



La noción de *cercanía* en espacios abstractos: un estudio histórico en el marco de la
formación matemática de profesores.

Lizeth Yajani Grisales Peña
María del Mar Hernández Domínguez

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas

2024



La noción de *cercanía* en espacios abstractos: un estudio histórico en el marco de la
formación matemática de profesores.

Lizeth Yajani Grisales Peña

María del Mar Hernández Domínguez

Dra. Maribel Patricia Anacona

Directora Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

2024

Agradecimientos

A nuestra directora de trabajo de grado, la Dra. Maribel Anacona, especialmente por el acompañamiento y las orientaciones que nos brindó durante este proceso, y el impacto positivo que tuvo a lo largo de nuestra formación.

A nuestros evaluadores, el Dr. Guillermo Ortiz y el Dr. Sergio Valencia, por su disposición en la lectura del trabajo y por las sugerencias ofrecidas, las cuales contribuyeron de manera significativa en su realización.

A los profesores que nos acompañaron en nuestro paso por la universidad, aportado valiosas experiencias durante nuestra formación académica.

A nuestros compañeros por los aprendizajes compartidos; especialmente a Isabella Arce, con quien formamos un equipo que nos permitió crecer académica, profesional y personalmente.

A nuestra alma mater, la Universidad del Valle, por habernos permitido formarnos profesionalmente y vivir diversas experiencias que nutrieron nuestro ser.

A mi familia por todo el apoyo brindado a lo largo de este proceso; especialmente a mis padres por los esfuerzos realizados para que lograra cumplir mis propósitos, y hacerme sentir siempre su compañía y confianza.

A mi compañera de trabajo de grado, por tener siempre la mejor disposición y realizar un gran esfuerzo en el desarrollo del mismo, por permitirme aprender de ella y vivir diversas experiencias desde el inicio de nuestra formación, las cuales nos permitieron fortalecer el equipo de trabajo y al mismo tiempo nuestra amistad.

A Juan Álvarez por su compañía y apoyo incondicional durante este proceso, por acompañarme, aconsejarme y darme siempre palabras de aliento y motivación.

A mis amigas, por estar presentes en esta importante etapa de mi vida profesional y ayudarme a confiar en que siempre podía dar lo mejor de mí.

Lizeth Yajani Grisales Peña

A mi familia por su comprensión, compañía y apoyo brindado durante todo este proceso académico, especialmente a mi madre Aleida Domínguez, por sus valiosos consejos y palabras que siempre me alentaban a continuar.

A mi compañera de trabajo de grado, por las valiosas reflexiones y discusiones que propiciaba en las distintas reuniones, por el gran equipo que desde primer semestre logramos construir y por los lazos de amistad formados.

María del Mar Hernández Domínguez



Programa Académico Licenciatura en Matemáticas

Fecha

Código del programa: 34 92

Resolución del programa: 11 1

Día	Mes	Año
22	8	2024

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

La noción de *cercanía* en espacios abstractos: un estudio histórico en el marco de la formación matemática de profesores.

Se trata de:

Proyecto Informe Final **X**

Director

Maribel Paricia Anacona

Nombre del Primer Evaluador

Guillermo Ortiz Rico

Nombre del Segundo Evaluador

Sergio Iván Valencia

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Lizeth Yajani Grisales Peña	1928406	3492	lizeth.grisales@correounivalle.edu.co	3145291808
María del Mar Hernández D	1928123	3492	maria.hernandez.dominguez@correounivalle.edu.co	3235150367

Evaluación

Aprobado	Meritorio X	Laureado
Aprobado con recomendaciones	No Aprobado	Incompleto

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo o Proyecto de Grado Primer Evaluador Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

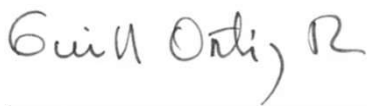
Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones Observaciones Razón de desacuerdo - Alternativas

En el presente trabajo de grado se desarrolla un análisis histórico de la noción de cercanía en espacios abstractos, identificando elementos de orden epistemológico, que permiten reflexionar en torno al trabajo con los conceptos de límite, continuidad y completitud en la formación de profesores de matemáticas. Es un trabajo muy bien elaborado en el que se demuestra un amplio dominio del tema, el cual se trata con rigurosidad, profundidad y cierta originalidad. Se destaca el buen manejo de la lengua y la excelente organización del documento que favorece una lectura ágil a pesar de su

complejidad. De igual manera, se resalta el manejo de fuentes bibliográficas de primera mano (en francés, inglés y alemán) y el uso de fuentes secundarias especializadas. Es un trabajo que se recomienda tener en cuenta para comprender la emergencia de la topología como disciplina relevante del siglo XX y la importancia que tienen los procesos de abstracción y generalización en la formación matemática universitaria de los futuros profesores de matemáticas.

Firmas		
		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Resumen

En el presente trabajo de grado se desarrolla un análisis histórico de la noción de cercanía en espacios abstractos, identificando elementos de orden epistemológico, que permiten reflexionar en torno al trabajo con los conceptos de límite, continuidad y completitud en la formación de profesores de matemáticas. Inicialmente se analiza la génesis de los espacios abstractos, en donde se identifican principalmente los trabajos de Fréchet y Hausdorff; además, se reconoce el trabajo de otros matemáticos que aportaron en este sentido. Posteriormente, se estudia la noción de cercanía en relación con la convergencia, para esto se considera el trabajo del grupo Bourbaki con el desarrollo del concepto de filtro, su convergencia y los espacios uniformes; por otro lado, se considera los desarrollos de Moore y Smith sobre la convergencia de redes. Finalmente, teniendo como foco la convergencia, se realiza una comparación de los conceptos antes mencionados en los espacios métricos y en espacios más generales, lo cual permite hacer algunas reflexiones de orden epistemológico alrededor de estos conceptos en el marco de la formación de profesores de matemáticas, destacando las potencialidades que puede ofrecer el estudio del límite, la continuidad y la completitud en espacios abstractos.

Palabras claves: Espacios abstractos, cercanía, vecindades, filtros, convergencia, continuidad, completitud.

Abstract

In this thesis, develops a historical analysis of the notion of nearness in abstract spaces, identifying elements of epistemological order, which allow reflecting on the work with the concepts of limit, continuity and completeness in the training of mathematics teachers. Initially, the genesis of abstract spaces is analyzed, where the works of Fréchet and Hausdorff are mainly identified; in addition, the work of other mathematicians who contributed in this regard is recognized. Subsequently, the notion of nearness is studied in relation to convergence, considering the work of the Bourbaki group with the development of the concept of filter, its convergence and uniform spaces; On the other hand, the developments of Moore and Smith on net convergence are considered. Finally, having convergence as a focus, a comparison of the above mentioned concepts in metric spaces and in more general spaces is made, which allows for some epistemological reflections around these concepts in the framework of the training of mathematics teachers, highlighting the potentialities that the study of the limit, continuity and completeness in abstract spaces can offer.

Keywords: Abstract spaces, nearness, neighborhoods, filters, convergence, continuity, completeness.

Tabla de contenido

Resumen.....	1
Abstract	2
Índice de tablas.....	5
Índice de figuras	6
0. Introducción	7
Capítulo 1 La Noción de Cercanía en el Surgimiento de los Primeros Espacios Abstractos	12
1.1 Los Espacios Abstractos de Fréchet.....	15
1.1.1 Los Espacios (L)	16
1.1.2 Los Espacios (V)	19
1.1.3 Los Espacios (E).....	26
1.2 El surgimiento de los espacios abstractos en términos de <i>vecindades</i>	29
1.2.1 Los aportes de Hilbert en relación con la noción de <i>vecindad</i>	30
1.2.2 El desarrollo de la noción de <i>vecindad</i> en Hausdorff.....	32
1.2.3 La noción de <i>vecindad</i> en Bourbaki.....	43
Capítulo 2 La Noción de Cercanía a través de la Convergencia.	51
2.1 La convergencia de sucesiones	51
2.2 La convergencia a través del concepto de redes	54
2.2.1 Conjunto dirigido.....	55
2.2.2 El concepto de red y de convergencia de una red	56
2.3 La Convergencia de Filtros en Bourbaki	58
2.3.1 La noción de filtro.....	59
2.3.2 La convergencia de filtros	63
2.3.3 Correspondencia entre redes y filtros	66
2.4 Los Filtros de Cauchy y los Espacios Uniformes	67
2.4.1 La noción de cercanía en espacios uniformes	67
2.4.2 Filtros de Cauchy.....	69
Capítulo 3 El Concepto de Límite: Análisis Comparativo	71
3.1 Convergencia en espacios métricos	71
3.1.1 Límite de una sucesión.....	72
3.1.2 Sucesiones de Cauchy y espacios completos	74
3.2 Convergencia en espacios topológicos.....	75
3.2.1 A través de sucesiones	75
3.2.2 A través de filtros.....	77

3.3 Reflexiones de orden epistemológico en el marco de la formación de profesores	81
4. Conclusiones	87
Referencias bibliográficas	89

Índice de tablas

Tabla 1: <i>Relaciones entre los axiomas de vecindades y los axiomas del plano</i>	40
Tabla 2: <i>Relaciones entre los axiomas de vecindades presentados por Bourbaki y por Hausdorff</i>	47
Tabla 3: <i>Axiomas de vecindades propuestos por distintos matemáticos</i>	48
Tabla 4: <i>Caracterización de adherencia, espacio de Hausdorff y continuidad en espacios métricos a través de la convergencia de sucesiones.....</i>	72
Tabla 5: <i>Caracterización de adherencia, espacio de Hausdorff y continuidad en espacios métricos y topológicos a través de la convergencia de sucesiones</i>	76
Tabla 6: <i>Caracterización de adherencia, espacio de Hausdorff y continuidad en espacios topológicos a través de la convergencia de filtros</i>	78

Índice de figuras

Figura 1: <i>Los espacios de Fréchet en términos de inclusión.....</i>	28
Figura 2: <i>Ejemplos de vecindades en diferentes espacios.....</i>	37
Figura 3: <i>Ilustración de las propiedades de Hausdorff para las vecindades.....</i>	38
Figura 4: <i>Ilustración de bolas concéntricas en el espacio euclidiano bidimensional.....</i>	39
Figura 5: <i>Representación gráfica-intuitiva de una vecindad</i>	45
Figura 6: <i>Ilustración de las propiedades de Bourbaki para las vecindades</i>	46
Figura 7: <i>Comparación de los espacios en términos de inclusión</i>	50
Figura 8: <i>Ejemplo de límite de una sucesión.....</i>	53
Figura 9: <i>Ejemplo de filtro.....</i>	60
Figura 10: <i>Ilustración de entornos</i>	68
Figura 11: <i>Ilustración de la convergencia de sucesiones.....</i>	73
Figura 12: <i>Ilustración de la convergencia de sucesiones en términos de colas y bolas</i>	73
Figura 13: <i>Ilustración de la continuidad puntual en términos de vecindades.....</i>	81
Figura 14: <i>Ilustración de la continuidad puntual en términos de filtros.....</i>	83

0. Introducción

Uno de los intereses de la educación matemática se ha posicionado en comprender cómo influye el pensamiento del profesor en la gestión de las prácticas educativas; como lo mencionan Rico & Gil (2003) la literatura muestra que se ha estudiado el impacto que tienen los conocimientos, las creencias y las concepciones que poseen los profesores de matemáticas, en sus acciones dentro del aula. Ahora, esos conocimientos que construye un profesor son permeados por la formación que este reciba. En el marco de estas ideas, Guacaneme & Mora (2012) afirman que uno de los objetos de estudio en los que se ha interesado la investigación relacionada con la educación del profesor de matemáticas, tiene que ver con los conocimientos y competencias que este debe adquirir y desarrollar para su práctica profesional, los cuales tienen dos vertientes: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

En este sentido, una parte de la investigación se ha ocupado de estudiar los conocimientos del profesor en términos del saber matemático y de los problemas que le dieron origen a este saber, el cual según Guacaneme (2018) debe ser un *plato fuerte* en la formación del profesor de matemáticas. De ahí que, se hace necesario pensar en la conceptualización de los elementos matemáticos que adquiere un docente en su formación y que entrarán en juego en sus futuras prácticas profesionales. En relación con estas ideas, es preciso señalar algunas cuestiones:

En primera instancia, es necesario reconocer que el saber matemático de un profesor de matemáticas debe ser amplio y complejo, pues si bien los conceptos que son trabajados en la escolaridad son los más elementales de la ciencia en cuestión, el docente debe tener total dominio y comprensión de estos conceptos y de los fundamentos que se encuentran en la base de los mismos. En palabras de Shulman (1986), los profesores no sólo deben ser capaces de definir para los estudiantes las verdades aceptadas en un dominio. También deben poder explicar por qué una proposición particular se considera justificada, por qué vale la pena

conocerla y cómo se relaciona con otras proposiciones, tanto dentro como fuera de la disciplina, tanto en la teoría como en la práctica... Esperamos que la comprensión del contenido de la materia por parte del profesor sea al menos igual a la de su colega lego, el mero especialista en la materia (p.9).

Adicionalmente, es importante reconocer la existencia de algunos conceptos fundamentales de las matemáticas que atraviesan la formación profesional del docente de matemáticas. En particular, el interés es considerar los conceptos de límite, y a su vez continuidad y completitud, que son centrales en la comprensión del cálculo, del análisis y de la topología, cursos que se enmarcan en la estructura curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle.

Ahora, la investigación en educación matemática ha documentado que se presentan algunas dificultades asociadas al aprendizaje de los conceptos anteriormente mencionados, por ejemplo, Artigue (1998) y Tall (1978) se han ocupado de estudiar algunas de las dificultades ligadas a la comprensión de los conceptos de límite y continuidad. Adicionalmente, Anacona & Ortiz (2011) afirman que “la completitud es un concepto que involucra claramente en la lógica de su edificación teórica, las nociones de límite y convergencia”, por ello se puede entender que las dificultades asociadas a la comprensión de la idea de límite son heredadas a la conceptualización de la completitud en R .

Conforme a ello, Artigue (1998) reflexiona sobre la relevancia de los análisis históricos en la comprensión de los obstáculos epistemológicos, en el sentido de que, dichos obstáculos se encuentran tanto en el aprendizaje del concepto como en el desarrollo histórico del mismo, es decir, como si estos obstáculos estuvieran presentes en la génesis del concepto (pp. 45). Es así que, en el intento por comprender los obstáculos epistemológicos que subyacen a los conceptos de límite, continuidad y completitud, se pretende focalizar la atención en la noción

de “cercanía”; la cual se constituye en un elemento esencial para el propósito en cuestión, pues es común y está en la base de estos conceptos.

En relación con el contexto en el que se da la emergencia de la noción de cercanía en espacios abstractos, la historia de las matemáticas muestra que en los inicios del siglo XIX había una preocupación importante por fundamentar los conceptos básicos del análisis desde la aritmética; en este sentido, algunos matemáticos de la época realizaron distintos aportes en miras de contribuir a esta cuestión. Por un lado, hacia 1817 Bernhard Bolzano definió la continuidad sin hacer uso de referencias geométricas y/o intuitivas; por otra parte, en 1821 Augustin Cauchy definió el límite y la continuidad en un sentido puramente numérico, y en esta misma década realizó otros aportes a los fundamentos del análisis.

Si bien todo esto fue importante para dicha fundamentación, se necesitaron algunas décadas más para precisar estas definiciones y eliminar cualquier error en las mismas. Fue hasta 1859 que Karl Weierstrass logró solventar dichas imprecisiones para los conceptos de límite y continuidad, lo cual lo ubicó en la cima de estos procesos de rigorización. Además, estas definiciones presentadas por Weierstrass, son clásicas en el estudio del cálculo y del análisis matemático y siguen teniendo vigencia.

Según Weierstrass,

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua* en un punto $x = a$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x (0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Por otro lado, la noción de límite es caracterizada del siguiente modo,

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. El $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica

$$\text{que } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Aquí es preciso resaltar que, en el intento por fundamentar numéricamente el límite y la continuidad, la noción de distancia tuvo una incidencia importante; pues como se puede ver en las definiciones citadas, fue preciso recurrir a la distancia entre puntos para definir estos

conceptos. Además, es importante mencionar que, a partir de esa idea de límite y continuidad, se define la derivada y la integral, conceptos que están en la base del cálculo y del análisis matemático. Teniendo esto en cuenta, la noción de distancia atraviesa los conceptos fundamentales de estas áreas del conocimiento matemático, y en este sentido, se puede considerar que esta noción fue esencial para los desarrollos matemáticos de la época.

Ahora bien, con estos desarrollos y el gran auge a finales del siglo XIX de la teoría de conjuntos de Cantor-Dedekind, se empieza a generar un interés especial por generalizar, a espacios de naturaleza cualquiera, los resultados que ya se tenían con dicha teoría; hasta el momento se trabajaba con operadores como la diferenciación o la integración que actuaban sobre espacios de funciones, por lo cual, para generalizar el trabajo con estos, surge la necesidad de caracterizar una noción de cercanía en espacios abstractos. En este sentido, se trata de definir una relación de cercanía entre dos puntos cualesquiera del espacio. Esta relación nos dice si dos puntos están *cerca* o no. Sin embargo, no hay una forma única de establecer si dos puntos son *cercanos*.

Teniendo en cuenta la necesidad de caracterizar una noción de cercanía para trabajar en espacios abstractos, a lo largo de la historia se pueden ubicar algunos trabajos que abordaron este propósito, por ejemplo, la tesis de 1906 de Marice Fréchet, el texto de 1914 de Felix Hausdorff, y algunos resultados presentados en el marco del grupo Bourbaki. Así, el presente trabajo de grado pretende dar cuenta de algunos elementos de orden epistemológico, que ofrece un estudio histórico sobre la noción de “cercanía” en espacios abstractos, que permiten contribuir a una caracterización profunda de conceptos fundamentales, como límite, continuidad y completitud, en la formación matemática de los profesores de matemáticas.

Para esto, se pretende emplear algunos textos originales de los autores anteriormente mencionados, en los cuales fueron presentados los desarrollos matemáticos que se gestaron en la última parte del siglo XIX y se consolidaron en el siglo XX, en relación con la noción de

cercanía en espacios abstractos; esto permitirá reflexionar sobre algunas potencialidades y limitaciones de estudiar en términos generales los conceptos asociados a la convergencia. Así, el presente estudio se divide en tres fases en las que se intenta rastrear, a partir de distintas perspectivas, la evolución de dicha noción; cada una de estas fases corresponderá con un capítulo de este trabajo.

En la Fase 1 se estudiará el surgimiento de los primeros espacios abstractos, para esto, por un lado se analizará la tesis doctoral *Sur quelques points du calcul fonctionnel*¹ de Maurice Fréchet de 1906 donde define los espacios (L) , los espacios (V) y los espacios (E) , y por otro lado, se estudiará el desarrollo de los espacios abstractos en términos de vecindades, aquí será central el trabajo adelantado por Hausdorff en 1914 titulado *Grundzüge der Mengenlehre*², en el cual define los espacios topológicos en términos de vecindades. En la Fase 2 se estudiará la propuesta del grupo Bourbaki donde se presentan los espacios uniformes y la convergencia de filtros, para esto se considerará principalmente el texto *Topologie générale*³ de los *Éléments de Mathématique*⁴ de 1965. Ahora bien, aunque los documentos anteriormente mencionados son centrales en el presente trabajo, a lo largo de este se considerarán otros autores o trabajos que se hacen pertinentes en una contextualización histórica y matemática más detallada.

En la Fase 3 nos centraremos en el límite como concepto transversal de la continuidad y la completitud, así, desde este foco se realizará un análisis comparativo de la caracterización de dichos conceptos en los espacios métricos y en los espacios abstractos, para identificar posibles elementos epistemológicos que permitan reflexionar sobre las potencialidades de considerar el desarrollo de estos conceptos en los espacios abstractos, en el marco de la formación de profesores de matemáticas.

¹ *Sobre algunos puntos del cálculo funcional.*

² *Elementos de la teoría de conjuntos.*

³ *Topología general.*

⁴ *Elementos de matemáticas.*

Capítulo 1

La Noción de *Cercanía* en el Surgimiento de los Primeros Espacios

Abstractos

En los inicios del siglo XX, matemáticos como Veblen, Riesz, Hedrick, Root, Fréchet y Hausdorff realizaron investigaciones que aportaron a la caracterización de una noción de *cercanía*, esto en el marco de la generalización a espacios abstractos de los resultados que se tenían para el análisis.

