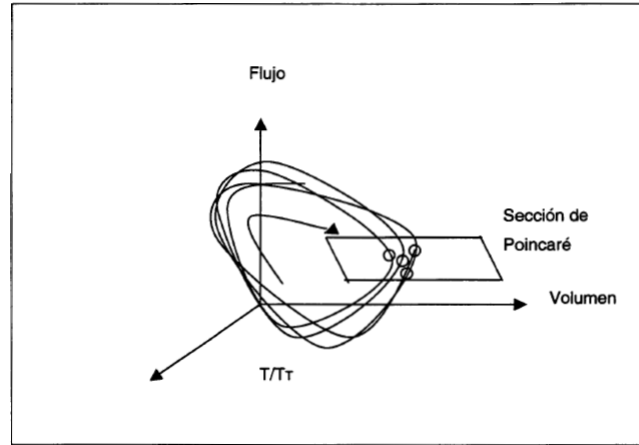


Figura 7-2: Sección de Poincaré del mapa de fases Volumen-Flujo de los registros cíclicos del patrón ventilatorio, normalizado respecto al tiempo. Fuente: González Obregón (2002)

7.5. Distribución magnitudes sísmicas

Para comprobar que la magnitud es una variable aleatoria, cuya función acumulada de distribución es exponencial se propone la construcción del *diagrama de frecuencias*. Dicho diagrama consiste en trazar los datos de magnitudes en función del logaritmo de las frecuencias acumuladas.

Con la ayuda de este histograma se define un umbral mínimo, en este caso se utilizará la magnitud de completitud (M_c). Después de elegir M_c se ajustarán los datos mediante la relación exponencial:

$$\log_{10} N(M) = a - b * M \quad (7-11)$$

De la relación anterior se estiman los parámetros a y b .

7.6. Ajuste modelo ARFIMA

Se ajustará un modelo ARFIMA para cada una de las series de tiempo (escala diaria, semanal, mensual) mediante el método de estimación de Whittle, el cual consiste en que dado un vector $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^t$ con media cero y matriz de varianzas covarianzas Σ , se calcula la función de log-verosimilitud:

$$L(\theta) = -\frac{1}{2n} [\ln|\Sigma| - Z^t \Sigma^{-1} Z] \quad (7-12)$$

El objetivo será entonces minimizar la anterior función de verosimilitud, aproximando una parte de la expresión por medio de la función de densidad espectral (Arteche (2008)):

$$\frac{1}{n} \ln |\Sigma| \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [2\pi f_{\theta}(\lambda)] d\lambda \quad (7-13)$$

Donde n es el numero de observaciones de la serie temporal, Σ es la matriz de varianzas-covarianzas y $f_{\theta}(\lambda)$ es la función de densidad espectral en la frecuencia λ . El procedimiento a realizar para cada una de las series será el siguiente:

1. Calcular la transformación Box-Cox para estabilizar la varianza de la serie, dicha transformación se representa como:

$$T(Z_t) = \frac{Z_t^{\lambda} - 1}{\lambda} \quad (7-14)$$

De acuerdo al valor de λ , se aplicaran las siguientes transformaciones:

Valores de λ	Transformación
-1	$\frac{1}{Z_t}$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Z_t}}$
0	$\ln(Z_t)$
0.5	$\sqrt{Z_t}$
1	Z_t

Tabla 7-3: Tipos de transformación Box-Cox

2. Identificar si la serie bajo análisis presenta memoria larga, mediante la estimación de los exponentes de Hurst y GPH.
3. Verificar si las series presentan raiz unitaria mediante el cálculo de los estadísticos KPSS y Dick Fuller.
4. Diferenciar las series fraccionalmente con el exponente de Hurst.
5. Ajuste de modelo ARFIMA(p,d,q) para $p, q \in \{0, 1, 2\}$, como parámetro de diferenciación se utilizará la estimación del coeficiente de Hurst y la prueba de memoria larga GPH, donde p es el orden del polinomio característico autorregresivo y q es el orden del polinomio de media móvil.

Estimador GPH: Geweke & Porter-Hudak(1983)

El GPH es un estimador semiparamétrico para el parámetro de diferenciación fraccional d , además puede ser empleado para contrastar la hipótesis de memoria larga.

Según Castaño Velez et al. (2008) la estimación del parámetro de diferenciación fraccional Geweke & Porter-Hudak es la siguiente: se debe empezar con la densidad espectral del proceso ARFIMA(p,d,q), y tomando su logaritmo natural se obtiene:

$$\ln f_z(\omega_j) = d \ln |1 - e^{-i\omega}| + \ln f_W(\omega_j) \quad (7-15)$$

Los autores muestran que para ω_j cercanas a cero, es decir, $j=1,2,\dots, m \ll (n/2)$ y tal que $m/n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, la estimación de d se basa en la regresión OLS de:

$$Y_j = c + dX_j + e_j \quad (7-16)$$

donde

$$Y_j = \ln I_j(\omega_j) \quad ; \quad X_j = \ln \left[\frac{1}{4[\sin(\omega_j/2)]^2} \right] \quad (7-17)$$

y donde:

- Las e_j son variables aleatoria i.i.d.
 - ω_j son las frecuencias de Fourier $\omega_j = 2\pi j/n$, $j=1,2,\dots,[n/2]$
 - El número de observaciones en la regresión es $m = n^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$.
6. Elección del mejor modelo por medio de los criterios de información Akaike, Hannan Quinn y Schwarz. Se seleccionará aquellos modelos con menor valor para los tres criterios anteriores.

El criterio Akaike para los modelos ARFIMA es igual a:

$$AIC(\hat{\omega}) = -2[\log L(\hat{\omega}) - (p + q + 1)] \quad (7-18)$$

Donde $\hat{\Omega} = (\hat{d}, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q)$ y $\hat{\omega} \subset \hat{\Omega}$. Se incentiva a modelos más parsimoniosos mediante la penalización $(p+q+1)$.

El criterio de información Hannan Quinn corresponde a la solución de la ecuación:

$$HQC = n \log \left(\frac{SCE}{n} \right) + 2 * (p + q) * \log \log n \quad (7-19)$$

donde k es igual al número de parámetros (p y q) del modelo, n el número de observaciones y SCE es la suma de cuadrados del error.

Mientras que el criterio de Schwarz o criterio de información bayesiano (BIC) es igual a:

$$BIC = -2\ln(\hat{L}) + (p + q) * \ln(n) \quad (7-20)$$

Donde n es el número de observaciones, k el número de parámetros del modelo y $\hat{L}$ es el máximo valor de la función de máxima verosimilitud.

8 Resultados

8.1. Análisis exploratorio

Se procede inicialmente con el cálculo de los principales estadísticos descriptivos de la variable *magnitud* en la escala de Richter, la cual es una medida que indica la cantidad de energía liberada en el foco (Espíndola (1994)). Se procede a describir dicha variable en las tres ventanas de tiempo (máximo diario, máximo semanal, máximo mensual), para descubrir indicios de *autosimilitud* o *autoafinidad*, propiedad intrínseca de los fractales (Mandelbrot (2000)).

Se observa comparativamente los departamentos de Santanader, Boyacá y Norte de Santander en las tres escalas de tiempo, esto para describir posibles diferencias entre las tres regiones de estudio. Adicionalmente se caracteriza la zona de investigación teniendo en cuenta la clasificación de sismos (Torres (2001)):

- Menores a 3: Muy pequeño
- De 3 a 3.9: Pequeño
- De 4 a 4.9: Suaves o ligeros
- De 5 a 5.9: Moderado
- De 6 a 6.9: Fuerte
- De 7 a 7.9: Muy fuerte
- Sobre 8: Extremadamente fuerte

En las *Tablas 8-1*, *8-2* y *8-3* se registran las principales estadísticas descriptivas de la variable magnitud y en los diagramas de cajas de las *gráficas 8-1*, *8-2* y *8-3* se observa comparativamente la dispersión de los datos en los departamentos en mención.

	Santander	Boyacá	Norte de Santander
Mínimo	1.3	2.0	2.1
Cuartil inferior	2.9	2.8	2.9
Mediana	3.3	3.2	3.2
Cuartil Superior	3.7	3.7	3.6
Máximo	6.3	5.7	5.2
Tamaño de la muestra	7259	224	155

Tabla 8-1: Magnitud Sísmica Máxima Diaria

Se puede observar que en la escala diaria el departamento de Santander los movimientos telúricos varían entre 1.3 y 6.3, es decir, se presentan en esta región sismos desde muy pequeños hasta fuertes, en comparación para Boyacá las magnitudes varían entre 2 y 5.7 y para Norte de Santander varían entre 2.1 y 5.2, lo cual clasifica a estos sismos desde pequeños hasta moderados para ambas zonas. Esta variabilidad se ve reflejada en los diagramas de cajas, donde Santander presenta mayor cantidad de datos atípicos con respecto a Boyacá y Norte de Santander. Cabe destacar que Santander concentra la mayor cantidad de sismos registrados (95 %), lo que puede incidir en una mayor variabilidad de los datos.

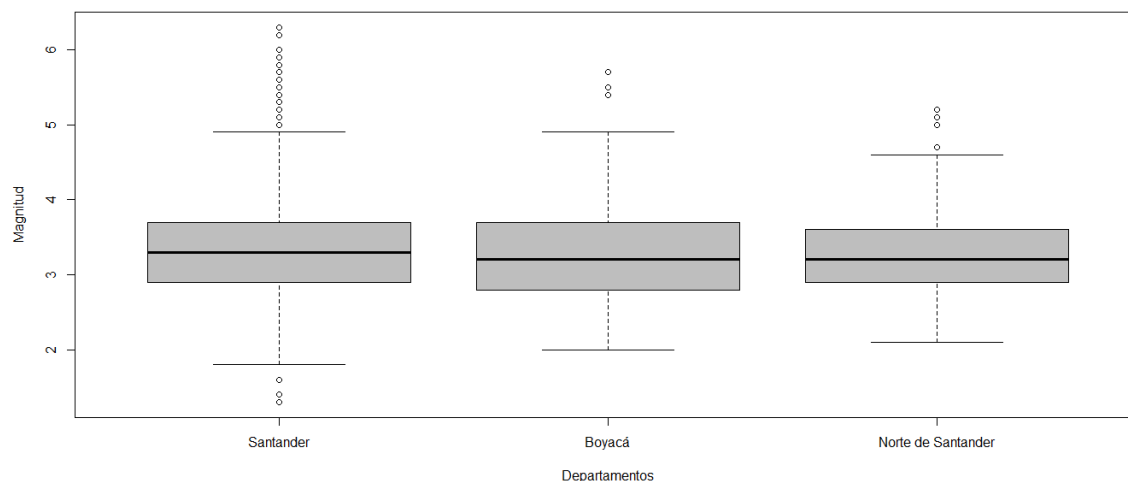
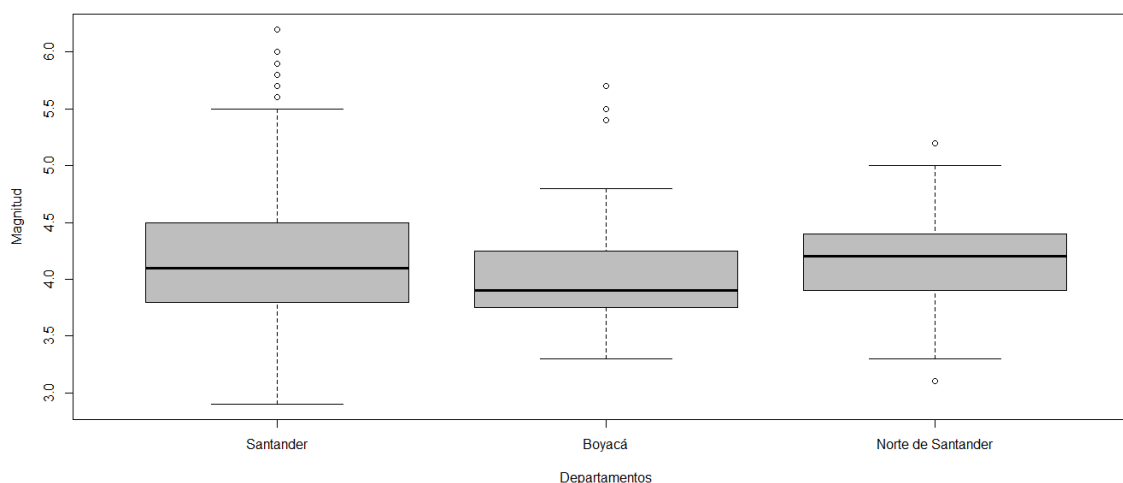


Figura 8-1: Diagramas de cajas Magnitud Máxima Diaria

	Santander	Boyacá	Norte de Santander
Mínimo	2.9	3.3	3.1
Cuartil inferior	3.8	3.75	3.9
Mediana	4.100	3.900	4.2
Cuartil Superior	4.5	4.25	4.4
Máximo	6.2	5.7	5.2
Tamaño de la muestra	1033	31	21

Tabla 8-2: Magnitud Sísmica Máxima Semanal

Se puede observar que para la escala semanal se presenta la misma clasificación que en la escala diaria, se registraron desde sismos muy pequeños hasta sismos fuertes en el departamento de Santander (magnitudes entre 2.9 y 6.2). Para Boyacá y Norte de Santander los sismos son clasificados desde pequeños hasta moderados ya que para ambos las magnitudes mínimas son mayores a 3 y sus magnitudes máximas son menores a 6. En los diagramas de cajas, para esta escala, se puede ver que Santander tiene mayor cantidad de datos atípicos y mayor variabilidad con respecto los otros dos departamentos. En esta ventana de tiempo semanal, Santander sigue concentrando la mayor cantidad de sismos registrados (95 %).

**Figura 8-2:** Diagramas de cajas Magnitud Máxima Semanal

	Santander	Boyacá	Norte de Santander
Mínimo	3.8	4.2	4.7
Cuartil inferior	4.4	4.5	4.925
Mediana	4.7	4.8	5.05
Cuartil Superior	5.1	5.45	5.125
Máximo	6.3	5.7	5.2
Tamaño de la muestra	243	7	4

Tabla 8-3: Magnitud Sísmica Máxima Mensual

Para la escala mensual la clasificación de los sismos cambia un poco para los tres departamentos, en Santander la clasificación fue desde temblores pequeños hasta temblores fuertes (magnitudes entre 3.8 y 6.3). En Boyacá y Norte de Santander la clasificación fue la mismas, se registraron desde temblores suaves o ligeros hasta temblores moderados. Santander sigue registrando la mayoría de los sismos, con un aproximado del (96 %), la variabilidad es aparentemente mayor en Boyacá pero esto es engañoso porque en este departamento se registraron 7 sismos en la escala de tiempo mensual, lo que equivale al (2,8 %) del total de los datos.

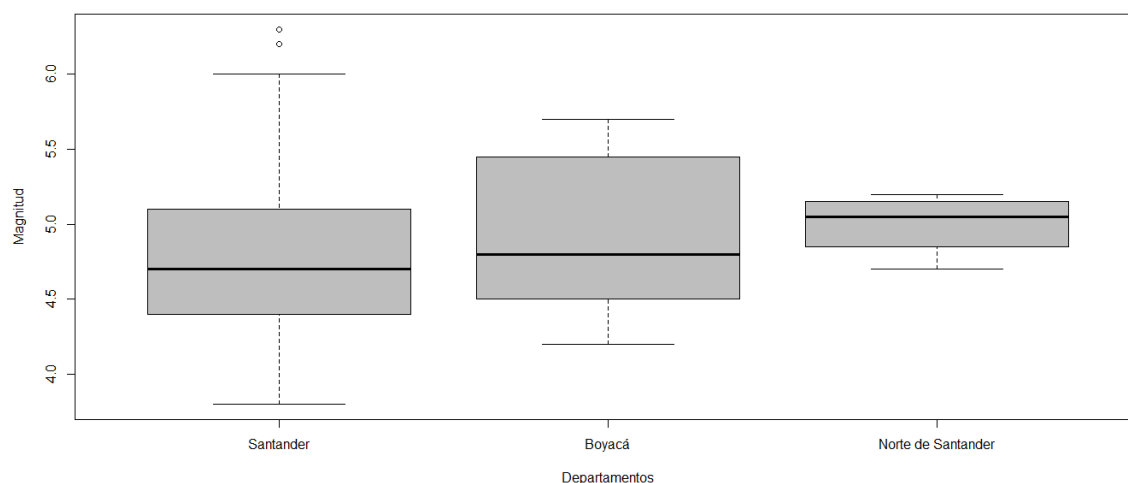


Figura 8-3: Diagramas de cajas Magnitud Máxima Mensual

En la *Figura 8-4* se pueden observar los Q-Q plots para la variable magnitud en donde al parecer la variable no se comporta de manera normal en ninguna de las tres escalas pues se evidencian colas pesadas, no obstante, esto debe ser comprobado con pruebas formales de normalidad.

