



**CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE UN GRUPO DE
ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DE
TAREAS SOBRE GENERALIZACIÓN DE PATRONES**

**ASCENETH CARMONA TRUJILLO
MARICEL VELASCO GARCÍA**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES**

Tuluá, Valle del Cauca, agosto de 2018



CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DE TAREAS SOBRE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

ASCENETH CARMONA TRUJILLO

Código: 1605880

MARICEL VELASCO GARCÍA

Código: 1605881

Requisito para optar el título de Magister en Educación énfasis en Educación Matemáticas y Ciencias experimentales

Director

Mg. Cristian Andrés Hurtado Moreno

UNIVERSIDAD DEL VALLE

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES

Tuluá, Valle del Cauca, agosto de 2018

ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES

ACTA DE SUSTENTACIÓN	
FECHA DE LA SUSTENTACION: Cali, 29 de Noviembre de 2018	
ESTUDIANTES: ASCENETH CARMONA TRUJILLO - CÓDIGO 201605880 MARICEL VELASCO GARCÍA - CÓDIGO 201605881	
TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO: "CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DE TAREAS SOBRE GENERALIZACIÓN DE PATRONES"	
DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO: Profesor CRISTIAN ANDRÉS HURTADO MORENO	
EVALUADORES: Profesora LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO Profesor RODOLFO VERGEL CAUSADO	
COMENTARIOS DE LOS JURADOS - Es un trabajo que se destaca y que merece ser divulgado. El trabajo es meritorio.	
APROBADO ☒	☐
APLAZADO ☐	☐
RECHAZADO ☐	

Prof. SANTIAGO ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. LIGIA A. TORRES RENGIFO
Jurado Evaluador

Prof. CRISTIAN A. HURTADO MORENO
Director de Trabajo de Grado

Prof. RODOLFO VERGEL CAUSADO
Jurado Evaluado

DIEGO GARZÓN CASTRO.
Prof. DIEGO GARZÓN CASTRO

En representación del Subdirector de Investigaciones y posgrados

Agradecimientos

A Dios por permitirnos culminar con éxito esta nueva etapa de nuestra vida

A nuestras familias por su tolerancia, comprensión y apoyo incondicional

*A la Institución educativa y a los estudiantes del grado quinto que hicieron
parte de esta investigación*

*A nuestro asesor de tesis, Cristian Andrés Hurtado M., por su tiempo y
dedicación en nuestro proceso investigativo*

*Al profesor Rodolfo Vergel por brindarnos su conocimiento, experiencia y
apoyo constante al compartir su conocimiento sobre pensamiento algebraico*

Tabla de contenido

Introducción	11
CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	14
1.1 Marco Contextual	15
1.2 Presentación de la problemática	17
1.3 Objetivos	21
1.3.1 Objetivo general	21
1.3.2 Objetivos Específicos	21
1.4 Justificación	22
1.5 Antecedentes	25
CAPÍTULO II: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	31
2.1 Perspectiva curricular	32
2.1.1 Lineamientos curriculares de Matemáticas	32
2.1.2 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	36
2.2 Algunos elementos de la Teoría de la Objetivación	39
2.2.1 Sobre el pensamiento algebraico	42
2.2.2 Aportes del marco conceptual al trabajo	48
CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	52
3.1 Enfoque de la investigación	53
3.2 El proceso de la investigación	54
3.3 Población objeto de estudio	55
3.4 Instrumentos para la recolección de la información	56
3.5 Justificación de las tareas propuestas	57
Tarea 1	58
Tarea 2	61

Tarea 3	63
3.6 Análisis multimodal de las producciones de los estudiantes	66
3.6.1 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 1	68
3.6.2 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 2	90
3.6.3 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 3	109
CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES	130
4.1 Conclusiones	131
4.2 Reflexiones finales	139
Referentes Bibliográficos	142
ANEXOS	145

Lista de esquemas

<i>Esquema 1. Coherencia vertical y horizontal en relación con los Estándares seleccionados a desarrollar en la presente investigación. (Esquema adaptado del MEN, 2006, pág.79)</i>	38
<i>Esquema 2. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales (Radford, 2013, p. 24)</i>	45
<i>Esquema 3. Componentes analíticos en las formas del pensamiento algebraico</i>	51
<i>Esquema 4. Fases de la investigación</i>	54

Lista de ilustraciones

<i>Ilustración 1. Tarea 1</i>	<i>59</i>
<i>Ilustración 2. Tarea 2</i>	<i>62</i>
<i>Ilustración 3. Tarea 3</i>	<i>64</i>
<i>Ilustración 4. Conteo de los cuadrados de la Figura 5 realizado por Paula. Gesto indexical señalando cada cuadrado de la Figura 5 para identificar la cantidad de cuadrados. (Captura imagen del video minuto 07:22)</i>	<i>70</i>
<i>Ilustración 5. Identificación del número de cuadrados de la base de la Figura 4, donde Mariana realiza un gesto indexical señalando los cuadrados de la base para dar respuesta al interrogante hecho por la profesora sobre la Figura 5. (Captura imagen del video minuto 04:00)</i>	<i>76</i>
<i>Ilustración 6. Representación de la Figura 8 por Mariana, donde se observa que inicia con base ocho sin recurrir a las figuras anteriores. (Captura de imagen del video minuto 08:15).....</i>	<i>78</i>
<i>Ilustración 7. Cálculo numérico de Mariana sobre el número de cuadrados de la Figura 12 de forma descendente iniciando en la base de la figura.....</i>	<i>79</i>
<i>Ilustración 8. Representación de María de la Figura 6. Toma la Figura 5 previamente construida y le agrega el número de cuadrados que le corresponde a la base de la Figura 6. (Captura imagen del video minuto 05:45)</i>	<i>80</i>
<i>Ilustración 9. Proceso de la Figura 8 sobre la base de la Figura 6 por María. (Captura del video minuto 08:38).....</i>	<i>81</i>
<i>Ilustración 10. Cálculo numérico realizado por María para encontrarla cantidad de cuadrados que conforman la Figura 16</i>	<i>83</i>
<i>Ilustración 11. Señalamiento de Jhon haciendo un deslizamiento deíctico de una figura a la otra para indicar que la figura anterior va encima de la base de la nueva figura</i>	<i>85</i>
<i>Ilustración 12. Señalamientos deícticos de Samy para encontrar la relación entre el número de cuadrados de la base y el número de la figura</i>	<i>88</i>
<i>Ilustración 13. Cálculo numérico para encontrar la cantidad de círculos de la Figura 54 por Mariana. (Captura del video minuto 07:23).....</i>	<i>95</i>

<i>Ilustración 14. Mensaje de Mariana a un compañero para hallar el número de círculos de cualquier figura de la secuencia.....</i>	<i>96</i>
<i>Ilustración 15. Secuencia de señalamiento de María mostrando el número de círculos que aumenta en cada figura</i>	<i>97</i>
<i>Ilustración 16. Producción de María para dar respuesta al ítem c)</i>	<i>99</i>
<i>Ilustración 17. Señalamiento deíctico realizado por Jhon para indicar que en la base de la figura se suma un círculo más. (Captura de imagen del video minuto 06:55)</i>	<i>103</i>
<i>Ilustración 18. Producción de Jhon para dar respuesta al número de círculos de la Figura 20. (Captura de imagen del video minuto 14:54).....</i>	<i>104</i>
<i>Ilustración 19. Forma en la que Jhon generaliza el patrón de cada término de la secuencia, mediante una sumatoria. (Captura de imagen del video minuto 10:47)</i>	<i>105</i>
<i>Ilustración 20. Producción por Samy para encontrar el número de círculos de la Figura 10</i>	<i>108</i>
<i>Ilustración 21. Producción de Paula al graficar la Figura 4, 5 y 6.</i>	<i>112</i>
<i>Ilustración 22. Producción de Paula para escribir un mensaje a un compañero, explicando la forma de encontrar el número de palillos para cualquier figura de la secuencia</i>	<i>114</i>
<i>Ilustración 23. Mensaje de Mariana a un compañero para encontrar el número de palillos para el número de figura que está dentro de la balota.</i>	<i>117</i>
<i>Ilustración 24 .Producción de María para dar respuesta al ítem e).....</i>	<i>121</i>
<i>Ilustración 25. Mensaje de María a un compañero expresando cómo encontrar el número de palillos para el número de figura que está dentro de la balota que ella sacó de la bolsa.....</i>	<i>122</i>
<i>Ilustración 26. Mensaje de Jhon a un compañero expresando cómo encontrar el número de palillos para el número de figura que se encuentra dentro de la balota.....</i>	<i>125</i>
<i>Ilustración 27. Mensaje de Samy a un compañero expresando cómo encontrar el número de palillos para el número de figura que está dentro de la balota</i>	<i>128</i>

Resumen

En este trabajo se analizan las características del pensamiento algebraico que manifiestan un grupo de cinco estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Técnica Occidente de Tuluá, Valle del Cauca, cuando se enfrentan a tres tareas sobre generalización de patrones de secuencias figurales. Para ello, se toma como referencia la propuesta conceptual de pensamiento algebraico realizada por Radford (2003, 2010, 2012, 2018) y Vergel (2014), la cual se basa en la teoría de la objetivación (Radford, 2013, 2014), específicamente, las tres características de pensamiento algebraico tomadas desde esta perspectiva conceptual, a saber: el sentido de indeterminancia, la analiticidad, y la expresión semiótica.

Los análisis de los resultados de las producciones de los estudiantes, muestran claras evidencias sobre las características del pensamiento algebraico que ellos activan para enfrentar las tareas, las cuales son propias, fundamentalmente, de un pensamiento algebraico de tipo factual. En esto, los estudiantes logran mediante generalizaciones aritméticas que luego evolucionan a algebraicas, deducir fórmulas para generalizar los patrones hallados a partir de su actividad perceptual, las cuales les permiten encontrar términos remotos de la secuencia. Así mismo, algunos estudiantes al enfrentar las tareas lograron hacerlo mediante el pensamiento algebraico contextual, pues la indeterminancia y su carácter operatorio hicieron presencia explícitamente mediante distintos medios semióticos, lo que fue posible solo a través de la actividad en tanto labor conjunta entre estudiantes y maestras.

Palabras claves: pensamiento algebraico, generalización de patrones, medios semióticos de objetivación, analiticidad, indeterminancia.

Abstract

In this paper we analyze the characteristics of algebraic thinking expressed by a group of five fifth grade students of Basic Primary Education of the Technical Educational Institution West of Tuluá, Valle del Cauca, when they face three tasks on generalization of sequence patterns figurines. For this, the conceptual proposal of algebraic thought made by Radford (2003, 2010, 2012, 2018) and Vergel (2014), which is based on the theory of objectification (Radford, 2013, 2014), is taken as reference, the three characteristics of algebraic thinking taken from this conceptual perspective, namely: the sense of indeterminacy, the analyticity, and the semiotic expression.

The analysis of the results of the students' productions, show clear evidences about the characteristics of the algebraic thinking that they activate to face the tasks, which are basically, of an algebraic thought of a factual type. In this, the students achieve by means of arithmetic generalizations that later evolve to algebraics, deduce formulas to generalize the patterns found from their perceptual activity, which allow them to find remote terms of the sequence. Likewise, some students when facing the tasks managed to do it through contextual algebraic thinking, because the indeterminacy and its operative character made presence explicitly through different semiotic means, which was possible only through the activity as joint work between students and teachers.

Keywords: algebraic thinking, generalization of patterns, semiotic means of objectification, analyticity, indeterminacy.

Introducción

La elaboración del presente trabajo parte de reconocer una problemática que se presenta en la Institución Educativa Técnica Occidente, donde el pensamiento algebraico no suele desarrollarse desde los primeros grados de escolaridad, pese a que múltiples investigaciones (Radford, 2012; Vergel, 2014, Godino, 2012) indican la necesidad de hacerlo desde la Educación Básica Primaria. Esta problemática afecta el buen desempeño de los estudiantes cuando llegan mayores grados de escolaridad, pues se ven necesariamente enfrentados con tareas que exigen la manipulación del lenguaje alfanumérico, lo que supone la toma de conciencia de cantidades indeterminadas como el uso de incógnitas, variables y parámetros.

Múltiples investigadores como Velásquez (2012), Rivera y Sánchez (2012), Vergel (2014) y Radford (2014), entre otros, han propuesto que una forma de introducir el álgebra en la escuela primaria es a través de tareas sobre generalización de patrones, puesto que con ellas se potencializa en el estudiante la observación, el reconocimiento de regularidades o patrones, su generalización, la identificación de variaciones entre cantidades de magnitudes y de objetos, entre otros aspectos; los cuales son objeto del discurso de los estudiantes mediante expresiones semióticas que no apelan necesariamente al uso de letras, al menos en etapas iniciales, pero que poco a poco van evolucionando hacia mayores niveles de abstracción en la designación simbólica. Esto, desde luego, madura progresivamente el pensamiento algebraico de los estudiantes.

En este mismo sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) desde los documentos ministeriales como son los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), proponen trabajar

actividades de generalización de patrones como un escenario ideal para el enfrentar fenómenos de variación y cambio desde los primeros grados de escolaridad, que desarrollen en el estudiante habilidades de percepción e identificación de regularidades que se repiten en una situación dada, las cuales permiten un acercamiento al álgebra de forma temprana.

Tomando en consideración estas orientaciones, que a su vez invitan a promover el pensamiento algebraico de estudiantes desde edades tempranas, en este estudio se enfrentó a un grupo de cinco estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Técnica Occidente, de Tuluá, Valle del Cauca, con tres tareas sobre generalización de patrones figurales, por medio de las cuales se puede identificar las características de pensamiento algebraico que presentan ellos al desarrollarlas. Para esto, se torna fundamental en la concepción de pensamiento algebraico que en este trabajo se presenta, prestar especial atención a tres ideas fundamentales, que son: los medios semióticos de objetivación que utilizan los estudiantes para hallar regularidades y posteriormente generalizarlas, el sentido de indeterminancia, y el carácter analítico, esto es, poder operar con las indeterminadas.

Para dar cuenta de lo propuesto, el presente informe se estructura a partir de cuatro grandes capítulos mediante los cuales se va dando respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos trazados. Estos capítulos se describen a continuación:

El primer capítulo versa sobre los aspectos generales de esta investigación, en el cual se ubica el contexto donde se desarrolla, además se exhibe la problemática que permite construir la pregunta de investigación, así como los objetivos que vertebran el estudio a propósito de responder a la pregunta, la justificación que muestra la pertinencia de desarrollar este trabajo, y los antecedentes relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de la generalización de patrones.

En el segundo capítulo se exponen los referentes de orden conceptual que sustentan el desarrollo de este trabajo. En este orden de ideas, se hace una lectura y análisis de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en torno al pensamiento variacional; y se toma algunos elementos teóricos de la Teoría de la Objetivación y del Pensamiento Algebraico (Radford, 2012, 2014), los cuales son la base conceptual para el desarrollo de la presente investigación.

En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico que se sigue en el trabajo, en el cual se precisa el enfoque y proceso de la investigación, se describen los instrumentos con los cuales se recolecta la información, la población objeto de estudio, la implementación y descripción de las tareas. Además de esto, se exponen los análisis de las producciones realizadas por los estudiantes al enfrentar las tres tareas propuestas sobre generalización de patrones figurales, para lo cual se toma como referencia las teorías sobre las cuales reposa este estudio, expuestas en el capítulo anterior.

Finalmente, en el último capítulo se realizan las conclusiones de cara al trabajo que dan respuesta a la pregunta de investigación, y a su vez se plantean algunas reflexiones en torno al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo se presentan los elementos que delimitan el proceso de este estudio, como son: el marco contextual, que permite ubicar el escenario Institucional en el cual se desarrolla la investigación; los antecedentes de investigaciones realizadas por diferentes autores, los cuales aportan en diferentes direcciones en la realización de este trabajo, relacionado con el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de básica primaria a través de la generalización de patrones; la presentación del problema de interés, el cual da paso a la pregunta de investigación que guía el desarrollo de este trabajo, junto con los respectivos objetivos tanto el general como específicos; y finalmente, la justificación, donde se pone en manifiesto la importancia de realizar esta investigación. En este orden de ideas, se presentan en este capítulo los elementos que vertebran este estudio.

1.1 Marco Contextual

La Institución Educativa Técnica Occidente, entidad oficial que está localizada en la zona urbana del municipio de Tuluá centro y norte del Valle del Cauca. La Institución cuenta con una población de aproximadamente 3000 estudiantes con edades promedio de 5 a 18 años, pertenecientes a las comunas 6, 7, 8 y 9 del municipio, clasificados como estratos 1, 2 y 3. La Institución cuenta con dos jornadas académicas en donde se atienden estudiantes de cero a undécimo grado. Esta población presenta características similares en esferas Psicosociales, culturales y económicas donde convergen diversas problemáticas tales como: delincuencia común, uso de sustancias psicoactivas, madres cabeza de hogar y desempleo; lo cual directa o indirectamente terminan incidiendo en los desempeños académicos de la población estudiantil, puesto que por lo general los estudiantes carecen de acompañamiento y apoyo en sus procesos académicos de aprendizaje.

Ahora bien, el énfasis de la Institución es en gestión empresarial, fruto del apoyo que el SENA brinda para este proceso en los grados décimo y undécimo, con módulos y formación a los docentes en esta modalidad. Una de las potencialidades que tiene la Institución es precisamente la articulación con el SENA, lo cual ha posibilitado que los estudiantes de media técnica accedan a carreras técnicas certificadas, iniciando esta formación desde los primeros grados de escolaridad, donde se han abierto espacios para trabajar el área de emprendimiento, y desde grado sexto las áreas de contabilidad y administración propias de la formación empresarial.

Para fortalecer el proceso de articulación con el SENA, la enseñanza de las áreas se aborda desde la perspectiva del perfil de los docentes desde el grado quinto hasta undécimo y los grados

anteriores son manejados por un solo docente quien orienta todas las áreas del saber, pero que no cuentan con formación matemática y tienen a su cargo la labor de impartir esta área, con retos sustanciales para que la actividad matemática sea orientada desde los documentos ministeriales, lo cual termina redundando en que el desarrollo del pensamiento algebraico al menos en esta institución se vea descuidado, no porque los docentes así lo quieran sino por causa de su perfil.

La Institución cuenta con una organización por departamentos (matemáticas, ciencias sociales, lenguaje, etc.), donde se elige un líder de cada uno de acuerdo con su formación profesional, afinidad o experiencia, los cuales se reúnen eventualmente en las semanas de desarrollo institucional programadas desde Secretaría de Educación Municipal, para trabajar planes de estudio en cada área, y en la búsqueda de aportar al mejoramiento de los desempeños académicos de los estudiantes. En el departamento de matemática no se aborda la discusión sobre la importancia del pensamiento algebraico en la básica primaria, dado que se tiene la concepción que este pensamiento solo debe ser abordado en los grados superiores como una asignatura y no como una forma de pensar y actuar en las situaciones matemáticas; debido a esto, el interés de desarrollar el presente trabajo surge de acuerdo a esta problemática observada en el contexto de la Institución Educativa.

Con el desarrollo de este proyecto se busca impactar la Institución Educativa Técnica Occidente con el propósito de mejorar la formación y los desempeños académicos de los estudiantes del grado quinto, especialmente en el área de matemáticas en los procesos de pensamiento algebraico, así como también busca aportar en la formación de las autoras, una herramienta para el desarrollo de sus prácticas pedagógicas.

1.2 Presentación de la problemática

Desde los documentos ministeriales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se propone trabajar de forma paralela y articulada los diferentes pensamientos, el numérico, el espacial, el de medida o métrico, el aleatorio o probabilístico y el variacional, en los estudiantes desde los primeros grados de escolaridad.

Pese a que los documentos de política pública buscan integrarlos, por lo general en la escuela se le da mayor importancia al pensamiento numérico y los demás pensamientos se trabajan de forma desarticulada, con actividades aisladas en cada uno, lo cual genera en los estudiantes dificultades en algunos procesos matemáticos como analizar las relaciones que se dan entre las formas de pensamiento matemático, al enfrentar actividades como por ejemplo identificar en una situación ¿Qué cambia y qué no cambia?, ¿Qué hace qué cambie?, ¿y cuánto cambia?, además se desconoce que históricamente el álgebra y la geometría están íntimamente ligadas (Kieran 1992) lo que hace que la geometría se aborde en unos grados y el álgebra en otros, reflejándose en las organizaciones curriculares que se hacen en muchas instituciones y desde la experiencia de las autoras se evidencia que se trabaja el pensamiento numérico en educación básica primaria y el pensamiento algebraico en educación básica secundaria.

Esta separación hace que desde los primeros grados de escolaridad no se aborde el pensamiento algebraico en los estudiantes a partir de actividades que paulatinamente vayan desarrollando la emergencia del pensamiento algebraico, pero que debe prepararse desde básica primaria para que en grados superiores haya una maduración de este pensamiento, esto responde a que la concepción limitada de muchos docentes es que el álgebra es vista como una asignatura y no se ve como una forma de pensar diferente en situaciones y relaciones matemáticas que es

posible trabajarlas desde básica primaria, limitándose al uso del lenguaje alfanumérico (Radford, 2010)

Muchos autores recomiendan que una forma de introducir el álgebra desde los primeros grados de escolaridad sea a través de actividades de generalización de patrones numéricos y geométricos, como lo afirma Mason (1985)

La generalidad es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico. La generalización en el álgebra es algo primario hacia la abstracción matemática, y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación de la generalización en situaciones cotidianas. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para ello necesita percibir un patrón (unidad que se repite con regularidad,) y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien (p. 16).

Del mismo modo desde los documentos ministeriales se plantea la idea de preparar al estudiante de una forma apropiada del aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico a partir de actividades de generalización de patrones mucho antes de llegar a séptimo y octavo grado (MEN, 2006).

Teniendo en cuenta lo planteado por los autores anteriores, las investigadoras de este trabajo como docentes en ejercicio de la Institución Educativa Técnica Occidente, perciben que las consecuencias de no trabajar paralelamente los pensamientos, genera en los estudiantes del grado quinto de dicha institución, repercusión en sus desempeños matemáticos, los cuales al no poseer el manejo de elementos conceptuales comunes y articulados de los pensamientos, encontrarán un limitante para apropiarse de su buen desempeño en esta área, que se refleja en algunas ocasiones cuando tienen que solucionar actividades matemáticas y deben colocar en juego conocimientos

del pensamiento numérico, pero también conocimientos sobre lo geométrico, lo variacional y poder relacionar unos con otros.

Otro asunto problemático que se gesta por el hecho de separar el trabajo de los pensamientos, termina redundando en que los estudiantes al enfrentar la PRUEBA SABER presentan bajos desempeños, dado que ésta evalúa preguntas de forma articulada y paralela en los diferentes pensamientos matemáticos y procesos, con relación a las competencias (resolución de problemas, razonamiento y comunicación), en los componentes (aleatorio, espacial métrico y numérico variacional) la cual evalúa aprendizajes de cada uno de estos componentes.

En el componente numérico variacional, evalúa aprendizajes como reconocer los primeros términos de una secuencia a partir de un patrón previamente determinado, describir situaciones de variación usando lenguaje natural, establecer conjeturas acerca de regularidades en contextos geométricos y numéricos, traducir relaciones numéricas, expresadas gráfica y simbólicamente, así como reconocer y predecir patrones numéricos. De acuerdo con esto, es notorio que en las pruebas saber del grado quinto hay una atención especial por evaluar el desempeño de los estudiantes cuando enfrentan actividades de generalización de patrones en distintos contextos, pero los resultados arrojan que los estudiantes presentan errores cuando se enfrentan a una prueba de este tipo.

El informe emitido por el MEN sobre los resultados en los desempeños de los estudiantes de la Institución Técnica Occidente en 2016 evidenció que el 68% de los estudiantes presentan dificultad en los aprendizajes que corresponden al componente numérico variacional, de la competencia Resolución de Problemas en la prueba de Matemáticas. Analizando el informe en cada una de las competencias y los diferentes porcentajes, es importante resaltar que el componente con mayor dificultad es el numérico variacional.

En virtud de lo anterior, en esta investigación se pretende favorecer el pensamiento algebraico en los estudiantes del grado quinto con actividades que promuevan la generalización de patrones, con el fin de que el estudiante alcance distintas habilidades tales como: ver, ordenar, decir, relacionar, registrar, generalizar, deducir, tomar conciencia sobre la indeterminancia y la analiticidad, entre otras, que se propician con el desarrollo de la actividad y la interacción estudiante profesor, que son vitales para el desarrollo del pensamiento algebraico y teniendo en cuenta que estas habilidades no son propias de una edad en particular y pueden estimularse desde la básica primaria.

Por lo general todos estos elementos problemáticos que se han mencionado en este apartado, se reflejan en la Institución Educativa Técnica Occidente, dado que en las mismas planeaciones curriculares no se tiene en cuenta lo que ya se ha descrito, porque la formación de los docentes es una formación que no permite que se generen reflexiones y documentación en torno a este pensamiento y hace que el profesor no genere las actividades pertinentes con la conciencia necesaria para poder promover el pensamiento algebraico, con lo cual se hace necesario saber qué hacen los estudiantes de básica primaria cuando enfrentan tareas sobre generalización de patrones para ir madurando sus formas de pensamiento matemático en particular el algebraico, y parte de esa maduración es poder manejar particularmente el lenguaje alfanumérico en grados superiores, en este sentido se hace interesante desde este trabajo indagar esas formas de pensamiento algebraico que los estudiantes tienen en este momento, con el propósito de ir madurando este pensamiento a lo largo de su proceso educativo.

Por las razones expuestas, en este trabajo se intenta responder a la pregunta:

¿Cuáles son las características del pensamiento algebraico que presenta un grupo de estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Técnica Occidente cuando desarrollan tareas sobre generalización de patrones figurales?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Caracterizar las formas de pensamiento algebraico que se presentan en un grupo de estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Técnica Occidente cuando desarrollan tareas de generalización de patrones figurales.

1.3.2 Objetivos Específicos

Articular en un conjunto de tareas los elementos teóricos identificados que posibiliten indicios de pensamiento algebraico en estudiantes de grado quinto.

Reportar las producciones de un grupo de estudiantes de quinto grado cuando desarrollan tareas sobre generalización de patrones figurales que evidencien rasgos característicos de pensamiento algebraico.

Proponer una clasificación de las producciones realizadas por los estudiantes al desarrollar las tareas propuestas que evidencian una evolución en el pensamiento algebraico.

1.4 Justificación

Así como se plantea en el objetivo de esta investigación, se busca identificar y caracterizar las formas de pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Técnica Occidente cuando enfrentan actividades de generalización de patrones; y teniendo en cuenta los aportes en las investigaciones de Radford (2018) y Vergel (2014) que se han realizado en aras de trabajar este pensamiento desde la básica primaria.