En primera instancia, de acuerdo con Cullinane (1997), el matemático estadounidense Oswald Veblen en *Definition in terms of order alone in the linear continuum and in well-ordered sets*⁵ de 1905, introduce el término segmento para referirse al conjunto de todos los elementos en un conjunto linealmente ordenado, que se encuentran entre dos elementos dados; estos segmentos pueden percibirse como vecindad de cada uno de sus puntos. Además, se reconoce el trabajo del matemático húngaro Frederic Riesz⁶ sobre el continuo matemático, quien en *Die Genesis des Raumbegriffes*⁷ de 1907, guiado por su idea de que la concepción abstracta del espacio no debería depender de la distancia, captura la *cercanía* a través de su definición de vecindad:

Definición: Sea X un continuo matemático⁸. Un subconjunto $U \subset X$ es una vecindad de un elemento $x \in X$ si $x \in U$ y $x \notin (X \setminus U)'$ ⁹ (Riesz, 1906, como se citó en Rodríguez, 2014).

⁵ Definición en términos de orden sólo en el continuo lineal y en conjuntos bien ordenados.

⁶ Riesz es conocido actualmente por los denominados Espacios de Riesz.

⁷ La génesis del concepto de espacio.

⁸ **Continuo matemático** X es un continuo matemático si para cada elemento $x \in X$ y para cada subconjunto $M \subset X$, se tiene que $x \notin M'$ o $x \in M'$ y entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1. $M = \{x_1, \dots, x_n\} (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow M' = \emptyset$;
2. $M \subset N \Rightarrow M' \subset N'$;
3. $M = P \cup Q \Rightarrow M' \subset P' \cup Q'$;
4. $x \in M'$ y $y \neq x \Rightarrow \exists P \subset M$ tal que $x \in P'$ pero $y \in P'$ (Riesz, 1906, como se citó en Rodríguez, 2014).

⁹ $x \in U'$ si x es un elemento límite de U . El conjunto U' se denomina el derivado de U .

La expresión $(X \setminus U)'$ simboliza el derivado del complemento de U .

En cuanto a esta definición, Riesz, por un lado, afirma que si $x \in M'$, con $M \subset X$, entonces cada vecindad de x contiene infinitos elementos de M , el elemento x se denomina punto de acumulación, de la misma forma, menciona que la proposición inversa también es verdadera; y por otro lado, señala el hecho de que la intersección de un número finito de vecindades de x también es una vecindad de x (Rodríguez, 2014, p. 80). Así, de acuerdo con Anacona (2011), sus desarrollos en términos de los puntos de acumulación son “una forma de generalizar la noción de límite de una sucesión, pues se pasa de considerar un infinito numerable a uno no numerable” (p. 200).

En este mismo sentido, de acuerdo con Cullinane (1997), se reconocen los desarrollos de los matemáticos estadounidenses Earle Hedrick y Ralph Root en relación con una teoría abstracta de puntos; Hedrick en *On properties of a domain for which any derived set is closed* de 1911, considera espacios en los que existe una noción de elemento límite de una secuencia, y Root en 1914 propone axiomas en los que la noción de vecindad es protagonista, este pensaba que las definiciones de límite se fundamentaban en nociones análogas a la de vecindad; así, propone un sistema en el que considera una clase P de elementos, una clase U de elementos ideales¹⁰ y una relación binaria entre subclases de P y elementos de $P \cup U$ que se puede ver como una descripción de vecindades. De lo anterior surgen los siguientes axiomas:

1. Si N es una vecindad de $p \in P$, luego $p \in N$
2. Cada vecindad de un elemento ideal contiene un elemento de P .
3. Para cualquier $p \in P$ hay una secuencia (A_n) de vecindades de p tal que para cualquier vecindad N de p existe k tal que $A_n \subseteq N$ para cada $n \geq k$.

¹⁰ Se define elemento ideal como una clase v de subclases $\mathfrak{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

- a. Si $\mathfrak{R}$ pertenece a v y $\mathfrak{R}_1$ contiene $\mathfrak{R}$, entonces $\mathfrak{R}_1$ pertenece a v .
- b. Si $\mathfrak{R}$ pertenece a v y consta de dos subclases $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ entonces $\mathfrak{R}_1$ o $\mathfrak{R}_2$ pertenece a v .
- c. Cada dos clases $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ de v tienen la relación V (donde V es una relación entre subclases).
- d. La clase v no está contenida en ninguna clase v_1 diferente que cumpla las condiciones a, b y c.
- e. Ningún elemento p está contenido en cada $\mathfrak{R}$ de v o tiene la relación V para cada $\mathfrak{R}$ de v (Root, 1914, pp. 99-100).

4. Para cada vecindad N de $p \in P$ hay una vecindad M_N de p para la cual cada elemento de M_N tiene una vecindad que es un subconjunto de N

Los distintos elementos de P tienen vecindades disjuntas (p. 8).

Ahora, si bien los trabajos realizados por estos matemáticos constituyen un aporte significativo en relación con la caracterización de la noción de *cercanía*, en particular en términos de vecindades; se reconoce como central los trabajos realizados por los matemáticos Fréchet y Hausdorff, pues fueron quienes al capturar la *cercanía* en términos generales lograron contribuir al propósito de generalizar los resultados que se tenían para el análisis, a conjuntos con elementos de naturaleza cualquiera, lo cual dio paso al estudio de los primeros espacios abstractos.

Por un lado, Maurice René Fréchet¹¹ desarrolló sus investigaciones en el campo de la topología, la teoría de la probabilidad y la estadística, su tesis doctoral fue dirigida por Jacques Hadamard y en este punto se desarrollan sus trabajos en análisis funcional, que buscaban presentar un marco más general de los resultados ya obtenidos en el mismo campo. Este matemático es reconocido por Dugac (1984) como el “creador de la topología general”, pues es el primero en considerar conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera y en plantear el problema de la generalización de la noción de función continua, lo cual es central en esta rama de las matemáticas.

Por otro lado, Felix Hausdorff¹² desarrolló sus investigaciones en álgebra, análisis, teoría de conjuntos y topología, es reconocido como uno de los fundadores de la topología general en los términos que se conoce actualmente (Bourbaki, 1974, como se citó en Arboleda, 2017). En su libro *Grundzüge der Mengenlehre* de 1914 incluye un capítulo en el que toma los

¹¹ Matemático francés (1878 Maligny - 1973 París).

¹² Matemático alemán (1868 Breslavia - 1942 Bonn).

axiomas de las vecindades presentadas por Hilbert en el espacio euclidiano, para presentar una nueva teoría que los generaliza.

1.1 Los Espacios Abstractos de Fréchet

Inicialmente, es preciso señalar que el interés de Fréchet estaba centrado en establecer los principios fundamentales del cálculo funcional, pues de manera introductoria en su tesis doctoral, este matemático presenta el panorama que se tenía con Volterra, Arzela y Hadamard, en relación con lo que se entendía por función y con lo que se debía tomar como variable en esta, para presentar una perspectiva que abarcara y generalizara dichos resultados, por ejemplo presenta definiciones generales de conceptos como continuidad, límite, adherencia, etc.

Así, Fréchet adopta un punto de vista en el que los elementos variables serían de naturaleza cualquiera y para ello presenta la definición de operación funcional:

Definición: Una operación funcional U está definida en un conjunto E de *elementos de cualquier naturaleza* (números, curvas, puntos, etc.) cuando a cualquier elemento A de E le corresponde un determinado valor numérico de $U: U(A)$ (Fréchet, 1906, p. 1).

Es posible ver en esta definición, que Fréchet se libera de considerar tipos particulares de variables en su concepción de función y propone una caracterización que abarque cualquier cosa, sin embargo, también es preciso señalar que en esta misma concepción sigue atado a los valores numéricos, pues las imágenes de los elementos transformados seguirán siendo números. A pesar de lo anterior, dada la generalidad que se empieza a gestar en la concepción de función, esto es un avance fundamental en la consolidación de los espacios abstractos.

Pensando en el propósito de establecer los principios fundamentales del cálculo funcional, Fréchet reconoce la necesidad de que inicialmente se generalice la teoría de conjuntos lineales, y para esto, la primera acción es definir la función continua; es en este punto, en el que empieza a jugar un papel importante caracterizar la *cercanía* entre elementos de

cualquier naturaleza, pues no era posible definir la continuidad en una función sin saber qué se entiende por *ser cercano a*. Es así que, con la intención de capturar dicha *cercanía* en conjuntos abstractos, Fréchet presenta las clases (L) , (V) y (E) .

1.1.1 Los Espacios (L)

Fréchet en el intento por presentar una definición de límite, que reúna las propiedades esenciales de las definiciones de límite que se tenían para tipos particulares de elementos, como curvas, puntos, números, etc., presenta en su tesis doctoral la clase (L) ¹³.

Definición: Se le denomina clase (L) a un conjunto de elementos A de naturaleza cualquiera que satisface las siguientes condiciones:

i) Si cada uno de los elementos de la sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ es idéntico al mismo elemento A , la sucesión ciertamente tiene un límite que es A .

ii) Si una sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene límite A , cualquier sucesión de elementos de la primera sucesión tomados en el mismo orden: $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$ (los números enteros $n_1, n_2, \dots, n_p$ aumentarán por tanto) tiene un límite que también es A .¹⁴

De la anterior definición es posible realizar algunas observaciones, por un lado, se puede notar que la *cercanía* es capturada en este tipo de espacios a través de la idea de límite, en la medida en que, entre mayor sea el n , más *cerca* están los términos de la sucesión al elemento A , por lo cual, A es el límite de la sucesión. Además, con esta definición, se tiene un avance importante en cuanto al propósito de generalizar los resultados matemáticos que se

¹³ Aunque presenta en su tesis doctoral de 1906 este espacio, “Fréchet introdujo la noción de espacio (L) en su nota (28 bis), presentada a los Comptes-rendus de la Académie de Ciencias de París, el 21 de Noviembre de 1904. Su objeto era generalizar el teorema bien conocido de Weierstrass sobre la existencia de las cotas superior e inferior de toda función continua en un intervalo cerrado y acotado” (Arboleda, 1980, p. 7).

¹⁴ I) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A , la suite a certainement une limite qui est A .

II) Si une suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a une limite A , toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre: $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$ (les nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A .

tenían en la época, pues esta clase se define para elementos de naturaleza cualquiera; sin embargo, al caracterizarse a través de sucesiones, sigue estando atada a los números naturales.

Ahora, teniendo la caracterización de los espacios (L) , Fréchet generaliza algunas definiciones de la teoría de conjuntos a estos espacios abstractos; para esto define el límite de un conjunto.

Definición: En un conjunto E de elementos de la clase (L) , A es límite de E cuando existe una secuencia infinita de elementos de E : $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que son distintos y tienden a A .

Así, a partir de esta definición de límite de un conjunto E , se presentan otras definiciones: por un lado, la de *conjunto derivado* (E') de un conjunto E , como el conjunto de elementos límites de E ; por otro lado, la de *conjunto cerrado*, como un conjunto que contiene su conjunto derivado, es decir, que el conjunto E es cerrado si los elementos límites de este, pertenecen a él; así mismo, define *conjunto perfecto* como un conjunto que coincide con su derivado, es decir, que todos los elementos de E son elementos límites de él mismo. Además, presenta la definición de *interior* afirmando que dado un conjunto fundamental H y un conjunto E formado con elementos de H , un elemento A que pertenece a E es interior a este cuando no existe una secuencia de elementos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, que pertenecen a H y que no pertenecen a E , de la cual A es el límite.

Adicionalmente, en su tesis Fréchet define *elemento de condensación* de un conjunto E como un elemento A límite de E , tal que al quitar de E una infinidad contable de elementos, A continúe siendo el elemento límite. También define *conjunto compacto* como un conjunto que solo incluye un número finito de elementos o que cualquier infinidad de sus elementos da lugar a por lo menos un elemento límite; y presenta la definición de *conjunto extremo* como un conjunto que es compacto y cerrado.

De lo anterior, es importante mencionar que, el haber capturado la noción de *cercanía* a través de la idea de límite fue trascendental en el desarrollo que realiza Fréchet en los espacios abstractos, pues es a través de dicha caracterización que puede definir, en estos espacios más generales, los distintos resultados que ya se tenían para conjuntos lineales, y además logra definir otros conceptos importantes para su propósito. En este sentido, para trabajar con las definiciones presentadas, es necesario comprender la *cercanía* que hay implícita en la definición de límite.

Es así que, después de haber capturado la *cercanía* a través de la idea de límite y haber generalizado estas definiciones de los conjuntos lineales a espacios abstractos, Fréchet presenta una definición de *función continua*:

Definición: Una operación funcional uniforme¹⁵ V en un conjunto E de elementos de una clase (L) es *continua* en E , si cualquiera que sea el elemento A de E , límite de una secuencia de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E , siempre tenemos $V(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(A_n)$.

Además, propone algunos teoremas y corolarios relacionados con esta definición y asociados a conceptos como convergencia uniforme y cuasi uniforme, límite superior, etc. Aquí de nuevo vale hacer mención del papel de la *cercanía* en todo su desarrollo, pues como se puede observar, este concepto está en la base de cada uno de sus resultados en este tipo particular de espacios.

En este punto Fréchet explicita las limitaciones que tiene el trabajar con la clase (L) definida, pues dada su generalidad no permite continuar extendiendo a estos espacios otros conceptos de la teoría de conjuntos lineales y de funciones continuas¹⁶, por ejemplo, no fue

¹⁵ Consideremos un conjunto E formado por elementos cualesquiera (números, puntos, funciones, rectas, superficies, etc.) pero tal que podamos discernir los distintos elementos. A cualquier elemento A de este conjunto le corresponda un número determinado $U(A)$; definimos así lo que llamaremos una *operación funcional uniforme*.

¹⁶ Nous avons vu dans ce qui précède comment on peut arriver à généraliser certains théorèmes connus dans les classes si étendues que nous avons appelées classes (L) . Néanmoins le petit nombre des hypothèses que nous avons faites sur les classes (L) ne nous permettra pas de poursuivre cette extension. On s'aperçoit bien vite que certaines propositions fondamentales de la théorie des ensembles linéaires et des fonctions continues, dont l'énoncé mis sous forme convenable peut garder un sens pour les classes (L) , que ces propositions, dis-je, ne sont plus vraies pour toute classe (L) . Par là-même échoue toute tentative de généralisation des propositions ultérieures auxquelles elles servent de base (Fréchet, 1906, p.15).

posible generalizar la noción de continuidad uniforme. Adicionalmente, muestra que en la clase (L) no se verifica la propiedad que afirma que el conjunto derivado de un conjunto lineal es cerrado, es decir, se pueden encontrar clases que cumplen las condiciones necesarias para ser clase (L) , pero en las cuales no se verifica que el conjunto de los elementos límites de un conjunto sea cerrado.

Para ilustrar esto, Fréchet propone un ejemplo en el cual considera la clase de funciones de una variable definidas en el intervalo $[0,1]$ y verifica que satisface las condiciones para ser clase (L) ; además, considera un conjunto de elementos de la clase definida: el conjunto E de funciones continuas en el intervalo. En este punto se retoma la clasificación de las funciones realizada por Baire (1905) en la que las funciones continuas forman parte de la clase 0 y las funciones límite de funciones continuas forman parte de la clase 1 (p.126). Ahora, Fréchet señala que el conjunto de los elementos límites de E , es decir, el conjunto derivado E' está compuesto por funciones de la clase 0 o 1, pero se tienen funciones límites de funciones en E' que no pertenece a ninguna de estas clases, esto implica que hay elementos en el conjunto derivado de E' que no pertenecen a E' , por tanto no se verifica que el derivado de E' esté contenido en E' , es decir E' no es cerrado.

Con el desarrollo que se tiene hasta este punto, se logra capturar la noción de *cercanía* en términos específicos, y con esto se consiguió generalizar unos resultados y obtener algunos nuevos; sin embargo, como se pudo observar, esta clase era demasiado general, lo cual producía algunas limitaciones, es así que, se hace necesario definir una nueva clase en la que estas se puedan superar.

1.1.2 Los Espacios (V)

Teniendo en cuenta lo anterior, Fréchet presenta una nueva clase con algunas restricciones, las cuales deben seguir considerando elementos de cualquier naturaleza, deben

satisfacerse mediante las clases de elementos que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones, y deben permitir generalizar los teoremas que se tienen para la teoría de conjuntos lineales y funciones continuas. Es así que, presenta una clase cuya definición incluye una condición, que tiene como consecuencia la propiedad de que el conjunto derivado de un conjunto de elementos de la clase sea cerrado. Así, Fréchet afirma que:

Definición: Una clase (V) es una clase de elementos de naturaleza cualquiera en la que se puede distinguir cuando dos elementos son iguales o no, además en esta clase se hace corresponder a cualquier par de elementos A y B un número $(A, B) = (B, A) \geq 0$, el cual cumple las siguientes condiciones:

- 1° La condición necesaria y suficiente para que (A, B) sea cero es que A y B sean idénticos.
- 2° Existe una función positiva bien determinada $f(\varepsilon)$ que tiende a cero con ε , tal que las desigualdades $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ conducen a $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, cualesquiera que sean los elementos A, B, C . En otras palabras, basta que (A, B) y (B, C) sean pequeños para que ocurra lo mismo con (A, C) . A la vecindad de A y B la llamaremos número (A, B) .¹⁷

Considerando estas condiciones, define límite de una secuencia en los siguientes términos:

Definición: El número A es límite de una secuencia de elementos de la clase $V: A_1, A_2, \dots, A_n$, es decir, que los elementos tienden a A , si la vecindad (A_n, A) tiende a cero

con $\frac{1}{n}$.¹⁸

Ceci étant, nous pourrions dire qu'une suite d'éléments de la classe (V): $A_1, A_2, \dots$ tend vers un élément A , si le voisinage (A_n, A) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Si une suite

¹⁷ 1° La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques.

2° Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C . Autrement dit, il suffit que (A, B) et (B, C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A, C) . Nous appellerons voisinage de A et de B le nombre (A, B) (Fréchet, 1906, p. 18).

¹⁸ Ceci étant, nous pourrions dire qu'une suite d'éléments de la classe (V): $A_1, A_2, \dots$ tend vers un élément A , si le voisinage (A_n, A) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ (Fréchet, 1906, P. 18)

Además, se puede muestra que el límite es único, pues si B fuera límite de la misma secuencia se tendría, por la definición de límite, que los números (A, A_n) y (B, A_n) serían infinitamente pequeños, lo cual implica que (A, B) también es infinitamente pequeño, esto por la condición 2°, así (A, B) es cero; ahora, por la condición 1° se tiene que si el número (A, B) es cero, A y B son iguales.

En cuanto a la definición de la clase (V) , es posible observar que la noción de *cercanía* se captura a través de la idea de vecindad, pues dos elementos A y B son más cercanos entre menor sea el número (vecindad) correspondiente. Ahora, es importante resaltar dos aspectos: en primer lugar, Fréchet define vecindad como una función distancia que asigna a dos elementos un número positivo; se puede ver entonces que no se entiende vecindad en los términos topológicos que hoy se conoce, como un conjunto de elementos, sino que aquí se está caracterizando como una distancia, y en este sentido, aún estos espacios están ligados a los números reales. En segundo lugar, en cuanto a la condición 2° se puede observar que en esencia se refiere a lo que hoy se conoce como desigualdad triangular, pero cabe resaltar que esta se define en términos de funciones. Así, la definición de vecindad está dada en relación con objetos particulares, funciones y números reales, por lo que aún carece de una total generalidad.

Posteriormente, con el siguiente teorema se presenta una segunda caracterización de continuidad de una función, esta vez en términos de vecindades:

Teorema: Sea U una operación definida en un conjunto E de elementos de V . Así, U es continua en E si para cualquier elemento A que pertenece tanto al conjunto E como a su conjunto derivado, se puede hacer corresponder con cualquier número $\varepsilon > 0$ un número n_A , tal que la desigualdad $(A, B) < n_A$ conduce a $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para cualquier elemento B de E .

Ahora, resulta importante mencionar que esta última definición de la continuidad es menos general que la que se dio anteriormente en términos del límite, pues solo tiene sentido

cuando es posible definir una vecindad. Adicionalmente, cabe hacer referencia a la definición de operación uniformemente continua que presenta Fréchet, para la cual también resulta necesario introducir una vecindad.

Definición: Una operación U es uniformemente continua en un conjunto E formado por elementos de una clase (V) si dado un número positivo ε , podemos elegir un número positivo n tal que, para dos elementos A, B cualesquiera de E la desigualdad $(A, B) < n$ conduce a $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ (Fréchet, 1906, p. 28).

De esta definición se tiene que toda operación uniformemente continua en un conjunto E es también continua en el conjunto E y que toda operación continua en un conjunto extremo conjunto E es uniformemente continua en el conjunto E .

