



**Conocimiento Especializado de Profesores en formación sobre las
Características de Aprendizaje en Probabilidad simple y compuesta**

Ginette Tatiana Rodríguez López

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela De Educación En Ciencias, Tecnología Y Cultura
Licenciatura en Matemáticas
Santiago de Cali
2023



**Conocimiento Especializado de Profesores en formación sobre las
Características de Aprendizaje en Probabilidad simple y compuesta**

Proyecto De Trabajo De Grado Para Optar Al Título De Licenciatura En Matemáticas

Ginette Tatiana Rodríguez López

Director

José Miguel León Banguero

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela De Educación En Ciencias, Tecnología Y Cultura

Licenciatura en Matemáticas

Santiago de Cali

2023

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, le agradezco a Dios por brindarme la fortaleza para no rendirme en los momentos más complejos a lo largo de mi carrera y darme esta gran oportunidad de estudiar en una universidad, especialmente en la Universidad del Valle, la cual agradezco por exigirme y pulir mis conocimientos.

A mi madre, padre, abuelas y demás familia, particularmente a mi mamita Marina por ser una abuela llena de amor incondicional, fue un gran apoyo y motivación, se alegró más por mis alegrías que yo misma, a sus ojos fui una buena persona y espero siempre hacerla sentir orgullosa en el cielo, definitivamente sin ella no hubiera llegado hasta donde me encuentro hoy en día.

A mis compañeros y amigos que entendían perfectamente por lo que pasaba, nunca faltó sus consejos y su tiempo de calidad, agradezco cada uno de esos momentos en el que reflexionamos y aprendimos de nosotros.

Finalmente agradezco a todos los profesores que me acompañaron a lo largo de mi crecimiento como profesional, a los profesores que nos compartieron lo mejor de sus conocimientos y a los que por el contrario nos mostraron como no nos gustaría ser, a todos ellos que fueron fuente de motivación y amor por la docencia, por guiarme para que este trabajo de grado lograra concretarse de la mejor forma.

ÍNDICE

RESUMEN.....	9
INTRODUCCIÓN	10
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	14
1.1 Motivación..	14
1.2 Problemática	16
1.3 Objetivos...22	
1.3.1 Objetivo general	22
1.3.2 Objetivos específicos.....	22
1.4 Justificación	23
2. ANTECEDENTES	25
2.1 Dificultades entorno a la enseñanza de la probabilidad	26
2.2 Conocimiento didáctico.....	28
2.3 Conocimiento matemático.....	29
3. MARCO TEÓRICO	33
3.1 Fundamentos Matemáticos.....	33
3.1.1 Experimentos	33
3.1.2 Espacio muestral.....	34
3.1.3 Eventos	34
3.1.4 Probabilidad de Eventos	35
3.2 Modelo de Conocimiento del Profesor de Matemáticas	37
3.2.1 Desarrollo del conocimiento en una profesión: desarrollo del conocimiento en la enseñanza.....	39
3.2.2 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)	40
3.2.3 Conocimiento de Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)	41
3.3 Marco referencial	57
3.3.1 Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico.....	57
3.3.2 Concepciones sobre probabilidad	60
3.3.3 Ideas estocásticas fundamentales.....	61
4. METODOLOGÍA.....	65
4.1 Investigación cualitativa.....	65
4.2 Estudio de caso.....	66

4.3 Selección de casos	68
4.4 Técnicas.....	69
4.4.1 Instrumentos de recogida de la información	72
4.4.1.1 Cuestionario de Conocimientos Didácticos sobre Probabilidad simple y compuesta	74
4.4.1.2 Validación del instrumento de recogida de la información	87
4.4.2 Instrumentos de análisis de la información	89
4.4.2.2 Codificación.....	93
4.4.2.3 Matrices de análisis	95
5. ANÁLISIS Y RESULTADOS.....	97
5.1 Análisis de la investigación.....	97
5.1.1 Evidencias del Conocimiento Matemático	97
5.1.1.1 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 1.	99
5.1.1.2 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 2.	100
5.1.1.3 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 3.	102
5.1.1.4 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 4.	103
5.1.1.5 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 5.	104
5.1.2 Evidencias del Conocimiento Didáctico.....	106
5.1.2.1 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 1.	106
5.1.2.2 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 2	109
5.1.2.3 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 3	111
5.1.2.4 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 4	114
5.1.2.5 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 5	116
5.2 Resultados de la investigación	118
5.2.1 Resultados a partir de la perspectiva Top-Down.....	118
5.2.1.1 Parte 1 del Cuestionario didáctico	119
5.2.1.2 Parte 2 del Cuestionario.....	122
5.2.3 Propuesta y discusión de nuevos indicadores de conocimiento	127
5.2.4 Patrones de códigos	129
6. CONCLUSIONES.....	131
7. REFERENCIAS.....	135

ÍNDICE DE FIGURAS

Figuras 1	<i>Modelos de relaciones entre los dominios del conocimiento profesional del profesor</i> (Salazar, 2005, pág. 7).....	40
Figuras 2	<i>(MKT)</i> (Parra y Villa, 2017, pág. 296)	41
Figuras 3	<i>Estructura del modelo (MTSK)</i> (Contreras, Montes, Climent y Carrillo, 2017, pág. 7).....	43
Figuras 4	<i>Estructura del Cuestionario de conocimientos Didácticos</i> (León, 2020, pág. 58).....	73
Figuras 5	<i>Esquema de Top-Down en relación con el modelo (MTSK)</i> (Elaboración propia).....	91
Figuras 6	<i>Esquema de los grupos de códigos</i> (Elaboración propia)	92
Figuras 7	<i>Códigos del Grupo Conceptos</i> (Elaboración propia)	94
Figuras 8	<i>Códigos del Grupo Dificultades</i> (Elaboración propia)	94
Figuras 9	<i>Códigos del Grupo Estrategias</i> (Elaboración propia).....	95
Figuras 10	<i>Código Nulo</i> (Elaboración propia)	95
Figuras 11	<i>Códigos Parte 1</i> (Elaborado con ATLAS.ti).....	98
Figuras 12	<i>Caso 2 - Situación 1 (P1)</i>	99
Figuras 13	<i>Caso 5 - Situación 1 (P1)</i>	99
Figuras 14	<i>Caso 6 - Situación 1 (P1)</i>	100
Figuras 15	<i>Caso 1 - Situación 2 (P1)</i>	100
Figuras 16	<i>Caso 5 - Situación 2 (P1)</i>	101
Figuras 17	<i>Caso 6 - Situación 2 (P1)</i>	101
Figuras 18	<i>Caso 2 - Situación 3 (P1)</i>	102
Figuras 19	<i>Caso 4 - Situación 3 (P1)</i>	102
Figuras 20	<i>Caso 5 – Situación 3 (P1)</i>	103
Figuras 21	<i>Caso 2 – Situación 4 (P1)</i>	103
Figuras 22	<i>Caso 4 – Situación 4 (P1)</i>	103
Figuras 23	<i>Caso 6 – Situación 4 (P1)</i>	104
Figuras 24	<i>Caso 1 – Situación 5 (P1)</i>	105
Figuras 25	<i>Caso 2 – Situación 5 (P1)</i>	105
Figuras 26	<i>Caso 4 – Situación 5 (P1)</i>	105
Figuras 27	<i>Códigos Parte 2</i> (Elaborado con ATLAS.ti).....	106
Figuras 28	<i>Caso 1- E1 (P2)</i>	107

Figuras 29	<i>Caso 2 - E2 (P2)</i>	108
Figuras 30	<i>Caso 6 – E3 (P2)</i>	108
Figuras 31	<i>Caso 7 – E1 (P2)</i>	109
Figuras 32	<i>Caso 1 – E2 (P2)</i>	110
Figuras 33	<i>Caso 2 – E1 (P2)</i>	110
Figuras 34	<i>Caso 6 – E1 (P2)</i>	111
Figuras 35	<i>Caso 7 - E1 (P2)</i>	111
Figuras 36	<i>Caso 2 – E3 (P2)</i>	112
Figuras 37	<i>Caso 3 – E1 (P2)</i>	113
Figuras 38	<i>Caso 4 – E3 (P2)</i>	113
Figuras 39	<i>Caso 5 – E3 (P2)</i>	113
Figuras 40	<i>Caso 1 – E1 (P2)</i>	115
Figuras 41	<i>Caso 3 – E3 (P2)</i>	115
Figuras 42	<i>Caso 4 -E1 (P2)</i>	115
Figuras 43	<i>Caso 7 – E3 (P2)</i>	116
Figuras 44	<i>Caso 2 – E3 (P2)</i>	117
Figuras 45	<i>Caso 3 – E1 (P2)</i>	117
Figuras 46	<i>Caso 5 – E3 (P2)</i>	117
Figuras 47	<i>Caso 6 – E3 (P2)</i>	118
Figuras 48	<i>Red Parte 1 (Elaborado con ATLAS.ti)</i>	120
Figuras 49	<i>Los 10 códigos más frecuentes (Elaborado con ATLAS.ti)</i>	122
Figuras 50	<i>Red Parte 2 (Elaborado con ATLAS.ti)</i>	123

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Categorías e Indicadores de Conocimiento KFLM.....	55
Tabla 2	Heurísticas, sesgos y falacias en probabilidad.	58
Tabla 3	Concepciones sobre probabilidad.....	60
Tabla 4	Ideas estocásticas fundamentales	62
Tabla 5	Categoría temática y Respuestas de estudiantes hipotéticos.....	74
Tabla 6	Desempeños del Cuestionario en la Parte 1	98
Tabla 7	Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 1.	107
Tabla 8	Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 2.	109
Tabla 9	Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 3.	112
Tabla 10	Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 4.	114
Tabla 11	Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 5.	116
Tabla 12	Códigos frecuentes por situación	120
Tabla 13	Patrones de códigos Parte 2.....	129
Tabla 14	Limitaciones de los casos.....	130

RESUMEN

El conocimiento del profesor es objeto de interés en diversas investigaciones relacionadas con el desarrollo profesional de profesores tanto en activo como en formación, sin embargo, la literatura que se particularice en el conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje en probabilidad simple y compuesta en los estudiantes es escasa. En relación con la problemática expuesta se plantea la interrogante del estudio: ¿Qué conocimientos especializados sobre las características de aprendizaje tienen profesores de matemáticas en formación en relación con la enseñanza de probabilidad simple y compuesta?, teniendo esto en cuenta el objetivo fue caracterizar el conocimiento especializado de las características de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación en la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta. Para esta caracterización se utilizó el modelo de conocimiento Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) particularmente el subdominio KFLM. Esta investigación es cualitativa, toma en consideración como casos de interés siete profesores en formación de matemáticas. Para el análisis de los resultados se utilizó la perspectiva Top-Down, se codifica las heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico, las concepciones sobre probabilidad, las ideas estocásticas fundamentales y los indicadores de conocimiento del KFLM, junto con el software ATLAS.ti y las dos matrices de análisis se logra identificar tanto fortalezas como limitaciones en el conocimiento matemático y didáctico del profesor de matemáticas en formación, algunas de las limitaciones que predominaron fue la heurística de la representatividad y sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral. Se culmina con los aportes de los nuevos indicadores de conocimiento al modelo MTSK, uno de estos hace referencia a conocer los conceptos e ideas estocásticas que toma o no en cuenta el estudiante para la resolución de un problema.

PALABRAS CLAVES:

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en formación; Características de aprendizaje; Indicadores de conocimiento; Probabilidad simple y compuesta.

ABSTRACT

The teacher's knowledge is the subject of interest in several researches related to the professional development of teachers both in active and in training, however, the literature that is particularized in the teacher's knowledge about the learning characteristics in simple and compound probability in students is scarce. In relation to the exposed problematic, the question of the study is: What specialized knowledge about learning characteristics do mathematics teachers in training have in relation to the teaching of simple and compound probability? Taking this into account, the objective was to characterize the specialized knowledge of the learning characteristics of the mathematics teacher in training in the teaching of simple and compound probability. For this characterization, the knowledge model Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) was used, particularly the KFLM subdomain. This research is qualitative, taking into consideration as cases of interest seven mathematics trainee teachers. For the analysis of the results, the Top-Down perspective was used, the heuristics and biases in probabilistic reasoning, the conceptions about probability, the fundamental stochastic ideas and the KFLM knowledge indicators are codified, together with the ATLAS.ti software and the two analysis matrices, it is possible to identify both strengths and limitations in the mathematical and didactic knowledge of the mathematics teacher in training, some of the predominant limitations were the heuristics of representativeness and bias of insensitivity to the sample size. It culminates with the contributions of the new knowledge indicators to the MTSK model, one of these refers to

knowing the stochastic concepts and ideas that the student takes or does not take into account when solving a problem.

KEY WORDS:

Specialized knowledge of the mathematics teacher in training; Learning characteristics; Knowledge indicators; Simple and compound probability.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado realiza una caracterización del conocimiento especializado de siete profesores en formación de matemáticas particularmente con la enseñanza de probabilidad simple y compuesta, partiendo de esto, consta de un total de siete capítulos. Seguidamente se muestra la estructura por capítulos, junto con una breve descripción de cada uno con la intención que el lector tenga una visión general de la investigación.

En el primer capítulo se plantea aspectos generales de la problemática de la investigación. Primero se incluye la motivación que causó el interés en la línea de conocimiento especializado del profesor, seguidamente se presenta el planteamiento de la problemática y la pregunta. A partir de esto se muestran tanto el objetivo general como los específicos y se cierra este capítulo con la justificación.

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes de la investigación. Se organizan en tres grupos, el primero son tres investigaciones que se centran en las dificultades entorno a la enseñanza de la probabilidad, el segundo son tres investigaciones sobre conocimiento didáctico y se termina con el grupo sobre conocimiento matemático formado por cinco investigaciones.

En el tercer capítulo se presentan los aspectos que conforman el marco teórico de la investigación. Primeramente, los fundamentos matemáticos relacionados con la probabilidad simple y compuesta, más adelante, se presenta cinco modelos de conocimiento del profesor de matemáticas, haciendo énfasis en el modelo MTSK siendo este uno de los referentes teóricos centrales de la investigación. Para finalizar con el marco referencial conformado por la heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico, concepciones sobre probabilidad y cierra con las ideas estocásticas fundamentales de Heitele (1975), estos elementos se tienen en cuenta para el análisis.

En el cuarto capítulo se presenta la metodología de la investigación. Comenzando por la descripción de la investigación cualitativa, de la elección del estudio de casos y las características de los siete casos seleccionados. Posteriormente, el instrumento de recogida de información junto con su validación mediante pruebas piloto y expertos, que es el cuestionario de conocimientos en probabilidad simple y compuesta. Seguidamente, se presenta los instrumentos de análisis de la información, mediante la perspectiva de análisis de la información Top-Down, junto con la creación de las dos matrices de análisis, la codificación y la utilización del software ATLAS.ti.

En el quinto capítulo se presenta los análisis de la investigación. Primeramente, se muestran algunas evidencias relevantes del conocimiento matemático y luego del conocimiento didáctico de los participantes. Se continua con los resultados a partir de la perspectiva Top-Down tanto de la parte 1 como de la 2, mediante el software ATLAS.ti se muestra redes entre los códigos y los casos, así mismo, tablas de los códigos más frecuentes por situación. Por último, se presenta los patrones de códigos que se evidencian junto con las limitaciones de los casos.

En el sexto capítulos se presentan las conclusiones de la investigación. Partiendo de la síntesis de las fortalezas y limitaciones de los participantes, luego se mencionan los aportes al modelo MTSK. Así mismo se presentan las limitaciones que tuvo la investigación y las recomendaciones o sugerencias a futuras investigaciones que su motivación este alineada con la línea de investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Finalmente, en el séptimo capítulo se presenta las referencias que se utilizaron a lo largo de la investigación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Motivación

Cuando era pequeña consideraba que la profesión docente era sencilla, solo se necesitaba saber muy bien los temas que iba a enseñar. Pensaba que ser profesor consistía en dar clase de temas complejos a niños que muy probablemente no estaban en disposición. También, era consciente desde temprana edad que muchos compañeros no respetaban a los profesores. A partir de eso no anhelaba ser profesora cuando fuera grande.

Sin embargo, me inscribí a la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad del Valle, pensando en cambiar de carrera. A medida que iba avanzando en los cursos y los semestres, la percepción que tenía de la profesión fue cambiando. En consecuencia, empecé a reflexionar sobre el trasfondo de la práctica profesional de los profesores y la importancia que tiene su labor en la sociedad. Fue en ese momento que me permití ser conquistada por la Licenciatura en Educación Matemática, por tal motivo decidí quedarme y terminar mi carrera como profesora de matemáticas.

Cuando empecé a verme como futura profesora, surgieron diversas preguntas como: ¿Qué aspectos deben tener los profesores para la construcción de una educación de calidad?, ¿Los estudiantes para maestro estamos realmente preparados para alcanzar una enseñanza eficaz?, ¿Cómo afecta las creencias de los profesores al momento de la planeación y desarrollo de la clase? Junto con el acompañamiento de profesores, creció la curiosidad frente a la reflexión sobre los conocimientos necesarios en la práctica del profesor de matemáticas. Considero que para ser un profesional de la educación es indispensable un amplio repertorio de conocimientos para afrontar diversas situaciones con los estudiantes. Al mismo tiempo, el profesor debe ser consciente de los contextos sociales, económicos y culturales, y por supuesto, no dejar de lado el aspecto humano de los individuos.

A medida que se acercaba la primera planeación sobre el proyecto del trabajo de grado, empecé a definir qué temáticas o línea de investigación me daba curiosidad indagar a fondo. Teniendo eso en mente cursos como Didáctica III: Desarrollo de pensamiento estocástico y aleatorio y Estadística, sembraron en mí el interés sobre la realidad de la investigación en didáctica de la probabilidad, que es relativamente nueva. Siguiendo esta línea se volvió apasionante observar artículos relacionados con ello, además de indagar sobre cómo nosotros siendo profesores en formación estamos preparados para desarrollar el pensamiento estocástico en nuestros estudiantes.

En sintonía con lo anterior, se comienzan a presentar curiosidad por modelos que su enfoque de investigación sea el campo de formación de profesores y relacionarlo con el pensamiento estocástico. A partir de esto se observa que son relativamente pocas las investigaciones relacionadas con los conocimientos tanto didácticos como matemáticos, además de tener en cuenta las creencias que tenga el profesor y cómo influyen estas al momento de enseñar probabilidad. Así mismo analizar las dificultades, obstáculos y falacias que pueden tener los profesores en activo y en formación y cómo esto se relaciona con sus prácticas.

Finalmente, considero que la motivación de hacer esta investigación es por la importancia de seguir indagando los conocimientos de los profesores en formación y en activo, con el fin de ir caracterizándolos. Además de hacer conciencia frente a la necesidad de preparar a los futuros profesores sobre probabilidad pues nos ayuda a razonar y reflexionar sobre la práctica profesional y en consecuencia en la calidad de enseñanza. Tengamos en cuenta que la enseñanza de la probabilidad está condicionada por los conocimientos que tenga el profesor y esto a su vez influirá en el nivel de seguridad de sus clases de probabilidad. Cabe resaltar que nosotros como profesionales de la educación tenemos un

compromiso tanto con nuestros estudiantes como con nosotros mismos de seguir en formación constantemente.

1.2 Problemática

Es de conocimiento público que a medida que la sociedad avanza, se crean nuevas necesidades respecto a que debe saber el ciudadano promedio (Restrepo, 2006). En ese sentido, las dos instituciones que se han encargado de la labor de preparar a las nuevas generaciones son la escuela y la familia, como afirma (Jiménez, 2008). Los profesores juegan un papel importante en el desarrollo de la sociedad (MEN, 2005). Por tal razón, es fundamental que los profesores tengan buenas competencias y conocimientos que permitan propiciar el aprendizaje de sus estudiantes, lo cual se ha puesto en manifiesto en los últimos 20 años en reformas curriculares en matemáticas (Vásquez y Alsina, 2013).

A partir de lo anterior se puede empezar a mencionar la relevancia que tiene la alfabetización probabilística para el ciudadano promedio (Batanero, 2000). Al respecto, Moreno y Cardenoso (2014) afirman que es necesario que el ciudadano esté alfabetizado probabilísticamente para que de esta forma pueda enfrentarse a diversas situaciones de la vida cotidiana haciendo análisis previo para la toma de decisiones. En conclusión, la alfabetización probabilística es fundamental para la formación del ciudadano promedio, dado que brinda las herramientas necesarias para gestionar eficazmente las demandas y funciones que están relacionadas con la incertidumbre en la cotidianidad (Gal, 2005; citado en Vásquez et al., 2018).

Bennet (1998) y Everitt (1999) afirman que el aprendizaje de la probabilidad contribuye al desarrollo del pensamiento crítico, este a su vez permite a los ciudadanos comprender información presente en situaciones donde los fenómenos aleatorios, el azar y la incertidumbre están presentes (como se citó en Ortiz y Alsina, 2017). En relación con la idea

anterior “La relación entre el desarrollo de un país y el grado en que su sistema estadístico produce estadísticas completas y fiables es clara, porque esta información es necesaria para la toma de decisiones acertadas de tipo económico, social y político.” (Batanero, pág. 3, 2001). En consecuencia, la formación en probabilidad es crucial tanto para los productores de datos (quienes producen y analizan los datos) y los consumidores (quienes participan en la lectura, escucha o visualización de los datos estadísticos y la interpretación de estos) en este último grupo estarían gran parte del ciudadano promedio (Moreno y Cardeñoso, 2014).

Es evidente que la información que reciben los estudiantes es de fácil acceso, esto se puede convertir en un problema a largo plazo (Cox, 1997; citado en Mantilla, 2019). A partir de esto, Mantilla (2019) propone que el profesorado debe procurar que los estudiantes puedan desempeñarse críticamente en la sociedad de la que hacen parte, capacitándolos para indagar, analizar, discernir sobre los datos que los rodea. Dentro de ese orden, Flores (2016) menciona que, en función de los datos estadísticos que encontramos en la cotidianidad, mediante la televisión, los periódicos, las revistas y en casi todos los medios de comunicación, se evidencia la necesidad de desarrollar un análisis y discernimiento de estos datos. De igual forma es relevante que el profesorado le dé la importancia de desarrollar en los estudiantes la habilidad de analizar los datos, Alsina y Vásquez (2017) sugieren que:

La enseñanza de la estadística requiere considerar, desde las primeras edades, el reconocimiento, la organización, la representación y la interpretación de datos...

Respecto a la probabilidad, se sugiere que el inicio de su enseñanza debería partir de situaciones de incertidumbre cercanas a la realidad de los alumnos. (p. 200)

En concordancia con lo anterior, Borovcnik y Peard (1996) mencionan que hay una diferencia entre el razonamiento lógico que goza de que sus proposiciones son siempre verdaderas o falsas a diferencia del razonamiento probabilístico donde no se tiene certeza

completa sobre sus eventos aleatorios, (como se citó en Batanero, Godino y Roa, 2004).

A nivel internacional las orientaciones en materia de educación matemática coinciden en que es necesario empezar desde la etapa de Educación Infantil (Alsina, 2012). Estas orientaciones toman fuerza desde 2000 cuando el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) propone incluir contenidos de estadística y probabilidad en los currículos de matemáticas en todos los niveles educativos (Alsina, 2019). De esta manera, es explícita la necesidad de que los estudiantes precisen de conocimientos y habilidades relacionadas al análisis de datos y probabilidad (Inzunza y Rocha, 2021).

En sintonía con lo anterior, en el contexto colombiano el Ministerio de Educación Nacional (MEN) presenta *Los Lineamientos curriculares de Matemáticas* (1998), *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (2006) y *Derechos Básicos de Aprendizaje* (2016) con los cuales se espera delimitar y estructurar el currículo de matemáticas en Colombia. En un principio, el MEN (1998) propone el *pensamiento aleatorio y sistemas de datos* y mencionan que “una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiano” (p. 47). En este sentido se considera importante que el profesor propicie el pensamiento aleatorio pues ayuda a los estudiantes en la búsqueda de soluciones razonables a problemas que no son deterministas (MEN, 2006).

En las últimas décadas, se han propuesto reformas en el currículo de matemáticas, siendo el profesor uno de los agentes clave del sistema educativo (Sowder, 2007). El conocimiento del profesor es objeto de interés para la realización de diversas investigaciones relacionadas con el desarrollo profesional de profesores en activo y en formación (Blanco, 2005). En relación con lo anterior, Sowder (2007) menciona que para que las escuelas

mejoren, es indispensable que la enseñanza sea mejorada, sin embargo, las escuelas mejorarán para los estudiantes cuando las escuelas sea un lugar para que los profesores también aprendan. Por lo tanto, resulta interesante centrar la mirada en el conocimiento del profesor para la enseñanza y en particular de las matemáticas. Siguiendo la misma línea, todo profesional de la educación debe ser agente activo en el sistema didáctico para propiciar la construcción de conocimientos significativos de los estudiantes (Belmonte, Ruiz y Vecino, 2005).

Enfocándose en los profesores de matemáticas, se ha documentado la importancia de los conocimientos matemáticos y didácticos para su quehacer docente (León, Sosa y Carrillo, 2020; Contreras et al., 2017; Alpízar, Chavarría y Oviedo, 2013). En ese sentido, Muñoz et al (2015) mencionan que es imprescindible una profundización en y desde la matemática. Al respecto, Vásquez y Alsina (2015) afirman que un elemento clave en el aprendizaje de los estudiantes es el dominio de los contenidos que posea el profesor, dado que no se debe enseñar lo que no se sabe bien. Además, Contreras et al. (2017) señalan que el dominio matemático que tenga el maestro se puede considerar como un “conocimiento profundo de la matemática fundamental”. Por ende, existe una relación entre el dominio de los contenidos matemáticos que tenga el profesor con el desarrollo de una educación de calidad (MEN) (2006).

Al respecto, Batanero (2015) afirma que el conocimiento que poseen los profesores tanto en activo como en formación sobre la enseñanza de la probabilidad se puede considerar muy limitado. Enfocándose en las limitaciones que tienen los profesores respecto al conocimiento matemático Alpízar, Chavarría y Oviedo (2013) se muestran preocupados de que los profesores consideren que la Probabilidad no es tan útil para la formación de un ciudadano o consideran que es muy difícil de tratar. Batanero (2016) muestra algunos retos

para la enseñanza de la probabilidad y resalta la importancia de una formación pertinente para que los futuros profesores no se sientan inseguros al momento de enseñar probabilidad.

Ahora bien, Ortiz et al (2006) enfatizan en la necesidad de reforzar la formación probabilística elemental de los futuros profesores, los autores llegan a afirmar que con la preparación profesional que ofrecen las universidades muy difícilmente podrán enseñar un tema donde muestran dificultades tan notables.

Escudero, Flores y Carrillo (2012) considera que cuando el profesor se preocupa por cómo hacer que sus alumnos comprendan las características y propiedades de un concepto matemático, se hace visible la necesidad de un desarrollo profesional del profesorado pues de esta forma podrá afrontar los desafíos de la práctica docente. Al respecto, Pérez y Lis (2012) afirman:

Los conocimientos didácticos pueden colaborar en la toma de decisiones para llevar adelante acciones más adecuadas a las circunstancias en las que los docentes desarrollan sus tareas y es por lo que la vía de aproximación profesional, con la formación que la misma implica, abre ese marco de posibilidades. (p. 90)

De este modo, se resalta la necesidad de una preparación profesional del profesor en los conocimientos didácticos Escudero, Flores y Carrillo (2012). Este dominio de conocimientos se considera como una herramienta esencial en la práctica del profesor para poder acompañar a los estudiantes en el proceso de propiciar su aprendizaje (Carrillo et al., 2018). Los profesores deberán tener conocimientos didácticos para su práctica profesional, ejemplo de estos conocimientos serían los recursos que utilizan para enseñar el concepto matemático, las estrategias, posibles dificultades y errores que tengan los estudiantes, asimismo la manera de hacer matemáticas y las relaciones entre los objetos matemáticos, (Muñoz et al. 2015). En conclusión, Godino y Batanero (2004) explican que el profesor trata

de conjugar las orientaciones curriculares con una visión constructiva de las matemáticas y del aprendizaje matemático, adoptando para ello modelos didácticos coherentes.