Los autores mencionados anteriormente concluyen que la introducción del pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad, permite que los niños logren comprender ideas de variación y cambio, resuelvan tareas donde se identifican patrones mediante el uso del lenguaje simbólico y natural, que es vital para el estudio del álgebra escolar, y tomando en consideración que desde los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas se hace referencia a la noción de pensamiento variacional como el eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en la escuela; el desarrollo del pensamiento variacional se puede abordar desde los primeros años de la educación básica, por medio del estudio de la generalización de patrones y entendiéndose el pensamiento variacional como una forma específica de reconocer la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos y que el pensamiento algebraico se entiende como el conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que le dan forma y sentido al pensamiento

variacional como lo mencionan (Vergel & Rojas, 2013). Es por ello que la presente investigación adquiere su razón de ser debido a tres aspectos fundamentales:

En primer lugar: se aborda el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones como una estrategia para que los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Técnica Occidente desarrollen distintas habilidades tales como: ver, ordenar, decir, relacionar, registrar, generalizar, y justificar matemáticamente relaciones entre cantidades, como una forma de progresar en el uso del lenguaje y la comunicación matemática. Como lo menciona (Godino & Font, 2003)

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebido como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central. (p.774)

Se espera también que la introducción del álgebra desde los primeros años escolares sea abordada no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones y situaciones matemáticas, reduzca en los estudiantes las dificultades conceptuales y procedimentales en la resolución de situaciones de la vida cotidiana sobre la variación y el cambio como se plantea en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Se pretende que desde los currículos institucionales y los docentes mismos, el álgebra no sea concebida solo como la utilización de letras y símbolos en una actividad propia de la secundaria, es por ello que desde las orientaciones de los documentos de política pública como son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se propone una reestructuración conceptual y

metodológica del álgebra escolar, enfatizada desde el pensamiento variacional, que ponga el acento en los procesos de generalización, la comunicación, la argumentación y la modelación de situaciones de cambio, como ejes fundamentales en la construcción del pensamiento algebraico, y plantean sugerencias explícitas sobre actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la educación básica primaria: citado en (Vergel & Rojas, 2013). Esta invitación que hacen los documentos de política pública es asumida en este trabajo.

Ahora bien, otro aspecto que justifica el desarrollo de este trabajo es el marco teórico que aquí se adopta, dado que es un marco teórico que permite caracterizar las formas de pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólico) en las producciones de los estudiantes, de forma clara y precisa mediante los diferentes medios semióticos de objetivación, que movilizan los estudiantes cuando enfrentan tareas sobre generalización de patrones, las cuales se fundamentan tal y como se presentan en el segundo capítulo

Ahora bien otro aspecto que se considera importante en este trabajo es impactar las prácticas de aula de la Institución, generando herramientas conceptuales en las autoras de este trabajo para interpretar los procesos algebraicos como un espacio rico en actividad matemática que convoque a la búsqueda de significados y relaciones, a la reflexión, a la comunicación de las observaciones y a la organización de los aprendizajes, permitiendo favorecer el pensamiento algebraico en los estudiantes, y disminuir las dificultades en el aprendizaje de este, impulsándolo desde los primeros grados de escolaridad y así mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas.

Como tercer aspecto, con los resultados de esta investigación donde se hizo necesario saber qué hacían los estudiantes de básica primaria cuando enfrentaron tareas sobre generalización de patrones las cuales permitieron mostrar en qué estrato de pensamiento algebraico se encontraron sus producciones, se busca brindar bases o puntos de partida para que los docentes de básica

primaria de la Institución Educativa Técnica Occidente y otras instituciones del municipio de Tuluá, adapten tanto la metodología utilizada como las actividades propuestas con los estudiantes como una alternativa de mejoramiento a nivel pedagógico impactando así el currículo institucional, que les permita favorecer e ir madurando sus formas de pensamiento matemático en particular el algebraico desde edad temprana.

1.5 Antecedentes

En este apartado se analizan algunos referentes de investigaciones desde el ámbito local, nacional e internacional, que se ha realizado sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica primaria, problemática objeto de estudio que se aborda en este trabajo y que sirve como punto de partida y como referente para lograr el propósito que se pretende desarrollar en esta investigación. También se tomaron como base algunas de las tareas sobre secuencias figurales y la forma en la estructura de análisis en el desarrollo de dichas tareas.

Rivera & Sánchez (2012) presentaron el análisis de los resultados del diseño e implementación de una secuencia de actividades implementada a estudiantes del grado tercero, relacionado con la generalización de patrones para aportar elementos conceptuales y procedimentales sobre la reflexión de la educación matemática en el desarrollo del pensamiento variacional desde edad temprana para potencializar la inicialización del álgebra.

El diseño y la implementación de la secuencia propuesta por las autoras permitieron que los estudiantes lograran dar un significado a las variables, logrando un acercamiento al pensamiento variacional mediante el proceso de generalizar.

Hernández & Tapiero (2014) presentan resultados obtenidos de una secuencia didáctica aplicada a estudiantes de quinto grado, relacionado con el desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos, lograron en los estudiantes niveles progresivos de abstracción y generalización a partir de secuencias de gráficos expuestos, identificando variación y cambio.

Estas autoras muestran la pertinencia del desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros ciclos de escolaridad, rompiendo con la manera tradicional en que los sistemas simbólicos y algebraicos emergen en las aulas de clase sin sentido para los estudiantes.

Moreno (2015) propone una aproximación al pensamiento algebraico a estudiantes del grado tercero de básica primaria, mediante una secuencia de tareas matemáticas que involucran patrones y principios básicos del desarrollo del pensamiento numérico y pensamiento algebraico tales como la variación, el cambio y las estructuras multiplicativas, en donde los estudiantes adquieran herramientas conceptuales para argumentar y construir.

El autor afirma que, aunque las tareas realizadas no fueron suficientes para promover por completo el pensamiento algebraico, sí permitió que los estudiantes analizaran la forma en que cambia y aumenta una secuencia de números o figuras y relacionaran conjeturas en una secuencia de patrones, lo cual es vital para iniciar el estudio del álgebra escolar.

Sánchez (2016) presentó un trabajo de investigación enmarcado desde las Didácticas de las Matemáticas y Tecnologías de la Información para caracterizar las formas de pensamiento algebraico (factual, contextual y simbólico), a partir de una actividad mediada con Geogebra en estudiantes de cuarto grado de básica primaria.

Por medio de este estudio, deja abierta otras posibilidades de investigación con relación a la problemática abordada, puesto que Geogebra es una herramienta poco utilizada en los primeros grados de escolaridad para el diseño de tareas en el desarrollo del pensamiento algebraico, igualmente abre un espacio para investigaciones en las que se haga énfasis en el trabajo con estructuras numéricas para desarrollar el pensamiento algebraico desde edad temprana, utilizando su marco teórico dado que sus resultados le permitieron evidenciar que los estudiantes sí logran identificar relaciones y expresarlas tanto en lenguaje gestual, natural y simbólico.

Velásquez (2012) indagó en su proyecto sobre cómo construir el concepto de sucesión numérica a través de la identificación de patrones de regularidad por medio de un diseño y desarrollo de una estrategia metodológica donde el aprendizaje basado en la lúdica, uso de material concreto, observación y registro de datos en estudiantes de grado cuarto, con esta propuesta logró posibilitar el concepto matemático que se pretendía desarrollar, así como el reconocimiento de procesos de variación y cambio en sucesiones numéricas.

Guzmán (2013) centró su atención en una propuesta didáctica en la cual se aportó al pensamiento algebraico de los niños desde básica primaria de los grados cuarto y quinto. Con las actividades diseñadas los niños lograron aproximarse al concepto de variación, atribuyéndole sentido a los símbolos, dado que se introducen variables y se exploran significados desde la observación, la intuición, la creatividad, el reconocimiento de patrones, regularidades y no por un procedimiento predeterminado.

Vergel (2014) centró su interés en identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grado de básica primaria, como resultado de su participación en la actividad matemática del aula concretamente en torno a tareas sobre generalización de patrones.

Su tesis doctoral contribuye al conocimiento relacionado con estrategias que los estudiantes ponen en juego cuando afrontan problemas de generalización de patrones y con la caracterización del pensamiento algebraico en edad temprana, así como en la construcción de currículos que consideren el desarrollo del pensamiento algebraico desde la básica primaria, que incida en una mejora significativa de los aprendizajes de los estudiantes. Se tomó como referencia esta tesis para realizar análisis multimodal centrado en los medios semióticos de objetivación.

Sibaja & Soto (2016) indagaron sobre el desarrollo del razonamiento algebraico en niños de tercer grado de básica primaria, a través de tareas asociadas a la identificación de patrones y regularidades, construcción de secuencias y equivalencias.

Por medio de la experiencia en el aula las autoras afirman que lograron avances en el fortalecimiento del Razonamiento Algebraico, dado que pudieron evidenciar cómo los niños resuelven las tareas, completan las secuencias, identifican los patrones de formación y formalizan generalizaciones, mediante el uso de un lenguaje simbólico y natural.

Butto (2005) investigó sobre la introducción temprana al pensamiento algebraico en estudiantes de quinto y sexto grado, utilizando dos rutas de preparación temprana al pensamiento algebraico (razonamiento proporcional y procesos de generalización).

En donde los resultados de los análisis de las actividades didácticas dejan ver la existencia de habilidades y dificultades típicas de esas edades, también afirma que, a pesar de que los estudiantes no han desarrollado aún todas las estructuras cognitivas y matemáticas para comprender la complejidad del pensamiento algebraico, logran comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general.

Molina (2006) estudió sobre el significado del signo igual y el desarrollo del pensamiento relacional en estudiantes de grado tercero, como elementos relevantes para integrar el pensamiento algebraico en el aprendizaje de las matemáticas en la básica primaria. Adaptándolo con la propuesta Early - Algebra que consiste en la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones y situaciones matemáticas.

La autora pone de manifiesto su trabajo como un aporte al conocimiento sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente en relación al trabajo con igualdades y secuencias numéricas y a la integración del álgebra en el aprendizaje de la aritmética desde la básica primaria.

La lectura de los anteriores antecedentes aporta en tres sentidos a esta investigación. Primero, para ayudar a sustentar la existencia de una problemática que no solo sucede en la Institución Educativa Técnica Occidente, sino que es una tendencia generalizada, donde el pensamiento algebraico solo se trabaja en grados superiores; segundo para ayudar a entender el marco conceptual donde se presenta la importancia de abordar el pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad a través de la generalización de patrones; y tercero, para

seleccionar las tareas y rediseñarlas relacionadas con secuencias figurales que se van aplicar a los estudiantes con los cuales se lleva a cabo la investigación, así como también la estructura de los análisis en las producciones de los estudiantes al desarrollar dichas tareas, la cual fue tomada de la tesis doctoral de Vergel 2014.

CAPÍTULO II: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este capítulo del trabajo se plantean dos referentes, el curricular mediante el cual se hace lectura y análisis de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006); desde estos documentos de política pública se brindan orientaciones para trabajar la generalización de patrones desde la Educación Básica Primaria con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades relacionadas con este proceso matemático y desde el referente didáctico se toma la Teoría de la Objetivación de Radford (2014), Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico de Vergel (2013), Formas del pensamiento algebraico Vergel (2014); en estas investigaciones se consideran los procesos de generalización de patrones como una forma de desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes desde los primeros grados de escolaridad y se brindan los elementos conceptuales que permiten caracterizar el pensamiento algebraico, teniendo en cuenta tres unidades de análisis que son la analiticidad, la indeterminancia y la designación simbólica.

2.1 Perspectiva curricular

Para el desarrollo de este trabajo es importante tomar en consideración las orientaciones o directrices que se brindan desde los documentos de política pública como son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), que buscan orientar la actividad matemática en la escuela considerando como un elemento fundamental en esta orientación la forma en que los estudiantes aprenden las matemáticas y su relación con la cultura y el mundo que lo rodea, de tal modo que les permita poner en juego sus conocimientos fuera del ámbito escolar en situaciones que se le presentan en su día a día, dado que los fenómenos que se pueden modelar con las matemáticas están presente en múltiples situaciones del diario vivir, para contribuir con el desarrollo integral de los estudiantes, donde no solo se hace énfasis en el aprendizaje de conceptos y de procedimientos, sino en procesos de pensamientos y aprendizajes que puedan dar sentido al mundo que lo rodea, expresar la realidad, representarla, explicarla y actuar en y para ella (MEN 1998).

2.1.1 Lineamientos curriculares de Matemáticas

Los lineamientos son una propuesta curricular que busca orientar los currículos de matemáticas de las instituciones educativas y las prácticas de aula, fomentando la fundamentación pedagógica y disciplinar, así como el intercambio de experiencias en el contexto institucional (MEN, 1998), con el fin de trabajar en los estudiantes la creatividad, el trabajo solidario, crear grupos de estudio y fomentar la investigación en docentes y estudiantes, en este documento se contempla que todo currículo de matemáticas debe organizarse de acuerdo con tres aspectos fundamentales que son Los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

Procesos generales: “tienen que ver con los aprendizajes tales como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, la comparación y ejercitación de procedimientos”. (MEN, 1998, pág. 18). Para atender el objetivo propuesto en este trabajo se hará un mayor énfasis en el razonamiento, la comunicación, y la modelación puesto que son importantes para el desarrollo de las tareas propuestas, debido a que involucran elementos que favorecen su realización y, además, caracterizan el desarrollo del pensamiento algebraico. Es importante mencionar que no se excluye el planteamiento y resolución de problemas, pero el centro de atención son los que se describen a continuación:

El razonamiento desde los Lineamientos Curriculares se entiende como la habilidad para interpretar la información y resolver situaciones de la vida cotidiana; por lo cual se hace necesario que el docente posibilite este proceso en el aula, a través de la exploración, la comprobación y el uso de materiales que permita a los estudiantes la comprensión de ideas abstractas.

La comunicación es un proceso de gran importancia dado que le permite a los estudiantes construir vínculos entre las nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Entendiéndose desde los lineamientos Curriculares como la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas. (MEN, 1998).

La modelación se entiende como una construcción material o mental que puede usarse como referencia para comprender un modelo matemático para representar determinadas situaciones de la vida real. Se convierte en un proceso clave en el aprendizaje de las matemáticas puesto que la actividad matemática esta mediada por el quehacer, desde la cotidianidad del estudiante,

Los conocimientos básicos: son los que tienen que ver con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático; los cuales están relacionados con los diferentes

pensamientos como son el numérico y sistemas numéricos; el espacial y sistemas geométricos; el métrico y sistemas de medidas; el aleatorio y sistemas de datos, y el variacional y los sistemas algebraicos, analíticos. Atendiendo al propósito de los Lineamientos Curriculares en Matemática (1998) en este trabajo se hace énfasis en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos, el cual es entendido desde este documento como el estudio de la variación y el cambio que propone trabajar los diferentes pensamientos de forma articulada y paralela que le permitan al estudiante analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad de la vida diaria, de las ciencias y de las mismas matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (MEN, 1998).

Y en relación con los Estándares Básicos de Competencias, es entendido como “El tipo de pensamiento que tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (MEN 2006, pág. 66).

Se considera importante destacar este pensamiento, dado que, para el desarrollo de este, se contempla el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. Además, cabe resaltar que una manera de iniciar el aprendizaje del pensamiento variacional puede ser a partir de actividades que involucren generalización de patrones. En este orden el MEN (2006) señala que:

Las actividades de generalización de patrones involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras siendo una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a la educación secundaria, pues preparan a los estudiantes para la

construcción de la expresión algebraica a través de una formulación verbal de una “regla” recursiva que muestre como construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe a dicha expresión algebraica. (p.67)

Es conveniente mencionar que desde estos documentos ministeriales existe una ligera diferencia entre el pensamiento variacional y el pensamiento algebraico, dado que el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente, sobre el estudio de la variación y el cambio. Y el pensamiento algebraico es entendido como el conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional. Rojas y Vergel (2013).

El contexto: tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que dan sentido a las matemáticas que aprende. Desde (MEN, 1998) el contexto en su estructura curricular, se presenta en torno a situaciones problémicas desde las mismas matemáticas, la vida diaria, y de la relación con otras ciencias, razón por la cual se entiende que el contexto es eje articulador del currículo de matemáticas, dado que las situaciones problema son las que materializan estos contextos y son la razón del quehacer matemático en los procesos de pensamiento y en los diferentes tipos de pensamiento.

En este trabajo que se favorece el contexto en torno a la vida diaria, debido a que las situaciones problemáticas pensadas en las diferentes tareas están motivadas con situaciones cercanas a los estudiantes que tienen sentido en su cotidianidad.

2.1.2 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

En los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (MEN, 2006) al igual que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se propone el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos como la forma de pensar, identificar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos. El cual debe iniciar desde los primeros grados de escolaridad en actividades de generalización de patrones con el fin de acercarse en la comprensión y utilización de las funciones para el aprendizaje algebraico. Como se mencionó anteriormente

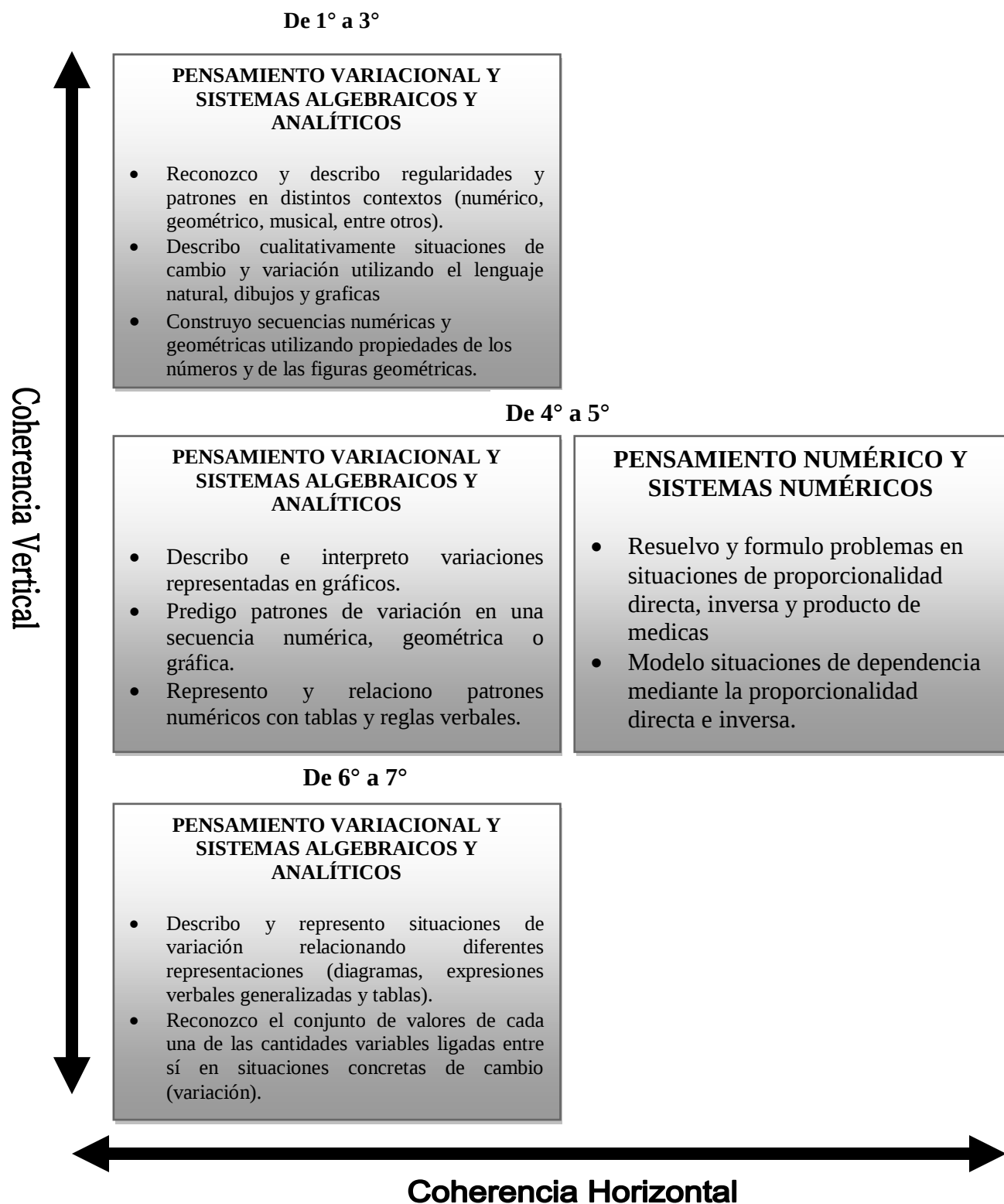
Teniendo en cuenta estas orientaciones ministeriales y tomando en consideración que los Estándares Básicos de Competencias se encuentran organizados por conjuntos de grados, para dinamizar la labor del docente y a la vez desarrollar paulatinamente en los estudiantes las competencias que deben superar a través del proceso educativo.

El presente trabajo centra la atención en los Estándares correspondientes para el grado cuarto y quinto en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, dado que los estudiantes objeto de estudio para desarrollar este proyecto corresponden al grado quinto y las tareas propuestas están pensadas para este grado, las cuales están relacionadas con el estudio de fenómenos de variación y el cambio, y hallazgo de un patrón. Los estándares de matemáticas tomados se relación a continuación

- ✓ Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- ✓ Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- ✓ Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- ✓ Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

Es importante resaltar que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se hace referencia a la coherencia vertical, como aquella relación que existe entre los estándares del mismo pensamiento y de diferentes conjuntos de grados, y a la coherencia horizontal que se refiere a la relación que guardan los Estándares en distintos pensamientos pero en el mismo conjunto de grados; el desarrollo de las tareas que en este trabajo se propone responde a estas dos coherencias en tanto se muestra la relación entre el pensamiento variacional y el pensamiento numérico a través de la generalización de patrones en los diferentes grados.

Por lo antes mencionado, en el siguiente esquema se muestran los estándares que guardan tanto coherencia vertical como horizontal con los cuales se enfocará esta investigación



Esquema 1. Coherencia vertical y horizontal en relación con los Estándares seleccionados a desarrollar en la presente investigación. (Esquema adaptado del MEN, 2006, pág.79)

Con el esquema anterior se presenta la coherencia horizontal donde se deja ver la relación del pensamiento variacional con el pensamiento numérico, con el fin de considerar la proporcionalidad directa como una vía para potenciar el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones en el grado cuarto y quinto, y en la coherencia vertical la relación que se da entre el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en los diferentes conjuntos de grados, donde se deja ver que el documento indica su enseñanza a través de la generalización de patrones desde los primeros grados de escolaridad, considerándose que estos pensamientos deben trabajarse de forma paralela, articulada y secuencial y no de forma fragmentada y esporádica. Desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se propone las actividades sobre generalización de patrones en secuencias numéricas, geométricas o gráficas. En este sentido los Estándares sustentan las tareas que en este trabajo de investigación se proponen.

2.2 Algunos elementos de la Teoría de la Objetivación

Desde la teoría de la objetivación de Radford (2014), se aborda la labor conjunta entre alumno y profesor, y cómo pensar de manera diferente el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, para que esta sea algo más que una tarea centrada solo en saberes. A través de la labor encontramos al otro o al alumno en sus dimensiones conceptuales y materiales y un sistema de ideas culturales, científicas, legales y artísticas del ser. En un sentido ontológico, la labor significa alteridad, entendida como el encuentro de ese que no soy yo y que al encontrarlo me transforma.

En la teoría de la objetivación se reconoce la importancia de la historia y la cultura, de ese mundo que rodea al estudiante y cómo estas dos influyen en su aprendizaje, como lo menciona

Radford (2010, 2014) la educación en general, la enseñanza y el aprendizaje tratan sobre saberes y seres, que han sido permeados por una historia y una cultura dentro de una sociedad, reconociendo así la importancia tanto de los saberes y del sujeto humano, que se teorizan como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes entienden la lógica cultural con la que se han dotado los objetos de conocimiento y se convierten en la constitución histórica de las formas de acción y pensamiento.

Desde esta perspectiva Radford indica que “La educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural, cuyo fin es la educación de individuos éticos y reflexivos, que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas, constituidas histórica y culturalmente”. Se parte de la idea de que todas las personas son seres que viven, piensan y actúan, dentro del marco de su cultura y como condición que la base del conocimiento está en la práctica social, vista no como una simple actividad sino más bien como una actividad humana de sentir y actuar.

De acuerdo con Radford, cuando un estudiante llega a la escuela, el saber acerca de cómo se resuelven diferentes operaciones con números ya sea suma, multiplicación, división, entre otros, no es fácil, el alumno no reconoce estos saberes, pues estos no son tangibles. Estos saberes se sintetizan de la labor humana institucionalizada culturalmente. Para ser conocidos estos saberes deben ser puestos en marcha y para eso se necesita la labor conjunta alumno profesor. En esta labor conjunta el saber se convierte en objeto de pensamiento y conciencia, es aquí donde la objetivación toma sentido, porque son “aquellos procesos sociales, corpóreos y simbólicos por medio de los cuales los alumnos encuentran progresivamente y de manera crítica, sistemas de ideas y de acción constituidos cultural e históricamente” (Radford, 2014, pág. 4).

Es importante en este apartado, hacer una diferencia entre el saber y el conocer. Desde esta teoría el saber se concibe como el producto de la práctica social, la realización de las labores humanas, es decir la posibilidad que tiene el ser humano en su forma de pensar. Puesto que el saber, está inserto en la cultura, el saber es poder hacer algo ya sea por sus propios medios o por el cúmulo de sus propias experiencias, o porque alguien dentro de su cultura te hace partícipe de ese saber. El saber es la representación objetiva de la realidad que se ha vivido, y se materializa a través de la actividad que se plantea a los estudiantes mediante tareas, material concreto, o cualquier medio con el cual se aborde; este saber se ve reflejado en las acciones, las cuales hacen que se actualice en forma de conocimiento.

El conocimiento es la manera como se muestra el saber. El contenido conceptual que lleva en su materialidad la naturaleza abstracta del saber, en donde se involucran los medios semióticos de objetivación (gestos, signos, símbolos, y artefactos de diferentes tipos que son usados por los estudiantes para objetivar ese conocimiento). Por ello el conocimiento es entendido como la actualización del saber y es el resultado de las actividades realizadas, (Radford, 2012).

La objetivación es un proceso social que se hace con otros, así todo el tiempo no tengamos al otro cerca, no es solo intelectual, incluye gestos, acciones, signos, artefactos, entre otros. En esta teoría el saber no es una especie de mercancía que está allí para ser adquirida. El saber es conceptualizado como una potencialidad cultural, y está constituido por sistemas de acción y de reflexión que están incrustados en la cultura (Radford, 2014).

Ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gestuado por los sujetos, es analizados de manera aislada, por el contrario, estas formas de expresión y producción de significados son estudiadas como el producto final de procesos de interacción social. Estos procesos se encuentran permeados por el objeto de la actividad y por la cultura a la que pertenecen los sujetos (Vergel 2014)

Además de la objetivación como forma de encontrarse con el conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje no solo producen saberes sino también subjetividad, como el punto de vista del sujeto basado en su propio argumento hace parte de esa formación, donde hay una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y la creación de un espacio político y social dentro del cual puedan desarrollarse subjetividades reflexivas, solidarias y responsables. De este modo se reconoce que “La subjetivación consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo” (Radford, 2014, pág. 142).

La objetivación y la subjetivación, muestra cómo el ser humano se encuentra con todo lo que existe a su alrededor desde sí mismo, reconociendo desde una mirada crítica y de conciencia la existencia de una historia y una cultura de eso que lo rodea y su interacción con ella, permitiéndole el encuentro de esta herencia y su propia transformación. El sujeto se constituye y es constituido por mecanismos culturales de subjetivación, que no es posible sin la participación del sujeto.

Siguiendo los principios teóricos de la teoría de la objetivación, se concibe que en el acto del conocimiento humano se desarrollan la multimodalidad, donde intervienen diferentes modalidades como lo sensorial, lo kinestésico, lo táctil y lo perceptual, que se movilizan de forma sincrónica en el acto de expresar el conocimiento.

2.2.1 Sobre el pensamiento algebraico

Basados en la teoría de la objetivación como una forma de encontrarse con el saber a través de una historia y un legado cultural, el autor plantea algunas ideas sobre pensamiento algebraico, donde la generalización de patrones es uno de los procedimientos de producción del

conocimiento y en el que aparecen tres problemas centrales: el fenomenológico, el epistemológico y el semiótico. En este sentido la idea de pensamiento algebraico que aquí se toma, parte de considerar que esta caracterización está en el marco de un proceso histórico y cultural que permite objetivar el saber a partir de la interacción con los objetos y los sujetos (Radford, 2013).