Además, vale la pena mencionar que estas definiciones presentadas por Fréchet, en cierta medida, coinciden con las definiciones de continuidad y continuidad uniforme que se trabajan en la actualidad en los cursos de Análisis y Cálculo, con la clara diferencia de que Fréchet está trabajando con una operación definida en un conjunto con elementos de cualquier naturaleza, mientras que en las definiciones trabajadas en la actualidad se trata de funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para observar las similitudes entre estas definiciones, es posible remitirse a la definición dada por Weierstrass de continuidad (ver página 9), se puede ver que en esta definición se da una relación entre el ε y el δ , en la cual el segundo depende del primero; de manera análoga se puede interpretar en la definición presentada por Fréchet para este concepto, aquí el n_A (que en esta comparación se corresponde con el delta) depende del ε propuesto.

Posteriormente Fréchet precisa que no todas las clases (L) son clases (V) , pues para estas últimas se cumple el teorema que garantiza que: el conjunto derivado de un conjunto de elementos de una clase (V) es un conjunto cerrado, el cual, como se mostró anteriormente, no se cumple para las clases (L) . Ahora, si bien no todas las clases (L) son clases (V) , sí se tiene que las clases (V) son clases (L) , pues estas cumplen las condiciones definidas para estos

espacios. Es así que, Fréchet, con el propósito de obtener nuevas generalizaciones, afirma que se considerarán solo las clases (V) entre las clases (L) .

Una vez establecidas las restricciones que permitieron definir la clase (V) , se logra generalizar otros teoremas además de los que se extendieron para la clase (L) , por ejemplo, teoremas relacionados con la condensación, como el que afirma que el conjunto de los elementos de condensación de un conjunto condensado¹⁹ es perfecto o nulo, o el que afirma que el conjunto de los elementos de un conjunto, que no son elementos de condensación del mismo, es contable; además, se generalizan teoremas relacionados con la compacidad, elemento interior, conjunto extremo, etc.

Así, como se ha venido mencionando, se definieron condiciones para restringir las clases (L) , lo que permitió definir las clases (V) , ahora con la misma pretensión de avanzar en los procesos de generalización, se establecen otras restricciones para la clase en cuestión, las cuales condujeron al estudio de las clases (V) normales. Estas clases tienen como características ser *perfectas*, *separables* y admitir la generalización del *teorema de Cauchy*. De acuerdo con Arboleda (2017) estas últimas dos características, “van a permitirle a Fréchet desde muy temprano (1906), introducir en estos espacios de vecindades la técnica de recubrimientos de un conjunto por una familia de conjuntos” (p. 531).

En este sentido se definen las clases (V) perfectas como aquellas en las que, *cerca* a un elemento dado existen elementos cuya vecindad con él es tan pequeña como se quiera sin llegar a ser cero, es decir, cualquier elemento de la clase es un elemento límite. Además, se definen las clases (V) separables como aquellas que pueden considerarse como el conjunto derivado de un conjunto contable de elementos de la clase; aquí, se puede observar de manera implícita la noción de *cercanía*, pues se define separabilidad a través del conjunto derivado, es decir, del

¹⁹ Un conjunto condensado es un conjunto en el que una infinidad no contable de sus elementos da lugar a al menos un elemento de condensación.

conjunto de los elementos límites, los cuales están dados por vecindades, que son las que capturan la *cercanía* en las clases (V) . En cuanto a esta última definición, cabe aclarar que:

En una publicación de 1921 Fréchet modificará esta definición, y el requerimiento para la separabilidad en la clase será únicamente que existan a lo sumo conjuntos infinitos numerables que constituyan, junto con sus respectivos derivados, la clase en su totalidad (Taylor, 1982, como se citó en Arboleda, 2017).

Adicionalmente, de acuerdo con Arboleda (2017) “Luego se define la propiedad de *completez* de una clase V sin apelar todavía a la palabra con la que habitualmente designamos el concepto” (p. 531); esta definición se da a través de la generalización del teorema de Cauchy, del cual Fréchet (1906) afirma que: una secuencia de elementos $A_1, A_2, \dots$ de una clase (V) satisface las condiciones de Cauchy cuando a cualquier número $\varepsilon > 0$ le podemos corresponder un número entero n tal que la desigualdad $(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$ se verifica sea cual sea p . Es evidente que, si una secuencia tiende hacia un límite, satisface las condiciones de Cauchy. Por otro lado, si una secuencia satisface las condiciones de Cauchy y es parte de un conjunto compacto, tiene un elemento límite evidentemente único; pero si sólo sabemos que la secuencia verifica las condiciones de Cauchy, no podemos afirmar que tiende a un límite, lo único que podemos decir es que, si tiene un elemento limitante, sólo tiene uno: *Diremos entonces que una clase (V) admite una generalización del teorema de Cauchy si cualquier secuencia de elementos de esta clase, que satisface las condiciones de Cauchy, tiene un elemento límite (necesariamente único)* (p. 23)²⁰.

Aquí la noción de *cercanía* se manifiesta en la medida en que, para satisfacer las condiciones de Cauchy, se debe cumplir que para cualquier par de elementos que se tomen en la secuencia, estos sean muy cercanos. Como se mencionó anteriormente, el trabajo ahora se limitará al estudio de las clases (V) normales, esto no es caprichoso, sino que según Fréchet

²⁰ Traducido de la tesis doctoral de Maurice Fréchet (1906).

(1906) es consecuencia de la comparación entre las clases (V) y los conjuntos lineales²¹; es importante mencionar que no todas las clases (V) son clases (V) normales, para mostrar esto Fréchet propone dos ejemplos²² en donde se verifica que son clases (V) pero no cumplen con algunas condiciones para ser clases normales.

Ahora, una vez establecidas estas nuevas restricciones, se proponen algunas nuevas definiciones y teoremas, por ejemplo, define que para una clase (V) se pueden formar conjuntos k_ε que contenga al menos un elemento y cumpla 1° que cada elemento de la clase pertenezca a uno de los conjuntos y 2° que dos elementos en un mismo conjunto tenga una vecindad menor que ε . Así, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ es el conjunto de los conjuntos k_ε y numera a la clase considerada; además, para cualquiera que sea ε se pueden elegir los conjuntos k_ε de manera que $\mathfrak{R}_\varepsilon$ sea contable.

Adicionalmente, en relación con esta definición, Fréchet (1906) enuncia algunos teoremas:

- Para que el conjunto $\mathfrak{R}_\varepsilon$ [correspondiente a un conjunto E tomado de una clase normal (V)] pueda ser elegido, sea cual sea ε , de manera que incluya sólo un número finito de elementos, es necesario y basta con que E sea compacto.
- Sea E un conjunto de elementos de una clase normal (V) . De modo que de cualquier familia H , (contable o no) de conjuntos I tales que cualquier elemento de E sea interior en sentido estricto a al menos uno de ellos, podemos extraer un número finito de conjuntos I que formen una familia G que disfrute de la misma propiedad como H , es necesario y suficiente que E sea extremo.
- Todo conjunto no contable E formado por elementos de una clase normal (V) está condensado.

²¹ Conjuntos lineales o de la recta.

²² Estos ejemplos están en la página 24 de su escrito de 1906.

- Sea E cualquier conjunto formado por elementos de una clase separable (V); existe un conjunto contable de elementos de E tal que cada elemento de E pertenece a este conjunto D o a su derivada D' . Cuando E es cerrado, tenemos: $E = D + D'$. Cuando E es perfecto, $E = D'$ (pp. 25-27).

De todo lo anterior se puede observar cómo haber capturado la idea de *cercanía* a partir de espacios menos generales y con más restricciones, le permitió a Fréchet la obtención de nuevos resultados que se configuran fundamentales en lo que posteriormente se denominaría topología, por ejemplo, se introduce la técnica de recubrimiento de un conjunto a través de una familia de conjuntos, lo que permite hablar de lo que se conoce como compacidad; adicionalmente se desarrollan nociones relacionadas con la uniformidad y la continuidad, generalizando los resultados que ya se habían conseguido en espacios lineales.

Si bien la introducción de esta nueva clase permitió algunos desarrollos, Fréchet ve la necesidad de introducir un nuevo espacio más particular que el (V), al igual que en su momento sucedió con este. Dicho espacio lo denominó clase (E) de *Écart* (distancia) y de acuerdo con Arboleda (2017) “La introducción del *Écart* resulta de una forma estructural de pensamiento que busca preservar intuiciones euclidianas en los espacios abstractos” (p. 531), podría pensarse que esa preservación de las intuiciones euclidianas se da, en la medida en que, se conserva la idea de desigualdad triangular, procedente del trabajo de Euclides, para caracterizar el espacio definido.

1.1.3 Los Espacios (E)

La introducción de la clase (E) en la tesis doctoral de Fréchet es uno de sus más importantes resultados y sigue teniendo vigencia en la actualidad:

Definición: Se define una clase (E) como una clase en la que a dos elementos A, B se les hace corresponder un número $(A, B) > 0$ al que se denomina distancia y cumple las siguientes propiedades:

- a) La distancia $(A, B) = 0$ si A y B son idénticos
- b) Si A, B, C son tres elementos cualesquiera, se tiene que $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$ ²³

En cuanto a esta definición, a simple vista se podría pensar que es análoga a la clase (V) , sin embargo, se puede observar que en los espacios (E) se define explícitamente la función distancia, a diferencia de lo que sucede en la clase (V) , que no se define una función particular; además, al seguir ligados a una distancia en los números reales, aún queda un camino por recorrer hacia las mismas pretensiones de generalidad.

Ahora, es importante mencionar, que si bien estas dos clases no son equivalentes, toda clase (E) es a su vez una clase (V) , pues cumple las condiciones necesarias: en el caso de la condición a) en los espacios (E) , si se tiene una clase que la cumple, se puede verificar que también cumplirá la condición 1° de los espacios (V) ; además, en cuanto a la condición b) de los espacios (E) , al tomar un $f(\varepsilon)$ conveniente, también es posible verificar que se cumple la condición 2° de los espacios (V) , por ejemplo Fréchet menciona que se podría tomar $f(\varepsilon) = 2\varepsilon$. Veamos que si $(A, C) \leq \varepsilon$ y $(C, B) \leq \varepsilon$ se tiene que $(A, C) + (C, B) \leq 2\varepsilon$; además, por la propiedad b) sabemos que $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$, por tanto también se tiene que $(A, B) \leq (A, C) + (C, B) \leq 2\varepsilon$, es decir, $(A, B) \leq f(\varepsilon)$.

Es preciso mencionar que, gracias a la definición de los espacios (E) , Fréchet se considera como el primero en definir lo que hoy se conoce como *espacio métrico*, aunque hasta este punto, aún no se incluye la propiedad de simetría; es posteriormente que la definición de dicho espacio evoluciona, hasta obtenerla en los términos actuales, lo anterior, gracias a los

²³a) L'écart (A, B) n'est nul que si A et B sont identiques.

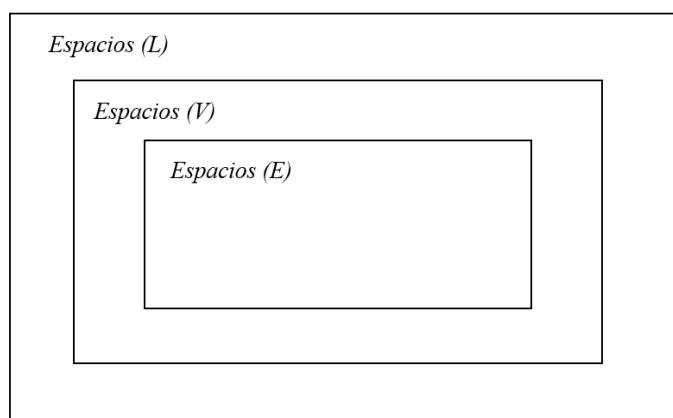
b) Si A, B, C sont trois éléments quelconques, on a toujours $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$ (Fréchet, 1906, p. 30).

aportes de distintos matemáticos, entre ellos Felix Hausdorff. La definición de espacio métrico es muy conocida y trabajada en el análisis funcional, de hecho, gracias a la conceptualización de una distancia, que en términos actuales corresponde con lo que se denomina métrica, se pueden definir conceptos como continuidad y convergencia.

Finalmente, como se pudo observar, las clases (E) son a su vez clases (V), pues la distancia puede ser vista como una vecindad, y las clases (V) son también clases (L); con esto en mente, es posible observar que los espacios con menos restricciones son los denominados clases (L).

Figura 1

Los espacios de Fréchet en términos de inclusión



Cabe reiterar la fuerte importancia de la noción de *cercanía* en el desarrollo de los espacios abstractos, pues según Anacona & Ortiz (2011) estos se entienden como el conjunto de puntos en el que se ha definido una relación de cercanía entre los mismos; es así que, no se puede hablar de espacios abstractos sin que se tenga caracterizada una *cercanía*. Lo anterior se evidencia en cada uno de los desarrollos obtenidos en las clases que Fréchet define, en particular, en el contexto de las clases (L) se captura la *cercanía* a través de la idea de límite, en las clases (V) a través de la idea de vecindad, y en las clases (E) a partir de la distancia; y es esta conceptualización de la *cercanía*, a través de cada una de las clases, la que permitió alcanzar, en espacios abstractos, los desarrollos expuestos a lo largo de su tesis.

Esto fue fundamental en la época, ya que dio paso a los estudios en espacios generales y con esto se gestó el camino hacia una nueva rama de las matemáticas, que hoy en día se conoce como topología general. De acuerdo con Dugac (1984) Fréchet con su tesis abrió una nueva era en el análisis, caracterizada por la profusión de nuevos espacios y por la búsqueda de propiedades características de estos espacios que conducen a "estructuras de cercanía" a la vez flexibles y suficientemente ricas para responder a las aplicaciones más importantes del análisis.²⁴

1.2 El surgimiento de los espacios abstractos en términos de vecindades.

Felix Hausdorff en 1914 presenta su libro *Grundzüge der Mengenlehre*, donde expone los elementos principales de la teoría de conjuntos y algunas pruebas de estos. En los primeros tres capítulos del libro, los conjuntos son vistos como sistemas de elementos, en los cuales no se consideran las relaciones que se dan entre estos mismos; en los tres capítulos siguientes ya se tienen en cuenta dichas relaciones y se desarrolla la teoría de conjuntos ordenados. Ahora, en este apartado del presente trabajo, el interés está posicionado en el capítulo siete sobre *Conjuntos de Puntos en Espacios Generales*, pues es en este dónde se introduce la axiomática de vecindades en espacios abstractos.

Adicionalmente, es importante considerar los aportes que otros matemáticos han realizado en relación con el surgimiento de la noción de vecindad, en particular, cabe resaltar que para comprender el contexto en el que Hausdorff desarrolla sus ideas, que van a conceptualizar la topología general como rama de las matemáticas, es preciso revisar en esta génesis de los espacios abstractos, los aportes que David Hilbert realizó.

²⁴ Fréchet va ouvrir avec sa thèse une nouvelle époque en analyse, caractérisée par un foisonnement d'espaces nouveaux et par la recherche des propriétés caractéristiques de ces espaces conduisant à des «structures» à la fois assez souples et assez riches pour répondre aux applications les plus importantes en analyse (Dugac, 1984, p. 18).

1.2.1 Los aportes de Hilbert en relación con la noción de vecindad

David Hilbert²⁵ se reconoce especialmente por la axiomatización de la geometría euclidiana en su libro de 1899 *Grundlagen der Geometrie*²⁶ y la axiomatización de los números reales en su libro *Über den Zahlbegriff*²⁷ de 1900, de este texto posteriormente se presentan nuevas ediciones con algunas correcciones. Aunque Hilbert es reconocido por sus aportes a los fundamentos de la geometría, se pueden reconocer algunos desarrollos que realiza en relación con la noción de vecindad, la cual es fundamental en lo que hoy día se conoce como topología general, y en este sentido, también vale la pena rescatarlo en el presente estudio sobre la cercanía en los espacios abstractos.

Adicionalmente, en términos de temporalidad, es posible observar que Hilbert antecede a Hausdorff y Fréchet, ahora bien, aunque Fréchet también caracteriza la noción de vecindad, no lo hace en términos de subconjuntos como lo realiza Hilbert, en cambio, como se verá más adelante, Hausdorff parece retomar estas ideas, pues de acuerdo con Bourbaki, Hausdorff “retomando la noción de vecindad, supo escoger entre los axiomas de Hilbert para vecindades del plano aquellos que podían dar a su teoría toda la precisión y al mismo tiempo toda la generalidad deseable” (Bourbaki, 1974, p. 180).

Ahora, en cuanto a la noción de vecindad en Hilbert (1903), en el apéndice 4 de su libro *Grundlagen der Geometrie* presenta una definición del plano y algunos axiomas para este, además, retoma en una nota al pie la siguiente definición del plano que había presentado en 1902.

Definición: El plano es un sistema de cosas llamadas puntos y cumple los siguientes axiomas:

²⁵ Matemático alemán (Königsberg, Prusia Oriental 1862 - Gotinga, Alemania 1943).

²⁶ *Fundamentos de la Geometría*.

²⁷ *Sobre el concepto de número*.

1. Cada punto A determina ciertos subsistemas de puntos a los que él mismo pertenece y que se denominan vecindades del punto A .
2. Los puntos de un entorno siempre se pueden asignar de forma reversible e inequívoca a los puntos de una determinada región de Jordan²⁸ en el plano numérico. La región de Jordan se denomina imagen de esa vecindad.
3. Cada región de Jordan contenida en una imagen, dentro de la cual se encuentra el punto A , es a su vez una imagen de una vecindad de A . Si existen diferentes imágenes de una vecindad, la transformación reversiblemente única de las regiones de Jordan en cuestión es continua.
4. Si B es un punto cualquiera de una vecindad de A , entonces esta vecindad es también una vecindad de B .
5. Para dos vecindades cualesquiera de un punto A , siempre hay una vecindad del punto A que es común a ambas vecindades.
6. Si A y B son dos puntos cualesquiera en nuestro plano, entonces siempre hay una vecindad de A que también contiene el punto B (p. 123)²⁹.

²⁸ Una curva continua que se encuentra en el plano numérico y que está libre de puntos dobles e incluye sus puntos finales se llama curva de Jordan. Si la curva de Jordan es cerrada, el interior de la región del plano numérico delimitada por ella se llama región de Jordan (Hilbert, 1903).

²⁹Die Ebene ist ein System von Dingen, welche Punkte heißen. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Teilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.

Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt.

Jedes in einem Bilde enthaltene Jordansche Gebiet, innerhalb dessen der Punkt A liegt, ist wiederum ein Bild einer Umgebung von A . Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.

Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A , so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B .

Zu irgend zweier Umgebungen eines Punktes A gibt es stets eine solche Umgebung des Punktes A , die beiden Umgebungen gemeinsam ist.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so gibt es stets eine Umgebung von A , die zugleich den Punkt B enthält (Hilbert, 1903, p.123).

Como se puede observar, si bien Hilbert no define el concepto de vecindad de manera explícita, emplea una noción de esta para establecer la lista de axiomas propuestos para el plano. Aquí, vale la pena mencionar que mientras los desarrollos de los matemáticos que se abordan en el presente trabajo tienen una clara pretensión de extender ciertas ideas a espacios abstractos, el trabajo de Hilbert se concentra en la axiomatización del espacio euclidiano, en este sentido se puede observar que generalizar no era su interés principal. Ahora, si bien su pretensión no era la generalización, logra capturar la *cercanía* para el espacio euclidiano en términos de la noción de vecindad, la cual luego va a tener un papel importante en la topología general. De acuerdo con Cullinane (1997) es evidente que el sistema axiomático de Hilbert documenta varias ideas que más tarde surgirán como piedras angulares en la formulación de una noción abstracta de vecindad y, en un nivel más amplio, el desarrollo de la teoría de los espacios topológicos (p. 4).

1.2.2 El desarrollo de la noción de vecindad en Hausdorff.

En el capítulo 7 *Punktmengen in allgemeinen Räumen*³⁰ de sus *Grundzüge*, Hausdorff presenta por primera vez la definición de espacio topológico y todo este desarrollo lo hace en términos de la idea de vecindad. Así, en el primer apartado denominado *Umgebungen*³¹ realiza una introducción a las ideas que irá desarrollando.

En primer lugar, resulta importante mencionar el protagonismo que tiene la teoría de conjuntos en los desarrollos alcanzados por Hausdorff, pues esto se puede evidenciar en distintos sentidos: por un lado, se puede observar que los primeros seis capítulos están dedicados a definir y caracterizar una teoría de conjuntos, y teniendo en cuenta lo presentado en estos, propone el camino hacia una teoría general de conjuntos o lo que conocemos hoy como topología general; por otro lado, el mismo Hausdorff (1914) destaca la riqueza que ofrece

³⁰ Conjuntos de puntos en espacios generales.