Cabe señalar que diversos autores (Carrillo et al., 2018; Franco y Alsina, 2022; Escudero, Flores y Carrillo, 2012), hacen referencia al conocimiento especializado del profesor. En concordancia, Muñoz-catalán et al (2015) y Carrillo et al (2018) consideran a este conocimiento, como aquel que se desarrolla en el momento que se tiene la intención de enseñar un contenido matemático. Así mismo, son esas tareas profesionales particulares de la práctica del profesorado, las que ayudan a definir el conocimiento especializado del profesor y su diferenciación del conocimiento de otros profesionales, a pesar de que coincidan en ciertos aspectos (Escudero et al., 2015). De igual forma, Rodríguez et al., (2018) consideran que es indispensable para la enseñanza de las matemáticas, conocimientos que trasciendan el conocimiento matemático a esto se le considera conocimiento especializado. Ahora bien, Scheiner et al., (2019) mencionan que las acciones de los profesores sobre la materia, como lo son transformar, desempacar, deconstruir y descomprimir las matemáticas con el objetivo de que los estudiantes entiendan es una característica de la especialización del conocimiento del profesor. En conclusión, “lo que hace que el conocimiento del profesor de matemáticas se especialice no es tanto "qué" saben los profesores de matemáticas, sino "cómo" saben los profesores de matemáticas” (Scheiner et al, 2019, p.9)

En relación con la formación del profesorado sobre su conocimiento didáctico, Vásquez y Alsina (2015) consideran que es indispensable realizar intervenciones que permitan mejorar el nivel de los conocimientos matemáticos y didácticos pues afirman ser insuficientes. De igual forma varias investigaciones Franco Y Alsina (2022); Batanero, Gómez, Contrera y Díaz (2015)) enfatizan en las evidentes limitaciones que tienen los profesores respecto al conocimiento didáctico para enseñar probabilidad. En consecuencia,

León, Sosa y Carrillo (2020) sugieren más estudios sobre el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de la probabilidad además de la necesidad de reforzar en ese aspecto la formación continua del profesorado.

Como consecuencia surge la pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos especializados sobre las características de aprendizaje tienen profesores de matemáticas en formación en relación con la enseñanza de probabilidad simple y compuesta?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

- Caracterizar el conocimiento especializado de las características de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar en la literatura elementos del conocimiento matemático y didáctico del profesor para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.
- Diseñar y validar un cuestionario didáctico que permitan indagar aspectos del conocimiento especializado de las características de aprendizaje del profesor en relación con la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.
- Elaborar una matriz de análisis que permita identificar los conocimientos especializados del profesor en relación con la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

- Establecer indicadores de conocimiento especializado del profesor para el subdominio de conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

1.4 Justificación

La calidad de la educación no se logra enfocándose solamente en la implementación de instrumentos, el aumento del financiamiento o nuevas políticas sino a través de la formación docente (Chehaybar y Kuri. 2007). Llinares (2014) menciona que es importante que los profesores en formación empiecen a razonar como expertos en diferentes momentos en la enseñanza de las matemáticas, cuestionando constantemente sobre sus conocimientos como futuros profesionales de la educación. Por esta razón, se consideró importante desarrollar una investigación enfocada en indagar los conocimientos de los futuros profesores y cómo estos inciden en su práctica docente, específicamente en la enseñanza de la probabilidad (Batanero, Gómez, Contrera y Díaz. 2015)

Batanero (2015) afirma que la incertidumbre es parte de la vida del ciudadano promedio desde tempranas edades. Así mismo, Batanero menciona la necesidad de comprender los fenómenos aleatorios para hacer análisis adecuados de esa forma tomar decisiones estructuradas cuando se enfrente a la incertidumbre. En concordancia, Inzunza y Rocha (2021) resalta la necesidad de que los estudiantes desarrollen conocimientos y habilidades relacionadas con el pensamiento estocástico. En función de lo planteado, se busca llevar a cabo una investigación que reconoce la importancia de la didáctica de la probabilidad y cómo esto puede influir positivamente en las prácticas de enseñanza y en la formación de profesores.

Así mismo, son pocas investigaciones que se han realizado que tomen en consideración la formación de profesores y la enseñanza de la probabilidad (León, 2020).

Dentro de este orden de ideas, Batanero, Gómez, Contrera y Díaz (2015) sugieren reforzar la formación de los profesores de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad, además de continuar con el interés para las futuras investigaciones sobre otros componentes del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad. Del mismo modo, León, Sosa y Carrillo (2020) resaltan la necesidad de más estudios que permitan comprender y caracterizar el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de la probabilidad. Esta investigación toma en consideración profesores en formación de la ciudad de Cali y con esto se espera caracterizar el nivel actual de conocimientos matemáticos y didácticos.

Al respecto, se resalta que diversas investigaciones afirman que los conocimientos de profesores tanto en activo como en formación presentan limitaciones en la enseñanza de la probabilidad (Batanero et al, 2015; Ortiz y Cabrera, 2022; Alpízar, Chavarría y Oviedo, 2013). Ortiz et al (2006) enfatizan en la evidente necesidad de reforzar la formación probabilística elemental y por tanto los conocimientos de los futuros profesores. Por esta razón, se considera realizar una investigación que permita identificar algunas limitaciones de conocimiento didáctico y matemático de profesores en formación de Colombia para la enseñanza de la probabilidad.

Particularmente en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), a partir de 1998 concibió los tópicos asociados con la probabilidad como parte del currículo, además, de la necesidad de fortalecer el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos como un conocimiento básico que deben desarrollar los estudiantes tanto en educación básica como media (Pantoja et al, 2017). Sin embargo, la inclusión del pensamiento estocástico en los currículos se convirtió en un gran reto para Colombia y los demás países, si se toma en cuenta que el recurso humano calificado para apoyar este objetivo es bastante limitado (Zapata,

2011). Esta investigación, permite identificar elementos importantes en la formación de profesores y como estos influyen en las prácticas de enseñanza.

En sintonía con lo anterior, León (2020) afirma que son pocos los instrumentos para evaluar las competencias y conocimientos de profesores para la enseñanza de la probabilidad. Aunque, desde hace aproximadamente tres décadas, se ha notado un incremento en el interés tanto a la comunidad de investigadores en matemática educativa como a las administraciones educativas, en determinar y caracterizar los componentes que conforman los conocimientos del profesor de matemáticas (Pino-Fan, Font y Godino, 2014). Con esta investigación se espera diseñar instrumentos de recogida de la información y de análisis que permitan establecer si los procesos formativos son acordes con lo propuesto en documentos oficiales.

De este modo, distintos modelos se han enfocado en la caracterización del conocimiento del profesor, entre ellos destacan la teoría del Conocimiento Base para la Enseñanza (CBE) propuesta por Shulman (1987), el Cuarteto de Conocimiento (KQ) desarrollado por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008), el Conocimiento Didáctico-Matemático propuesto por Godino y Pino-Fan (2013) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) desarrollado por Carrillo et al. (2018). Esta investigación, pretende utilizar un modelo de conocimiento del profesor, el cual permitirá caracterizar elementos fundamentales del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para enseñar probabilidad.

2. ANTECEDENTES

Ahora bien, sabiendo que se está en una sociedad en constante cambio esto conlleva que la formación de los profesores debe ir de la mano de las nuevas exigencias sociales (Vásquez y Alsina, 2013). Por lo cual se busca que los profesores, a través de sus prácticas,

propicien el razonamiento crítico de los estudiantes, lo cual contribuye -notablemente- en la toma de decisiones de los estudiantes ante situaciones de la vida real, que requieran un tratamiento desde las matemáticas (Sarmiento, 2007). Ahora bien lo mencionado por (Benjamín, 2009) indica que es posible desarrollar una propuesta curricular donde la Estocástica, específicamente el pensamiento aleatorio, sea un pilar central en el desarrollo del pensamiento matemático. En ese sentido, conviene centrar la mirada en investigaciones que reporten los conocimientos del profesor para la enseñanza de estos contenidos.

A continuación, describiremos de manera breve y sucinta diversas investigaciones que abordan cuestiones relacionadas con formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad.

2.1 Dificultades entorno a la enseñanza de la probabilidad

Batanero, Ortiz y Serrano (2007) realizan un breve resumen sobre el estado actual de la introducción generalizada de la probabilidad en los diversos niveles educativos. El estudio sigue la visión personal de los autores frente los principales temas investigados en relación con la didáctica de la probabilidad. Los autores dividieron las investigaciones sobre desarrollo cognitivo, sobre toma de decisiones, enseñanza y resolución de problemas, por último, currículo y formación de profesores, sistematización de la investigación. Los resultados de la investigación indican que muchos conceptos fundamentales de probabilidad se usan incorrectamente o no se comprenden. Concluyeron que muchos profesores se enfocan en la enseñanza de fórmulas al momento de plantearse la enseñanza de la probabilidad, en lugar de tomar en cuenta algunas directrices actuales que aconsejan una planeación de clase basado en proyectos, resolución de problemas y experimentación con fenómenos aleatorios.

Ortiz y Cabrera (2022) realizan una caracterización de cómo algunas de las principales orientaciones curriculares a nivel internacional abordan la estadística y la

probabilidad tanto en Educación Infantil como en Educación Primaria de Australia, Chile, España, Estados Unidos, Nueva Zelanda y Singapur. Este estudio toma como referencia las ideas estadísticas fundamentales presentes explícitamente o de manera subyacente, desde la perspectiva de Burrill y Biehler. Para alcanzar el objetivo desarrollan una investigación cualitativa de carácter documental y utilizan como método el análisis de contenido de Krippendorff (2013) sobre las orientaciones curriculares antes mencionadas. Los resultados del estudio muestran que la presencia del estudio de nociones y conceptos vinculados a estadística y probabilidad no es continua en los currículos infantil y primaria de todos los países, además las nociones de probabilidad en comparación de las de estadística es bastante menor en los currículos. En conclusión, afirman que es necesario reflexionar sobre la enseñanza del pensamiento aleatorio pues en muchas ocasiones se centra en lo procedimental además de la recurrencia por parte del profesorado de dejarlo al final de curso, con un margen de tiempo curricular insuficiente en comparación con otros contenidos dentro del currículo.

Danişman y Tanişli (2018) analizan el conocimiento del contenido pedagógico relacionado con la probabilidad (PCK) de los profesores de matemáticas antes, durante y después de un curso en términos de conocimiento del contenido, conocimiento del currículo, conocimiento del estudiante y conocimiento de los métodos y estrategias de enseñanza. Esta investigación tomó como referente teórico el modelo de conocimiento del contenido pedagógico (PCK) propuesto por Shulman (1986). Los participantes fueron tres profesores de matemáticas de secundaria y los datos se recopilaron a través de observaciones y entrevistas semiestructuradas además se analizaron mediante un enfoque deductivo. Los resultados evidencian que los factores más importantes que afectan el PCK de los maestros son las creencias de los maestros en lugar de sus experiencias, no mostraron un esfuerzo adicional en la enseñanza efectiva de la probabilidad además de un (PCK) insuficiente para

una adecuada práctica docente. Los autores sugieren que se requiere un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes sean más activos y expresen sus ideas con claridad, en lugar de la transferencia de información de profesor a estudiante, así mismo afirman que los conocimientos matemáticos que los futuros maestros aportan a la formación docente sobre probabilidad son insuficientes.

2.2 Conocimiento didáctico

Batanero, Gómez, Contrera y Díaz (2015) analizan los resultados de evaluar a profesores en formación sobre algunos elementos del conocimiento matemático común y especializado del contenido y del conocimiento del contenido y los estudiantes en relación con la probabilidad elemental. Esta investigación se apoya en el marco teórico propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008), quienes denominan Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Realizaron un cuestionario que se dividió en dos partes, en la primera participaron 157 profesores de formación, en la segunda parte participaron 81 sujetos, trabajaron en grupos 36 parejas y un grupo de tres. Los resultados de la investigación muestran un insuficiente conocimiento del contenido de probabilidad elemental en los profesores en formación, sin embargo, los resultados mejoran al evaluar la capacidad de justificación de las respuestas incorrectas. En conclusión, esta investigación muestra que el conocimiento de los profesores en formación sobre probabilidad es muy limitado, esto se debe a que principalmente poseen dificultades en los conocimientos sobre didáctica.

León, Sosa y Carrillo (2020) caracterizan el conocimiento didáctico que tienen los profesores de bachillerato en probabilidad condicional. Los autores toman como referente teórico el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) enfocándose en el subdominio de conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En el estudio se implementó un cuestionario abierto y una entrevista

semiestructurada a 7 profesores de bachillerato quienes manifiestan tener un amplio dominio de contenidos de probabilidad, para el análisis utilizaron un enfoque dual de análisis de los datos, denominado Bottom-Up y Top-Down. Los resultados del estudio permitieron encontrar nuevas categorías teóricas relacionadas al conocimiento didáctico las cuales denominaron indicadores de conocimiento, además evidencian limitaciones en el conocimiento del profesor para reconocer sesgo, falacias y confusiones. Concluyeron que es necesario más estudios que permitan comprender el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de la probabilidad, además de reforzar los procesos de formación inicial y continuo de profesores en relación con los conocimientos para la enseñanza de la probabilidad.

Vásquez y Alsina (2015) analizan los resultados obtenidos en un estudio exploratorio sobre el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de Educación Primaria para enseñar probabilidad. Esta investigación tomó como referente teórico el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). La toma de datos fue a partir de un cuestionario CDM-Probabilidad implementado a 93 profesores de Educación Primaria. Los resultados de la investigación evidencian un conocimiento muy insuficiente de los profesores, mostrando la presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos en consecuencia de serias dificultades para resolver correctamente las situaciones problemáticas. En conclusión, los autores afirman que es necesario realizar un programa de intervención que permita mejorar el nivel de los conocimientos matemáticos y didácticos para enseñar probabilidad del profesorado de Educación Primaria en activo.

2.3 Conocimiento matemático

Alpízar, Chavarría y Oviedo (2013) analizan el grado de conocimiento de los docentes de I y II Ciclo de la Educación General Básica sobre conceptos básicos de Probabilidad. Esta

investigación toma como marco teórico elementos teóricos sobre probabilidad, su enseñanza y aspectos referidos a formación docente, aspectos referidos a I y II Ciclos de la Educación General Básica en Costa Rica. Desarrollaron un cuestionario de ocho preguntas abiertas y cinco cerradas el cual se aplicó a 20 profesores, para el análisis de los resultados establecieron tres niveles de conocimiento: Demuestra poco conocimiento de los conceptos básicos de Probabilidad, Demuestra algún conocimiento de los conceptos básicos de Probabilidad y Demuestra conocimiento completo de los conceptos básicos de Probabilidad. Los resultados de la investigación muestran que algunos profesores tienen poco conocimiento, la mayor parte demostraron algún conocimiento y tres participantes un dominio completo de estos contenidos. En la conclusión, los autores afirman que es preocupante que algunos profesores consideren que la Probabilidad no es tan útil para la formación de un ciudadano incluso piensan que este tema es de difícil comprensión y que no tiene mucha aplicabilidad en situaciones cotidianas, además hacen un llamado de atención a las deficiencias del proceso de formación docente en su etapa universitaria.

Ortiz et al (2006) realizan un estudio sobre la capacidad de comparación de probabilidades y estrategias empleadas por maestros en formación. Esta investigación toma como referente teórico los estadios de razonamiento proporcional en la categoría de Noëting para la realización de las tareas. Realizaron un cuestionario con los 7 ítems a 102 profesores en formación. Los resultados de la investigación son preocupantes, dado el alto número de errores y la sencillez de los problemas, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos. En las conclusiones los autores enfatizan en la necesidad de reforzar la formación probabilística elemental, de los futuros profesores de educación primaria, ellos afirman que difícilmente podrán enseñar un tema en que muestran dificultades tan notables.

Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) analizan los resultados de evaluar los sesgos presentes en el razonamiento probabilístico condicional en futuros profesores de educación secundaria y bachillerato. Esta investigación tomó como referente teórico el modelo de Hill, Ball y Schilling (2008) sobre los componentes del conocimiento del profesor. Los participantes fueron 196 profesores en formación y el instrumento que se utilizó fue un cuestionario de 7 ítems tomados del cuestionario RPC (razonamiento sobre probabilidad condicional). Los resultados muestran que son pocos los profesores en formación que no tienen sesgos en su razonamiento probabilístico en situaciones que aparecen en la vida cotidiana o profesional. Los autores concluyen que la formación matemática recibida por los futuros profesores no es suficiente para evitar sesgos que podrían transmitir a sus estudiantes y sugieren la necesidad de prestar más atención a la enseñanza de heurísticas en probabilidad.

Brückler y Šipuš (2023) investigan las intuiciones probabilísticas, los conceptos erróneos, los sesgos y las falacias en razonamiento de probabilidad condicional de los futuros profesores de matemáticas en el contexto de la pandemia. Esta investigación tomó como referente teórico el marco para evaluar el pensamiento en probabilidad condicional (e independencia) de Tarr y Jones (1997), el cual consta de cuatro niveles: el nivel subjetivo, el nivel de transición, el nivel cuantitativo informal y el nivel numérico. Los participantes de la encuesta piloto fueron 26 estudiantes, luego en el cuestionario que evalúa las 3 posibles falacias en relación con la probabilidad condicional, participaron 51 estudiantes de tres programas de estudios matemáticos. Los resultados evidencian que los primeros ejercicios fueron sencillos para los participantes, sin embargo, los últimos dos muestran que tenían un mayor nivel de dificultad. En relación con las falacias asociadas a la probabilidad, ningún participante evidenció la misma falacia en más de dos problemas. En las conclusiones, los autores enfatizan en la importancia del contexto al momento de resolver problemas de

probabilidad, además sugieren que la formación de futuros profesores debe enfatizar en la realidad que afrontan los estudiantes, propiciando el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Castaña, Alonso, Mellone y Rodríguez (2020) analizan el contenido en un estudio exploratorio para determinar cómo los futuros profesores logran plantear y resolver una tarea de probabilidad en un contexto educativo específico. Esta investigación toma como referente teórico propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008), quienes lo denominan Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Los participantes fueron 168 profesores en formación, sin embargo, solo 109 respuestas fueron válidas, se les pedía que crearán y resolvieran su problema, justificar su proceso creativo, y cómo sus propuestas se adaptan al nivel educativo requerido. Los resultados del estudio evidencian 59 respuestas correctas, 13 parcialmente correctas y 37 incorrectas, muestran un profundo conocimiento matemático y pedagógico al mismo tiempo, lo que no es habitual en estudios a gran escala como este. En conclusión, los autores afirman que, a pesar de haber obtenido buenos resultados en la mitad de las respuestas analizadas, aún existen muchos profesores en formación con dificultades, tanto en el desarrollo de sus habilidades matemáticas como pedagógicas.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Fundamentos Matemáticos

En esta sección se realiza de manera elemental la visualización de conceptos claves de probabilidad simple y compuesta para la interpretación de la investigación. Cabe resaltar, que el objetivo de la investigación no es la exposición del panorama matemático sobre la teoría de probabilidad. Por consiguiente, las definiciones planteadas a continuación no se realizan rigurosamente. Consecuentemente, es relevante la mención de los conceptos, debido a que estos son fundamentales, puesto que serán una herramienta para el lector.

Ahora bien, Triola (2004) afirma que la probabilidad es la base sobre la que se construyen los métodos importantes de la estadística inferencial. Aunque, como defiende Shaughnessy (1992) el campo de la probabilidad y la estadística es simplemente un adolescente matemático, a comparación con la geometría, el álgebra o las raíces del cálculo (como se citó en Batanero, C. 2005). Sin embargo, Batanero (2005) asegura que las controversias que han acompañado la historia de la probabilidad no impiden mostrarla como un modelo matemático que ayuda a describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios.

3.1.1 Experimentos

Para Mendenhall, Beaver R. y Beaver M. (2010) un experimento se considera como el proceso mediante el cual se obtiene una observación (o medición). En relación con esto, Rincón (2014) menciona que existen dos tipos de Experimentos o fenómenos en la naturaleza: los deterministas y los aleatorios.

- **Experimentos deterministas:** son aquellos fenómenos que se caracterizan porque la relación causa-efecto aparece perfectamente determinada (Montes, 2007).

- **Experimentos aleatorios:** son aquellos fenómenos que se caracterizan porque, aunque se repita con las mismas condiciones, el resultado variará de una repetición a otra dentro de un conjunto de posibles resultados (Montes, 2007).

3.1.2 Espacio muestral

El espacio muestral, también llamado espacio muestra, de un experimento aleatorio se define por ser el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, se le denota, generalmente, por la letra griega Ω (omega mayúscula) y a un resultado particular del experimento se le denota por la letra ω (omega minúscula) (Rincón, 2014).

3.1.3 Eventos

Se presentan diferentes eventos cuando se realiza un experimento aleatorio (Mendenhall, Beaver R. y Beaver M, 2010)

- Un **evento simple** es el resultado que se observa en una sola repetición del experimento, con frecuencia denotado por la mayúscula E con un subíndice (E_1).
- Un **evento** es un conjunto de eventos sencillos (Mendenhall, Beaver R. y Beaver M, 2010). Además, para Walpole et al, (2012) un evento es un subconjunto de un espacio muestral.

Teniendo en cuenta lo anterior, se consideran las propiedades entre experimentos aleatorios de un espacio muestral Ω :

Definición 3.1: El *complemento* de un evento A respecto de Ω es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A mediante el símbolo A' . (Walpole et al, 2012)

Definición 3.2: La *intersección* de dos eventos A y B, que se denota con el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y a B (Walpole et al, 2012).

Definición 3.3: Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \emptyset$; es decir, si A y B no tienen elementos en común (Walpole et al, 2012).

Definición 3.4: La unión de dos eventos A y B, que se denota con el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B, o a ambos (Walpole et al, 2012).

Definición 3.5: Dos eventos, A y B, son *independientes* si y sólo si la probabilidad del evento B no está influenciada o cambiada por el suceso del evento A, o viceversa (Mendenhall, Beaver R. y Beaver M, 2010)

3.1.4 Probabilidad de Eventos

La probabilidad de un evento A es un número real en el intervalo $[0, 1]$ que se denota por $P(A)$ y representa una medida de la frecuencia con la que se observa la ocurrencia de este evento cuando se efectúa el experimento aleatorio en cuestión (Rincón ,2014).

3.1.4.1 Probabilidad clásica

Definición 3.4: Sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Se entiende por probabilidad clásica del evento A como el cociente

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

en donde el símbolo $\#A$ denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A (Rincón, 2014).

3.1.4.2 Axiomas de la probabilidad

Se proponen las reglas que el cálculo de probabilidades debe satisfacer, en consecuencia, los siguientes tres postulados o axiomas fueron establecidos en 1933 por el matemático ruso Andrey Nikolaevich Kolmogorov (Rincón, 2014).

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
- 3.

$$P\left(\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K\right) = \sum_{K=1}^{\infty} P(A_K)$$

cuando $A_1, A_2, \dots$ son ajenos dos a dos (Rincón, 2014).

3.1.4.3 Propiedades de la probabilidad

Proposición 3.1: $P(\emptyset) = 0$. (Rincón, 2014).

Proposición 3.2: sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ una colección finita de eventos ajenos dos a dos. Entonces

$$P\left(\bigcup_{K=1}^n A_K\right) = \sum_{K=1}^n P(A_K).$$

Proposición 3.3: Para cualquier evento A , $P(A^c) = 1 - P(A)$. (Rincón, 2014).

Proposición 3.4: Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$. (Rincón, 2014).

Proposición 3.5: Si $A \subseteq B$ Entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$. (Rincón, 2014).

Proposición 3.6: Para cualquier evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$. (Rincón, 2014).

Proposición 3.7: Para cualesquiera eventos A y B ,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (Rincón, 2014).

Proposición 3.8: Para cualesquiera eventos A, B y C,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) \cup P(B) \cup P(C) \\ &- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \text{ (Rincón, 2014).}$$

Proposición 3.9: La probabilidad de que A y B ocurran cuando el experimento se realiza es

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

(Mendenhall, Beaver y Beaver, 2010)

Proposición 3.10: Si dos eventos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran A y B es

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Del mismo modo, si A, B y C son eventos mutuamente independientes (todos los pares de eventos son independientes), entonces la probabilidad de que A, B y C ocurran es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$

(Mendenhall, Beaver y Beaver, 2010)

3.2 Modelo de Conocimiento del Profesor de Matemáticas

Desde finales de los años 80, se ha fomentado el interés por parte de los investigadores en educación con la intención indagar el conocimiento del profesorado para enseñar las diversas asignaturas, a partir de la propuesta de Shulman (1986) (Franco y Alsina, 2022). Debido a ello, se ha visto un aumento significativo en el número de estudios en este campo, la naturaleza y el alcance de la investigación se han ampliado y los marcos utilizados para guiar los estudios se han fortalecido visibilizando así, la complejidad y multidimensionalidad del conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Scheiner et al., 2019).

Dentro de esta disciplina, una de las principales razones por las que es importante describir y medir los conocimientos del profesor asociados con la enseñanza de las matemáticas es poder identificar aquellos en los que los altos niveles de competencia están relacionados con altos niveles de rendimiento de los estudiantes (Beswick, Callingham y Watson, 2012). Así mismo, los estudios que tienen como objetivo el análisis de los conocimientos del profesor, son herramientas que permiten visibilizar algunos aspectos importantes de la educación, con la intención de fomentar en la comunidad docente, la deconstrucción y transformación con el propósito de una mejora constante en la calidad de la educación (Blömeke y Kaiser, 2017).

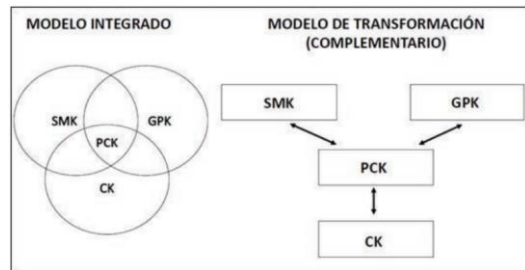
Dentro de ese orden de ideas, los investigadores en educación han desarrollado e implementado en diversas investigaciones en las cuales se proponen modelos de conocimiento profesional, tales como : desarrollo del conocimiento en la enseñanza desarrollado por Shulman (1987), Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008), el Cuarteto de Conocimiento (KQ) presentado por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) presentado por Godino y Pino-Fan (2013) y el Conocimiento

Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) presentado por Carillo et al. (2018). Se observa que, los modelos mencionados buscan dar cuenta de los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas en su práctica docente, como un profesional de la educación. A continuación, se describen brevemente los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas, mencionados anteriormente, haciendo un mayor énfasis en el modelo MTSK, el cual se tomará como enfoque teórico para el desarrollo de esta investigación.

3.2.1 Desarrollo del conocimiento en una profesión: desarrollo del conocimiento en la enseñanza

El “Knowledge Growth in a Profession: Development of knowledge in teaching” es un modelo que fue desarrollado por L.S. Shulman en la Universidad de Stanford en la segunda mitad de los ochenta (Bolívar, 2005). Este modelo tiene como propósito explicar y describir los componentes del “conocimiento base” de la enseñanza; dado que está enfocado en estudiar el desarrollo del conocimiento profesional en la formación del profesorado y en la práctica profesional (Shulman, 1987). De igual forma, busca comprender cómo los profesores transforman el contenido en representaciones didácticas que serán herramientas en la enseñanza de un contenido (Bolívar, 2005, Salazar, S. F, 2005)

Este modelo hace, en su momento, una nueva propuesta para delimitar los dominios de conocimiento que deben de tener los profesores, reconociendo los siguientes componentes: Conocimiento pedagógico general, Conocimientos curricular, Conocimiento sobre los alumnos, Conocimiento de los contextos educativos, Conocimiento de los fines y valores educativos y Conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987).



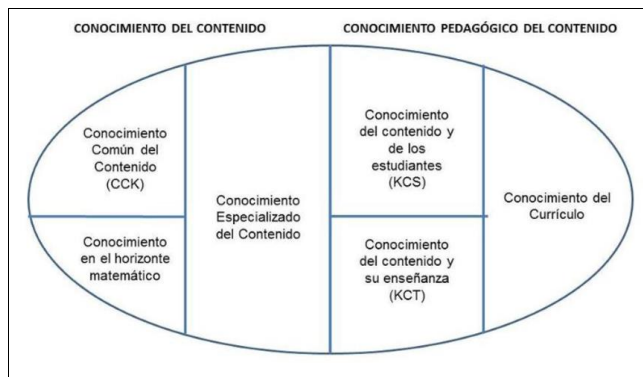
Figuras 1 Modelos de relaciones entre los dominios del conocimiento profesional del profesor (Salazar, 2005, pág. 7)

3.2.2 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

El grupo de investigación de la Universidad de Michigan, liderado por Deborah Ball, buscan analizar la naturaleza de los conocimientos matemáticos que han desarrollado los profesores para la enseñanza de las matemáticas en sus prácticas (Echavarría, Cisneros y Gordillo, 2015). En consecuencia, Ball et al. (2008) proponen un modelo de conocimiento profesional denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge Teaching, MKT). Este modelo de conocimiento se basa en la observación práctica del profesor en su ámbito matemático, identificando así los conocimientos que requiere para su labor de enseñanza (Rojas, 2015). Cabe aclarar que, la mayor aportación de este es la inclusión del subdominio del conocimiento especializado del contenido matemático, como el conocimiento relacionado únicamente con la labor del profesor de matemáticas, no con el conocimiento que otro profesor u otro matemático pueda desarrollar (Aguilar et al, 2013).