La generalización de patrones según Radford (2013), enlaza entonces tres problemas específicos:

- **El problema fenomenológico:** Forma en la cual la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad interactúan con los objetos particulares que constituyen la base para la generalización. Hay una comparación y reflexión sobre lo común e incluso sobre lo no común. En este orden de ideas, el problema de fondo consiste en reconocer a partir de la actividad perceptual hechos comunes sobre casos particulares, esto es, sobre las figuras dadas en la secuencia, los cuales sirven como punto de partida para luego ser generalizados desprendiéndose así del caso concreto, es decir, del campo del fenómeno.

- **El problema epistemológico:** Surge el conocimiento para generalizar algo desde los objetos particulares. Se infiere la característica común a partir de los objetos concretos que se tienen. Es en este componente donde se abstraen los datos sensibles, se inducen o se generalizan para producir el nuevo objeto. La propiedad común es extrapolada a los siguientes términos. La generalización, desde lo fenomenológico, se da a partir de la articulación de dos estructuras, a saber: la estructura de tipo numérico, y la estructura de tipo espacial. Tal generalización, como se verá más adelante, puede ser de tipo aritmética o algebraica.

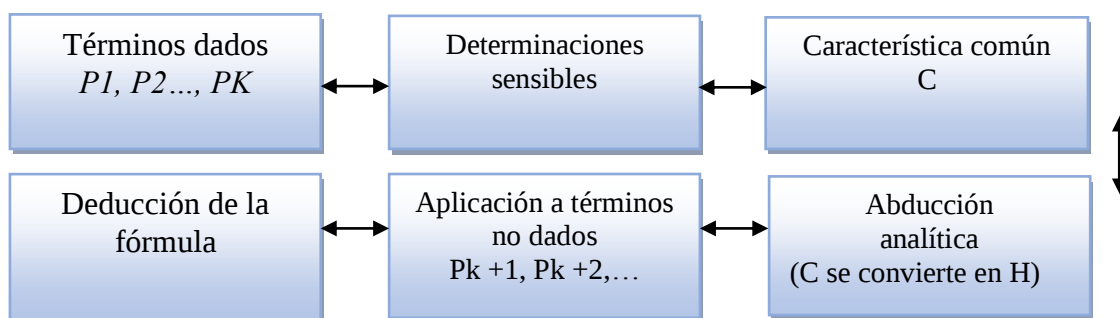
- **El problema semiótico:** Hace referencia a la forma de denotar los nuevos objetos, la cual se da a través de sistemas semióticos diferentes al simbolismo algebraico alfanumérico, ya sea por lenguaje oral, lenguaje escrito, gestos, signos, diagramas y fórmulas.

Estos tres problemas son propios de la manera de entender el pensamiento algebraico en este trabajo, el cual se asume como un sistema de procedimientos y esquemas que le dan forma y sentido al pensamiento variacional como lo plantea Radford. Donde la generalización de patrones es una buena forma para introducir el álgebra desde los primeros grados de escolaridad, siempre y cuando se tenga en cuenta una perspectiva amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar en el cual hay que considerar las formas del pensamiento algebraico (Vergel, 2015).

Como este mismo autor lo menciona y de acuerdo con los planteamientos de Radford (2013), son relevantes tres aspectos para la caracterización del pensamiento algebraico; en un sentido de lo indeterminado, *la indeterminancia*, que tiene que ver con la identificación de incógnitas, variables, constantes y parámetros; *la analiticidad* en donde se presenta tanto la deducción de una fórmula para generalizar características comunes (lo cual no requiere necesariamente del simbolismo algebraico), como el carácter operatorio de los objetos básicos que se están trabajando, es decir, las cantidades indeterminadas. En relación con el primer asunto, es importante identificar el rasgo analítico que es obligatorio para que la generalización sea algebraica, el cual se manifiesta en la deducción que se hace al querer generalizar la comunalidad de cualquier término de una secuencia (Radford, 2018), y *la designación simbólica o expresión semiótica*, la cual es la manera específica por la que se nombran los objetos. Cuando la *indeterminancia* y la *analiticidad* se unen, llevan al estudiante a la formulación de una regla o expresión general que le permite encontrar el término de la secuencia, es decir, que se generaliza el patrón o característica común de la secuencia, es decir, la *abducción*, (característica común de

la secuencia) es decir regla que se considera importante para diferenciar la **generalización algebraica** de la **generalización aritmética**, en la generalización aritmética la **abducción** es solamente utilizada para pasar de un término de la secuencia a otro, sin que haya una deducción de la expresión directa que lleva a calcular cualquier término de la secuencia (Radford, 2013).

Con el siguiente esquema se presenta el proceso de generalización y la complejidad que esta abarca.



Esquema 2. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales (Radford, 2013, p. 24)

En el esquema anterior se presenta la generalización algebraica de secuencias figurales o numéricas, en la cual P_1 , P_2 , corresponden a los primeros términos de la secuencia que se encuentra representados; mediante las determinaciones sensibles como la percepción, el estudiante identifica la estructura espacial y numérica de dicha secuencia, que le dará paso a identificar el patrón o comunidades (característica común) que le permite deducir una expresión con la cual puede calcular cualquier término de la secuencia así sea de términos remotos que aún se encuentran dentro del campo fenomenológico, hasta este punto la abducción pertenece a una generalización de tipo aritmético dado que es utilizada solo para pasar de un término a otro, cuando esta deducción de la fórmula la utiliza de forma analítica para cualquier término de la secuencia, se convierte en una hipótesis o sea en un principio asumido, convirtiéndose en una generalización de tipo algebraica.

La generalización algebraica se fundamenta en identificar una característica común, que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la misma que siguen estando fuera del campo perceptivo según (Radford, 2013). La abducción que se hace de esta característica debe utilizarse de manera analítica, lo cual significa que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodóticamente, es decir, que se puede demostrar una fórmula que proporciona el valor de cualquier término de la secuencia.

Radford (2013) plantea que es posible encontrar casos de producciones matemáticas en estudiantes que no presentan las características de la definición de la generalización algebraica de patrones, es decir cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término a otro, sin deducción de una expresión directa que permita calcular el número de cualquier término de la secuencia. El autor sugiere que estos estudiantes aún no han entrado en la generalización algebraica, y que pueden estar trabajando en la generalización aritmética al intentar generalizar algo. Si bien lo generalizado puede ser una característica común, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia.

De acuerdo al proceso de generalización que se evidencie en las producciones de los estudiantes, se reconocen tres formas o estratos del pensamiento algebraico, los cuales son el **Factual, Contextual y Simbólico**, estos estratos de pensamiento algebraico surgen en relación a los medios semióticos de objetivación que activan los estudiantes para dar cuenta de los procesos de generalización.

Como lo menciona Vergel (2015), el pensamiento Factual surge a partir de los medios cognitivos, físicos y perceptuales que son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad

perceptual y el lenguaje natural, que los estudiantes movilizan cuando desarrollan las acciones en torno a una secuencia figural. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación y se queda sin nombrar, pues se expresa en acciones concretas sobre el plano fenomenológico, por ejemplo, a través del trabajo sobre números mediante esquemas operatorios, por esto, podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más dos”. Radford 2010 (citado por Vergel, 2015). En este sentido, el pensamiento Factual es un estado inicial del pensamiento algebraico.

De acuerdo con este autor los estudiantes en los primeros grados de escolaridad alcanzan a desarrollar el pensamiento Factual. En el momento de trabajar con ellos sobre la generalización de patrones, hay que tener en cuenta los recursos semióticos (Vergel, 2013) usados por los estudiantes, los cuales abarcan el lenguaje escrito, lenguaje hablado, cualquier tipo de gesto, que de acuerdo con acciones o movimientos realizados por estos que demuestran los intentos por transmitir o construir una explicación sobre su modo de pensar.

Cuando los estudiantes movilizan de forma sincrónica estos recursos semióticos, se convierten en *nodos semióticos*. Entendiéndose estos como los signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos y se complementan para lograr una toma de conciencia de la manera en que la tarea puede ser abordada desde un punto de vista algebraico (Vergel, 2015).

El segundo estrato de pensamiento algebraico que habla Radford (2010), es el Contextual, el estudiante también utiliza el campo semiótico, donde él utiliza palabras claves o algunos elementos matemáticos como, figura, número, más uno, más dos, entre otros, pero que no alcanza el nivel de la generalización simbólica algebraica. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases “clave”. En este estrato

de pensamiento la indeterminancia es explícita...Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “número de la figura más para la fila de arriba y número de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total.

Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de **contracción semiótica**, que es un proceso donde se abstraen los elementos más importantes en el proceso de objetivación que permiten objetivar el saber, y se evidencia con el avance en el lenguaje y la identificación de la generalidad en el progreso de las diversas tareas. Ya los gestos no son necesarios, puesto que hay una reorganización de los medios semióticos en los que el estudiante centra su atención en aspectos que parecen ser más significativos (Radford, 2018).

Por último y de acuerdo con Radford (2010), el tercer estrato de pensamiento es el simbólico, donde las frases claves son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$. En este estrato de pensamiento “hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso”, a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de **contracción semiótica** (citado por Vergel, 2015, pág. 197). La transición entre el pensamiento Contextual y el Simbólico, es un proceso complejo de realizar para los estudiantes, puesto que es muy complicado que ellos puedan remplazar las expresiones espacio temporales como *aquí*, *acá*, etc. y deícticas por signos alfanuméricos del álgebra.

2.2.2 Aportes del marco conceptual al trabajo

El marco conceptual adoptado en este trabajo direcciona el desarrollo de este trabajo en varios sentidos. En primer lugar se atiende las orientaciones de los documentos de política

pública como lo son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en el área por cuanto se toma la invitación que hacen para trabajar la generalización de patrones en secuencias numéricas, geométricas o gráficas desde la educación Básica Primaria, con lo cual se aporta al desarrollo del pensamiento variacional. De este modo se fijan unos Estándares que sustentan las tareas que en este trabajo se proponen la cuales toman en consideración la propuesta curricular de los Lineamientos, a saber, tareas que aporten al desarrollo, conocimientos básicos, a los procesos generales de aprendizaje a partir de situaciones problemáticas.

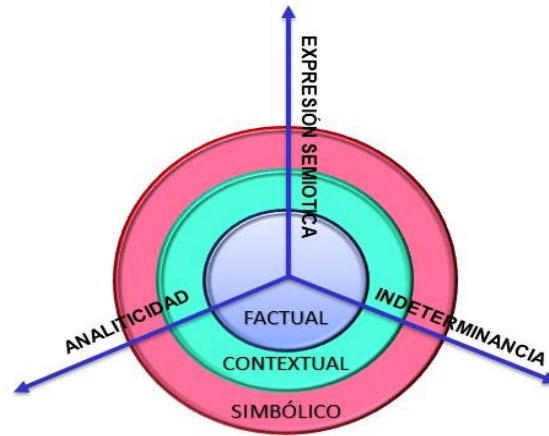
En segundo lugar, el marco didáctico adoptado, que se fundamenta desde la Teoría de la objetivación, brinda las bases epistemológicas generales para entender las formas en que los sujetos instancian (objetivan) el conocimiento en sí mismos a través de una actividad multimodal, fruto de la interacción del sujeto con el saber que se ha construido a través de la historia y la cultura. Sobre esta base epistémica se fundamenta la propuesta de pensamiento algebraico que aquí se asume, la cual, según Radford, toma en consideración tres estratos (Factual, Contextual y Simbólico) que, junto con sus componentes analíticos, constituyen un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes a través de los medios semióticos de objetivación que movilizan, cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones (Vergel, 2014,). En este sentido el diseño y análisis de las tareas sobre generalización de patrones que en esta investigación se presentan toman en consideración estas formas de pensamiento, en tanto que en ellas se intenta dar cuenta de ellos.

El diseño de las tareas obedece a los tres problemas que desde la perspectiva del pensamiento algebraico atañen a la generalización de patrones: el fenomenológico, el epistemológico y el semiótico. En el problema fenomenológico la secuencia de figuras le permite al estudiante a

través de la actividad perceptual, identificar ciertos patrones o comunalidades tanto en la estructura espacial como numérica; a través del problema epistemológico el estudiante consigue extrapolar esa característica común a los otros términos de la secuencia, y en el problema semiótico el estudiante a través de la actividad multimodal logra comunicar la característica común que ha encontrado, la cual utiliza para dar cuenta de cualquier término de la secuencia. De este modo, las tareas propuestas, así como las intervenciones que se hagan entre las investigadoras y los estudiantes, responden a estos tres problemas, esto es, a evidenciar su presencia cuando los estudiantes están actuando sobre las tareas.

El análisis de las producciones de los estudiantes en las tareas sobre generalización de patrones responde a las formas de pensamiento algebraico, en donde los componentes analíticos como la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica son clave para realizar la caracterización en estas formas de pensamiento. Es importante resaltar que en el primer estrato (factual) no se hace explícito el sentido de la indeterminancia y la analiticidad en tanto que su carácter operatorio sobre lo indeterminado no se convierte en objeto de discurso, dado que la actividad multimodal dispuesta por los estudiantes es a través de esquemas operacionales, la percepción, los gestos, los señalamientos deícticos, el lenguaje natural, entre otros. Por su parte, en el pensamiento contextual sí se hace explícito el sentido de la indeterminancia y la analiticidad, en donde no solo interviene el carácter operatorio de las cantidades desconocidas, sino también la deducción que el estudiante hace de la fórmula, tanto en la estructura numérica como espacial, que usa apodícticamente para deducir cualquier término de la figura, lo cual corresponde a una generalización de tipo algebraica. No obstante, cuando la generalización que se logra solo es utilizada para pasar de un término a otro, se considera de tipo aritmética.

Estas unidades de análisis que atraviesan las tres formas de pensamiento algebraico se presentan de forma esquemática a continuación.



Esquema 3. Componentes analíticos en las formas del pensamiento algebraico

CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los aspectos relacionados con el diseño metodológico que se sigue en este trabajo para su desarrollo, a saber: se exponen el enfoque y el proceso de investigación, se describe la población objeto de estudio, se presentan los instrumentos empleados para recolectar la información; se exponen cada una de las tres tareas que se les presentan a los estudiantes, realizando una descripción detallada de lo que se busca con ellas. Finalmente se exponen los análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las tareas.

3.1 Enfoque de la investigación

Con el propósito de responder a los objetivos propuestos en esta investigación, este trabajo se asume en el marco de un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo de los datos recolectados, los cuales fundamentan la esencia en el análisis de las producciones realizadas por los estudiantes al enfrentar las tareas sobre la generalización de patrones, para lo cual se tienen en cuenta las unidades de análisis o vectores a saber: la analiticidad, la indeterminancia y la designación simbólica, así como también los tres estratos de pensamiento algebraico según Radford (2013).

Por medio de esta investigación se comprende, describe e interpreta las manifestaciones de los estudiantes a partir de los datos recogidos. Según Sampieri (2014) “Con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (p. 92).

Esta investigación se desarrolla bajo un enfoque interpretativo que busca explicar, comprender e interpretar los significados de las acciones, las argumentaciones, representaciones y percepciones de los estudiantes al solucionar las tareas asociadas con la generalización de patrones, la cual se realizará por medio del estudio de casos.

El estudio de caso se define como “estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta analizan profundamente una unidad holística para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar alguna teoría” (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2008, p. 164)

3.2 El proceso de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se consideran varias fases como se ilustra en el esquema:



Esquema 4. Fases de la investigación

A continuación, se describe cada una de las fases:

Fase 1: Identificación de la problemática y el contexto de estudio. En esta fase se buscó identificar y caracterizar la problemática que se presenta en la Institución Educativa Técnica Occidente cuando los estudiantes se enfrentan a actividades relacionadas con la generalización de patrones a propósito del desarrollo del pensamiento algebraico, los cuales han demostrado bajos desempeños en el área de matemáticas y en los resultados obtenidos en la prueba saber. Esta problemática se pone en correspondencia con algunos planteamientos de la didáctica de las matemáticas interesada en el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas. A

partir de esta problemática se planteó la pregunta de investigación, los objetivos y la justificación; por medio de la cual la presente investigación adquiere su razón de ser.

Fase 2: Identificación de los elementos conceptuales y curriculares. En esta fase se identifican y representan los elementos curriculares a partir de los documentos ministeriales como son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), y elementos teóricos basados en la Teoría de la Objetivación y el pensamiento algebraico según Radford (2010, 2014), y Vergel (2014), para el diseño y puesta en marcha de las tareas propuestas en torno a la generalización de patrones.

Fase 3: Aplicación y análisis de resultados. En esta última fase se realiza la implementación de las tareas en torno a la generalización de patrones, en un grupo de 5 estudiantes del grado quinto de la Institución Técnica Occidente del municipio de Tuluá Valle del Cauca, las cuales fueron retomadas de otros autores que han realizado investigaciones en esta misma dirección. A partir de los datos recolectados se realiza el análisis de los resultados, el cual permite responder al objetivo general trazado en el presente estudio, generando así las conclusiones del trabajo.

3.3 Población objeto de estudio

Para el desarrollo de la investigación se propone implementar tres tareas con cinco estudiantes a través del estudio de caso en la Institución Educativa Técnica Occidente del municipio de Tuluá, la cual está certificada y es de carácter oficial. Estos estudiantes son seleccionados de forma aleatoria, se elige trabajar con cinco estudiantes del grado quinto de educación básica primaria, jornada de la tarde. Este grupo está conformado por tres niñas y dos niños con edades

de 10 años, pertenecientes a un a un estrato socio económico 1 y 2. El rendimiento académico de estos estudiantes de acuerdo con el sistema evaluativo de la Institución es bueno.

Es importante resaltar que las tareas son aplicadas solo a estos cinco estudiantes puesto que se trabaja de forma personalizada, dado que es un estudio de caso y se pretende realizar una filmación a cada uno de ellos, de tal forma que se logren detallar todos los medios semióticos de objetivación utilizados al abordar las tareas. Este trabajo con un número grande de estudiantes sería más complejo pues se dificultaría centrar la atención en cada detalle, gesto o palabra que los estudiantes utilicen lo que desbordaría este estudio. Al realizarlo de esta forma, se puede hacer un análisis y caracterización más precisa de la producción del estudiante cuando enfrenta las tareas propuestas.

Es importante mencionar que los estudiantes poco o nada han abordado este tipo de actividades antes en sus clases de matemáticas.

3.4 Instrumentos para la recolección de la información

Tal como lo menciona Sampieri (2014), la investigación cualitativa busca obtener datos (que se convertirán en información) de personas, seres vivos, situaciones o procesos en profundidad; en las propias “formas de expresión” de cada uno. Al tratarse de seres humanos, los datos que interesan son conceptos, percepciones, imágenes mentales, creencias, emociones, interacciones, pensamientos, experiencias y vivencias manifestadas en el lenguaje de los participantes, ya sea de manera individual, grupal o colectiva; los cuales se recolectan con la finalidad de analizarlos y comprenderlos y así responder a la pregunta de investigación.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes al desarrollar las tareas, se opta por dos tipos de fuentes documentales: las grabaciones de audio y video y los registros escritos de los estudiantes. Es importante resaltar que se opta por estos dos tipos de instrumentos dado que las grabaciones en video y audio, permiten capturar cada detalle realizado por los estudiantes en el momento de resolver cada una de las tareas y poderlos observar cada que sea necesario, y así realizar un análisis y una caracterización detallada de los distintos medios semióticos de objetivación que disponen los estudiantes para comunicar los diferentes objetivaciones de comunalidades halladas y sus posteriores generalizaciones.

Los registros escritos permiten observar los cálculos y argumentos que los estudiantes realizan para dar respuesta a cada una de las secuencias propuestas en las tareas y así complementar el análisis, de tal modo que se obtenga con mayor exactitud la caracterización del pensamiento algebraico en cada una de las producciones de los estudiantes con los que se desarrolla el presente trabajo.

3.5 Justificación de las tareas propuestas

El propósito de las tareas propuesta a los estudiantes en esta investigación es que ellos puedan buscar e identificar variaciones y cambios, así como objetivar distintos patrones para posteriormente, generalizarlos, los cuales se encuentran tanto en la estructura espacial como numérica de las secuencias presentadas.

Con la presentación de las tres tareas se busca analizar las formas de acción de los estudiantes, los procedimientos que utilizan, sus gestos, determinaciones sensibles, las expresiones deícticas, y las lingüísticas que emplean tanto verbales como escritas, y el tipo de generalización que

alcanzan los estudiantes durante las tareas propuestas por las investigadoras para caracterizar el pensamiento algebraico, que disponen en sus producciones.

A continuación, se presenta las tres tareas con el objetivo particular que se propone en cada una de ellas.

Tarea 1

El objetivo de esta primera tarea es que los estudiantes a partir de determinaciones sensibles sobre el terreno fenomenológico, reconozcan las variaciones que se presenta en la secuencia, tanto en la estructura espacial como en la numérica, de tal modo que logren objetivar el patrón gráfico y numérico que se observa en esta, para que posteriormente puedan describirlo de forma verbal y graficarlo, además se espera que los estudiantes puedan una vez encontrada la característica común y que logren generalizarla, hallar los términos siguientes de la secuencia. Esta tarea al ser la primera para los estudiantes está anclada al hecho concreto como se demuestra con los ítems planteados a partir de la secuencia figural. Con ello se pretende fundamentalmente actuar en el campo fenomenológico buscando solo generalidades de tipo factual.

Para el desarrollo de esta primera tarea, se les entrega a los estudiantes, material manipulativo (cuadrados en cartulina) que le permita poder representar las figuras de la secuencia.

Nombre del estudiante: _____

Grado: _____ Edad: _____

Observa la secuencia de las siguientes figuras

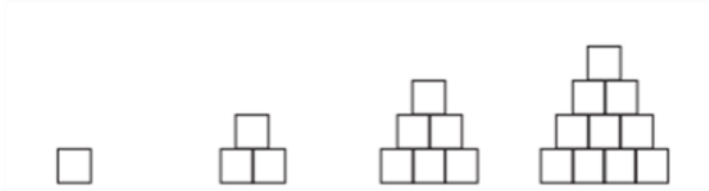


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

A partir de lo observado realice una reflexión sobre la secuencia en relación con las siguientes preguntas:

- ¿Qué cambia?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en las Figuras 5 y 6? Justifica tu respuesta.
- Andrés un estudiante de la clase, afirma que para la Figura 8 se necesitan 30 cuadrados. ¿Es correcta la afirmación de Andrés?, en caso contrario explica por qué.

Ilustración 1. Tarea 1

Es importante resaltar que la Tarea 1 por ser la primera es de menor complejidad comparada con las tareas 2 y 3, dado que en esta solamente se requiere identificar el patrón o regularidad que se establece de una figura a otra, sin pretender que el estudiante llegue a deducir la expresión general que permitirá identificar la cantidad de cuadrados para cualquier término de la secuencia. Aunque las tareas son similares en el proceso de búsqueda del patrón, se diferencian en su nivel de complejidad, dado que en las tareas 2 y 3 se busca hacer emerger otros medios semióticos de objetivación como las palabras claves y el sentido de indeterminancia y la analiticidad.

A continuación, se presenta el objetivo con el cual se plantean los interrogantes de la tarea anterior.

Con el ítem a), después de la observación realizada por el estudiante en el terreno fenomenológico, se busca que identifiquen y expresen que el número de cuadrados varía en cada figura al igual que el tamaño y la forma de estas.

Con el ítem b), se pretende que los estudiantes den cuenta de la regularidad que existe entre figura y figura y expliquen el número de cuadrados que debe haber en las figuras por las cuales se les indaga, las cuales están por fuera del campo perceptivo, lo que requiere ciertas generalizaciones. Para poder lograr esto, el estudiante puede encontrar diferentes formas de hallar la regularidad, algunas pueden ser: identificar que la cantidad de cuadrados en la base es igual al número de la figura, y que en cada figura va aumentando uno en cada nivel; que el número de cuadrados totales varían de figura a figura; que la base es el número de la figura y se le aumenta toda la figura anterior; entre otras. Finalmente se pretende que, por medio de su reflexión y percepción pueda encontrar el patrón figural para dar respuesta al interrogante planteado.

En el ítem c), se le plantea al estudiante una situación ficticia, en la cual se hace una afirmación y se pretende que los estudiantes identifiquen si es correcta o no dicha afirmación, para lo cual él debe recurrir a graficar o deducir una fórmula que le permita hallar el número de cuadrados que hay en la Figura 8. Para ello, él debe comprobarlo haciendo uso de alguna de las regularidades o deducciones que pudo haber encontrado en el ítem anterior. Es importante resaltar que se le pide dar cuenta del número de cuadrados de la Figura 8, para identificar si el estudiante necesariamente debe recurrir a graficar la Figura 7 o si lo hace por deducción de

alguna fórmula, lo cual develaría el rol epistémico de la generalización realizada: algebraica o aritmética.

Tarea 2

El objetivo de la Tarea 2, es que los estudiantes realicen cálculos numéricos, elaboren representaciones gráficas y las interpreten, que encuentren el patrón partiendo de la secuencia, identificando lo que cambia y lo que permanece constante, que lo generalicen y que puedan deducir una fórmula para hallar la cantidad de círculos de términos remotos en la secuencia. Esta segunda tarea es similar a la Tarea anterior como se puede ver en los ítems propuestos, caracterizándose en que los ítems que se proponen a los estudiantes indagan por un número concreto o específico de figura (salvo el primer caso) y en este sentido se piensa abordar la tarea desde el campo del fenómeno sobre hechos concretos. Sin embargo, en esta Tarea, se avanza con la actividad a un nivel no contemplado en el caso anterior, esto es, forzar a los estudiantes a deducir una fórmula que les permita encontrar la cantidad de círculos en términos remotos de la secuencia. De este modo se quiere que aparezca un rasgo característico de la analiticidad: la generalización algebraica en tanto deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas, fruto de potenciales determinaciones sensibles que lo permitan.

Nombre del estudiante: _____

Grado: _____ Edad: _____

Observa la siguiente secuencia de círculos:

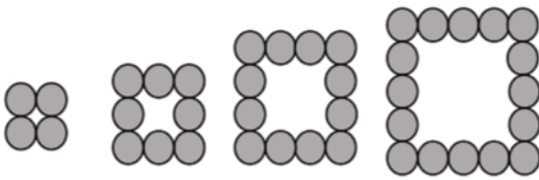


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Teniendo en cuenta la secuencia anterior, responde siguientes preguntas:

- ¿Qué se observa en la secuencia?
- ¿Qué sucedió de la Figura 1 a la Figura 2, de la Figura 2 a la Figura 3, y de la Figura 3 a la Figura 4?
- ¿Cuántos círculos habrá en la Figura 6?, justifica tu respuesta.
- Escribe una forma de hallar la cantidad de círculos de la Figura 20 sin realizar los dibujos y justifica tu respuesta.

Ilustración 2. Tarea 2

Con el interrogante del ítem a), se quiere que los estudiantes expresen de forma verbal y escrita, que hay una secuencia de círculos que forman una figura cuadrada, donde varía el número de círculos de cada figura, así como el número mismo de la figura, el tamaño de estas, entre otras.

Con el interrogante del ítem b), se pretende que los estudiantes identifiquen que de figura a figura se aumentan cuatro círculos en el cuadrado. De alguna manera se favorece una generalización aritmética en tanto que para dar cuenta del número de círculos de la figura n se necesita el de $n-1$. El estudiante puede identificar que en la Figura 2, hay cuatro círculos más

que en la Figura 1, y que en la Figura 3 también hay cuatro círculos más que en la dos y lo mismo sucede de las Figura 3 a la 4. Otra regularidad que el estudiante puede identificar, es decir que aumenta un círculo por cada lado de la figura, por ejemplo: aumenta un círculo abajo, aumenta uno al lado derecho, y uno al lado izquierdo.

Con el interrogante del ítem c), se busca que los estudiantes empleen generalizaciones aritméticas o algebraicas haciendo uso de la estructura espacial y numérica.