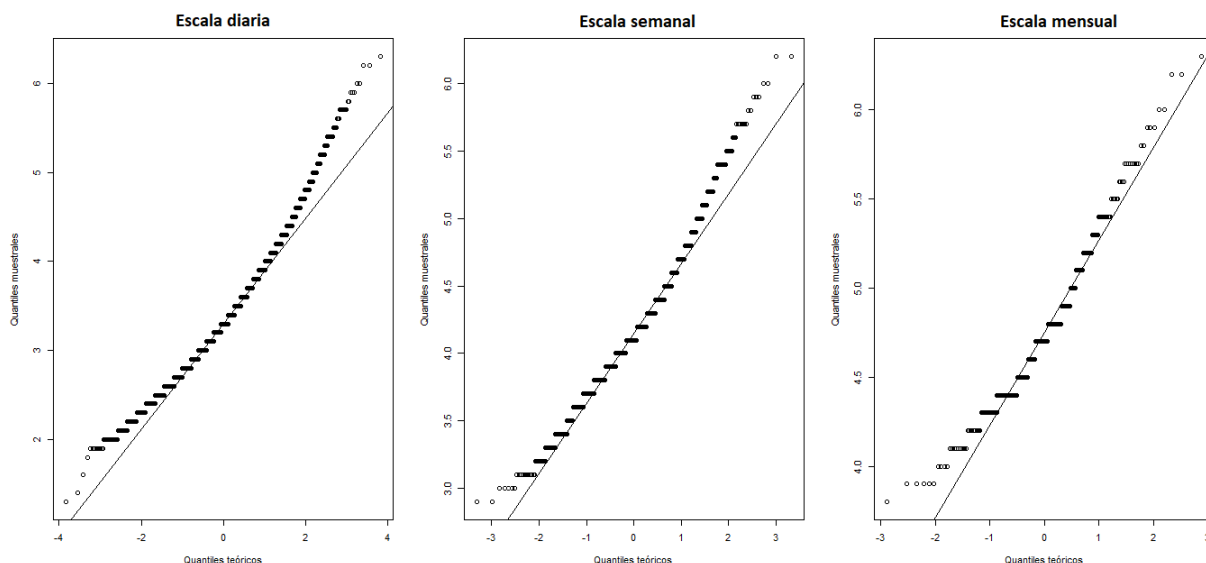


Figura 8-4: Q-Q plots a diferentes escalas de tiempo

Para determinar si la variable *magnitud* se distribuye de manera normal, se aplica el test de *Jarque Bera* para las escalas diaria y semanal mientras que para la escala mensual se aplicará el test de *Shapiro-Wilk*, pues según Pedrosa et al. (2015) el test Jarque Bera es potente para tamaños de muestra grandes mientras que el test Shapiro Wilk lo es para tamaños de muestra pequeños.

Para las tres series se obtiene un Valor- $P=2.2e-16 < 0.05$, es decir, que con un nivel de significancia del 5 % se rechaza la hipótesis nula de que la variable *magnitud* en escala diaria, semanal y mensual sigue un comportamiento normal.

Continuando con el análisis exploratorio, se añade la *Figura 8-5* en la que se encuentra la ubicación geográfica de las observaciones para la variable *magnitud* de acuerdo a la intensidad de las observaciones. Esto se realiza con el objetivo de determinar en que lugares de la zona de estudio se registra una mayor cantidad de sismos.

Graficamente se observa que existe una conglomeración de eventos en el departamento de Santander, más específicamente en las coordenadas Latitud:6.7561 y Longitud: -73.102 la cual corresponde al municipio de Los Santos, el cual es el más activo en cuanto a sismicidad se refiere del territorio Colombiano según S.G.C (2013). Esto concuerda con las estadísticas anteriormente presentadas, donde el departamento de Santander fue el que registro mayor numero de eventos, con un 95 % de las observaciones en las tres ventanas de tiempo.

Además se observa que existen observaciones por fuera del territorio Colombiano (Venezuela), esto se debe a que existen sismógrafos en la frontera con dicho país. Aquellos sismos que ocurren en el país Venezolano son catalogados como si hubieran ocurrido en Norte de Santander.

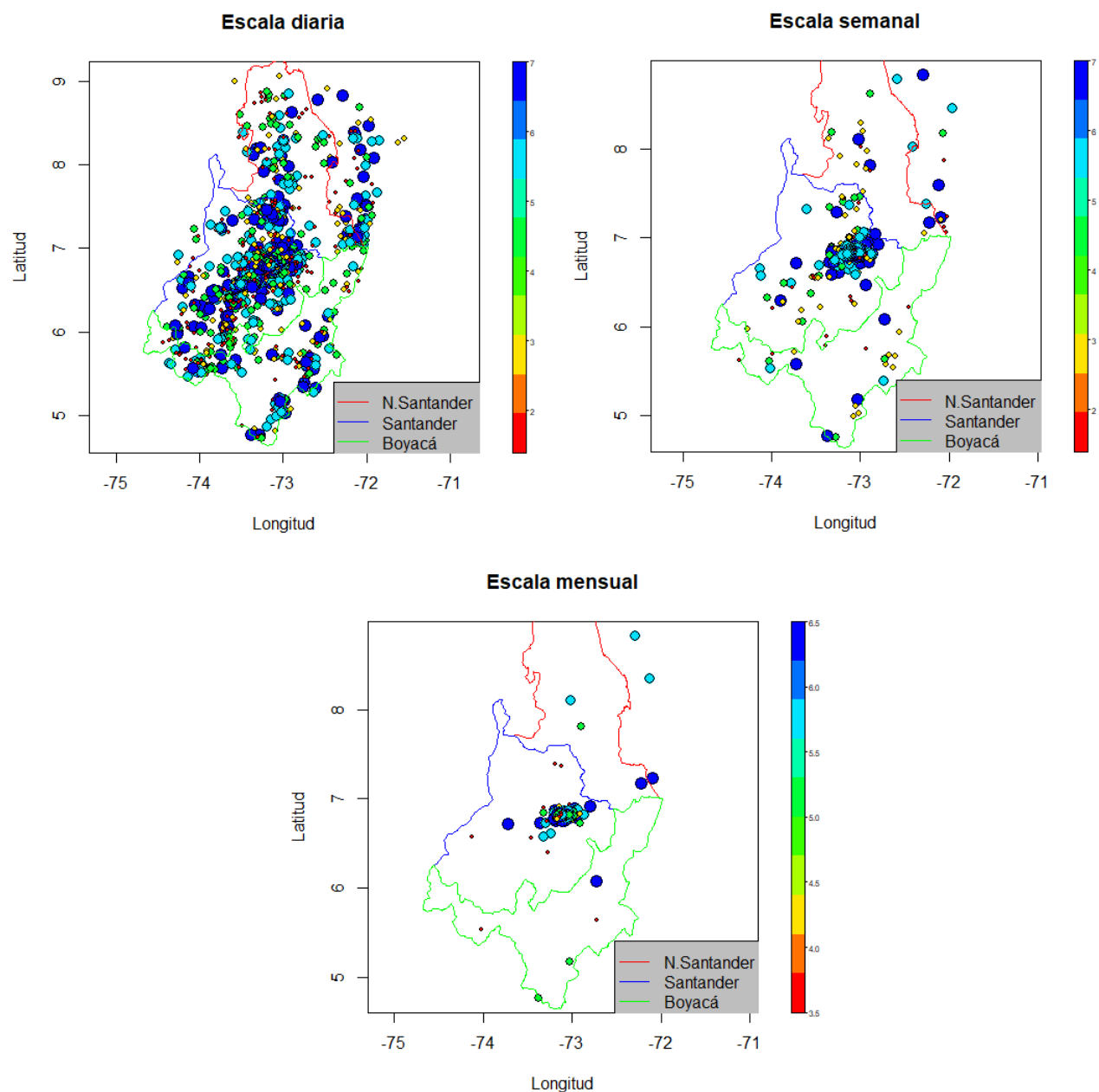


Figura 8-5: Localización de los eventos

Se plantea ahora analizar si el número de sismos en el país se incrementa a medida que pasa el tiempo, para ello se calcula un histograma del número de sismos por año.

En la *Figura 8-4* se observa un incremento en el número de sismos registrados a medida que avanza el tiempo(excepto en los años 2014 y 2015). Este es un resultado engañoso pues según el Servicio Geológico Colombiano con el avance de la tecnología se han podido instalar nuevos sismografos en zonas donde no los había con lo cual se incrementa la detección del

número de sismos y por lo tanto su reporte, es por ello que no es correcto afirmar que se ha incrementado el número de sismos en el país, tan solo se ha incrementado el poder de detección sismológico.S.G.C (2015)). Como no se tiene la información de cuantos sismógrafos hay por año, no se puede deducir si se ha incrementado la detección más que el numero de sismos.

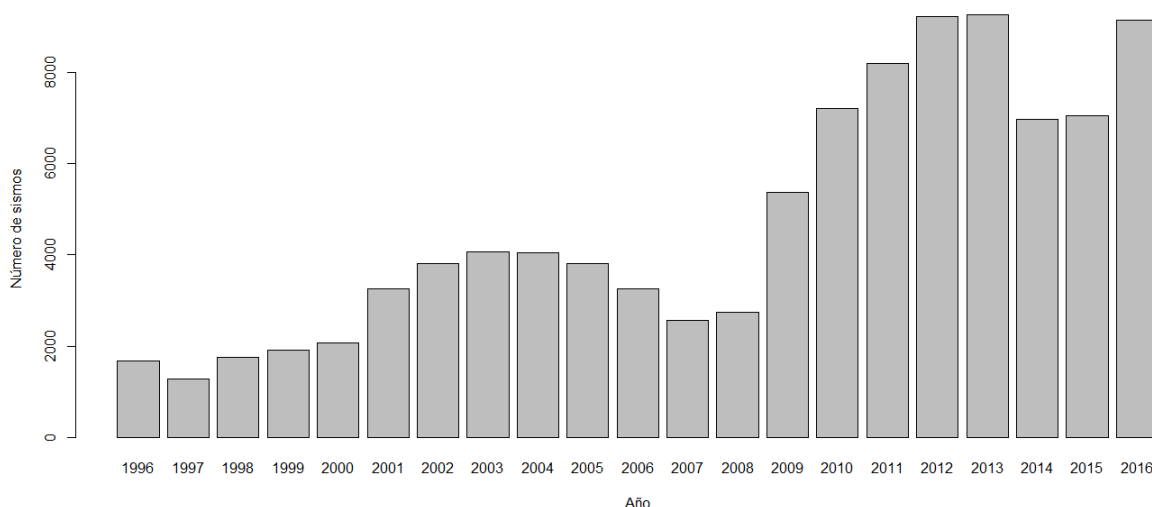


Figura 8-6: Número de sismos por año.

Posteriormente se realiza un histograma para la profundidad, para determinar la naturaleza de los sismos. Se encuentra que los eventos registrados entre 1996-2017 son principalmente de gran profundidad, entre 130-160 metros se presenta la mayor cantidad de estos. Por lo cual se evidencia que la naturaleza de los mismos es de carácter *profundo*.

Después de revisar el catálogo, se encuentra que los departamentos de Santander, Norte de Santander y Boyacá recogen el 70.38 % de toda la información sísmica, por lo cual se decide enfocar el análisis en estos tres departamentos. Además según el Servicio Geológico Colombiano estos departamentos son de especial importancia sísmica pues la sismicidad en estos es de carácter profundo e intermedio atribuido a una posible antigua subducción.

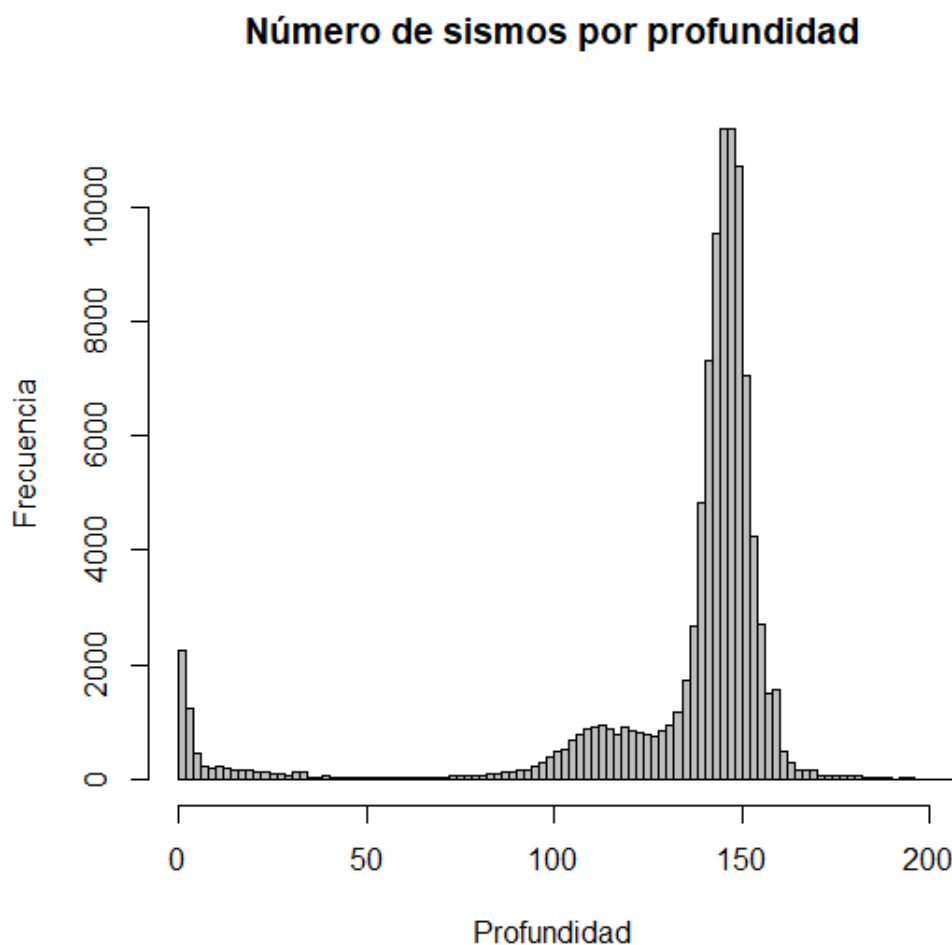


Figura 8-7: Histograma de profundidad

8.2. Relación Gutenberg y Richter

Con el fin de calcular los parámetros a y b de la ya estudiada ecuación de Gutenberg y Richter se ha calculado inicialmente el diagrama de frecuencias junto con el diagrama de frecuencias desacumulado en la Figura 8-6.

El diagrama de frecuencias se analiza mejor en una escala log-lineal como en la siguiente figura. Se evidencia claramente una relación lineal, entre las magnitudes 3 y 6.2, conocida como la **Ley de Gutenberg-Richter**:

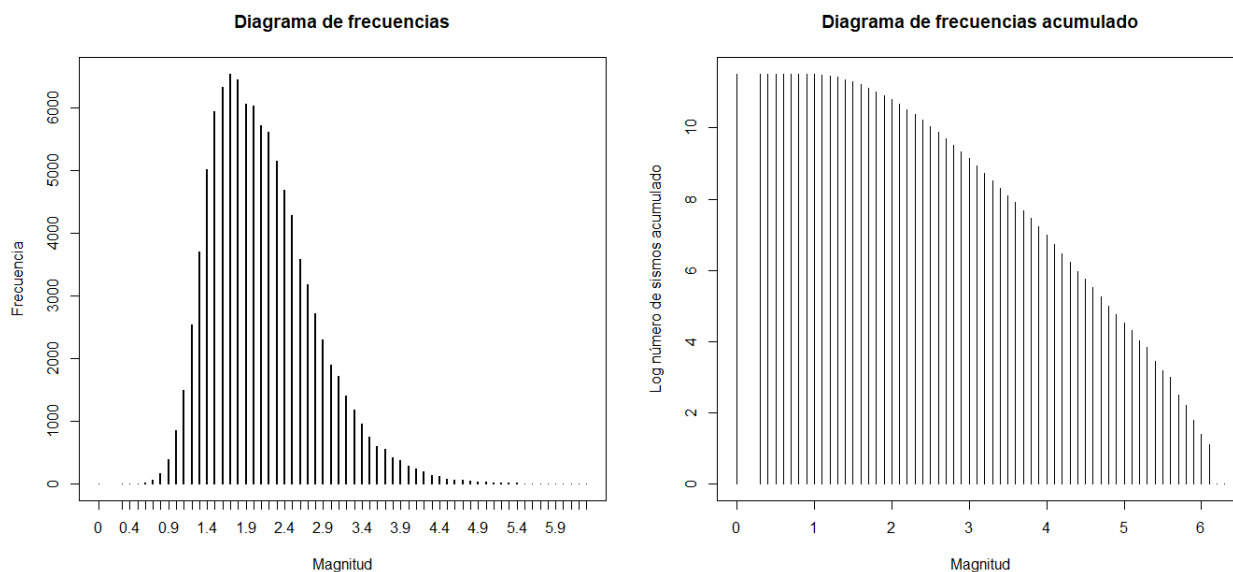


Figura 8-8: Histograma de frecuencias

Dado que los eventos de gran magnitud son poco probables, el diagrama de frecuencias registra una magnitud máxima finita y posteriormente las frecuencias caen a cero para altas magnitudes. Las frecuencias del centro del diagrama son una combinación de datos que describen un fenómeno real y datos derivados de la combinación de premonitores/replicas y eventos reales.