³¹ “Vecindad”.

la teoría de conjuntos y la importancia que tendrá en los desarrollos que está a punto de explicitar, cuando menciona que: la teoría de conjuntos ha celebrado sus más bellos triunfos, en su aplicación a los conjuntos de puntos en el espacio, en la clarificación y agudización de los conceptos geométricos básicos... Primero debemos tener clara la posición de la teoría de conjuntos de puntos en el sistema de la teoría general de conjuntos (p. 209). En relación con esto Arboleda (2017) destaca que “Hausdorff aclara así uno de los rasgos característicos de la formalización de las estructuras topológicas, el hecho de fundamentarse en lenguaje conjuntista” (p. 533).

Hausdorff continúa desarrollando su apartado sobre “vecindades”, en el cual reflexiona sobre la cuestión de la generalización de la teoría de conjuntos, en este punto explicita que su pretensión está puesta en proponer una teoría general que pueda ser aplicable a conjuntos de distintos tipos de objetos matemáticos (puntos, rectas, planos, superficies, funciones, conjuntos de curvas, etc.); con dicha generalización, el interés no es complicar la teoría, sino obtener una simplificación de esta y otorgarle practicidad, lo anterior, en el sentido de que no sería necesario desarrollar teorías específicas para cada conjunto de elementos, pues la teoría definida sería aplicable para cualquier tipo de objeto matemático con el que se pretenda trabajar. Para lograr este objetivo, presentará una lista de “supuestos simples” conocidos como *axiomas*, que reúnen los principios básicos de la teoría propuesta, procediendo de manera lógico-deductiva; con esto, según Hausdorff (1914) logramos protegernos de los errores a los que la llamada “intuición”³² quisiera llevarnos (p. 211).

Aquí, es preciso hacer mención sobre el proceder análogo que presenta Hausdorff en relación con Fréchet, tanto uno como el otro pretenden, a partir de la conocida teoría de conjuntos, desarrollar una teoría unificadora que se pueda aplicar a los diferentes conjuntos sin que se requiera tener en cuenta la naturaleza de los elementos de estos mismos, además ambos

³² *Anschauung*.

en este intento por generalizar los resultados que se tienen para conjuntos particulares, seleccionan los principios fundamentales de las teorías que están considerando. Esto puede estar influenciado por las prácticas matemáticas estructuralistas del momento, pues en el siglo XX, se fue gestando la filosofía estructuralista, la cual fue determinante en las investigaciones matemáticas desarrolladas en la época.

Desde esta perspectiva, el interés está puesto en las relaciones que se dan entre los elementos y no en la naturaleza de los mismos; esto se puede evidenciar en los desarrollos propuestos por estos matemáticos, en la medida en que, las definiciones presentadas por ellos son aplicables a un conjunto cualquiera, es decir, no se considera la naturaleza de sus objetos, sino que, como se pudo observar en Fréchet y como lo veremos a continuación en Hausdorff, lo fundamental es la relación de *cercanía* que permite caracterizar estos conjuntos.

En relación con la noción de *cercanía* capturada en los desarrollos de Hausdorff, se puede evidenciar que este reflexiona sobre las posibles maneras de conseguir su propósito de generalización, en primera instancia afirma que una de estas puede estar dada al considerar conjuntos de puntos en el espacio y una relación distancia definida entre pares de elementos. Continúa sus reflexiones explicitando que esta no es la única posible generalización de la teoría de conjuntos, pues también se pueden definir las sucesiones de puntos convergentes y su límite, y así, el concepto de límite pasa a estar en la base de la teoría de conjuntos de puntos. Además, menciona que es posible asignar a los puntos del espacio un subconjunto que denominó “vecindad del punto”; de manera análoga, el sistema de vecindades se convertiría en la base de la teoría.

Lo anterior permite observar que Hausdorff reconoce tres maneras distintas de alcanzar sus propósitos de generalización, y en estas es posible percibir que se hace explícita la necesidad de trabajar con una noción de *cercanía*, pues para cada alternativa menciona que puede posicionarse un concepto, que de alguna manera captura esta noción, en la base de la

teoría a desarrollar; en este sentido, se puede ver la *cercanía*, por un lado en términos de la distancia, por otro lado en la idea de límite de una secuencia, y finalmente a través de la definición de vecindad. Pensando en esta primera observación realizada por Hausdorff, es posible evidenciar que estas tres formas de generalizar la teoría de conjuntos son las mismas que Fréchet ya había mencionado, sin embargo, más adelante se podrá ver que, aunque nominalmente son equivalentes, presentan grandes diferencias conceptuales.

En relación con estos tres conceptos, Hausdorff (1914) afirma que con la ayuda de las distancias se pueden definir entornos y límites, con la ayuda de los entornos se pueden definir límites, pero generalmente no distancias, y con la ayuda de los límites, en general, ni entornos ni distancias (p. 211). En este punto, si bien afirma que la elección es cuestión de gustos, considera los conceptos de distancia y límite para realizar algunas observaciones en relación con la elección que él realizará; en primer lugar menciona que las distancias corresponden al caso más particular de los tres conceptos, podría intuirse que explícita esto dado que considerando su pretensión, este sería el caso que ofrece un menor grado de generalización; en segundo lugar, contempla el concepto de límite, y aunque lo reconoce como el caso más general, afirma que el considerarlo implica una relación con lo contable, lo que nuevamente podría significar una limitación en relación con su propósito de generalización. Con esto en mente, Hausdorff menciona que, en este capítulo, sus desarrollos se realizarán considerando el concepto de vecindad.

Ahora, “antes de presentar la forma general del sistema de axiomas sobre las vecindades para un espacio abstracto, Hausdorff lo interpreta para un espacio métrico siguiendo la idea originaria de Hilbert” (Arboleda, 2017, p. 533), así, este matemático empieza presentando el caso en el que las vecindades están dadas por las distancias, para esto presenta la definición de espacio métrico.

Definición: Un *espacio métrico* es un conjunto E en el que a dos elementos (puntos) x, y se les asigna un número real no negativo, el cual corresponde con la distancia $\overline{xy} \geq 0$, y cumple con lo siguientes axiomas de distancia:

α (Axioma de simetría). Siempre se da que $\overline{xy} = \overline{yx}$

β (Axioma de coincidencia). Es $\overline{xy} = 0$ si y solo si $x = y$

γ (Axioma del triángulo). Siempre se da que $\overline{xy} + \overline{yz} \geq \overline{xz}$.³³

En relación con esta definición, es preciso mencionar que ya Fréchet había definido espacio métrico por primera vez cuando definió la clase (E) en su tesis doctoral de 1906; como se vio anteriormente, este matemático presentó dos axiomas que deberían cumplirse para dicha clase, los cuales corresponden con los axiomas de coincidencia y del triángulo que presenta Hausdorff en su definición, así, es posible observar que en la definición de espacio métrico ofrecida por el matemático alemán, se incluye una nueva propiedad que denominó axioma de simetría.

Como se mencionó anteriormente, los espacios métricos son un caso particular de espacio topológico, en estos espacios, según Hausdorff, se define vecindad como:

Definición: Una vecindad (U_x) de un punto x es el conjunto de puntos y cuya distancia a x es menor que un determinado número positivo ϱ .³⁴

Estas vecindades están dadas por el punto x que es el centro y el número positivo ϱ que es el radio, por lo que, se pueden tener infinitas vecindades del punto x haciendo variar el radio.

³³Unter einem metrischen Raume verstehen wir eine Menge E , in der je zwei Elementen (Punkten) x, y eine reelle nichtnegative Zahl, ihre Entfernung $xy \geq 0$ zugeordnet ist; und zwar verlangen wir überdies die Gültigkeit der folgenden Entfernungssaxiome

α) (Symmetrieaxiom). Es ist stets $\overline{xy} = \overline{yx}$.

β) (Koinzidenzaxiom). Es ist $\overline{xy} = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$.

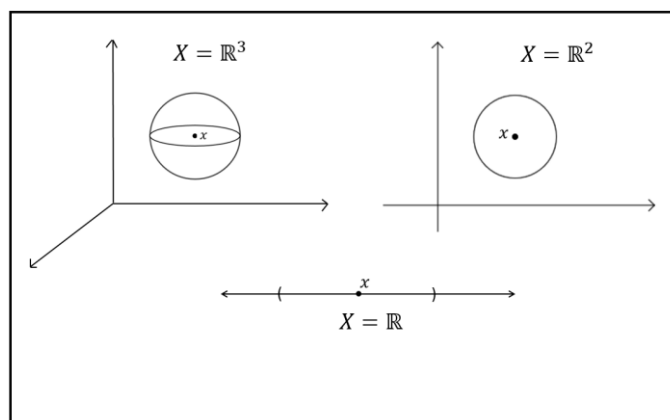
γ) (Dreiecksaxiom). Es ist stets $\overline{xy} + \overline{yz} \geq \overline{xz}$ (Hausdorff, 1914, p. 211).

³⁴ In einem metrischen Raume E verstehen wir unter einer Umgebung U_x des Punktes x die Menge der Punkte y , deren Entfernung von x kleiner als eine bestimmte positive Zahl ϱ (Hausdorff, 1914, p. 212).

Así, la idea que se tiene de vecindad va a depender del espacio en el que se esté trabajando, de esta manera, en los espacios unidimensionales las vecindades son segmentos que no incluyen sus extremos, en los espacios bidimensionales una vecindad corresponde con el interior de una circunferencia, en los tridimensionales será el interior de una esfera, etc.

Figura 2

Ejemplos de vecindades en diferentes espacios



En este punto, se inicia la transición a los axiomas generales de vecindad, en los cuales se desliga del concepto de distancia; así, se presenta la siguiente definición:

Definición: Un *espacio topológico* es un conjunto E en el que a los elementos (puntos) x se les asignan ciertos subconjuntos U_x , que llamamos vecindad de x , estos cumplen con los siguientes axiomas³⁵:

(A) Cada punto x corresponde al menos a una vecindad U_x ; cada vecindad U_x contiene el punto x .

³⁵Unter einem topologischen Raum verstehen wir eine Menge E , worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Maßgabe der folgenden Umgebungsaxiome:

(A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x ; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x .

(B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x , so gibt es eine Umgebung W_x , die Teilmenge von beiden ist ($W_x \subseteq U_x, V_x$).

(C) Liegt der Punkt y in U_x , so gibt es eine Umgebung U_y die Teilmenge von U_x ist ($U_y \subseteq U_x$).

(D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y , Tjy ohne gemeinsamen Punkt ($D(U_x, U_y) = 0$).

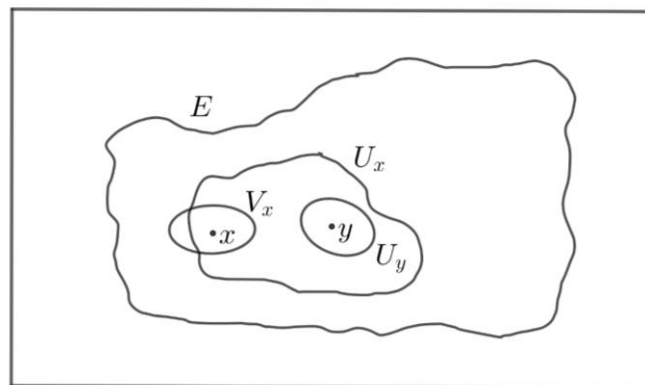
(B) Si U_x, V_x son dos vecindades del mismo punto x , entonces existe una vecindad W_x que es un subconjunto de ambos ($W_x \subseteq D(U_x, V_x)$)³⁶

(C) Si el punto y se encuentra en U_x , entonces existe una vecindad U_y que es un subconjunto de U_x ($U_y \subseteq U_x$)

(D) Para dos puntos diferentes x, y existen dos vecindades U_x, U_y sin un punto común ($D(U_x, U_y) = \emptyset$)

Figura 3

Ilustración de las propiedades de Hausdorff para las vecindades



En una nota al pie, Hausdorff aclara lo que está entendiendo por ser topológico, cuando menciona que es todo aquello que se puede expresar sin medida ni número³⁷, y posteriormente, demuestra que los espacios métricos presentados previamente, cumplen con los axiomas de vecindad, por lo cual concluye que estos espacios son un caso particular de espacios topológicos.

En cuanto a la definición de vecindad presentada por Hausdorff se pueden realizar algunas observaciones; en primer lugar, es posible visualizar que es hasta este punto que se logra un mayor grado de generalidad, dado que por primera vez la noción de “cercanía” en el

³⁶ Lo primero que se puede notar en estos axiomas, es su diferencia con la notación que se emplea en la actualidad, por eso es importante aclarar que ($D(U_x, U_y)$) es equivalente con $U_x \cap U_y$ (Hausdorff, 1914, p. 213).

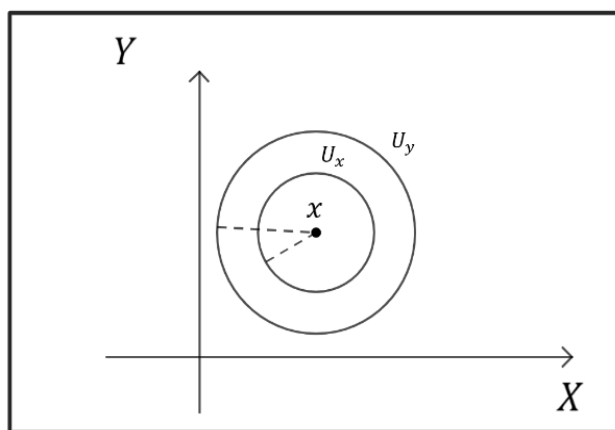
³⁷ Der Ausdruck ist in einem verwandten Sinne bereits üblich; wir wollen damit andeuten, daß es sich um Dinge handelt, die ohne Maß und Zahl ausdrückbar sind (Hausdorff, 1914, p. 213, nota a pie 1).

surgimiento de los espacios abstractos, se desliga de los números reales, las funciones o la distancia, y en cambio se caracteriza en términos conjuntistas. En segundo lugar, es importante mencionar que el axioma D de vecindades caracteriza un tipo de espacio separable, el cual hoy se conoce como T_2 o espacio de Hausdorff. Además, se reconoce que, aunque su definición de vecindades está dada en términos generales, los ejemplos con los que ilustra su teoría están en el marco del espacio euclidiano.

Finalmente, vale la pena mencionar que Hausdorff en sus conferencias de Bonn en 1912, había presentado una lista de axiomas para las vecindades que es equivalentes a los que presenta en 1914, excepto por el axioma (B): “dadas dos vecindades de un punto U_x y U'_x , $U_x \subseteq U'_x$ o bien $U_x \supseteq U'_x$ ” (Arboleda, 2017, p. 533); este axioma parece indicar que Hausdorff tenía la idea de que las vecindades son bolas concéntricas (ver figura 4), esto porque el axioma implica que al haber dos vecindades de un mismo elemento, necesariamente una debía estar contenida en la otra, ahora, con el axioma B propuesto en 1914 se logra un mayor grado de generalidad, pues parece abandonar esta idea.

Figura 4

Ilustración de bolas concéntricas en el espacio euclidiano bidimensional



Por otra parte, como ya se ha mencionado, otros matemáticos habían presentado antes la noción de vecindad para hablar de cercanía en un determinado espacio. Por un lado, Fréchet lo había realizado en ese propósito de generalizar los resultados de la teoría de conjuntos, y por

otro lado, Hilbert se había remitido a esta noción en desarrollos propios de la geometría euclidiana.

En cuanto a lo presentado por Fréchet, es posible evidenciar que la conceptualización que se realiza de la idea de vecindad no es análoga, de hecho para este matemático la vecindad aparece ligada a los números reales, pues esta es entendida como una distancia; en cambio, como se pudo notar en este apartado, Hausdorff caracteriza el concepto de vecindad en términos más abstractos, como conjuntos, donde no aparecen relaciones con lo numérico; en este sentido, Hausdorff es pionero en definir la cercanía en los términos topológicos actuales.

Ahora, en relación con el matemático Hilbert, como ya se mencionó, hay algunas razones que permiten intuir que este tuvo cierta influencia en el trabajo realizado por Hausdorff. De manera general se reconoce que ambos matemáticos desarrollaron sus trabajos en la misma época y lugar, lo que permitió que Hausdorff conociera el trabajo de Hilbert y se inspirara en este; en particular, se pueden observar algunas relaciones, en cuanto a las vecindades, entre los axiomas que presentan estos matemáticos. Así, al realizar una comparación entre estos, se pueden establecer las siguientes relaciones:

Tabla 1

Relaciones entre los axiomas de vecindades y los axiomas del plano

Axiomas de vecindades	Axiomas del plano
(A) Cada punto x corresponde al menos a una vecindad U_x ; cada vecindad U_x contiene el punto x	1. Cada punto A determina ciertos subsistemas de puntos a los que él mismo pertenece y que se denominan vecindades del punto A
(B) Si U_x, V_x son dos vecindades del mismo punto x , entonces existe una vecindad W_x que es un subconjunto de ambos ($W_x \subseteq \mathcal{D}(U_x, V_x)$)	5. Para dos vecindades cualesquiera de un punto A , siempre hay una vecindad del punto A que es común a ambas vecindades.

(C) Si el punto y se encuentra en U_x , entonces existe una vecindad U_y que es un subconjunto de U_x ($U_y \subseteq U_x$)	4. Si B es un punto cualquiera de una vecindad de A , entonces esta vecindad es también una vecindad de B .
---	---

(D) Para dos puntos diferentes x, y existen dos vecindades U_x, U_y sin un punto común ($D(U_x, U_y) = 0$)	
--	--

De la tabla anterior se puede observar que, aunque los axiomas de Hausdorff y de Hilbert se presentan en términos diferentes, se puede reconocer que los axiomas A y B del primero son equivalentes, respectivamente, a los axiomas 1 y 5 del segundo. En este sentido, el axioma A es equivalente al axioma 1 porque en esencia ambos afirman que cada punto en un espacio tiene al menos una vecindad a la cual el punto pertenece, y el axioma B es equivalente al axioma 5 porque establecen que, si se tienen dos vecindades de un punto, se puede encontrar otra vecindad que esté contenida en la intersección de estas, es decir, que los puntos en la intersección son también cercanos al punto dado.

Por otro lado, se puede establecer una relación entre el axioma C y el axioma 4, pues en ambos se considera que si se tiene un punto y contenido en U_x , esta va a ser también vecindad de y ; sin embargo, en el axioma C, además de esto, se considera que no solo U_x será vecindad de y sino que también puede existir un subconjunto de esta que también sea vecindad de y ; de acuerdo con esto, se puede intuir que el axioma C es una generalización del 4, en la medida en que, este último axioma sólo considera que U_x es vecindad de y , mientras que el axioma C considera que es vecindad de y y de todos sus puntos cercanos.

Ahora, en cuanto al axioma D no se evidencia una relación sustancial con los que presenta Hilbert, pues como ya se mencionó, este caracteriza una propiedad de separabilidad que se le atribuye a Hausdorff. En relación con esta última propiedad, vale la pena mencionar que actualmente en topología se estudian otras definiciones de espacio topológico en las que

esta no se incluye, es así que, se reconoce que hay espacios que no cumplen con la propiedad de separabilidad de Hausdorff, teniendo esto en cuenta los espacios de Hausdorff son un tipo particular de espacio topológico.

Posteriormente, en el segundo apartado del capítulo 7, Hausdorff presenta algunas definiciones asociadas al concepto de vecindad, por ejemplo caracteriza los *puntos interiores* (A_i) de A ($A \subset E$) como los x que pertenecen a A tal que existe una vecindad de x que pertenece a A , y los *puntos borde* (A_r) de A como los puntos que no son interiores de A . Así, se tiene que

$$A = A_i + A_r$$

Adicionalmente, menciona que un conjunto sin puntos borde se denomina *región*, esta está dada por $A_r = 0$ o $A_i = A$, mientras que un conjunto sin puntos interiores se denomina *conjunto básico* y está dado por $A_i = 0$ o $A_r = A$. Seguidamente, Hausdorff presenta algunas propiedades del conjunto interior y borde y propone ejemplos respectivos.

En el tercer apartado del capítulo, Hausdorff define los *puntos de contacto* α de A como los x tales que en cada vecindad U_x hay al menos un punto de A ; los *puntos de acumulación* β de A como los x tales que en cada vecindad U_x hay un número infinito de puntos de A ; los *puntos de condensación* γ de A como los x tales que en cada vecindad U_x hay un número infinito e incontable de puntos de A . El mismo Hausdorff señala que Cantor llama a los puntos β la derivada de A . Además, a lo largo del apartado presenta algunos ejemplos de conjuntos en los que muestra cuales serían los puntos α , β y γ , y menciona algunas propiedades de estos puntos.