Los autores clasifican el conocimiento del maestro de matemáticas en dos grandes grupos: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. En el primer grupo se incluye: el Conocimiento Común del Contenido (CCK), el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK). Para el conocimiento pedagógico del contenido, se incluyen el Conocimiento del Contenido y

los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo (Ball et al., 2008).



Figuras 2 (MKT) (Parra y Villa, 2017, pág. 296)

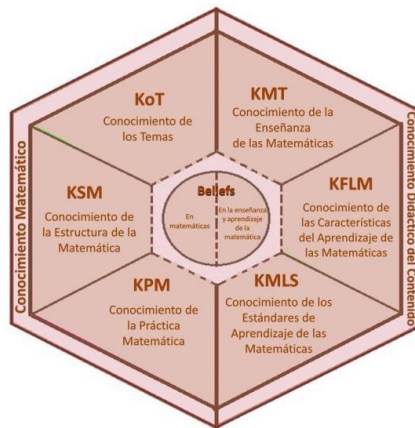
3.2.3 Conocimiento de Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge, MTSK), desarrollado por Carrillo et al. (2018), grupo SIDM en la Universidad de Huelva, España. Este modelo es fruto de la contribución tanto del trabajo de Shulman (1986) en el marco de la comprensión de las componentes del conocimiento del profesor y el refinamiento del modelo desarrollado por Ball et al. (2008), (Muñoz, 2015). A partir de la aplicación del modelo desarrollado por Ball y sus colaboraciones, Carrillo y compañía se enfocan en el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, particularmente en relación con el subdominio del conocimiento especializado de Ball y con la transformación del subdominio del conocimiento matemático en el horizonte, esto llevó a proponer a Carrillo y a sus colaboradores un modelo en el que se entiende que la especialización afecta a todos los subdominios y no solo a uno de ellos, como es el caso del modelo de Ball (2013).

Carrillo et al (2018) explican que el MTSK se puede visualizar como un modelo analítico para interpretar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Así mismo, este es una herramienta que permite reflexionar sobre qué otros posibles conocimientos podrían haber permitido una gestión diferente por parte del profesor frente a una situación de enseñanza analizada, además ofrece una oportunidad de desmenuzar los conocimientos que han utilizado los profesores en un momento particular del proceso de enseñanza, permitiendo una mejor visualización para su posterior análisis (Contreras et al, 2017). Utilizando el MTSK, Muñoz et al. (2015) afirma que se puede identificar qué necesita conocer un profesor de matemáticas específicamente de un concepto matemático para su enseñanza, con la intención de llevar a sus estudiantes a razonar, argumentar, refutar, representar, modelar y construir significativamente aprendizajes de los conceptos matemáticos. Contreras et al (2017) afirma que “el MTSK se convierte en un poderoso instrumento para la formación de los profesores de matemáticas.” (pág. 9).

El modelo (MTSK) está conformado por dos dominios (Ver Figura 5), el primero Conocimiento matemático (MK) y el segundo Conocimiento didáctico del contenido (PCK), estos a su vez se subdividen en tres subdominios respectivamente. Quedando el dominio de Conocimiento Matemático (MK) con los siguientes tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). El segundo dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) con los siguientes tres subdominios: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Así mismo, incluyen de las concepciones y creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y

aprendizaje como dimensión que se filtran influyen en el conocimiento del profesor. A continuación, se visualiza la estructura del modelo (MTSK).



Figuras 3 Estructura del modelo (MTSK) (Contreras, Montes, Climent y Carrillo, 2017, pág. 7)

A continuación, se describirán los subdominios correspondientes a cada dominio de conocimiento, caracterizándose respectivamente, haciendo énfasis en el subdominio de Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) pues es de especial interés para el análisis de la presente investigación.

3.2.5.1 El dominio de conocimiento Matemático (MK)

Uno de los aspectos indispensables que toma en cuenta los profesionales de la educación, particularmente de matemáticas son los conocimientos frente a los tópicos matemáticos. Siguiendo con esta línea, Shulman (1987) expresa que el proceso de enseñanza se inicia necesariamente en una circunstancia en que el profesor comprende aquello que se ha de aprender y cómo se lo debe enseñar. Es fundamental en la práctica del profesor, el conocimiento de la propia disciplina que enseña, en consecuencia, es importante plantearse el cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor que es profesional en la enseñanza de las

matemáticas (Flores-Medrano et al, 2014). De igual forma, Vásquez y Alsina (2015) afirman que el dominio de los contenidos que posea el profesor es una herramienta clave en el aprendizaje de los estudiantes dado que no se debe enseñar lo que no se sabe bien.

En consecuencia, el MTSK propone que el dominio MK se divida en tres subdominios de conocimiento: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). A continuación, se describe detalladamente cada uno.

Conocimiento de los Temas (KoT)

Este subdominio supone para Escudero et al (2015) un conocimiento vasto de las matemáticas, que incluye relaciones intraconceptuales. De igual forma, el KoT toma aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos que caractericen aspectos del tópico matemático abordado, asimismo de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que se emplean en manuales y textos matemáticos (Aguilar, 2013). Cabe considerar, que este conocimiento no se limita solo al contenido matemático que es objeto de enseñanza y aprendizaje, sino que al mismo tiempo es un conocimiento profundo del contenido escolar, dado que el profesor puede y debe conocer el contenido más allá de lo que sus alumnos aprenden (Muñoz et al, 2015). Las categorías de análisis del KoT son: Fenomenología y aplicaciones, Definiciones, propiedades y sus fundamentos, Registro de representación y Procedimientos. A continuación, se describe cada categoría.

- *Fenomenología y aplicaciones:* Esta categoría abarca el conocimiento del profesor acerca de fenómenos asociados a un tópico matemático, contextos a del origen, o situaciones donde puede utilizar o aplicar, significados necesarios para resolver un problema (Freudenthal, 1983). Los fenómenos y contextos de aplicación están basados en los diferentes significados y modos de comprender

un concepto matemático, sin embargo, esto no es tarea sencilla pues es en la formación continua, desarrollo de nuevas experiencias profesionales además de la interacción con los estudiantes que se construye el repertorio de fenómenos relevantes (Vasco y Climent, 2022).

- *Definiciones, propiedades y sus fundamentos:* A partir de la categoría anterior, se puede fundamentar, definir y sacar propiedades de las matemáticas (Vasco y Climent, 2022). Esta categoría incluye el conocimiento acerca de lo que caracteriza y define un objeto matemático, sea teoría o formalmente, o con ejemplos o imágenes asociadas, contemplando también sus propiedades incluyendo el conocimiento de los cimientos o exhaustividad del empleo de dichas propiedades (Vasco y Climent, 2018).
- *Registro de representación:* Esta categoría hace referencia al conocimiento del profesor sobre las diversas formas de representar un tema matemático cuando enseña (Vasco y Climent, 2022). Teniendo en cuenta que Duval (1995) considera que los registros de representación pueden ser gráfico, simbólico, aritmético, algebraico, de la lengua natural o pictográfico.
- *Procedimientos:* Esta categoría hace referencia a los diferentes modos de proceder en las matemáticas para solucionar problemas, conocer las condiciones necesarias y sustentación de estas (Vasco y Climent, 2022). Así mismo Paenza (2009) menciona la relevancia de la comprensión de los procedimientos y reglas descubiertos o contruidos por los estudiantes teniendo en cuenta que las matemáticas son una ciencia de patrones y regularidades.

Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)

Este conocimiento hace referencias a las relaciones que realiza el profesor entre distintos contenidos matemáticos, ya sea en un curso específico o con contenidos de otros cursos o entre diversos niveles educativos. (Escudero et al, 2015). Así mismo, el subdominio KSM se entiende como un sistema integrado de conexiones del profesor de matemáticas, que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva y conceptos elementales mediante una visualización avanzada. (Aguilar, 2013). Las categorías de análisis del KSM son: Conexiones de Complejización, Conexiones de Simplificación, Conexiones de Contenidos Transversales y Conexiones Auxiliares. A continuación, se describe cada categoría.

- *Conexiones de Complejización:* Esta categoría hace conexiones entre los contenidos enseñados con los contenidos desarrollados en los niveles posteriores (Escudero, 2015). Se caracteriza cuando el profesor reconoce y realiza una proyección de los contenidos matemáticos enseñados para impulsar contenidos en un futuro (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Conexiones de Simplificación:* Esta categoría se caracteriza por relacionar los contenidos enseñados con contenidos anteriores (Flores-Medrano et al., 2014). Hace referencia a una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental, reflejando la importancia de los contenidos previamente enseñados como una base necesaria para otros contenidos (Escudero, 2015).
- *Conexiones de Contenidos Transversales:* Esta categoría hace referencia a las conexiones que tienen distintos contenidos, haciendo posible la relación por alguna cualidad común, contemplando una característica en común (Escudero, 2015). Cabe aclarar, que no son conexiones de contenidos más simples o

complejos entre sí, sino que hay una cualidad común en estos que les relaciona (Flores-Medrano et al., 2014).

- *Conexiones Auxiliares:* Esta categoría se caracteriza por tomar en consideración las conexiones entre los conceptos y sus relaciones (León, 2020). Cabe aclarar, que estas conexiones no se clasifican como intraconceptuales, porque sus relaciones no se atribuyen a propiedades matemáticas (Escudero, 2015).

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)

Este subdominio se caracteriza por ser el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, saber qué es definir y usar definiciones, además de establecer relaciones generales, enfocarse en la identificación de prácticas propias del trabajo matemático, ligadas a un tema específico o a la matemática en general (Escudero et al, 2015). Es importante distinguir el conocimiento de las relaciones o conexiones entre conceptos, propio del conocimiento de la estructura (KSM), del conocimiento del modo como se establecen dichas relaciones (Escudero, 2015). De igual manera, Escudero (2015) pretende poner énfasis en la necesidad de que el profesor conozca las formas de proceder para llegar a los resultados matemáticos y las características del trabajo matemático como disciplina científica.

El KPM es un conocimiento para trabajar genéricamente en matemáticas, una parte primordial del conocimiento que posee el profesor, pues provee de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos (Escudero, 2015). Las categorías de análisis del KPM son: Prácticas ligadas a la Matemática en General y Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas. A continuación, se describe cada categoría.

- *Prácticas ligadas a la Matemática en General:* Esta categoría considera un tipo de conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas de manera autónoma de los conceptos matemáticos abordados en clase. En consecuencia, para abordar este conocimiento y trabajar de forma general en matemáticas, es necesario en el profesor desarrolle estructuras lógicas de pensamiento que permiten comprender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas:* Esta categoría toma en cuenta el cómo se desarrolla la matemática, con la diferencia que considera únicamente un concepto o temática específica (Flores-Medrano et al., 2014).

3.2.5.2 El dominio de conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este conocimiento didáctico (PCK), aunque requiere del conocimiento matemático, es un conocimiento distinto, posee una estructura y naturaleza distintas, puesto que está dirigido a la enseñanza de las matemáticas (Escudero, 2015). Es en este dominio es donde las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas cobran importancia como posibles bases de conocimiento para el profesor (Carrillo, 2018). Así mismo, Shulman (1987) expone que el PCK es una fusión entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional. Entre los aspectos que hacen especialmente interesante a este dominio, está su caracterización como un conocimiento particular del profesor, propio de la labor de enseñanza (Flores-Medrano et al, 2014).

En consecuencia, el MTSK propone que el dominio PCK se divida en tres subdominios de conocimiento: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). A continuación, se describe detalladamente cada uno.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este subdominio se caracteriza por distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Permitiendo al profesor conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación para hacer comprensible un contenido matemático particular (Aguilar, 2013). De este modo, Flores-Medrano et al (2014) mencionan que al igual que el KFLM, en este subdominio se habla de conocimientos intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos en sí, en otras palabras, no se trata de conocimiento de matemáticas por un lado y de la enseñanza por otro, sino que por el contrario incluyen tan solo aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Flores-Medrano et al (2014) excluyen, estrategias de enseñanza que pueden resultar potentes desde la visión de la pedagogía en general, como el trabajo en equipo.

Las categorías de análisis del KMT son: Conocimiento de las teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático, Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático y Conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido. A continuación, se describe detalladamente cada uno.

- *Conocimiento de las teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático:* Esta categoría se fundamenta en aquellas teorías de enseñanza que son consecuencia de diversas investigaciones de Educación Matemática, son estas las que condicionan la forma de proceder del profesor (Escudero, 2015). Así mismo, considera los conocimientos sobre la potencialidad que

pueden llegar a tener ciertas actividades, estrategias o técnicas didácticas que estén relacionadas a un contenido matemático (Flores-Medrano et al., 2014).

- *Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático:* Esta categoría hace referencia a los conocimientos que posee el profesor sobre los recursos materiales y virtuales como herramientas para la enseñanza de las matemáticas (libros de texto, regletas, pizarras normales y electrónicas, Tangrams, software como Cabri o Geogebra, etcétera), teniendo en cuenta tanto los beneficios como las dificultades que se puedan presentar en la enseñanza de un determinado contenido matemático (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido:* Esta categoría involucra conocimientos que posee el profesor sobre la potencialidad de actividades, estrategias o técnicas para enseñar un contenido matemático, de igual modo, las posibles limitaciones u obstáculos (Escudero, 2015). Cabe aclarar, que en esta categoría se considera aquellos elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesor en un contenido matemático específico (Flores-Medrano et al., 2014).

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

Este subdominio incluye los conocimientos sobre las características de aprendizaje relacionados al contenido matemático. Este conocimiento evita mirar al estudiante como el foco principal del proceso, en cambio se centra hacia el contenido matemático como objeto de aprendizaje (Flores-Medrano et al, 2014). Así mismo, Escudero (2015) afirma que este conocimiento se enfoca en las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo. Dentro de este

marco, Aguilar (2013) menciona que KFLM incluye las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, errores, dificultades u obstáculos posibles.

Las categorías de análisis del KFLM son: Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático, Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido Matemático y Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático. A continuación, se describe detalladamente cada uno.

- *Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático:* Esta categoría hace referencia al conocimiento que tiene el profesor sobre los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático (Flores-Medrano et al., 2014). Así mismo, Escudero (2015) afirma que este conocimiento caracteriza las estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo que construye el estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares.
- *Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático:* Esta categoría caracteriza los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades, típicas y atípicas, relacionados con los procesos de aprendizaje (Flores-Medrano et al., 2014). Cabe considerar, que solo incluye las que son propias del contenido matemático específico y no pedagógicas del contenido (Escudero, 2015).
- *Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido Matemático:* Esta categoría hace referencia al conocimiento que

posee el profesor sobre los procesos y estrategias que construyen los estudiantes (Flores-Medrano et al., 2014). Además, Escudero (2015) afirma que en esta categoría se categorizan los conocimientos sobre el lenguaje o vocabulario formal o informal, así como los gestos o figuras que van desarrollando los estudiantes a medida que van abordando un determinado contenido.

- *Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático:* Esta categoría involucra los conocimientos con los que cuenta el profesor sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas, el conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas tanto a las distintas áreas de la matemática como las concepciones erróneas que pueden desarrollar frente a un contenido matemático específico (Escudero, 2015).

En relación con lo anterior, Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015) identificaron indicadores de análisis asociados a dos categorías de análisis del KFLM.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

Este subdominio se caracteriza por ser el conocimiento que posee el profesor frente a lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar particular; conocimiento de las capacidades procedimentales, conceptuales y de razonamiento matemático que se desarrollan en determinados momentos educativos, además, de lo estipulado en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje (Aguilar, 2013). En relación con lo anterior, Flores-Medrano et al (2014) entienden como estándar de aprendizaje aquello que indica el nivel de capacidad-atribuible a los estudiantes para entender, construir un saber matemáticas, siendo el KMLS el

conocimiento que domina el profesor para construir esas nociones de nivel de capacidad, a partir del estudio o contacto con diversas fuentes.

Las categorías de análisis del KMLS son: Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático, Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido Matemático y Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático. A continuación, se describe detalladamente cada uno.

- *Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico:* Esta categoría involucra los conocimientos que desarrolla el profesor frente al grado escolar en el que esté impartiendo clases. Este conocimiento puede ser adquirido mediante un documento rector que ayude a visualizar al profesor cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en un momento escolar específico (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un momento escolar determinado:* Esta categoría hace referencia al conocimiento sobre la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, teniendo en cuenta el ciclo escolar que se esté impartiendo clases (Escudero, 2015).
- *Conocimiento de secuenciación de los temas anteriores a posteriores a un momento escolar determinado:* Esta categoría involucra el conocimiento que posee el profesor en relación con los conocimientos y capacidades previas de un estudiante, para así abordar nuevas temáticas determinadas por los

estándares y el aporte de estos a temas futuros, no necesariamente relacionado a las conexiones de Complejización o Simplificación que matemáticamente puedan construirse (Escudero, 2015).

3.2.5.3 Creencias en las matemáticas y en la enseñanza y el aprendizaje

Las creencias se representan en el centro del modelo, mostrando de esa forma que los subdominios de conocimiento interactúan con ellas. Escudero et al (2015) mencionan que hay una estrecha relación entre las creencias sobre la matemática con el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con conocimiento didáctico. Así mismo, Montes et al (2014) mencionan que las creencias pueden ser entendidas siguiendo el marco de los propuesto por Ponte (1994), el argumentaba que eran verdades personales, consecuencia de diferentes experiencias además del componente afectivo y evaluativo, donde se pueden tener diferentes grados de convencimiento. Por consiguiente, la relación existente entre las creencias y las concepciones, así como su vínculo con el conocimiento, es una rama de investigación que aún no se ha explorado a profundidad al punto de llegar a un consenso (Escudero et al, 2015).

En relación con lo anterior, Montes et al (2014) consideran que la diferencia entre creencia y concepción puede entenderse, en base a la implicación de la componente afectiva y emocional de las creencias y la racionalización que suponen las concepciones que integre el profesor en las clases. Sin embargo, para Escudero (2015) no hace distinción alguna entre creencias y concepciones, pero sí con respecto al conocimiento, situando a estas en el terreno de lo actitudinal y al conocimiento en lo cognitivo (entendiendo que ambos terrenos se influyen bidireccionalmente).

Cabe considerar, que las creencias representan una predisposición a través de las acciones y que no pueden ser directamente observadas o medidas, solamente inferidas. Al

igual que el resto de los elementos en el modelo MTSK, las creencias son consideradas con fines analíticos (Escudero et al, 2015). Si bien, las reflexiones y los resultados empíricos recopilados a lo largo de la trayectoria del grupo SIDM con respecto a las investigaciones sobre concepciones del profesor de matemáticas, evidencia la necesidad de tomar en cuenta las concepciones, tanto para profesor en formación como en ejercicio, como un elemento que impregna todo el conocimiento especializado del profesor (Escudero, 2015).

3.2.5.4 Indicadores de análisis

En relación con lo anterior, algunas investigaciones han propuesto indicadores de análisis de los subdominios del modelo (MTSK). Particularmente, en relación con el objetivo de esta investigación, los indicadores de análisis que son de interés son los del subdominio (KFLM). En dos investigaciones de las que se toman en cuenta los indicadores de análisis de solo dos categorías del (KFLM) que son por un lado *Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático* y *Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático*, estas investigaciones son de Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015) y León (2020), a continuación, se presentan estos indicadores respectivamente (Ver Tabla 1).

Tabla 1 Categorías e Indicadores de Conocimiento KFLM

Categoría de Análisis	Indicador de Conocimiento KFLM	
	<i>Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015)</i>	<i>León (2020)</i>
	I1. Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. I2. Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido	I10. Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgos, falacias y confusiones.

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático	relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático). I3. Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas. I4. Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido. I5. Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando. I6. Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.	I12. Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados por parte de los estudiantes. I14. Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar confusiones, falacias y sesgos en su razonamiento probabilístico.
Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	I7. Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático mezcla del lenguaje común con el matemático). I8. Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución. I9. Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente.	I11. Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes; independencia de eventos). I13. Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.

3.3 Marco referencial

3.3.1 Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico

La manera en que las personas captan el mundo exterior es través de las representaciones mentales que construyen, teniendo en cuenta esto, si esas concepciones que ha construido han sido útiles en varias ocasiones, es posible que sean guardadas en la memoria de largo plazo, acrecentando así el bagaje de conocimiento (Domingo et al, 2017). Sin embargo, ese conocimiento puede ser considerado como obstáculo cuando es elaborado como fruto de la interacción del alumno con su medio, pero, produce un resultado “interesante” y “útil”, aunque no válido ni adecuado en situaciones académicas especialmente en circunstancias de incertidumbre (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005). Cabe aclarar, la enseñanza formal no es suficiente para superar estos errores, sino que los estudiantes necesitan experiencia sobre los fenómenos aleatorios, en consecuencia, es relevante plantearles problemas de eventos aleatorios y discutir con ellos sobre sus concepciones erróneas de esta forma fomentar el desarrollo del razonamiento probabilístico (Díaz, 2003).

Ahora bien, en el cálculo de probabilidades se presentan diversas circunstancias que evidencian dificultades o confusiones, a pesar de contar con una axiomática satisfactoria, persisten las controversias sobre la interpretación de conceptos básicos, como los de probabilidad o independencia de eventos aleatorios (Batanero y Serrano, 1995). En relación con a la idea anterior, Díaz (2003) resalta la importancia de que los profesores tengan información relevante frente a las posibles heurísticas y sesgos relacionados con el razonamiento probabilístico, analizar esos razonamientos intuitivos de sus alumnos, serán una herramienta para prever sus dificultades y diseñar actividades adecuadas para superar estas dificultades. A continuación, se realiza una caracterización de algunas heurísticas y sesgos presentes en el aprendizaje de la probabilidad.

Tabla 2 Heurísticas, sesgos y falacias en probabilidad.

<i>Heurísticas, sesgos y falacias</i>	<i>Descripción</i>
<i>Heurística de la representatividad</i>	Esta regla consiste en evaluar la probabilidad de un suceso teniendo en cuenta el grado en que es representativo o similar a la clase a la que pertenece (Bersabe, 2018). Así mismo, en este tipo de razonamiento no es necesario tener en cuenta el tamaño de la muestra y, con ello, del estudio de la variabilidad del muestreo, en consecuencia, se produce una confianza indebida en las pequeñas muestras (Serrano, Batanero y Cañizares, 1998).
<i>Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes</i>	Es la creencia que dos sucesos son independientes si y sólo si son excluyentes, esto puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que independiente puede significar, a veces, separado (Díaz et al, 2012).
<i>Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral</i>	Es la creencia de esperar que las muestras sean muy representativas de la población, independientemente de su tamaño (Bersabe, 2018). Parece como si se creyese en una "Ley de los pequeños números", por la que las pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden, esta creencia haría que los alumnos no considerasen la importancia del número de ensayos en sus estimaciones frecuenciales de la probabilidad (Serrano, Batanero y Cañizares, 1998). Así mismo, Bersabe (2018) considera que este mecanismo da cuenta de otros sesgos fundamentales: La concepción errónea del azar; la falacia del jugador - tipo 1; y la falacia del jugador - tipo II.
<i>Falacia de las tasas base</i>	Fueron Tversky y Kahneman (1982) quienes descubrieron esta falacia (Díaz et al, 2012). Pico et al (2017) explican que las personas ignoran información importante y se concentran en información específica que resulta menos confiable; también se entiende como un error de juicio donde se tiende a ignorar la información poblacional y a concentrarse en información irrelevante, causando así, que sus elecciones sean sesgadas. Esto ocurre generalmente por una percepción incorrecta de la dependencia entre los sucesos implicados especialmente en la resolución de problemas que necesiten la aplicación del Teorema de Bayes (Díaz et al, 2012).
<i>Enfoque en el resultado aislado</i>	Fue Konold (1991) quien estudió un patrón de errores que considera más fundamental que las heurísticas, su interés es por cómo los estudiantes interpretan las preguntas sobre la probabilidad o el valor de una probabilidad (Serrano, Batanero y Cañizares, 1998). Es en el análisis de las preguntas sobre la probabilidad donde se suele evidenciar que las interpretan de forma no probabilística, donde el fin no es llegar la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple (Díaz, 2003). Fue Lecoutre (1992) quien lo describe como la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a

<i>Sesgo de equiprobabilidad</i>	cualquier experimento aleatorio sin distinción alguna (Díaz et al, 2012). A pesar de variar el contexto, el formato de la pregunta, la edad y la formación de los sujetos, los resultados siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los resultados son equiprobables (Serrano, Batanero y Cañizares, 1998).
<i>Falacia del jugador - Tipo I</i>	Es la creencia de que la probabilidad de un suceso futuro aumenta, cuanto mayor es la racha anterior del suceso contrario (Bersabe, 2018).
<i>Falacia del jugador - Tipo II</i>	Es la creencia de que la probabilidad de un suceso futuro aumenta, cuanto mayor es la racha anterior de ese suceso (Bersabe, 2018).
<i>Confundir probabilidades conjuntas y condicionales</i>	Tanto Pollatsek et al. (1987) como Ojeda (1995) afirman que los enunciados que usan la conjunción pueden ocasionar en los estudiantes confundir una probabilidad conjunta con una probabilidad condicional (Díaz et al, 2012).
<i>Falacia de conjunción</i>	Con este nombre se denomina a la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (Díaz et al, 2012). Esto puede ocurrir, porque la conjunción es más representativa de la población que cada evento por separado (Batanero, Contreras y Díaz, 2012).
<i>Falacia de la condicional transpuesta</i>	Fue Falk (1986) quien define este error como la dificultad para discernir adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional $P(A B)$ y $P(B A)$, en otras palabras, se complejiza establecer los sucesos condicionados y el condicionante (Garzón, 2018). Generalmente, aparece en contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de que una prueba médica de un resultado positivo cuando se tiene una enfermedad, con la probabilidad de tener la enfermedad, si el resultado de la prueba es positivo (Díaz et al, 2012).
<i>Falacia del eje de tiempo</i>	Es la creencia de que un suceso no puede condicionar a otro que ocurra anteriormente (León, 2008). Esto ocurre generalmente, por una confusión entre condicionamiento y causación de un evento, denominan a esta forma de razonar concepción cronológica de la probabilidad condicional (Díaz et al, 2012).
<i>Dificultad en diferenciar azar y suerte</i>	El azar se considera como el reflejo de la falta de causa y, en consecuencia, fuera de cualquier tipo de control y/o predicción posible. En cambio, la suerte es un medio personal e intransferible con el que se puede ejercer un control sobre el resultado (Wagenaar y Keren, 1988).
<i>Concepción errónea del azar</i>	En rigor, el que una secuencia sea o no aleatoria vendrá determinado por la naturaleza en la que fue generado, sin embargo, la mayoría de la gente cree que el azar se caracteriza por ciertos patrones irregulares (Bersabe, 2018).

3.3.2 Concepciones sobre probabilidad

Para el final del siglo XVIII y principios del XIX se empezaron considerar más situaciones como aleatorias, estimando no sólo los juegos de azar, sino que también fenómenos naturales generando que progresivamente el concepto de aleatoriedad se fuera formalizando, introduciendo la idea de "independencia", siendo imprescindible para garantizar la aleatoriedad de un suceso (Batanero, 2001). Ahora bien, gracias a la evolución que ha sufrido el concepto de probabilidad se puede percibir que es difícil de comprender dada la diversidad de interpretaciones que dieron origen a las distintas concepciones que hoy se dan a conocer y forman parte del conocimiento probabilístico (Burbano, 2015). A continuación, (Ver Tabla 3) se presenta una descripción breve de las concepciones sobre probabilidad.

Tabla 3 Concepciones sobre probabilidad.