Del diagrama de frecuencias desacomulado, *Figura 8-6 (b)*, se observa una tendencia lineal. Se dice entonces que la magnitud de completitud es $M_c=3.1$ obtenido por el método de la máxima curvatura y será definida como la magnitud más baja a la que se detectan el 100 % de los sismos. Adicionalmente se observa que el diagrama de frecuencias no contiene recuentos para magnitudes por debajo de la sensibilidad absoluta de la red sísmica, dicha sensibilidad no es uniforme dando como resultado la reducción gradual de eventos a bajas magnitudes.

Posteriormente se restan a las magnitudes el valor correspondiente del M_c ($M_i - M_c$), se obtiene una relación que aparenta ser una línea recta sobre la cual se calculan los coeficientes de Gutenberg y Richter por Mínimos cuadrados Ordinarios(MCO):

Los coeficientes de la Ley de Gutenberg y Richter son $a=10.566$ y $b=2.536$. Se evidencia un valor b alto, lo que indica que en estos departamentos la actividad sísmica es importante, destacandose principalmente sismos de bajas magnitudes.

Se debe aclarar que cuando se traza la recta de la ley de Gutenberg y Richter, es puramente con fines ilustrativos y con el fin de corroborar de que el valor b es razonable con los datos, no sería correcto realizar una regresión sobre datos desacomulados, puesto que

la regresión nunca debe ser realizada con este tipo de datos ya que estos no son observaciones independientes entre si, al contrario, están correlacionados con todos los eventos de mayor magnitud, esto puede provocar que no se cumplan los supuestos básicos en la regresión lineal estimada por Mínimos cuadrados Ordinarios(MCO).

Por último, se calcula el valor b para todos los sismos registrados en el territorio colombiano entre 1996 y 2017; se obtiene que $b=2.347$ Se observa que dicho valor es muy similar para los tres departamentos que se analizaron anteriormente. Esto es un fuerte indicio de que la actividad sísmica del país parece estar fuertemente influenciada por estos tres departamentos.

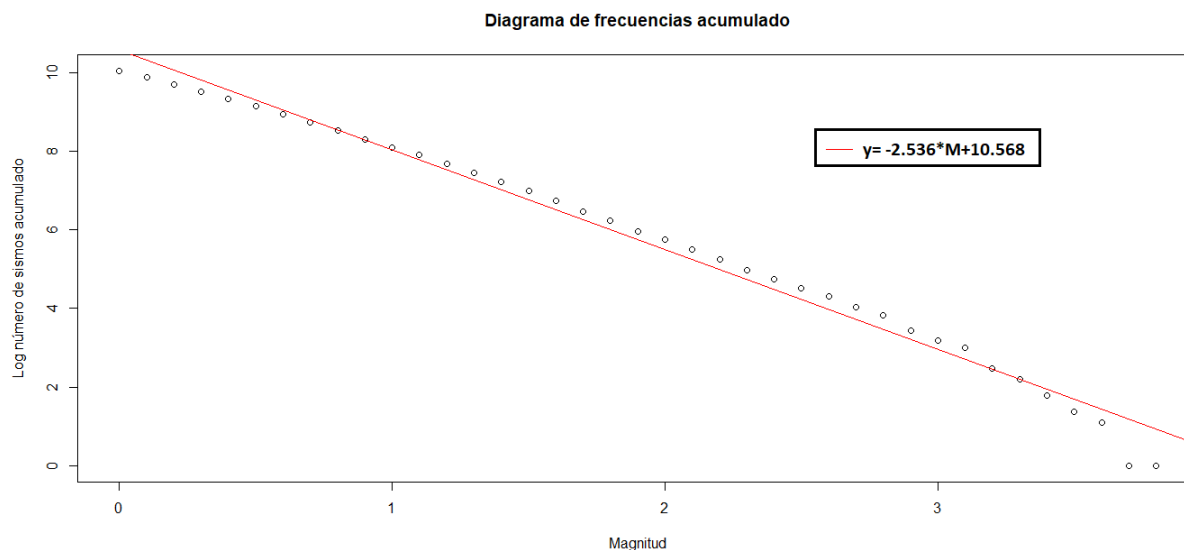


Figura 8-9: Diagrama del logaritmo de frecuencias

8.3. Detección de caos en series temporales

Se procede al cálculo de indicadores fractales para Santander, Norte de Santander y Boyacá para las tres series a escalas diferentes (Diaria, semanal y mensual). Antes de calcular cualquier coeficiente es necesaria la estimación del rezago óptimo y la dimensión de inserción. Los diferentes coeficientes han sido calculados con el software Team et al. (2013).

8.3.1. Tiempo de retardo

Para el cálculo del tiempo de retardo óptimo τ el método a emplear será seleccionar el rezago en el que la función de autocorrelación de Información mutua promedio decae significativamente a 0. Kantz & Schreiber (2004)

En la *Figura 8-8* se han adjuntado las funciones de información mutua promedio donde se evidencia que para las tres series después del primer rezago la IMP es menor que el límite de significancia (línea color verde):

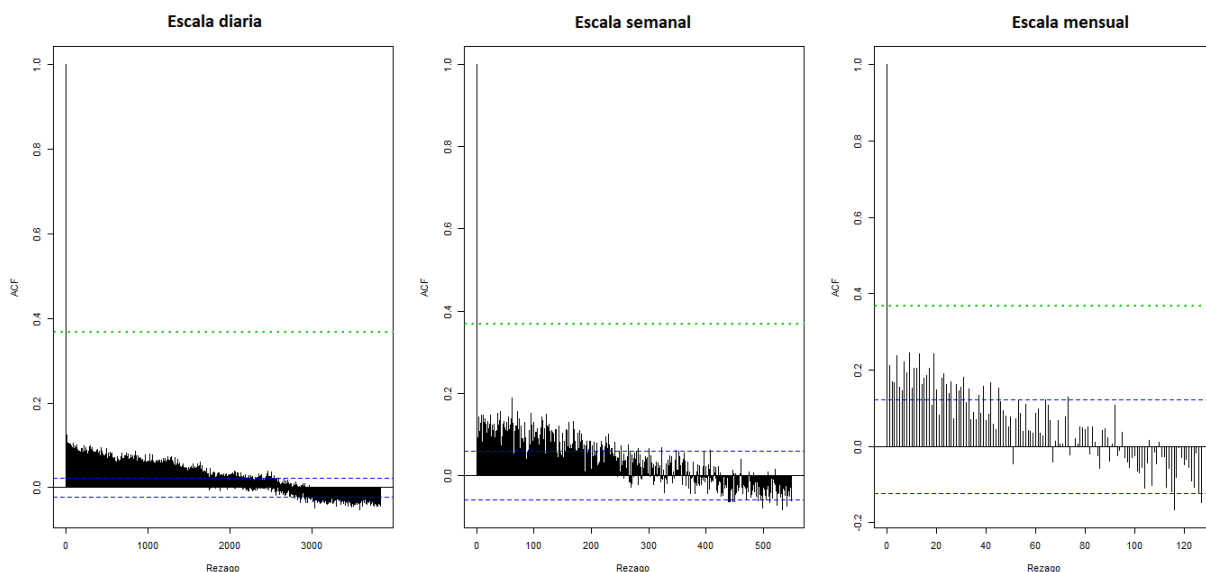


Figura 8-10: Cálculo tiempo de rezago óptimo

Con la ayuda del software R y el paquete '*fractal*' se implementa dicho método y el resultado es que el valor óptimo de τ es igual a uno, para las tres series bajo análisis, lo cual concuerda con la *Figura 8-8*. De la *Figura 8-8* se evidencia también una baja correlación que se mantiene a lo largo del tiempo, lo cual indica posible memoria larga la cual se verificará con la estimación de los coeficientes de Hurst y GPH.

8.3.2. Dimensión de inserción

Se podría pensar que la mejor decisión sería elegir una dimensión alta, sin embargo esto puede generar algunos problemas como la necesidad de una mayor cantidad de datos para asegurar un mejor modelado de la trayectoria, además de que con cada unidad aumentada en la dimensión se aumenta la cantidad de ruido introducida. (Velásquez Ceballos & Restrepo Restrepo (2012))

Se implementó el algoritmo de Cao para el cálculo de la dimensión de inserción m . En la *Figura 8-11* se pueden observar los valores para la función $E_1(d)$ y se puede observar que dichos valores empiezan a estabilizarse para $d=12$ y por lo tanto se concluye que $m=12$. Se observa además que los valores de la función $E_2(d)$ oscilan siempre alrededor de uno y por lo tanto la serie diaria es de naturaleza estocástica.

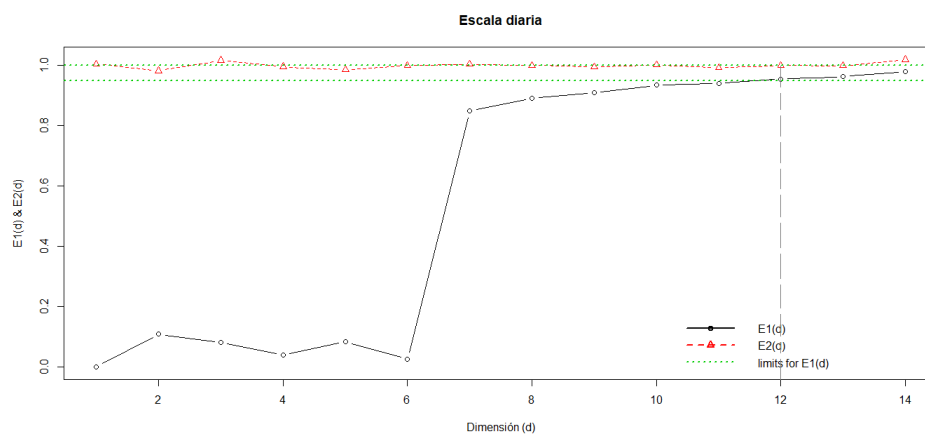


Figura 8-11: Cálculo dimensión de inserción escala diaria

Realizando un análisis similar resulta que las series semanal y mensual son de naturaleza determinista solo que los valores de m difieren un poco pues para la serie semanal $m=11$ mientras que para la serie mensual $m=9$.

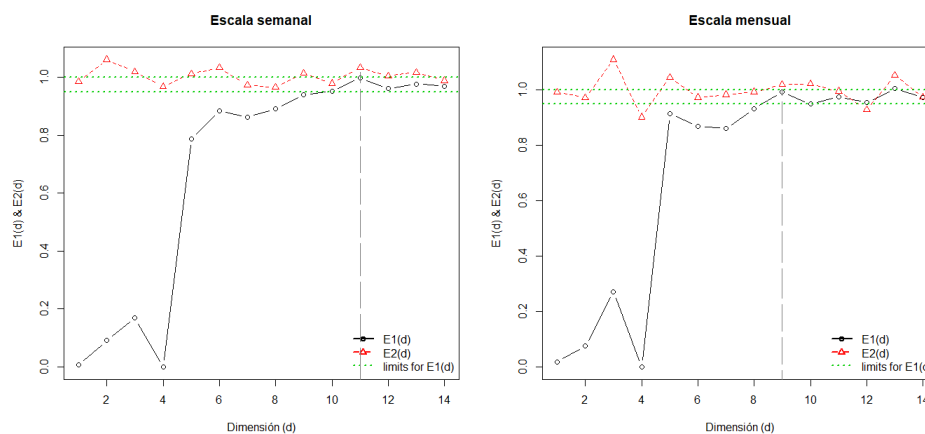


Figura 8-12: Cálculo dimensión de inserción escala semanal y mensual

8.3.3. Gráfico de recurrencias

En el eje x se representan las i observaciones. En el eje y se representa el retardo τ entre las observaciones. Cada par de valores de la gráfica corresponde a un par de observaciones $(X_i, X_{i+\tau})$. Si tiene un valor negativo, el punto $(X_i, X_{i+\tau})$ correspondiente se representa en negro. Si tiene un valor positivo, el punto $(X_i, X_{i+\tau})$ respectivo se representa en blanco. El comportamiento caótico se detectará por la presencia de líneas horizontales en la gráfica para el valor de τ en el eje de ordenadas. (Sepulveda (2004))

Se calculan ahora los gráficos de recurrencia para las series a diferentes escalas de tiempo y al frente de cada uno de ellos un gráfico de recurrencias de una serie de observaciones Ruido Blanco del tamaño respectivo de cada una de las series bajo análisis, esto con el fin de examinar el comportamiento caótico y compararlo con un comportamiento aleatorio:

Se observa que existe presencia de líneas blancas horizontales para las tres escalas de tiempo, lo cual indica que en estas series existe comportamiento caótico. Así mismo, se observa una notable diferencia entre el gráfico de recurrencias de las series de magnitudes y de los Ruido Blanco, pues mientras las líneas horizontales en el gráfico de recurrencias para las series Ruido Blanco se encuentran distribuidas uniforme, para las series de las magnitudes las líneas horizontales (como las verticales) tienden a conglomerarse en la parte inferior izquierda.

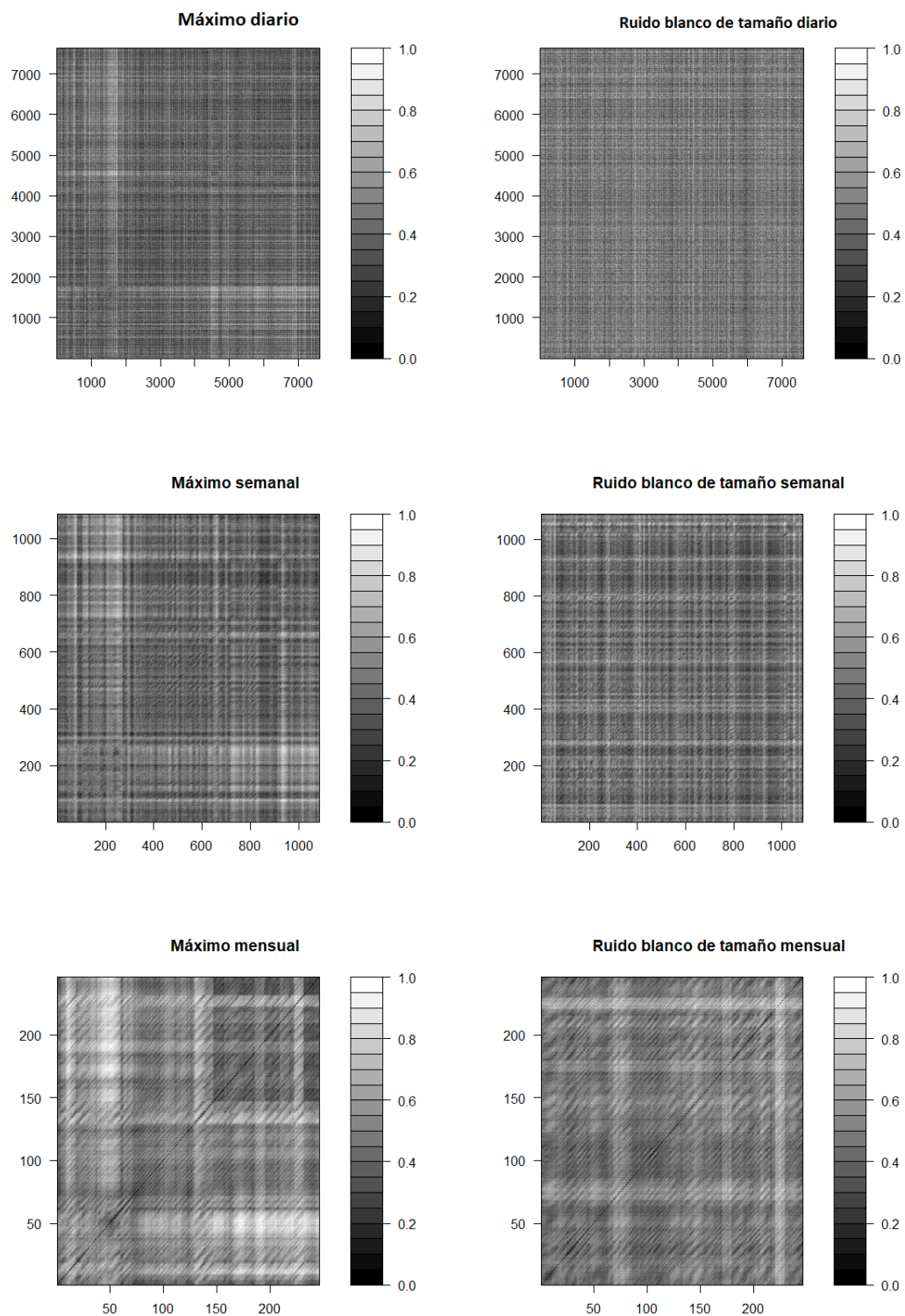


Tabla 8-4: Gráfico de recurrencias en diferentes escalas de tiempo Vs Ruido Blanco

8.3.4. Dimensión fractal

Se implementó el método de Box-Counting con el cual se encontró que la dimensión fractal aumenta a medida que se reduce la escala de tiempo (entiéndase en reducción de la escala de tiempo como en pasar por ejemplo de la escala Mensual a la Semanal y por lo tanto aumenta el número de observaciones).