En el cuarto apartado, se definen tres conceptos y se desarrollan propiedades alrededor de estos; por un lado, *conjunto divergente* se define como un conjunto infinito sin puntos de acumulación, por otro lado, *conjunto compacto*³⁸ como un conjunto sin subconjunto

³⁸ Hausdorff para definir conjunto compacto cita a Fréchet, aunque reinterpreta esta definición en sus términos. En este sentido, se puede observar, por esta y otras menciones, que el matemático alemán conoció el trabajo del francés:

“Eine Menge ohne divergente Teilmenge nennen wir (nach M. Fréchet) kompakt” (Hausdorff, 1914, p.230)

divergente, adicionalmente, *conjunto convergente* como un conjunto que tiene un único límite. Además, presenta el teorema que afirma que si un conjunto es convergente entonces es compacto y que si un conjunto es compacto y tiene un único punto de acumulación entonces es convergente. Posteriormente, continúa desarrollando los apartados del capítulo 7, y en general los demás capítulos, alrededor de una teoría abstracta de conjuntos, que luego todo este compendio de desarrollos matemáticos se conocería como topología general.

Finalmente, es importante destacar que la noción de cercanía en Hausdorff se captura a través del concepto de vecindad, el cual se presenta como un conjunto de puntos cercanos a un punto dado; se puede observar que este concepto es el que le permite al matemático alemán realizar los desarrollos que establecieron los cimientos de esta nueva rama de las matemáticas, pues como se presentó anteriormente, a partir de las vecindades se lograron definir conceptos, establecer propiedades y demostrar teoremas.

1.2.3 La noción de vecindad en Bourbaki

Posterior a los desarrollos de los matemáticos presentados en el capítulo anterior, es posible reconocer los trabajos de otros matemáticos a través de los cuales también se ha logrado capturar de alguna manera la *noción de cercanía* en espacios generales, entre estos se reconoce el trabajo realizado por Nicolás Bourbaki, un grupo de matemáticos franceses que tuvo sus inicios hacia el año de 1935. Este grupo se ocupó de estudiar los fundamentos de las matemáticas, en particular, inició con el propósito de construir un nuevo tratado de análisis para emplearlo en el sector educativo; sin embargo, este interés se fue nutriendo y terminaron abordando diferentes campos de las matemáticas en sus producciones.

Uno de los aportes matemáticos que realizó este grupo, fue el trabajo realizado alrededor de la noción de vecindad, el cual se presenta en el libro *Topologie générale* de 1965; esta noción es definida en el marco de los espacios topológicos, los cuales se entienden de la siguiente manera:

Definición: Un *espacio topológico* es un conjunto dotado de una estructura topológica, la cual se entiende como una estructura constituida por los conjuntos abiertos σ que son partes del conjunto X , estos poseen las siguientes propiedades:

(O_I) Toda unión de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.

(O_{II}) Toda intersección finita de conjuntos de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.³⁹

En relación con esta definición, es posible notar que se diferencia de la ofrecida por Hausdorff, en la medida en que, está dada en términos de abiertos y no de vecindades; además se puede resaltar que esta definición de espacio topológico es más general que la presentada por Hausdorff, pues de acuerdo con esta, un espacio topológico no necesariamente debe cumplir con ser separable.

Ahora, en cuanto a la definición de vecindad, Bourbaki la presenta en los siguientes términos:

Definición: En un espacio topológico X , llamamos vecindad de un elemento A (con A que pertenece al conjunto partes de X) a cualquier conjunto que contenga un conjunto abierto que contenga a A . Las vecindades de una parte $\{x\}$ reducida a un solo punto también se llaman vecindades del punto x .⁴⁰

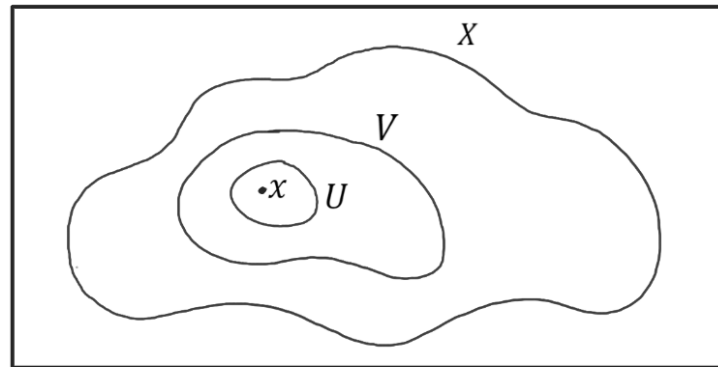
³⁹ DÉFINITION 1. — On appelle structure topologique (ou plus brièvement topologie) sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble D de parties de X possédant propriétés suivantes (dites axiomes des structures topologiques):

(OI) Toute réunion d'ensembles de D est un ensemble de D .

(OII) Toute intersection finie d'ensembles de D est un ensemble de D .

Les ensembles de D sont appelés ensembles ouverts de la structure topologique définie par D sur X (Bourbaki, 1965, TG I.1).

⁴⁰ DÉFINITION 4. — Dans un espace topologique X , on appelle voisinage d'une partie A de X tout ensemble qui contient un ensemble ouvert contenant A . Les voisinages d'une partie $\{x\}$ réduite à un seul point s'appellent aussi voisinages du point x (Bourbaki, 1965, TG I.2)

Figura 5*Representación gráfica-intuitiva de una vecindad*

En relación con esta definición, es posible notar que Bourbaki define las vecindades inicialmente para un conjunto y posteriormente para un elemento en particular; esto se diferencia de lo presentado por Hausdorff, en la medida en que, este matemático presentó las vecindades de un elemento x y no de un conjunto de elementos.

Además, Bourbaki (1965) presenta cuatro axiomas que cumple el conjunto de vecindades $V(x)$ de x :

(V_I) Cualquier conjunto de X que contenga un conjunto de $V(x)$ pertenece a $V(x)$.

(V_{II}) Cualquier intersección finita de conjuntos de $V(x)$ pertenece a $V(x)$.

(V_{III}) El elemento x pertenece a cualquier conjunto de $V(x)$.

(V_{IV}) Si V pertenece a $V(x)$, existe un conjunto W que pertenece a $V(x)$, tal que para todo $y \in W$, V pertenece a $V(y)$. Según la prop. 1 es suficiente tomar por W un conjunto abierto que contiene a x y está contenido en V .⁴¹

⁴¹ Désignons par $B(x)$ l'ensemble des voisinages de x . Les ensembles de parties jouissent des propriétés suivantes :

V_I) Toute partie de X qui contient un ensemble de $B(x)$ appartient à $B(x)$.

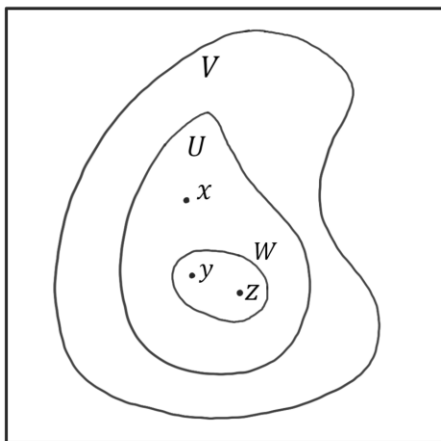
V_{II}) Toute intersection finie d'ensembles de $B(x)$ appartient à $B(x)$.

V_{III}) L'élément x appartient à tout ensemble de $B(x)$.

V_{IV}) Si V appartient à $B(x)$, il existe un ensemble W appartenant à $B(x)$ et tel que, tout $y \in W$, V appartienne à $B(y)$ (Bourbaki, 1965, TG I.3).

Figura 6

Ilustración de las propiedades de Bourbaki para las vecindades



De acuerdo con estas propiedades para las vecindades, es posible realizar algunas observaciones en relación con la comprensión de estas a partir de la caracterización de la *cercanía*; en primer lugar, la propiedad (V_I) permite pensar que si el barrio de una persona es *vecindad* de ella, también lo será la ciudad en la que se encuentra el barrio, incluso el país o cualquier espacio en el que el barrio esté incluido. Aquí es posible ver la caracterización de la *cercanía*, en la medida en que, si tengo una vecindad de un punto, los puntos *cercanos* a esta vecindad, también serán *cercanos* (vecinos) al punto dado; con esto se tiene la posibilidad de extender las vecindades, mientras que con la propiedad (V_{II}) se tiene la posibilidad de encontrar vecindades más reducidas, es decir, *acercarse* cada vez más al punto dado, pues entre más vecindades se tomen para interceptar, se obtendrán vecindades más pequeñas.

En relación con la propiedad (V_{III}), esta garantiza que para que algo sea vecindad de un punto, el punto debe estar allí; así, no puedo hablar de lo que es *cercano* a “algo” sin que el “algo” haga parte. Finalmente, la propiedad (V_{IV}) garantiza que una vecindad de un punto, es también vecindad de los puntos que están cerca al punto dado, de acuerdo con dicha vecindad; en términos intuitivos, si la vecindad de una persona es su barrio, este es también vecindad de las personas que viven cerca.

Además, en términos generales se puede decir que las definiciones de vecindad ofrecidas por Hausdorff y el grupo Bourbaki, si bien no iguales, tampoco son contrarias; por un lado, se puede establecer una correspondencia entre las propiedad A y B de Hausdorff y las propiedades (V_{III}) y (V_{II}) de Bourbaki, respectivamente, además, aunque las propiedades C de Hausdorff y (V_{IV}) de Bourbaki no son iguales, se podría identificar una relación entre estas, pues en ambas propiedades se están estableciendo, de maneras diferentes, condiciones para que la vecindad de un elemento dado, sea también vecindad de otro elemento que pertenece a la vecindad inicial. Estas relaciones se pueden observar en la siguiente tabla:

Tabla 2

Relaciones entre los axiomas de vecindades presentados por Bourbaki y por Hausdorff

Axiomas de vecindades en Bourbaki	Axiomas de vecindades de Hausdorff
(V_I) Cualquier conjunto de X que contenga un conjunto de $V(x)$ pertenece a $V(x)$.	
(V_{II}) Cualquier intersección finita de conjuntos de $V(x)$ pertenece a $V(x)$.	(B) Si U_x, V_x son dos vecindades del mismo punto x , entonces existe una vecindad W_x que es un subconjunto de ambos $(W_x \subseteq \mathcal{D}(U_x, V_x))$
(V_{III}) El elemento x pertenece a cualquier conjunto de $V(x)$.	(A) Cada punto x corresponde al menos a una vecindad U_x ; cada vecindad U_x contiene el punto x
(V_{IV}) Si V pertenece a $V(x)$, existe un conjunto W que pertenece a $V(x)$, tal que para todo $y \in W$, V pertenece a $V(y)$. Según la prop. 1 es suficiente tomar por W un conjunto abierto que contiene a x y está contenido en V .	(C) Si el punto y se encuentra en U_x , entonces existe una vecindad U_y que es un subconjunto de U_x ($U_y \subseteq U_x$)

Ahora, también es posible identificar algunas diferencias entre los axiomas presentados por Bourbaki y por Hausdorff para las vecindades, por un lado la propiedad de que un conjunto

que contenga a una vecindad de un elemento dado es también vecindad de ese elemento, enunciada en el axioma (V_I) de Bourbaki, no fue considerada entre los axiomas de Hausdorff; y por otro lado, entre los axiomas presentados por Bourbaki no se considera el axioma D de Hausdorff, pues como se mencionó esta caracteriza una propiedad de separabilidad que se cumple solo para algunos casos.

Adicionalmente, vale la pena mencionar que, como se vio, Hausdorff propone estos axiomas para definir espacio topológico, mientras que, Bourbaki presenta los axiomas después de haber ofrecido una definición de estos espacios, para la cual no recurre a las vecindades, sino que lo hace en términos de conjuntos abiertos; ahora, se podría demostrar que la topología en términos de abiertos es equivalente a la topología definida a través de vecindades. Estos axiomas de vecindades presentados por Bourbaki se siguen trabajando en la actualidad y representa un avance importante en términos de generalidad, lo cual se continuará evidenciando en el siguiente capítulo. En relación con la noción de vecindad, como se ha podido observar, diferentes matemáticos han presentado diferentes axiomas, como se muestra a continuación:

Tabla 3

Axiomas de vecindades propuestos por distintos matemáticos

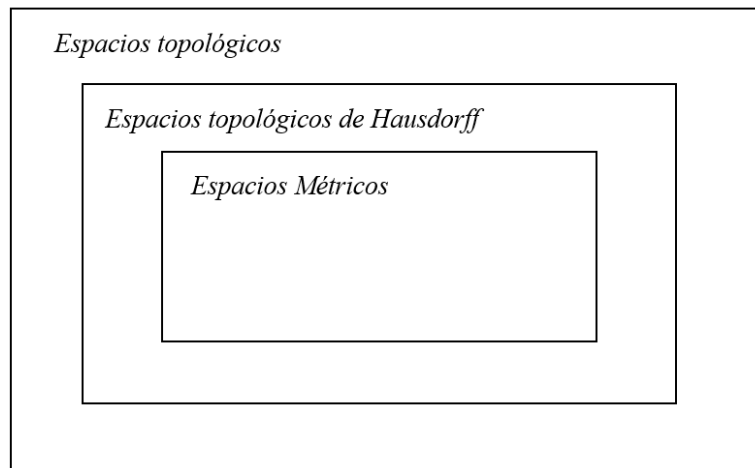
Riez	Root	Hilbert	Hausdorff	Bourbaki
Un subconjunto $U \subset X$ es una vecindad de un elemento $x \in X$ si: - $x \in U$ - $x \notin (X/U)'$ Además: - La intersección de un número finito de	a) Si N es una vecindad de $p \in P$, luego $p \in P$. b) Cada vecindad de un elemento ideal contiene un elemento de P . c) Para cualquier $p \in P$ hay una secuencia (A_n) de vecindades de p tal que para cualquier vecindad N de p	1. Cada punto A determina ciertos subsistemas de puntos a los que él mismo pertenece y que se denominan vecindades del punto A . 2. Si B es un punto cualquiera de una vecindad de A , entonces esta vecindad es también una vecindad de B .	(A) Cada punto x corresponde al menos a una vecindad U_x ; cada vecindad U_x contiene el punto x . (B) Si U_x, V_x son dos vecindades del mismo punto x , entonces existe una vecindad W_x que es un subconjunto de	(V_I) Cualquier conjunto de X que contenga un conjunto de $V(x)$ pertenece a $V(x)$. (V_{II}) Cualquier intersección finita de conjuntos de $V(x)$ pertenece a $V(x)$. (V_{III}) El elemento x pertenece a cualquier

vecindades de x también es una vecindad de x .	existe k tal que $A_n \subseteq N$ para cada $n \geq k$. d) Para cada vecindad N de $p \in P$ hay una vecindad M_N de P para la cual cada elemento de M_N tiene una vecindad que es un subconjunto de N . e) Los distintos elementos de P tienen vecindades disjuntas.	3. Para dos vecindades cualesquiera de un punto A , siempre hay una vecindad del punto A que es común a ambas vecindades. 4. Si A y B son dos puntos cualesquiera en nuestro plano, entonces siempre hay una vecindad de A que también contiene el punto B .	ambos $(W_x \subseteq \mathcal{D}(U_x, V_x))$ (C) Si el punto y se encuentra en U_x , entonces existe una vecindad U_y que es un subconjunto de U_x ($U_y \subseteq U_x$). D) Para dos puntos diferentes x, y existen dos vecindades U_x, U_y sin un punto común $\mathcal{D}(U_x, V_x) = 0$	conjunto de $V(x)$. (V_{IV}) Si V pertenece a $V(x)$, existe un conjunto W que pertenece a $V(x)$, tal que para todo $y \in W, V$ pertenece a $V(y)$. . Según la prop. 1 es suficiente tomar por W un conjunto abierto que contiene a x y está contenido en V .
--	---	---	--	--

En síntesis, en los desarrollos presentados en el capítulo 1 se logra ver algunos momentos históricos que evidencian los elementos más relevantes del surgimiento de los espacios abstractos en las matemáticas hacia el siglo XX, en estos se logró describir y analizar cómo algunos matemáticos de la época interesados en generalizar los resultados que ya Cantor había consolidado para la teoría de conjuntos, aportaron en la caracterización de la cercanía en estos espacios; en este sentido, se logró estudiar algunos espacios generales que surgieron en estas propuestas, primero, los espacios de Fréchet, y en particular el espacio métrico, el cual es indispensable hoy día para el trabajo en análisis matemático, luego se logró estudiar un espacio más general con el que se introduce la idea de espacio topológico, el espacio de Hausdorff, y posteriormente, aparecen los espacios topológicos en otros términos, lo cuales permiten hacer matemáticas con un mayor grado de generalidad. Así, se logra consolidar el estudio de una nueva rama de las matemáticas, la topología, en la cual es central el estudio de la cercanía. Esta jerarquía en términos de la generalización, se puede observar en la siguiente imagen:

Figura 7

Comparación de los espacios en términos de inclusión



Capítulo 2

La Noción de *Cercanía* a través de la Convergencia.

Como se mencionó anteriormente, los aportes del grupo Bourbaki constituyen otro momento significativo en la historia, en relación con la generalización y la caracterización de la *noción de cercanía* en espacios abstractos; así, en este capítulo, se estudiará cómo se logra capturar la *cercanía* a través de otros desarrollos dados en el marco de este grupo, en particular se revisará el concepto de *convergencia de filtro* introducido por el matemático francés Henri Cartan (8 de julio de 1904 - 13 de agosto del 2008) y el concepto de *espacio uniforme* introducido por el matemático francés André Weil (6 de mayo de 1906 - 6 de agosto de 1998). De acuerdo con Anacona (2017), es preciso estudiar estos aportes en la historia, en la medida en que, “con los filtros y filtros de Cauchy se generalizó la noción de convergencia y con los espacios uniformes se generalizó la noción de espacio métrico” (p. 188). Vale la pena mencionar que en el trabajo con la convergencia de filtros se recurre a la definición de vecindad presentada en el capítulo anterior.

Por otro lado, se reconoce que otros matemáticos también capturaron la *cercanía* en espacios abstractos a partir de otras teorías, este es el caso de los matemáticos estadounidenses Eliakim Moore y Herman Smith, quienes de manera previa al grupo Bourbaki introdujeron la teoría de redes. Con estos desarrollos, se obtuvieron resultados similares a los alcanzados por Bourbaki y Cartan con los filtros.

2.1 La convergencia de sucesiones

La aparición del concepto de red y de filtro se produce en el marco de una necesidad por extender el estudio de la convergencia a espacios más generales, en este punto es importante mencionar que este concepto se estudiaba en espacios métricos a través de la idea de sucesión, en este sentido, es importante remitirse a este concepto.

Definición: Una *sucesión* sobre un conjunto X es una función $f: N \rightarrow X$ donde $N \subseteq \mathbb{N}$ es un subconjunto infinito.

Sea $f: N \rightarrow X$ una sucesión, esto significa que $f(n) \in X$ para cada $n \in N$. Como un elemento genérico de X se simboliza usualmente con x , entonces el valor de n por medio de la sucesión se identifica como $x_n = f(n)$. Por tanto, una sucesión sobre X se denota con frecuencia por $\{x_n\}_{n \in N}$ o por $\{x_n\}_n$; en la mayoría de las situaciones es irrelevante conocer el subconjunto N de $\mathbb{N}$, es decir, el dominio de la sucesión.

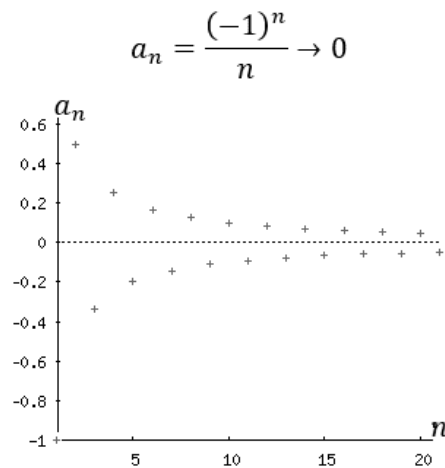
Se sigue de la definición que si $X \neq \emptyset$, el rango $f(N)$ de una sucesión $f: N \rightarrow X$ es numerable. Nótese que si el rango de una sucesión f sobre X es finito, entonces existe $x \in X$ tal que $\{n \in \mathbb{N}: f(n) = x\}$ es infinito.

Así, se presenta la convergencia de una sucesión:

Definición: Sea $\{x_n\}_{n \in N}$ una sucesión de números reales y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que la sucesión *converge a* ℓ , simbólicamente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ ó $\{x_n\} \rightarrow \ell$ si al avanzar suficientemente en la sucesión podemos asegurar que la distancia entre el límite ℓ y los puntos x_n de la sucesión es tan pequeña como se desee. Formalmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k |x_n - \ell| < \varepsilon$$

Conviene señalar que, en la convergencia de los espacios métricos, la idea que se tiene de cercanía está dada por una métrica que, como se visualiza en la definición, es introducida por el valor absoluto, el cual remite directamente a pensar en el concepto de distancia.