<i>Concepciones</i>	<i>Descripción</i>
<i>Concepción intuitiva</i>	Esta concepción se manifiesta en personas que no poseen formación sobre probabilidad, asignando posibilidades de forma cualitativa basándose en creencias o consideraciones personal a través de expresiones como: presumible, posible, previsible o plausible (Batanero y Sánchez, 2005; Burbano, 2015).
<i>Concepción clásica</i>	En un principio cuando el cálculo de probabilidades se limitaba a los juegos de azar, esta concepción fue considerada suficiente (Batanero, 2001). Bernoulli, considera la probabilidad de forma cuantitativa siendo la razón entre el número de casos igualmente probables que lo favorecen y el número total de casos posibles igualmente probables bajo las circunstancias (Bernoulli, 1713). Laplace (1985/1814) afinó el concepto de Bernoulli y Moivre definiéndolo como la fracción con el denominador el número de los casos posibles y numerador el número de casos favorables (Burbano, 2015).
<i>Concepción frecuencial</i>	En esta concepción se calcula la probabilidad en situaciones del mundo físico o natural, nos encontramos con que no se puede aplicar el principio de equiprobabilidad, por eso esta definición es muy útil cuando se dispone de un gran número de casos, sin embargo, no proporciona un valor exacto de la probabilidad, sino una estimación (Batanero, 2001). Este concepto fue abordado por matemáticos como Bernoulli en su "ley de los grandes

<i>Concepción subjetiva</i>	números”, esta ley muestra que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque a la probabilidad teórica del suceso puede aproximarse a uno, al aumentar en número de repeticiones (Burbano, 2015) Lo que puede ser considerado aleatorio para una persona puede no serlo para otra, teniendo en cuenta que la aleatoriedad no es una propiedad física "objetiva", sino que tiene un carácter subjetivo, por eso, la decisión sobre si se considera que un objeto es o no aleatorio, dependerá del criterio y conocimiento individual. (Batanero, 2001). Se toma la probabilidad como el grado de creencia personal sobre la ocurrencia de un fenómeno, pues obedece a la información previa que posea el individuo sobre ese evento en particular (Burbano, 2015).
<i>Concepción axiomática</i>	Se contempla la probabilidad desde un enfoque formal, siendo un concepto con bases en un sistema de axiomas, definiciones y teoremas con proposiciones (Díaz et al., 1996).

3.3.3 Ideas estocásticas fundamentales

Los problemas filosóficos que la axiomatización tanto en la probabilidad no ha resuelto se relaciona con diversas aplicaciones de los conceptos tanto estadísticos como probabilísticos y la interpretación de estos en diferentes circunstancias (Batanero, 2001). Heitele (1975) fue quien propuso diez ideas fundamentales estocásticas con el objetivo de ser una guía en la educación de manera continua (López, Ojeda & Salcedo, 2018). En función de lo planteado, la presencia de estas ideas estocásticas fundamentales en el currículo de Colombia ayuda en la formación de los ciudadanos que se enfrentan a la complejidad que la incertidumbre representa en la cotidianidad (Carvajal, & Verdejo, 2019). Para este autor una idea fundamental va a ser aquella que permita al individuo establecer modelos explicativos tan eficientes como sean posibles y que no difieren, en los distintos niveles, sobre el contenido sino sólo en su forma de presentarlas (Heitele, 1975). A continuación, (Ver Tabla 4) se presenta brevemente estas ideas estocásticas fundamentales.

Tabla 4 Ideas estocásticas fundamentales

<i>Ideas estocásticas fundamentales</i>	<i>Descripción</i>
<i>La probabilidad como normalización de nuestras creencias</i>	La primera idea fundamental es asignar números a los sucesos aleatorios, de forma que estos números reflejen nuestro grado de creencia (Batanero, 2001). En el lenguaje ordinario se usan expresiones del tipo de “casi cierto”, “más probable que”, etc. para comparar las asignaciones de ocurrencia a diferentes sucesos inciertos, sin embargo, estas expresiones son poco precisas y subjetivas, siendo las asignaciones de valor en la escala de la probabilidad, desde 0 (suceso imposible) a 1 (suceso seguro) (Batanero, 2004).
<i>El espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades</i>	Esta idea permitió axiomatizar la probabilidad, como medida normada aditiva, registrar todos los posibles sucesos de un experimento, como un conjunto de referencia o universal y aplicar toda la potencia del álgebra de conjuntos para poder definir los demás sucesos, a partir de los elementales (Batanero, 2001). Como indica Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) la comprensión correcta del espacio muestral es indispensable para ayudar al estudiante a progresar en el aprendizaje de la probabilidad y se debe dedicar un tiempo suficiente a su enseñanza.
<i>Regla de adición de probabilidades</i>	Esta idea consiste en calcular la probabilidad de un suceso compuesto calculando por separado la probabilidad de los sucesos simples que la componen y luego sumando estas probabilidades (Batanero, 2001). En matemáticas una regla general es construir modelos complejos a partir de otros más simples, aunque asignarle la probabilidad en espacios muestrales sencillos es más fácil que a casos más complejos (Batanero, 2004).
<i>Independencia y regla del producto</i>	Esta idea consiste en el producto cartesiano de los espacios muestrales de dos o más experimentos simples permitiendo construir el espacio muestral del experimento compuesto (Batanero, 2004). Es primordial el concepto de probabilidad condicional y cómo cambia el grado de creencia sobre la ocurrencia de un evento cuando se dota de nueva información (Sanchez, 2009).
<i>Equidistribución y simetría</i>	Esta idea es primordial para usar las simetrías físicas o de otro tipo en las situaciones problemáticas, haciendo énfasis en que ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto, por lo tanto, poseen la misma probabilidad (Batanero, 2001). La concepción clásica de probabilidad se basa en una consideración de simetría de los objetos aleatorizadores que lleva a la equidistribución de los resultados (Sanchez, 2009). Cabe resaltar, que la equidistribución (igualdad de probabilidad) de los sucesos elementales de un experimento no se puede separar de la simetría estadística, es decir, la simetría confirmada por los registros estadísticos de resultados de dicho experimento (Batanero, 2004).

<i>Combinatoria</i>	Esta idea es primordial pues el utilizar técnicas de recuento para calcular el número de elementos tanto favorables como desfavorables a un suceso y usarlos para calcular las probabilidades fue un punto crucial en el desarrollo del cálculo de probabilidades (Batanero, 2004).siguiendo con la idea anterior, Sanchez (2009) afirma que “La combinatoria se considera una rama de la matemática que brinda un fuerte apoyo a la probabilidad, ya que muchas preguntas sobre espacios muestrales complejos se traducen en problemas de combinatoria” (pág., 52). Así mismo, las operaciones combinatorias pueden definirse, mediante experimentos aleatorios (extracción con o sin reemplazamiento, ordenada o no ordenada), esa relación entre los experimentos compuestos y la combinatoria se visualiza mejor con el uso de diagramas en árbol, siendo una representación icónica fundamental pues refleja la estructura multi-paso del experimento compuesto (Batanero, 2001).
<i>Modelos de urnas y simulación</i>	Cuando se habla de "simulación" en estadística significa algo parecido al isomorfismo en otras ramas de las matemáticas, pues consiste en poner en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes (Batanero, 2001). Ahora bien, con los modelos de urna se tiene la ventaja de representar un gran número de situaciones de azar de tipo discreto, además la idea de “elección aleatoria” se ilustra mediante este modelo y poder con la técnica de simulación, Heitele también asocia el enfoque frecuentista de la probabilidad (Sanchez, 2009).
<i>La variable aleatoria</i>	En la historia de la probabilidad, el concepto de variable aleatoria (estocástica) proporcionó un lenguaje que permitió accesibilidad un círculo más amplio de estudiosos y usuarios de la probabilidad (Sanchez, 2009). Este concepto ha sido responsable de las múltiples aplicaciones actuales del cálculo de probabilidades, puesto que pasó de ocuparse del estudio de la probabilidad de sucesos aislados al estudio de las distribuciones de probabilidad (Batanero, 2004).
<i>Las leyes de los grandes números</i>	La teórica de la ley de los grandes números es fundamental para entender el sentido de las afirmaciones de la probabilidad, consiste en la idea de que mientras los resultados individuales son totalmente impredecibles, los resultados masivos identifican patrones (Sanchez, 2009). De esta manera, al momento de analizar la dificultad de comprensión de la convergencia, hay que distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números y las correspondientes leyes matemáticas que se pueden demostrar formalmente (Botero, 2004).
<i>Muestreo</i>	La idea de muestreo es relevante pues todo conocimiento y juicios sobre el mundo o las personas están basado en él, teniendo en cuenta que el conocimiento científico se adquiere a partir de las experiencias empíricas y estas son siempre limitadas, por lo que las conclusiones deben ser más amplia de los datos que obtenemos en las observaciones, aunque esta idea presenta dos características contradictorias: representatividad y variabilidad (Batanero,

2001). Cabe resaltar que la inferencia se basa en el concepto de muestra representativa y al analizar la fuerza de las afirmaciones estadísticas no solo se tiene en consideración los métodos racionales utilizados, sino también de las características de las muestras y de qué forma se obtienen (Sanchez, 2009).

4. METODOLOGÍA

4.1 Investigación cualitativa

La investigación es considerada como un proceso riguroso y sistematizado donde se busca el análisis ya sea de un vacío de conocimiento o problemática, es un tratamiento organizado que garantiza alternativas de soluciones viables además de producción de nuevos conocimientos (Tóala y Briones, 2019). Ahora bien, los proyectos de investigación no pueden considerarse estáticos, pues en el transcurso de la investigación se van enriqueciendo y transformando (Montes et al, 2016). En relación con la idea anterior, en toda investigación el método es requisito importante, es una herramienta que ayuda a sintetizar y ordenar, favoreciendo el logro de los objetivos preestablecidos (González, 2005). Bonilla y Rodríguez (2000) afirman que, el método de investigación es indispensable pues es el conjunto de postulados, reglas y normas para el desarrollo y análisis de los problemas de la investigación, institucionalizados por la comunidad científica reconocida (citado en Torres, 2006).

En este orden de ideas, se encuentran tres enfoques de investigación: cuantitativa, cualitativa y mixta (Torres, 2019). En concordancia con los intereses de esta investigación, nos permitimos describir el enfoque Cualitativo. Este enfoque se centra en comprender y profundizar los fenómenos, analizándolos desde el punto de vista de los participantes en su ambiente y en relación con su contexto (Bejarano, 2016). Este enfoque tiene una gran cualidad, pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

En relación con lo anterior, no se puede separar el ejercicio educativo de la investigación, al igual que de la acción ética necesaria derivada de esta (Ramírez, 2011). Bizquerra (2004) afirma que una investigación con enfoque cualitativo en educación es “un conjunto sistemático de conocimientos acerca de la metodología científica aplicada a la investigación

de carácter empírico sobre los diferentes aspectos relativos a la educación.” (p, 37). En consecuencia, Ramírez (2011) habla sobre “cualidad” identifica la calidad de lo educativo por medio de una determinada forma de investigar (investigación cualitativa en educación), además afirma que este tipo de investigación es “prioritario en nuestro contexto nacional actual, dado que se ocupa del aporte que puede y debe hacer la educación al mejoramiento de la calidad de vida de los colombianos desde la perspectiva pedagógica” (p, 88).

En función de lo planteado, se escoge este tipo de investigación, puesto que posibilita el análisis en relación tanto con el contexto real de la educación como de los fenómenos asociados. En particular, con la problemática de la presente investigación y el interés sobre la reflexión y caracterización de los conocimientos de los profesores en formación vinculados a la probabilidad simple y compuesto. En consecuencia, el enfoque cualitativo es el óptimo a considerar dados los intereses investigativos que se tienen en esta investigación.

4.2 Estudio de caso.

Dentro de las investigaciones cualitativas se plantean qué casos son de interés, inicialmente con los objetivos y dónde se pueden encontrar. Así, se selecciona el tipo de estudio, algunos de los más requeridos son: Etnográfico cultural, Fenomenológico, Historia de vida familiar, Grupos de enfoque o el estudio de casos (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). En particular, el estudio de casos es un método de investigación de gran importancia en el desarrollo de las ciencias humanas y sociales (Bizquerra, 2004). Álvarez (2011) afirma que los estudios de casos hacen referencia al análisis de una entidad singular, un fenómeno o unidad social y proporcionan una descripción intensiva, su interés es comprender el significado de una experiencia. Así mismo, Stake (1999) entiende por estudio de casos: “Es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p, 11).

Por otro lado, Bartolomé (1992) menciona que el estudio de caso en la educación constituye un campo privilegiado para comprender en profundidad los fenómenos educativos, sin perder la riqueza de su complejidad (citado en Bizquerra, 2004). Así mismo, siendo un recurso metodológico ventajoso, Martínez (1988) afirma que proporciona percepciones de ejemplos específicos y situaciones enfocadas en la educación, menciona algunas ventajas para la investigación en educación:

- Un modo de continuar por una vía sistemática, profundizando en un proceso de investigación.
- Apropiado en investigaciones de pequeña escala o de un solo investigador.
- No cierra la posibilidad de posteriores profundizaciones.
- Exploración de los contextos de la práctica.
- Sencillo para planificar situaciones de progreso de enseñanza.
- Es útil para los profesores que colaboran como para el investigador.

Stake (2005) plantea que hay tres tipos de estudios de caso según su finalidad (como se citó en Chaves y Weiler, 2016).

- *Estudio de caso intrínseco*: Son casos con especificidades propias, que tienen un valor en sí mismos. No se elige al caso porque sea representativo de otros casos, o porque ilustre un determinado problema o rasgo, sino porque el caso en sí es de interés.
- *Estudio de caso instrumental*: Son casos que pretenden generalizar a partir de un conjunto de situaciones específicas. El caso se analiza para profundizar en un tema o afinar una teoría o hipótesis, así el caso juega un papel de apoyo, para llegar a la formulación de afirmaciones sobre los objetos de estudio.

- *Estudio de caso colectivo*: Se utiliza cuando el objetivo de la investigación se centra en un fenómeno, población o condición general, en consecuencia, se seleccionan varios casos que se han de estudiar a profundidad.

Particularmente, en la presente investigación los casos significativos para abordar los objetivos y problema de investigación son del tipo instrumental. Siendo una investigación educativa, se interesa en la formación de profesores de matemáticas, siendo la elección de profesores en formación los casos de interés. Estos serán de ayuda para obtener información de los conocimientos que han desarrollado los profesores en formación en relación con el subdominio del modelo MTSK: El Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM) alrededor de los conceptos de probabilidad simple y compuesta. Cabe aclarar, que la intención del cuestionario es dar cuenta del conocimiento que tienen y ponen en evidencia al responder cada situación del cuestionario.

4.3 Selección de casos

Dentro de las investigaciones en educación, con un enfoque de estudio de casos Stake (1999) menciona que la elección de los casos es primordial pues el caso es algo específico, algo complejo en funcionamiento. Su propósito fundamental es comprender la particularidad mediante su análisis (Álvarez, 2011). Ahora bien, según Stake (1999), algunos criterios importantes a considerar en el momento de la selección de casos son:

- Los casos que sean fáciles de abordar y donde las indagaciones sean bien acogidas.
- Los casos que estén alineados con los objetivos y la problemática planteada.

Cabe considerar, que en esta investigación los casos de interés son los profesores en formación de matemáticas, se deduce que, a partir de su desarrollo profesional, disponen de herramientas y un conglomerado de conocimientos que se evidencian en sus prácticas profesionales. Particularmente, en relación tanto con el pensamiento aleatorio y los sistemas

de datos como de los conceptos de estadística, probabilidad y cómo lo relacionan.

Específicamente en tópicos como: definición de probabilidad simple y compuesta; definición de independencia, dependencia de eventos, secuencias aleatorias y sus propiedades, regla del producto y adición de probabilidades. A continuación, las características que posee el caso que se estudiará se mencionan con mayor precisión.

Un caso representativo en la investigación es un profesor en formación de matemáticas que haya cursado satisfactoriamente gran mayoría de la carrera de licenciatura en matemáticas, particularmente dos cursos que están relacionados con el interés de la problemática y los objetivos de la investigación son los siguientes: Didáctica III: Desarrollo de pensamiento estocástico y aleatorio; y Estadística AEM.

Por consiguiente, para la selección de los siete casos participantes se realizó con la intención que los casos posean un repertorio de conocimientos tanto matemáticos como didácticos en relación con la probabilidad simple y compuesta, los cuales quedarán en evidencia en sus respuestas de cada parte de las situaciones del cuestionario. Posibilitando la caracterización y comprensión del conocimiento especializado de las características de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación.

4.4 Técnicas

La incorporación de la estadística y la probabilidad en el currículo es consecuencia de los cambios sociales de las últimas décadas, se ha visibilizado la necesidad de conocimientos que posibiliten a los ciudadanos afrontar interrogantes que requieren de un análisis y los conduzcan a tomar decisiones en situaciones donde el azar hace parte (Londoño, Alsina y López, 2022). En relación con la enseñanza de lo estocástico Shaughnessy (1992) afirma que los siguientes aspectos están asociados a los problemas de la enseñanza de este: El papel de la Probabilidad y la Estadística en el currículo, Relaciones entre investigación y educación, La

preparación de los profesores de matemáticas, La forma en que se lleva a cabo el aprendizaje (p. 466) (como se citó en Carvajal y Verdejo, 2019). En consecuencia, es de vital importancia que sigan creciendo las investigaciones educativas en esta línea.

La investigación en educación del pensamiento estocástico ha tomado un importante interés en la comunidad de profesores de matemáticas en Colombia, por la necesidad de implementar el pensamiento aleatorio y sistema de datos recomendado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) (Carvajal y Verdejo, 2019). Aun así, Costa y Nacarato (2011) menciona:

“Incluso hoy en día hay una falta de investigación sobre el tema de lo estocástico. Tal vez porque no es, por razones históricas, un tema muy tratado en las aulas de la escuela básica, como parte del currículo de Matemáticas; o tal vez porque no tiene la atención merecida dentro de los cursos de licenciatura” (p. 370).

En relación con lo anterior, diversas investigaciones (Alpízar, Chavarría y Oviedo (2013), Castaño, Alonso, Mellone y Rodríguez (2020), Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) Ortiz et al (2006)) mencionan una realidad inquietante, el conocimiento matemático y didáctico de los profesores para la enseñanza de la probabilidad es muy reducido. Teniendo en cuenta lo anterior, es relevante que se siga invirtiendo en investigaciones en educación sobre el conocimiento que han desarrollado los profesores tanto en activo como en formación frente a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Para esto, se debe informar sobre las diversas formas de recoger datos para estas investigaciones, Hernández, Fernández y Baptista (2003) mantienen que obtener datos implica llevar a cabo tres actividades vinculadas entre sí:

- *Seleccionar una o varias técnicas de obtención de la información* entre las disponibles en el área de estudio.

- *Aplicar esta técnica* para obtener la información que es de interés para el estudio.
Existe un espectro de técnicas que permiten recoger datos de distinta naturaleza: desde mediciones de variables cuantitativas hasta registros narrativos y descriptivos de observaciones cualitativas.
- *Preparar los registros de las observaciones y las mediciones* obtenidas para que se analicen correctamente.

Ahora bien, Del Rincón et al. (1995) menciona tres grandes categorías de técnicas de recogida de la información: los instrumentos, las estrategias y los medios audiovisuales (como se citó en Alzina, 2004):

- Los *instrumentos* son medios reales, con entidad propia, que los investigadores elaboran con el propósito de registrar información y/o de medir características de los sujetos. Algunos de los más conocidos son: los test, los cuestionarios, las escalas de observación, y, en general, las pruebas de papel y lápiz (pruebas objetivas, listas de control, escalas de actitudes, etc.).
- Las *estrategias*, en tanto que técnicas de recogida de información, se refieren a procesos interactivos entre investigadores e investigados con la finalidad de obtener los datos en toda su riqueza y particularidad.
- Los *medios audiovisuales* son recursos que el investigador utiliza para registrar información, los registros realizados con este tipo de medios se les denominan registros tecnológicos: grabaciones audio, grabaciones vídeo, fotografías o diapositivas.

En relación con la idea anterior, a partir de la problemática y el objetivo general de la investigación, el instrumento de recogida de información elegido fue un cuestionario de

conocimientos didácticos. A continuación, algunas de las razones por las cuales se eligió este instrumento:

- En términos de conocimiento de los temas matemáticos relacionado con los conceptos de probabilidad simple y compuesta, permite reconocer aspectos como: tipos de procedimientos asociados a la resolución de una situación, relaciones que desarrolla de los temas de probabilidad simple y compuesta, las definiciones, significados personales que ha construido cada profesor en formación y las representaciones que utiliza para comunicar.
- En términos del conocimiento didáctico del contenido, este instrumento permite identificar el conocimiento que ha construido el profesor en formación sobre los análisis que realizan los estudiantes, pues necesitarán consultar a sus conocimientos sobre los errores, dificultades, falacias y sesgos presentes en las respuestas de los estudiantes hipotéticos.

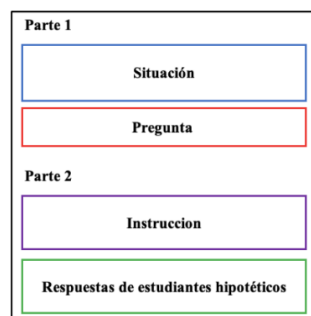
Cabe considerar que, con cada situación del cuestionario se pretende dar cuenta de los conocimientos que han ido construyendo los profesores en formación en dos aspectos: La manera en que los profesores en formación interactúan con los contenidos de probabilidad simple y compuesta. La interpretación que tienen los profesores en formación frente a dificultades, confusiones y heurísticas que puedan presentar sus estudiantes en relación con la probabilidad simple y compuesta.

4.4.1 Instrumentos de recogida de la información

En la presente investigación se utiliza como instrumento de recogida de información un cuestionario de conocimientos didácticos para analizarlos con relación a las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad simple y compuesta, en particular que han construido los profesores en formación. Tomando en consideración los cuestionarios válidos

y actividades de razonamiento probabilístico simple y compuesto (Inzunza y Guzmán, 2011; León y Sosa, 2020; Walpole et al, 2014) adaptándolos para las situaciones propuestas. En consecuencia, con este cuestionario se analiza el conocimiento que los profesores en formación han desarrollado a lo largo de su carrera profesional en relación con el aprendizaje de la probabilidad simple y compuesta.

La estructura que se utilizó en el cuestionario fue el propuesto por León (2020). Se divide en dos partes, en la primera se plantea la situación luego la pregunta, en la segunda parte se presenta la instrucción: *De acuerdo con las respuestas del enunciado anterior, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.* Se finaliza con las tres respuestas de estudiantes hipotéticos. A continuación, se presenta la estructura del cuestionario:



Figuras 4 Estructura del Cuestionario de conocimientos Didácticos (León, 2020, pág. 58)

Cabe considerar, en la segunda parte del cuestionario se incluye respuestas de estudiantes hipotéticos a cada una de las situaciones. Se espera que, con las respuestas de esta segunda parte, los profesores en formación analicen, reconozcan y argumenten teniendo en

cuenta su conocimiento en relación con sesgos, falacias y razonamientos erróneos de sus futuros estudiantes en probabilidad simple y compuesta.

En relación con lo anterior, las respuestas están asociadas a sesgos, falacias y razonamientos erróneos de estudiantes en probabilidad simple y compuesta, los cuales se describieron anteriormente en el apartado 3.3.1 *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico*. A continuación, se presenta la Tabla 1 donde se visualiza la categoría temática de cada situación junto con las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos, tanto los sesgos y falacias a las que se relaciona y la respuesta correcta.

Tabla 5 Categoría temática y Respuestas de estudiantes hipotéticos

Situación	Categoría temática	Respuestas hipotéticas
1	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades.	E1: Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral E2: Respuesta correcta E3: Concepción errónea del azar
2	Regla del producto de probabilidades.	E1: Enfoque en el resultado aislado E2: Razonamiento erróneo E3: Respuesta correcta
3	Regla de la adición de probabilidades.	E1: Respuesta correcta E2: Sesgo de equiprobabilidad E3: Razonamiento erróneo
4	Interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial.	E1: Razonamiento erróneo E2: Respuesta correcta E3: Dificultad en diferenciar azar y suerte
5	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades.	E1: Respuesta correcta E2: Razonamiento erróneo E3: Sesgo de equiprobabilidad y Concepción errónea del azar

4.4.1.1 Cuestionario de Conocimientos Didácticos sobre Probabilidad simple y compuesta

A continuación, se presenta el cuestionario de conocimientos didácticos sobre probabilidad simple y compuesta. El cuestionario consta de 7 situaciones conformadas por dos partes respectivamente. Cabe aclarar que, en la segunda parte se proponen tres respuestas de estudiantes hipotéticos, planteando las posibles situaciones que puede llegar a enfrentar los profesores en formación en su práctica profesional relacionadas con probabilidad simple y compuesta, dos corresponden a heurísticas, sesgos, confusiones o razonamientos erróneos y una evidencia un desarrollo adecuado del pensamiento estocástico.

En relación con la idea anterior, se presenta la intencionalidad de cada situación junto con la descripción de los factores didácticos que considera (sesgos, falacias y confusiones), los conceptos matemáticos, los tipos de problemas, desarrollo y los análisis de cada respuesta de los estudiantes hipotéticos.

4.4.1.1.1 Situación 1: *¿Quién hará la fila?*

PARTE 1

ENUNCIADO: Lucia y Camila van a ver una película en el centro comercial Jardín plaza, pero no quieren hacer la fila, decidieron que lanzaría una moneda 6 veces, Camila escoge la cara y Lucia el sello, dependiendo los lanzamientos de la moneda ira a hacer la fila si cae más veces el lado que cada una escogió ¿Cuál de las siguientes sucesiones consideras que es más probable y por qué? Teniendo en cuenta que Lucia y Camila lanzarán 6 veces la moneda al aire.

- a) CCCSSS.
- b) Ambos casos son igualmente probables.
- c) SCSSSS.

PARTE 2

De acuerdo con las respuestas del enunciado anterior, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, **describa** el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1: Es más probable la sucesión **a)** CCCSSS porque se espera una proporción igual de caras y de sellos al tirar una moneda.

E2: Todas las sucesiones son igualmente de probables, pues siendo este un evento aleatorio y teniendo una muestra tan pequeña no podemos predecir que necesariamente tiene que ser 3 lanzamientos de cara y 3 de sello.

E3: Entre las sucesiones, es más probable que aparezca **b)** SCSSSS, porque teniendo en cuenta que el azar se caracteriza por tener patrones irregulares, esta sucesión cumple con esto.

Intencionalidad

La intención de esta situación es promover el razonamiento probabilístico de los estudiantes a partir de problemáticas reales, específicamente se quiere abordar la noción de aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades. Fomentando un análisis de forma crítica en relación con el sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral y una concepción errónea del azar a partir de respuestas de estudiantes hipotéticos.

Para esta situación se utiliza el contexto de lanzamiento de una moneda y se espera que realice una estimación teniendo en cuenta la información previa del enunciado, seis lanzamientos de la moneda. Cabe aclarar, esta situación se plantea a partir de una actividad propuesta por Inzunza y Guzmán (2011).

Respuestas de estudiantes hipotéticos

A continuación, se presenta una breve explicación de las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos:

E1: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta *sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral*, parte de una percepción incorrecta sobre la “Ley de los grandes números”. Serrano, Batanero y Cañizares (1998) afirman que esta creencia se caracteriza por no darle importancia al número de ensayos que se realizan en un experimento aleatorio. Teniendo en cuenta lo anterior, este estudiante considera suficiente seis ensayos (lanzamientos de monedas) para realizar una afirmación sobre la probabilidad de un evento

aleatorio. Es claro que emplea de forma implícita la ley de los grandes números, sin embargo, no toma en consideración los pocos ensayos realizados.

E2: Esta respuesta se considera *correcta*. El razonamiento empleado por E2 muestra que tiene en cuenta que los experimentos aleatorios son fenómenos que, aunque se repitan, el resultado variará de una repetición a otra dentro de un conjunto de posibles resultados (Montes, 2007). De igual forma, considera que no es posible implementar el principio de los grandes números pues en este caso en particular se cuenta con una muestra de 6 lanzamientos, siendo una muestra muy pequeña.

E3: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante muestra una *concepción errónea del azar*, considera que los eventos aleatorios que están regidos por el azar se caracterizan por mostrar en las secuencias con patrones irregulares, partiendo que el azar no tiene control o predicción exacta (Wagenaar y Keren, 1988).

4.4.1.1.2 Situación 2: Sabores de Frunas

PARTE 1

ENUNCIADO: En una reunión de amigos, Samuel llevó una bolsa con 6 Frunas sabor cereza y 4 Frunas sabor lulo. Diana extrae dos frunas sucesivamente (sin ver) y sin reemplazarlas de la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad que los dos dulces que extraiga sean de lulo?