Con el ítem d) se pretende que el estudiante halle la Figura 20 sin realizar el dibujo, es decir, sin representarlo o graficarlo. Para esto se requiere, por ejemplo, que él identifique que puede multiplicar por cuatro el número de la figura, en este caso 20 por 4, y que realice una justificación de cómo llegó a la respuesta, o también el estudiante puede calcular lo solicitado realizando una adición de cuatro en cuatro. Aquí se vuelve a poner en juego el tipo de generalización que logran los estudiantes.

Tarea 3

Con esta última tarea al igual que las anteriores, se busca que los estudiantes identifiquen la característica común a partir de las representaciones gráficas que pueden hacer entre las figuras, que movilicen otros recursos diferentes al pictórico, con el cual pueden generar una hipótesis con respecto a la característica común que se encontraran, y donde se espera que movilicen medios semióticos de objetivación como la percepción, las palabras, las frases claves y la comparación cuando intenten comunicar a sus compañeros la forma para encontrar la cantidad de palillos para cualquier figura, haciendo explícita la indeterminancia y la analiticidad al tener que operar con estas cantidades desconocidas. En este sentido, la actividad aquí propuesta se mueve en relación con las dos anteriores a mayores niveles de complejidad, pues se solicita pensar sobre lo

indeterminado y operar con ello, lo que se ubica, sin lugar a duda, en mayores niveles de generalidad.

Nombre del estudiante: _____

Grado: _____ Edad: _____

Observa la siguiente secuencia de figuras y responde las preguntas

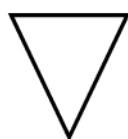


Figura 1

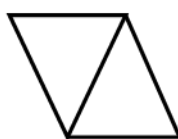


Figura 2

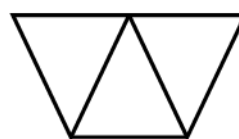


Figura 3

- ¿Cuántos triángulos y palillos forman las **Figuras 1, 2 y 3**?
- Dibuje las **Figuras 4, 5 y 6** de la secuencia, ¿Cuántos palillos se necesitan en cada figura?
- Encuentra a través del cálculo el número de palillos y de triángulos en la **Figura 10** sin graficar las **Figuras 8 y 9** Justifica tú respuesta.
- Margarita una estudiante de la clase afirma que en la **Figura 100** hay 130 palillos y 150 triángulos. ¿es correcta la afirmación de Margarita?
- Explica cómo harías para encontrar la cantidad de palillos en la **Figura 100**.
- Toma una de las balotas al azar, la cual contiene un número; sin mirarlo escribe un mensaje a un compañero de tu clase para expresar como encontrar el número de palillos para ese número de figura que está dentro de la balota, luego destapa la balota y comprueba el número de palillos de la forma que le explicaste a tu compañero.

Ilustración 3. Tarea 3

Con el interrogante del ítem a), se pretende que los estudiantes identifiquen el número de triángulos y palillos que forman cada figura, lo cual se logra por medio de un conteo. Con este ítem se espera que los estudiantes noten que hay una variación en el número de palillos y triángulos de forma ascendente (aumentan), y que los triángulos que van aumentando cambian su posición según el número de la figura. De igual forma se espera que identifiquen que el número de la figura es igual al número de triángulos que hay en ella.

Con el ítem b), se busca que los estudiantes grafiquen la Figura 4, 5 y 6, realizando nuevamente un conteo de palillos y de triángulos, el cual posibilitará encontrar distintos patrones existentes. El estudiante podrá decir que en cada figura aumentan dos palillos, y puede identificar que son números impares a partir de tres palillos que conforman la Figura 1. Para enfrentar este punto, el estudiante debió haber objetivado ciertas comunidades (espaciales o numéricas) y generalizarlas.

Con el ítem c), se pretende que los estudiantes encuentren a través del cálculo numérico, el número de palillos y de triángulos existentes en la Figura 10, sin graficar la Figura 8 y 9. Para poder llegar a esto, el estudiante debe realizar ciertas generalizaciones a partir de la estructura numérica de la secuencia, bien sea realizando un conteo de dos en dos a partir de la figura anterior, o haciendo deducciones de fórmulas.

Con el ítem d) se busca que él estudiante ponga a prueba las generalizaciones con figuras remotas, a partir de considerar un caso ficticio.

Con el ítem e), se busca que los estudiantes expresen por distintos medios semióticos de objetivación como hallaron el número de palillos y de triángulos de la figura dada o de cualquier figura y puedan expresar de esta forma la generalidad con palabras o a través de un cálculo numérico, alcanzando así la abducción mediante la generalización del patrón encontrado para

hallar la Figura 100 que es el doble más uno, en este caso 201 palillos, o para cualquier otro término de la secuencia.

Con el ítem f) se busca que la indeterminancia se vuelva objeto del discurso de los estudiantes, es decir, que se haga explícita. Para ello se le solicita que escriban un mensaje en el que explique cómo encontrar el número de palillos de un número desconocido que se encuentra al interior de una balota. Este tipo de pregunta ya no está anclada al hecho concreto porque exige al estudiante la toma de conciencia de la indeterminancia al igual que la analiticidad cuando el estudiante tiene que operar con ese número desconocido. En este ítem en particular, la tarea se torna diferente a las tareas anteriores dado que no pregunta por un número concreto de figura, sino que pregunta por cualquier caso, con lo cual se abre la posibilidad que aquellos estudiantes que todavía estén mostrando formas de pensamiento factual quizás puedan avanzar a un pensamiento contextual, donde la indeterminancia y su carácter operatorio (analiticidad) se hacen explícitas. Aunque los números con los que él estudiante se pueda encontrar en la balota, son número cercanos a la secuencia representada, con el fin de que pueda hallar el número de palillos por medio de la forma que él encontró para explicar en el mensaje y que lo pueda comprobar por medio de la graficación. En este ítem el interés de las investigadoras es poder dar importancia al sentido de la indeterminancia y la analiticidad que es clave dentro del proceso del desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

3.6 Análisis multimodal de las producciones de los estudiantes

En este trabajo de investigación, el análisis de las producciones de los estudiantes se realiza desde una concepto multimodal del pensamiento humano (Miranda, Radford, Guzmán, 2007), donde se relacionan todos los recursos semióticos que movilizan los estudiantes de forma

sincrónica (gestos, palabras, señalamientos, actividad perceptual), es decir todos los medios movilizados por los estudiantes a la hora de desarrollar las tareas sobre generalización de patrones.

En este apartado se presentan las acciones ofrecidas por los estudiantes al desarrollar los ítems que conforman las tres tareas propuestas por las investigadoras. Además, se presentan los respectivos análisis a la luz de los elementos conceptuales expuestos en este trabajo, los cuales versan sobre las formas del pensamiento algebraico, en donde se tiene en cuenta la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica, que aporta elementos para caracterizar el tipo de pensamiento algebraico dispuesto en las producciones de cada uno de los alumnos objeto de estudio. Los análisis que en este apartado se presentan, surgen de realizar una observación detallada de los medios semióticos de objetivación que cada uno de los estudiantes dispone al realizar las tareas propuestas. En estos análisis se incorporan fotografías que evidencian los gestos y los movimientos deícticos que realizan los estudiantes al resolver las tareas sobre generalización de patrones, en las transcripciones de los videos se mostrará el dialogo de las profesoras investigadoras, profesora Asceneth (PA) y profesora Maricel (PM), y los estudiantes Paula, Mariana, María, Jhon y Samy¹; mediante líneas (L1, L2...). Se utilizan corchetes ([...]) para aclarar las acciones realizadas por ellos y en letra cursiva. Cabe resaltar que los diálogos surgen de la interacción social entre las maestras y los estudiantes, y que dichas transcripciones corresponden a episodios de las grabaciones realizadas que se consideran aquí claves para caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes al desarrollar las tareas.

¹ Dado que los estudiantes son menores de edad sus nombres fueron cambiados para salvaguardar sus identidades.

3.6.1 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 1

Para el desarrollo de esta tarea se empleó una sesión de tres horas, el día 20 de febrero de 2018, de 01:30 PM hasta las 4:30 PM en la sala de matemáticas de la I.E. Técnica Occidente. Se trabajó de manera individual, realizando una grabación filmica con cada estudiante entre 30 y 40 minutos. La grabación se realizó de forma continua, al terminar un estudiante pasaba el siguiente hasta culminar esta primera tarea con los cinco estudiantes.

La profesora Maricel (PM) y La profesora Asceneth (PA) inician explicándole a los estudiantes que van a desarrollar una tarea y que analicen muy bien cada una de las preguntas y les piden que marquen con su nombre la hoja de la actividad entregada. Seguidamente se le sugiere usar el material manipulativo (cuadrados en cartulina) que se les entregó para representar cada una de las figuras de la secuencia si así lo desea.

Se presenta a continuación el análisis del primer ítem de la primera tarea de forma general para los cinco estudiantes puesto que las respuestas dadas por ellos fueron similares. A partir del interrogante ¿Qué cambia? todos los estudiantes logran identificar la variación en la estructura espacial y numérica, como se ilustra a modo de ejemplo en el siguiente episodio:

L1. PM: ¿Qué cambia?

L2. María: Que se fueron añadiendo más cuadritos.

L3. PM: Entonces qué cambia.

L4. María: La cantidad de cuadritos en cada figura.

En este ejemplo se evidencia que los estudiantes identificaron el aumento del número de cuadrados de cada figura. Con este tipo de respuesta se logra comprobar que los estudiantes logran alcanzar el objetivo propuesto en este interrogante, pues era importante inicialmente que los estudiantes identificaran dicha variación en el número de cuadrados que aumentaba de figura a figura. Llama la atención que las determinaciones sensibles realizadas por los estudiantes en el terreno fenomenológico se centraron exclusivamente en esta variación, dejando de lado otro tipo de variaciones como en el número de las figuras y el tamaño de ellas. Todos centraron su atención en la variación de la cantidad de cuadrados por figura.

Para los ítems b) y c), se realiza un análisis individual de las respuestas dadas por los estudiantes, dada la diversidad de estas.

Ítem b). ¿Cuántos cuadrados habrá en las *Figuras* 5 y 6? Justifica tu respuesta.

Paula decide usar el material manipulativo entregado para representar las figuras 1, 2, 3 y 4

L1. PM: ¿Cuándo usted representó las figuras qué observó?

L2. Paula: Que aquí había uno [*Señalando la Figura 1*] y acá se añadieron dos más [*Señalando la Figura 2*] y aquí fueron añadiendo más [*señalando la Figura 3*] y aquí fueron añadiendo más [*Señalando la Figura 4*].

L3. PM: ¿Y podríamos decir cuántos cuadraditos cambió en cada figura?

L4. Paula: En este dos [*Señalando la Figura 2*] en este tres [*Señalando la Figura 3* y *para la cuarta se queda pensando*] y aquí cuatro [*Señalando la Figura 4*].

L5. PM: ¡Muy bien! Perfecto.

Con las preguntas realizadas se puede notar como la intención de la profesora es lograr que la estudiante identifique cuántos cuadrados cambia de figura a figura.

L6. PM: Miremos la otra pregunta Paula lee en voz alta la pregunta del ítem b).

L7. PM: ¿Cómo hacemos para saber cuántos cuadraditos hay en la Figura 5 y 6?
¿Qué harías?

L8. Paula: En la cinco añadiría cinco y en la seis añadiría seis cuadraditos
[Señalando los espacios que ocuparían estas figuras en la secuencia].

La PA propone a Paula representar esas figuras para comprobar su hipótesis sobre el número de cuadrados de la Figura 5 y 6 [Paula representa las figuras].

Cuando representa la Figura 5, la profesora interviene:

L9. PM: Paula, ¿Esa qué figura sería?

L10. Paula: La cinco.

L11. PM: Figura 5 ¡aja! ¿Cuántos cuadraditos aumentaron en la Figura 5?

L12. Paula: Acá aumenta cuatro [señalando la Figura 4] y acá... [Se queda pensando y cuenta todos los cuadrados de la figura 5 señalando uno a uno con el dedo] cinco.



**Ilustración 4. Conteo de los cuadrados de la Figura 5 realizado por Paula. Gesto indexical señalando cada cuadrado de la Figura 5 para identificar la cantidad de cuadrados.
(Captura imagen del video minuto 07:22)**

L13. PA: Haga la Figura 6 [*Paula inicia con la representación de la Figura 6*].

L14.PM: Esa es la Figura 6, ¿cuántos cuadraditos aumentó en la Figura 6? [*Paula cuenta la cinco y cuenta la seis y responde siete*] la profesora dice ¿seguro?, ella vuelve a contar.

L15.Paula: Seis.

L16. PA: Pero dígame cómo hizo usted para hacer la cinco y la seis, ¿por qué la hizo así?

L17. Paula: Porque yo vi aquí [*señalando la base de la Figura 3*] se agregaban tres cuadritos más, y se agregaba la cantidad que era el número de la figura, o sea que si esta era la cinco [*señalando la base de la Figura 5*] se agregaba cinco, aquí seis [*señalando la base de la Figura 6*] aquí siete [*señalando una continuidad en el espacio sin estar la Figura 7*].

Un aspecto por resaltar en esta parte es el gesto indexical (gestos de señalamiento) que utiliza Paula en su respuesta en L17 “*se agregaba cinco, aquí seis, aquí siete...*” Lo que quiere decir que Paula ha objetivado una comunalidad de la secuencia: el aumento de cuadrados en la base según el número de la figura. Sin embargo, hasta este momento aún no ha logrado generalizar la comunalidad para cualquier término de la secuencia y sólo lo hace para las figuras representadas, de acuerdo con los planteamientos por Radford (2013), no ha logrado llegar a la abducción algebraica

El dialogo de las maestras y la estudiante continua.

L18. PM: ¿Cuántos cuadraditos habrá en la Figura 8?

L19. Paula: ¿Esta es la seis no? *[Señalando la Figura 6]* Entonces al otro se le agrega siete y el resultado que había quedado en el de la siete, se le agregan ocho.

L20. PA: ¿Cuántos serían? Hágalo con lápiz si quiere.

[La profesora le propone que si quiere dibuje o que si quiere realice la cuenta, como ella lo quiera hacer.] Paula saca el cuaderno y realiza una suma de la cantidad de cuadrados de la Figura 6 más siete que agrega del número de la figura y a ese resultado le suma ocho, que sería la cantidad de cuadrados de la Figura 8 *[realiza cálculo con los dedos]* a lo que responde.

L21. Paula: 36.

L22.PM: 36 en la Figura 8. ¡Bueno! Y si queremos comprobar eso entonces ¿cómo lo hacemos?

L23.Paula: Dibujando.

En este dialogo se ratifica que Paula ha encontrado la relación que existe entre la figura anterior y la base de la figura siguiente, como se muestra en L19 “¿Esta es la seis no? *[Señalando la Figura 6]* Entonces al otro se le agrega siete y el resultado que había quedado en el de la siete, se le agregan ocho”, pero todavía está pensando en el hecho fenomenológico, puesto que para dar respuesta a la pregunta de la profesora de cómo comprobar el número de cuadrados que hay en la Figura 8, ella propone dibujar, lo cual significa que está pensando aún en la estructura espacial. Esta situación pone de manifiesto que Paula ha encontrado una comunidad, o característica común pero aún está anclada al fenómeno, es decir, al hecho concreto de las figuras existentes. Más aun las evidencias sugieren, al menos hasta aquí, el uso de una generalización aritmética en tanto que para encontrar el número de cuadrados de cierta

figura se apoya en la cantidad de cuadrados de la figura anterior. Si bien hay una abducción esta aun no es analítica.

La PM lee el ítem c) “Andrés un estudiante de la clase afirma que para la Figura 8 se necesitan 30 cuadrados ¿es correcta la afirmación de Andrés? En caso contrario explica por qué”. Le pregunta si esta afirmación es verdadera o falsa, ante lo cual Paula responde que es falso, dado que la Figura 8 tiene 36 cuadrados, tal y como ella lo había comprobado anteriormente.

Tal y como ya se indicó, hasta este punto Paula ha logrado capturar cierto patrón o comunalidad de la secuencia, de figuras, que, si bien le permitió dar respuestas a los interrogantes de la tarea, tiene sus limitaciones.

Aunque el objetivo de la primera tarea era solo que los estudiantes identificaran ciertas variaciones (tamaño de la figura y aumento de cuadrados en cada figura) y encontraran el patrón o comunalidad en las figuras propuestas, se quiso indagar por otros números de figuras para comprobar si en realidad había identificado la generalidad y era capaz de aplicarla a cualquier término de la secuencia, tal y como se puede ilustrar a continuación.

L24. La PM: Si yo te dijera, ya no vamos a preguntar por el número de cuadrados de la Figura 8 si no que vamos a preguntar por el número de cuadrados de la Figura 12, ¿Tú qué dirías?

L25. Paula: $12 + 11...$ ¿puedo hacer una suma?

L26. PM. ¡Como quieras! *[Paula saca el cuaderno y realiza una suma de forma descendente $12+11+10+9...$ hasta el 1].*

L27. Paula: 78.

L28. PM: 78 bueno, Piensa en lo que te voy a decir: si yo quiero preguntar por el número de cuadrados de la Figura 45, qué forma encontrarías tú para decir: en la Figura 45 hay tantos cuadrados, sin uno tener que ir a dibujar, ¿habrá otra forma de averiguar el número de cuadrados?

L29. Paula: Voy pensando en la cabeza, voy sumándolos, 45, *[realizando con su mano movimientos al aire de arriba hacia abajo para indicar el arreglo vertical de las cantidades que se suman]* después 44, después 43...42, así de mayor a menor y voy sumando cada una hasta que llegue al uno.

L30. PM: ¿Así podría ser para cualquier número de figura? por ejemplo ¿si yo te digo el número de cuadrados de la Figura 80? ¿Entonces primer nivel...?

L31. Paula: 80 *[Realizando con su mano movimientos al aire de arriba hacia abajo para indicar el arreglo vertical de las cantidades que se suman]* 79 y así hasta llegar al uno.

En esta situación se logra percibir que Paula ha identificado que por cada nivel de la figura disminuye un cuadrado, y responde que para la figura 12 se necesitan 78 cuadrados y que así lo puede hacer para los términos específicos de la secuencia, tomando como base el número de la figura que le piden, sumando de mayor a menor y señalando con la mano “abajo-arriba” para relacionar los términos mayor y menor. Con estos cuestionamientos se quería lograr que la estudiante pueda encontrar el número de cuadrados que hay en un número particular de figura que además es un número alejado en la secuencia. El análisis muestra que ella puede encontrar mediante el cálculo numérico el número de cuadrados para cualquier término de figura específico, pero sigue anclada al hecho fenomenológico, es decir, basada en casos particulares.

La generalización que se logra se realiza sobre acciones numéricas mediante la aplicación de un esquema operacional, pero a través de la deducción de una fórmula que le permite ahora a Paula encontrar la cantidad de cuadrados de un número específico de figura, por remota que esta sea. Aquí la indeterminancia no se hace objeto de discurso. En este sentido lo que Paula ha presentado es una generalización algebraica factual.

La segunda estudiante es Mariana. Se le pide que lea el interrogante b). La PA le pregunta qué cómo haría para responder a ese ítem, por lo que ella inicia representando la Figura 5 y 6 sin necesidad de representar las anteriores, solo las observó en la hoja de la actividad.

L1. PA: ¿Cuéntanos por qué hizo esta y quedó así? [*Señalando la Figura 5*] y porqué hizo esta y quedo así [*señalando la Figura 6*] ¿cómo hizo usted para saber que esta es la Figura 5 y la 6?

L2. Mariana: Porque es que acá [*señalando con el lápiz la base de la Figura 4*] comienza por cuatro, entonces acá [*Señalando base de la Figura 5*] comencé por cinco, y así.

L3. PA: ¿Y acá qué pasó? [*Señalando los niveles de la Figura 5*].

L4. Mariana: Le fui quitando de a una y así.

L5.PA: ¿y acá? [*Señalando la Figura 6*].

L6. Mariana: También, solamente que le sumé una más [*y señala la Figura 6 que construyó*].

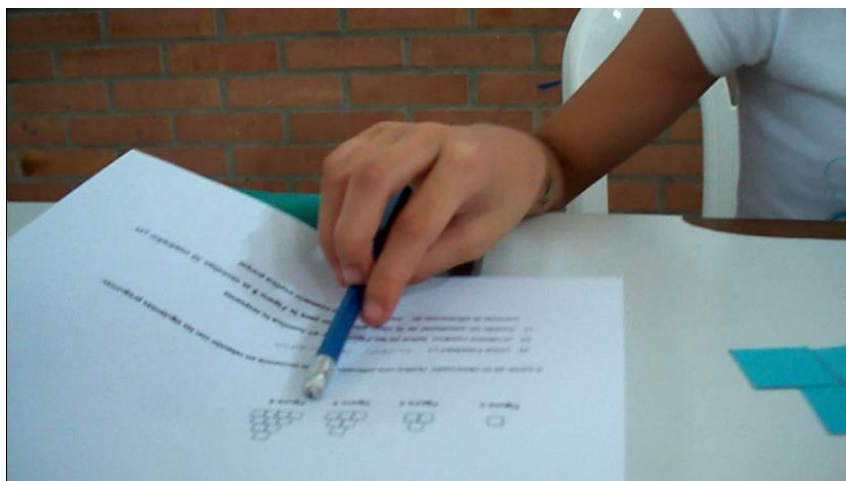


Ilustración 5. Identificación del número de cuadrados de la base de la Figura 4, donde Mariana realiza un gesto indexical señalando los cuadrados de la base para dar respuesta al interrogante hecho por la profesora sobre la Figura 5. (Captura imagen del video minuto 04:00)

L7. PM: Ok, esta es la Figura 5 y la Figura 6[señalando cada figura] entonces

¿cuántos cuadraditos hay en la Figura 5?

L8. Mariana: [Hace un conteo mental mirando la Figura 5] 15.

L9. PM: ¿Y en la Figura 6?

L10. Mariana: [Hace un conteo mental mirando la Figura 6] 21.

En este punto Mariana usa la actividad perceptual para construir la Figura 5 y 6, puesto que ella identificó que la Figura 4 estaba construida por cuatro cuadrados en la base y que disminuía uno en cada nivel, con lo cual se observa que no tuvo dificultad en tomar conciencia sobre un patrón: relación del número de la figura con el número de cuadrados de la base. En L2 “*porque es que acá comienza por cuatro entonces acá comencé por cinco y así*” se observa la intención perceptiva de Mariana, lo que le permite relacionar el número de cuadrados de la base con el número de la figura, colocando la relación encontrada como una regla necesaria para la representación de la figura. Otra comunidad identificada por Mariana es un cuadrado menos en cada nivel de la figura. Esta es una segunda determinación sensible que ella hace sobre el terreno

fenomenológico. La acción perceptiva de ella se fija en ver la figura por filas lo que le permitió llegar a la abducción.

L11. PM: Vamos a leer la otra pregunta. [*Mariana lee ítem c*] ¿Tú qué crees, que es verdad o que es mentira esa afirmación?

L12. PA: Andrés dice que para la Figura 8 necesita 30 cuadrados, ¿cómo hacemos para saber?

L13. Mariana: Pues haciendo la figura [*construye la Figura 8*].

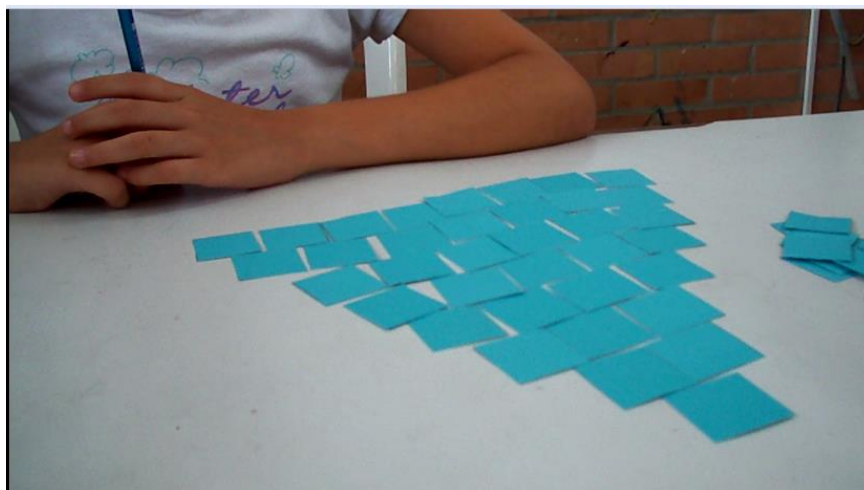


Ilustración 6. Representación de la Figura 8 por Mariana, donde se observa que inicia con base ocho sin recurrir a las figuras anteriores. (Captura de imagen del video minuto 08:15)

L14. PM: ¿Entonces es correcto o es falsa la afirmación de Andrés?

L15. Mariana: Falso.

L16. PM: ¿Por qué es falso?

L17. Mariana: Porque hay más cuadrados que los que dice acá [*señalando la hoja de la tarea y moviendo la cabeza en sentido de afirmación*].

L18. PM: Mariana como tú ya sabes hacer esto, le quieres explicar a un compañero de 5-2 como encontrar el número de cuadraditos de otra figura, ¿tú cómo le explicarías?

L19. Mariana: Pues que lo dibujara e hiciera esta figura [*señalando la Figura 8*].

L20. PM: ¿Y si es la Figura número 20?

L21. Mariana: Dibujándola.

L22. PA: Y si yo le pregunto que, sin dibujarla, ¿cómo podríamos hacer para encontrar los cuadrados de la Figura 20?

L23. Mariana: También se puede en la mente crear esa figura e ir contando cada cuadrado.

L24. PM: Haber Mariana, sin dibujar y sin representar en la mente ¿Cuál sería el número de cuadrados de la Figura 12?

L25. Mariana: Pues... ir sumando cada cuadrado.

L26. PM: ¿Cómo?

L27. Mariana: Primero ir sumando 12 y 11...ir sumando diez, ir sumando nueve, hasta llegar a uno.

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 + 11 \\
 \hline
 23 \\
 + 10 \\
 \hline
 33 \\
 + 9 \\
 \hline
 42 \\
 + 8 \\
 \hline
 50 \\
 + 7 \\
 \hline
 57 \\
 + 6 \\
 \hline
 63 \\
 + 5 \\
 \hline
 68 \\
 + 4 \\
 \hline
 72 \\
 + 3 \\
 \hline
 75 \\
 + 2 \\
 \hline
 77
 \end{array}$$

Ilustración 7. Cálculo numérico de Mariana sobre el número de cuadrados de la Figura 12 de forma descendente iniciando en la base de la figura

La profesora insiste preguntándole cómo hacer para encontrar la cantidad de cuadrados en otro número de figura que se encuentra alejado de la secuencia anteriormente presentada, ella responde que dibujando. Con esta intención de la profesora, se quería que la estudiante lograra una generalización algebraica del patrón encontrado y que ella explicara la manera de encontrar la cantidad de cuadrados de un número particular de figura sin recurrir a su estructura espacial.

El estudiante número tres es, María. Inicia la tarea con una lectura general de los ítems.

L1. PM: ¿Cómo hace usted para encontrar el número de cuadrados de la Figura 5 y 6? *[María pregunta que si puede representarla con los cuadrados de cartulina e inicia representando la Figura 5].*

L2. María: *[Realizando un conteo de los cuadrados de la figura, escribe su respuesta en la hoja]* 15.

L3. PA: ¿Para la Figura 6? *[María agrega la cantidad de cuadrados de la base de la figura 6 a la Figura 5, o sea, coloca seis cuadrados debajo de la Figura 5].*

A diferencia de los demás estudiantes, ella no requiere representar por separado la Figura 5 y la Figura 6, puesto que ha identificado que la figura siguiente es la figura anterior más la base que corresponde al número de la figura. Esto pone de manifiesto la abducción sobre la estructura espacial que María logró identificar.