Figura 8*Ejemplo de límite de una sucesión*

La definición anterior se puede reescribir de la siguiente manera en términos de colas de la sucesión y bolas alrededor del punto límite, esto aludiendo a la idea de que una sucesión converge a un punto ℓ siempre que las colas de la sucesión estén contenidas en las bolas con centro en el punto límite y radio muy pequeño. Formalmente se puede ver así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \{a_n\}_{n \geq k} \subseteq B(\ell, \varepsilon)$$

Esta caracterización de la convergencia en espacios métricos permite estudiar conceptos fundamentales del cálculo y el análisis como lo es la continuidad de funciones (ver sección 3.1). Por otro lado, en los espacios topológicos, de manera análoga a cómo sucede en los métricos, es posible definir la convergencia a través de sucesiones, como se presenta a continuación:

Definición: Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio topológico X converge a un límite $l \in X$ si para toda vecindad U de l existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in U$.

Ahora, para trabajar con la convergencia en espacios más generales, como lo son los espacios topológicos, se debe reconocer que, si bien es posible definir la convergencia en términos de sucesiones, el estudio que permite hacer de algunos conceptos es limitado; esto en

la medida en que, se debe restringir el espacio de manera que cada elemento tenga una base de vecindades numerable. En palabras de Willard (2004) la convergencia secuencial podrá describir solo aquellas topologías en las que el número de vecindades (básicas) alrededor de cada punto no es mayor que el número de términos en las secuencias (p.71). Estas ideas se estudiarán con más detenimiento en el capítulo siguiente (ver sección 3.2)

Así, con la necesidad de caracterizar la convergencia en espacios más generales se generaliza la noción de sucesión a través de la definición de red y de filtro, estos conceptos se estudian en los siguientes apartados.

2.2 La convergencia a través del concepto de redes

Como se ha mencionado, en el siglo XX se tenía el interés de generalizar la noción de convergencia a espacios abstractos, uno de los primeros desarrollos en este sentido, fue dado por Fréchet con los denominados espacios (L) , además, se reconoce el trabajo de Cartan en relación con los filtros; ahora bien, otro de los resultados que se da en este contexto, es el concepto de *redes*⁴² y los desarrollos en relación con este.

La definición de *redes* se presenta por primera vez en 1922 por los matemáticos estadounidenses Eliakim Moore en *Definition of Limit in General Integral Analysis*⁴³ y Herman Smith en *A General Theory of Limits*⁴⁴, sin embargo, de acuerdo con Cochran (1966), la aparición de este concepto en el marco de los espacios topológicos, no se da sino hasta 1937 en el artículo de Birkhoff denominado *Moore-Smith convergence in General Topology*⁴⁵, en el cual se considera por primera vez la relación entre espacios topológicos y teoría de la convergencia (p. 3).

⁴² *Nets.*

⁴³ *Definición de límite en análisis integral general.*

⁴⁴ *Una teoría general de límite.*

⁴⁵ *Convergencia Moore-Smith en topología general.*

El concepto de convergencia en esta teoría se generaliza teniendo en cuenta que, en una sucesión, una colección de puntos se ordena a partir de los números naturales, en ese sentido, para trabajar en espacios topológicos la convergencia, se transforma la idea de ordenar la colección de puntos de un conjunto X , por la idea de realizar un mapeo con conjuntos ordenados en X . Con esto se prescinde de la linealidad que proporciona el orden de los números naturales, pues la pretensión es definir una *orientación positiva* en los conjuntos ordenados con los que se trabaja. A continuación, se presentan los conceptos básicos, siguiendo el texto de Willard *General Topology* ⁴⁶(2004).

2.2.1 Conjunto dirigido

Inicialmente se presenta la definición de conjunto dirigido, la cual permite hablar de *orientación positiva*.

Definición: Un *conjunto dirigido* es un conjunto Λ en el cuál hay una relación $\leq$ que satisface las siguientes condiciones:

Λ -a) $\lambda \leq \lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$

Λ -b) Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$ luego $\lambda_1 \leq \lambda_3$,

Λ -c) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ entonces existe algún $\lambda_3 \in \Lambda$ con $\lambda_1 \leq \lambda_3, \lambda_2 \leq \lambda_3$.

De la anterior definición se tiene que las dos primeras propiedades son propias de una relación de orden, sin embargo, no se tiene la propiedad de simetría en los conjuntos dirigidos, pues estos no necesitan tener una relación de orden parcial. Además, la propiedad (Λ -c) es la que le proporciona al conjunto la orientación positiva que se requiere para describir la convergencia en espacios topológicos generales.

⁴⁶ Topología general

2.2.2 El concepto de red y de convergencia de una red

Teniendo la definición anterior, es posible definir el concepto de *red* de la siguiente manera:

Definición: Una *red* (x_λ) en un conjunto X es una función $P: \Lambda \rightarrow X$, donde Λ es un conjunto dirigido. El punto $P(\lambda)$ es usualmente denotado por x_λ .

Es posible observar que este concepto guarda relación con el concepto de filtro que se desarrollará más adelante, en particular se habla de la posibilidad de reemplazar una red por un prefiltro y viceversa. Además, dado que el concepto de red generaliza el concepto de sucesión, las sucesiones constituyen un caso particular de red.

Otro concepto que se puede definir en el marco de la teoría de redes es la idea de *subred* de una red $P: \lambda \rightarrow X$:

Definición: Una *subred* es la composición $P \circ \varphi$, donde $\varphi: M \rightarrow \Lambda$ es una función creciente cofinal de un conjunto dirigido M al conjunto Λ . Esto es:

- a) $\varphi(\mu_1) \leq \varphi(\mu_2)$ siempre que $\mu_1 \leq \mu_2$ (φ es creciente).
- b) Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe algún $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \varphi(\mu)$ (φ es cofinal en Λ)

Con lo anterior, se puede definir la convergencia en el marco de la teoría de redes de la siguiente manera:

Definición: Sea (x_λ) una *red* en un espacio X . Entonces (x_λ) *converge* a $x \in X$ (simbolizado $x_\lambda \rightarrow x$) siempre que para cada vecindad U de x , existe algún $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica que $x_\lambda \in U$.

Es este punto vale la pena destacar un ejemplo histórico en el surgimiento de la convergencia de redes, pues según Willard (2004) los desarrollos de Moore y Smith estuvieron motivados por este.

Ejemplo de red. Sea la colección $\wp$ de todas las particiones finitas del intervalo cerrado $[a, b]$ en subintervalos cerrados con la relación $A_1 \leq A_2$, siempre que A_2 sea más

fino que A_1 .⁴⁷ Se puede probar que $\wp$ con la relación *ser más fino* es un conjunto dirigido, veamos:

Λ -a) $A \leq A$ pues A es igual de fino que él mismo para cada $A_i \in \wp$

Λ -b) Si $A_1 \leq A_2$ y $A_2 \leq A_3$ luego $A_1 \leq A_3$. Esto porque el que A_2 sea más fino que A_1 , implica que $A_1 \subseteq A_2$, y de manera análoga, dado que A_3 es más fino que A_2 , se tiene que $A_2 \subseteq A_3$, por lo tanto $A_1 \subseteq A_3$, es decir, A_1 es más fino que A_3 .

Λ -c) Sean $A_1, A_2 \in \wp$

Si A_1 y A_2 son igual de finas, se tiene que $A_1 \subseteq A_2$ y $A_2 \subseteq A_1$, entonces $A_1 = A_2$, es decir, son la misma partición. Así, se puede encontrar un A_3 de manera que $A_1 \leq A_3$ y $A_2 \leq A_3$, por ejemplo cuando $A_3 = A_1 = A_2$

Si A_1 y A_2 son dos particiones en las que una es más fina que la otra, se puede encontrar un A_3 que cumpla con $A_1 \leq A_3$ y $A_2 \leq A_3$, por ejemplo cuando $A_3 = A_1 \cup A_2$

Por lo tanto, dadas dos particiones se pueden encontrar una tercera que sea más fina o igual de fina que cada una.

Ahora, si f es una función de variable real en el intervalo $[a, b]$, podemos definir una red $P_I: \wp \rightarrow \mathbb{R}$, en donde $P_I(A)$ es la suma inferior de Riemann sobre la partición A ; de manera análoga se puede definir $P_S: \wp \rightarrow \mathbb{R}$, en donde $P_S(A)$ es la suma superior de Riemann sobre la partición A . Ambas redes convergen a un c , este valor común es lo que llamamos la integral definida de la función en el intervalo, simbólicamente $\int_a^b f(x)dx = c$. Esto significa que, a medida que las particiones son más finas, las sumas de Riemann se aproximan al área bajo la curva.

En este sentido, es posible visualizar la importancia del presente ejemplo en el desarrollo del concepto de red, pues muestra cómo las redes pueden utilizarse para formalizar

⁴⁷ Una partición A_2 es más fina que una partición A_1 cuando A_1 es un subconjunto de A_2 .

conceptos del cálculo; en particular conecta la idea de estimar un área usando rectángulos, con un concepto matemático más abstracto, las redes.

De manera general, es preciso considerar la teoría de redes en este trabajo porque presenta una nueva forma de capturar la cercanía en espacios abstractos, pues como se logra evidenciar, con el concepto de red se puede definir la convergencia, la cual captura una *noción de cercanía* en términos generales; esto en la medida en que, como se puede observar en la definición $x_\lambda \rightarrow x$ si cada vecindad de x contiene una cola de (x_λ) , esto es, los elementos x_λ de la red son cada vez más *cercanos* a x , pues a partir de un λ_0 siempre se va a encontrar una vecindad de x que contenga una cola de la red. Como se puede observar, la idea de vecindad también juega un papel fundamental en la caracterización de lo cercano en el desarrollo de la teoría de redes, y en particular, en la conceptualización de la convergencia.

Además, cabe mencionar que la generalización que se hace de este concepto está en un nivel mayor a la presentada por Fréchet, dado que, mientras que este matemático en los espacios (L) hace uso de la noción de sucesión, que está ligada a los números naturales, en esta teoría la noción de convergencia se desliga del orden numérico y se reemplaza por el concepto de conjunto dirigido, una noción más abstracta que en lugar de necesitar la numerabilidad, establece la idea de *orientación positiva*.

2.3 La Convergencia de Filtros en Bourbaki

Siguiendo con los propósitos de generalización que se venían desarrollando desde inicios del siglo XX, como ya se mencionó, otro matemático que se enmarca en esta perspectiva, es Henri Cartan, uno de los fundadores del grupo Bourbaki, pues como se explicita en *Éléments d'histoire des mathématiques*⁴⁸, su introducción del concepto de filtro, además de aportar un valioso instrumento para toda clase de aplicaciones, ha contribuido a simplificar la

⁴⁸ *Elementos de Historia de las Matemáticas.*

teoría (Bourbaki, 1974, p. 180). En este sentido, según Anacona (2017), con la necesidad de tener en espacios generales conceptos análogos a los de sucesión y convergencia, en los que no fuera necesario recurrir a la numerabilidad, Cartan propone la noción de filtro, la cual introduce por primera vez en un congreso realizado en Chançay en 1937 (p. 188).

Inicialmente, en el apartado *Théorie des filtres*⁴⁹ de la revista *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, publicada en 1937, Cartan afirma que las sucesiones no permiten el estudio de los espacios generales, por lo cual propone un concepto que permitirá reemplazarlo.

2.3.1 La noción de filtro

Definición: Sea un conjunto ξ dado. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de ξ toma el nombre de filtro (construido por ξ) si cumple las siguientes tres condiciones:

F-I: La familia $\mathcal{F}$ no está vacía y no contiene el subconjunto vacío,

F-II: La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$,

F-III: Cualquier conjunto que contenga un conjunto de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$ (Cartan, 1937, p. 595).⁵⁰

Además, Cartan precisa que el filtro $\mathcal{F}$ contiene el subconjunto formado por todos los elementos del conjunto ξ .

Posteriormente, en 1938 Bourbaki en *Topologie: Structures Topologiques (etat 2)* presenta nuevamente esta definición de filtro, y más adelante en 1965 presenta en el primer capítulo de *Topologie générale* de *Éléments de Mathématique* esta misma definición, pero en lenguaje simbólico:

⁴⁹ Teoría de Filtros.

⁵⁰F-I: la famille $\mathcal{F}$ n'est pas vide et ne contient pas le sous-ensemble vide;

F-II: l'intersection de deux ensembles de $\mathcal{F}$ appartient á $\mathcal{F}$;

F-III: tout ensemble qui contient un ensemble de $\mathcal{F}$ appartient á $\mathcal{F}$ (Cartan, 1937, p. 595).

Definición: Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X , que posee las siguientes propiedades:

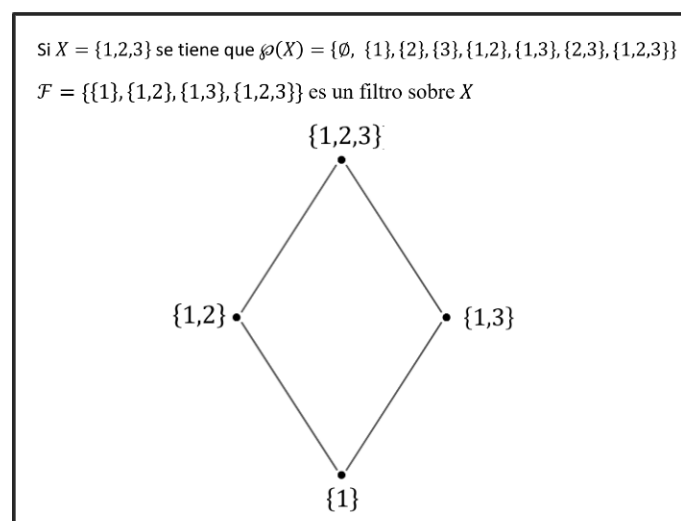
(F_I) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$ entonces $G \in \mathcal{F}$; y

(F_{II}) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(F_{III}) $\emptyset \notin \mathcal{F}$. (Bourbaki, 1965, TG I.36)

Figura 9

Ejemplo de filtro



Siguiendo con estas consideraciones, es preciso mencionar que para construir un filtro se parte de algunos subconjuntos y para obtener los demás elementos se consideran todos los conjuntos donde estos subconjuntos estén contenidos (propiedad F_I); así, el filtro recibe el nombre de *filtro generado por la base* y los elementos considerados inicialmente, conforman una *base de filtro*, la cual es definida por Cartan (1937) en los siguientes términos:

Definición: Consideremos una familia $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de ξ , esta es base de filtro si satisface las dos condiciones siguientes:

B-I: La familia $\mathfrak{B}$ no está vacía y no contiene el subconjunto vacío;

B-II: La intersección de dos conjuntos de $\mathfrak{B}$ contiene un conjunto de $\mathfrak{B}$ (p. 595).⁵¹

⁵¹ B-I: comme F-I;

B-II: l'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{B}$ contient un ensemble de $\mathfrak{B}$.

En cuanto a esta definición, Cartan (1937) establece, por un lado, que dado un filtro, una subfamilia $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{F}$ es *una base* para este si cada elemento de $\mathcal{F}$ contiene un elemento de $\mathfrak{B}$. De otra parte, que para que $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ sean bases de un mismo filtro, se debe dar que todo conjunto de $\mathfrak{B}$ contenga un conjunto de $\mathfrak{B}'$ y viceversa, es decir, que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ y $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$.

Ejemplo de base de filtro. Sea $A \subseteq X$. $\mathfrak{B} = \{A\}$ es una base de filtro. El filtro generado recibe el nombre de filtro principal asociado a A : $\mathcal{F} = \{B \subseteq X | A \subseteq B\}$.

Así mismo, Cartan en su artículo define para los filtros la relación *ser más fino que*.

Definición: Un filtro $\mathcal{F}'$ es más fino que el filtro $\mathcal{F}$ (simbolizado como $\mathcal{F}' > \mathcal{F}$) si la familia $\mathcal{F}$ está contenida en la familia $\mathcal{F}'$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$), esto es equivalente a decir que $\mathcal{F}$ es más grueso que $\mathcal{F}'$.

En este sentido, si se cumple que $\mathcal{F} < \mathcal{F}'$ o $\mathcal{F}' < \mathcal{F}$, se dice que los filtros son comparables.

Ahora, a partir de la idea de “ser más fino que” se define que un filtro es un *ultrafiltro* si no existe ningún filtro estrictamente más fino que él.

Cabe señalar, de acuerdo con Anacona (2017) que en sus inicios la teoría de los filtros fue denominada por Cartan como *Boumología*, esto porque otorgó al concepto de filtro el nombre de *Boum*⁵² (p. 189) Además, se menciona que:

La originalidad de Cartan consiste fundamentalmente en la reorganización de ideas ya presentes en la literatura matemática de la época. Como se sabe, la noción de filtro es dual de la noción de ideal, la cual fue propuesta por primera vez por Dedekind en 1871 (Anacona, 2017, p.189).

En este punto, Cartan muestra que la teoría de filtros generaliza la teoría de sucesiones, para esto presenta la definición de *filtro elemental*:

⁵² Un “boum” B es una familia de subconjuntos de un conjunto fundamental que verifica los siguientes axiomas:

I) Todo conjunto que contiene un conjunto de B pertenece a B ,

II) Toda intersección finita de conjuntos de B pertenece a B ,

III) El conjunto vacío no pertenece a B (Bourbaki, 1937, como se citó en Anacona, 2017).

Definición: Sea S una secuencia de elementos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (finita o infinita) en cualquier conjunto ξ . Se designa E_p al conjunto de elementos de S cuyo índice es $\geq p$. La familia de E_p (cuando p recorre todos los índices de la secuencia S) es la base de un filtro $\mathcal{F}$, el cual está dado por los superconjuntos de E_p y es llamado filtro asociado a la secuencia S . Ahora, cualquier filtro obtenido de esta manera se denomina *filtro elemental*.

En otros términos, dada la sucesión $S \subseteq \xi$, consideremos, para cada índice de la sucesión, las colas $E_p = \{a_p, a_{p+1}, \dots\}$. El conjunto de las colas E_p es la base del filtro asociado a la sucesión S ; este filtro se define como: $\mathcal{F}(S) := \{E \subseteq \xi \mid E_p \subseteq E \text{ para algún } p \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo de filtro elemental. Sea $\mathfrak{B} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las colas de $\mathbb{N}$, esto es $\mathfrak{B} := \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $S_n := \{n, n+1, \dots\}$. El filtro generado por $\mathfrak{B}$ está dado por los superconjuntos de S_n .

En relación con esta definición, Cartan menciona que los filtros elementales son de dos especies: por un lado los asociados a una sucesión finita, los cuales estarán dados por los subconjuntos de ξ que contienen al último término a_n de la sucesión; y por otro, los asociados a una sucesión infinita, los cuales estarán dados por los subconjuntos de ξ cuyo complemento contiene un número finito o nulo de elementos de S , como es el caso del ejemplo anterior. En este sentido, teniendo este concepto de *filtro asociado a la sucesión*, se puede observar que es posible trabajar en espacios generales la idea de sucesión desligada de lo numerable, esto va a permitir una generalidad mayor en los desarrollos, en particular, en lo referente al concepto de convergencia.

De manera general, de las definiciones de filtro y base se puede observar que, no toda base es un filtro, pues aunque se tengan garantizadas las propiedades F_{II} y F_{III} , no siempre sucede que los conjuntos que contengan a los elementos de la base, estén también en la base.

Por el contrario, en el caso de los filtros, como todo filtro cumple las condiciones B-I y B-II, siempre se tiene que es una base de filtro.

En este mismo sentido, se puede notar en relación con estas definiciones, que las vecindades definidas por Hausdorff (ver sección 1.2.2) cumplen con ser una base de filtro, pues el axioma A, por un lado, al afirmar que para el punto x se tiene al menos una vecindad U_x , garantiza que la base de las vecindades no es vacía, y por otro lado, al afirmar que $x \in U_x$ garantiza que no hay vecindades vacías, por lo que el vacío no pertenece a la base de las vecindades. Además, el axioma B afirma que para dos vecindades de un punto x , su intersección es también vecindad del punto, lo cual garantiza que la intersección de dos conjuntos de la base, contiene un conjunto de la base. Ahora, si bien en la definición de espacio topológico de Hausdorff la familia de vecindades cumple con ser una base de filtro, en la definición (ver sección 1.2.3) que ofrece el grupo Bourbaki en 1965 en *Topologie générale* de este mismo concepto, la familia de vecindades de x $\mathcal{V}(x)$ posee ciertas propiedades que la hacen cumplir con ser un filtro, pues en esta se considera que si una vecindad de x está contenida en otro conjunto, este conjunto es también vecindad de x , lo cual garantiza la propiedad (F_I) de filtro.