PARTE 2

De acuerdo con las respuestas del enunciado anterior, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, **describa** el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1: En vista de que hay una mayor probabilidad de que la próxima Fruna que se extraiga sea de Lulo, la probabilidad de que Diana extraiga dos Frunas de ese tipo es muy alta.

E2: La probabilidad de que Diana extraiga dos Frunas de lulo es de 16% . Pues si analizamos la información de la situación, la probabilidad de obtener una Fruna de lulo es 40% , utilizando el concepto de probabilidad simple. Ahora, dado que ambos eventos son independientes, utilizamos el principio de multiplicación: $(40\% \cdot 40\% = 16\%)$. Por tal razón, la probabilidad de que Diana obtenga dos Frunas de lulo es del 16% .

E3: La probabilidad de salir una Fruna sabor lulo en el primer intento seria de $(4/10)$ y en la segunda extracción es de $(3/9)$. Con esta información y aplicando el principio de la multiplicación encontramos la probabilidad de obtener dos Frunas de lulo es $(12/90)$.

Intencionalidad

La intención de esta situación es promover el razonamiento probabilístico mediante la definición clásica de probabilidad (Regla de Laplace) y los conceptos de la regla del producto de probabilidades. Teniendo las respuestas de los estudiantes hipotéticos, se pretende fomentar el análisis de forma crítica en relación con el enfoque en el resultado aislado y el sesgo de equiprobabilidad.

Para esta situación se utiliza el contexto específico de extracción de un dulce y se espera que se realice una estimación teniendo en cuenta la información del enunciado. Cabe aclarar, que esta actividad es una adaptación a una propuesta por Inzunza y Guzmán (2011).

Respuestas de estudiantes hipotéticos

A continuación, se presenta una breve explicación de las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos:

E1: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta un sesgo denominado *enfoque en el resultado aislado*. Díaz (2003) menciona que este sesgo se evidencia cuando interpretan la información del problema de forma no probabilística y consideran que el fin no es llegar la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el

resultado de un ensayo simple. En relación con lo anterior, E1 entiende la pregunta de la situación y responde a partir de la predicción de un evento en un futuro próximo.

E2: Esta respuesta se considera incorrecta. El argumento del estudiante presenta un *Razonamiento erróneo*, dado que interpreta que ambos sucesos son simples y no un solo suceso compuesto. A partir de ello, se puede inferir que no toma en cuenta que en la segunda extracción no se repone la Fruna, lo cual cambiaría las condiciones en el segundo ensayo, es decir, los casos favorables (número de Frunas sabor lulo) y el número de casos posibles (número total de las Frunas).

E3: Esta respuesta se considera *correcta*. El razonamiento empleado por E3 muestra que tiene en cuenta la definición de independencia y la regla del producto de probabilidades. Realiza distinción entre los casos favorables de cada tipo de Fruna y disminuye el número de casos posibles en el segundo intento, teniendo en cuenta que ya se realizó una extracción previa.

4.4.1.1.3 Situación 3: *Un nuevo empleo*

PARTE 1

ENUNCIADO: Al final del semestre Nathalia se va a graduar de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Después de tener entrevistas en dos Colegios en donde quiere trabajar, la agencia de trabajo le informa que la probabilidad que tiene de lograr una oferta de empleo en el colegio A es del 80%, y que la probabilidad de obtenerla en el colegio B es del 60%. Además, la probabilidad de recibir ofertas de ambos colegios al mismo tiempo es del 50%.

¿Qué probabilidad tiene de obtener al menos una oferta de ambos colegios?

PARTE 2

De acuerdo con las respuestas del enunciado anterior, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, **describe** el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1: Sea $P(A)$ la probabilidad de que la contraten en el colegio A, $P(B)$ la probabilidad de que contraten en el colegio B y $P(A \cap B)$ la probabilidad de que la contraten en ambos colegios. A partir de la fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Podemos decir entonces que la probabilidad de recibir al menos una oferta es del 90%.

E2: Nathalia tiene la misma posibilidad de que la contraten tanto en el colegio A como en el B, dado que ambos eventos son igualmente probables por ser un suceso aleatorio. Por tanto, la probabilidad de recibir al menos una oferta es del 50%.

E3: Si la probabilidad de que contraten a Nathalia en el colegio A es $P(A) = 0.8$ y la probabilidad de que la contraten en el colegio B es $P(B) = 0.6$. Calculamos el promedio de probabilidades entre ambos sucesos:

$$\frac{\frac{P(A)+P(B)}{2}}{2} = \frac{0.8 + 0.6}{2} = 0.7 = 70\%$$

Así, la probabilidad de que contraten a Nathalia en algún colegio es del 70% .

Intencionalidad

La intención de esta situación es promover el razonamiento probabilístico mediante la definición clásica de probabilidad (Regla de Laplace) y la Regla de la adición de probabilidades. Operando las probabilidades como números decimales, con el propósito de operar la regla de la adición no solo desde las probabilidades como fracciones. Este ejercicio presenta las respuestas de los estudiantes hipotéticos, en particular se pretende fomentar el análisis de forma crítica en relación con el sesgo de equiprobabilidad y el razonamiento erróneo relacionado con el enfoque en el resultado aislado.

Para esta situación se utiliza el contexto específico de contratación en un colegio. Se espera que se realice una estimación teniendo en cuenta la información previa del enunciado, las probabilidades que la contraten en el colegio A, B y en los dos al mismo tiempo. Cabe aclarar, que esta actividad es una adaptación a una propuesta de Walpole et al. (2014).

Respuestas de estudiantes hipotéticos

A continuación, se presenta una breve explicación de las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos:

E1: Esta respuesta se considera *correcta*. El razonamiento empleado por la estudiante muestra que tiene en cuenta las tres probabilidades, probabilidad que contraten a Nathalia en el colegio A es ($P(A) = 0.8$), probabilidad que contraten a Nathalia en el colegio B es ($P(B) = 0.6$) y probabilidad que contraten a Nathalia en los dos colegios al mismo tiempo ($P(A \cap B) = 0.5$) y emplea un buen calculo al momento de operarlas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remplaza

$$P(A \cup B) = 80\% + 60\% - 50\% = 90\%$$

Por lo tanto, la probabilidad que tiene Nathalia de obtener al menos una oferta de esos dos colegios es de 90% .

E2: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta el *Sesgo de equiprobabilidad*, estima que es igualmente probable que contraten a Nathalia tanto en el colegio A como en el colegio B, lo cual es un error. Además, no tiene en cuenta la probabilidad de que la contraten en los dos colegios al mismo tiempo ($P(A \cap B) = 0.5$).

E3: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta un *Razonamiento erróneo*, no toma en cuenta la probabilidad de que contraten a Nathalia en los dos colegios al mismo tiempo, por el contrario, solo realiza la regla de adición con la probabilidad de que la contraten en el colegio A y en el colegio. Además, interpreta erróneamente la probabilidad conjunta $P(A \cup B)$ como el promedio de las probabilidades de eventos simples.

4.4.1.1.4 Situación 4: ¡Advertencia!

PARTE 1

ENUNCIADO: Harry fue al médico, preocupado por mostrar calvicie temprana, el médico le recetó un medicamento. Sin embargo, tiene el siguiente mensaje impreso en el frasco de prescripción médica que le dieron a Harry

Advertencia: en aplicaciones en área de la piel, existe 15% de probabilidad de que se presente irritación. Si se presenta irritación, consulte a su médico.

¿Cuál de los siguientes enunciados consideras que es la mejor interpretación de la advertencia?

- a. Puede usar el medicamento en la piel, pues existe poca posibilidad de que Harry presente irritación.
- b. Si se genera irritación, pero se afectará probablemente sólo 15% del cuero cabelludo.
- c. Aproximadamente a 15 de cada 100 personas que usan este medicamento se les irrita la piel.

PARTE 2

De acuerdo con las respuestas del enunciado anterior, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, **describa** el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1: La interpretación b) es correcta, pues en el enunciado nos advierten sobre el 15% del cuero cabelludo que estaría irritado si Harry se aplica este medicamento.

E2: La mejor interpretación es la c), teniendo en cuenta la información que nos ofrece la advertencia del medicamento, el porcentaje 15% hace referencia a la proporción, de esta forma podríamos decir que se refiere a 15 de cada 100 personas que utilicen el medicamento.

E3: El literal a) es el correcto porque los efectos secundarios de la crema capilar dependen de la suerte de Harry al momento de aplicarse el producto y las probabilidades de que haya irritación son bajas

Intencionalidad

La intención de esta situación es promover el razonamiento probabilístico mediante la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial. Teniendo en cuenta, el concepto de proporcionalidad y relacionarlo con la probabilidad para la toma de decisiones.

Esta situación presenta las respuestas de los estudiantes hipotéticos, en particular se pretende fomentar el análisis de forma crítica en relación la dificultad en diferenciar azar y suerte y razonamiento erróneo.

Para este ejercicio se utiliza el contexto específico de probabilidad que un medicamento irrite la piel de quien lo utilice. Se espera que se realice una estimación teniendo en cuenta la información previa del enunciado, el 15% de probabilidad que el medicamento irrite la piel. Cabe aclarar, que esta actividad es una adaptación a una propuesta de Inzunza y Guzmán (2011).

Respuestas de estudiantes hipotéticos

A continuación, se presenta una breve explicación de las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos:

E1: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El argumento del estudiante presenta un *Razonamiento erróneo* relacionado con dificultades en el razonamiento proporcional. Cañizares y Batanero (2005) indican que el dominio del cálculo de proporciones es un prerrequisito para el desarrollo adecuado de probabilidad. La proporcionalidad tiene como fundamento al concepto de razón que es uno de los subconstructos de la fracción (Mochón, 2012). En relación con las ideas anteriores, se puede suponer que el estudiante tiene dificultades en razonamiento proporcional y como se relaciona con la probabilidad, pues interpreta “15% de probabilidad de que se presente irritación”, como si el número total de casos hiciera referencia al total de piel de una persona.

E2: Esta respuesta se considera *correcta*. El razonamiento empleado por la estudiante muestra que tiene en cuenta el concepto de proporcionalidad, y la relación entre las fracciones, igualmente, hace una buena interpretación con la información del enunciado.

Considera, que el porcentaje o tanto por ciento es una forma de indicar una proporción tomando como referencia al número 100. Particularmente, en esta situación tomando en consideración la advertencia, el porcentaje 15% hace referencia a la proporción 15 de cada 100.

E3: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta *Dificultad en diferenciar azar y suerte*. Wagenaar y Keren (1988) afirman, que las personas suelen tomar decisiones a partir de la creencia que poseen sobre la suerte, esta les da seguridad suficiente. En relación con la idea anterior, este estudiante hipotético argumenta que Harry no tiene suerte, no toma en cuenta la informa del enunciado (el 15% de probabilidad de irritación), elige a partir de la creencia de suerte que representa para él, siendo esta información suficiente.

4.4.1.1.7 Situación 5: ¿Qué película ver?

PARTE 1

ENUNCIADO: Pablo y Andrea quieren tener una tarde de películas, pero no se pueden decir por cual genero de película ver primero, están entre comedia y romance. Para decidirse Andrea le propuso un juego a Pablo, en una bolsa oscura hay dos fichas de igual tamaño. La ficha 1 tiene sus dos lados con caritas sonriendo que significan género de comedia y la ficha 2 tiene un lado con corazón significando genero de romance y el otro lado con una carita sonriendo.



FICHA 1

FICHA 2

Pablo saca una ficha y muestra sólo una de sus caras y resulta ser una cara sonriendo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones consideras correcta?

- a. Es más probable que sea la ficha 1.

- b. Es igualmente probable que esta ficha sea la que tiene la otra cara con corazón que con carita sonriendo.
- c. Es menos probable que esta ficha sea la 1 que la ficha 2.

PARTE 2

De acuerdo con las respuestas del enunciado anterior, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, **describa** el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1: Pienso que la afirmación correcta sería la b, me ayudó hacer un diagrama de árbol, así entender que es igual de probable que la otra cara de la ficha sea de corazón o de una carita sonriendo. La ficha que sacó Pablo tiene la primera cara sonriendo, eso solo deja dos opciones, así tendrían la misma probabilidad.

E2: La afirmación que considero correcta es la a, pues de las 4 caras en total, hay tres caras con una carita sonriendo en cambio solo una cara con un corazón entonces es más probable que la otra cara de la ficha sea otra carita sonriendo.

E3: La afirmación correcta es la c. Teniendo en cuenta que ambos eventos aleatorios tienen la misma probabilidad de ocurrencia. En ese sentido, si se obtiene primero una cara feliz, es más probable que la otra cara de la ficha tenga un corazón, de esa forma se mantiene la equiprobabilidad de los eventos aleatorios.

Intencionalidad

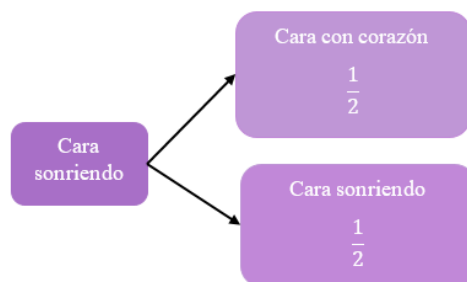
La intención de esta situación es promover el razonamiento probabilístico mediante el Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades. Teniendo en cuenta las combinaciones de dos fichas con dos caras respectivamente (ficha 1: Cara sonriendo- cara sonriendo) (ficha 2: Cara sonriendo- corazón). Fomentando un análisis de forma crítica en relación con el Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral, razonamiento y Concepción erróneos del azar a partir de respuestas de estudiantes hipotéticos.

En este ejercicio se utiliza el contexto de juego, para elegir el género de una película. Se espera que se realice una estimación teniendo en cuenta la información previa del enunciado, tanto las caras de las dos fichas como la primera vez que Pablo extrajo una ficha y visualizó una cara (cara sonriendo). Cabe aclarar, que esta situación es una adaptación a una propuesta de Inzunza y Guzmán (2011).

Respuestas de estudiantes hipotéticos

A continuación, se presenta una breve explicación de las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos:

E1: Esta respuesta se considera *correcta*. El razonamiento empleado por la estudiante muestra que tiene en cuenta la primera cara de la ficha (cara sonriendo) a partir de esta información calcula la probabilidad de que la próxima cara sea otra cara sonriendo o un corazón, utilizando la Regla de Laplace, casos favorables de este suceso y el número de casos posibles. A continuación, se presenta un diagrama de árbol que representa la situación:



Así, es igual de probable que la ficha que saco Pablo sea la ficha 1 como la ficha 2.

E2: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta un *Razonamiento erróneo*, no hace una distinción entre las fichas, realiza su juicio a partir de las caras en su totalidad, sin considerar casos favorables de este suceso y el número de casos posibles para cada ficha por separado.

E3: Esta respuesta se considera *incorrecta*. El razonamiento del estudiante presenta *Sesgo de equiprobabilidad* y *Concepción errónea del azar*. El argumento que expone comienza con una concepción errónea de azar cuando afirma que sería muy sospechoso que volviera a salir

una carita sonriendo de lo contrario no estaría equilibradas las fichas, se puede deducir que el percibe el azar como eventos que sin importar el tamaño de la muestra debe ir “equilibrado” argumentando que así se cumple la equiprobabilidad de eventos aleatorios, relacionándose con sesgo de equiprobabilidad.

4.4.1.2 Validación del instrumento de recogida de la información

Teniendo presente que un gran número de investigaciones denota falta de rigor, esto sucede en gran medida por la falta de validación de los instrumentos utilizados:

En un análisis realizado a 102 tesis doctorales desarrolladas en los últimos 10 años, se detectó que el instrumento más utilizado es la encuesta; que cada investigación diseñó su propio instrumento; y que, en los mejores de casos, respondían a los objetivos trazados. (López et al, 2019)

En relación con lo anterior, Corral (2016) afirma que los constructos de confiabilidad y validez se consideran estándares primordiales de rigor, pues las estrategias de validación deben ser parte integral de cualquier investigación cualitativa (Corral, 2016)

Ahora bien, con la finalidad de validar un instrumento, la Validez y fiabilidad son los dos criterios de calidad que debe reunir todo instrumento de medición, con ese fin se toman en cuenta diversos métodos, entre esos esta la consulta y el juicio de expertos con el objeto de que los investigadores puedan utilizarlo en sus estudios (Corral, 2016). La validación mediante el juicio de expertos es cada vez más utilizada en la investigación, como Cabero y Llorente (2013) afirma “consiste, básicamente, en solicitar a una serie de personas la demanda de un juicio hacia un objeto, un instrumento, un material de enseñanza, o su opinión respecto a un aspecto concreto” (como se citó en Garrote y del Carmen, 2015). Otro método de validación es mediante la prueba piloto, Supo (2013) lo entiende como volver a evaluar la claridad con la que están redactados los ítems del cuestionario en cuestión, que si bien los

jueces o expertos, han ayudado a evaluar y sugerir mejoras sin embargo ellos no son la población objetivo de la investigación, por eso es relevante analizar la experiencia de personas que están dentro de la población de interés.

En función de lo planteado, en la presente investigación se consideró el cuestionario como instrumento de recogida de información. Este instrumento ha pasado por dos procesos de validación: una prueba piloto y revisión por expertos. Cabe resaltar, la validación por medio de la prueba piloto se aplicó a 3 profesores en formación que están próximos a graduarse. Con respecto a la validación por expertos, se consultó a una profesora investigadora, fue elegida tomando en cuenta su experiencia investigativa y su afinidad con el modelo MTSK.

A partir de estas validaciones se rescataron sugerencias y cambios pertinentes para el cuestionario, a continuación, se presentan los cambios más relevantes:

- Al principio, se propusieron siete situaciones con sus dos partes correspondientes. Sin embargo, a partir de la prueba piloto se consideró pertinente reducirlo a cinco situaciones, con la intención que lo respondieran en un promedio de dos horas.
- Se consideraron necesarios cambios en la redacción de algunas de las situaciones, con la intención que fuera más claro la idea central, junto con ciertas respuestas de los estudiantes hipotéticos, para enfatizar en el sesgo o falacia que se pretendía evidenciar.

En el apartado *ANEXO 1: CUESTIONARIO*, se presenta la versión final del cuestionario didáctico, rediseñado a partir de las sugerencias y cambios anteriormente mencionados, en consecuencia, validado. De esta manera, toma como base el objetivo de la investigación, permitiendo el análisis del conocimiento especializado de las características de

aprendizaje del profesor de matemáticas en formación para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta, utilizando los indicadores de conocimiento del KFLM.

4.4.2 Instrumentos de análisis de la información

La Teoría Fundamentada (en inglés Grounded Theory), se presenta en el año 1967, por los sociólogos norteamericanos Barney G. Glaser y Anselm Leonard Strauss, en el libro “El descubrimiento de la Teoría Fundamentada” este se ha considerado como el precursor teórico de la tradición cualitativa (Lora, Cavadias, y Miranda, 2017). La TF permite utilizar datos provenientes de cualquier método y fuente de investigación tanto un experimento clínico, como una encuesta o análisis de contenido, etc., sin estar ligado a ellos; sobrepasa las limitaciones de los métodos descriptivos, algunos de estos son: el modo de construir los datos, la búsqueda de datos precisos y la interpretación (Espriella y Restrepo, 2020). Ahora bien, Bénard (2016) menciona que la Teoría Fundamentada tiene tres componentes esenciales:

1. Conceptos creados a partir de los datos que se agrupan en categorías (o conceptos de más alto nivel).
2. El desarrollo de categorías en términos de sus propiedades y dimensiones.
3. La integración de categorías y niveles más bajos de conceptos en un marco teórico que ofrece información sobre un fenómeno o una serie de fenómenos y que da pistas para la acción.

Páramo (2015) menciona que Glaser y Strauss anhelaron disminuir la brecha que existe entre la investigación empírica teóricamente “no informada” y la teoría empíricamente “no informada” mediante una relación con la teoría en los datos. Algunas características que menciona Bénard (2016) de quien trabaja con la teoría fundamentada son:

1. Capacidad de mirar de manera retrospectiva y analizar las situaciones críticamente.
2. Capacidad de reconocer la tendencia a los sesgos.
3. Capacidad de pensar de manera abstracta.
4. Capacidad de ser flexibles y abiertos a la crítica constructiva.
5. Sensibilidad a las palabras y acciones de los que responden a las preguntas.
6. Sentido de absorción y devoción al proceso del trabajo.

A partir de lo anterior, en relación con los objetivos mencionados en el apartado 1.3 y la pregunta problema mencionada en el apartado 1.2, se considera pertinente utilizar la TF en el análisis de los datos recolectados. Ahora bien, enfocándose en la perspectiva metodológica a la aproximación *Top-Down* (de arriba abajo) y *Bottom-up* (de abajo arriba) que brindan según Glaser (1992) una sensibilidad teórica al momento de analizar los datos, en esta investigación se utiliza únicamente el análisis de los datos *Top-Down*, esta aproximación parte del marco referencial de la investigación, para identificar los objetivos de esta (Niss, 2006). Cabe considerar que, Avila (2015) menciona que a través de la construcción teórica del modelo MTSK se proporciona una teoría previa que ayuda como base para realizar un primer análisis del conocimiento profesional, tomándose los dominios y subdominios del modelo como las gafas que permiten observar los datos, de esta forma se parte de la teoría para llegar a los datos, de esta forma sean estos los que nos hablen sobre el conocimiento especializado del profesor.

Cabe resaltar que categorías emergentes de la TF, como lo son la perspectiva metodológica a la aproximación *Top-Down* en relación con esta investigación, no es considerada una imposición sino una decisión metodológica apropiada para la recolección de datos y su posterior análisis, en función los objetivos y pregunta problema.



Figuras 5 Esquema de Top-Down en relación con el modelo (MTSK)
(Elaboración propia)

En relación con la idea anterior, en esta investigación se utiliza dos perspectivas teóricas para el análisis de los datos. Primeramente, los indicadores de análisis del subdominio (KFLM) propuestos tanto por Sosa et al. (2016) como por León (2020), mencionados anteriormente en el apartado 3.2.5.4. Igualmente, se utiliza la perspectiva de análisis de los datos Top-Down, de esta forma se permite la construcción de nuevos indicadores de conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes (KFLM).

Mediante matrices de análisis y la codificación de los indicadores, concepciones sobre probabilidad, heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico e ideas estocásticas fundamentales. Así mismo, se consideró pertinente utilizar ATLAS.ti, un software para el análisis de datos cualitativos, una herramienta tecnológica que permite organizar, analizar e interpretar información recogida en las investigaciones, como las relacionadas al ámbito de la educación (Cipollone, 2022). Desde estas consideraciones, se recomienda combinar el proceso de análisis con la herramienta computacional ATLAS. Ti, fusionándose con la creatividad del investigador (Varguillas, 2006).

4.4.2.1 Grupos y categorías de análisis.

Se construyó tres grupos de códigos con sus respectivas categorías, teniendo en cuenta el objetivo de la investigación se consideró pertinente organizar los apartados 3.3.1 *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico*, 3.3.2 *Concepciones sobre probabilidad*, 3.3.3 *Ideas estocásticas fundamentales* y 3.2.5.4 *Indicadores de análisis* en estos tres grupos. A continuación, se presenta el esquema de los grupos y categorías de los códigos que más adelante se presentan.



Figuras 6 Esquema de los grupos de códigos (Elaboración propia)

Cabe considerar, que en el grupo Conceptos se obtiene dos categorías, la primera es

Ideas estocásticas fundamentales consta de diez códigos y la segunda categoría que es *Conceptos sobre probabilidad* consta de cinco códigos, el segundo grupo Dificultades igualmente disponen de dos categorías, la primera es *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático* que enlista los indicadores de conocimiento del KFLM con este mismo nombre consta de nueve códigos, la segunda categoría es *Sesgos, falacias y confusiones* tiene catorce códigos, el último grupo Estrategias tiene una sola categoría que es *Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* que enlista los indicadores de conocimiento del KFLM con este mismo nombre y consta de siete códigos, finalmente se ve necesario añadir un código libre *NULO* que hace referencia cuando

no se identifica ningún código de los tres grupos antes mencionados, teniendo un total de cuarenta y seis códigos.

4.4.2.2 Codificación

Partiendo de los grupos y las categorías antes mencionadas, se organizan los códigos que hacen parte de cada una y la nomenclatura de cada uno en particular. En consecuencia, para identificar la primera categoría del grupo de conceptos, *Ideas estocásticas fundamentales* parten de la partícula **IE**, la segunda categoría *Concepciones sobre probabilidad* parten de la inicial **C**, del grupo Dificultades las categorías de *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático* parten de la inicial **I**, las segundas categorías *Sesgos, falacias y confusiones* parte de la inicial **F**, por último el grupo Estrategias con su categoría *Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* también parte de la inicial **I** haciendo referencia a los indicadores de conocimiento del KFLM. A continuación, se presenta el listado de los códigos con sus respectivas categorías.

4.4.2.2.1 Códigos del Grupo *Conceptos*

Grupo	Categoría		Código
Concepto	Ideas estocásticas fundamentales	La probabilidad como normalización de nuestras creencias.	IE1
		El espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades.	IE2
		Regla de adición de probabilidades.	IE3
		Independencia y regla del producto.	IE4
		Equidistribución y simetría.	IE5
		Combinatoria.	IE6
		Modelos de urnas y simulación.	IE7
		La variable aleatoria.	IE8
		Las leyes de los grandes números.	IE9
		Muestreo.	IE10
	Concepciones sobre probabilidad	Concepción intuitiva	CI
		Concepción clásica	CC
		Concepción frecuencial	CF
		Concepción subjetiva	CS
		Concepción axiomática	CA

Figuras 7 Códigos del Grupo Conceptos (Elaboración propia)

4.4.2.2.2 Códigos del Grupo Dificultades

Grupo	Categoría	Código
Dificultades	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático	
	Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático	I1
	Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).	I2
	Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).	I3
	Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.	I4
	Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.	I5
	Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.	I6
	Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgos, falacias y confusiones.	I10
	Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados por parte de los estudiantes.	I12
	Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar confusiones, falacias y sesgos en su razonamiento probabilístico.	I14
	Sesgos, falacias y confusiones	
	Heurística de la representatividad	F1
	Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes	F2
	Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral	F3
	Falacia de las tasas base	F4
	Enfoque en el resultado aislado	F5
	Sesgo de equiprobabilidad	F6
	Falacia del jugador - Tipo I	F7
	Falacia del jugador- Tipo II	F8
	Confundir probabilidades conjuntas y condicionales	F9
	Falacia de conjunción	F10
	Falacia de la condicional transpuesta	F11
	Falacia del eje de tiempo	F12
	Dificultad en diferenciar azar y suerte	F13
	Concepción errónea del azar	F14

Figuras 8 Códigos del Grupo Dificultades (Elaboración propia)

4.4.2.2.3 Códigos del Grupo Estrategias

Grupo	Categoría		Código
Estrategias	Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático mezcla del lenguaje común con el matemático).	I7
		Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución.	I8
		Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente	I9
		Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes; independencia de eventos).	I11
		Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.	I13
		Conocer los conceptos e ideas estocásticas que toma o no en cuenta el estudiante para la resolución de un problema.	I15
		Conocer los procedimientos matemáticos que realiza el estudiante en su respuesta, para la resolución de un problema matemático.	I16

Figuras 9 Códigos del Grupo Estrategias (Elaboración propia)

4.4.2.2.4 Código Nulo

Grupo	Categoría		Código
Código nulo	No se identifica algún código de los tres grupos.		N

Figuras 10 Código Nulo (Elaboración propia)

4.4.2.3 Matrices de análisis

A partir de la codificación mencionada anteriormente, se consideró pertinente realizar dos matrices de análisis, como herramientas para organizar los resultados obtenidos de los casos. La primera matriz organiza los códigos empleados en la **Parte 1** del cuestionario utilizando dos grupos (Conceptos y Dificultades), se presenta el estado de las respuestas (Correcto, Parcialmente correcto, Incorrecto), luego se realiza un breve comentario de cada situación correspondiente. La segunda matriz, hace referencia particularmente a la codificación de la Parte 2 del cuestionario utilizando dos grupos (Dificultades y Estrategias), enfocándose en las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos de cada situación, igual que en la matriz 1 se

presenta el estado de las respuestas y el comentario correspondiente, en el apartado *ANEXO 2: MATRICES DE ANÁLISIS* se presentan las dos matrices.