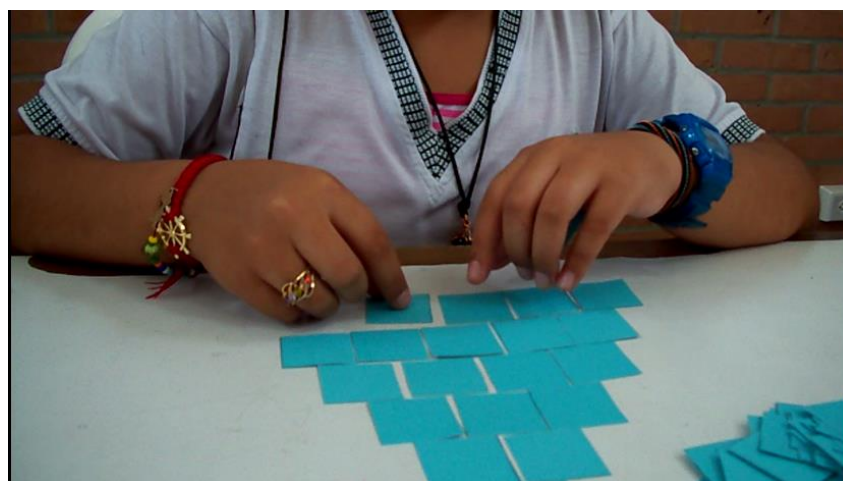


Ilustración 8. Representación de María de la Figura 6. Toma la Figura 5 previamente construida y le agrega el número de cuadrados que le corresponde a la base de la Figura 6. (Captura imagen del video minuto 05:45)

L4.PA: ¿Me explica qué pasó en la seis?

L5. María: En la cinco yo agregue cinco cuadrados más que en la cuatro *[y señala los niveles de la figura]* entonces yo en la respuesta coloque, para la Figura 5 se

necesitan 15 cuadrados, y en la Figura 6 agregué seis cuadrados más *[señalando la base de la figura]*.

L6. PM: En dónde agregaste los seis cuadrados más.

L7. María: Aquí a lo último *[señalando la base de la figura]* entonces yo no volví a contar los cuadrados porque ya sabía cuántos había en la cinco, entonces le sume estos seis a 15 y me dio 21.

María logra una abducción que no es analítica, pues necesita de la figura anterior y añadiendo cuadrados a ella encuentra los de la siguiente.

La PM lee el interrogante del ítem c) y pregunta si es falsa o verdadera la afirmación.

L8. María: Me tocaría como hacer la figura. *[En la mesa lo que hace es que agrega dos cuadrados en cada nivel de la Figura 6 que ya tenía representada, iniciando por la base, es decir que la base de la figura queda con ocho cuadrados y los cuenta]*.



Ilustración 9. Proceso de la Figura 8 sobre la base de la Figura 6 por María. (Captura del video minuto 08:38)

Al terminar de representar la Figura 8, escribe su respuesta en la hoja de tareas.

L9. PA: Explicas por favor.

L10. María: Como yo ya tenía la Figura 6, le coloqué dos cuadrados más y así seguí haciendo con todas las filas [*señalando los niveles de la Figura 8*].

L11. PM: ¿Y tú por qué le colocaste dos cuadraditos allá abajo?

L12. María: Porque yo acá ya tenía seis cuadraditos [*señalando la base de la Figura 6*] y como era la Figura 8 entonces en la base tenía que haber ocho cuadraditos

L13. PM: ¿O sea que el número de la figura es el número de la base?

L14. María: Sí señora.

Hasta este punto María ha identificado la relación que existe entre el número de la figura y el número de cuadrados de la base, así como también la estructura espacial y numérica de la figura anterior con respecto a la base de la figura siguiente, esto demuestra que María reconoció varios patrones o comunalidad en la secuencia de figuras, ella logra identificar el número de cuadrados de la base en cada figura, la estructura espacial y la variación en el número de cuadrados en cada nivel. Aun sus generalizaciones no logran el carácter algebraico.

En su afirmación L11“...*Entonces en la base tenía que haber ocho cuadraditos*” el sentido de obligatoriedad en la afirmación “*Tenía que haber ocho*” demuestra la actividad perceptual que moviliza María como un recurso semiótico para identificar tanto la estructura espacial como numérica de la secuencia de figuras y la relación con el número de cuadrados de la base con los que hay en cada nivel. En esta acción se evidencia el uso de diferentes recursos semióticos de objetivación como son, la percepción, los gestos y algunas palabras de obligatoriedad con el propósito de comunicar la objetivación de los patrones encontrados. Este hecho hace emergente la presencia de un nodo semiótico de objetivación.

Para identificar como haría María para encontrar la cantidad de cuadrados de figuras lejanas, se le pregunta por otros términos.

L15. PM: Si yo te digo vamos a encontrar otra figura, una figura más allá, pero no vamos a dibujar; por ejemplo, te pregunto por la Figura 16. ¿Qué manera encontrarías tú para encontrar el número de cuadrados?

L16. ¡Mmm!

L17. PA. Si quiere hágalo sin necesidad de representarlo con los cuadrados, ni dibujar.

L18. María: Sumaría [*Saca la hoja e inicia una sumatoria*].

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 16 \\
 + 15 \\
 + 14 \\
 + 13 \\
 + 12 \\
 + 11 \\
 + 10 \\
 \hline
 91
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 9 \\
 + 8 \\
 + 7 \\
 + 6 \\
 + 5 \\
 + 4 \\
 + 3 \\
 + 2 \\
 + 1 \\
 \hline
 136
 \end{array}$$

Ilustración 10. Cálculo numérico realizado por María para encontrarla cantidad de cuadrados que conforman la Figura 16

L19. María: La Figura 16 tendría 136 cuadrados.

L20. PM: ¡Bueno! Si preguntamos por cualquier número de figura, ¿cuál sería tú hipótesis, de cómo encontrar ese número de cuadraditos de cualquier término de la figura?

L21. María: Pues lo que se me ocurrió que sería más efectivo es sumar.

L22. PM: ¿Qué sumaría usted?

L23. María: Como era la Figura 16, entonces en la base tenía que haber 16, entonces lo que hice fue ir sumando como haciendo una cuenta regresiva.

L24. PM: Bueno entonces si yo te pregunto por la Figura 98 ¿cuál es la cuenta que tú harías?

L25. María: Pues ahí la suma me quedaría muy larga, por qué tendría que empezar en 98 hasta llegar al uno.

La intención de los interrogantes planteados por fuera de la tarea era comprobar que la estudiante lograra generalizar el patrón o comunalidad. La forma en que María desarrolló la tarea donde se detectaron diferentes actividades perceptuales, expresiones en sentido de obligatoriedad, las deducciones que realizó y las formas de expresarlas, que a la vez se convirtieron en nodos semióticos de objetivación, se complementaron para ver que la tarea fuera abordada desde un punto de vista algebraico dentro del pensamiento factual.

Los interrogantes que se hacen para que María indique la cantidad de cuadrados para figuras lejanas, hace, como se observa en L21 *“pues lo que se me ocurrió que sería más efectivo sumar”*, que se presente rasgo analítico que se manifiesta en la deducción que hace sobre la forma de encontrar el número de cuadrados para un número particular de la figura. Como lo menciona Radford (2018) el rasgo analítico es obligatorio para que la generalización sea algebraica y se manifiesta en la deducción que María hace para encontrar cualquier término.

El cuarto estudiante, Jhon, para responder al segundo ítem, hace un análisis de las figuras anteriores y realiza un conteo. Seguidamente vuelve y cuenta la Figura 4 e inicia con la representación de la Figura 5.

L1. PM: ¿Ese qué número de figura es?

L2. Jhon: 5.

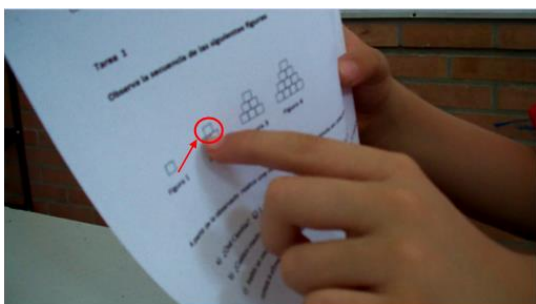
L3. PA: Hágala la seis [Jhon representa la Figura 6].

L4. PM: ¿Esa es la figura...?

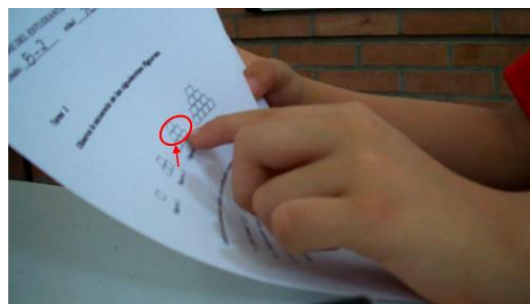
L5. Jhon: 6.

L6. PM: ¿Entonces cuántos cuadraditos encontraste en la Figura 5?

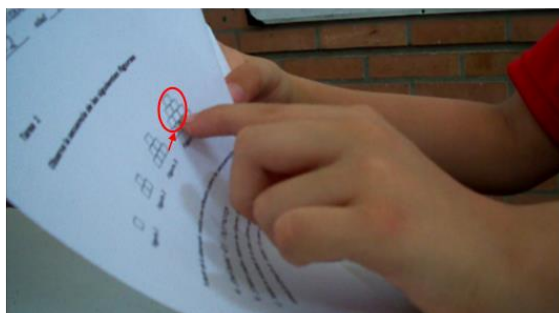
L7. Jhon: Porque aquí cada vez que va subiendo [desliza el dedo de la Figura 1 a la Figura 2] se le sube este número [indicando La Figura 1] se le suman dos, entonces estos de acá [deslizando la Figura 2 hacia la 3] se le suman tres [Señalando la Figura 3] más y más.



Minuto 09:56



Minuto 10:08



Minuto 10:09

Ilustración 11. Señalamiento de Jhon haciendo un deslizamiento déictico de una figura a la otra para indicar que la figura anterior va encima de la base de la nueva figura

Jhon moviliza un recurso semiótico cuando señala la Figura 1 y desliza su dedo hacia la Figura 2, indicando que la Figura 1 está superpuesta en la Figura 2 y le adiciona la base, de igual forma señala las figuras siguientes para describir el número de cuadrados de cada una de las figuras, lo que le sirve para identificar la cantidad de cuadrados de la Figura 5 y 6. Jhon hasta el momento ha identificado una doble relación: la que existe entre el número de cuadrados de la base de la figura con el número de la figura, y a su vez con la estructura de la figura anterior.

La actividad perceptual que Jhon hace sobre el hecho fenomenológico lo lleva a centrar su atención sobre la estructura espacial de una figura para llegar a la otra.

La PM lee el ítem c) para que pueda dar respuesta a este interrogante.

L8. La PM: ¿Es correcta la afirmación? *[Jhon decide representar la Figura 8 a partir de la Figura 7].*

L9. Jhon: *[Cuenta señalando con los dedos cada uno de los cuadrados de la figura]*
No es verdad, son 36.

Hasta este punto se observa que Jhon ha encontrado dos patrones, uno entre las figuras presentadas, es decir, una comunalidad de la estructura espacial de las figuras, lo cual se evidencia por su forma de llegar a las respuestas que se limita a la estructura de la figura anterior para determinar el número de cuadrados de la figura siguiente, y el segundo que le permite identificar que la base de la figura siguiente lleva un cuadrado más en su base.

Con el fin de profundizar en la identificación de estos patrones, se le pide al estudiante el número de cuadrados de otras figuras, como por ejemplo la Figura 15, el estudiante procede a dibujarla y hacer un conteo del número de cuadrados que tiene esta figura, dando como respuesta 120 cuadrados.

Jhon logra identificar el patrón o regularidad que se establece de una figura a la otra, movilizand o algunos medios semióticos de objetivación como los gestos y movimientos deícticos, que le permitieron lograr el objetivo para esta primera tarea, aunque para dar respuesta a los interrogantes, necesitó que las profesoras indicaran el número de la figura.

Las producciones ofrecidas por Jhon al enfrentar esta primera tarea, muestra los arraigos que él tiene en la estructura espacial de la figura y pone en evidencia generalizaciones aritméticas que logra realizar, sin ningún tipo de deducción de alguna fórmula.

Para finalizar con la primera tarea, el último estudiante es Samy. Realiza una lectura de los interrogantes y da respuesta al ítem b).

L1. PM: ¿Cómo haces tú para encontrar el número de cuadrados de la Figura 5 y 6?

L2. PA: Solo le dieron Figura 1, 2, 3 y 4.

L3. Samy: *[Responde señalando en la hoja el espacio donde iría la Figura 5]* aquí pondría cinco *[Señalando la base de la nueva figura]*, pondría cuatro *[señalando el siguiente nivel de la figura]*, pondría tres, pondría dos y pondría uno *[Señalando los niveles siguientes de la figura]*.

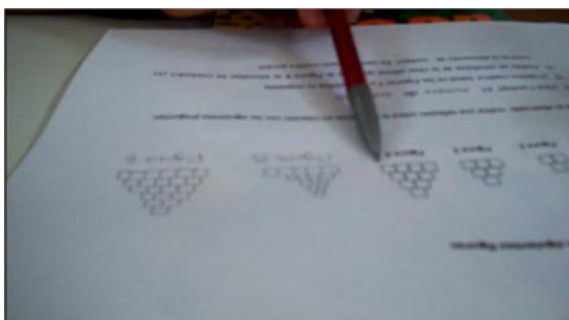
L4. PM: ¿Qué quieres hacer? *[Samy dibuja en la hoja de respuesta la Figura 5 y 6]*

L5. PA: Entonces díganos primero, ¿por qué esa es la Figura 5 y la 6? *[Señalando la Figura 5 y 6]* ¿Qué hizo usted para hacer la Figura 5 y 6?

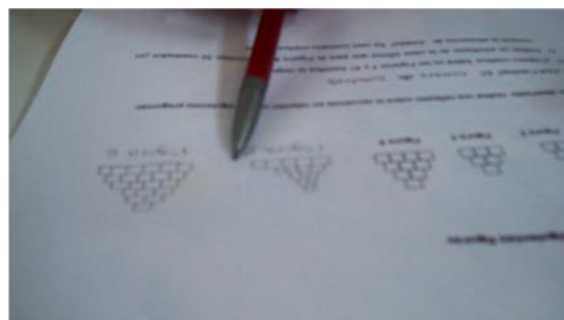
L6. Samy: Como acá hay cuatro *[Señala la base de la Figura 4]* entonces aquí debería ser cinco *[señala la base de la Figura 5]* acá hay tres *[señala la base de la Figura 3]* acá hay cinco *[señalando la base de la Figura 5]* y acá hay seis *[señalando la base de la Figura 6, y después señala cada nivel de la Figura 6]* cinco, cuatro, tres, dos y uno.

L7. PA: ¿Va disminuyendo en cada una?

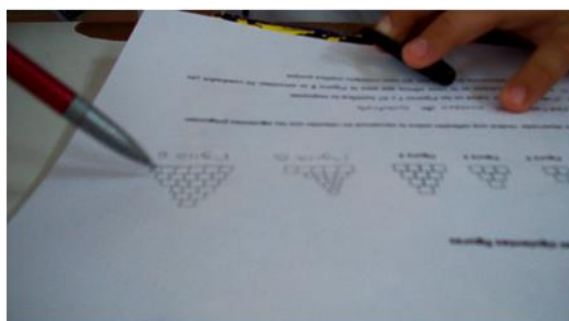
L8. Samy: Sí.



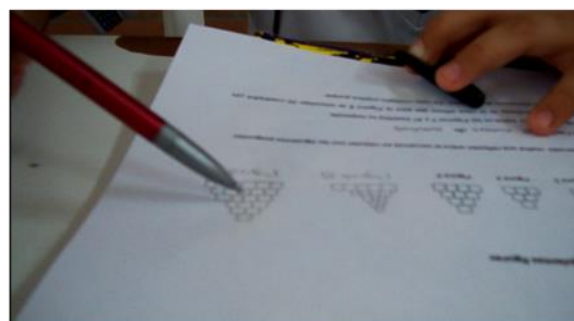
Minuto 4:23



Minuto 4:24



Minuto 4:31



Minuto 4:32

Ilustración 12. Señalamientos deícticos de Samy para encontrar la relación entre el número de cuadrados de la base y el número de la figura

Podemos observar que Samy a través de su percepción y señalamientos deícticos, ha encontrado la relación que existe entre el número de cuadrados de la base y el número de la figura, así como también, ha logrado identificar que en cada nivel de la figura va disminuyendo el número de cuadrados de uno en uno. De este modo cuando Samy afirma en L6 “*como acá hay cuatro entonces...aquí debería ser cinco*”, se evidencia el sentido de obligatoriedad que él identifica como regla para encontrar la relación entre el número de cuadrados de la base con el número de la figura, lo que a su vez le posibilita hallar el número total de cuadrados en la figura, a partir de restar un cuadrado menos por cada nivel.

Se le pide que lea el ítem c).

L9. PM: Tú qué dices, ¿que sí o que no?

L10. Samy: ¡Mmm no!

L11. PM: ¿Por qué?

L12. Samy: entonces venga yo la hago [*Representa la Figura 8 y cuenta los cuadrados de la base*] 36.

L13. PA: ¿Y por qué usted hizo la Figura 8 así?

L14. Samy: Empecé de ocho [*Señalando la base de la figura*] siete, seis, cinco, cuatro, tres, dos, uno [*Señalando cada nivel de la figura*].

Se indaga por otros términos de la secuencia para identificar si Samy logra generalizar la comunalidad encontrada.

L15. PM: Samy, vamos a encontrar el número de cuadrados de la figura 14, ¿Tú qué harías?

L16: ¡eeee!

L17. PA: Queremos saber cuántos cuadrados hay en la Figura 14.

L18. Samy: Yo lo dibujaría.

L29. PA: ¿Y qué otra forma habría sin dibujar?

L20. Samy: Empezaría desde 14, he iría disminuyendo en 13, en 12, en 11 etc.

La forma en que Samy ha abordado la tarea, evidencia que ha objetivado una regularidad y ha concebido que el número total de cuadrados de cada figura surja como una disminución de los cuadrados en cada nivel, iniciando con el número de la figura por la que se le pregunte. Samy logra hacer la deducción de una fórmula, por lo tanto, la generalización que logra es algebraica

factual, aunque está supeditada a casos particulares de figura, de esta manera él logra generalizar el patrón numérico encontrado para hallar el número de cuadrados de cualquier término de la secuencia por el que se le pregunte, es decir logró el objetivo propuesto para esta tarea.

3.6.2 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 2

Para el desarrollo de esta segunda tarea se empleó una sesión de tres horas, el día 21 de febrero de 2018, de 01:00 PM hasta las 4:00 PM, en la sala de matemáticas de la I.E. Técnica Occidente. Se trabajó de manera individual, con cada estudiante, realizando una grabación fílmica de manera continua con cada uno de 30 y 40 minutos, tiempo que en promedio tardaron los estudiantes en desarrollar esta tarea. Al terminar un estudiante pasaba el siguiente hasta que todos terminaron.

A continuación, se presenta el análisis de las producciones de cada estudiante en la tarea 2. El análisis del primer ítem se realiza de forma general para todos, dado que dieron respuestas similares al desarrollarlo.

En general, lo que se percibió es que los estudiantes identificaron la estructura de la secuencia de figuras estaba conformada por círculos, los cuales están dispuestos en forma cuadrada, y que varía la cantidad de círculos que conforma cada figura, indicando además que tal variación es de uno en uno por cada lado de la figura, es decir han logrado identificar un patrón, como se ilustra a modo de ejemplo en el siguiente episodio.

L1. PM: ¿Qué observas en la secuencia?

L2. María: Yo veo los círculos haciendo cuadraditos y se va aumentando un círculo más a cada lado.

De este modo, las percepciones sensibles logradas por los estudiantes les permitieron objetivar una de las comunales que en la secuencia se presenta, pero aun su generalización está oculta.

A partir del ítem b) se realizan los análisis para cada estudiante.

Paula. *[Inicia una lectura general de todas las preguntas de la tarea]*

L1. PA: Bueno empieza, ¿Qué se observa de la Figura 1 a la 2 inicialmente?

L2. Paula: De la Figura 1 a la Figura 2 *[Señalando la Figura 1]* se agregaron cuatro circulitos más, acá eran cuatro *[Señalando la figura 1]* y acá ya eran ocho *[Señalando la Figura 2]*.

L3. PA: ¿Qué pasó de la Figura 2 a la 3?

L4. Paula: Estoy contando.... Se agregaron cuatro más, ¡a! entonces va a ser como la tarea anterior, que se le agregaba el número de la figura.

Paula identificó que se suman cuatro círculos más de una figura a la otra, en las cuatro figuras presentadas en la tarea. Hasta el momento empieza a reconocer otro patrón, diferente al identificado en el ítem anterior.

L5. Paula: *[Lee el ítem c)]* ¿Qué sucede en la Figura 6? *[Ella realiza un conteo de los círculos que hay en la Figura 4 y luego sigue contando por fuera de la hoja señalando imaginariamente las otras figuras]* en la cinco serían 20, y en la seis 24.

L6: PA: y ¿Cómo hizo eso?

L7: Paula: Porque en cada una se le van agregando cuatro círculos.

Paula hasta este momento depende del hecho fenomenológico de la secuencia, puesto que, para determinar la cantidad de círculos de determinada figura, necesita recurrir a la cantidad de círculos de la figura anterior. De este modo la generalización que ha logrado Paula es una generalización de hecho (Radford, 2003). Debido a que solo se basa en la regularidad de las cuatro figuras presentadas, sin establecer aún la relación que existe entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la conforman.

Paula hace lectura del ítem d).

L12.PA: Vamos a hacer la Figura 20 sin realizar los dibujos.

L13.Paula: ¿Será que cuento? *[Se queda pensando]* ¿Será que cuento del seis a...? *[Señala con el lápiz indicando otras figuras imaginariamente]*.

L14. Paula: *[Hace una suma iniciando en 24 que es el resultado que ya tenía de la Figura 6 y va sumando de cuatro en cuatro]* 80.

L15. PM: ¿Cómo podemos comprobar que eso es cierto? ¿Habrá otra forma? ¿Qué tal si no te pregunto por la Figura 20 sino por la Figura 100? *[Paula no da respuesta a estas preguntas]*.

L16. PM: Hagamos una más pequeña, ¿Cuántos círculos habrá entonces en la Figura 10?

L17: Paula: *[Ella empieza a sumar de 4 en 4 a partir del resultado de la Figura 6 hasta llegar al número de círculos de la Figura 10]* 44.

L18: PM: ¿Y en la Figura 8?

L19: Paula: *[Ella observa los cálculos que ha realizado en su hoja de respuestas y halla el resultado que le corresponde a la Figura 8]* 36.

A partir de estos episodios es posible afirmar que Paula solamente establece una relación aditiva entre el número de círculos de una figura más cuatro, lo que le permite obtener la cantidad de círculos de la siguiente figura. La generalización que ha logrado evoca necesariamente al caso anterior, anclando obligatoriamente una figura a su antecesor y a su sucesor. Así el tipo de generalización que ha logrado es aritmético. En términos generales, aunque la estudiante logra movilizar algunos medios semióticos de objetivación como los gestos, la percepción y señalamientos, su producción se caracteriza dentro del pensamiento algebraico Factual, en tanto que está anclado al hecho fenomenológico, sus estrategias no van más allá de generalizaciones sobre números mediante esquemas operatorios sobre ellos, y la indeterminancia no es objeto de conciencia.

Segunda estudiante Mariana. Las profesoras le piden que lea las preguntas.

L1. PM: Entonces dime ¿Qué sucedió de la Figura 1 a la 2?

L2. Mariana: Que se va engrandeciendo más porque se estuvo aumentando más círculos *[Mueve las manos en señal de ampliación]*.

L3. PM: ¿Qué más sucede allí?

L4. Mariana: Que la Figura 2 es más grande que la uno y así sucede con las demás.

L5. PA: ¿Cuántos círculos es que aumenta?

L6. Mariana: Cuatro.

Se le pide que lea el ítem c).

L7. PM: ¿Tienes la Figura 6 representada?

L8. Mariana: No.

L9. PM: ¿Sabes qué sucede o cómo encuentras el número de círculos de esa figura?

L10. Mariana: Es más grande que la cuatro y la cinco, pues como se le va aumentado más círculos de cuatro pues... tal vez la multiplicación, tal vez me sirve

L11. PA: ¿Cómo sería esa multiplicación?

L12. Mariana: 4 por 6.

L13 PM: ¿La puedes hacer?

L14. Mariana: Pues yo ya la hice en la mente y dio 24.

Mariana ha identificado rápidamente que el número de círculos aumenta de cuatro en cuatro y que para encontrar el término de la Figura 6 se debe multiplicar este número de la figura por cuatro, ella no requiere representar la figura grafica ni físicamente, simplemente compara su respuesta con la Figura 4 que tiene representada en la hoja.

Mariana continúa leyendo el ítem d).

L15. PM: Si tú tienes que decir el número de círculos de la Figura 20, pero no la vamos a dibujar ¿cuántos círculos tiene la Figura 20?

L16. Mariana: 80.

L17. PM: ¿Y por qué tiene 80?

L18. Mariana: Porque si 4 por 10 son 40, más otros 10 son 80 *[refiriéndose a la Figura 10 dos veces]*.

L19. PM: ¿Y si te pregunto Mariana por la Figura 54?

L20. Mariana: Mmm pues...

L21. PM: ¿Cuál es el número de círculos que hay en la Figura 54? *[Mariana calcula mentalmente, se le sugiere que realice el cálculo en la hoja]*

L22. Mariana: 216 círculos.

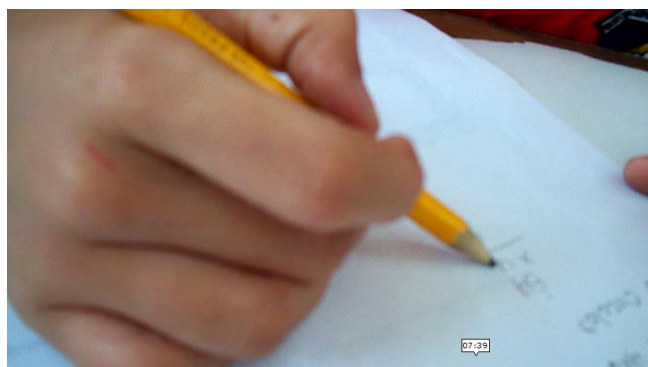


Ilustración 13. Cálculo numérico para encontrar la cantidad de círculos de la Figura 54 por Mariana. (Captura del video minuto 07:23)

L23. PM: Haber niña, dígame ¿cuántos círculos tiene la Figura 1000?

L24. Mariana: Tal vez 4000.

L25. PM: ¿Y por qué tiene 4000?

L26. Mariana: Pues si 4 por 10 son 40, le aumento los ceros y da 4000.

L27. PA: Entonces para encontrar cualquier término de la secuencia ¿usted qué haría?

L28. Mariana: Tal vez multiplicando por cuatro.

L29. PA: ¿Usted cómo hizo para saber que había que multiplicar por cuatro?

L30. Mariana: Pues, porque yo estuve observando la secuencia de acá *[señalando las figuras de la secuencia en la hoja de tarea]* y también fui contando los círculos de cada una, y dan los números de la multiplicación por cuatro.

L31. PA: Si te pidiéramos que escribas a un amigo cómo encontrar el número de círculos para cualquier término de la secuencia, pero este amigo no tiene idea de nada ¿usted qué le escribiría?

L32. Mariana: Pues que multiplique cualquier figura por cuatro.