2.3.2 La convergencia de filtros

Alrededor de estos conceptos de filtro, base de filtro, filtro elemental y ultrafiltro, se logran otros desarrollos a través de los cuales se captura la *noción de cercanía*; estos son presentados en principio por Cartan en un artículo y se retoman en el marco del grupo Bourbaki en el libro *Topologie Générale*. En este libro, se presenta inicialmente la definición de límite de un filtro.

Definición: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Decimos que un punto $x \in X$ es punto límite (o simplemente límite) de $\mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro $\mathcal{V}(x)$ de las

vecindades de x ; entonces también decimos que $\mathcal{F}$ converge a x . Decimos que x es límite de una base de filtro $\mathfrak{B}$ sobre X (o que $\mathfrak{B}$ converge a x) si el filtro generado por la base $\mathfrak{B}$ converge a x .⁵³

Así, la cercanía a través de la convergencia de filtros se puede percibir en la medida en que, el filtro $\mathcal{F}$ converge a x si la familia de vecindades de x pertenece a este, lo cual indica que en el filtro se encuentran todos aquellos conjuntos de elementos que son vecinos (*cercanos*) de x .

Posteriormente, Bourbaki define *punto adherente* a una base de filtro.

Definición: Dado un espacio topológico X , diremos que un punto x es *adherente* a una base de filtro $\mathfrak{B}$ sobre X , si es adherente a todos los conjuntos de $\mathfrak{B}$.⁵⁴

Además, si x es adherente a una base de filtro $\mathfrak{B}$, el también es adherente a toda base de filtro equivalente a $\mathfrak{B}$, en particular a un filtro generado por la base $\mathfrak{B}$.

La convergencia de filtros permite estudiar conceptos clásicos de la topología, por ejemplo, compacidad, adherencia, espacios de Hausdorff y continuidad, lo cual permite afirmar que esta forma de capturar la *cercanía* en términos generales, se integra muy bien en el estudio de los espacios topológicos.

En este sentido, se define espacio *cuasi-compacto* como un espacio topológico X en el que cada filtro en X tiene al menos un punto adherente. A partir de esta definición, se define un espacio *compacto* como un espacio cuasi-compacto y separable⁵⁵. Además, se define la *adherencia* de un conjunto afirmando que en un espacio topológico (X, τ) , en el que $x \in X$ y $A \subseteq X$, se tiene que x pertenece a la adherencia de A si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \rightarrow$

⁵³ Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un filtre sur X . On dit qu'un point $x \in X$ est point limite (ou simplement limite) de $\mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ est plus fin que filtre $\mathfrak{B}(x)$ des voisinages de x ; on dit aussi alors que $\mathcal{F}$ converge (ou est convergent) vers x . On dit que x est limite d'une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur X (ou que $\mathfrak{B}$ converge vers x) si le filtre de base $\mathfrak{B}$ converge vers x (Bourbaki, 1965, TG I. 46).

⁵⁴ Dans un espace topologique X , on dit qu'un point x est adhérent à une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur X , s'il est adhérent à tous les ensembles de $\mathfrak{B}$ (Bourbaki, 1965, TG I. 47).

⁵⁵ Cualesquiera que sean los puntos distintos x y y de X , existe una vecindad de x y una vecindad de y sin un punto en común.

x y $A \in \mathcal{F}$. Por otro lado, se presentan los *espacios de Hausdorff* afirmando que en un espacio topológico (X, τ) , X es un espacio de Hausdorff si y sólo si todo filtro convergente en X converge a un único punto.

En cuanto a estas definiciones, en primer lugar, se puede observar que la definición de adherencia presentada es una generalización de la adherencia en los espacios métricos, en la medida en que, son análogas, pero al trabajar con filtros se están desligando de las sucesiones, teniendo así un mayor nivel de abstracción. Además, la definición de los espacios de Hausdorff muestra un tipo particular de espacio, en el que se tiene garantizado que el punto al cual converge es único.

En síntesis, de los desarrollos presentados anteriormente, es posible percibir el protagonismo que tiene la noción de cercanía, pues esta permitió trabajar con conceptos que se tenían para espacios particulares en espacios más abstractos; en especial, estos desarrollos del grupo Bourbaki permitieron trabajar los espacios topológicos a través de la convergencia de filtros; así, *la noción de cercanía* en dichos espacios, además de capturarse, como se ha observado anteriormente, a través de las vecindades, también se puede capturar a través de la convergencia de filtros; sin embargo, se puede reconocer que para el estudio de esta última se necesita de la primera.

En este sentido, se puede observar que, al igual que en los espacios (L) presentados por Fréchet en su tesis de 1906, se captura la *cercanía* a través del concepto de límite, con la diferencia de que, al generalizar la noción de sucesión a través de los filtros, Bourbaki se desliga de lo numerable, logrando capturar la cercanía en términos más generales. Es posible intuir que el trabajo realizado por estos matemáticos respalda lo propuesto en las clases (L) , además, lleva la convergencia a un mayor grado de generalidad y la posiciona como concepto central en el estudio de la topología. De acuerdo con Clark (2016), cómo se pudo evidenciar anteriormente, a través del concepto de redes también se logró este propósito de generalización de la

convergencia. Así, se puede observar que ambas teorías funcionan de manera análoga, pues según Cochran (1966) Bruns y Schmidt demostraron que los *filtros* y las *redes* producen teorías de convergencia “equivalentes” (p. 3).

2.3.3 Correspondencia entre redes y filtros

En cuanto a la relación entre redes y filtros, Willard (2004) destaca su similitud, afirmando que cualquiera de estas teorías permite describir la topología de un espacio topológico, esto a partir de la idea de que los “filtros más finos” proporciona un filtro análogo a las subredes. Además, Willard menciona que la relación entre redes y filtros fue trabajada inicialmente por Bartle en *Nets and Filtres in Topology*⁵⁶ de 1955.

Una presentación más reciente sobre esta correspondencia se puede encontrar en el artículo *Convergence*⁵⁷ de Clark (2016), en el cual demuestra que dada una red en un conjunto se puede construir una base de filtro, y de manera análoga, que a partir de una base de filtro en un conjunto, se puede definir una red:

Proposición: Sea $x: I \rightarrow X$ una red en el conjunto X . Luego la colección $P(x) := \{i^+\}_{i \in I}$ es un prefiltro⁵⁸ en X , el prefiltro de colas de x .

Donde, si $\leq$ es una relación en un conjunto I , para $i \in I$ se toma $i^+ = \{i' \in I \mid i \leq i'\}$.

Proposición: Sea F un prefiltro en X . Sea $I(F)$ el conjunto de parejas (x, A) tal que $x \in A \in F$. Dotamos $I(F)$ con la relación $(x_1, A_1) \leq (x_2, A_2)$ si y solo si $A_1 \supset A_2$. Luego $(I(F), \leq)$ es un conjunto dirigido, y la asignación $(x, A) \rightarrow x$ define una red $x(F): I \rightarrow X$.

En consecuencia, hasta este punto se ha podido evidenciar que la convergencia de redes y filtros constituye otro momento histórico importante en relación con la caracterización de la

⁵⁶ *Redes y Filtros en Topología*.

⁵⁷ *Convergencia*.

⁵⁸ Así se denomina base de filtro en Clark (2016).

noción de cercanía en espacios abstractos y en general con los propósitos de generalización en matemáticas.

2.4 Los Filtros de Cauchy y los Espacios Uniformes

Cómo se pudo observar en el apartado anterior, con los filtros se generalizó la noción de sucesión, lo cual permitió capturar la *cercanía* en espacios generales a través de la convergencia de filtros. Ahora bien, las sucesiones de Cauchy son un caso particular de sucesión, en estas la convergencia no se estudia en términos de “qué tanto se acercan los elementos de la sucesión a un punto dado”, sino que se hace “dos a dos”, es decir, se revisa que dado un número muy pequeño ε , se puede encontrar un número positivo, a partir del cual los elementos de la sucesión están a una distancia menor que ε . En este sentido, la convergencia de filtros no logra generalizar la convergencia en estas sucesiones, por lo cual, André Weil introduce los espacios uniformes, en los que se captura una cercanía que formaliza la idea de que “ x_1 está tan cerca de x_2 como y_1 lo está de y_2 ”.

Esta introducción, es realizada por el matemático francés en su artículo *Les recouvrements des espaces topologiques: espaces complets, espaces bicomacts*⁵⁹ en los *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* en 1936; además continuó desarrollando la teoría de estos espacios en su libro *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*⁶⁰, el cual fue publicado en 1937. En cuanto al desarrollo de esta teoría en relación con la teoría de filtros, se puede notar que estas se gestaron casi en paralelo.

2.4.1 La noción de cercanía en espacios uniformes

La teoría de espacios uniformes es retomada en el marco del grupo Bourbaki en el capítulo II libro *Topologie générale* de *Éléments de Mathématique* publicado en 1965. En este

⁵⁹ *Revestimientos de espacios topológicos: espacios completos, espacios compactos.*

⁶⁰ *Sobre espacios con estructura uniforme y sobre topología general.*

se presenta la definición de espacios uniformes como un conjunto dotado de una estructura uniforme.

Definición: Llamamos estructura uniforme⁶¹ sobre un conjunto X a una estructura constituida por los elementos de un conjunto $\mathfrak{U}$ de partes de $X \times X$ que satisface los axiomas (F_I) y (F_{II}) de filtros y los siguientes:

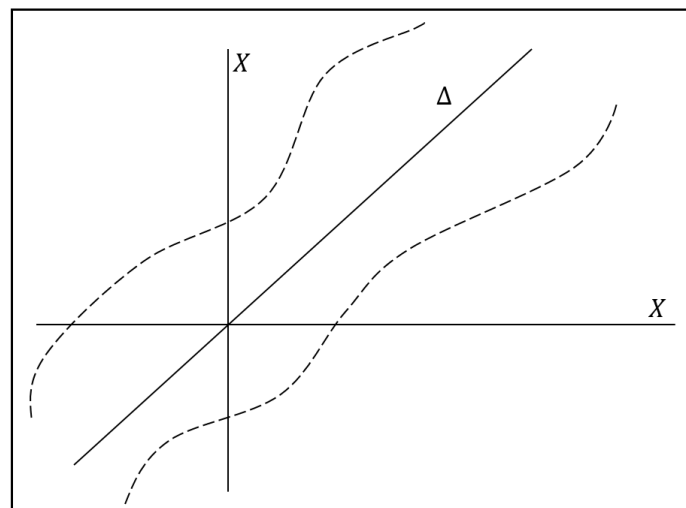
(U_I) Todo conjunto de $\mathfrak{U}$ contiene la diagonal Δ ⁶².

(U_{II}) La relación $V \in \mathfrak{U}$ implica $V^{-1} \in \mathfrak{U}$.⁶³

(U_{III}) Cualquiera que sea $V \in \mathfrak{U}$, existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $W \circ W \subset V$.⁶⁴

Figura 10

Ilustración de entornos



Los conjuntos de $\mathfrak{U}$ son los *entornos* de la estructura uniforme definida sobre X .

En este sentido, el que se cumpla la propiedad (F_I) garantiza que dado un entorno contenido en un subconjunto de $X \times X$, este subconjunto será también un entorno, es decir, se puede ampliar un entorno y obtener uno nuevo; así mismo, la propiedad (F_{II}) garantiza que la

⁶¹ On appelle structure uniforme sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble $\mathfrak{U}$ de parties de $X \times X$ qui satisfait aux axiomes (F_I) et (F_{II}) de I, p. 36, et aux axiomes suivants:

(U_I) Tout ensemble de $\mathfrak{U}$ contient la diagonale Δ .

(U_{II}) La relation $V \in \mathfrak{U}$ entraîne $V^{-1} \in \mathfrak{U}$.

(U_{III}) Quel que soit $V \in \mathfrak{U}$, il existe $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \circ W \subset V$ (Bourbaki, 1965, TG II.1).

⁶² $\Delta = \{(x, x) / \forall x \in X\}$

⁶³ El conjunto $V^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in V\}$

⁶⁴ El conjunto $V \circ W = VW = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ tal que } (x, z) \in W \text{ y } (z, y) \in V\}$.

intersección de dos entornos me permite obtener un nuevo entorno. Además, dado que por la propiedad (U_I) cada entorno contiene la diagonal, es decir las parejas (x, x) , se tiene garantizado que cada punto es *cercano* a sí mismo, y se asegura que el conjunto $\mathfrak{U}$ no será vacío ni contendrá al conjunto vacío. Hasta este punto, las tres propiedades mencionadas garantizan que el conjunto $\mathfrak{U}$ de entornos es un filtro.

Por otro lado, la propiedad (U_{II}) postula que dado un entorno en la estructura uniforme, con parejas (x, y) , se tiene que también pertenece a la estructura el entorno de las parejas (y, x) , es decir, que si x es cercano a y , y también es cercano a x ; aquí vale la pena mencionar que en el caso en el que se tenga todas las parejas (x, y) y (y, x) en un mismo entorno, este entorno es simétrico. Adicionalmente, la propiedad (U_{III}) enuncia que dado un entorno V se puede encontrar un entorno W en el que siempre que x sea *cercano a y* y y sea *cercano a z*, se tenga que x es aún más *cercano a z* en el entorno V . Con estas propiedades, se tiene que las estructuras uniformes cumplen la simetría y un tipo de desigualdad triangular, así las propiedades (U_I) , (U_{II}) y (U_{III}) corresponden con las propiedades que se tienen para los espacios métricos, en este sentido, los espacios uniformes generalizan la noción de espacio métrico.

Con esto en mente, la *cercanía* en los espacios uniformes tiene una estructura diferente a la que se define para las vecindades, en estos la cercanía se captura a través de los entornos, los cuales permiten dar cuenta de qué tan cercanos son dos elementos cualesquiera de un espacio, sin fijar alguno para realizar esta revisión. Además es posible ver que las vecindades se definen sobre el conjunto partes de X , en cambio en los espacios uniformes se definen a partir del conjunto partes de $X \times X$, es decir, a partir del producto cartesiano.

2.4.2 Filtros de Cauchy

Posterior a la definición de espacio uniforme, se presentan algunas definiciones como la de sistema fundamental de entornos, topología de un espacio uniforme, funciones

uniformemente continuas, etc. Además, de manera previa a la definición de filtros de Cauchy, se define un subconjunto *pequeño* como un conjunto en el que todos los puntos son *muy cercanos* dos a dos.

Definición: Dado un espacio uniforme X , y un entorno V de X , diremos que una parte A de X es un conjunto *pequeño* de orden V cuando dos puntos cualesquiera de A son *cercanos* de orden V , es decir, $A \times A \subset V$.⁶⁵

Con esto, se define filtro de Cauchy como:

Definición: Un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio uniforme X es un filtro de Cauchy si para cada entorno V de X , existe un conjunto pequeño de orden V que pertenece a $\mathcal{F}$.⁶⁶

Además, se tiene que todo filtro convergente en un espacio uniforme X es un filtro de Cauchy y que todo filtro de Cauchy menos fino que un filtro convergente, también es convergente. En este sentido, los espacios en los que todo filtro de Cauchy converge se conocerán como espacios completos.

En pocas palabras, a través de los desarrollos presentados anteriormente se logra visualizar que con los filtros se generalizaron las sucesiones, esto se pudo observar mediante la definición de *filtro elemental* presentada por Cartan, y con los filtros de Cauchy se generalizaron las sucesiones de Cauchy, lo cual se logra gracias a la introducción de los espacios uniformes que permiten capturar una *cercanía* dos a dos. El desarrollo de estas teorías permitió extender el estudio de cualquier tipo de sucesión a espacios generales; lo cual se traduce en la posibilidad de estudiar la convergencia en espacios abstractos.

⁶⁵ Étant donné un espace uniforme X , et un entourage V de X , on dit qu'une partie A de X est un ensemble petit d'ordre V lorsque deux quelconques des points de A sont voisins d'ordre V (ce qui revient à dire que $A \times A \subseteq V$) (Bourbaki, 1965, TG II, 12).

⁶⁶ On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace uniforme X est un filtre de Cauchy si, pour tout entourage V de X , il existe un ensemble petit d'ordre V et appartenant à $\mathcal{F}$ (Bourbaki, 1965, TG II, 13).

Capítulo 3

El Concepto de Límite: Análisis Comparativo

En los capítulos anteriores se logra evidenciar que gracias a la necesidad de extender las propiedades que se tenían para los conjuntos lineales a espacios más generales, se desarrollaron teorías en las cuales se fue capturando la noción de cercanía a partir de las necesidades de cada espacio. Así, con la consolidación de la topología como una nueva rama de las matemáticas, fue posible generalizar los conceptos de límite, continuidad y completitud, los cuales son fundamentales en la formación de profesores de matemáticas. En particular, este capítulo estará centrado en el concepto de límite, pues de alguna manera es este el que permite la conceptualización de la continuidad y la completitud.

Por tal motivo, vale la pena revisar el desarrollo de la noción de convergencia a lo largo de los procesos de generalización que se gestaron en los inicios del siglo XX y la presentación moderna de los mismos.

3.1 Convergencia en espacios métricos

Los espacios métricos son uno de los primeros espacios generales que se conceptualizan, como ya se mencionó, Fréchet fue pionero en abordarlos en su clase (E), sin embargo, es con Hausdorff que estos se presentan con las tres propiedades que se trabajan en la actualidad (ver sección 1.2.2). La convergencia en los espacios métricos se captura a través de la idea de límite de sucesiones, en los elementos históricos presentados en el primer capítulo se logró ver que Fréchet conceptualiza una idea de límite para sucesiones en las clases (L) y en las clases (V) y por lo tanto, esto se tiene para los espacios métricos, denominados por él como clase (E).

3.1.1 Límite de una sucesión

Como se observó en la sección 2.1, la convergencia en espacios métricos se define a través del concepto de sucesión, y como se verá a continuación, esta permite una caracterización en estos espacios de conceptos como *adherencia*, *espacios de Hausdorff* y *función continua*:

Tabla 4

Caracterización de adherencia, espacio de Hausdorff y continuidad en espacios métricos a través de la convergencia de sucesiones

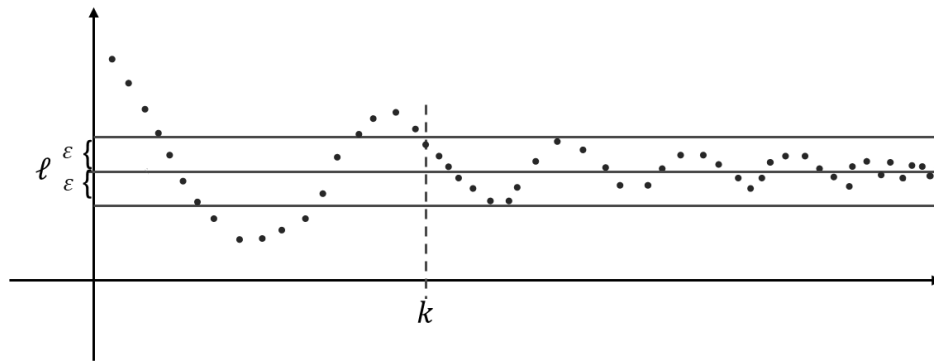
Punto adherente	Espacio de Hausdorff	Función continua
Sea X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que x es un <i>punto adherente</i> a A ($x \in \bar{A}$) si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\{x_n\} \rightarrow x$.	Sea X un espacio métrico. Decimos que X es un <i>espacio de Hausdorff</i> si y sólo si toda sucesión convergente en X converge a un único punto.	Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es <i>continua</i> en $\mathbb{R}$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ siempre que $\{x_n\} \rightarrow x$

Vale la pena mencionar que el concepto de límite en espacios métricos también se puede trabajar a partir de las familias de subconjuntos, aquí es preciso recurrir al concepto de vecindad presentado por Hausdorff, que, en particular para el caso de los espacios métricos, se formulan en términos de bolas concéntricas.

Definición: Se tiene que una sucesión $\{x_n\}$ converge a ℓ si y sólo si para cualquier intervalo con centro en ℓ y radio $\varepsilon > 0$, sólo un número finito de elementos de la sucesión quedan por fuera de dicho intervalo. Es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ℓ siempre que el complemento de las pre-imágenes (de la sucesión) de todo intervalo con centro en ℓ sea un conjunto finito.