De la *Gráfica 8-13* se puede observar que la serie Diaria presenta un mayor grado de Complejidad que el resto de las series ya que el $\hat{D}$ para el máximo diario fue de 1.76, en cambio para las otras dos series, semanal y mensual, fueron menores, 1.73 y 1.70 respectivamente. Esto se debe a que la serie Diaria contiene mayor información de la Serie Total ($n=98.623$) y por lo tanto es capaz de explicarla en mayor proporción mientras que el resto de las series son mas generales y por lo tanto menos complejas.

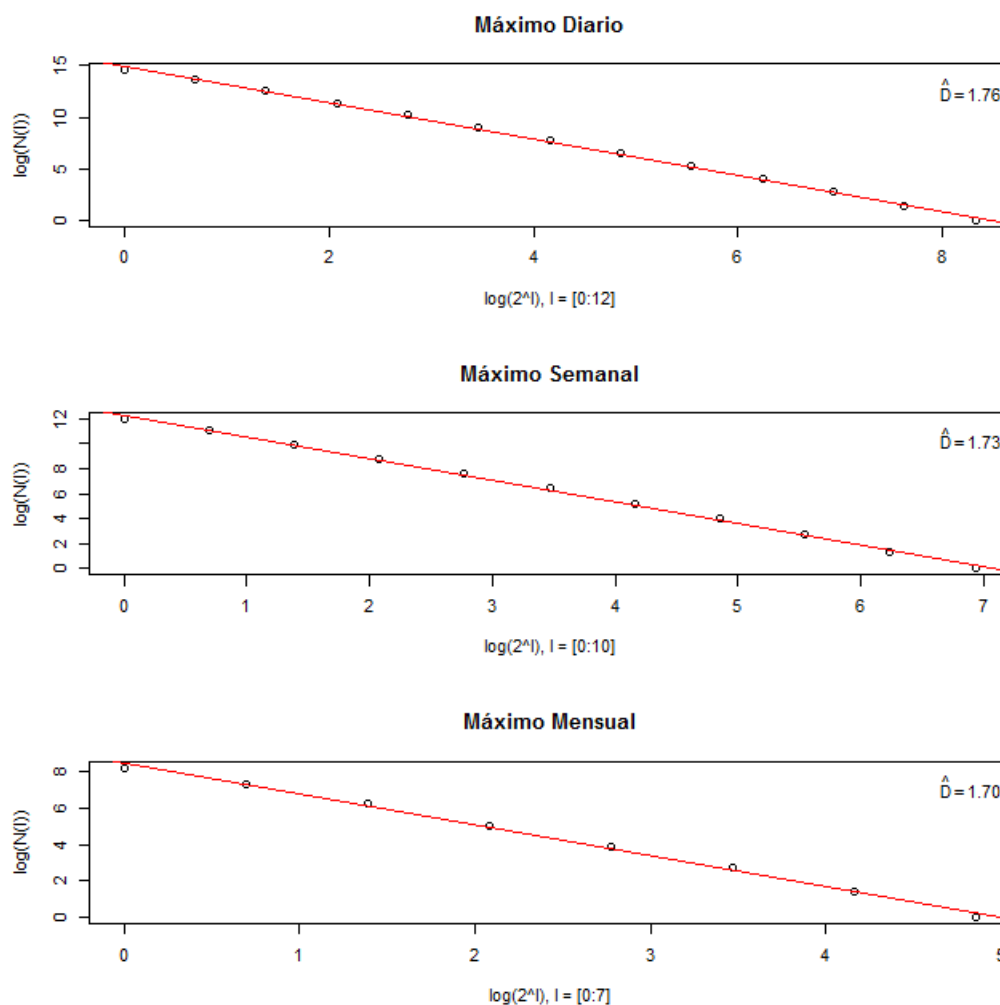


Figura 8-13: Dimensión fractal para el máximo y diferentes escalas de tiempo

Además dado que la dimensión fractal disminuye (aunque relativamente poco) a medida que se incrementa la escala, se evidencia que existe un atractor asociado a una dinámica caótica en cada ventana del tiempo (Diario, Semanal y Mensual). Debido a que este cambio es relativamente pequeño, se puede decir que la dimensión fractal no cambia, lo cual indica autosimilaridad, la cual es una característica propia de los fractales asociada a la invarianza a diferentes escalas.

La dimensión fractal en términos geométricos es expresada como una *proporción* entre dos dimensiones topológicas consecutivas, en la que un objeto llena el espacio y que tan rugoso es este. Por lo tanto se identifica que la serie diaria es más rugosa que el resto, seguida de la semanal y posteriormente la mensual. Además, la serie diaria presenta mayores variaciones y por lo tanto en la escala diaria se evidencia mayor amenaza sísmica que en el resto de series.

8.3.5. Coeficiente de Hurst

El coeficiente de Hurst será empleado para detectar memoria a largo plazo en cada una de las series.

A continuación se adjunta el cálculo de coeficiente de Hurst para diferentes escalas de tiempo por el método del rango escalado:

Método	Diario	Semanal	Mensual
HG: aproximación general de R/S	0.7710	0.7411	0.7145

Tabla 8-5: Cálculo del coeficiente de Hurst para diferentes escalas de tiempo

Se observa entonces que a medida que se aumenta la escala de tiempo se produce una reducción del coeficiente de Hurst estimado esto se debe a que se reduce el número de observaciones de las series.

A pesar del anterior fenómeno, todos los coeficientes son superiores a 0.5, lo cual es razón inequívoca de que las series tienen la propiedad de la **persistencia** para cualquier lapso de tiempo las observaciones futuras tienen correlación en relación con las pasadas, lo cual indica que las series no se comportan Ruido Blanco, que existe algún tipo de dependencia entre los datos, que los valores tienden a mantenerse en el tiempo y por supuesto que las series tienen memoria larga.

Ademas, se puede concluir que estas series corresponden a un proceso correlacionado, lo cual indica que a un proceso de crecimiento le sigue con mayor probabilidad otro proceso de similar crecimiento, es decir, que si por ejemplo se presenta un periodo de tiempo con fuerte actividad sísmica es más probable que en el próximo periodo de tiempo también se presente una alta actividad sísmica.

Puesto que las series presentan un comportamiento *persistente*, existe un indicio de que el sistema se comporta de manera caótica. Esto se debe a que existe alta sensibilidad al cambio en las condiciones iniciales del proceso generador de la serie de tiempo. Aunque este es un primer indicio de caos, debe ser evaluado frente el resto de coeficientes para determinar si al final todos concluyen lo mismo. (Gallego Valencia et al. (n.d.))

8.3.6. Entropía

A continuación se han calculado los coeficientes de Entropía para las diferentes escalas:

Diario	Semanal	Mensual
1.8695	1.6614	1.2825

Tabla 8-6: Cálculo del coeficiente de Entropía para el máximo y diferentes escalas de tiempo

Se observa como la serie correspondiente a máximos diarios, sigue presentando un comportamiento más caótico que el resto como ha sucedido con el resto de indicadores fractales, y a medida que se reduce la escala el coeficiente de entropía como se reduce y por lo tanto representa que la serie es menos irregular y caótica. (Sepulveda (2004))

8.3.7. Exponente de Lyapunov

Se procede entonces ahora calcular los exponentes de Lyapunov para cada una de las series, recordando que este indicador no es un valor puntual si no una función, donde se tendrán tantos valores de Lyapunov como número de observaciones con las que se trabajen:

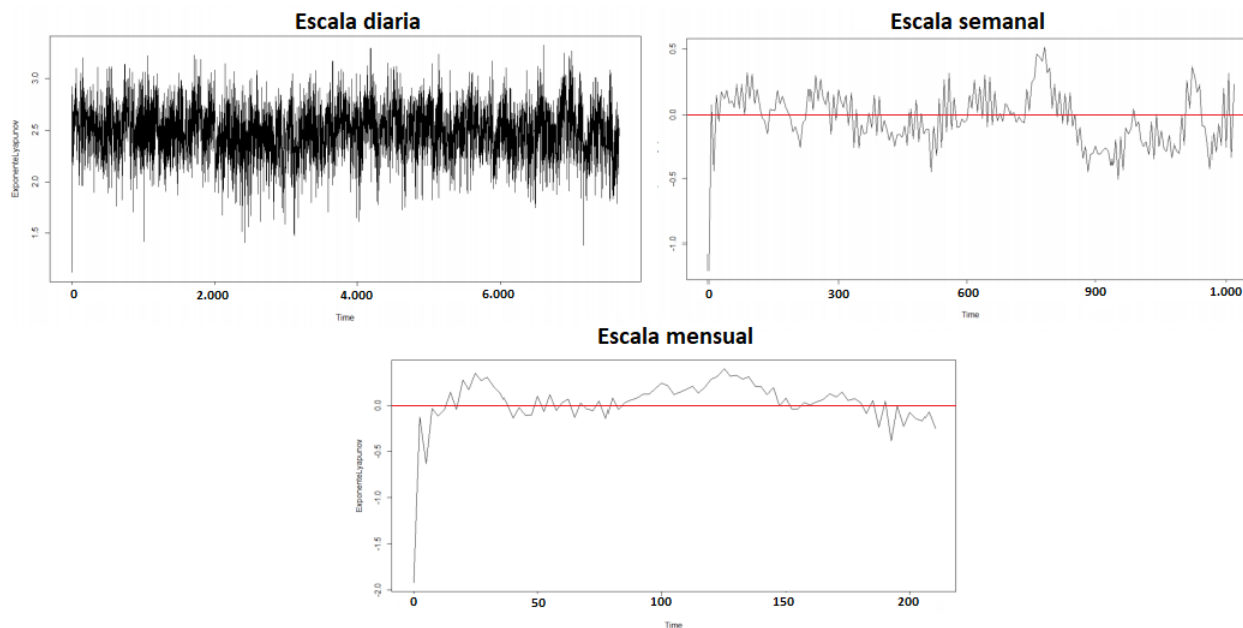


Figura 8-14: Cálculo del coeficiente de Lyapunov para el máximo y diferentes escalas de tiempo

Después de analizar las gráficas se puede concluir que para las todas las escalas se presenta un Máximo valor de Lyapunov que se encuentra en el intervalo $(0, \infty)$ lo cual indica que las series presentan comportamiento caótico. Sin embargo las escalas Diaria y Semanal son aquellas que presentan mayor comportamiento caótico, pues en la serie Mensual el valor del máximo exponente de Lyapunov es apenas mayor a cero.

La presencia de un exponente de Lyapunov positivo indica que órbitas cercanas divergen exponencialmente en una determinada dirección, lo que constituye un rasgo de un comportamiento caótico. Naturalmente, dos trayectorias no pueden separarse más allá del tamaño del atractor, es suficiente con que el mayor exponente de Lyapunov sea positivo, para considerar la presencia de un comportamiento caótico. (Sepulveda (2004))

De esta manera, si el exponente es negativo existe evidencia suficiente de que el comportamiento de la serie es regular, mientras que si el exponente es positivo de que el comportamiento de la serie es caótico. (Sepulveda (2004))

Los exponentes de Lyapunov son una medida cuantitativa de la sensibilidad de un sistema ante cambios en las condiciones iniciales.

8.3.8. Mapa de Poincaré

Se han calculado los gráficos de Poincaré en principio para la serie total de los departamentos de Santander, Norte de Santander y Boyacá con $n=98.123$, cada una de

estas será comparada con un Mapa de Poincaré de un Ruido Blanco con igual número de observaciones a la serie respectiva para determinar si existe un atractor o si por el contrario los datos son aleatorios.

Los resultados son los siguientes:

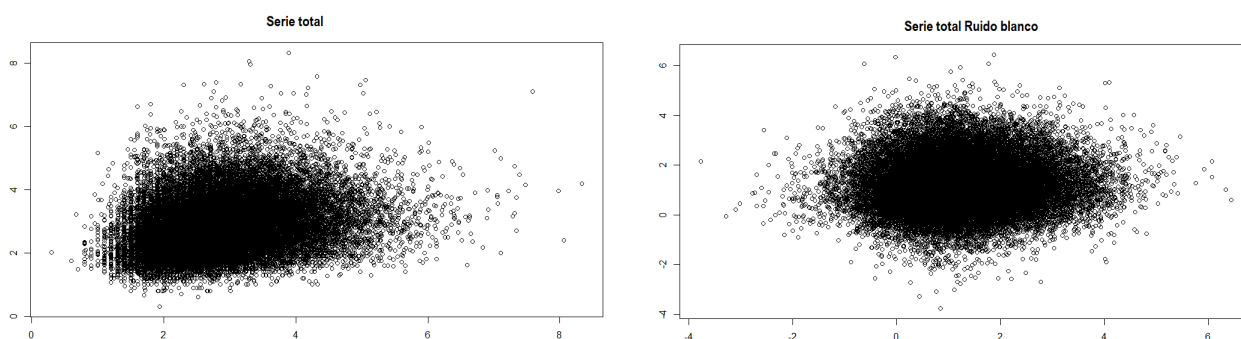


Figura 8-15: Mapa de poincaré para la serie general

Posteriormente se calcula el mapa de Poincaré para las tres escalas de tiempo:

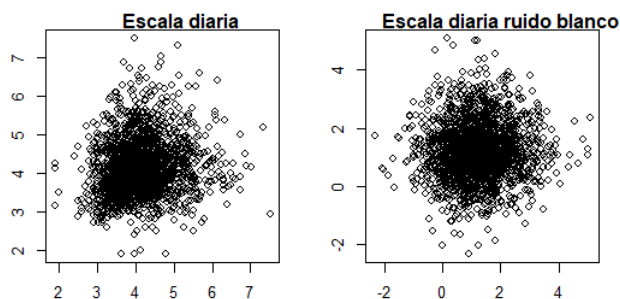


Figura 8-16: Mapa de poincaré serie diaria

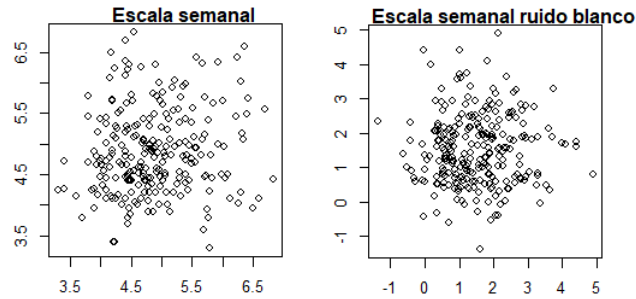


Figura 8-17: Mapa de poincaré serie semanal

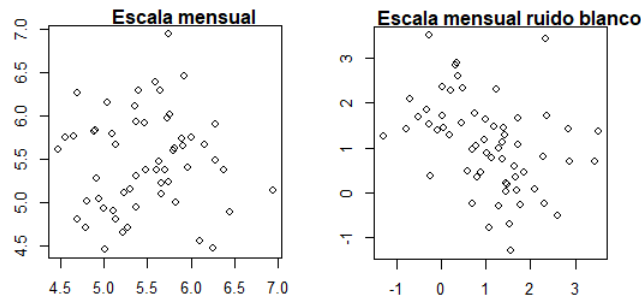


Figura 8-18: Mapa de poincare para el máximo diario

Después de analizar los gráficos, es claro como los mapas de datos Ruido Blanco tienden a llenar todo el espacio, lo cual indica que su comportamiento no es caótico, lo cual se debe a que los datos analizados son aleatorios.