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

5.1 Análisis de la investigación

Partiendo de las soluciones del cuestionario de los siete casos, estas se organizan en dos tipos de evidencias, en primer lugar, se presentan las evidencias de la **Parte 1** de cada situación que tiene relación con el conocimiento matemático del profesor en formación, ahora bien, las segundas evidencias se centran en la **Parte 2** de las situaciones, que tienen relación con el conocimiento didáctico de los profesores en formación que participaron en la investigación.

Cabe mencionar que el análisis se realizó en tres momentos, en un primer momento se identifica en la **Parte 1** de las situaciones de cada caso si se respondió correcto, incorrecto o parcialmente correcto además se codifica, con la intención de caracterizar el conocimiento matemático que se puede evidenciar en el cuestionario, en un segundo momento se centra en la caracterización de la **Parte 2**, se realiza el estado de la descripción del razonamiento de los estudiantes hipotéticos y se codifica, finalmente en un tercer momento se perciben las relaciones entre el conocimiento matemático y didáctico de los casos.

5.1.1 Evidencias del Conocimiento Matemático

Cabe considerar, que el objetivo de la investigación no es caracterizar el Conocimiento matemático del profesor en formación. En ese sentido, Acevedo (2020) menciona que describir el conocimiento especializado del profesor, depende desde lo didáctico-pedagógico e igualmente de la matemática misma, en consecuencia, se considera pertinente una breve caracterización de la de **Parte 1** del cuestionario.

Teniendo en cuenta lo anterior, para la caracterización de la **Parte 1**, se realiza en un primer momento el estado de las respuestas, como se evidencia en la Tabla 6. En un segundo momento se utilizan los códigos del grupo de Conceptos y Dificultades, con la intención de

identificar las ideas estocásticas, concepciones de probabilidad y posibles heurísticas o sesgos que se puedan inferir a partir de las respuestas de cada caso. A continuación, se presenta la frecuencia de los códigos de los grupos Conceptos y Dificultades identificados en los siete casos.

	1: caso 1... 20	2: caso 2... 20	3: caso 3... 20	4: caso 4... 20	5: caso 5... 20	6: caso 6... 21	7: caso 7... 20	Totales
CONCEPTOS 15 33	5	4	5	5	4	5	5	33
DIFICULTADES 23 49	7	9	8	7	6	5	7	49
Totales	12	13	13	12	10	10	12	82

Figuras 11 Códigos Parte 1 (Elaborado con ATLAS.ti)

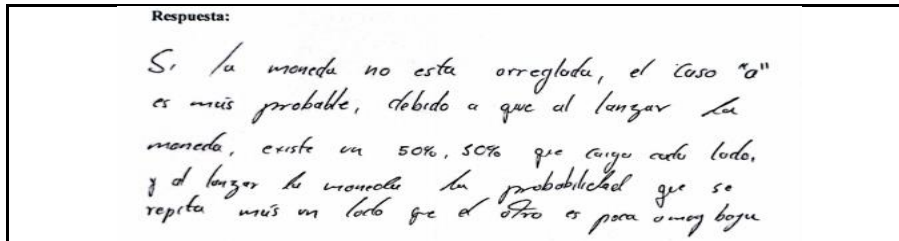
Tabla 6 Desempeños del Cuestionario en la Parte 1

	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades Situación 1	Regla del producto de probabilidades Situación 2	Regla de la adición de probabilidades Situación 3	Interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial Situación 4	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades Situación 5
Caso 1	✓	✓	✓	✓	✓
Caso 2	✗	✓	✗	!	!
Caso 3	✓	✓	✓	✓	✓
Caso 4	✓	✓	✓	✗	✓
Caso 5	!	✗	✗	✓	✓
Caso 6	✓	!	✗	✓	✓
Caso 7	✓	!	✓	✓	✓

✓ Correcta / ! Parcialmente correcta / ✗ Incorrecta.

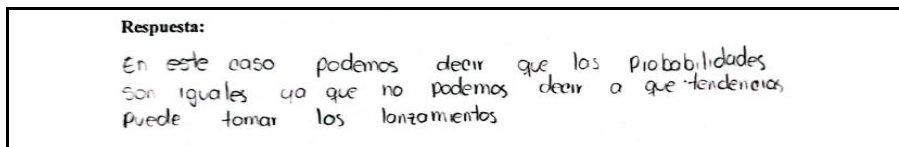
En la Tabla 6 se observan los desempeños de cada caso en la **Parte 1** del cuestionario, se percibe mayor dificultad en la situación 3 que corresponde a la temática adición de probabilidades. Por el contrario, en la Situación 5, se identifican buenos desempeños por parte de los participantes evidenciando un razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades pertinente.

5.1.1.1 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 1.



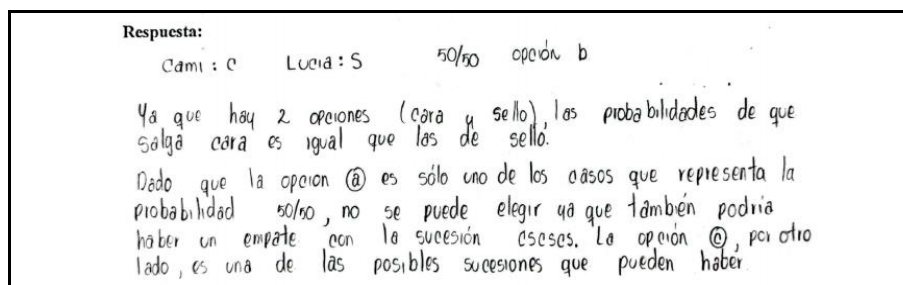
Figuras 12 Caso 2 - Situación 1 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 14), se infiere que el Caso 2 posee en su razonamiento probabilístico el Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral, en el momento que indica que la pequeña muestra debe reproducir todas las características de la población. En consecuencia, este caso posee confusiones en su conocimiento matemático, específicamente en la Ley de los grandes números y por ello se le asigna el código (F3). Bersabe (2018) menciona que este sesgo puede relacionarse con otros sesgos fundamentales como La concepción errónea del azar; La falacia del jugador - tipo I; y La falacia del jugador - tipo II.



Figuras 13 Caso 5 - Situación 1 (P1)

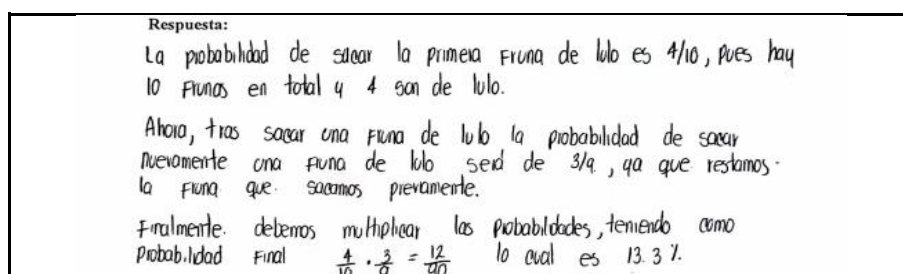
En esta evidencia (Figura 15), se infiere que el Caso 5 responde correctamente. Sin embargo, el argumento que emplea parte de una concepción más intuitiva de la probabilidad no permite deducir si está considerando las propiedades de las secuencias aleatorias, el tamaño de las muestras de las otras dos opciones y la Ley de los grandes números. De manera que, se indica con el código (CI).



Figuras 14 Caso 6 - Situación 1 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 16), se infiere que el Caso 6 toma en consideración las propiedades de las secuencias aleatorias, la equiprobabilidad del evento, además de indicar que las otras opciones son casos que pueden ocurrir. Por consiguiente, este caso muestra evidencias de un conocimiento matemático en relación con la probabilidad simple, particularmente en la independencia de eventos, combinatoria y modelos de urnas. Por lo tanto, se indica con los códigos (IE4 IE5 IE6).

5.1.1.2 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 2.



Figuras 15 Caso 1 - Situación 2 (P1)

En esta evidencia (Figura 17), se infiere que el Caso 1, toma en consideración la concepción clásica de probabilidad, precisando la regla de Laplace, la independencia de estos, además de considerar cambio en el espacio muestral de la situación al realizar una segunda extracción, lo cual le permite utilizar -correctamente- la regla del producto. En ese sentido, este caso muestra evidencias de un conocimiento matemático en relación con la

probabilidad simple y compuesta. Debido a ello, se indica con los códigos (IE2 IE4 IE6 IE7 / CC).

Respuesta:
La probabilidad de que salga de lulo es de $4/10$, ya que debemos sumar el total de productos y luego tener la cantidad probable de frutas de lulo.

Figuras 16 Caso 5 - Situación 2 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 18), se infiere que el Caso 5 parte de una concepción clásica de la probabilidad, calculando correctamente la probabilidad de la primera extracción, sin embargo, ignora las condiciones de la segunda extracción y el cambio en el espacio muestral. Específicamente, no considera la regla del producto, y por ello se indica con los códigos (CC). Por consiguiente, se infiere que este caso tiene limitaciones en su conocimiento matemático en probabilidad simple y compuesta.

Respuesta:

	FRUTAS SABOR CEREZA	FRUTAS SABOR LULO	
	6	4	= 10 Frutas
			↓
			5 parejas

FF
FL = LF ← el orden no importa
LL

Hay 4 de lulo, por lo que máximo 2 personas podrían recibir 2 frutas de lulo; como hay 6 frutas de fresa, se entregarán a 3 personas. Es decir que a 5 personas se les entregan dulces, y sólo 2 pueden recibir ambos de lulo, la probabilidad de que los dos dulces que se entregan sean de lulo

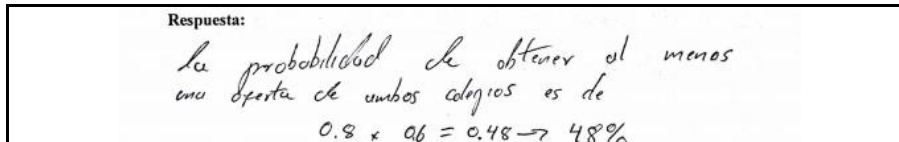
$p(lulo) = 2/5 = 0,4 = 40\%$

Figuras 17 Caso 6 - Situación 2 (P1)

En esta evidencia (Figura 19), se infiere que el Caso 6 realiza una interpretación del enunciado particular, reparte las frutas en parejas, a partir de esta idea calcula la probabilidad que dos parejas de niños le correspondan dos frutas de lulo. Mostrando así una confusión en la interpretación tanto del enunciado como de la pregunta. A raíz de esta incorrecta interpretación aplica la regla de Laplace. Debido a ello, a esta respuesta se le asignan los

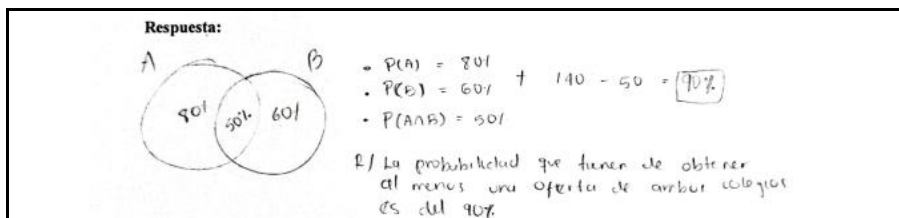
códigos (IE2 / CC). En conclusión, se infiere que este caso tiene limitaciones en la interpretación de enunciados en probabilidad simple y compuesta.

5.1.1.3 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 3.



Figuras 18 Caso 2 - Situación 3 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 20), se infiere que el Caso 2 da cuenta en su razonamiento confusiones para interpretar el procedimiento adecuado, en vista que utiliza la regla del producto y no la regla de la adición de probabilidades. Esto permite indicar que este caso posee confusiones en su conocimiento matemático, específicamente en Regla de adición. Cabe hacer la aclaración que realiza correctamente el producto de las probabilidades, por ello se asignan los códigos (IE4 / CA).



Figuras 19 Caso 4 - Situación 3 (P1)

En esta evidencia (Figura 21), se infiere que el Caso 4 mediante un diagrama de Venn logra visualizar las probabilidades, luego organiza las que presenta el enunciado necesarias para la regla de la adición. Por lo tanto, se afirma que el caso muestra evidencias de un conocimiento matemático en probabilidad simple y compuesta, particularmente en el razonamiento combinatorio y regla de adición de probabilidades, en función de lo planteado, se indica con los códigos (IE3 IE6 / CA).

Respuesta:

En esta situación la probabilidad es del 50% ya que tiene muchas posibilidades de que la llamen de ambos colegas

Figuras 20 Caso 5 – Situación 3 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 22), se infiere que el Caso 5 responde partiendo de una concepción intuitiva, la cual le lleva a afirmar que ambos eventos son altamente probables. Sin embargo, su razonamiento probabilístico da cuentas de la heurística de representatividad, puesto que evalúa la probabilidad según el grado en que es representativo en relación con los porcentajes del enunciado, produciendo una confianza indebida. Por tal razón, se afirma que el caso posee confusiones en su conocimiento matemático en probabilidad simple y compuesta, por lo tanto, se indica con el código (F1).

5.1.1.4 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 4.

Respuesta:

La "C" es la interpretación más común cuando se habla de medicamentos.

Figuras 21 Caso 2 – Situación 4 (P1)

En esta evidencia (Figura 23), se infiere que el Caso 2, toma en consideración la afirmación que para él es más “común” cuando se habla de medicamentos, dejando a un lado el enfoque frecuencial de la probabilidad. En consecuencia, este caso posee confusiones en su conocimiento matemático, específicamente en la interpretación del porcentaje en un contexto determinado, así se indica con los códigos (IE1 / CS).

Respuesta:

El lo que da a entender la advertencia es que a pesar de que se puede usar el medicamento es probable, aunque sea poco que irite la piel, por ello debería visitar al médico.

Figuras 22 Caso 4 – Situación 4 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 24), se infiere que el Caso 4 responde tomando en cuenta una concepción intuitiva de la probabilidad dejando de lado la concepción clásica y el

significado del porcentaje, evidenciando en su razonamiento probabilístico el Sesgo en el resultado aislado, puesto que su intención no es llegar a la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo (Díaz, 2003). Por esta razón, se identifica que el caso posee confusiones en su conocimiento matemático, específicamente en que la interpretación de forma no probabilística, por lo tanto, se indica con los códigos (IE1 / CI / F5).

Respuesta:
 Dado a que es un 15 por ciento, entonces es 15 de 100, al al hablar de personas serían 15 personas de 100.
 Pese a que la @ puede considerarse cierta, el enunciado es puntual y para población en general.
 Y la opción b) no se puede deducir del enunciado, ya que habla de la probabilidad de que un suceso pase, más no de la cantidad de zona que se va a afectar.

Figuras 23 Caso 6 – Situación 4 (P1)

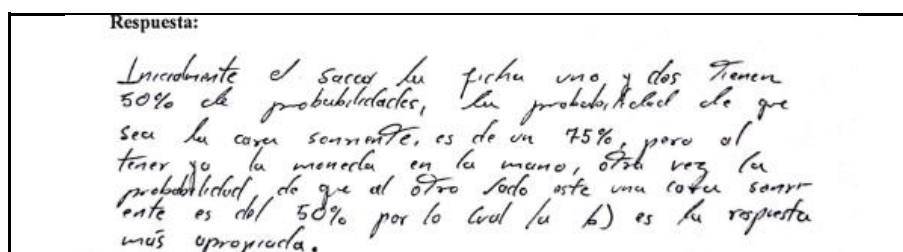
En esta evidencia (Figura 25), se infiere que el Caso 6 responde indicando el significado de porcentaje relacionándolo con el contexto propio de la situación, luego da las razones por las que se descartan las otras dos opciones conectándolo con el enunciado de la situación. De modo que, este caso muestra evidencias de un conocimiento matemático sólido en probabilidad simple y compuesta, particularmente en la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial, por lo tanto, se indica su respuesta con los códigos (IE1 / CC).

5.1.1.5 Análisis del cuestionario Parte 1: Situación 5.

Respuesta:
 Si al sacar la ficha obtengo la cara sonriendo, tengo dos cosas posibles:
 - Que al voltearla sea la ficha 1 y por tanto la otra cara sea una cara sonriendo.
 - Que al voltearla sea la ficha 2 y por tanto la otra cara sea un corazón.
 Como ambos eventos son igual de probables, la respuesta debe ser la b)

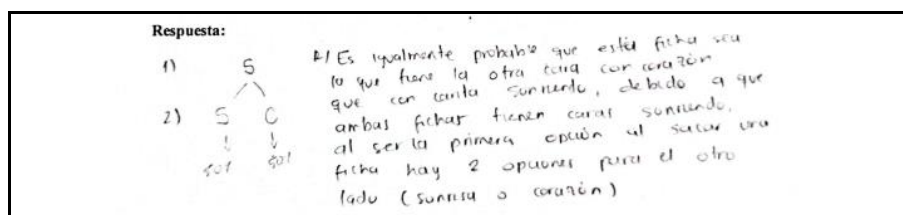
Figuras 24 Caso 1 – Situación 5 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 26), se infiere que el Caso 1 responde describiendo los dos casos posibles del próximo lanzamiento, siendo esta información suficiente para elegir la opción correcta. Por lo tanto, este caso muestra evidencias de un conocimiento matemático en probabilidad simple y compuesta, particularmente identificando eventos equiprobables, combinatoria en modelos de urnas, por esta razón, se indica con los códigos (IE5 IE6 IE7).



Figuras 25 Caso 2 – Situación 5 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 27), se infiere que el Caso 2 responde indicando primeramente la probabilidad del primer evento simple. Posteriormente, asigna la probabilidad del segundo evento, sin embargo, no reconoce todos los elementos de la situación. De esta manera, este caso muestra evidencias de un conocimiento matemático en probabilidad simple y compuesta, sin embargo, puede llegar a distraerse con los datos de la situación, en consecuencia, se indica con los códigos (IE3 IE5 IE6 / IE7).



Figuras 26 Caso 4 – Situación 5 (P1)

En la evidencia anterior (Figura 28), se infiere que el Caso 4 utiliza un diagrama de árbol para visualizar las dos opciones, a partir de esto intuitivamente menciona la equidistribución

del evento. En ese sentido, este caso muestra evidencias de un conocimiento matemático en probabilidad simple y compuesta, en particular, equidistribución, combinatoria, modelos de urnas y simulación. Por lo tanto, se indica con los códigos (IE5 IE6 / IE7).

5.1.2 Evidencias del Conocimiento Didáctico

Teniendo en cuenta el objetivo de la investigación, para analizar el KFLM de los profesores en formación que se evidenció en sus respuestas específicamente de la Parte 2 de cuestionario de conocimientos didácticos. En relación con esto, se realizó el balance del estado de cada respuesta de los estudiantes hipotéticos, para continuar con la codificación, junto con las matrices de análisis y el software ATLAS.ti. A continuación, se presenta la frecuencia de los códigos de los grupos Dificultades, Estrategias y el código nulo identificados en los siete casos.

	1: caso 1... 20	2: caso 2... 20	3: caso 3... 20	4: caso 4... 20	5: caso 5... 20	6: caso 6... 21	7: caso 7... 20	Totales
DIFICULTADES 23 49	7	9	8	7	6	5	7	49
ESTRATEGIAS 7 92	14	14	15	10	11	14	14	92
NULO 1 2					1	1		2
Totales	21	23	23	17	18	20	21	143

Figuras 27 Códigos Parte 2 (Elaborado con ATLAS.ti)

5.1.2.1 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 1.

Ahora bien, para la caracterización de la **Parte 2**, se realiza en un primeramente el estado de las respuestas en relación con las tres respuestas de estudiantes hipotéticos, como se evidencia en las Tablas (7, 8, 9, 10 y 11). En un segundo momento se utilizan los códigos del grupo de Dificultades y Estrategias, con la intención de caracterizar el conocimiento didáctico de los casos en relación con la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

Tabla 7 Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 1.

	<i>E1 (Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral)</i>	<i>E2 (Respuesta correcta)</i>	<i>E3 (Concepción errónea del azar)</i>
<i>Caso 1</i>	✓	✓	✓
<i>Caso 2</i>	✗	!	✗
<i>Caso 3</i>	✗	!	✓
<i>Caso 4</i>	!	!	✓
<i>Caso 5</i>	!	!	!
<i>Caso 6</i>	✓	!	✓
<i>Caso 7</i>	✓	✓	✓

✓ Correcta / ! Parcialmente correcta / ✗ Incorrecta.

Mediante la Tabla 7, se logra percibir el desempeño de los siete casos en la **Parte 2** de la primera situación. Cabe mencionar, que en la respuesta E1, los casos 1,6 y 7 describieron correctamente el razonamiento empleado por el estudiante. En la respuesta E2 se logran percibir varias confusiones dejando solo el caso 1 y 7 con argumentos correctos. Finalmente, en la respuesta de E3 solamente el caso 2 respondió incorrectamente. A continuación, se presentan algunas evidencias relevantes de la situación 1 del cuestionario.

S1E1: El estudiante consideró equiprobabilidad en los eventos, pues respondió con igual número de posibilidades para ambos sucesos, lo cual no es correcto pues cada lanzamiento es independiente del otro.

Figuras 28 Caso 1- E1 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 30), se deduce que el *Caso 1* reconoce en la respuesta la dificultad que presenta el estudiante identificando particularmente el concepto que causó confusión (Equiprobabilidad) expresando implícitamente el Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral. El *Caso 1* muestra su conocimiento didáctico en la interpretación de dificultades, sesgos o confusiones en conceptos o ideas estocásticas, como resultado, se reconocen los códigos (I1 I2 / I7 I15).

S1E2: Considero su razonamiento es basado en los sucesos de la vida real, donde para muestras pequeñas no se cumple que no se ve una implicación clara, muy buena la organización del estudiante.

Figuras 29 Caso 2 - E2 (P2)

En esta evidencia (Figura 31), se infiere que el Caso 2 reconoce que las experiencias previas del estudiante contribuyen en el razonamiento de este, sin embargo, considera que las afirmaciones del estudiante hipotético son válidas. También describen el posible procedimiento que lo condujo a esa respuesta, sin identificar las propiedades de las series aleatorias, esto se relaciona con el sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral que presenta el Caso 2 en la Parte 1. En ese sentido, este caso muestra limitaciones en su conocimiento matemático y también en su conocimiento didáctico, por lo tanto, se identifican los códigos (I13 I16).

S1E3: pero a que lo que dice del azar tiene sentido, no es justificación válida ni suficiente para su respuesta, es como si considerara que la opción (a) al tener "un patrón" no fuera una posibilidad y solo se limita a elegir una sucesión y no ver las otras posibilidades.

Figuras 30 Caso 6 - E3 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 32), se deduce que el Caso 6 identifica intuitivamente la concepción errónea del azar en el razonamiento del estudiante. Partiendo de esto, el caso reconoce los detalles que pudieron desviar la atención y confunden al estudiante hipotético (concepto de azar). De esta manera, se afirma que el caso interpreta el razonamiento que condujo al estudiante a la respuesta, por esa razón, se indican los códigos (I2 I3 / I7 18). En función de lo planteado, evidencia un conocimiento didáctico en probabilidad simple y compuesta sensible a percatar la confusión con el concepto de azar que presenta E3.

SIE3: E2 maneja un razonamiento del azar considerando patrones irregulares, que no serían posibles de modelar ni abstraer dado como resultado escenarios aleatorios sin ningún patrón. Esto podría ser debido a que E3 considera la aleatoriedad como eventos sin un comportamiento estable, lo que lleva a pensar que cualquier secuencia es posible sin considerar que por cada lanzamiento existe el 50% de probabilidad de que salga cara, o el 50% de probabilidad de que salga sello.

Figuras 31 Caso 7 – E1 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 33), se deduce que el Caso 7 identifica la concepción del estudiante sobre el azar, que posiblemente toma en cuenta el estudiante que lo lleva a una confusión relacionando esto con patrones sin ningún patrón, evidencia conocimiento didáctico en probabilidad simple y compuesta cuando percibe esta confusión a partir de la respuesta de E3. Al mismo tiempo, el caso menciona la propiedad de equidistribución de cada lanzamiento que el estudiante no considero. A partir de lo anterior se consideran los códigos (I2, I4, /I7 I8 I15).

5.1.2.2 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 2

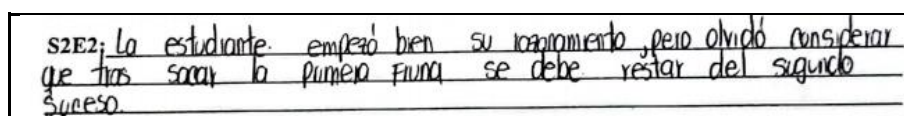
Tabla 8 Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 2.

	E1 (Enfoque en el resultado aislado)	E2 (Razonamiento erróneo)	E3 (Respuesta correcta)
Caso 1	✓	✓	✓
Caso 2	!	✓	✓
Caso 3	✓	✓	!
Caso 4	✗	✓	✓
Caso 5	!	✗	!
Caso 6	✗	✓	✓
Caso 7	!	✓	✓

✓ Correcta / ! Parcialmente correcta / ✗ Incorrecta.

Mediante la Tabla 8, se logra percibir el desempeño de los siete casos en la **Parte 2** de la segunda situación. Cabe mencionar que en la respuesta E1 se percibieron algunas

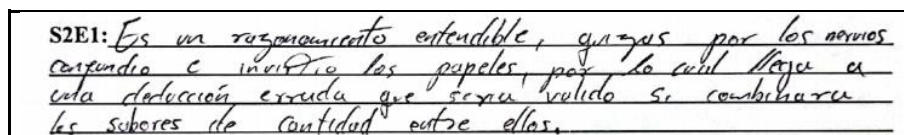
confusiones para identificar el enfoque en el resultado aislado. En la respuesta de E2 la mayoría logró identificar el razonamiento erróneo del estudiante pues solo el caso 5 respondió incorrectamente, se finaliza, con la respuesta de E3, solo se identificaron dos casos parcialmente correctos justificando la respuesta correcta. Seguidamente se presentan algunas evidencias relevantes de la Situación 2 del cuestionario.



S2E2: La estudiante empezó bien su razonamiento, pero olvidó considerar que tras sacar la primera fruta se debe restar del segundo suceso.

Figuras 32 Caso 1 – E2 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 34), se deduce que el Caso 1 idéntica la confusión que pudo presentar el E2, lo que se mostró en el error al calcular la probabilidad. En función de lo planteado, evidencia un conocimiento didáctico en probabilidad simple y compuesta, identificando que idea condujo a desviar la atención del estudiante pasando desapercibido la segunda extracción y como esta cambia considerablemente la probabilidad, por lo tanto, se indica con los códigos (I4 / I7 I8).



S2E1: Es un razonamiento entendible, quizás por los nervios confundió e invirtió los papeles, por lo cual llega a una deducción errada que sería válida si cambiáramos los sabores de cantidad entre ellas.

Figuras 33 Caso 2 – E1 (P2)

En esta evidencia (Figura 35), se infiere que el Caso 2 reconoce que E1 presenta una confusión, sin embargo, la justificación del caso no toma en cuenta alguna relación con el sesgo del enfoque en el resultado aislado, por el contrario, se podría percibir que si se invirtieran los sabores como el sugiere, este caso presentaría este sesgo, además de ignorar lo que se pregunta. Partiendo de lo anterior, se infiere que posee limitaciones en su conocimiento didáctico al no identificar el sesgo de E1. Seguidamente se consideran los códigos (I5 / I7 I8).

S2E1: no sabría decir cómo dedujo que hay mayor probabilidad de que la próxima carta en sacar sea de Lelo

Figuras 34 Caso 6 – E1 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 36), se deduce que el Caso 6 presenta una confusión en la interpretación tanto del enunciado como de la pregunta. En este sentido este caso no identifica el sesgo del enfoque en el resultado aislado que presenta E1, por el contrario no deduce el razonamiento que emplea este. Por esta razón no se identifica algún código de los tres grupos y se emplea el código nulo (N).

S2E1: Existe una confusión con respecto a la figura con mayor probabilidad en relación con la cantidad individual y cantidad total.

Figuras 35 Caso 7 - E1 (P2)

En esta evidencia (Figura 37), se infiere que el Caso 7 considera que el estudiante confundió las cantidades de casos favorables y casos totales, sin embargo, no toma en cuenta que la situación 2 pregunta por la probabilidad no por la predicción de ocurrencia del ensayo. De igual forma, aunque el caso 7 identifica que E1 manifiesta una confusión, se considera con limitaciones en el conocimiento didáctico relacionado con su conocimiento matemático particularmente con su respuesta en la **Parte 1**, por tal razón, se identifica los códigos (I2 I3 I4).