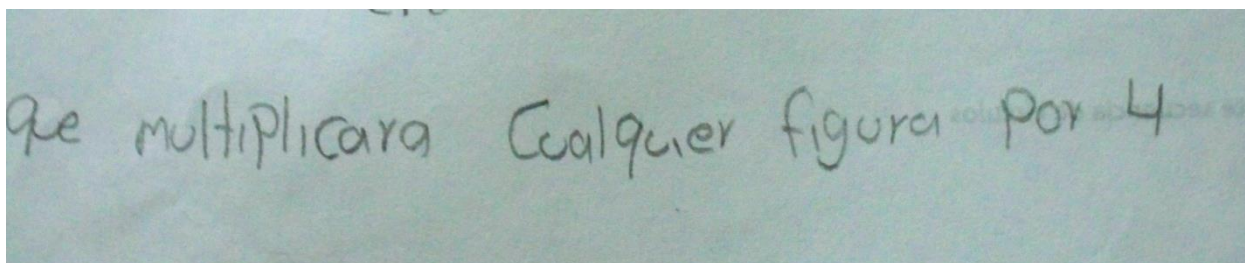


Ilustración 14. Mensaje de Mariana a un compañero para hallar el número de círculos de cualquier figura de la secuencia

Mariana presenta altos rasgos de generalidad algebraica, dado que pone en evidencia la movilización de su intención perceptual como un medio semiótico al reconocer la forma como varia la secuencia y en relación con el número de la figura. Su intención fenomenológica (Radford, 2013) le permite identificar el patrón numérico en la estructura espacial de la figura, estableciendo la relación que existe entre el número de la figura y el número de círculos totales que hay en ella, con lo cual logra responder rápidamente por cualquier término que se le pregunte, dada la deducción de la fórmula que logra realizar, y que presenta lingüísticamente. La generalización lograda por Mariana va más allá del pensamiento factual, pues la indeterminancia y su carácter operatorio son objeto de discurso por ella, lo cual refleja la toma de conciencia que ella ha hecho.

Se considera que la expresión semiótica movilizada por Mariana clasifica su producción dentro del pensamiento algebraico contextual dado que según Radford (2010) sus gestos fueron sustituidos por frases claves como lo afirma en L32 “*pues que multiplique cualquier término de*

la figura por cuatro”, al referirse a cualquier término de la figura, está evidenciando una contracción semiótica en el avance de su lenguaje natural, Radford (2018). Mariana centra su atención en aspectos importantes como la identificación de la generalidad, la cual lleva al término de la abducción de forma analítica no como simple posibilidad sino como principio para proporcionar el valor de cualquier término por el que se le pregunte (Radford, 2013).

Tercer estudiante María. Se le explica la dinámica nuevamente de la tarea. Ella realiza una lectura general de todas las preguntas.

L1. PM: Lee el ítem b).

L2. María: Yo veo que el cuadrado de la figura se hace más grande cuando se va cambiando de figura, de la Figura 1 a la 2, hay dos círculos en cada lado [señalando con el dedo cada lado de la Figura 1] en cambio acá hay tres en cada lado [Señalando los lados de la Figura 2] lo mismo de la dos a la tres, sino que ya no coloco tres, sino cuatro, y de la tres a la cuatro en vez de cuatro acá [señalando los lados de la Figura 4] son cinco en cada lado.



Minuto 03:14



Minuto 03:25

Ilustración 15. Secuencia de señalamiento de María mostrando el número de círculos que aumenta en cada figura

L3. PM: Entonces ¿qué sucede de la Figura 1 a la 2?

L4. María: Se agrega un círculo más en cada lado y así sucesivamente pasa en todas las figuras. *[María realiza una lectura del ítem c)]*.

L5. PM: ¿Tú qué crees que sucede en la Figura 6?

L6. María: Pues como acá ya está la cuatro *[señalando la Figura 4]* entonces yo creo que se agregaría dos en cada lado.

L7. PM: ¿Y habría alguna forma de comprobarlo?

L8. María: Haciendo la figura.

L9. PM: ¿Y cómo las quiere hacer?

L10. María: ¡Yo voy por las fichas! *[María toma las fichas de la mesa e inicia la representación de la Figura 6]*.

L11. PM: ¿Tú por qué crees que se aumentaron dos círculos?

[Ella representa la Figura 6, la observa y dice que tuvo un error, porque creía que era como la tarea anterior donde el número de la figura correspondía al número de la base de la figura].

L12. María: En la Figura 4 no hay cuatro sino cinco *[señalando la base de la Figura 4]* entonces en la Figura 6 no debe haber seis sino siete *[corrige la representación de la figura]* listo ahora sí me quedó bien.

L13. PM: ¿Cómo te diste cuenta que habías cometido ese error?

L14. María: Pues como yo me puse a mirar detalladamente la figura y vi que acá en la uno *[señalando la Figura 1]* en vez de un circulito habían dos en cada lado para poder formar el cuadrado, luego vi que en la Figura 2 también habían tres, en la Figura 3, cuatro, y en la cuatro habían cinco, entonces yo pensé, pues, si el número

de la figura no es el número de círculos que hay, si no que se va agregando uno, entonces yo pensé, en la seis debería haber siete.

L15. PM: Como quien dice ¿el número de la figura aumenta cuánto? ¿Cuántos hay en la Figura 6?

L16. María: ¿En los lados?

L17. PM: No, totales [María cuenta los círculos de la Figura 6 y anota su respuesta en la hoja de tarea].

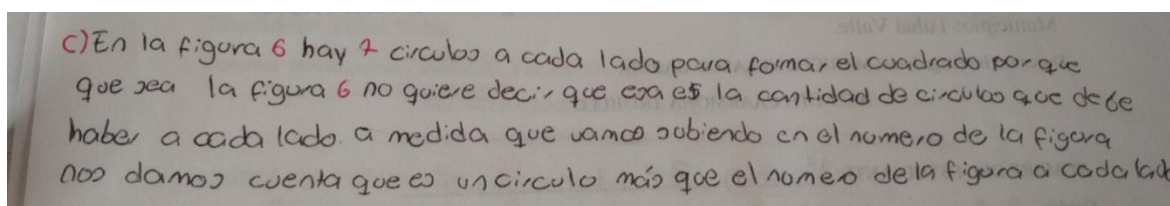


Ilustración 16. Producción de María para dar respuesta al ítem c)

De acuerdo con las respuestas de María, podemos observar que una de las comunilidades que ha objetivado es la relación que existe entre el número de la figura y la cantidad de círculos por cada lado, lo cual logra a través de su actividad perceptual. Además, cuando en L14 afirma “...entonces yo pensé, en la seis debería haber siete...” demuestra un sentido de obligatoriedad para referirse al número de círculos de la base de la figura, convirtiéndose en un hecho plausible para ella, dado que da por hecho que es un círculo más que el número de la figura a cada lado. Pone en evidencia diferentes medios semióticos de objetivación que son usados sincrónicamente tales como son los señalamientos deícticos, los gestos, la actividad perceptual y el lenguaje natural, al intentar comunicar sus respuestas, lo que se convierte en un nodo semiótico.

Se le pide a María que lea el interrogante del ítem d)

L18. María: Figura 20... *[Se queda pensando]* aquí podría hacer como una multiplicación.

L19. PM: Podría ser.

L20. María: Figura 20, entonces 21 círculos por cada lado... sí, podría ser una multiplicación, 21 por 4.

L21. PM: Bueno mira a ver *[María realiza el cálculo]* ¿cuántos círculos son?

L22. María: 84.

L23. PM: ¿Hay alguna forma de comprobarlo? *[María se queda pensando y decide analizar las figuras representadas y cae en cuenta que no puede multiplicar solo por cuatro porque los círculos de las esquinas ya están contados, María realiza esta deducción centrando su atención en la Figura 6, diciendo que esta figura no tiene 28 que resulta de la multiplicación 7 por 4, sino que son 24].*

En ese momento ella cae en cuenta que debe restarle 4 a ese resultado, que son los cuatro círculos de las esquinas que ya estaban contados. La actividad perceptual que moviliza María, le permite poder hallar la forma de generalizar el patrón encontrado para dar respuesta de la cantidad de círculos para cualquier término de la secuencia.

L24. PM: Y si preguntamos por la Figura 25, ¿entonces qué número de círculos habrá en la Figura 25?

L25. María: Mmm...pues ahí habría 26 por cada lado, podríamos multiplicarlo así *[señalando la multiplicación anterior]* pero restándole cuatro al resultado que de la multiplicación.

L26. PM: ¿Y por qué crees que debes restarle cuatro?

L27. María: Porque cuando nosotros hacemos la multiplicación pues nos da el número, pero en realidad no es el correcto *[y realiza la comparación con la Figura 6 que tiene representada en la mesa, al multiplicar 7 círculos de cada lado por 4, le da 28 pero al hacer el conteo en la figura representada le da 24]* entonces sí hay que quitarle 4.

L28. PM: Entonces si te pregunto por la Figura 12, ¿cuál es el número de círculos de esa figura?

L29. María: *[Multiplica en la mente 13 por 4 y le resta 4]* 48.

L30. PM: María, si yo te pido el número de círculos para cualquier término de la secuencia, ¿entonces tú cómo haces para encontrar ese número de figura sin usar un dibujo o una representación?

L31. María: Pues como nos dimos cuenta que a medida del número de la figura, es un círculo más, digamos yo estoy en la Figura 25, entonces no sería 25 círculos a cada lado, sino que serían 26 a cada lado, entonces yo multiplicaría 26 por 4, entonces al resultado le restaría 4, para que me diera el número de círculos, y así para cualquier figura.

L32. PM: ¿Y así para cualquier término de la figura?

L33. María: Sí señora.

María ha capturado cierta regularidad entre el número de la figura y el número de círculos que van en cada lado, realizando así una abstracción de esta relación. Ella ve la necesidad de multiplicar por cuatro el número de la figura más 1, y a este resultado debe restarle cuatro, que es el número que corresponde a los círculos de las esquinas que ya están contados. María ha

identificado la forma de encontrar el número de círculos para cualquier término de la secuencia mediante este procedimiento, o sea que ha llegado a una generalización de tipo algebraica, en tanto que, de acuerdo con Radford (2013) la usa no como simple posibilidad, sino como principio para deducir una fórmula que proporciona el valor de cualquier término.

Seguidamente continuamos con el cuarto estudiante Jhon. Se le pide al él que lea los interrogantes de la tarea.

L1. PM: ¿Qué sucedió de la Figura 1 a la 2?

L2. Jhon: Que en cada uno aumento más.

L3. PA: ¿Y no hay nada más, no sucedió nada más?

L4. Jhon: Que los cuadros se fueron haciendo más grandes.

En la respuesta de este ítem, Jhon solo ha identificado la variación en cuanto a la estructura espacial de la figura, dado que solo identifica cambio en el tamaño de la figura y que hay un aumento en la cantidad de círculos sin definir cuantos. Jhon continua con la lectura del ítem c) *[Inicia la representación de la Figura 6]*.

L5. PM: ¿Cuántos circulitos tiene la Figura 6?

L6. Jhon: 24.

L7. PM: ¿Y por qué tiene 24?

L8. Jhon: Porque aquí *[hace un señalamiento de la Figura 1]* tiene dos, entonces acá se le suma uno *[señalando la Figura 2]* entonces en la tres, *[señalando la Figura 3]* están las tres y se le suma una, entonces aquí están las cuatro y se le suma una *[señalando la Figura 4]* entonces en la cinco tendría seis, y en la seis

tendría siete. *[Haciendo señalamientos en la hoja de la tarea como si estuviera la figura hecha].*

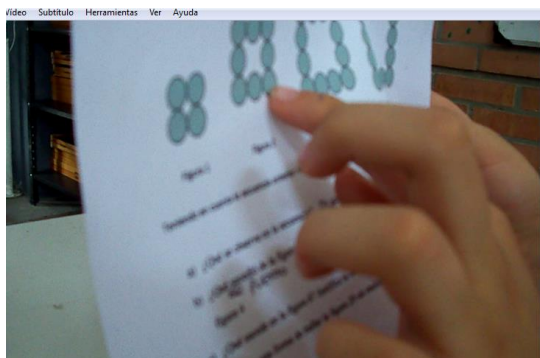


Ilustración 17. Señalamiento deíctico realizado por Jhon para indicar que en la base de la figura se suma un círculo más. (Captura de imagen del video minuto 06:55)

Jhon ha identificado un primer patrón entre las figuras existentes. Dando respuesta al ítem c). Cae en cuenta que lo sucedido en el ítem b) no es solamente que las figuras se van haciendo más grandes, sino que a cada una le suma un cuadrado más en cada esquina, generalizando este patrón para las figuras siguientes de la secuencia. Se le pide al estudiante que lea el ítem d)

L9. PA: ¿Cómo haría para hallar los círculos de la Figura 20 sin realizar los dibujos?

L10. Jhon. *[Se queda pensando]* ¿Puedo armar la Figura 5? *[Las profesoras le dicen que sí y él representa la Figura 5 y cuenta el número de círculos de la figura]* me dan 20.

L11. PM: ¿Esa es la figura qué?

L12. Jhon: La cinco *[Realiza un cálculo en la hoja de respuesta, coloca de forma horizontal 4 veces el 20]* tendría 80 círculos.

L13. PM: ¿Y cómo lo encontraste?

L14. Jhon: De la misma forma que encontré la anterior, porque toda la Figura 5 da 20, entonces dos figuras de cinco representarían el 10, entonces yo sumé los cuatro 20 y me dan 80.

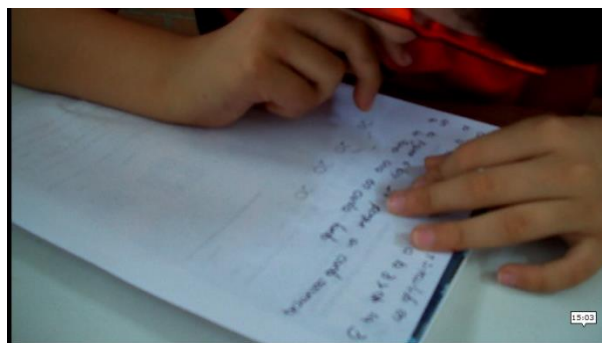


Ilustración 18. Producción de Jhon para dar respuesta al número de círculos de la Figura 20.
(Captura de imagen del video minuto 14:54)

Jhon al dar respuesta de esta forma para la pregunta de cuántos círculos hay en la Figura 20, toma en consideración el número de círculos de la Figura 5, y los deduce a partir de ella. Se le pregunta por el número de círculos en otros términos de la secuencia, para saber si Jhon ha logrado generalizar dado que para dar respuesta él busca otras estrategias de cálculo.

L15. PM: Bueno Jhon, y si yo te pregunto por la Figura 13, ¿cuántos círculos tiene la Figura 13?

L16. Jhon: ¡Mmm! ¿Se podría dibujando?

L17. PM: No, pero no vas a dibujar, ¿De qué forma?

L18. Jhon: *[Se queda pensando]*.

L19. PM: ¿Cómo harías tú para encontrar el número de círculos de la Figura 13?

L20. Jhon: Sumando.

L21. PM: ¿Qué sumarías?

L22. Jhon: *[Sigue pensando]* voy a dibujar alguna a ver si me da *[Representa la Figura 3]* no me dio. *[Vuelve y cuenta los círculos de las figuras representadas en la hoja de tarea]* 14, porque en la Figura 3 se le suma uno *[señalando el número de la base de la Figura 3]* entonces acá en la 13, tendría que haber 13 y le suma uno.

L23. PA: ¿Y en los otros lados?

L24. Jhon: *[Realiza un conteo con los dedos y vuelve a relacionar la Figura 4]* ¡ya sé! *[Jhon, realiza un cálculo aditivo del número de círculos de cada lado de la Figura 13, iniciando la sumatoria de forma descendente: $14+13+13+12$, él ha identificado que la base de la figura es el número de la figura más uno, pero en cada lado va disminuyendo uno].*

L25. Jhon: 52.

L26. PM: ¿Completamente seguro?

L27. Jhon: Sí.



Ilustración 19. Forma en la que Jhon generaliza el patrón de cada término de la secuencia, mediante una sumatoria. (Captura de imagen del video minuto 10:47)

Jhon muestra manifestaciones de generalidad en relación a la forma como encuentra el número de círculos para cualquier término de la figura, puesto que ha identificado un patrón (según el número de la figura y el número de círculos que deben haber en cada lado) con los cuales hace cálculos aditivos para llegar al número de círculos de la figura que quiera encontrar, además pone el sentido de obligatoriedad como sentencia para identificar el número por el cual debe empezar la operación (suma) como se muestra en L22 “...*acá en la 13, tendría que haber 13 y le suma uno*”. Con esta sentencia y la deducción que hace de ella expresándolo en su lenguaje natural, se convierte en un nodo semiótico con el cual se evidencia que Jhon ha objetivado una regularidad y ha podido llegar a la abducción, caracterizando su resolución dentro del pensamiento Factual, de acuerdo con Vergel (2015) moviliza medios semióticos como gestos, movimientos, actividad perceptual y palabras. La indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, es decir, queda implícita, puesto que Jhon aún sigue anclado al hecho concreto de las figuras existentes.

Quinto estudiante Samy. *[El estudiante lee cada uno de los interrogantes]*.

L1. PA: ¿Qué sucede de la Figura 1 a la 2?

L2. Samy: ¿De la uno a la dos? Cambia el número de círculos *[realiza un conteo en la Figura 2]* cambia cuatro círculos *[Responde en su hoja de tareas, analiza las demás figuras]* de la tres a la cuatro cambia también cuatro círculos, y así en todas las figuras *[refiriéndose a las figuras representadas; Samy lee el ítem c)]* ¿Qué sucede en la Figura 6? *[Realiza un conteo nuevamente de las figuras representadas en la hoja e inicia la representación de la Figura 6]*.

L3.PA: ¿Por qué esa es la Figura 6?

L4. Samy: Como en la Figura 4 hay 5 círculos, en la Figura 6 debería haber siete círculos.

L5. PM: ¿Entonces cuántos círculos hay en total? *[Samy realiza un conteo total de los círculos que hay en la Figura 6 que él representó].*

L6. Samy: 28 *[Lee el ítem d)].*

L7. PA: Vamos a encontrar cuántos círculos hay en la Figura 20 sin dibujar y sin representar.

L8. Samy: Pondría 21 círculos a cada lado.

L9. PA: ¿Pero en total?

L10. Samy: *[Realiza un cálculo mental]* 84.

L11. PA: ¿Cómo hizo para que le diera 84?

L12. Samy: Sumé 21 más 21 *[realizó movimientos deícticos sobre la hoja simulando la Figura 20]* da 42 y otro 42 da 84.

L13. PM: Samy, ¿Y cómo hacemos para estar completamente seguros que ese es el resultado? Compruébelo con una figura más pequeña, la Figura 8.

Samy dibuja la Figura 8 y al dibujar cae en cuenta que esta figura solo tiene 32 círculos, entonces la Figura 20 no puede dar 84, sino 80, regresa, analiza y hace conteo de los círculos de las figuras anteriores, puesto que inicialmente identificó que se aumentaba un círculo más que el número de la figura en la base de la figura, pero creía que era así para todos los lados sin tener en cuenta que los círculos de las esquinas hacían parte del conteo nuevo.

L14. PM: Si te pregunto por la Figura 10.

L15. Samy: *[Dibuja un cuadrado imaginario con el dedo y realiza un cálculo aditivo]* 40.

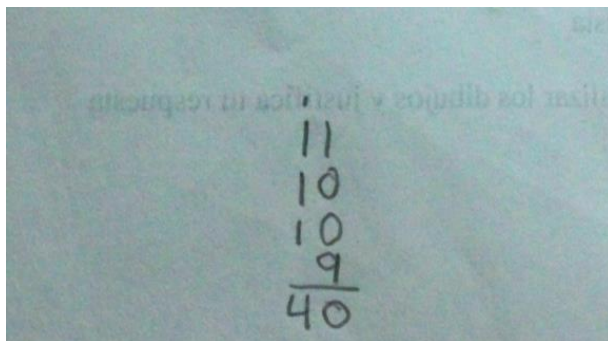


Ilustración 20. Producción por Samy para encontrar el número de círculos de la Figura 10

L16. PM: Si tú tienes que encontrar el número de círculos para cualquier término de figura, la 20, la 8, la 15, entonces ¿Cómo haces tú para encontrarla sin tener que dibujar o representarla?

L17. Samy: Si digamos la Figura 15, si aquí habrían 16 *[señalando la base de la figura imaginaria sobre la mesa]* aquí habrían, 15 *[señalando el lado derecho de la figura]* aquí habrían también 15 *[señalando el lado izquierdo de la figura]* y aquí habrían 14 *[señalando el lado superior de la figura]*.

L18. PA: ¿Y qué haces con esos números?

L19. Samy: Los sumo a ver cuántos círculos me dan en total.

Según la forma en que Samy abordó la tarea, se evidencia que logró capturar un patrón (el número de círculos en cada lado de la figura), y moviliza varios medios semióticos de objetivación como los señalamientos deícticos, los gestos y palabras en sentido de obligatoriedad, como se muestra en L4. “...en la Figura 6 debería haber siete círculos...”. Logra generalizar la comunalidad para los términos por los cuales se le indagó y los que tiene representados en la hoja de tareas, y aunque se quedó anclado al hecho fenomenológico, donde

su actividad perceptual y los gestos fueron fundamentales para poder encontrar la cantidad de círculos en cada término de la figura, logra deducir una fórmula que le permite hallar la cantidad de círculos para un número remoto de figura, por lo cual logra una generalización algebraica. La indeterminancia no se hace explícita, así como mucho menos su carácter operatorio. Todos estos rasgos característicos ubican la producción de Jhon dentro del pensamiento factual.

3.6.3 Análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 3

Para el desarrollo de esta tarea con los estudiantes se empleó una sesión de tres horas, el día 21 de marzo de 2018, de 01:30 PM hasta las 4:30 PM en la sala de matemáticas de la I.E. Técnica Occidente. Se trabajó de manera individual, realizando una grabación fílmica con cada estudiante entre 30 y 40 minutos. La grabación se realizó de forma continua, al terminar un estudiante pasaba el siguiente hasta culminar esta última tarea con los cinco estudiantes.

Las respuestas del interrogante del ítem a), se analizó de forma general para los cinco estudiantes dado que con este se pretendía que los estudiantes identificaran el número de triángulos y palillos en la secuencia de las figuras, en general todos los estudiantes dieron respuestas similares, tal y como se ilustra a modo de ejemplo en el siguiente episodio.

L1. Jhon: ¿Cuántos triángulos y palillos forman la Figura 1, 2 y 3? Figura 1, tres palillos, un triángulo; Figura 2, cinco palillos, dos triángulos; Figura 3, siete palillos, tres triángulos.

Con respecto a los demás ítems, el análisis se realiza de manera individual por cada estudiante.

En el caso de Paula, se le pide que lea el ítem b). Ella inicia representando las Figuras 4, 5 y 6

L1. PM: ¿Esa qué figura es?

L2. Paula: La cuatro.

L3. PM. ¿Por qué sabe que es la Figura 4?

L4. Paula: La Figura 4 son cuatro triángulos y se le agregan dos palillos.

L5. PM: ¿Dos palillos más con respecto a qué?

L6. Paula: Con respecto al triángulo, aquí había tres *[señalando la Figura 3]* para formar el otro triángulo se le añaden dos palillos *[seguidamente representa la Figura 5]*.

L7. PM: ¿Cuántos palillos hay en la Figura 5?

L8. Paula: Aquí había nueve palillos *[señalando la Figura 4]* entonces aquí debería haber once *[Paula realiza un conteo para comprobar su hipótesis, continúa dibujando la Figura 6]*.

L9. Paula: Entonces aquí hay trece *[señala la Figura 6 y realiza un conteo para comprobar nuevamente su hipótesis]*.

L10. PM: ¿Paula, según el dibujo que tú has hecho, que podemos decir con respecto a los palillos y a los triángulos?

L11. Paula: Que se le agregan dos palillos cada vez que va avanzando *[refiriéndose al número de figuras]* y un triángulo.

Hasta el momento Paula ha identificado la regularidad partiendo de la estructura espacial y numérica de la secuencia a través del proceso de conteo de los triángulos y palillos en cada una de las figuras representadas, logra identificar la variación entre la cantidad de palillos y el número de triángulos de las figuras, el cual corresponde a dos palillos y un triángulo más por cada figura. Aunque ha logrado identificar esta regularidad y generalizarla a figuras que no están

en la secuencia presentada, aún no es suficiente para encontrar la cantidad de palillos de cualquier término de la secuencia.

Paula lee el ítem c) “encuentra a través del cálculo el número de palillos y de triángulos en la Figura 10, sin graficar las Figuras 8 y 9.

L12.PM: Sin dibujar.

L13. Paula: ¿Entonces se puede sumar ahí?

L14. PM: ¡Lo que tú quieras hacer!

L15. PA: ¿Qué sumarías?

L16. Paula: Si en la seis hay 13 palillos, a 13 se le suman dos para la *siete* [realiza el cálculo numérico en la hoja de tarea] 15, más dos [vuelve y hace el cálculo] 17, más dos [vuelve y hace el cálculo] 19, más dos [vuelve y hace el cálculo] 21.

L17. PA: ¿Y cuántos triángulos?

L18. Paula: Serian 10.

L19. PM: ¿Por qué son 10 triángulos?

L20. Paula: Porque como dije ahorita, se le iban agregando más triángulos, entonces aquí se iba agregando un triángulo; la Figura 6, seis triángulos; en la siete hay siete, en la ocho, ocho; en la nueve hay nueve, la figura es el número de triángulos.

Por medio de este interrogante Paula confirma que el número de triángulos corresponde al número de la figura, como lo expresa en L22. “...la Figura 6, seis triángulos; en la 7 hay siete, en la 8, ocho; en la 9 hay nueve, la figura es el número de triángulos” En este episodio se evidencia que Paula ha identificado tres patrones: el aumento de dos palillos más en cada figura,

el patrón numérico que corresponde a la relación del número de la figura con el número de triángulos, y la estructura espacial de la secuencia, la generalización que ha logrado para encontrar el número de palillos aun no es analítica pues está anclada al caso anterior, como se evidencia en la siguiente ilustración.

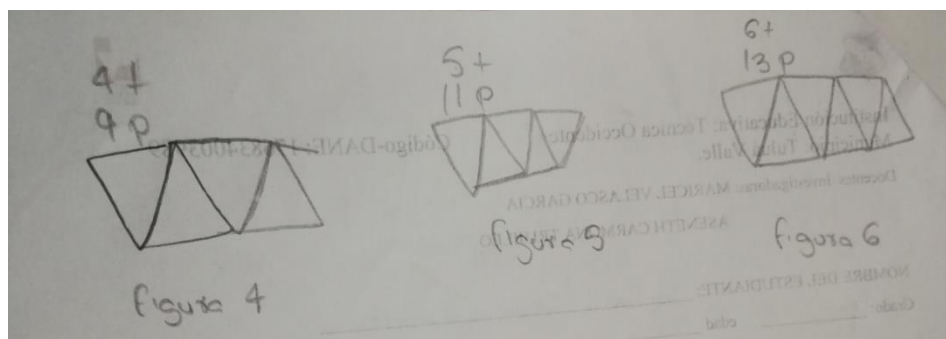


Ilustración 21. Producción de Paula al graficar la Figura 4, 5 y 6.

L21. PM: Ahora vamos a leer la otra pregunta [Paula lee el ítem d)] ¿tú qué dices es verdad o es mentira esa afirmación?

L22. Paula: Según mi lógica como dije ahorita a cada uno se le agrega un triangulito y el número de figura es la cantidad de triángulos.

L23. PM: ¿Entonces cuántos triángulos debe haber?

L24. Paula: 100.