En cuanto a la serie en escala diaria se observa como los puntos de las trayectorias descritas por el mapa de poincaré convergen a un valor puntual, lo cual es evidencia a favor de que existe un atractor en esta serie, lo cual indica que la serie diaria tiene comportamiento caótico lo cual apunta a que no sea posible la modelación y predicción del proceso en el campo de las series temporales.

Para las series semanal y mensual no se evidencia la existencia de un atractor, esto se debe posiblemente al numero reducido de observaciones de las series, y por lo tanto no es posible describir la trayectoria del sistema en plenitud.

8.4. Aplicación series de tiempo

Serie diaria

Se procede inicialmente a graficar la serie de tiempo para analizar estacionariedad:

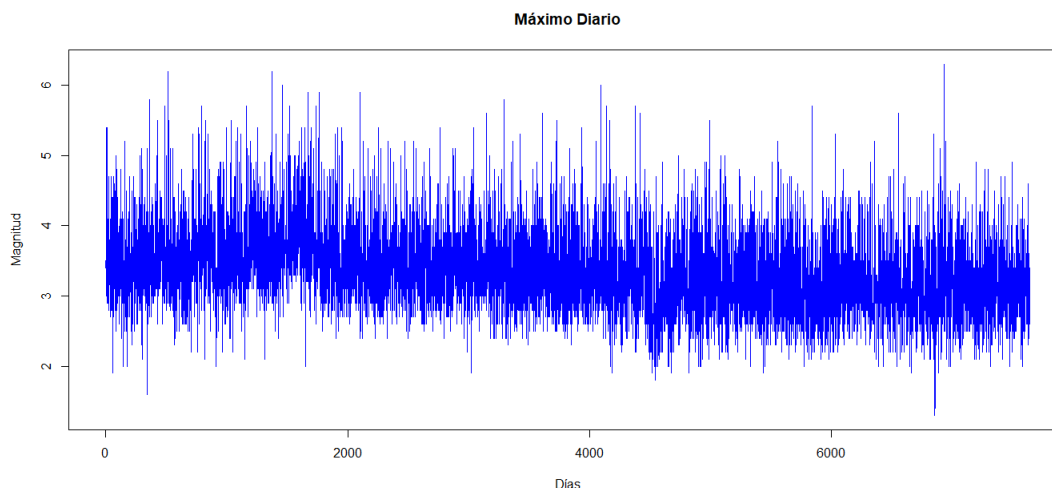
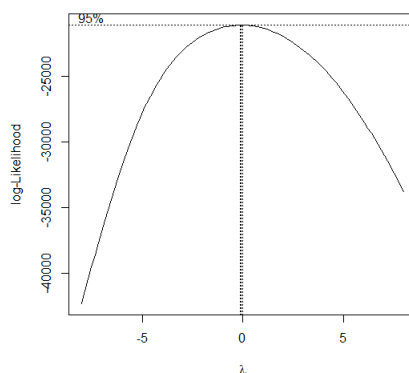


Figura 8-19: Serie Máximo diario

Podemos observar que la serie presenta muchos picos, además se observa inestabilidad en su varianza. Por lo anterior existen indicios de que la serie no es estacionaria. Se aplica la transformación Box-Cox con el fin de estabilizar la varianza:

Figura 8-20: Transformación Box-Cox serie diaria



Dado que la estimación del valor λ es igual a $\lambda = -0.080$, la transformación más adecuada

es el logaritmo natural de la serie original, de acuerdo con la tabla 7-1 de la sección de la Metodología.

Se plantea ahora si es necesario una o mas diferenciaciones de la serie transformada, por lo cual se hace uso de las pruebas Dickey-Fuller Aumentada (DFA) y KPSS. La prueba DFA contrasta las hipótesis H_0 : La serie no es estacionaria en media (necesita una diferenciación) $X_tI(1)$ vs H_1 : La serie es estacionaria en media (no necesita una diferenciación) $X_tI(0)$. Lo mismo sucede para la KPSS pero se invierten las hipótesis nula y alternativa. A continuación se presenta los resultados de los contrastes:

Estadístico KPSS test: 9.917628

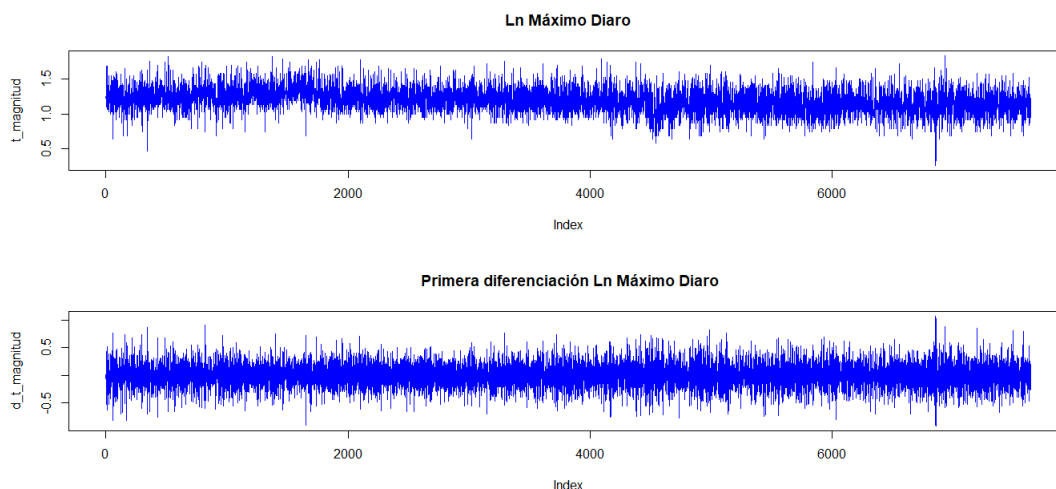
Estadístico DFA test: -0.539743

Niveles	DFA	KPSS
1 %	-2.56	0.739
5 %	-1.94	0.463
10 %	-1.62	0.347

Tabla 8-7: Valores críticos test DFA y KPSS serie diaria

Como el $|DFA| = 0,539743$ es menor que el valor absoluto de todos los valores críticos, entonces no se rechaza H_0 , es decir, la serie no es estacionaria en media, por lo cual se necesita una diferenciación, este resultado se respalda con el estadístico KPSS test, donde $KPSS = 9,917628$ este es mayor a todos los valores críticos, por lo cual se rechaza H_0 , es decir, hay por lo menos una raíz unitaria en la serie.

Figura 8-21: Serie diaria transformada y Diferenciada



Se evidencia que la escala de la serie transformada y de la serie diferenciada se

reducen bastante en comparación con la de la serie original por lo cual se intuye que la transformaciones fueron adecuadas.

Se analiza ahora si la serie diaria original presenta memoria larga, para ello se calcula inicialmente la FAC y la FACP del proceso bajo estudio (*Figura 8-22*).

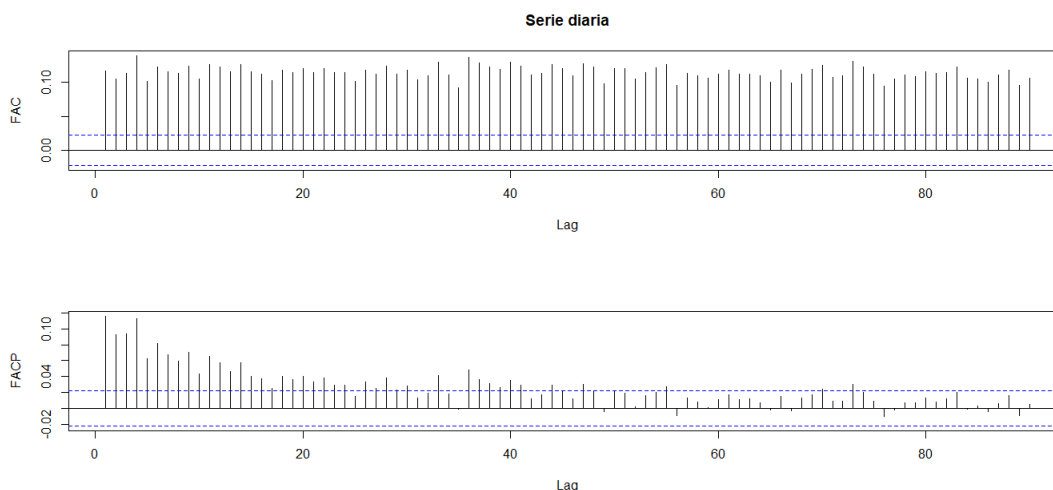


Figura 8-22: FAC y FACP serie diaria

Se puede observar que la ACF decae muy lentamente a cero y $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k|$ no converge, según Hosking (1981) en este caso se dice que la serie tiene memoria larga. Para comprobar dicho resultado, se propone la estimación del coeficiente de Hurst y GPH. En la sección anterior se encontró que el coeficiente de Hurst es mayor a 0.5 para la serie diaria, se concluye que la serie presenta memoria larga y por lo tanto la serie debe ser diferenciada fraccionalmente.

Para corroborar la presencia de memoria larga en las series, se aplica el criterio Geweke-Porter Hudak's; para ello se calcula el estimador GPH para contrastar las hipótesis, donde $H_0: d=0$ vs $H_1: d>0$, de donde se obtiene que:

$\hat{d}_{GPH}$	$\text{desv}(\hat{d}_{GPH})$	$t = \frac{\hat{d}_{GPH}}{\text{desv.est}(\hat{d}_{GPH})}$	Valor critico
0.53294	0.07505	7.1011	1.644854

Tabla 8-8: Estimación coeficiente GPH serie diaria

Como el estadístico t es mayor al valor critico, es decir que para un nivel de significancia $\alpha = 5\%$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, $d > 0$ y por lo tanto existe evidencia estadística suficiente para decir que la serie de escala diaria presenta memoria larga.

Ahora se procede a diferenciar la serie fraccionalmente mediante el coeficiente de Hurst, con el objetivo de observar la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial para posteriormente ajustar un modelo ARFIMA(p,d,q).

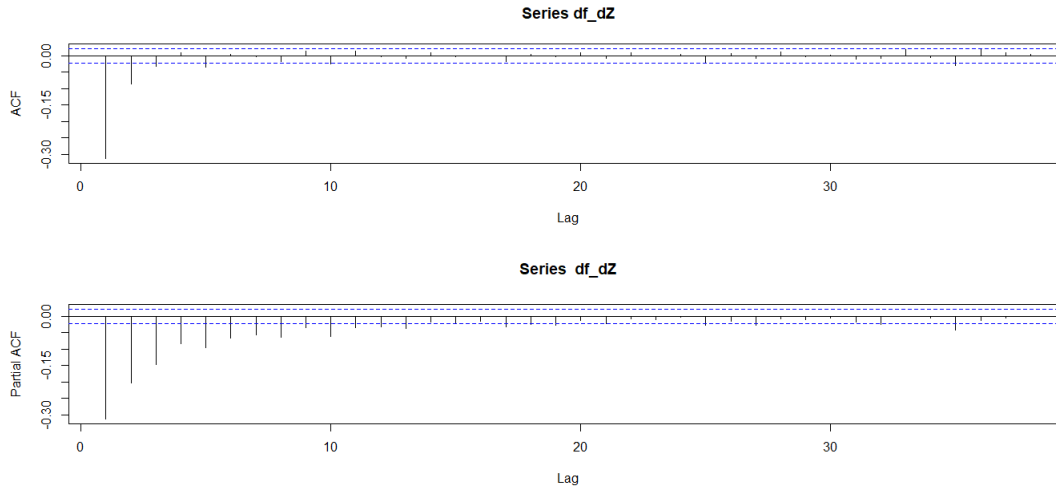


Figura 8-23: FAC y FACP serie diaria transformada y diferenciada fraccionalmente

Se ajusta los modelos ARFIMA(p,d,q) para $p, q \in \{0, 1, 2\}$ y el d se toma como el coeficiente de memoria larga para la serie diaria $Hurst = 0,7710$. Se elige el mejor modelo por medio de los criterios de información Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn:

p	q	C. Akaike	Schwarz	Hannan-Quinn
0	1	1.802007	1.803825	1.802631
0	2	1.776812	1.779538	1.777747
1	0	1.860881	1.862698	1.861504
1	1	1.767007	1.769734	1.767943
1	2	1.762541	1.766177	1.763789
2	0	1.821532	1.824258	1.822467
2	1	1.763884	1.767520	1.765132
2	2	1.760915	1.765460	1.762474

Tabla 8-9: Criterio de selección Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn de la serie diaria

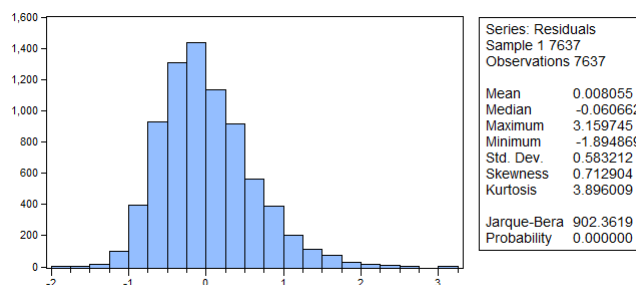
El $AR(2)$ y $MA(2)$ tuvo el valor mínimo para los tres criterios de información, por lo cual se escoge el ARFIMA(2,0.7710,2) para describir la serie diaria. Ahora se procede a mostrar los parámetros estimados para este modelo, sus respectivas desviaciones estándar y sus niveles de significancia (P-valores).

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1,046328	0,077024	13,58449	0,0000
AR(2)	-0,185485	0,043051	-4,308506	0,0000
MA(1)	-1,495210	0,074700	-20,01627	0,0000
MA(2)	0,525146	0,066316	7,918784	0,0000

Tabla 8-10: Parámetros estimados, desviación estándar y nivel de significancia

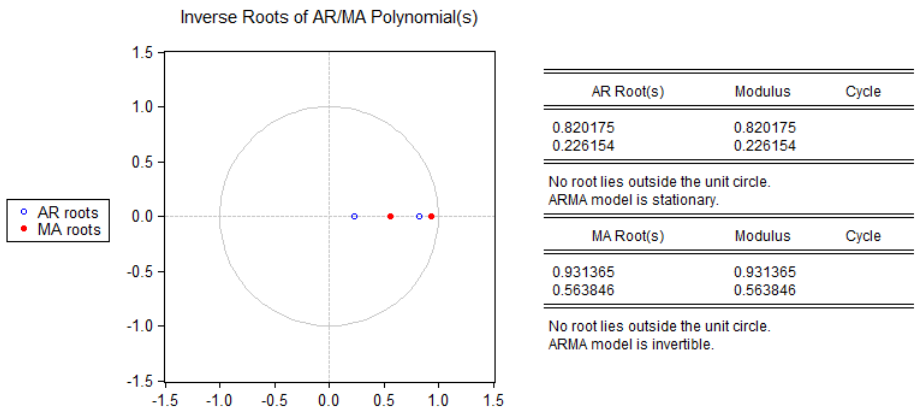
Como se puede observar en la *tabla 8-10* todos los coeficientes estimados fueron significativos a un nivel de significancia $\alpha = 5\%$. Ahora se procede analizar si este modelo cumple con los supuestos básicos de los errores tales como normalidad (Prueba Jarque-Bera), homocedasticidad (prueba Arch) e independencia (prueba Q-Ljung Box).

Figura 8-24: Análisis normalidad serie diaria



Se evidencia que el modelo estimado no cumple con el supuesto de normalidad, ya que el P-valor para la prueba Jarque-Bera dio cero, es decir, a un nivel de significancia $\alpha = 5\%$ se rechaza H_0 : *los residuales se distribuyen de forma normal*. Ahora se analiza si las raíces de los polinomios autorregresivos y de media móvil están dentro del círculo unitario inverso:

Figura 8-25: Raíz unitaria serie diaria



Se comprueba que las raíces están por dentro del círculo unitario inverso, lo que indica que el modelo estimado cumple con la propiedad de estacionariedad e invertibilidad. Ahora se analizan los residuales del modelo:

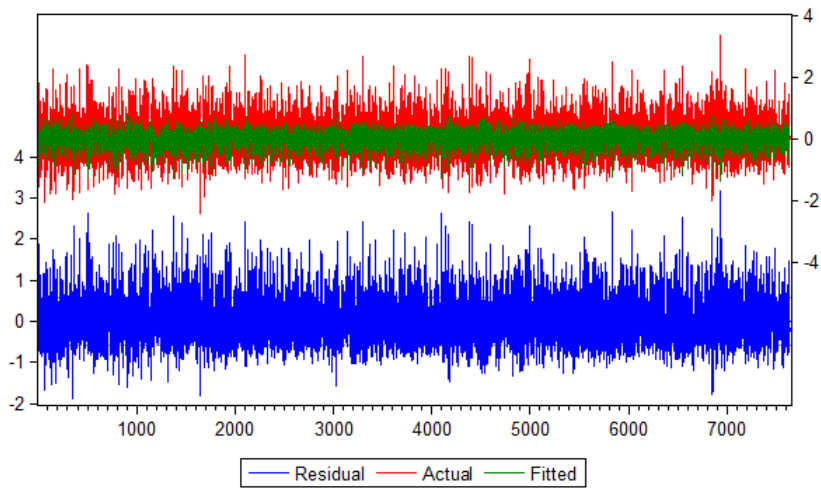


Figura 8-26: Residuales serie diaria

En la *figura 8-26* se observa una variación de los residuos de -2 a 2 con una mayor concentración alrededor de 0, y una ligera cola hacia valores positivos como se muestra también en la *figura 8-24*. Esto podría indicar el porque no se cumple el supuesto de normalidad.