5.1.2.3 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 3

Tabla 9 Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 3.

	E1 (Respuesta correcta)	E2 (Sesgo de equiprobabilidad)	E3 (Razonamiento erróneo)
Caso 1	✓	✓	!
Caso 2	!	!	✗
Caso 3	✓	✓	✓
Caso 4	✓	!	!
Caso 5	!	✗	✗
Caso 6	✓	!	!
Caso 7	!	!	✓

✓ Correcta / ! Parcialmente correcta / ✗ Incorrecta.

Mediante la Tabla 9, se logra percibir el desempeño de los siete casos en la **Parte 2** de la situación 3. Cabe resaltar, que en la respuesta E1 la mayoría de los casos identificaron que era la respuesta correcta, sin embargo, algunos no explican el razonamiento del estudiante. En la respuesta E2 solo el Caso 5 respondió incorrectamente relacionado con la confusión que presenta en la **Parte 1**, ahora bien, en la respuesta E3 algunos casos no tienen presente la necesidad de la regla de la adición. Posteriormente, se presentan algunas evidencias relevantes de la Situación 3 del cuestionario.

S3E3: Considero los eventos independientes y tomo un camino viable, y empleo un razonamiento más matemático que probabilístico

Figuras 36 Caso 2 – E3 (P2)

En esta evidencia (Figura 38), se infiere que el Caso 2 indica las probabilidades que el estudiante toma en cuenta para realizar el cálculo, se podría inferir que considera que en ese razonamiento el estudiante responde de forma más mecánica, sin embargo, no se percata que el estudiante no utiliza la regla de adición de probabilidades esto se relaciona con el error que el caso presenta en la **Parte 1**. A partir de esto, se considera que el Caso 2 tiene limitaciones en su conocimiento matemático trasladándolos a su conocimiento didáctico a pesar de

identificar que E3 emplea en su razonamiento cálculos de forma mecánica, por lo tanto, se identifica el código (I9).

S3E1: E1 reconoce la definición de unión de probabilidades, así mismo identifica en el enunciado los eventos y las relaciones entre ellos.

Figuras 37 Caso 3 – E1 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 39), se deduce que el Caso 3 identifica los conceptos que el estudiante tuvo en cuenta para responder correctamente. De esta forma, se percibe que el caso emplea su conocimiento didáctico para interpretar correctamente el razonamiento de E1, tanto sus ideas como los conceptos, por ello se asignan los códigos (I4 / I7 I15).

S3E3: Calcular el promedio de ambas probabilidades, deja de un lado la probabilidad que la contratan en ambos colegios al tiempo por tanto se obtiene la probabilidad en uno de que ambos casos tuvieran la misma probabilidad

Figuras 38 Caso 4 – E3 (P2)

En esta evidencia (Figura 40), se infiere que el Caso 4 explica en sus propias palabras las razones por las que no considera que el razonamiento que emplea el estudiante es válido, sin embargo, no menciona que razones que considera que fueran las que llevaron al estudiante a razonar de esa manera. En consecuencia, se identificó el código (I15).

S3E3: En este caso teniendo en cuenta los porcentajes de la obra es muy probable que sea contratada en algún colegio

Figuras 39 Caso 5 – E3 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 41), se deduce que el Caso 5 concluye brevemente que la respuesta de E3 es correcta, sin percatarse de la fórmula de la adición de probabilidades. Mostrando así, limitaciones en su conocimiento didáctico en relación con sus limitaciones en su conocimiento matemático que se evidenció cuando el caso 5 responde la **Parte 1**. Por esta razón, se asignó el código (F5).

5.1.2.4 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 4

Tabla 10 Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 4.

	<i>E1</i> (Razonamiento erróneo)	<i>E2</i> (Respuesta correcta)	<i>E3</i> (Dificultad en diferenciar azar y suerte)
<i>Caso 1</i>	✓	✓	✓
<i>Caso 2</i>	!	✓	✗
<i>Caso 3</i>	✓	✓	✓
<i>Caso 4</i>	!	✗	✗
<i>Caso 5</i>	✓	✓	!
<i>Caso 6</i>	✓	✓	!
<i>Caso 7</i>	✓	✓	✗

✓ Correcta / ! Parcialmente correcta / ✗ Incorrecta.

Mediante la Tabla 10, se logra percibir el desempeño de los siete casos en la **Parte 2** de la cuarta situación. Cabe mencionar, que en la respuesta E1 dos casos responden parcialmente correcto cuando no especifican que idea o concepto está confundiendo el estudiante. En la respuesta E2 la mayoría de los casos identifican la respuesta correcta, a excepción del caso 4 que considera que el razonamiento de E2 es incorrecto, en particular este caso tiene limitaciones en su conocimiento matemático que se ven trasladado en esta segunda parte en las tres respuestas de los estudiantes hipotéticos, ahora bien, en la respuesta E3 se muestra limitaciones en identificar la dificultad en diferenciar azar y suerte del estudiante. A continuación, se presentan algunas evidencias relevantes de la Situación 4 del cuestionario.

S4E1: El estudiante tuvo una mala interpretación del enunciado, pues no mencionan que el 15% se refiere al cuero cabelludo, sino al porcentaje de aparición de la irritación.

Figuras 40 Caso 1 – E1 (P2)

En esta evidencia (Figura 42), se infiere que el Caso 1 percibe la confusión que pudo presentar E1 al interpretar el enunciado, mostrando así este caso su conocimiento didáctico en reconocer que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad puede generar confusiones en las interpretaciones. Por lo tanto, se asigna con los códigos (I12 / I7).

S4E3: E3 tiene una percepción de la probabilidad en términos de suerte, y no la reconoce como la relación entre casos posibles y totales.

Figuras 41 Caso 3 – E3 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 43), se deduce que el Caso 3 concluye implícitamente la dificultad en diferenciar azar y suerte que presenta el estudiante. En este sentido, este caso muestra evidencias de su conocimiento didáctico para reconocer que concepción desvía la atención de E3. En consecuencia, se indica con los códigos (I7 I8 I15).

S4E1: El 15% no hace referencia al uso cabelludo, sino a la probabilidad de imitarse al momento de aplicar el medicamento, así que la interpretación no es acertada.

Figuras 42 Caso 4 -E1 (P2)

En esta evidencia (Figura 44), se infiere que el Caso 4 identifica que en el razonamiento del estudiante se puede percibir una confusión, sin embargo, este mismo caso en la **Parte 1** tiene limitaciones en su conocimiento matemático específicamente en el razonamiento proporcional y como se relaciona con la probabilidad. A partir de ello, se infiere que el Caso 4 a pesar de sus limitaciones en su conocimiento matemático, logra con ayuda de la justificación de E1 distinguir la dificultad del estudiante para reconocer la equivalencia de 15% en la resolución de problemas. En relación con esto, solo se asignó el código (I6).

S4E3: E3 maneja de manera general la noción de variación.

Figuras 43 Caso 7 – E3 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 45), se deduce que el Caso 7 identifica el concepto que manejo el estudiante haciendo énfasis que fue de manera superficial, sin embargo, se puede inferir que el Caso 7 considera que la respuesta de E3 no es incorrecta, de esta forma muestra limitaciones en su conocimiento didáctico. Por esta razón, solo de asignó el código (I15).

5.1.2.5 Análisis del cuestionario Parte 2: Situación 5

Tabla 11 Desempeños del Cuestionario Parte 2- Situación 5.

	<i>E1</i> (Respuesta correcta)	<i>E2</i> (Razonamiento erróneo)	<i>E3</i> (Sesgo de equiprobabilidad y Concepción errónea del azar)
<i>Caso 1</i>	✓	✓	✓
<i>Caso 2</i>	!	✗	!
<i>Caso 3</i>	✓	✓	✓
<i>Caso 4</i>	✓	✓	✓
<i>Caso 5</i>	!	!	✗
<i>Caso 6</i>	!	!	!
<i>Caso 7</i>	✓	!	✓

✓ Correcta / ! Parcialmente correcta / ✗ Incorrecta.

Mediante la Tabla 11, se logra percibir el desempeño de los siete casos en la **Parte 2** de la quinta situación. Cabe mencionar, que en la respuesta E1 todos los casos identificaron que era la respuesta correcta sin embargo algunos no justificaron los factores didácticos. En la respuesta E2 solo el caso 2 respondió incorrectamente, en particular este caso considera que todas las respuestas de los estudiantes hipotéticos son correctas, finalmente en la respuesta E3 solo el caso 5 responde incorrectamente mostrando sesgo de equiprobabilidad y concepción errónea del azar. Seguidamente se presentan algunas evidencias relevantes de la Situación 5 del cuestionario.

SSE3: El razonamiento es válido en la medida que tienen la probabilidad inicial y la reserva para tener los asos, solo tienen que buscar como hacer que el o los estudiantes presenten más atención, debido a que no ocurren cambios.

Figuras 44 Caso 2 – E3 (P2)

En esta evidencia (Figura 46), se infiere que el Caso 2 considera que este razonamiento también es válido junto con las otras dos respuestas de estudiantes hipotéticos, sin considerar que E3 presenta el Sesgo de equiprobabilidad y Concepción errónea del azar, sin embargo, precisa que el estudiante debe tener más atención, se podría percibir que implícitamente considera que el estudiante tuvo algún error. En consecuencia, el Caso 2 muestra limitaciones en su conocimiento didáctico por esa razón, se asignan los códigos (I16 / F6 F14).

SSE1: E1 reconoce la independencia de cada evento al sacar la ficha y cada ficha cuenta con la misma probabilidad de que en la primera extracción salga una cara sonriente.

Figuras 45 Caso 3 – E1 (P2)

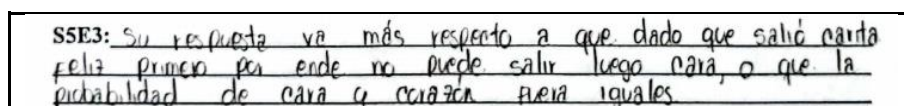
En la evidencia anterior (Figura 47), se deduce que el Caso 3 identifica los conceptos que E1 tuvo en cuenta para responder, mostrando así su conocimiento didáctico para interpretar el razonamiento de E1 identificando el concepto central que toma en consideración, percibiendo el procedimiento que realizó. Por tal razón, se identifica los códigos (I7 I15 I16).

SSE3: esto por este evento es la más probable para el evento que está planteado.

Figuras 46 Caso 5 – E3 (P2)

En esta evidencia (Figura 48), se infiere que el Caso 5 considera que el razonamiento del estudiante es válido, sin embargo, pasa desapercibido el Sesgo de equiprobabilidad y Concepción errónea del azar que este presenta, se infiere que también presenta este sesgo y esta concepción errónea, cabe aclarar que teniendo en cuenta las respuestas que el caso 5

presenta de E1 y E2, se puede deducir que no se siente seguro de sus argumentaciones. Este caso muestra que tiene limitaciones matemáticas que se trasladan a su conocimiento didáctico. A partir de lo anterior se consideran los códigos (F6 F14).



S5E3: Su respuesta va más respecto a que dado que salió carta feliz primero por ende no puede salir luego cara, o que la probabilidad de cara y cruz son fuera iguales.

Figuras 47 Caso 6 – E3 (P2)

En la evidencia anterior (Figura 49), se deduce que el Caso 6 expresa en sus palabras el razonamiento del estudiante, sin embargo, no se percata del Sesgo de equiprobabilidad y Concepción errónea del azar que presenta E3. En consecuencia, el caso 6 muestra algunas limitaciones para percibir sesgos o confusiones, por lo tanto, limitaciones en su conocimiento didáctico, sin embargo, se asignan los códigos (I15 I16).

5.2 Resultados de la investigación

Partiendo de las observaciones de los resultados del cuestionario, se pudo identificar dificultades que presentan los profesores en formación para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta, sin embargo, también se pudieron identificar conocimientos pertinentes que guardan relación con el subdominio (KFLM) del MTSK. Seguidamente, se presentan los resultados de la investigación, se divide en tres secciones: Resultados a partir de la perspectiva Top-Down, Presentación y discusión de las categorías teóricas emergentes (indicadores de conocimientos) y finalmente los patrones de los códigos.

5.2.1 Resultados a partir de la perspectiva Top-Down

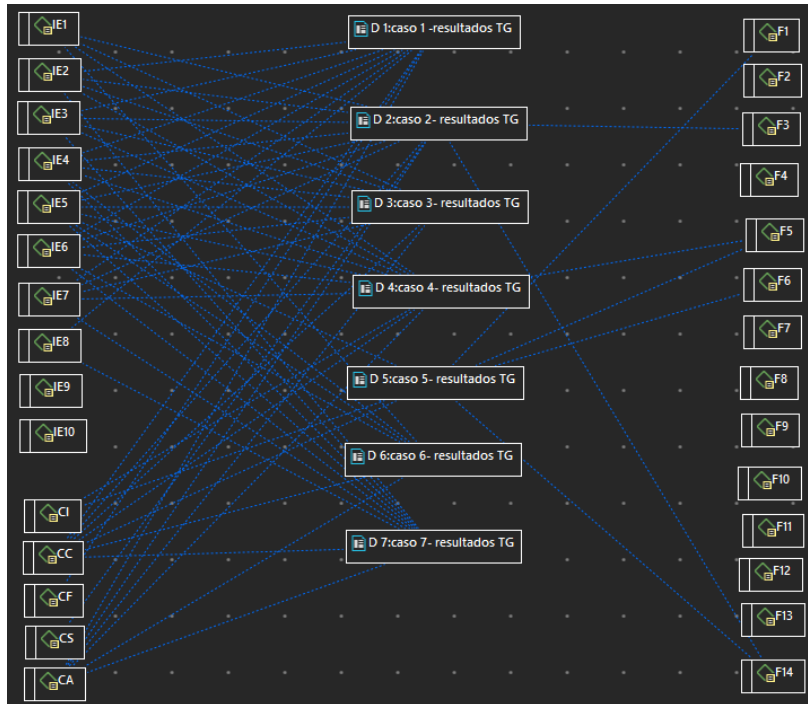
A partir de la perspectiva Top-Down se tiene en cuenta como referente las ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), Concepciones sobre probabilidad (Batanero y Sánchez, 2005; Burbano, 2015), Heurísticas, sesgos y falacias en probabilidad (Bersabe, 2018; Batanero, Contreras y Díaz, 2012; Serrano, Batanero y Cañizares, 1998; Díaz, 2003) y

finalmente los indicadores de análisis del subdominio (KFLM) propuestos tanto por Sosa et al. (2016) como por León (2020). Cabe aclarar, en esta perspectiva se contempla el desdoblamiento por parte de referentes permitiendo identificar nuevas categorías teóricas propias de los datos que surjan a lo largo de la investigación.

5.2.1.1 Parte 1 del Cuestionario didáctico

En la **Parte 1** del cuestionario los casos resolvieron las situaciones problema, en consecuencia, se percibieron algunas limitaciones en su conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta, del mismo modo, se perciben algunos códigos frecuentes que ayudan a caracterizar el conocimiento matemático de los casos.

Partiendo de las dos categorías del grupo Conceptos y solo una categoría del grupo de Dificultades, se elabora mediante el software de ATLAS.ti la (Figura 50), una red que evidencia la relación entre los códigos de la **Parte 1** del cuestionario y los siete casos. Particularmente en la categoría *Ideas estocásticas fundamentales* resaltan los códigos IE9 (Las leyes de los grandes números.) junto con el IE10 (Muestreo), pues no se percibieron en las respuestas de los Casos sin embargo el resto de las ideas fundamentales sí. En la segunda categoría que es *Concepciones sobre probabilidad* se logran identificar las cinco concepciones y finalmente, en el segundo grupo Dificultades especialmente en la segunda categoría *Sesgos, falacias y confusiones* se identificó cinco códigos, F1 (Heurística de la representatividad), F3 (Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral), F5 (Enfoque en el resultado aislado), F6 (Sesgo de equiprobabilidad) y F14 (Concepción errónea del azar).



Figuras 48 Red Parte 1 (Elaborado con ATLAS.ti)

Mediante la codificación de la **Parte 1**, se realiza una tabla con los códigos presentada en el apartado ANEXO 4: CÓDIGOS DE LOS CASOS, se puede percibir los códigos que se repiten por situaciones, estos están relacionados con la categoría temática de cada situación. Partiendo de lo anterior, se presenta la Tabla 12.

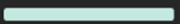
Tabla 12 Códigos frecuentes por situación

Situación	Códigos	Descripción de los códigos	Categoría temática
S1	IE4 IE5	Independencia y regla del producto - Equidistribución y simetría.	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades.
S2	IE2 IE4 IE6 IE7 / CC	El espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades - Independencia y regla del producto - Combinatoria - Modelos de urnas y simulación -Concepción clásica	Regla del producto de probabilidades.

S3	IE3 IE6 / CA	Regla de adición de probabilidades - Combinatoria - Concepción axiomática	Regla de la adición de probabilidades.
S4	IE1	La probabilidad como normalización de nuestras creencias.	Interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial.
S5	IE5 IE6 IE7	Equidistribución y simetría - Combinatoria - Modelos de urnas y simulación.	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades.

Se logra percibir que las dos concepciones sobre probabilidad más frecuentes fueron la clásica (CC) y la axiomática (CA), un aspecto relevante es que los casos siendo profesores en formación, perciban la probabilidad simple y compuesta desde un enfoque formal, con bases axiomáticas, teniendo en cuenta la regla de Laplace, apartándose de una concepción intuitiva, pues Batanero y Sánchez (2005) afirman que esta se manifiesta en personas que no poseen formación en probabilidad y son víctimas de sus creencias personales, sin embargo, hubieron algunas excepciones especialmente en las respuestas de los casos en la situación 4 y en las respuestas del Caso 5, donde se indican la concepción subjetiva (CS) e intuitiva (CI).

Ahora bien, se logra percibir una relación estrecha entre los códigos que se repiten por situaciones y la categoría temática respectivamente, en particular, en la (Figura 51) se resaltan que las tres ideas estocásticas fundamentales con más frecuencia en los resultados fueron: IE6 (Combinatoria.), IE5 (Equidistribución y simetría.) y por último IE4 (Independencia y regla del producto.). Cabe mencionar que a pesar que dentro de estos códigos esta la Regla del producto, en los resultados de los casos tanto en la Situación 2 (Regla del producto de probabilidades) como la Situación 3 (Regla de la adición de probabilidades), se percibió confusión con estas dos reglas, en algunos casos no interpretaban correctamente el enunciado de la situación llevándolos a confundir cuál de las dos reglas era necesaria para cada situación, en otros casos no tenían en consideración la segunda extracción.

	Nombre	Enraizamiento	Densidad	Grupos
○	I7~		81	0 [ESTRATEGIAS]
○	I15~		57	0 [ESTRATEGIAS]
○	I4~		26	0 [DIFICULTADES]
○	I8~		23	0 [ESTRATEGIAS]
○	I16~		15	0 [ESTRATEGIAS]
○	IE6~		14	0 [CONCEPTOS]
○	CC~		12	0 [CONCEPTOS]
○	IE5~		12	0 [CONCEPTOS]
○	I2~		11	0 [DIFICULTADES]
○	IE4~		11	0 [CONCEPTOS]

Figuras 49 Los 10 códigos más frecuentes (Elaborado con ATLAS.ti)

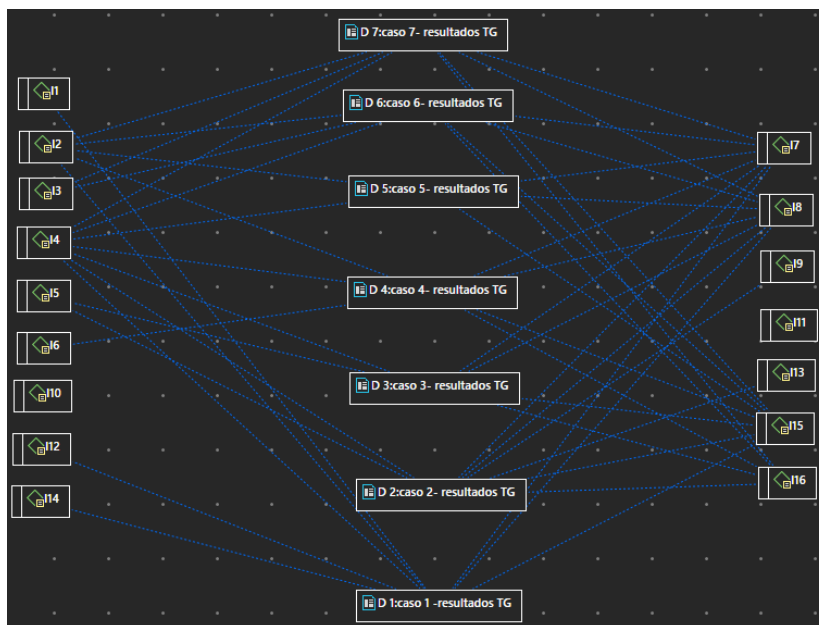
En la figura anterior se presenta el Top 10 de códigos más frecuentes en los resultados de los casos, para visualizar la frecuencia de los códigos por grupo se presenta en el apartado ANEXO 3: FRECUENCIA DE CÓDIGOS, tres figuras organizadas por orden de los grupos, primero los códigos del grupo Conceptos, luego los códigos del grupo Dificultades y finalmente del grupo Estrategias.

5.2.1.2 Parte 2 del Cuestionario

En la **Parte 2** del cuestionario los casos describieron el razonamiento de los estudiantes hipotéticos de cada situación problema, en consecuencia, se percibieron algunas limitaciones en su conocimiento didáctico para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta, de igual modo, se observaron algunos códigos frecuentes que ayudan a caracterizar el conocimiento especializado de las características de aprendizaje de los casos particularmente para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

Partiendo de una de las categorías del grupo Dificultades y el grupo de Estrategias, se elabora mediante el software de ATLAS.ti la (Figura 52), una red que evidencia la relación entre los códigos de la **Parte 2** del cuestionario y los siete casos. Específicamente en la categoría *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático* resalta el código I10 (Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgos,

falacias y confusiones) y en la categoría del grupo Estrategias *Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* el código I11 (Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes; independencia de eventos)) pues no se percibieron en las respuestas de los Casos sin embargo el resto de los códigos de estas dos categorías sí.



Figuras 50 Red Parte 2 (Elaborado con ATLAS.ti)

5.2.1.2.1 Categoría: fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

I1: Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.

Mediante el análisis de las respuestas del cuestionario, se percibe que los participantes identifican las dificultades que puede presentar los estudiantes con los contenidos relacionados a la naturaleza aleatoria de la probabilidad simple y compuesta, aunque, son

relativamente pocas. En particular, identifica implícitamente el sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral en el razonamiento del estudiante hipotético.

I2: Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo, con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).

Ahora bien, los participantes evidenciaron percibir las confusiones matemáticas que podrían haber presentado los estudiantes hipotéticos. Entre estas confusiones, se desatacan las relacionadas con la fórmula de la regla del producto y adición de probabilidades, la dependencia e independencia de un suceso y los datos en la regla de Laplace particularmente si se realiza una segunda extracción.

I3: Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas.

A partir del análisis de la codificación de los resultados, se percibe pocas evidencias por parte de los participantes en relación con este indicador. Se puede inferir que los casos mencionan que algunos estudiantes pueden caer en errores al confundir las cantidades necesarias para la regla de Laplace por no proceder ordenadamente con las probabilidades que brinda el enunciado. Globalmente, se infiere que los casos poseen limitaciones para definir puntualmente las confusiones que presenten los estudiantes.

I4: Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.

Por medio de la codificación de las respuestas de los Casos, se percibe que identifican algunas ideas inadecuadas que los estudiantes pueden desarrollar al momento de la resolución de problemas de probabilidad simple y compuesta, sin embargo, hay algunas excepciones, particularmente el *Caso 2*, pues interpreta que la gran mayoría de las respuestas de los estudiantes hipotéticos son correctas a pesar de mencionar alguna confusión previamente, igualmente el *Caso 5* que presenta varios sesgos en la **Parte 1** del cuestionario que se trasladan a su conocimiento didáctico.

I5: Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.

De manera generalizada los Casos identifican que un error por parte de los estudiantes es al momento de realizar la regla de Laplace y reconocer que cambia las cantidades si se realiza una extracción anteriormente. De igual forma para los *Casos 2 y 5* que presentan algunas confusiones en su conocimiento matemático se les dificulta percibir los errores de los estudiantes, en consecuencia, presentan limitaciones en su conocimiento didáctico.

I6: Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.

Se percibe pocas evidencias por parte de los participantes en relación con este indicador. En particular, el *Caso 4* identificó que el estudiante hipotético E1, tuvo dificultades al momento de hacer una analogía con la proporcionalidad, la cual tiene como fundamento según Mochón (2012) el concepto de razón que es uno de los subconstructos de la fracción, contextualizado a la probabilidad de irritación del medicamento propia de la situación 4.

I12: Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados por parte de los estudiantes.

Al igual que con el indicador anterior, mediante las respuestas de los participantes se puede concluir que hay pocas evidencias de este. Sin embargo, se identifica que el *Caso 1* percibe en la respuesta de E1 una confusión en la interpretación del enunciado de la situación 4, confundiendo la población total con la cantidad del cuero cabelludo. En consecuencia, se percibe que los participantes tienen limitaciones en delimitar que la confusión que presenta el estudiante es relacionada con la naturaleza aleatoria de la probabilidad.

I14: Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar confusiones, falacias y sesgos en su razonamiento probabilístico.

A pesar de que perciben pocas evidencias en relación con este indicar, el *Caso 1* percibe en la respuesta de E3 de la situación 4 una confusión que está relacionada con la experiencia que ha construido el estudiante sobre sus creencias de la suerte, evidenciando

Dificultad en diferenciar azar y suerte. En relación con lo anterior, se infiere que los participantes tienen limitaciones en percibir que las experiencias que tengan los estudiantes sobre fenómenos aleatorios influyen en su razonamiento probabilístico ocasionando confusiones o sesgos.

5.2.1.2.2 Categoría: formas de interacción de los estudiantes con un contenido

I7: Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático mezcla del lenguaje común con el matemático).

Mediante la (Figura 51) se presenta el Top 10 de los códigos más frecuentes que se percibieron en los resultados de los participantes, a partir de esto se observa que el código más utilizado fue **I7** que hace referencia a este indicador. Especialmente los *Casos 1, 3, 5, 6 y 7* evidencian este indicador de conocimiento, abriendo la posibilidad de relacionarse con otros indicadores, igualmente hay algunas excepciones como los *Casos 2 y 4* particularmente muestras varias confusiones tanto en su conocimiento matemático como didáctico, se infiere que esas limitaciones obstaculizan la posibilidad de interpretar pertinentemente el conocimiento de los estudiantes hipotéticos. En consecuencia, se percibe que la mayoría de los participantes saben interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje.

I8: Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución.

Al igual que con el indicador anterior, mediante la codificación de los resultados se observa en la (Figura 51) anteriormente presentada, que el presente indicador está dentro del Top 10 de códigos más frecuentes. Especialmente el *Caso 6 y 7* evidencian reconocer que algunos estudiantes pasan desapercibidos el total de posibilidades del suceso de sacar cara o sello, la independencia o dependencia de un suceso en la situación 2, de igual forma identifican que la respuesta E1 en la situación 4 parte de la consecuencia más no de la

probabilidad de ocurrencia llevándolo a un error. Por lo tanto, los participantes tienen limitaciones en reconocer que detalles desvían la atención del estudiante.

I9: Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente.

Se percibe pocas evidencias por parte de los participantes en relación con este indicador, concretamente, el *Caso 2* indica que E3 responde empleando en su razonamiento cálculos de forma mecánica en la situación 3. Por esta razón se considera que los participantes tienen limitaciones en su conocimiento didáctico particularmente con la identificación de cálculos mecánicos de los estudiantes.

I13: Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.

Al igual que con el indicador anterior, se percibe pocas evidencias por parte de los participantes en relación con este indicador, específicamente el *Caso 2* reconoce que las experiencias previas del estudiante influyen en el razonamiento de este. Pese a esto, se considera que los participantes tienen limitaciones al percibir esta relación entre las experiencias previas de los estudiantes con la introducción de conceptos probabilísticos.

5.2.3 Propuesta y discusión de nuevos indicadores de conocimiento

En virtud de los resultados de los Casos, se identifica dos nuevos indicadores relacionados con el conocimiento didáctico sobre las características de aprendizaje que tienen profesores de matemáticas en formación en la enseñanza de probabilidad simple y compuesta. Seguidamente, se presentan los nuevos indicadores junto con una breve descripción indicando a qué categoría del KFLM pertenece.