L25. PM: Ahora necesitamos saber el número de palillos de la figura [Paula después de hacer varios cálculos y conteo de las figuras representadas, propone multiplicar por dos la Figura 100, se le propone que lo compruebe primero con las figuras representadas en la hoja de tarea].

L26. PA: 2 por 4 [Refiriéndose a la Figura 4].

L27. Paula: 8.

L28. PA: Pero son nueve...

L29. Paula: 2 por 5, 10, ahí se le agrega uno más.

L30. PA: ¿Y aquí? *[Señalando la Figura 6]*.

L31. Paula: 12 y se le agrega unos más *[Paula realiza el cálculo con la Figura 100 y deduce que son 201, de la multiplicación de 100 por 2 más 1]*.

Inicialmente la estudiante no ha encontrado una regla general que le indique el número de palillos de una figura. Sin embargo, guiada por el hecho de que los palillos aumentan de dos en dos, la lleva a afirmar que debe multiplicar por dos y lo ratifica con las figuras que tiene representadas, además guiada por los interrogantes de las maestras cae en cuenta que debe agregarle uno más. La actividad perceptual de Paula, la lleva a identificar la comunalidad que inicialmente no había encontrado junto con su generalización. Hasta este punto Paula ha realizado una generalización de tipo algebraica, pues si bien sigue anclada al hecho concreto de casos particulares, ha logrado deducir una fórmula que le permite en definitiva hallar el número de palillos para un número particular de figura.

Para dar respuesta al ítem f) donde la estudiante debe escribir un mensaje a un compañero explicándole cómo encontrar el número de palillos del número de la figura que se encuentra dentro de una balota que debe ser tomada al azar, se buscaba no solo hacer emerger el sentido de la indeterminancia en tanto que se pregunta por una cantidad explícitamente desconocida, sino que además se induce a que se opere con tal cantidad, dado que no se pregunta por un caso concreto, sino para cualquier término de la secuencia.

Con los ítems anteriores Paula seguía anclada al hecho concreto, lo que hacía que sus producciones estuvieran dentro del pensamiento factual. Con el ítem del mensaje, su producción

logra evolucionar del pensamiento factual al pensamiento contextual, logrando hacer evidente el sentido de indeterminancia cuando expresa en el mensaje “*tal número*” y la analiticidad cuando opera con él, al decir que “*multiplicar 2 por tal número*”. Paula utiliza un nuevo medio semiótico “*tal número*”, que es usado como una frase clave para referirse a cualquiera. Se puede evidenciar que Paula siente la necesidad de validar su hipótesis al querer comprobarlo con un caso particular.

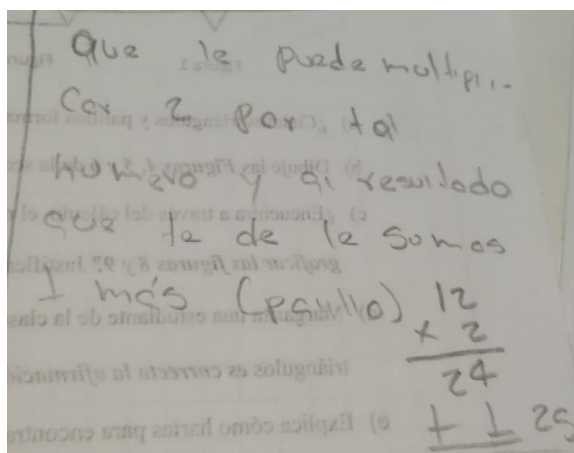


Ilustración 22. Producción de Paula para escribir un mensaje a un compañero, explicando la forma de encontrar el número de palillos para cualquier figura de la secuencia

Ahora bien, Mariana, la segunda estudiante, lee cada uno de los interrogantes de la tarea [inicia representando las Figuras 4,5 y 6].

L1. PM: ¿Por qué sabes que esa es la Figura 4?

L2. Mariana: En cada figura hay de a uno, como en la Figura 3 hay tres triángulos, entonces acá [señalando la Figura 4] debe haber cuatro.

L3. PM: ¿Cuántos palillos tiene la Figura 4?

L4. Mariana: Tiene 9 [Mariana representa las Figuras 5 y 6 y da respuesta al número de triángulos y de palillos que hay en cada una].

L5. PM: Teniendo en cuenta las figuras que representaste y las anteriores, ¿qué podemos concluir ahí?

L6. Mariana: Que van aumentando de a dos palillos y un triángulo. *[Mariana lee el ítem c)]*.

L7.PM: Vamos a calcular el número de palillos y de triángulos en la Figura 10 sin graficar.

L8. Mariana: *[Realiza un conteo mental]* 21 palillos y 10 triángulos.

L9.PA: ¿De dónde sacó el 21?

L10. Mariana: Es que fui contando de dos en dos comenzando desde la seis hasta la diez y me dio 21.

Hasta este punto Mariana ha identificado dos comunalidades que ha reconocido a través de su percepción visual sobre el terreno fenomenológico, esto es, a partir de las figuras representadas, que consiste en agregar dos palillos (un triángulo) más por cada figura y la relación que existe entre el número de triángulos y el número de la figura. Este reconocimiento la lleva a emplear un sentido de obligatoriedad como se demuestra en L2. “...como en la Figura 3 hay tres triángulos, entonces acá debe haber cuatro” haciendo evidente en esta frase la presencia de un deíctico espacial. Además, logra generalizar la comunalidad para casos que no están en el plano de lo perceptible, logrando realizar una abducción de tipo aritmética, en tanto que para encontrar el número de palillos de la Figura 10 requiere apoyarse en los que hay en la Figura 9, y para esto requiere a su vez los de la Figura 8, y así sucesivamente. La abducción es usada por Mariana simplemente para pasar de un término al otro.

Mariana lee el ítem d).

L11. PM: ¿Es correcta la afirmación de Margarita?

L12: Mariana: Pues de triángulos no es correcto, porque debe haber 100 triángulos.

L13. PM: ¿Por qué debe haber 100?

L14. Mariana: Porque en la Figura 3 hay tres y así se van aumentando uno más, entonces la Figura 100 debe tener 100 triángulos.

L15. PA: ¿Cómo podemos encontrar el número de palillos sin sumar de dos en dos?

L16.Mariana: Debe ser 201.

L17. PA: ¿Y por qué 201?

L18. Mariana: Ya que acá analicé [*señalando la Figura 6*] 6 por 2 es 12 y se sumó uno más y le hice lo mismo al 100.

L19. PM: ¿Qué hiciste con el 100?

L20. Mariana: Multipliqué 100 por 2 y medio 200 y le sume 1 más.

Mariana ha encontrado la regularidad y la ha generalizado para hallar el número de palillos de cualquier término por el que se le pregunte, es decir, logra realizar una abducción de tipo analítica dado que logra realizar una deducción de una fórmula al indicar que multiplica el número de la figura por 2 y al resultado le suma 1 más, y la generalización algebraica se logra cuando ella moviliza otros medios semióticos de objetivación como los gestos, sentencias de obligatoriedad, algunas palabras claves y señalamientos deícticos espaciales como se muestra en L18. “*Ya que acá analice...*” que usa para calcular el número de palillos de términos remotos o muy lejanas de la secuencia por el que se le indague. De acuerdo con esto, Mariana ha logrado hasta este punto desplegar una generalización algebraica de tipo factual, pues lo indeterminado, al menos hasta aquí, no se hace explícito de ningún modo.

Mariana lee el ítem f) La PM le explica este interrogante.

L21. PM: ¿Cómo le explicarías por medio de un mensaje a un compañero que encuentre el número de palillos de la figura que esta acá? [Señalando la balota que Mariana ha sacado de la bolsa].

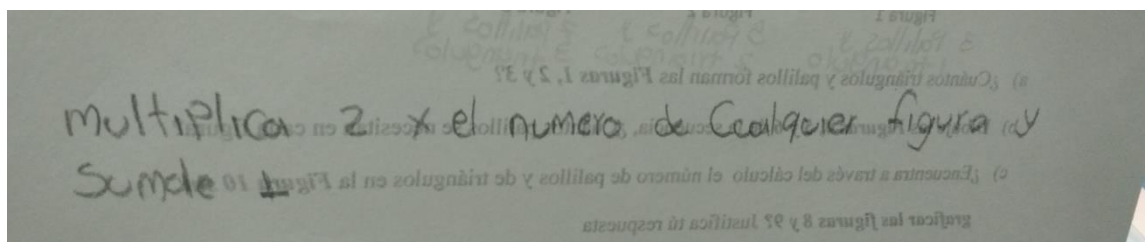


Ilustración 23. Mensaje de Mariana a un compañero para encontrar el número de palillos para el número de figura que está dentro de la balota.

La forma en que Mariana expresó el mensaje para su compañero de cómo encontrar el número de palillos para la figura que estaba dentro de la balota, que ella misma sacó de la bolsa, pone en evidencia la indeterminancia mediante una expresión lingüística que usa Mariana al referirse al “número de cualquier figura” y su carácter operatorio o analiticidad que está declarado en el mensaje cuando ella escribe “multiplica $2 \times$ el número de cualquier figura y súmale 1”.

Con esta expresión lingüística se puede observar que la producción de Mariana se caracteriza dentro del pensamiento algebraico de tipo contextual, al remplazar algunos gestos por palabras claves que utiliza en el desarrollo de la tarea. Así, se da una contracción semiótica al solicitarle a la estudiante escribir el mensaje, dado que centra su atención en aspectos que parecen ser más significativos a fin de lograr generalizar los patrones hallados. Esto es un indicador de un nivel más profundo de conciencia o facilidad de la estructura matemática de la estudiante en la secuencia (Radford 2018). Es importante resaltar nuevamente el papel que juega el ítem del

mensaje, donde hace posible nombrar lo indeterminado y operar con él, haciendo aparecer el sentido de indeterminancia y su analiticidad algebraica.

La siguiente estudiante es María. Se le pide que lea cada uno de los interrogantes

L1. PM: Dibujemos la Figura 4, 5 y 6 *[María inicia la representación de las figuras]* ¿por qué las dibujaste así?

L2. María: Porque en las figuras de acá *[señalando las figuras representadas en la hoja]* la uno, la dos y la tres, se van agregando los triángulos hacia los lados *[indicando la posición de los triángulos en la figura]* no hacia arriba ni en forma de pirámide, entonces yo seguí el patrón y lo dibujé así *[señalando la Figura 3, 4 y 5 que ha representado]*.

L3. PA: ¿Por qué sabes que la Figura 4 es así? *[Señalando la Figura 4]* ¿y la cinco y la seis? *[Señalando las figuras 4, 5 y 6, respectivamente]*.

L4. María: Porque en las de acá *[señalando la Figura 1]* hay un triángulo, en la Figura 2 *[señalando la Figura 2]* hay dos triángulos y en la Figura 3 *[señalando la Figura 3]* hay tres triángulos, entonces yo acá *[señalando la Figura 4 que representó]* dibujé cuatro triángulos, en la cinco, cinco triángulos *[señalando la Figura 5]* y en la seis, seis triángulos *[señalando la Figura 6]*.

L5. PM: ¿Qué podríamos decir entonces con lo que tú acabas de descubrir?

L6. María: Que depende del número de la figura sería el número de triángulos que hay.

L7. PM: ¿Y el mismo número de triángulos sería el mismo número de palillos?

L8. María: No señora.

L9. PM: ¿Y ahora qué puedes concluir a cerca de los palillos?

L10.María: Que cada que va pasando el número de la figura se van aumentando dos palillos, en la Figura 1 eran tres, y luego fueron cinco, y luego en la Figura 3 fueron siete o sea se le sumaron dos palillos más... *[María se refiere al aumento de dos palillos para todas las figuras existentes]* si hubiera una Figura 7, habría 15 palillos más.

Con la respuesta que da María en los primeros interrogantes, deja ver que ha logrado objetivar tres patrones, dos sobre la estructura numérica de la secuencia y el restante sobre la estructura espacial: el número de triángulos en relación con el número de la figura, el aumento de dos palillos más por cada figura, y la disposición espacial de la figura, logrando expresar dichos patrones en las figuras que representa, realizando una abducción de tipo aritmética. Se evidencia que durante su discurso moviliza diferentes medios semióticos de objetivación como los deícticos espaciales cuando ella dice “*Porque en las de acá [señalando la Figura 1] hay un triángulo*”, actividad perceptual y palabras claves, como se muestra en L2. “*...entonces yo seguí el patrón y lo dibujé así...*” que le permite tomar conciencia de la comunalidad encontrada en la estructura espacial, esta comunalidad es una abducción de tipo analítica, dado que deduce una fórmula como lo expresa en L6 “*Que depende del número de la figura sería el número de triángulos que hay*”. Mientras que otra de las comunalidades que ha encontrado es una abducción de tipo aritmética dado que debe apoyarse en la figura anterior para encontrar el número de palillos de la siguiente figura.

L11.PM: Miremos la otra pregunta *[María lee el ítem c)]* sin dibujar la Figura 8 y 9 vamos a calcular el número de palillos de la Figura 10

L12.María: *[María hace el cálculo numérico]* 21, sería 21 palillos y 10 triángulos

L13. PA: ¿Y cómo hizo eso?

L14. María: Para la Figura 10 se necesitan 21 palillos y 10 triángulos porque el número de triángulos es igual al número de la figura y como ya sabía que sumaban dos palillos para cada figura entonces yo fui sumando de a dos.

L15. PM: Miremos la otra pregunta [María lee el ítem d)] ¿tú qué dices que es verdad o es mentira la afirmación?

L16. María: Yo diría que no.

L17. PM: ¿Por qué decimos que no es verdad?

L18. María: Pues porque ya vimos que el número de triángulos es el número de la figura.

L19. PM: ¿Y con el número de palillos será verdad?

L20. María: [Analiza cada una de las figuras representadas] yo creo que acá encontré una manera más fácil, voy a colocar la Figura 4 como ejemplo, sería como 4 más 4, ocho, pero acá no me da ocho sino 9, es como si le sumara uno más al resultado; acá también pasa con la Figura 5, si yo sumara 5 más 5, 10 y le sumo uno más, para la Figura 100 entonces sería 201 palillos.

En este episodio se puede observar que en L12. Cuando María hace su afirmación que “*sería 21 palillos y 10 triángulos*”, está demostrando que hay una emergencia de una abducción analítica, que es la que le permite deducir la fórmula para encontrar el número de triángulos que hay en un número de figura en particular, partiendo de la relación que ella ha encontrado entre el número de la figura y el número de triángulos, que está relacionada con la estructura espacial de la secuencia. Esto, por supuesto, se corrobora cuando en L14 afirma “*porque el número de triángulos es igual al número de la figura*”. Hasta este punto del dialogo María solo ha dado

cuenta del número de triángulos para cualquier término de la figura, pero aún no logra deducir una fórmula que le permita hallar la cantidad palillos para cualquier término de la secuencia. Sin embargo, es en L20 cuando María deduce la fórmula para encontrar el número de palillos, apareciendo la segunda abducción analítica.

Lo anterior deja ver que para ella fue más fácil deducir la primera fórmula dando cuenta de la relación que existe entre el número de triángulos y el número de la figura, que deducir la fórmula del número de palillos con relación al número de la figura. María logra realizar las dos deducciones analíticas de las fórmulas, pero en momentos diferentes.

Para el ítem e) “explica cómo harías para encontrar la cantidad de palillos en la Figura 100” [María responde en su hoja de respuesta]. María ratifica la fórmula que ha logrado deducir para hallar el número de palillos para cualquier término por el que se le indague, como se muestra en la ilustración .24.

e) para encontrar el número de palillos de la figura 100 yo sumaría $100 + 100 + 1$ para que me diera exactamente el resultado porque si el número de la figura lo sumamos 2 veces más 1 ese sería el resultado.

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 4 \\ + 1 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ + 100 \\ + 1 \\ \hline 201 \end{array}$$

Ilustración 24 .Producción de María para dar respuesta al ítem e)

Esta producción en su primera parte es propia del pensamiento algebraico factual, dado que sigue anclada al hecho concreto, pese a que hay una abducción analítica que le permite identificar esas dos deducciones, todavía está anclada al esquema operacional sobre casos concretos, hasta este momento su producción se caracteriza dentro del pensamiento algebraico factual, dado que los medios semióticos que se ha movilizad o es la actividad perceptual y algunos deícticos fundamentalmente espaciales al igual que las relaciones numéricas, que son propios de este estrato de pensamiento, pero en la segunda parte de esta producción existe un tránsito de lo factual a lo contextual dado que el sentido de la indeterminancia se hace explícito cuando ella dice “ si el número de la figura lo sumamos 2 veces más 1 ese sería el resultado,”

María lee el ítem f).

L21. PM: Lo primero que vas a hacer es tomar una balota [María saca una balota de la bolsa] no la vayas abrir, va a escribir un mensaje a uno de tus compañeros de cómo haría él o ella para encontrar el número de palillos de la figura que está allí

L22. María: No le tengo que poner el número de figura porque todavía no me lo sé [María escribe el mensaje en su hoja de respuesta].

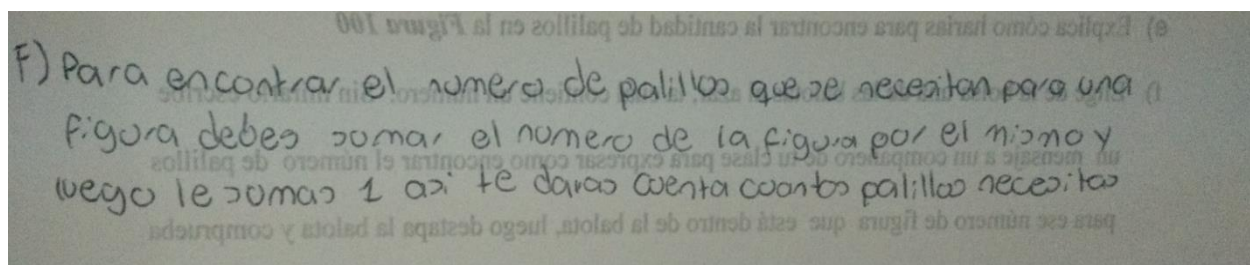


Ilustración 25. Mensaje de María a un compañero expresando cómo encontrar el número de palillos para el número de figura que está dentro de la balota que ella sacó de la bolsa

María parte de las deducciones que había hecho anteriormente, logra avanzar hacia el reconocimiento de la indeterminancia mediante una expresión semiótica de tipo lingüístico de la cual ella hace uso “*el número de la figura*” y la analiticidad que no solo se queda con esto sino que opera esta cantidad indeterminada. “*debes sumar el número de la figura por él mismo y luego les sumas 1*”, es decir, la estudiante ha operado con un número desconocido, lo que hace que la indeterminancia se haga explícita. De la forma en que María ha desarrollado la tarea, esta última producción se puede caracterizar dentro del pensamiento algebraico contextual.

Nuevamente se ve como la actividad de poner al estudiante a escribir un mensaje, fue decisiva y fundamental para evolucionar del pensamiento algebraico Factual al pensamiento algebraico Contextual, en tanto que, hasta antes de este ítem no se había presentado la indeterminancia explícitamente la cual es característica dentro de este estrato de pensamiento.

Continuando con el desarrollo de la tarea, el siguiente estudiante es Jhon. [*Lee los interrogantes de la tarea*].

L1. PM: Dibujemos la Figura 4,5 y 6.

L2. Jhon: [*Inicia la representación de la Figura 4,5 y 6*].

L3.PM: Jhon, cuándo dibujaste la Figura 4,5 y 6, ¿Te pudiste dar cuenta de algo ahí?

L4. Jhon: Sí, que a cada una le va subiendo un triangulito y se aumentan dos palillos.

L5.PA: ¿Cómo hizo para hacer la Figura 4 entonces?

L6. Jhon: Viendo las figuras de acá [*señalando las figuras representadas, indica la posición de los triángulos*] un triángulo va para arriba y otro para abajo y así [*realiza lectura del ítem c*].

L7.PM: ¿Tú que dirías para la Figura 10?

L8. Jhon: Pues la figura tendría 10 triángulos y...estoy pensando cómo hacer para encontrarlos [*después de varios cálculos e interrogantes de las maestras responde que sumaría de a dos a partir del resultado de la Figura 6 para encontrar la cantidad de palillos de la Figura 10*].

Jhon logra identificar inicialmente dos comunalidades que son el aumento de un triángulo más por cada figura y dos palillos más, como se muestra en L4 “*que a cada una le va subiendo un triangulito y se aumentan dos palillos*”. A demás reconoce la estructura espacial de la figura haciendo uso de un medio semiótico de objetivación como la percepción y un deíctico espacial como se ilustra en L6 “*Viendo las figuras de acá...*”. Hasta este punto Jhon ha encontrado algunas comunalidades, pero en L8 se evidencia una abducción analítica cuando deduce la fórmula para hallar el número de triángulos de una figura en particular, la cual se relaciona con el número de la figura en la secuencia.

L9. Jhon: [*Realiza una lectura del ítem d*].

L10. PM: ¿Eso es verdad o es mentira?

L11. Jhon: Voy a mirar...toca comprobar [*Jhon realiza varios cálculos y ensaya de diferentes maneras cómo encontrar el número de palillos de la Figura 100*].

Para dar respuesta a este ítem, Jhon logra deducir la fórmula que ha encontrado para hallar el número de palillos de la figura, sumándole 1 al número de la figura y a este resultado le suma nuevamente el número de la figura. De esta manera Jhon logra realizar una generalización de

tipo algebraica, aunque sigue estando anclado al hecho concreto de una figura en particular, favoreciendo el campo fenomenológico, rasgo característico del pensamiento algebraico Factual.

Jhon realiza una lectura del ítem f). La PM hace una explicación de este ítem [Jhon responde en la hoja de tarea].

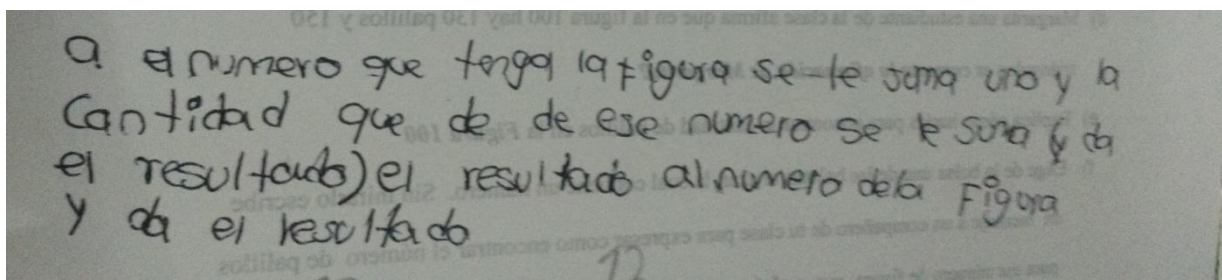


Ilustración 26. Mensaje de Jhon a un compañero expresando cómo encontrar el número de palillos para el número de figura que se encuentra dentro de la balota

Con la producción del mensaje realizado por Jhon, se hace explícita la indeterminancia mediante una expresión semiótica de tipo lingüística cuando dice “*el número que tenga la figura*” y la analiticidad cuando propone operar con esta indeterminancia al decir “*le suma 1 y la cantidad que dé de ese número le suma el número de la figura*”. Esta actividad del mensaje fue fundamental para que el estudiante lograra avanzar del pensamiento Factual al pensamiento Contextual, dado que logra hacer explícita el sentido de la indeterminancia y se ve claramente como aparece la analiticidad al proponer operar con esta.

En el desarrollo de esta tarea tres, el estudiante logró movilizar diferentes medios semióticos de objetivación como la percepción y deícticos espaciales. A demás se hizo explícita la

indeterminancia y la analiticidad, por medio de expresiones lingüísticas y a través de frases claves, lo cual permite ubicar su producción dentro del pensamiento contextual.

Finalmente en las indagaciones con Samy, Se le pide que lea el ítem b), Dibuje las figuras 4, 5 y 6 de la secuencia y se le pregunta ¿Cuántos palillos se necesitan en cada Figura?

L1. Samy: Nueve palillos.

L2: PM: ¿Qué figura es?

L3. Samy: La cuatro.

L4. PM: ¿Por qué la dibujaste así?

L5. Samy: Porque como aquí *[señalando la Figura 3]* este triángulo está intercalado, entonces por eso la dibujé así *[indicando la posición y la estructura de la figura]*.

L6. Samy: *[Representa la Figura 5]* la Figura 5 tiene 11 palillos y 5 triángulos *[representa la Figura 6]* la Figura 6 hay 13 palillos.

L7.PA: ¿Puedes decir alguna conclusión de lo que usted observó?

L8: Samy: Yo de los triángulos observé que van aumentando uno por uno, y de los palillos van aumentando dos *[Samy lee el ítem c)]*.

L9: PM: ¿Cuántos palillos tendría la Figura 10 sin tener que dibujar la Figura 8 y la 9?

L10. Samy: *[Realiza un conteo con los dedos]* tiene 21 palillos y 10 triángulos.

Samy mediante su actividad perceptual en el terreno fenomenológico ha identificado la estructura espacial de la figura, así como dos comunalidades que son el aumento de un triángulo

y dos palillos por cada figura y ha generalizado esta deducción de la comunalidad como se demuestra en L8 “*los triángulos observé que van aumentando uno por uno, y de los palillos van aumentando dos*”. Además, se evidencia que ha movilizado un deíctico espacial al utilizar la frase “*porque como aquí*” al referirse a la Figura 3. Para dar respuesta al ítem c), Samy realiza una abducción de tipo aritmética. De acuerdo a los diferentes medios semióticos de objetivación que logra movilizar el estudiante, su producción hasta el momento se encuentra dentro del pensamiento algebraico Factual.

Samy realiza una lectura del ítem d).

L11. Samy: En triángulos está mal.

L12. PM: ¿Por qué está mal?

L13. Samy: Porque debía haber 100 triángulos y hay 150.

L14. PA: ¿Y Cómo nos damos cuenta del número de palillos sin sumar de dos en dos?

L15. Samy: 200 palillos.

L16. PA: ¿Y cómo sabe usted qué son 200?

L17. Samy: Porque multiplique.

L18. PM: ¿Por cuánto?

L19. Samy: 100 por 2.

L20. PM: ¿Y por qué multiplicaste por 2?

L21. Samy: Porque iba aumentando de a dos palillos.

Con el interrogante d) se pretendía que Samy logrará generalizar el patrón encontrado para hallar la cantidad de palillos de la Figura 100, pero se evidencia que solo logra hacer una

abducción de tipo aritmética. Aunque encontró una relación al multiplicar el número de la figura por 2, no es suficiente, dado que no logró deducir que al resultado había que sumarle uno más para encontrar la cantidad de palillos de cualquier término de la secuencia, es decir, no logra deducir la fórmula correcta que le permita encontrar la cantidad de palillos de una figura remota en la secuencia.

Se le pide a Samy que lea el ítem f). La PA explica la dinámica de esta pregunta. [Samy responde en su hoja de tarea].