Q-Ljung Box	ARCH
0.5041	0.3473

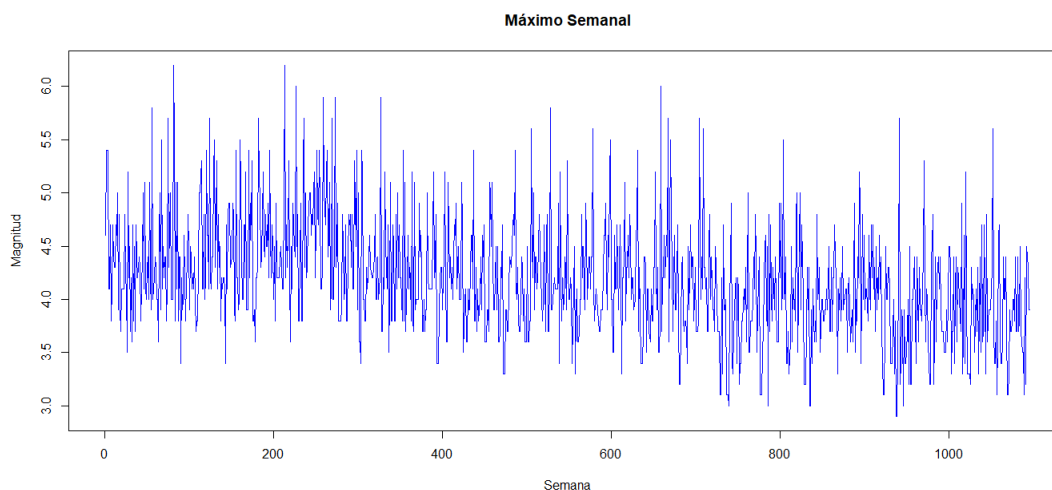
Tabla 8-11: Independencia y homocedasticidad de los residuales

En la *figura 8-26* se muestra como los residuales, aparentemente, presentan varianza constante pero esto se comprueba mediante la prueba ARCH la cual arroja un p-valor de 34,73 % el cual, contrastandolo con un nivel de significancia $\alpha = 5 \%$, hace que no se rechace H_0 : los residuales son homocedasticos. Por ultimo se observa el supuesto de independencia de los residuales mediante la prueba Q-Ljung Box la cual arroja un p-valor mayor que el 5 %, lo cual indica que estadísticamente los residuales son independientes entre si.

Como conclusión se puede decir que el modelo es bueno en casi todo pero falla en un supuesto clave, el de normalidad de los residuales, el cual puede ser por la gran cantidad de datos (7638) o porque la distribución de los errores es diferente a la normal, por lo cual se podría utilizar una distribución de valores extremos, dado que se esta trabajando con el máximo diario, pero esto se dejara para investigaciones posteriores porque la idea en esta parte del trabajo es contrastar los supuestos clásicos de los residuales.

Serie semanal

Se procede inicialmente a graficar la serie de tiempo para analizar estacionariedad:

**Figura 8-27:** Serie Máximo semanal

Analogamente como se hizo con la serie maximo diario se aplica la transformación Box-Cox para estabilizar la varianza:

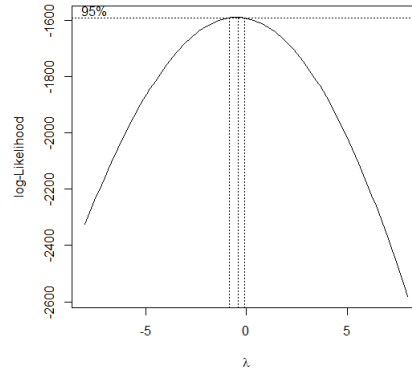


Figura 8-28: Transformación Box-Cox serie semanal

Dado que $\lambda = -0.404$, la transformación más adecuada es $1/\sqrt{z}$

Posteriormente se verifica si es necesario una o mas diferenciaciones de la serie transformada, por lo cual se utilizan de nuevo las pruebas Dickey-Fuller Aumentada (DFA) y KPSS. Las hipótesis de investigación son las siguientes; H_0 : La serie no es estacionaria en media (necesita una diferenciación) $X_t I(1)$ vs H_1 : La serie es estacionaria en media (no necesita una diferenciación) $X_t I(0)$. Para la prueba KPSS se invierten las hipótesis:

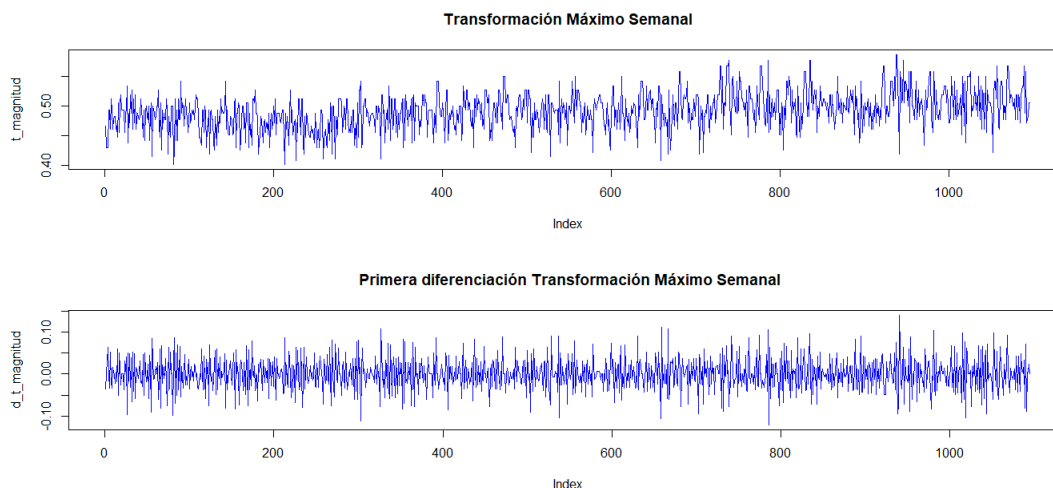
Estadístico KPSS test: 3.654445

Estadístico DFA test: -0.004190

Niveles	DFA	KPSS
1 %	-3.43	0.739
5 %	-2.86	0.463
10 %	-2.57	0.347

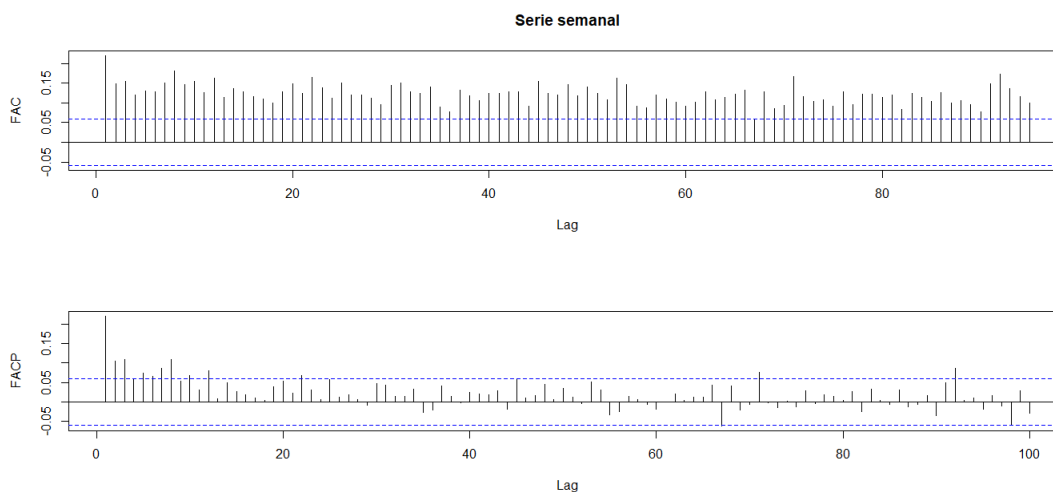
Tabla 8-12: Valores críticos test DFA y KPSS serie semanal

El Estadístico KPSS test es mayor para los valores críticos de significancia 1 %, 5 % y 10 % se rechaza H_0 , es decir, la serie no es estacionaria en media a niveles de significancia 1 %, 5 % y 10 % por lo cual se necesita diferenciación, este resultado se respalda con la prueba DFA donde no se rechaza H_0 para los tres niveles de significancia.

Figura 8-29: Serie semanal transformada

Se evidencia que la escala de la serie transformada y de la serie diferenciada se reduce en comparación con la de la serie original, lo que intuye que las transformaciones fueron pertinentes.

Se analiza ahora si la serie semanal presenta memoria larga, para ello se calcula inicialmente la FAC y la FACP del proceso bajo estudio (*Figura 8-31*).

**Figura 8-30:** FAC y FACP serie semanal

La ACF decae muy lentamente a cero y $\sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k|$ no converge, según Hosking (1981) la serie tiene memoria larga. Para comprobar dicho resultado, se propone la estimación del

coeficiente de Hurst y GPH. El coeficiente de Hurst para la escala Semanal es igual a 0.7411 por lo cual la serie tiene memoria larga.

Se aplica ahora el criterio GPH para contrastar las hipótesis $H_0:d=0$ vs $H_1:d>0$, de donde se obtiene que:

$\hat{d}_{GPH}$	$\text{desv}(\hat{d}_{GPH})$	$t = \frac{\hat{d}_{GPH}}{\text{desv.est}(\hat{d}_{GPH})}$	Valor critico
0.4558	0.1321	3.4505	1.644854

Tabla 8-13: Estimación coeficiente GPH serie semanal

Como el estadístico t es mayor al valor critico, es decir que para un nivel de significancia $\alpha = 5\%$, se rechaza la hipótesis nula y por lo tanto existe evidencia suficiente de que la serie de escala semanal presenta memoria larga.

Ahora se procede a diferenciar la serie fraccionalmente mediante el coeficiente de Hurst, con el objetivo de observar la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial para posteriormente ajustar un modelo ARFIMA(p,d,q).

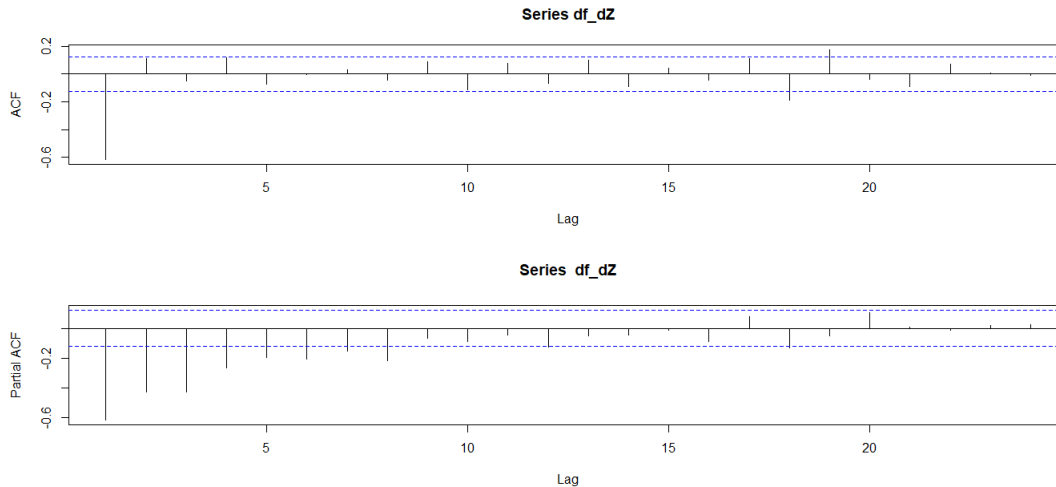


Figura 8-31: FAC y FACP serie semanal transformada y diferenciada fraccionalmente

Ajuste de modelo ARFIMA(p,d,q) para $p, q \in \{0, 1, 2\}$ y el $d = 0,7411$ (coeficiente de Hurst). Se realiza la elección del mejor modelo por medio de los criterios de información Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn:

p	q	C. Akaike	Schwarz	Hannan-Quinn
0	1	-4.221901	-4.212771	-4.218446
0	2	-4.220655	-4.206961	-4.215474
1	0	-4.221863	-4.212733	-4.218408
1	1	-4.220952	-4.207257	-4.215770
1	2	-4.218959	-4.200700	-4.212050
2	0	-4.220596	-4.206901	-4.215414
2	1	-4.218947	-4.200688	-4.212038
2	2	-4.217505	-4.194680	-4.208868

Tabla 8-14: Criterio de selección Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn de la serie semanal

El $MA(1)$ tuvo el valor mínimo para los tres criterios de información, por lo cual se escoge el $ARFIMA(0,0.7411,1)$ para describir la serie semanal. Ahora se calcula los parámetros estimados para este modelo, sus respectivas desviaciones estándar y sus niveles de significancia (P-valores).

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	0,029340	0,027167	1,079982	0,0000

Tabla 8-15: Parámetros estimados, desviación estándar y nivel de significancia

Como se puede observar en la *tabla 8-15* el coeficiente estimados para el $M(1)$ fue significativo a un nivel de significancia $\alpha = 5\%$. Ahora se procede analizar si este modelo cumple con los supuestos básicos de los errores tales como normalidad (Prueba Jarque-Bera), homocedasticidad (prueba Arch) e independencia (prueba Q-Ljung Box).

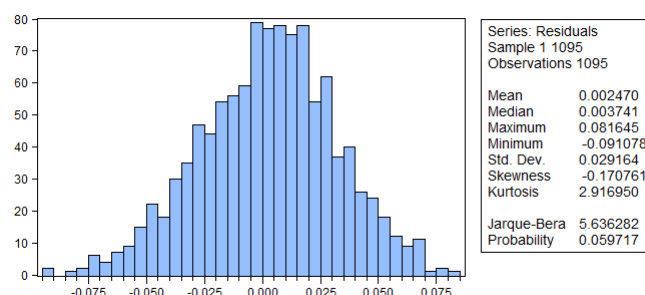


Figura 8-32: Serie semanal transformada

Se evidencia que el modelo estimado cumple con el supuesto de normalidad, ya que el P-valor para la prueba Jarque-Bera dio 0.0597, es decir, a un nivel de significancia $\alpha = 5\%$ no se rechaza H_0 : *los residuales se distribuyen de forma normal*. Ahora se analiza si las raíces de los polinomios autorregresivos y de media móvil están dentro del círculo unitario inverso:

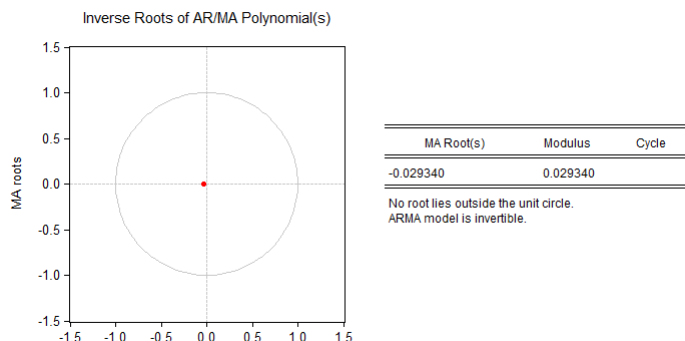
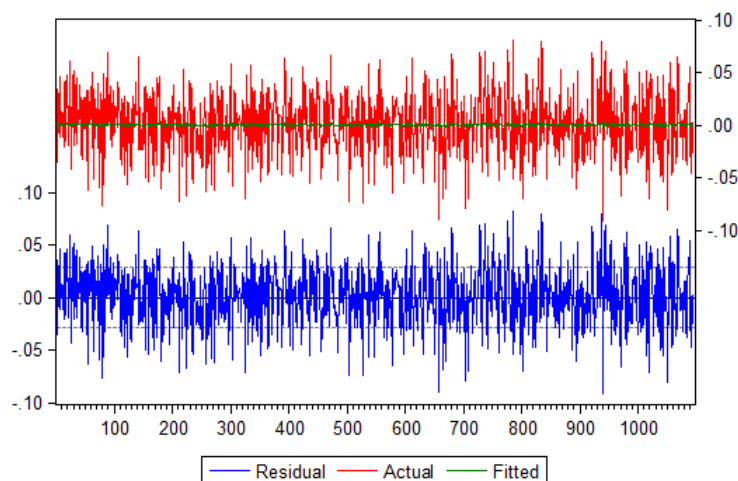


Figura 8-33: Raíz unitaria serie semanal

Se comprueba que la raíz está por dentro del círculo unitario inverso, lo que indica que el modelo estimado cumple con la propiedad de estacionariedad e invertibilidad. Ahora se analizan los residuales del modelo:

Figura 8-34: Residuales serie semanal



En la *figura 8-34* se observa una variación de los residuos de -1 a 1 con una mayor concentración alrededor de 0 como se muestra también en la *figura 8-32*. Esto podría indicar

el porque se cumple el supuesto de normalidad.