I15: Conocer los conceptos e ideas estocásticas que toma o no en cuenta el estudiante para la resolución de un problema.

Mediante el análisis y codificación de los resultados, se infiere que los participantes al momento de describir el razonamiento empleado por cada estudiante hipotético en la **Parte 2**

del cuestionario, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de esa forma en particular, lograban percibir ya sea los conceptos o ideas estocásticas que tomaba o pasaba desapercibido el estudiante llevándolo a una confusión. Muestra de esto, el Caso 1 identifica que E1 en la Situación 3 toma en consideración la definición de casos excluyentes y Regla de la adición de probabilidades para resolver el problema correctamente.

Ahora bien, López, Ojeda & Salcedo (2018) afirma que las ideas fundamentales de Heitele (1975) son una guía en la educación de manera continua, así mismo Carvajal, & Verdejo (2019) asegura que son relevantes en el currículo colombiano pues ayudan en la formación del ciudadano. Por esta razón se permitió redactar este nuevo indicador que haría parte la categoría *Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* de esta forma pertenecería al grupo de códigos *Estrategias*. A partir de este nuevo indicador se le asigna el código **I15**, aplicándolo a la codificación de los resultados, de esta forma se puede visualizar mediante la (Figura 51) que el presente código es el segundo con más frecuencia en los resultados de esta investigación.

I16: Conocer los procedimientos matemáticos que realiza el estudiante en su respuesta, para la resolución de un problema matemático.

De forma parecida al indicador anterior, a partir del análisis y codificación de los resultados, se infiere que los participantes al momento de describir el razonamiento de los estudiantes hipotéticos en la **Parte 2** del cuestionario, identificaban el proceso matemático que realizaba el estudiante para solucionar alguna de las cinco situaciones del cuestionario, algunos casos solo realizaban esta descripción. Tal como se muestra el Caso 7 en la situación 5 identificando que E1 analiza la situación y considera la segunda extracción ayudando a calcular correctamente la probabilidad del suceso.

Del mismo modo, Contreras, Núñez y Suárez (2021) indican la importancia que los profesores de matemáticas implementen situaciones problemas para una enseñanza significativa, en relación con esto, Piñeiro, Castro, R, y Castro, E. (2022) afirman que los profesores en formación presentan limitaciones al interpretar los procedimientos que realizan los estudiantes para la resolución de problemas. A raíz de esto se vio la necesidad de redactar este nuevo indicador que haría parte la categoría *Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* de esta forma pertenecería al grupo de códigos *Estrategias* al igual que el indicador anterior. A partir de este nuevo indicador se le asigna el código **I16**, aplicándolo a la codificación de los resultados, de esta forma se percibe mediante la (Figura 51) presentada con anterioridad que el presente código es el quinto con más frecuencia.

5.2.4 Patrones de códigos

Mediante los resultados de los participantes y su codificación, se realiza un cuadro con todos los códigos de cada Caso solamente de la **Parte 2** del cuestionario, organizado por situación y estudiante hipotético, esta se presenta en el apartado ANEXO 4: CÓDIGOS DE LOS CASOS, se puede percibir patrones entre conjuntos de códigos. Estos patrones darán cuenta de los saberes que destacaron entre los participantes de la investigación, de esta forma se extraen cuatro conjuntos de códigos y se presentan en la Tabla 13 junto con una breve descripción de los indicadores a los que hace referencia los códigos.

Tabla 13 Patrones de códigos Parte 2

<i>Grupo de códigos</i>	<i>Descripción</i>
I7 I15	Saber interpretar en el conocimiento o pensamiento matemático que conceptos e ideas estocásticas toma o no en cuenta el estudiante para la resolución de un problema.
I4 / I7 I15	Saber interpretar en el conocimiento o pensamiento matemático del estudiante las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que pueden poseer de un contenido e identificar los conceptos e ideas estocásticas que toma o no en cuenta el estudiante para la resolución de un problema.

I7 I8 I15

Saber interpretar en el conocimiento o pensamiento matemático del estudiante los conceptos e ideas estocásticas que toma o no en cuenta para la resolución de un problema y los detalles susceptibles de desviar su atención.

I7 I15 I16

Saber interpretar en el conocimiento o pensamiento matemático del estudiante que conceptos e ideas estocásticas toma o no en cuenta en los procedimientos matemáticos para la resolución de un problema.

Del mismo modo que con la tabla anterior se plantea la Tabla 14, con la diferencia de dar cuenta mediante los códigos que se indicaron con menos frecuencia o no se percibieron en los resultados de los participantes, evidenciando las limitaciones que presentan en relación con los indicadores de conocimiento de KFLM excluyendo el **I10** pues se centra específicamente en probabilidad condicional, lo que sería incoherente con el objetivo de la investigación. Seguidamente se muestran los códigos y una breve descripción general de las limitaciones de los participantes según estos.

Tabla 14 Limitaciones de los casos

<i>Códigos</i>	<i>Descripción</i>
I1 I6 I12 I14 / I9 I11 I13	Limitaciones en saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados, identificando las necesidades y dificultades de los estudiantes en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas, igualmente conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos además que algunos cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente, Así mismo poseen limitaciones en conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden tanto propiciar la introducción de conceptos probabilísticos o por el contrario confusiones, falacias y sesgos en su razonamiento probabilístico.

6. CONCLUSIONES

Tomando en consideración que el objetivo general de la investigación fue caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en formación para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta, se identificó en la literatura elementos del conocimiento tanto matemático como didáctico mediante las categorías del subdominio KFLM del modelo MTSK. Este modelo considera la Teoría Fundamentada como enfoque para el análisis de la información más especializado, particularmente la perspectiva Top-Down, por esta razón se tomó en cuenta para el análisis de los resultados junto con las ideas estocásticas fundamentales (Heitele, 1975), Concepciones sobre probabilidad (Batanero y Sánchez, 2005; Burbano, 2015), Heurísticas, sesgos y falacias en probabilidad (Bersabe, 2018; Batanero, Contreras y Díaz, 2012; Serrano, Batanero y Cañizares, 1998; Díaz, 2003).

En relación con la idea anterior, se diseñó un cuestionario didáctico que considera la probabilidad simple y compuesta, el cual está formado por cinco situaciones, cada una consta de dos partes, una primera donde se presenta la situación que son adaptaciones de las investigaciones de Inzunza y Guzmán (2011) y Walpole et al. (2014). La segunda parte considera las respuestas de estudiantes hipotéticos a partir de reportes de investigación sobre posibles sesgos, falacias o confusiones que puede presentar los estudiantes. La validación se hizo a través de expertos y pruebas piloto, de esta forma, se presenta el cuestionario como un instrumento validado y con bases en documentación pertinente, ampliando su aplicabilidad no solo a profesores en formación, sino también en activo, e igualmente a programas de formación docente como una oportunidad de analizar sus conocimientos de las características de aprendizaje para la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

Aun cuando dentro del objetivo de la investigación no está indagar sobre el conocimiento matemático de los participantes, se consideró igualmente necesario realizar un matriz de

análisis de la **Parte 1** del cuestionario, es relevante como afirma Shulman (1987) que el profesor comprenda aquello que ha de enseñar, así como escudero (2015) menciona que el conocimiento sobre las matemáticas es un fundamental en la enseñanza de estas, debido a que permite la relación entre saber qué enseña y por qué lo enseña. Por esa razón, mediante la codificación de los resultados se logra inferir que los profesores en formación tienen limitaciones en su conocimiento matemático específicamente se logra identificar que poseen los siguientes sesgos, falacias y confusiones: Heurística de la representatividad, Sesgo de la insensibilidad al tamaño muestral, Enfoque en el resultado aislado, Sesgo de equiprobabilidad y Concepción errónea del azar. Ahora bien, se infiere/reconoce/identifica que los participantes perciben la probabilidad simple y compuesta desde un enfoque formal, con bases axiomáticas, teniendo en cuenta la regla de Laplace, apartándose de una concepción intuitiva, pues en la codificación predomina la concepción clásica y axiomática.

Con respecto al conocimiento didáctico, el análisis se realiza a partir de una matriz de análisis de la **Parte 2** tomando en consideración los indicadores de conocimiento del KFLM, esto permite extraer los hallazgos centrales de la investigación evidenciando limitaciones de los profesores en formación en saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados, identificando las necesidades y dificultades de los estudiantes en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas, de igual forma se perciben entre los códigos que los más frecuentes fueron, saber interpretar en el conocimiento o pensamiento matemático del estudiante las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que pueden poseer de un contenido e identificar los conceptos e ideas estocásticas que toma o no en cuenta el estudiante para la resolución de un problema siendo estos sus fortalezas. Asimismo, a pesar de que se evidenciaron conocimientos en los profesores en formación también mostraron limitaciones

Comentado [JB1]: mejorar esta descripción de qué es el Conocimiento Matemático

tanto en su conocimiento matemático como en su conocimiento didáctico, cabe resaltar que se perciben que algunas de las primeras limitaciones se trasladan a su conocimiento didáctico llevándolos a confusiones.

El análisis de los resultados de los participantes permitió identificar esta nueva propuesta de indicadores que haría parte de la categoría *Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* del subdominio KFLM, de esta forma las siguientes investigaciones que tengan un objetivo similar puedan utilizarlos y construir conclusiones al caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas en probabilidad, volviéndose un aporte al modelo MTSK y a medida que se siga investigando en esta línea puede que se desarrolle un modelo pensado particularmente en el conocimiento en probabilidad.

De modo que la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas es amplia, por esa razón una de las limitaciones de esta investigación fue tomar un solo instrumento de recogida de información, sería pertinente considerar entrevistas semiestructuradas enfatizando en aspectos docentes, planeaciones de clases y entrevistas en profundidad para clarificar aspectos que se observen en los instrumentos anteriores. Así mismo, considerar un solo subdominio de conocimiento del MTSK podría limitar las observaciones, por eso mismo sería interesante considerar no solo otro subdominio, sino que también las creencias y concepciones que tengan los profesores en formación sobre probabilidad, además de indagar sobre como aspectos emocionales interfieren con la enseñanza de esta.

Simultáneamente, delimitarse a probabilidad simple y compuesta podría verse como una limitación, se puede profundizar junto con la probabilidad condicional, y hacer una retroalimentación con los participantes de manera que puedan hacer una introspección, contribuyendo en su formación docente. A partir de esta investigación se generan más

Comentado [JB2]: Hay muchas cosas juntas, sugiero dividir u organizar esta idea. instrumentos futuros a considerar, emociones y recursos educativos?

preguntas como: ¿Qué conocimientos especializados sobre el aprendizaje tienen profesores de matemáticas en formación en relación con la enseñanza de probabilidad simple, compuesta y condicional?, ¿Qué creencias y concepciones tiene los profesores en formación sobre la probabilidad?, ¿Con cuales otros subdominios del MTSK se pueden los resultados del cuestionario relacionar?, preguntas que propician la motivación de seguir desarrollando investigación en la educación sobre probabilidad.

Los resultados de esta investigación indican que el conocimiento de los futuros profesores sobre probabilidad simple y compuesta presenta fortalezas, pero también tensiones y limitaciones. Estos hallazgos no solo llaman la atención sobre la naturaleza de las posibles limitaciones en su conocimiento tanto matemático como didáctico, sino también que las experiencias de aprendizaje durante su formación como profesores parecen no expandir ciertos aspectos fundamentales. Esto sugiere que los programas de formación docente deben considerar la investigación y reflexión sobre el aprendizaje y enseñanza de la probabilidad como un eje con igual importancia que los demás conceptos en matemáticas. En función de lo planteado, se identifica que es pertinente que los cursos de formación consideren modelos de conocimiento especializado del profesor en probabilidad, con la intención de realizar un plan de mejoramiento y fortalecer su conocimiento profesional.

7. REFERENCIAS

- Acevedo-Rincón, J. (2020). Relevance of the mathematics teacher's specialized knowledge model in the planning and interpretation processes at the spatial thinking. *Journal of Physics: Conference Series*, 1514, 1-7. doi:10.1088/1742- 6596/1514/1/012019
- Aguilar González, Á., Carreño, E., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L. C., Escudero, D. I., ... & Rojas, N. (2013). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK*.
- Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020, September). Prospective Teachers Creating and Solving a Probability Problem: An Exploratory Study. In *International Conference on European Transnational Education* (pp. 104-113). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-57799-5_11
- Alpízar, M., Chavarría, L., & Oviedo, K. (2013). *Conocimiento sobre conceptos básicos de probabilidad de un grupo de docentes de primaria de la Dirección Regional Educativa de Heredia*.
- Alsina, A. (2012). *La estadística y la probabilidad en Educación Infantil conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales*. © Didácticas Específicas, 2012, núm. 7, p. 4-22.
- Alsina, Á. (2019). *La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza*.
- Alsina, Á., & Vásquez Ortiz, C. (2017). *Hacia una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad en las primeras edades*.
- Álvarez, C. A. M. (2011). Cuantitativa y cualitativa Guía didáctica. Recuperado de [https://www. uv. mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didacticametodologia-de-la-investigacion. pdf](https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didacticametodologia-de-la-investigacion.pdf).
- Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa* (Vol. 1). Editorial La Muralla.
- Astudillo, M. T. G., & Portugal, R. F. M. (2018). La práctica docente del profesor: La enseñanza de fracciones en un aula de primaria a través de situaciones-problema. *Education Siglo XXI*, 36(3 Nov-Feb1), 177-200. <https://doi.org/10.6018/j/349961>
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C. (2000). *¿Hacia dónde va la educación estadística?* *Blaix*, 15(2), 13.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? *Fernandes, J., Sousa, M. & S. Ribeiro (Orgs.), Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística–Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-30.

- Batanero, C. (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.
- Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). Boston, MA: Springer US.
- Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 12(2).
- Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability*. *Journal of statistics Education*, 12(1).
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, 10(1), 56, 71. <http://dx.doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001>
- Batanero, C., Ortiz, J. J., & Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*.
- Bejarano, M. A. G. (2016). La investigación cualitativa. *INNOVA Research Journal*, 1(2), 1-9.
- Belmonte Gómez, J. M., Ruiz Higuera, M. L., & Vecino Rubio, F. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Madrid: Pearson Educación, 2005.
- Bénard Calva, S. (2016). La teoría fundamentada: una metodología cualitativa. México: Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- Benjamín, A. (2009). La fórmula de Arthur Benjamín para cambiar la enseñanza de las Matemáticas. Recuperado de: https://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_teach_statistics_before_calculus?language=es&subtitle=es
- Bersabe Morán, R. M. (2018). Sesgos cognitivos en los juegos de azar: La ilusión de control. *Ene*, 10, 27.
- Beswick, K., Callingham, R., & Watson, J. (2012). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 131-157.
- Bizquerra, R. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Blanco, M. M. G. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación matemática*, 17(2), 153-166.

- Blömeke, S., & Kaiser, G. (2017). Understanding the development of teachers' professional competencies as personally, situationally, and socially determined.
- Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-39.
- Brückler, F. M., & Šipuš, Ž. M. (2023). Pre-service mathematics teachers' understanding of conditional probability in the context of the COVID-19 pandemic. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(1), 89-104. <https://doi.org/10.30935/scimath/12436>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. <http://dx.doi.org/10.13140/2.1.3107.4246>
- Carvajal, D. C., & Verdejo, A. J. M. (2019). Ideas Estocásticas Fundamentales en el Currículo Colombiano. *Yupana: Revista de Educación Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral*, (13), 28-47.
- Castro, W. F., Pino-Fan, L. R., & Parra-Urrea, Y. (2018). El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores: Nuevas perspectivas y horizontes para la formación docente. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 3(2), 25-25.
- Chaves, V. E. J., & Weiler, C. C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades*, 3(2).
- Cheybar y Kuri, E., (2007). *Reflexiones sobre el papel del docente en la calidad educativa. Reencuentro*. Análisis de Problemas Universitarios, (50), 100-106.
- Cipollone, M. D. (2022). Atlas. ti como recurso metodológico en investigación educativa. *Anuario digital de investigación educativa*, (5).
- Contreras, K. N. P., Núñez, R. P., & Suárez, C. A. H. (2021). La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje. *Boletín Redipe*, 10(9), 459-471.
- Contreras, L. C., Montes, M., Climent, N., & Carrillo, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *Revista For-Mate*, 3, 7-15.
- Corral, Y. (2016). Validez y fiabilidad de las investigaciones cualitativas. *Revista Arjé*, 11(21), 196-209.

- Costa, A. y Nacarato, A.M. (2011). A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de professores e de formadores. *Bolema*. [en línea] Brasil: Boletim de Educação Matemática 24(39), 367– 386. Consultado el 26 de octubre de 2019 en: <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291222099003.pdf>
- Danişman, T., & Tanişli, D. (2018). Examination of mathematics teachers' pedagogical content knowledge of probability. *MOJES: Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 5(2), 16-34.
- Daza, W. G. I. (2018). Investigación educativa desde un enfoque cualitativo: la historia oral como método. *Voces de la Educación*.
- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico y sus implicaciones en la enseñanza de la estadística.
- Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C., & Roa, R. (2012). *Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de Educación Secundaria*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26, 1207-1226.
- Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C., & Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de Educación Secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26, 1207-1226.
- Domingo, J. M. C., Moreno, A., González, E. G., & Fontana, R. J. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (11), 145-166.
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. [Semiosis and Human Thought. Semiotic Registers and intellectual learning]. Peter Lang.
- Echavarría, H. V., Cisneros, J. W., & Gordillo, W. F. C. (2015). Conocimiento matemático para la enseñanza. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 710-714.
- Escudero Avila, D. I., Carrillo Yáñez, J., Flores Medrano, E., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L. C., & Montes Navarro, M. Á. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*.
- Escudero, D. (2015). Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria. Tesis Doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Escudero, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas.
- Esperiella, R. D. L., & Restrepo, C. G. (2020). Teoría fundamentada. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 49(2), 127-133.

- Estrada, A., & Batanero, C. (2019). Prospective primary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), em0559. <https://doi.org/10.29333/iejme/5941>
- Flores, C. R. O. (2016). Obstáculos epistemológicos en el conocimiento probabilístico. *Revista ciencias de la educación*, (48), 232-249.
- Flores-Medrano, E., Ávila, D. I. E., Navarro, M. Á. M., González, Á. A., & Yañez, J. C. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva.
- Franco Crespo, J., & Alsina Pastells, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula abierta*. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structure*. Reidel.
- Garrote, P. R., & del Carmen Rojas, M. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija de lingüística aplicada a la enseñanza de lenguas*, (18), 124-139.
- Garzón Henao, J. (2018). Aproximación al concepto de probabilidad condicional dirigida a estudiantes de grado noveno. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia] Repositorio institucional.
- Glaser, B. G. (1992). *Basics of grounded theory analysis*. Sociology Press.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*.
- Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, C. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325- 3326). CERME
- Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación*, 2(especial), 78-89.
- González, M. E. N. (2005). La importancia del método en la investigación. *Espacios públicos*, 8(15), 277-285.
- González, W. O. L. (2013). El estudio de casos: una vertiente para la investigación educativa. *Educere*, 17(56), 139-144.
- Hernández, J. V., Hernández, N. V., & Chinchilla, R. M. H. (2021). El desarrollo humano en prácticas de identificación de patrones en la Educación preescolar: Información y análisis de conocimiento especializado de profesores. *REVOLUCIÓN EN LA FORMACIÓN Y LA CAPACITACIÓN PARA EL SIGLO XXI*, 339.
- Hernández, R., Fernández, C, y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. (3-Edición). México: McGraw-Hill Interamericana Editores.

- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Inzunza Cazares, S., & Guzmán Reyes, M. C. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación matemática*, 23(1), 63-95.
- Inzunza, S. y Rocha, E. (2021). *Los datos y el azar en el currículo de educación básica y bachillerato en México: reflexiones desde la perspectiva internacional*. Diálogos sobre educación, 23, 1-13.
- Jiménez, E. P. (2008). El papel del profesorado en la actualidad. Su función docente y social. *Foro de educación*, 6(10), 325-345.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1999). Pensamiento probabilístico de los estudiantes en la instrucción. *Revista para la Investigación en Educación Matemática*, 30(5), 487-519. <https://doi.org/10.2307/749771>
- León Banguero, J. M. (2020). *Conocimiento de las características de aprendizaje en probabilidad condicional que evidencian profesores de Bachillerato en Zacatecas*. [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas] Repositorio institucional.
- León Banguero, J. M., Sosa Guerrero, L., & Carrillo Yáñez, J. (2020). Conocimiento del profesor sobre el aprendizaje en probabilidad condicional: un estudio de caso. *PNA*, 15(1).
- León Gómez, N. A. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al teorema de Bayes: Un Caso con Futuros Profesores de Matemática. *Paradigma*, 29(2), 187-219.
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente" mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación em Revista*, 117-133.
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, 31-51. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854003>
- Londoño, D., Alsina, À., & López Serentill, P. (2022). La estadística y la probabilidad en el currículo de educación primaria: un estudio comparativo. *Paideia Surcolombiana*, 2022, núm. 27, p. 195-206. <http://dx.doi.org/10.25054/01240307.3426>
- López Fernández, R., Avello Martínez, R., Palmero Urquiza, D., Sánchez Gálvez, S., & Quintana Álvarez, M. (2019). Validación de instrumentos como garantía de la credibilidad en las investigaciones científicas. *Revista Cubana de Medicina Militar*, 48(2(Sup)), 441-450. Recuperado de <https://revmedmilitar.sld.cu/index.php/mil/article/view/390/331>
- López, J. M., Ojeda, A. M., & Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 9(17), 87-102.

- Lora, A. A. A., Cavadias, L. M., & Miranda, A. J. M. (2017). La teoría fundamentada en el marco de la investigación educativa. *Saber, ciencia y libertad*, 12(1), 236-245.
- Mantilla Valcárcel, M. I. (2019) El pensamiento crítico en la enseñanza de la estadística.
- Martínez Bonafé, J. (1988). El estudio de caso en la investigación educativa. *Revista Investigación en la Escuela*, 6, 41-50.
- Mendenhall, W, Beaver, R y Beaver, M. (2010) *Introducción a la probabilidad y estadística*. Cengage Learning Editores. Editorial. (No. CD-696.).
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Serie Lineamientos curriculares Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos S.A.
- Ministerio de Educación Nacional. (2005). Ser maestro hoy, el sentido de educar y el oficio docente. *Altablero*, (34).
- Montes Suay, F. (2007). *Introducción a la Probabilidad. Departamento de Estadística e Investigación Operativa*, Universidad de València, España.
- Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J. L., Flores, P., Carrillo, J., ... & Escudero-Ávila, D. (2014). *Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 9-22.
- Montes, N. D., Gavilanes, J. V., & Vélez, J. M. (2016). *Elementos esenciales del diseño de la investigación. Sus características*. *Domino de las Ciencias*, 2(3 Especial), 72-85.
- Moreno, A., & Cardeñoso, J. M. (2014). Alfabetización Probabilística: Un reto para los profesores de secundaria. In *Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.
- Muñiz, M. (2010). *Estudios de caso en la investigación cualitativa*. División de estudios de posgrado universidad autónoma de nuevo León. Facultad de psicología. México, 1-8.
- Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas*. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 1801-1817.
- Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval y F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education*. *Proceedings of Norma* (pp. 97-110). IMFUFA.

- Ortiz, C. V., & Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 454-478.
- Ortiz, C. V., & Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Educación matemática*, 34(2), 245-274.
- Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., & Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación.
- Paenza, A. (2009). *Matemática, cadê você?: sobre números, personagens, problemas e curiosidades*. Civilização Brasileira.
- Pantoja, V. M. Á. B., Miranda, M. A. V., & Bermúdez, E. A. (2017). Conocimiento base para la enseñanza: un marco aplicable en la didáctica de la probabilidad. *Revista de Investigación Desarrollo e Innovación: RIDI*, 7(2), 269-285.
- Páramo Morales, D. (2015). La teoría fundamentada (Grounded Theory), metodología cualitativa de investigación científica. *Pensamiento & gestión*, (39), 1-7.
- Parra Sandoval, H., & Villa Ochoa, J. A. (2017). Vinculación de las matemáticas con la realidad. Implicaciones en la conformación del pensamiento profesional del docente.
- Pérez, A., & Lis, D. (2012). *La didáctica como marco para la formación docente y la mejora de la calidad de la educación universitaria*. *Estudios económicos*, 29(59), 85-92.
- Pico Bonilla, C. M., Gil Mateus, E. O., & Clavijo Álvarez, Á. A. (2017). *Cognición y conducta en la falacia de las tasas de base*. *Revista de economía institucional*, 19(36), 313-332.
- Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., & Castro, E. (2022). Conocimiento sobre la resolución de problemas de matemáticas manifestado por estudiantes para profesor. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35, 1416-1437.
- Pinto Sosa, J. E., & González Astudillo, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?. *Educación matemática*, 20(3), 83-100. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512064005>
- Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). *Perpectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor*. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Font, V., & Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. *Matemática educativa: La formación de profesores*, 137-151.
- Ramírez, E. A. (2011). La investigación cualitativa en educación. Balance y retos en el contexto colombiano. *Revista interamericana de investigación, educación y pedagogía*, 4(1), 81-91.
- Restrepo, J. C. D. J. (2006). *Estándares básicos en competencias ciudadanas: una aproximación al problema de la formación ciudadana en Colombia*. *Papel político*, 11(1), 137-176.

- Rincón, L. (2014). *Introducción a la probabilidad*. México: Las prensas de ciencias.
- Rodríguez Alveal, F., Díaz Levicoy, D. y Vásquez Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos*, 44(1), 135-156.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J., & Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *Uniciencia*, 32(1), 89-107. <https://doi.org/10.15359/ru.32-1.6>
- Rojas, N. (2015). Caracterización del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticos: un estudio de casos. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). *Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29, 143-166.
- Salazar, S. F. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Actualidades investigativas en educación*, 5(2).
- Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, 21(2), 39-77.
- Sarmiento Santana, M. (2007). *La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente*. Universitat Rovira i Virgili.
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). *What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views*. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153-172.
- Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. I. L. A. R. (2005). *Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto*. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 59-81.
- Serrano, L., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1998). *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria*. *Educación Matemática*, 10(01), 7-25.
- Shulman, L. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015) *Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato*. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173-189.

- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28 (2), 151-174.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1(157-223).
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos. Investigación con estudio de casos*, 1-156.
- Supo, J. (2013). Cómo validar un instrumento.
- Tarira Caice, C. A., Parra-Sandoval, H., & Delgado González, M. (2020). Procesos de enseñanza de la función exponencial. Un acercamiento cualitativo. *Revista Científica UISRAEL*, 7(3), 37-50.
- Tóala, G. M. T., & Briones, A. A. M. (2019). Importancia de la enseñanza de la metodología de la investigación científica en las ciencias administrativas. *Dominio de las Ciencias*, 5(2), 56-70.
- Torres, C. A. B. (2006). *Metodología de la investigación: para administración, economía, humanidades y ciencias sociales*. Pearson educación.
- Torres, R. (2019). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. Mexicana*. México.
- Triola, M. F. (2004). *Probabilidad y estadística (9.ª ed.)*. Pearson educación.
- Varguillas, C. (2006). El uso de ATLAS. ti y la creatividad del investigador en el análisis cualitativo de contenido UPEL. *Instituto Pedagógico Rural El Mácaro. Laurus*, 12(Ext), 73-87.
- Vasco, D., & Moriel, J. (2022). *Conocimiento de los temas*. En J. Carrillo., M. A. Montes., & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 35- 46). Dykinson.
- Vasco, D., y Climent, N. (2018). *El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal*. *PNA*, 12(3), 129-146.
- Vásquez Ortiz, C. A., Díaz-Levicoy, D., Coronata Ségure, C., & Alsina, Á. (2018). *Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. Cadernos Cenpec*, 2018, vol. 8, núm. 1, p. 154-179.
- Vásquez Ortiz, C., & Alsina Pastells, Á. (2015). *El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático*. <http://dx.doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104>
- Vásquez Ortiz, C., Pincheira Hauck, N., & Diaz Levicoy, D. A. N. I. L. O. (2016). *¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad? Un primer análisis desde el currículo de Educación Primaria*.

- Vásquez, C., & Alsina, Á. (2013). *Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85, 5-23. <http://www.sinewton.org/numeros>
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Norma, 162, 157.
- Zapata Cardona, L. (2011). *¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística?*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, No. 33, 234–247.