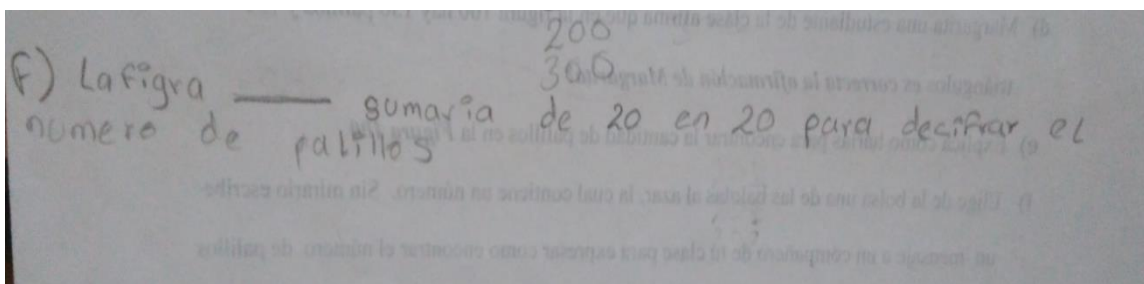


Ilustración 27. Mensaje de Samy a un compañero expresando cómo encontrar el número de palillos para el número de figura que está dentro de la balota

Samy al abordar la tarea utilizó algunos medios semióticos de objetivación como señalamientos, gestos, movimientos deícticos y en algunos momentos menciona palabras claves y el uso concreto del cálculo numérico para encontrar el número de palillos en las figuras cercanas en la secuencia, en este caso no hay evidencia de deducción de una forma que le permita encontrar el número de palillos para cualquier término de la secuencia, Samy realiza una generalización aritmética (Radford 2013). Estos hechos evidencian que el estudiante siempre estuvo anclado al hecho concreto. Al tener que operar con un número desconocido, la

indeterminancia se hace explícita cuando la manifiesta en su mensaje “*la figura _____*”, pero no logra realizar una analiticidad dado que no pudo operar con dicha indeterminancia.

Con esta actividad del mensaje, la producción de Samy no logró evolucionar del pensamiento Factual al pensamiento Contextual, puesto que siempre estuvo anclado al hecho concreto y al no deducir la fórmula no se hace evidente la analiticidad.

CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

En este apartado se presentan las conclusiones del presente estudio atendiendo a la pregunta de investigación y los objetivos planteados en él, así como los resultados obtenidos en la implementación de las tareas, de las cuales surgen las recomendaciones que tienen que ver con la necesidad de trabajar actividades en torno a la generalización de patrones desde la educación básica primaria para desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes antes de llegar a la educación básica secundaria.

4.1 Conclusiones

En este apartado se realizan las conclusiones que dan respuesta a la pregunta planteada en este trabajo, a saber: *¿Cuáles son las características del pensamiento algebraico que se presentan en un grupo de estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Técnica Occidente cuando desarrollan tareas de generalización de patrones?* y a cada uno de los objetivos propuestos, tomando en consideración para ello los análisis realizados de las producciones de los estudiantes al enfrentar las tareas sobre generalización de patrones; lo cual se hizo a la luz de la Teoría de la Objetivación y las formas del pensamiento algebraico: factual, contextual y simbólico, junto con sus características: la Indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica, las cuales fueron tomadas como vectores de análisis (Radford 2003, 2008, 2010, 2012, 2013, 2014, 2018 y Vergel 2014, 2015)

En relación con el primero objetivo específico, el cual era *“Articular en un conjunto de tareas los elementos teóricos identificados que posibiliten indicios de pensamiento algebraico en los estudiantes de grado quinto”*, se concluye que:

Se constituyeron tres tareas sobre generalización de patrones que efectivamente permitieron que los estudiantes activaran formas de pensamiento algebraico Factual y Contextual, tal cual como se entiende en el marco de este trabajo. En el desarrollo de estas tareas se evidenció la evolución del pensamiento algebraico temprano. Las dos primeras tareas colocaban un limitante a los estudiantes, dado que siempre se preguntaba por casos particulares de la secuencia, así fueran remotas, aunque el dialogo constante entre las maestras y los estudiantes se vio la necesidad de plantear otros interrogantes que no estaban explícitos en las tareas, lo cual permitió que las producciones de Mariana pudieran avanzar desde la tarea dos del pensamiento Factual al

pensamiento Contextual. A diferencia de la tarea tres, donde los ítems estaban planteados para que todos los estudiantes lograran abordarla poniendo en escena al pensamiento contextual, María, Paula y Jhon también lograron avanzar a este estrato de pensamiento, mientras que las producciones de Samy quedaron dentro del pensamiento factual con generalizaciones de tipo algebraico.

Lo anterior pone de manifiesto como la labor conjunta entre maestras y estudiantes favoreció la instanciación y madurez de mayores niveles de generalidad para atender las tareas, lo cual posibilitó la presencia de diferentes características de pensamiento algebraico logrado por los estudiantes. En el desarrollo de las tareas, se observó que los estudiantes a través de la actividad multimodal movilizaron diferentes medios semióticos de objetivación, tales como la actividad perceptual, gestos, señalamientos deícticos, palabras claves, lenguaje natural y en algunas ocasiones particulares estos medios semióticos se utilizaron simultáneamente convirtiéndose en nodos semióticos, como cuando se accionó sincrónicamente el lenguaje natural, los gestos y la percepción para abordar la Tarea 1 como se muestra en el siguiente caso *“Porque yo vi aquí [señalando la base de la Figura 3] se agregaban 3 cuadritos más y se agregaba la cantidad que era el número de la figura”*

Por medio del desarrollo de la actividad, y en el intercambio de saberes entre las maestras investigadoras y los estudiantes, se logró evidenciar que mediante la interacción con las tareas y al estudiante querer comunicar las comunidades o patrones que iba encontrando en las secuencias figúrales propuestas, objetivó ese saber cultural de la generalización de patrones con los códigos establecidos en ellos, que permitieron también crear subjetividades en la actividad realizada, transformándolo en un conocimiento para sí mismo. Es importante resaltar que la labor

conjunta entre maestras y estudiantes fue la que permitió el proceso de objetivación y subjetivación del saber en el sujeto.

En relación con el objetivo específico número dos “Reportar las producciones de un grupo de estudiantes de quinto grado cuando desarrollan tareas sobre generalización de patrones figurales que evidencien rasgos característicos de pensamiento algebraico”, se concluye que:

Al realizar el análisis de las producciones de los estudiantes en la tarea 1, la cual estaba propuesta de tal forma para que ellos pudieran encontrar la variación, la característica común y la estructura espacial y numérica, sin pretender generar abducción de tipo algebraico, ni mucho menos hacer explícita la indeterminancia y la analiticidad, la cual obedece a un tipo de pensamiento Factual; se evidenció que los cinco estudiantes lograron cumplir el objetivo propuesto para esta tarea. Los estudiantes reconocieron el patrón gráfico cuando se les propuso dibujar las figuras siguientes, al realizarlo conservaron las características esenciales en la estructura espacial de la secuencia, y numérica cuando identificaron que aumentaba por ejemplo un cuadrado más por cada nivel, o que el número de la figura correspondía al número de cuadrados de la base; al igual que la variación en la estructura espacial cuando identificaban que cambiaba al aumentar el número de cuadrados en las figuras siguientes, así como la movilización de algunos recursos semióticos de objetivación, como gestos, señalamientos deícticos, lenguaje natural y actividad perceptual, como se evidencia a continuación “*Voy pensando en la cabeza, voy sumándolos, 45, [Realizando con su mano movimientos al aire de arriba hacia abajo, para indicar el arreglo vertical de las cantidades que se suman]de mayor a menor cada una hasta que llegue al uno*”, que sirvió como punto de partida para el desarrollo de las tareas siguientes.

Los ítems planteados en la tarea 2, proponen fundamentalmente un pensamiento Factual, para su desarrollo, donde se pretendía que los estudiantes realizaran cálculos numéricos, hallaran el patrón o comunalidad y lo generalizaran probando la validez de dicho patrón al dar respuesta a un término particular de la secuencia por el que se le preguntara. Se evidenció que los cinco estudiantes lograron encontrar la característica común tanto en lo espacial como en lo numérico, como se evidencia en el siguiente ejemplo *“se agrega un círculo más en cada lado y así sucesivamente pasa en todas las figuras”*.

En este punto se demostró que en algunos estudiantes los gestos y los señalamientos deícticos fueron remplazados por palabras o frases claves, así como también sentencias de obligatoriedad al intentar comunicar su respuesta, logrando objetivar una abducción de tipo algebraico, como se muestra en el siguiente ejemplo (*“entonces en la cinco tendría seis y en la seis tendría siete”* [Haciendo señalamientos en la hoja de la tarea como si estuviera la figura echa]).

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, en esta tarea, las producciones de cuatro estudiantes María, Paula, Samy y Jhon se caracterizaron dentro del pensamiento Factual, porque la indeterminancia se queda sin nombrar, aun cuando se les preguntó por términos alejados de la secuencia, mientras que las producciones de Mariana, con las intervenciones de las maestras y preguntas que no estaban planteadas en la tarea lograron evolucionar al pensamiento algebraico contextual de acuerdo con la forma en que abordó la tarea, dado que hizo explícito el sentido de la indeterminancia y su carácter operatorio, como se muestra de acuerdo al interrogante que planteo la maestra y la respuesta de la estudiante: **“Maestra:** Si te pidiéramos que escribas a un amigo cómo encontrar el número de círculos para cualquier término de la secuencia, pero este amigo no tiene idea de nada, ¿usted que le escribiría? **Estudiante:** Que multiplicara cualquier figura por cuatro”. En este ejemplo se hace evidente el sentido de la indeterminancia (cuando

dice “*Que multiplicara cualquier figura*”) y la analiticidad (cuando se propone operar sobre lo desconocido “*por cuatro*”) En este punto de la tarea, los interrogantes planteados por las maestras investigadoras fueron decisivos para hacer evolucionar el pensamiento algebraico en esta estudiante.

En el análisis de la tarea 3, la cual tenía como objetivo encontrar el término común en la estructura espacial y numérica a través del proceso de conteo de los triángulos y palillos en cada una de las figuras representadas, movilizar otros recursos semióticos diferentes al pictórico, generar hipótesis con respecto al patrón encontrado para intentar hacer explícita la indeterminancia, y la analiticidad al tener que operar con un número desconocido y poder así evolucionar del pensamiento factual al pensamiento contextual; se encontró que los cinco estudiantes evidenciaron generalización de tipo factual para desarrollar la tarea, dado que daban respuesta al preguntarles por el número de palillos para un término en particular de la secuencia por más lejano que este fuera mediante esquemas operacionales, mediante la movilización de distintos medios semióticos de objetivación, tales como: los gestos, la percepción, el lenguaje natural.

En el ítem concreto donde los estudiantes debían hacer explícita la indeterminancia, se logró evidenciar que, para algunos fue más difícil lograrlo. Paula, María, Mariana y Jhon presentaron en sus producciones características de generalidad algebraica de tipo contextual, dado que lograron deducir la fórmula para hallar el número de palillos para cualquier término de la secuencia, poniendo en evidencia su intención perceptual al hacer explícita la indeterminancia y la analiticidad al operar con números desconocidos, como se evidencia en el siguiente ejemplo del mensaje, mediante una expresión lingüística: “*Multiplica 2 X el número de cualquier figura y súmale 1*”.

Al igual que en la tarea 2, las producciones de la estudiante Mariana se caracterizan dentro del pensamiento contextual, pero además, se logra que las producciones de María, Paula y Jhon evolucionen del pensamiento Factual al pensamiento Contextual por medio del ítem del mensaje.

Cabe mencionar que para figuras cercanas, pero fuera del campo perceptivo se privilegia la generalización aritmética; para figuras remotas se avanza en su mayoría, a generalizaciones algebraicas. El mensaje ayuda para que los estudiantes en su producción avancen del pensamiento factual al pensamiento contextual.

Para concluir entorno al objetivo específico tres, a saber: “Proponer una clasificación de las producciones realizadas por los estudiantes al desarrollar las tareas propuestas que evidencian una evolución en el pensamiento algebraico”, de acuerdo con los análisis multimodal realizados en esta investigación se concluye que:

Las producciones de las tareas de los estudiantes se clasificaron de la siguiente forma:

En el pensamiento factual con generalizaciones aritméticas: dado que la Tarea 1 estaba propuesta para que los estudiantes encontraran la variación, la característica común y la estructura espacial y numérica en la secuencia, sin pretender generar abducción de tipo algebraico y sin hacer explícito el sentido de la indeterminancia ni la analiticidad, en este sentido los cinco estudiantes a través de la actividad multimodal lograron mostrar rasgos de generalidad en sus producciones en este estrato de pensamiento, aunque el sentido de la indeterminancia y la analiticidad en esta forma de pensamiento no se convirtió en objeto de discurso, los estudiantes si movilizaron la actividad perceptual, gestos de señalamiento y esquemas operacionales

En el pensamiento factual con generalización de tipo algebraica: la Tarea 2 permitió que cuatro de los estudiantes se clasificaran en este tipo de pensamiento, utilizando la actividad

multimodal por medio de, sus gestos y señalamientos deícticos y utilizaron además palabras o frases claves, usando sentencias de obligatoriedad al intentar comunicar su respuesta, además al preguntárseles por términos alejados de la secuencia, lograron objetivar una abducción de tipo algebraico dado que hallaron una fórmula que les permitía dar respuesta a cualquier término.

En el pensamiento contextual de tipo algebraico: la actividad de la Tarea 3 permitió que las producciones de cuatro de los estudiantes se clasificaran en este tipo de pensamiento, dado que lograron evolucionar del pensamiento factual al pensamiento contextual, al lograr deducir la formula poniendo en evidencia su intención perceptual haciendo explícita la indeterminancia y la analiticidad al operar con números desconocidos. Es importante aclarar que hasta el ítem del mensaje los estudiantes estaban anclados al hecho concreto, es decir, a la secuencia de figuras, pues sus producciones estaban mostrando rasgos del pensamiento factual algebraico, dado que encontraban la forma de hallar términos de la secuencia aunque fueran remotos o muy alejados, pero el ítem del mensaje propició la evolución de este pensamiento al contextual puesto que sus formas de pensamiento se volvieron más sofisticadas.

Como conclusión final se da respuesta al objetivo general *“Caracterizar las formas de pensamiento algebraico que se presentan en un grupo de estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Técnica Occidente cuando desarrollan tareas de generalización de patrones”*, el cual responde a la pregunta de investigación planteada en este trabajo.

Se evidenció que en el desarrollo de las tres tareas, todos los estudiantes lograron movilizar diferentes medios semióticos de objetivación propios del pensamiento algebraico Factual y Contextual, tales como los gestos, la percepción, el lenguaje natural, así como también las palabras claves para evocar fundamentalmente a la indeterminancia y la analiticidad, explícita al

operar con cantidades desconocidas. Además se observó que algunos interrogantes solo permitían que los estudiantes realizaran generalizaciones de tipo aritmética, mientras que con otros interrogantes, lograron realizar generalizaciones de tipo algebraica ya fueran de tipo factual o contextual.

Es importante señalar la complejidad que supuso para los estudiantes tomar conciencia de la indeterminancia y poder incorporarla en su discurso fruto de que se ha objetivado ese saber. En este caso, la actividad del mensaje en la tarea 3 fue trascendental para hacer evolucionar las producciones de los estudiantes del pensamiento algebraico Factual, al pensamiento algebraico Contextual, dado que a través de esta actividad el sentido de la indeterminancia se hizo explícito al igual que la analiticidad al tener que operar con esas cantidades indeterminadas o desconocidas.

Desde el desarrollo y análisis de este trabajo, se puede evidenciar que los estudiantes de los primeros grados de escolaridad sí pueden desarrollar pensamiento algebraico de acuerdo al tipo de pregunta que se le plantee, así como la intervención acertada que haga el docente en el aula. Cabe mencionar que para los estudiantes en estos primeros grados es complejo alcanzar el nivel de la designación simbólica alfanumérica, puesto que este último hace parte de un nivel de pensamiento más estructurado el cual requiere de más tiempo, más dedicación, y de un proceso continuo, lento e inexorable.

4.2 Reflexiones finales

Con el desarrollo de este estudio sus autoras, en tanto maestras en ejercicio de educación básica primaria, lograron evolucionar en la forma de concebir el álgebra, dado que se pensaba que esta solo está relacionada con signos alfanuméricos propios de la educación básica secundaria y no como una forma de pensar y actuar diferente en situaciones matemáticas. Debido a estas concepciones equivocadas, se pensaba también que los estudiantes de básica primaria no podían trabajar el pensamiento algebraico por su complejidad.

El desarrollo de esta investigación brinda a las autoras herramientas metodológicas y teóricas que mejoran su desempeño profesional y sus prácticas de aula en el área de matemáticas, pues les permite plantear nuevas actividades sobre generalización de patrones que posibilitan en los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico.

Desde la mirada de los documentos ministeriales como son los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), se favorece el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos a partir de tareas sobre generalización de patrones.

Si bien es cierto que desde otras investigaciones se ha propuesto trabajar el pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad, en esta investigación se evidencia que sí es posible que los estudiantes de educación básica primaria por medio de este tipo de tareas sobre generalización de patrones y mediante una labor conjunta entre maestros y estudiantes, logren identificar la variación, desarrollar habilidades tales como: ver, comunicar, relacionar y encontrar un patrón existente tanto espacial como numérico, que les permite generalizarlo, hallar una fórmula ya sea en su lenguaje natural o simbólico, haciendo explícita la indeterminancia y la

analiticidad al operar con números desconocidos, que les permite desarrollar las formas del pensamiento algebraico y poder avanzar y madurar de un pensamiento al otro.

Es importante que en el desarrollo de las tareas sobre generalización de patrones exista una interacción entre el docente y los estudiantes, dado que esto permite que de acuerdo a los diálogos e interrogantes que pueda plantear el docente, los estudiantes movilicen diferentes medios semióticos de objetivación al inducirlos a realizar análisis que les facilite llegar a hipótesis y validar sus procedimientos matemáticos para dar respuesta a las tareas propuestas, puesto que si no existe esta interacción y se deja solo el estudiante con la tarea, es más difícil lograr evolucionar sus formas de pensamiento algebraico.

A partir de los análisis en las producciones de los estudiantes es importante resaltar que desarrollar pensamiento algebraico, no se consigue con una sola tarea o actividades esporádicas, por tal razón se requiere de un proceso a largo plazo y continuo. Es por esto que se hace necesario que las actividades sobre generalización de patrones se hagan de forma constante y progresiva en todos los grados escolares, para que el álgebra en la escuela deje de ser vista como una asignatura y se vea como una forma de pensar y actuar diferente en objetos y situaciones matemáticas.

Es necesario propiciar espacios de interacción con los directivos y docentes de básica primaria de la Institución Educativa Técnica Occidente, con el fin de que los docentes tomen conciencia de la importancia de trabajar actividades entorno a la generalización de patrones desde los primeros grados de escolaridad y así poder incorporarlos en el currículo y en el plan de área de matemáticas de la Institución Educativa, para que se trabajen de una forma progresiva y secuencial, propiciando así un mejor desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas en la cual sus procesos de aprendizaje tengan mayor significado. También es recomendable trabajar

con secuencias de otros tipos: numéricas solamente, puramente figúrales, geométricas, entre otras.

Referentes Bibliográficos

- Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria*. (Tesis doctoral). Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. México, D.F.
- García- R, A., Callejo, L., & Fernández, C. (2015). *La Aprehensión Cognitiva en Problemas de Generalización de patrones Lineales*. Universidad de Alicante.
- Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada. España. : Departamento de Didáctica de la Matemática facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.
- Guzmán, N. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada*. (Tesis de maestria). Universidad Nacional. Bogotá.
- Hernández, K., & Tapiero, K. (2014). *Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos-icónicos en estudiantes de educación básica primaria*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Santiago de Cali.
- Mason, J. (1985). *Rutas hacia el álgebra y Raíces del álgebra*. (C. Agudelo, Trad.) Tunja, Colombia. Tunja: UPTC.
- Mason, J. (1996). *Expresando la generalidad y las Raíces del Álgebra*. Kluwer Academic Publisher.
- Mason, J., Grahan, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Universdidad Pedagógica Tecnológica de Colombia. Tunja: Traducción por Cecilia Agudelo Valderrama.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santafé de Bogotá.
- MEN. (2006). *Estandandares Basicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.
- MEN. (2015). *todos a aprender 2.0*. Bogotá.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

- Moreno, G. A. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Santiago de Cali.
- Radford, L. (2003). *Gestures, speech, and the sprouting of signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of generalization*. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2005). *Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition*. In E. Simmt and B. Davis (Eds.): *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, pp. 111-117.
- Radford, L. (2010). *Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective*. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-19. Canada.
- Radford, L. (2012). *Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues*. *ICME/12 Regular Lecture*. . Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.
- Radford, L. (2013). *Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning*. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44, doi. Canada: Recuperado de <http://doi.doi.org/10.4471/redimat.2013.19>.
- Radford, L. (2014). *De la teoría de la objetivación*. Canada: *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150, Recuperado de www.revista.etnomatematica.org/index.php/RvLatEm/article/view/123.
- Radford, L. (2018). *Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts*. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*.
- Radford, L. (2018). *The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school*. In C. Kieran (Ed.): *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). New York: Springer.
- Rico, L., Cañadas, M., Gutierrez, J., Molina, M., Segovia, I., & Radford, L. (2013). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp.3-12). Granada, España: Comares.
- Rivera, E., & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Santiago de Cali.

- Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: McGRAU-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- Sánchez, L. F. (2016). *Desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por GeoGebra*. (Tesis de maestría). Universidad del valle. Santiago de Cali.
- Sibaja, A. M., & Soto, S. (2016). *Razonamiento algebraico en 3° grado*. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia. Medellin.
- Velásquez, L. J. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional. Medellin.
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)*. (Tesis doctoral laureada). Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá- Colombia.
- Vergel, R. (2015). *Generalización de Patrones y Formas de pensamiento Algebraico temprano*. PNA, 9 (3,193-215).
- Vergel, R., & Rojas, P. (2013). *Procesos de generalización y pensamiento algebraico*. Revista científica. recuperado de [funes.uniandes.edu.co/2726/1/procesos de generalización y pensamiento algebraico. pdf](http://funes.uniandes.edu.co/2726/1/procesos%20de%20generalizaci3n%20y%20pensamiento%20algebraico.pdf).

ANEXOS

Anexo 1: Producción de un estudiante en la Tarea 1

Institución Educativa: Técnica Occidente
Municipio: Tuluá Valle. Código-DANE: 176834003989

Docentes investigadoras: MARICEL VELASCO GARCIA
ASENETH CAARMONA TRUJILLO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Paula

Grado: 5-2 edad 10 años

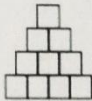
Tarea 1

Observa la secuencia de las siguientes figuras


Figura 1


Figura 2


Figura 3


Figura 4

A partir de lo observado realice una reflexión sobre la secuencia en relación con las siguientes preguntas:

a) ¿Qué Cambia? La cantidad de cuadrados

b) ¿Cuántos cuadros habrá en las Figuras 5 y 6? Justifica tu respuesta 5-16 6-21

c) Andrés un estudiante de la clase afirma que para la Figura 8 se necesitan 30 cuadrados ¿es correcta la afirmación de Andrés? En caso contrario explica porque

Anexo 2. Producción de un estudiante en la Tarea 1

Solución B:

En la 5 hay 15 cuadrillos porque en la 4 habian 10 y si le agregamos 5 de 15, y en la 6 hay 21 cuadrillos porque si a 15 le sumamos 6 de 21 porque se agrega la cantidad del numero de la figura

Ejemplo: figura 6 = se agregan 6 cuadrillos

C) porque $21 + 7$ da 28 y esa sera la 7, y si a 28 le sumamos 8 sera 36

Anexo 3. Producción de un estudiante en la Tarea 2

Institución Educativa: Técnica Occidente
Municipio: Tuluá Valle.

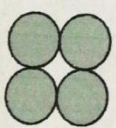
Código-DANE: 176834003989

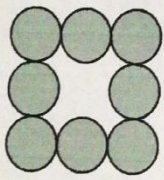
Docentes investigadoras: MARICEL VELASCO GARCIA
ASENETH CAARMONA TRUJILLO

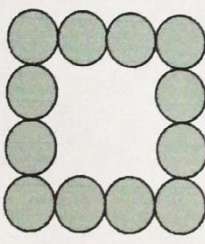
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Mariana

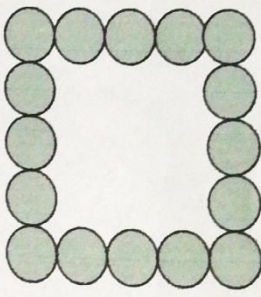
Grado: 5-2 edad 10 años

TAREA 2
Observa la siguiente secuencia de círculos


Figura 1


Figura 2


Figura 3


Figura 4

Teniendo en cuenta la secuencia anterior responde las siguientes preguntas

- ¿Qué se observa en la secuencia?
- ¿Qué sucedió de la figura 1 a la figura 2 y de la figura 2 a la figura 3, y de la figura 3 a la figura 4
- ¿Qué sucede en la figura 6? Justifica tu respuesta
- Escribe una forma de hallar la figura 20 sin realizar los dibujos y justifica tu respuesta

Anexo 4. Producción de un estudiante en la Tarea 2

a) que se va aumentando 4 círculos mas en cada figura

b) que se ha engrandeciendo mas cada una mientras que se le van aumentando cada una

c) multiplicamos 4×6 y nos da 24 círculos

d) da 80 círculos

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 4 \\ \hline 216 \end{array}$$

que multiplicara cualquier figura por 4

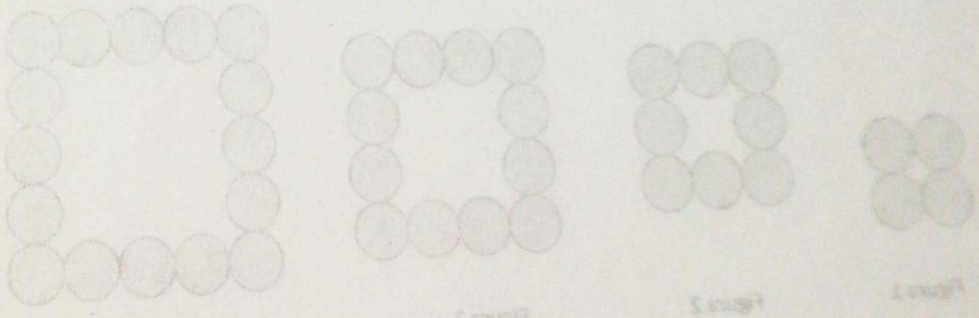


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Anexo 5. Producción de un estudiante en la Tarea 3



Institución Educativa: Técnica Occidente
Municipio: Tuluá Valle.

Código-DANE: 176834003989

Docentes investigadoras: MARICEL VELASCO GARCIA

ASENETH CARMONA TRUJILLO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:

Maria

Grado:

5-2

edad

10 años

TAREA 3

Observa la siguiente secuencia de figuras y responde las preguntas:



Figura 1

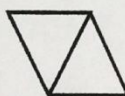


Figura 2



Figura 3

- a) ¿Cuántos triángulos y palillos forman las Figuras 1, 2 y 3?
- b) Dibuje las Figuras 4, 5 y 6 de la secuencia, ¿Cuántos palillos se necesitan en cada figura?
- c) ¿Encuentra a través del cálculo el número de palillos y de triángulos en la Figura 10 sin graficar las figuras 8 y 9? Justifica tu respuesta
- d) Margarita una estudiante de la clase afirma que en la figura 100 hay 130 palillos y 150 triángulos *es correcta la afirmación de Margarita?*
- e) Explica cómo harías para encontrar la cantidad de palillos en la Figura 100
- f) Elige de la bolsa una de las balotas al azar, la cual contiene un número. Sin mirarlo escribe un mensaje a un compañero de tu clase para expresar como encontrar el número de palillos para ese número de figura que está dentro de la balota, luego destapa la balota y comprueba el número de palillos de la figura de la forma que le explicaste a tu compañero.

Anexo 6. Producción de un estudiante en la Tarea 3

figura 4
9 Palillos

figura 5
11 Palillos

figura 6
13 Palillos

figura 10 tiene 21 Palillos y 10 triangulos

la afirmacion de margarita es incorrecta Porque
deben haber 20 Palillos y 100 triangulos

fui observando cada figura y fui analizando que
cada figura se le multiplicaba por 2 y se le sumaba
1 mas

multiplica 2 x el numero de Cualquier figura y
Sumale 1

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 2 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 1 \\ \hline 21 \end{array}$$

figura 10