Q-Ljung Box	ARCH
0.3041 %	0.1473

Tabla 8-16: Independencia y homocedasticidad de los residuales

En la *figura 8-34* se muestra como los residuales, aparentemente, presentan varianza constante pero esto se comprueba mediante la prueba ARCH la cual arroja un p-valor de 14,73 % el cual, contrastandolo con un nivel de significancia $\alpha = 5 \%$, hace que no se rechace H_0 : los residuales son homocedasticos. Por ultimo se observa el supuesto de independencia de los residuales mediante la prueba Q-Ljung Box la cual arroja un p-valor mayor que el 5 %, lo cual indica que estadísticamente los residuales son independientes entre si.

Como conclusión se puede decir que el modelo estimado es bueno ya que cumple con todos los supuestos clásicos y también con la propiedad de estacionariedad e invertibilidad. Es curioso como el supuesto de normalidad no se cumplió en la serie diaria con 7638 datos pero con la semanal si, 1096 observaciones, pero solo con niveles de significancia menores al 5 %.

Serie mensual

Para la serie mensual se evidencia gráficamente (*Figura 8-35*) que la serie en principio no es estacionaria en media, pero la tendencia puede ser estocástica o determinística debido a otras variables no consideradas en el análisis:

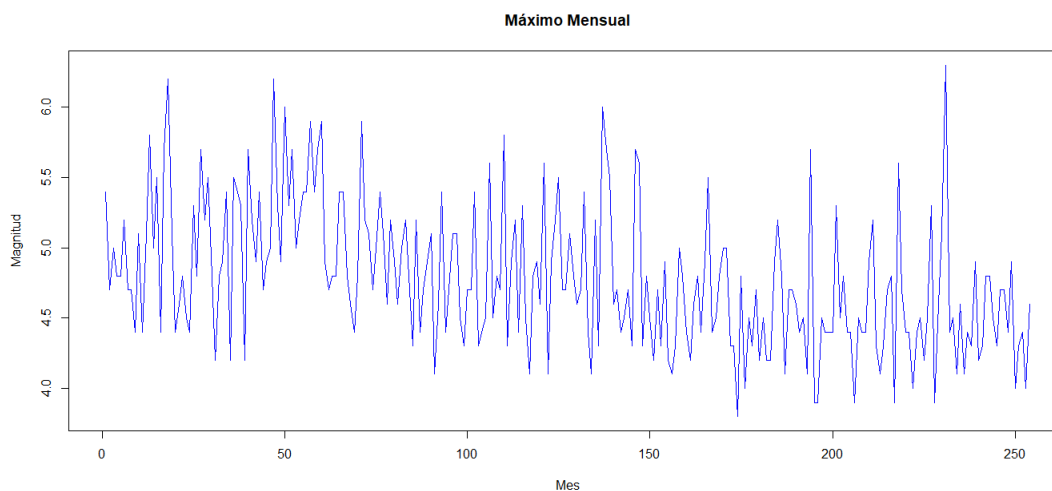


Figura 8-35: Serie escala mensual

Se aplica la transformación Box-Cox con el fin de estabilizar la varianza:

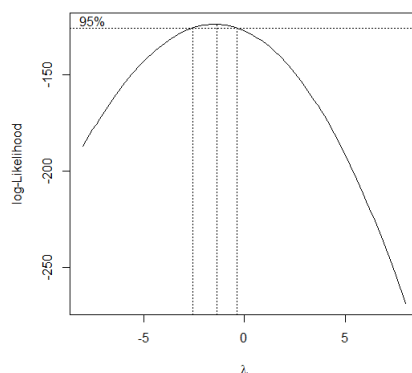


Figura 8-36: Transformación Box-Cox serie mensual

Dado que $\lambda = -1.373737$, la transformación más adecuada es $1/z_t$.

Se verifica ahora si es necesario una o mas diferenciaciones de la serie transformada, por lo cual se utilizan nuevamente las pruebas Dickey-Fuller Aumentada (DFA) y KPSS, trabajadas anteriormente en el máximo diario y semanal.

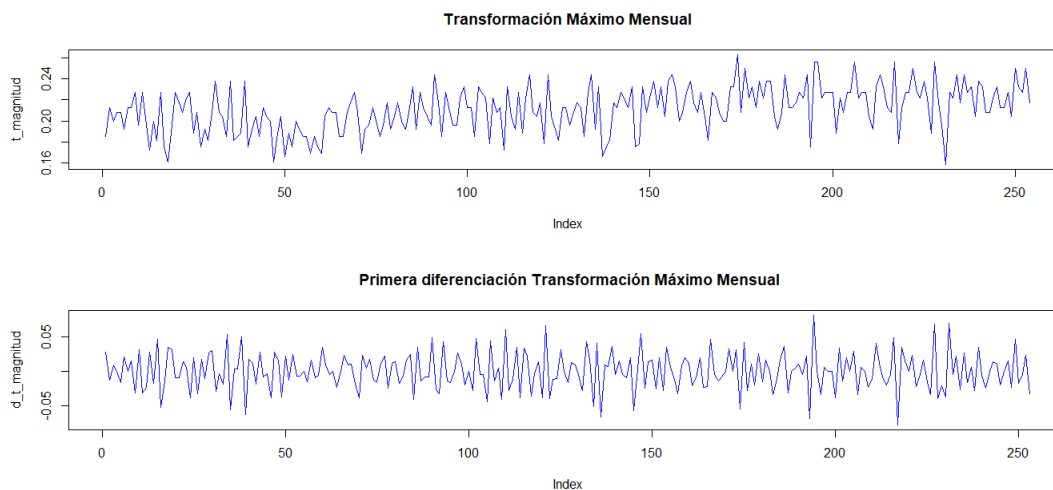
Estadístico KPSS test: 1.6988

Estadístico DFA test: -0.006834

Niveles	DFA	KPSS
1 %	-3.46	0.739
5 %	-2.88	0.463
10 %	-2.57	0.347

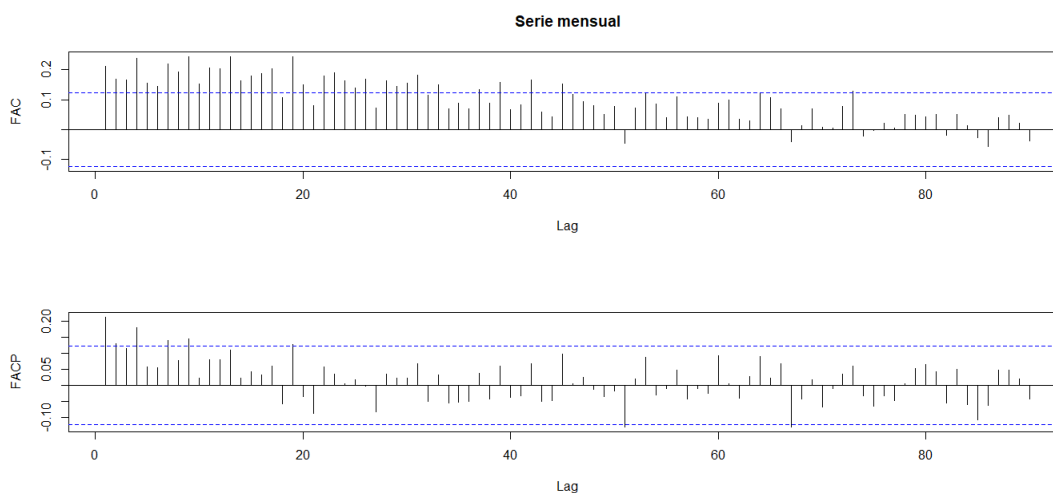
Tabla 8-17: Valores críticos test DFA y KPSS serie mensual

Se evidencia que la serie no es estacionaria en media a niveles de significancia 1 % , 5 % y 10 % por lo cual se necesita diferenciación.

Figura 8-37: Serie semanal transformada

En la *figura 8-37* se puede observar a la serie transformada con Box-Cox donde se evidencia que la escala de la serie se ha reducido notablemente pero la tendencia se mantiene. En la misma *figura 8-37* se puede observar la serie ya diferenciada donde ya la tendencia desapareció.

Se analiza ahora si la serie mensual presenta memoria larga, para ello se calcula inicialmente la FAC y la FACP del proceso bajo estudio (*Figura 8-33*).

**Figura 8-38:** FAC y FACP serie mensual

De acuerdo con la ACF la serie parece tener memoria larga. En la sección anterior se

comprobó que los coeficientes de Hurst son mayores que 0.5, por lo cual la serie mensual es persistente (memoria larga), se comprueba tal afirmación con la estimación de GPH:

$\hat{d}_{GPH}$	$\text{desv}(\hat{d}_{GPH})$	$t = \frac{\hat{d}_{GPH}}{\text{desv.est}(\hat{d}_{GPH})}$	Valor critico
0.66977	0.2196	3.049	-1.644854

Tabla 8-18: Estimación coeficiente GPH serie mensual

A un nivel de significancia del $\alpha=0.05$ se rechaza la hipótesis nula y por lo tanto existe evidencia suficiente de que la serie de escala diaria presenta memoria larga. Además se comprueba que la serie no es estacionaria en media pues $\hat{d}_{GPH} > 0$.

Ahora se procede a diferenciar la serie fraccionalmente mediante el coeficiente de Hurst, con el objetivo de observar la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial para posteriormente ajustar un modelo ARFIMA(p,d,q).

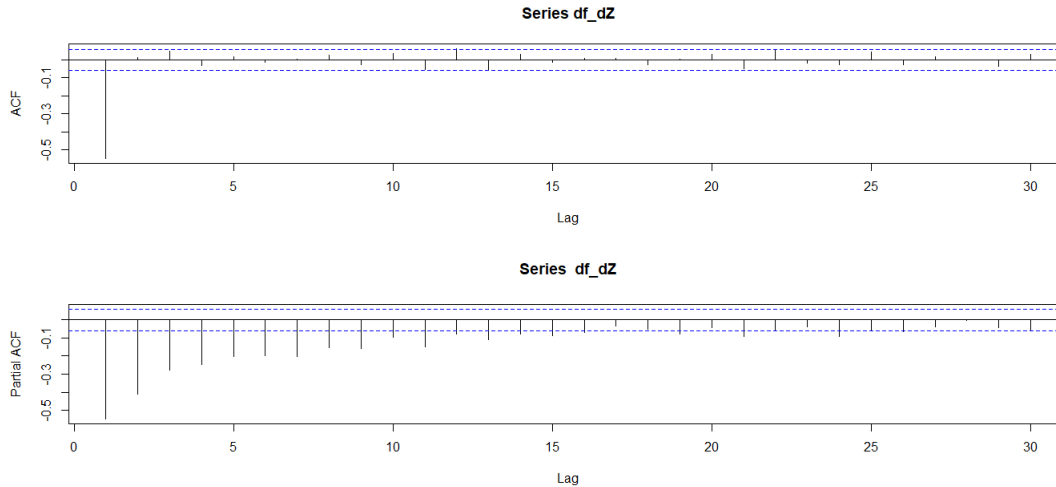


Figura 8-39: FAC y FACP Serie Mensual transformada y diferenciada

Se ajusta los modelos ARFIMA(p,d,q) para $p, q \in \{0, 1, 2\}$ y el d se toma como el coeficiente de memoria larga para la serie diaria $Hurst = 0,7145$. Se elige el mejor modelo por medio de los criterios de información Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn:

p	q	C. Akaike	Schwarz	Hannan-Quinn
0	1	-4.890217	-4.862285	-4.878979
0	2	-4.888933	-4.847035	-4.872076
1	0	-4.892593	-4.864662	-4.881356
1	1	-5.006523	-4.964626	-4.989667
1	2	-4.999116	-4.943253	-4.976641
2	0	-4.894386	-4.852488	-4.877529
2	1	-4.999085	-4.943221	-4.976609
2	2	-4.993873	-4.924043	-4.965778

Tabla 8-19: Criterio de selección Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn de la serie semanal

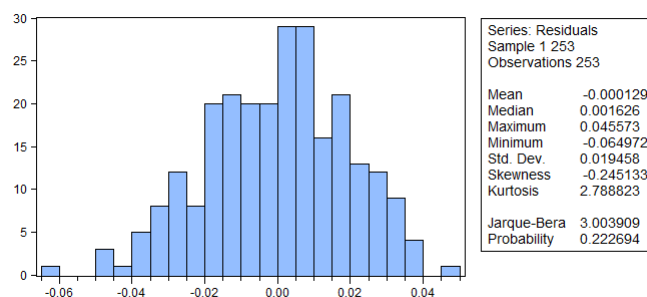
El $AR(1)$ y $MA(1)$ tuvo el valor mínimo para los tres criterios de información, por lo cual se escoge el $ARFIMA(1,0.7145,1)$ para describir la serie mensual. Ahora se procede a calcular los parámetros estimados para este modelo, sus respectivas desviaciones estándar y sus niveles de significancia (P-valores).

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1,000000	0,090094	11,09947	0,0000
MA(1)	-1,000000	0,002071	-482,8213	0,0000

Tabla 8-20: Parámetros estimados, desviación estándar y p-valor

Después de ajustar el modelo se encuentra que todos los parámetros de diferenciación resultaron significativos. Ahora se procede analizar si este modelo cumple con los supuestos básicos de los errores tales como normalidad (Prueba Jarque-Bera), homocedasticidad (prueba Arch) e independencia (prueba Q-Ljung Box).

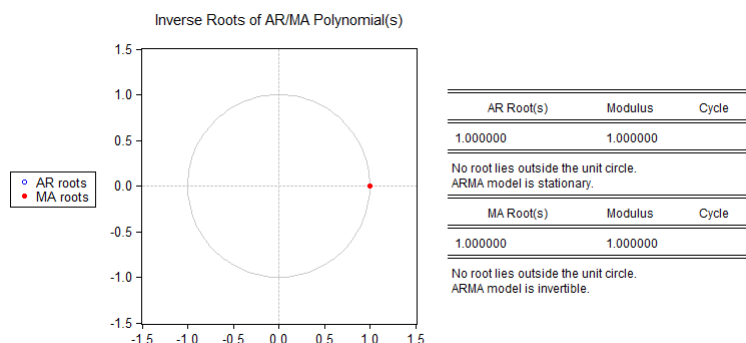
Figura 8-40: Normalidad serie mensual transformada



Se evidencia que el modelo estimado no cumple con el supuesto de normalidad, ya que el P-valor para la prueba Jarque-Bera dio 0.2264, es decir, a un nivel de significancia $\alpha = 5\%$ No se rechaza H_0 : *los residuales se distribuyen de forma normal*.

Ahora se analiza si las raíces de los polinomios autorregresivos y de media móvil están dentro del círculo unitario inverso:

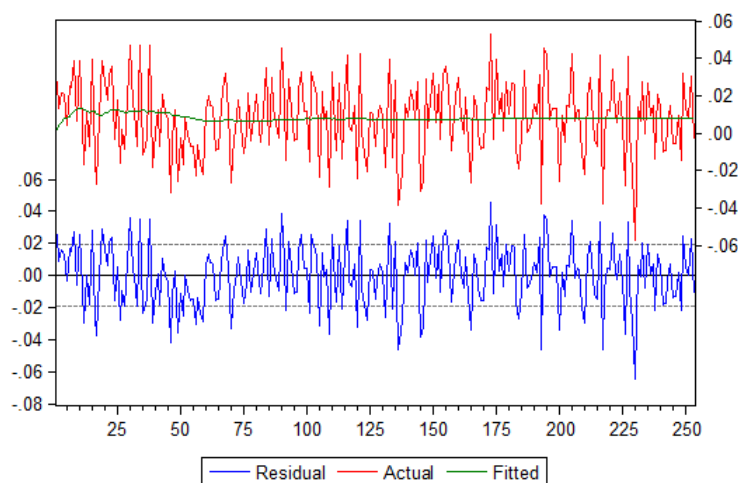
Figura 8-41: Raíz unitaria serie semanal



Se comprueba que las raíces están por dentro del círculo unitario inverso, lo que indica que el modelo estimado cumple con la propiedad de estacionariedad e invertibilidad.

Ahora se analizan los residuales del modelo:

Figura 8-42: Residuales serie semanal



En la *figura 8-42* se observa una concentración de los residuos alrededor de 0. Además, se observa que los residuales presentan varianza constante pero esto se comprueba mediante la

prueba ARCH, de la *tabla 8-20*, la cual arroja un p-valor de 47,21 % el cual, contrastandolo con un nivel de significancia $\alpha = 5\%$, hace que no se rechace H_0 : los residuales son homocedasticos. Por ultimo se observa el supuesto de independencia de los residuales mediante la prueba Q-Ljung Box la cual arroja un p-valor mayor que el 5 %, lo cual indica que estadísticamente los residuales son independientes entre si.

Q-Ljung Box	ARCH
0.4721 %	0.3129

Tabla 8-21: Pruebas sobre los residuales

Como conclusión para esta escala de tiempo mensual se puede decir que el modelo ajustado es bueno porque cumple con todos los supuestos clásicos y también con la propiedad de estacionariedad e invertibilidad. El supuesto de normalidad se cumplió a cabalidad en este caso para cualquier nivel de significancia (1 %, 5 % o 10 %). Cabe destacar que el número de observaciones disminuyó en esta serie (254 datos).

9 Conclusiones y recomendaciones

9.1. Conclusiones

- Las series bajo análisis diaria, semanal y mensual, de acuerdo a los exponentes de lyapunov se comportan de manera caótica pues bajo las tres series existe al menos un exponente positivo. Por medio del gráfico de recurrencias se pudo corroborar que las series se comportan de manera caótica pues se observan líneas horizontales principalmente en la serie diaria. Dicho comportamiento caótico es un indicio de la existencia de un atractor extraño lo cual indica la existencia de una componente determinística (caótica) conjuntamente con posibles componentes aleatorias. Además este comportamiento caótico en las serie representa que los sistemas asociados a observaciones sismológicas presentan alta sensibilidad a las condiciones iniciales, y por lo tanto es inviable realizar predicciones sobre la evolución temporal del sistema.
- Para las tres escalas de tiempo(Diaria, Semanal, Mensual), la dimensión fractal(1.76,1.73,1.70), el coeficiente de Hurst(0.7710,0.7411,0.7145) y la Entropía(1.8695,1.6614,1.2825), se puede concluir que la serie diaria es mas rugosa(irregular), más persistente y con más variabilidad entre sus observaciones que las series semanal y mensual. A medida que se reduce la escala y por tanto el número de observaciones, se reduce el valor de estos coeficientes.
- En el desarrollo de este trabajo se evidenció que la magnitud de completitud M_c esta fuertemente relacionada con el b-valor del modelo Gutenberg-Richter, en el sentido en que a menor valor del M_c , menor valor del b-valor y viceversa. De aquí la importancia de haber calculado un valor óptimo del M_c .
- Las tres series en estudio (serie diaria, mensual y semanal) presentan memoria larga de acuerdo al coeficiente fractal de Hurst pues los valores de este exponente fueron superiores a 0.5, y significativo para el estimador Geweke-Porter Hudak's bajo niveles de significancia del 1 %, 5 % y 10 % respectivamente.
- Los modelos ARFIMA resultaron ser una muy buena opción puesto que para las series estudiadas se intentó en principio aplicar solo la diferenciación entera, pero esto no era suficiente ya que las series presentaban memoria, como se comprobó con los coeficientes Hurts y el GPH, por lo cual la diferenciación fraccional resulto ser necesaria.
- Para la serie diaria se encontró que el mejor modelo que describe el proceso fue el

ARFIMA(2,0.7710,2), aunque falla en el supuesto de normalidad, para la serie semanal fue el ARFIMA(0,0.7411,1) y para la serie mensual el mejor modelo fue el ARFIMA(1,0.7145,1), para ambos casos los modelos cumplieron con todos los supuestos y criterios de estacionariedad e invertibilidad.

- Después de calcular los coeficiente de la relación de Gutenberg-Richter se puede concluir que en la zona de estudio se presenta una gran cantidad de sismos de pequeña magnitud pues el valor a es atípicamente grande ($a = 10,568$) (Udías & Mezcua (1986)). Además, también se encontró que el valor b , el cual representa la pendiente en el modelo lineal Gutenberg-Richter, es considerablemente grande ($b = 2,536$), lo cual se debe a que la zona de estudio es demasiado grande e incluye varias zonas sismoactivas que pueden activarse en tiempos cortos pero muy recurrentes, asociados a diferentes zonas que no guardan relación entre ellas (Udías & Mezcua (1986)).
- Se sugiere en próximas investigaciones enfocar el análisis en un solo departamento, esto con el fin de reducir la heterogeneidad del medio y por lo tanto reducir el ruido inducido por diversas fuentes distintas a las de la zona analizada.
- Para el supuesto de normalidad se sugiere para próximos estudios contrastar la distribución de los residuales con distribuciones de valores extremos, ya que la naturaleza de los datos (máximos) no garantiza el cumplimiento de este supuesto.

9.2. Recomendaciones

- En este trabajo de grado se utilizó el máximo como valor representativo para diferentes escalas de tiempo, esto con el fin de garantizar que las series fuesen equidistantes entre observaciones y por lo tanto poder aplicar los modelo clásico de series temporales. No obstante se podría aplicar un modelo CARFIMA (Modelo ARMA continuo fraccionalmente integrado) en el cual las series bajo análisis no necesariamente debe ser equidistantes entre observaciones y por lo tanto no se produce pérdida de información aplicando un método de interpolación.
- Se sugiere incursionar bajo el ajuste de modelos de series temporales para distribuciones diferentes a la normal, pues se evidencio durante esta investigación que las distribuciones de la magnitud sísmica parece tener una distribución asimétrica como la pareto o similares.
- En posteriores trabajos se recomienda la aplicación de más indicadores asociados a los sistemas dinámicos determinísticos, (como por ejemplo el mapa de fase, la entropía cruzada entre otros), para así poder derterminar con mas exactitud, si los datos presentan comportamientos caóticos, además de caracterizar mejor el atractor extraño (en caso de que exista) de las series de tiempo en estudio.

10 Anexos

10.1. Anexo A

Se adjunta la ubicación geográfica de las estaciones de monitoreo de la actividad sísmica en el territorio colombiano:



Figura 10-1: Mapa de estaciones de la Red Sismológica Colombiana

10.2. Anexo B

Se adicionan las librerías del paquete estadístico R, las cuales se utilizaron para el cálculo de los indicadores fractales y el modelamiento de las series temporales, además de otros paquetes estadísticos utilizados para el análisis.

- tseriesChaos.
- fractal.
- afmttools.
- fracdiff.
- TSA

Bibliografía

- Arteche, J. (2008), 'Análisis de series temporales en el dominio de la frecuencia curso de macroeconometría doctorado en economía (upv-ehu)'.
- Beltrami, H. & Mareschal, J.-C. (1993), 'Strange seismic attractor?', *pure and applied geophysics* **141**(1), 71–81.
- Boltzmann, L. (1935), 'Entropy and probability', *A source book in Physics: heat. New York: McGraw-Hill* pp. 262–263.
- Breslin, M. & Belward, J. (1999), 'Fractal dimensions for rainfall time series', *Mathematics and computers in simulation* **48**(4-6), 437–446.
- Bronowski, J., Ariotti, P. E. & Bronowski, R. (1979), 'The visionary eye'.
- Cao, L. (1997), 'Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series', *Physica D: Nonlinear Phenomena* **110**(1-2), 43–50.
- Castaño Velez, E. A. (2016), 'Identificación de modelos arfima', *Revista de la Facultad de Ciencias* **5**(1), 12–37.
- Castaño Velez, E. A., Gómez Portilla, K. & Gallón Gómez, S. A. (2008), 'Una nueva prueba para el parámetro de diferenciación fraccional'.
- Castaño Velez, E. A., Gómez, S. A. G. & Portilla, K. G. (2010), 'Sesgos en estimación, tamaño y potencia de una prueba sobre el parámetro de memoria larga en modelos arfima', *Lecturas de Economía* **73**, 131.
- Chung, C.-F. (1996), 'Estimating a generalized long memory process', *Journal of Econometrics* **73**(1), 237–259.
- Contreras-Reyes, J. E. & Palma, W. (2013), 'Statistical analysis of autoregressive fractionally integrated moving average models in r', *Computational Statistics* **28**(5), 2309–2331.
- Corral, A. (2004), 'Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes', *Physical Review Letters* **92**(10), 108501.
- De Guzman Ozamiz, M. (1993), *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor.

- Eckmann, J.-P., Kamphorst, S. O. & Ruelle, D. (1987), 'Recurrence plots of dynamical systems', *EPL (Europhysics Letters)* **4**(9), 973.
- Espíndola, J. (1994), *Terremotos y ondas sísmicas*, Vol. 1, UNAM.
- Feigelson, E. D. & Babu, G. J. (2012), *Modern statistical methods for astronomy: with R applications*, Cambridge University Press.
- Gallego Valencia, J. P. et al. (n.d.), Aplicación de la teoría de caos para el análisis y pronóstico de series de tiempo financieras en Colombia, PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Gilmore, C. G. (1993), 'A new test for chaos', *Journal of Economic Behavior & Organization* **22**(2), 209–237.
- González Obregón, C. H. (2002), *Análisis de complejidad de sistema respiratorio para la ayuda al diagnóstico de patologías*, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Granger, C. W. & Joyeux, R. (1980), 'An introduction to long-memory time series models and fractional differencing', *Journal of time series analysis* **1**(1), 15–29.
- Gutenberg, B. & Richter, C. F. (1944), 'Frequency of earthquakes in california', *Bulletin of the Seismological Society of America* **34**(4), 185–188.
- Gutenberg, R. & Richter, C. (1954), 'The seismicity of the earth 1904–1952'.
- Hosking, J. R. (1981), 'Fractional differencing', *Biometrika* **68**(1), 165–176.
- Hough, S. E. (1995), 'Earthquakes in the los angeles metropolitan region: a possible fractal distribution of rupture size', *Science* **267**(5195), 211.
- Hurst, H. E. (1951), 'Long-term storage capacity of reservoirs', *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.* **116**, 770–808.
- Husen, S. & Hardebeck, J. (2010), 'Earthquake location accuracy, community online resource for statistical seismicity analysis, doi: 10.5078/corssa-55815573', *Disponible en: <http://www.corssa.org>*.
- Johar, A. B. & Montoro, S. G. (2008), 'Fractales en los mercados financieros'.
- Kantz, H. (1994), 'A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time series', *Physics letters A* **185**(1), 77–87.
- Kantz, H. & Schreiber, T. (2004), *Nonlinear time series analysis*, Vol. 7, Cambridge university press.

- Kostić, S., Vasović, N. & Perc, M. (2014), ‘Temporal distribution of recorded magnitudes in serbia earthquake catalog’, *Applied Mathematics and Computation* **244**, 917–924.
- Lara, L., Stoico, C., Machado, R. & Castagnino, M. (2003), ‘Estimación de los exponentes de lyapunov’, *Revista Argentina: Mecánica Computacional* **12**.
- Liebovitch, L. S. & Toth, T. (1989), ‘A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting’, *physics Letters A* **141**(8-9), 386–390.
- Mandelbrot, B. (1967), ‘How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension’, *science* **156**(3775), 636–638.
- Mandelbrot, B. (2000), ‘Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión (j. llosa, trad.)’.
- Mandelbrot, B. B. (1977), *Fractals*, Wiley Online Library.
- Matcharashvili, T., Chelidze, T. & Javakhishvili, Z. (2000), ‘Nonlinear analysis of magnitude and interevent time interval sequences for earthquakes of the caucasian region’, *Nonlinear Processes in Geophysics* **7**(1/2), 9–20.
- Matsuzaki, M. (1994), ‘Fractals in earthquakes’, *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering* pp. 449–457.
- Mignan, A. & Woessner, J. (2012), ‘Estimating the magnitude of completeness for earthquake catalogs, community online resource for statistical seismicity analysis, doi: 10.5078/corssa-00180805’.
- Montanari, A., Rosso, R. & Taqqu, M. S. (1997), ‘Fractionally differenced arima models applied to hydrologic time series: Identification, estimation, and simulation’, *Water resources research* **33**(5), 1035–1044.
- Nava, A. (2011), *Terremotos*, Fondo de cultura económica.
- Omori, F. (1889), ‘Research on fracturing and overturning of columns (report on seismic experiments by shaking table)’, *Publication Earthquake Investigation Committee* **28**, 4–69.
- Pardo Llorente, L. (1993), ‘Teoría de la información estadística’, *Estadística Española* (133), 195–316.
- Patino Ortiz, J. (2009), Aplicación de la mecánica fractal para análisis de la sismicidad en la República Mexicana, PhD thesis.
- Pedrosa, I., Juarros-Basterretxea, J., Robles-Fernández, A., Basteiro, J. & García-Cueto, E. (2015), ‘Pruebas de bondad de ajuste en distribuciones simétricas, ¿qué estadístico utilizar?’, *Universitas Psychologica* **14**(1), 245.

- Penrose, R. & Sanz, J. G. (1996), *Las sombras de la mente: hacia una comprensión científica de la consciencia*, Crítica.
- Pérez, J. & Padilla, J. (2001), ‘Funcionamiento de la red sismológica nacional de colombia’, *INGEOMINAS-Bogotá. Red Sismológica Nacional de Colombia, Informe interno* p. 40.
- Pérez López, R. (2006), ‘Sobre la teoría del caos aplicada en sismotectónica: geometría fractal de fallas y terremotos’.
- Plazas Nossa, L., Ávila Angulo, M. A. & Moncada Méndez, G. (2014), ‘Estimación del exponente de hurst y dimensión fractal para el análisis de series de tiempo de absorbancia uv-vis’, *Ciencia e Ingeniería Neogranadina* **24**(2).
- Preckel, P. V. (2001), ‘Least squares and entropy: A penalty function perspective’, *American Journal of Agricultural Economics* **83**(2), 366–377.
- Prigogine, I. & Nicolis, G. (1994), ‘La estructura de lo complejo’, *Madrid: Alianza Universidad*.
- Reisen, V., Abraham, B. & Lopes, S. (2001), ‘Estimation of parameters in arfima processes: A simulation study’, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **30**(4), 787–803.
- Rydelek, P. A. & Sacks, I. S. (1989), ‘Testing the completeness of earthquake catalogues and the hypothesis of self-similarity’, *Nature* **337**(6204), 251–253.
- Sepulveda, L. (2004), *Detección de caos en series temporales de variables climáticas*, Facultad de Ingenierías, Escuela de Ingeniería industrial y estadística, Universidad del Valle.
- S.G.C (2013), ‘Sismicidad histórica de colombia’.
- S.G.C (2015), ‘Red sismológica nacional de colombia’.
- Shannon, C. E. (1948), ‘A mathematical theory of communication, part i, part ii’, *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 623–656.
- Strogatz, S. H. (2014), *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Hachette UK.
- Takens, F., Katok, A. & Hasselblatt, B. (1996), ‘Introduction to the modern theory of dynamical systems’, *Bulletin of the American Mathematical Society* **33**(4), 519–522.
- Takens, F. et al. (1981), ‘Detecting strange attractors in turbulence’, *Lecture notes in mathematics* **898**(1), 366–381.

- Talanquer, V. (2002), 'Fractus, fracta, fractales', *Fractales de laberintos y espejos. Fondo de Cultura Económica* (147).
- Team, R. C. et al. (2013), 'R foundation for statistical computing', *Vienna, Austria* **3**(0).
- Torres, R. (2001), 'Curso introducción a la sismología', *INGEOMINAS-Bogotá. Red Sismológica Nacional de Colombia, Infonne interno* p. 199.
- Udías, A. & Mezcua, J. (1986), 'Fundamentos de geofísica. primera edición, ucm'.
- Velásquez Ceballos, H. & Restrepo Restrepo, J. H. (2012), 'Análisis del índice general de la bolsa de valores de colombia y sus rendimientos desde la teoría del caos, 2001-2011', *Semestre económico* **15**(31).
- Wang, K., Phillips, C. A., Saxton, A. M. & Langston, M. A. (2015), 'Entropyexplorer: an r package for computing and comparing differential shannon entropy, differential coefficient of variation and differential expression', *BMC Research Notes* **8**(1), 832.
URL: <https://doi.org/10.1186/s13104-015-1786-4>
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. (1985), 'Determining lyapunov exponents from a time series', *Physica D: Nonlinear Phenomena* **16**(3), 285–317.