Así, la convergencia de sucesiones se puede reescribir en los siguientes términos:

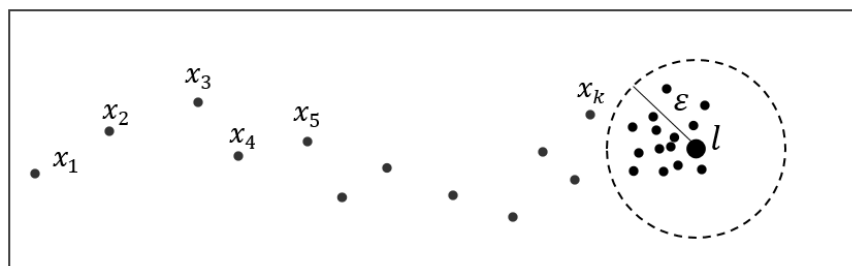
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N}: x_n \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)\}.$$

Figura 11*Ilustración de la convergencia de sucesiones*

El caracterizar la convergencia en términos de conjuntos permite liberarse del orden del dominio de la sucesión, pues lo que importa son los subconjuntos cofinitos del conjunto de índices; por lo cual el límite no cambia al alterar el orden de los elementos de la sucesión.

Con esto en mente, es posible definir la convergencia de sucesiones en términos de colas y bolas. Se entiende por *cola* de una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la imagen por medio de la sucesión de los elementos de $\mathbb{N}$ mayores que un número natural dado. El conjunto de todas las colas de la sucesión es $\mathcal{X} = \{\{x_n\}_{n > k} : k \in \mathbb{N}\}$.

Usando esta definición, se puede decir que una sucesión $\{x_n\}$ converge a ℓ si y sólo si para toda bola $B(\ell, \varepsilon)$, con centro en ℓ y radio $\varepsilon > 0$, existe una cola $\{x_n\}_{n > k}$ de la sucesión completamente contenida en dicha bola.

Figura 12*Ilustración de la convergencia de sucesiones en términos de colas y bolas*

Así, se puede reformular la definición de convergencia como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_{n > k} \subseteq B(\ell, \varepsilon)$, y si denominamos $\mathcal{B} = \{B(\ell, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ al conjunto de

todas las bolas con centro en ℓ , podemos reescribirla en los siguientes términos

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{X}, A \subseteq B$, la cual se puede entender a través de la relación

ser más fino que, así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \mathcal{X} \geq \mathcal{B}$$

3.1.2 Sucesiones de Cauchy y espacios completos

Ahora, es importante considerar un caso de sucesión en un espacio métrico, que cumple una característica particular de convergencia, las sucesiones de Cauchy; en estas los términos se acercan entre sí a medida que se avanza en la sucesión.

Definición: Una sucesión es de Cauchy si dado un $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ cuando $m, n \geq N$.

Este tipo de sucesiones tienen algunas particularidades en relación con la convergencia, pues no todas convergen en todos los espacios, por ejemplo, si tenemos la sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$ en el conjunto de los números racionales, esta cumple la condición necesaria para ser de Cauchy, pero se puede ver que no converge, pues su límite es un número irracional, así, si esta se define en el conjunto de los números reales, sí se tendrá su convergencia. Es esta definición, la que permite caracterizar los espacios completos, los cuales se definen como un espacio en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Por todo lo anterior, es posible observar que se puede trabajar la convergencia en espacios métricos a partir de las sucesiones, sin embargo, como se logró visualizar en la conceptualización histórica de los espacios generales, este concepto está amarrado a los naturales, lo cual hace que carezca de generalidad; además, como se estudiará más adelante, aunque en espacios métricos se logra caracterizar conceptos como adherencia, espacios de Hausdorff y continuidad en términos de sucesiones, en espacios topológicos estas no son suficientes para definir los mismos conceptos.

3.2 Convergencia en espacios topológicos

Como se logró observar, en ese interés por generalizar la teoría de conjuntos surgen los espacios topológicos, que es donde se posicionará el foco en este apartado. En estos, también es posible estudiar la convergencia, aquí fue central caracterizar este concepto, pues permitió generalizar la idea de límite y definir la continuidad funcional; en este tipo de espacios la convergencia se puede estudiar mediante las sucesiones o a través del concepto de filtro.

3.2.1 A través de sucesiones

En los espacios topológicos, al igual que en los métricos, es posible definir la convergencia a través de sucesiones como se presentó en la sección 2.1. En relación con esta definición se puede mencionar que Hausdorff es el primero en presentarla en el apartado §5. *Punkt und Mengenfolgen*⁶⁷ del capítulo 7 *Punktmengen in allgemeinen Räumen* de su libro *Grundzüge der Mengenlehre*, lo hace en el marco de sus desarrollos entorno a la noción de vecindad, y en este sentido es posible observar que es gracias a que se captura la cercanía en dichos términos que se logra definir la convergencia en estos espacios.

Ahora, si bien la aproximación a la convergencia a través de sucesiones en espacios topológicos permite, de manera análoga que en los espacios métricos, caracterizar punto de adherencia, función continua y espacios de Hausdorff, se tienen algunas limitaciones; en particular, como se presentó previamente, las definiciones de estos conceptos en los espacios métricos se dan a partir de una doble implicación, mientras que, en los espacios topológicos la implicación solo se da en un sentido.⁶⁸

⁶⁷ *Secuencias de puntos y conjuntos.*

⁶⁸ Las demostraciones de estos conceptos se pueden encontrar en el capítulo 5 del texto *Topología general* (2010) de Gustavo Rubiano.

Tabla 5

Caracterización de adherencia, espacio de Hausdorff y continuidad en espacios métricos y topológicos a través de la convergencia de sucesiones

Conceptos en espacios métricos	Conceptos en espacios topológicos
Sea X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que x es un <i>punto adherente</i> a A ($x \in \bar{A}$) <u>si y sólo si</u> existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\{x_n\} \rightarrow x$.	Sea X un espacio, $A \subseteq X$ y $\{x_n\}$ una sucesión en A , así $\{x_n\}$ es una sucesión en X . Si $\{x_n\} \rightarrow x$, <u>entonces</u> $x \in \bar{A}$.
Sea X un espacio métrico. Decimos que X es un <i>espacio de Hausdorff</i> <u>si y sólo si</u> toda sucesión convergente en X converge a un único punto.	Si X es un <i>espacio de Hausdorff</i> , <u>entonces</u> las sucesiones en X tienen a lo más un límite.
Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es <i>continua</i> en $\mathbb{R}$ <u>si y sólo si</u> para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ siempre que $\{x_n\} \rightarrow x$.	Sea $f: X \rightarrow Y$ <i>continua</i> y $\{x_n\}$ una sucesión en X . <u>Entonces</u> $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ siempre que $\{x_n\} \rightarrow x$.

En este punto es preciso mencionar que se requiere tener ciertas condiciones para que los recíprocos de estos conceptos en espacios topológicos se cumplan; en particular se debe garantizar que el espacio sea *primero numerable* o N_1 . Pues, de acuerdo con Rubiano (2010):

La razón por la cual las sucesiones no son adecuadas es que, al tomar un punto x_U por cada vecindad U de x , estamos en general forzados a hacer *un número no contable* de escogencias. Esto no sería necesario si el espacio fuera 1-contable. (p. 85)

Definición: Sea X un espacio. Decimos que X es N_1 si cada $x \in X$ tiene una base de vecindades numerable.

A partir de esta definición se puede demostrar la doble implicación para los conceptos de adherencia, función continua y espacios de Hausdorff, estas demostraciones se pueden

encontrar en el texto *Topology* (1978) de James Dugundji y *Topología general* (2010) de Gustavo Rubiano.⁶⁹

Dada la necesidad de restringir el espacio para mantener la doble implicación en la definición de estos conceptos en espacios topológicos, se puede ver entonces la insuficiencia de trabajar la convergencia en términos de sucesiones en estos espacios; así, para liberarse de estas limitaciones, es posible estudiar la convergencia en espacios abstractos a través del concepto de filtro, lo que permite una mejor caracterización del espacio.

3.2.2 A través de filtros

En este sentido, como se pudo observar en el capítulo anterior, una vez generalizada la idea de sucesión a través del concepto de filtro, se presenta el concepto de límite en los siguientes términos:

Definición: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Decimos que un punto $x \in X$ es punto límite (o simplemente límite) de $\mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro $V(x)$ de las vecindades de x ; entonces también decimos que $\mathcal{F}$ converge a x . Además, se tiene que x es límite de una base de filtro $\mathfrak{B}$ sobre X (o que $\mathfrak{B}$ converge a x) si el filtro de base $\mathfrak{B}$ converge a x .

Así, con esta conceptualización más general de convergencia en espacios topológicos, se logra también una conceptualización más general de la adherencia, la continuidad y espacios de Hausdorff.

⁶⁹ Adherencia: ver teorema 6.2, capítulo X. *Convergence, Topology* (1978)
 Función continua: ver teorema 6.3, capítulo X. *Convergence, Topology* (1978)
 Espacio de Hausdorff: ver proposición 5.13, *Topología general* (2010)

Tabla 6

Caracterización de adherencia, espacio de Hausdorff y continuidad en espacios topológicos a través de la convergencia de filtros

Punto adherente	Espacio de Hausdorff	Función continua
Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$. Entonces $x \in \bar{A}$ <u>si y sólo si</u> existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \rightarrow x$.	Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es un <u>espacio de Hausdorff</u> <u>si y sólo si</u> todo filtro convergente en X converge a un único punto.	Sean X y Y dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. La función f es <u>continua</u> en $x \in X$ <u>si y sólo si</u> $\mathcal{F} \rightarrow x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$ para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X .

A continuación se presentan las demostraciones de las proposiciones presentadas en la tabla 6:

- **Punto adherente:** Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$.

($\rightarrow$) Sea $x \in \bar{A}$ y $\{V \cap A\}_{V \in V_x}$ una base para un filtro $\mathcal{F}^{70}$. Ahora, como $x \in V_x$ se tiene que $x \in V \cap A = A \in \{V \cap A\}_{V \in V_x}$, por tanto, $A \in \mathcal{F}$. Sea $V \in V_x$ entonces $V \cap A \in \{V \cap A\}_{V \in V_x}$, así $V \cap A \in \mathcal{F}$. Como $V \cap A \subseteq V$, por propiedad de filtro $V \in \mathcal{F}$, por tanto $\mathcal{F} \rightarrow x$.

($\leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X que converge a x y contiene a A . Entonces $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, por tanto para toda $V \in \mathcal{V}(x)$ se tiene que $V \in \mathcal{F}$. Además, como $A \in \mathcal{F}$ entonces $V \cap A \in \mathcal{F}$, por lo cual $V \cap A \neq \emptyset$. Así, $x \in \bar{A}$. ■

- **Espacio de Hausdorff:** Sea (X, τ) un espacio topológico.

($\rightarrow$) Sea X un espacio de Hausdorff y $\mathcal{F}$ un filtro en X que converge a dos elementos x y y diferentes. Dado que X es de Hausdorff existen U, V vecindades

⁷⁰ Veamos que $\{V \cap A\}_{V \in V_x}$ es una base para un filtro $\mathcal{F}$.

i) $\{V \cap A\}_{V \in V_x} \neq \emptyset$ porque siempre es posible intersectar el conjunto $A \subseteq X$ con una vecindad V de $x \in X$. De otra parte, como $x \in \bar{A}$ se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$ para toda $V \in V_x$ por tanto $\emptyset \notin \{V \cap A\}_{V \in V_x}$.

ii) Sean $B_1, B_2 \in \{V \cap A\}_{V \in V_x}$, entonces $B_1 = V_1 \cap A$ y $B_2 = V_2 \cap A$ para $V_1, V_2 \in V_x$. Por teoría de conjunto $B_1 \cap B_2 = (V_1 \cap V_2) \cap A$. Como $V_1 \cap V_2 \in V_x$ entonces existe $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

disjuntas de x y y respectivamente, así $U \cap V = \emptyset$; además, por convergencia de $\mathcal{F}$ tenemos que $U, V \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción.

($\leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X que converge a un único punto y X no es de Hausdorff. Entonces existen $x, y \in X$ diferentes, tal que para toda vecindad U y V de x y y respectivamente se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Ahora, como $U(x)$ y $V(y)$ son filtros, se tiene que $\{U \cap V: \text{con } U \in U(x) \text{ y } V \in V(y)\}$ es una base para un filtro $\mathcal{F}$, así, por convergencia de filtros $\mathcal{F} \rightarrow x$ y $\mathcal{F} \rightarrow y$, lo cual es una contradicción. ■

▪ Función continua

($\rightarrow$) Sea f una función continua en x y $\mathcal{F}$ un filtro que converge a x . Se debe probar que $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$, lo cual es equivalente a probar que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{F})$. Sea $V' \in \mathcal{V}(f(x))$ entonces, por definición de continuidad en términos de vecindades,⁷¹ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V) \subseteq V'$. Dado que el filtro $\mathcal{F}$ converge a x y V es vecindad de x , se tiene que $V \in \mathcal{F}$, así $f(V) \in f(\mathcal{F})$. Entonces por propiedad de filtro $V' \in f(\mathcal{F})$, es decir que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{F})$. Por tanto, $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$.

($\leftarrow$) Supóngase que para todo filtro $\mathcal{F}$ que converge a x , se tiene que $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x)$. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{V}(x)$ el cual sabemos que converge a x , entonces $f(\mathcal{V}(x)) \rightarrow f(x)$, es decir, se tiene que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{V}(x))$. Por tanto, para cada vecindad $V' \in \mathcal{V}(f(x))$ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V) \subseteq V'$. Esto significa que f es continua en x . ■

Los resultados presentados anteriormente permiten ver la importancia, en particular, de los procesos de generalización que se realizaron en cuanto al concepto de sucesión en términos de filtro, y en general, de haber capturado una noción de cercanía de una manera más abstracta,

⁷¹ Ver definición en pág. 80.

pues esto permitió la generalización de estos tres conceptos, los cuales son propios de los espacios topológicos.

En estos espacios un concepto importante es el de continuidad, pues la topología se centra en el estudio de las transformaciones continuas, y alrededor de este concepto se han realizado varios aportes, por ejemplo, Bourbaki gracias al desarrollo del concepto de filtro, define continuidad en estos términos como se pudo observar en la tabla 6.

Por otro lado, la continuidad también se ha definido en términos de vecindades, esta fue presentada por Hausdorff de la siguiente manera:

Definición: Sean X, Y espacios topológicos $a \in Z$ y $f: X \rightarrow Y$ una función. La función f es continua en $x = a$ si para toda $U \in V(f(a))$, existe $V \in V(a)$ tal que $f(V) \subseteq U$.

Se puede visualizar la correspondencia que existe entre esta presentación y la definición de continuidad puntual en términos de épsilon y delta (ver página 9), pues todo $U \in V(f(a))$ corresponde en términos de las relaciones con $\forall \varepsilon > 0$ y la existencia de $V \in V(a)$ corresponde con $\exists \delta > 0$.

Hasta este punto se ha podido observar lo que permitió la generalización de sucesiones en relación con la noción de límite, sin embargo, como se ha estudiado, las sucesiones de Cauchy tienen un tratamiento diferente y con su generalización también se obtuvieron algunos resultados importantes en matemáticas, así, con los filtros de Cauchy en el marco de los espacios uniformes, se logró caracterizar los espacios completos como los espacios en los que todo filtro de Cauchy es convergente.

En síntesis, se ha logrado hacer una revisión del impacto que tiene en el concepto de límite, y a su vez en los conceptos de continuidad y completitud, el desarrollo histórico de la *noción de cercanía*, estudiado en el primer y segundo capítulo. En este sentido, se revisó cómo estos conceptos pueden ser interpretados y trabajados a la luz de los distintos desarrollos realizados en el marco de dicha generalización.

3.3 Reflexiones de orden epistemológico en el marco de la formación de profesores

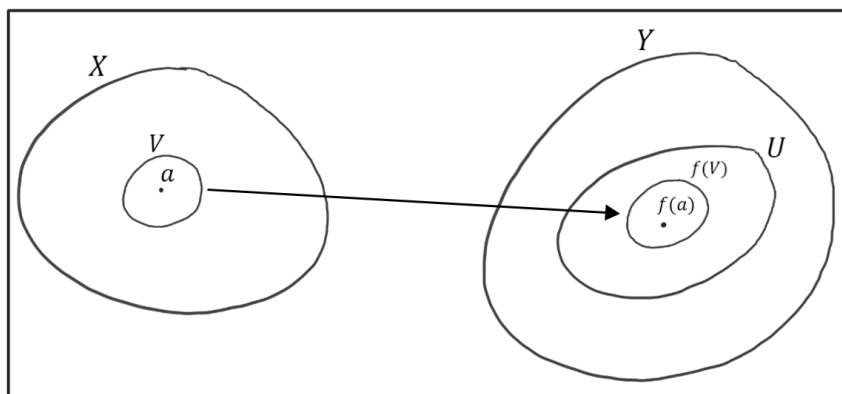
Vale la pena resaltar que, si bien la generalización de los conceptos en matemáticas recoge potencialidades en términos puramente matemáticos (por ejemplo, como se vio, la generalización del concepto de sucesión permitió solventar el problema de la insuficiencia de estas para definir en espacios topológicos ciertos conceptos), también la generalización trae consigo potencialidades que se pueden pensar en el marco de la formación de profesores de matemáticas.

En esta medida, estudiar los conceptos de límite, continuidad y completitud en espacios más generales, permite ver que no necesariamente lo general es más complicado, pues por ejemplo la definición de continuidad estudiada en términos de vecindades y de filtros, se desliga del trabajo con épsilon-delta, y con esto de los cálculos tediosos que se pueden llegar a presentar.

Gráficamente y apelando un poco a la intuición, se puede ver la continuidad puntual de una función en términos de vecindades de la siguiente manera:

Figura 13

Ilustración de la continuidad puntual en términos de vecindades



En este sentido, a diferencia de lo que puede pensarse con las vecindades, las cuales son un concepto más abstracto de cercanía que el de distancia, el trabajo no necesariamente está desligado de la intuición y por tanto, no necesariamente es más complejo comprender o estudiar un concepto, pues como se presentó, la continuidad puntual en términos de vecindades no es más que el verificar que las imágenes de los puntos cercanos a un punto, son cercanos a las imágenes del mismo punto; en otras palabras, la función es continua en a si las imágenes de los puntos *vecinos* de a , son puntos *vecinos* de $f(a)$. Así, aunque esta definición está en términos más abstractos, se puede percibir en su ilustración e interpretación que, al estar libre de cálculos de distancias, la idea de fondo apela a la intuición.

Sin embargo, las ventajas de estudiar en un marco más general las definiciones, no solo se pueden pensar en términos de la posibilidad de tener una perspectiva intuitiva del concepto, también es posible pensarse, por ejemplo, en las potencialidades que permite el tener un panorama general de los mismos. Las definiciones más generales se despojan de elementos particulares, los cuales no definen puramente el concepto, sino que son auxiliares en su presentación; en cambio, mientras se gana generalidad, la definición del concepto se queda con los elementos que son esenciales para caracterizar lo que se está definiendo, en otras palabras, avanzar en generalidad es capturar el concepto de una manera más pura.

En este caso se puede ver, en las distintas definiciones del concepto de continuidad, que la cercanía es uno de esos elementos esenciales al que recurren, pues independientemente de que se haga con ϵ y δ en espacios menos generales o el que se defina en espacios topológicos con vecindades, siempre se establece que, existirá la continuidad en el punto si los demás puntos de la función son infinitamente *cercanos* a este.

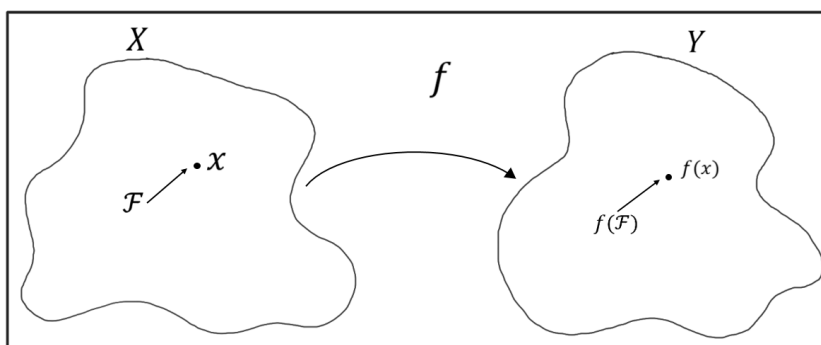
Ahora, en el marco de la formación docente, es trascendental que un profesor que está comprendiendo estos conceptos, pueda desligarse de los elementos que acompañan la definición y quedarse con esos que son intrínsecamente característicos de la misma, pues esto

puede producir en el futuro maestro de matemáticas, una comprensión más completa, global, abstracta y esencial del concepto, a diferencia de cuando este se queda solamente en la comprensión del mismo en un espacio menos general, como lo es el métrico por ejemplo. No quiere decir que el docente se deba quedar con esa conceptualización más general y no estudiar las particularidades, mucho menos se está diciendo que este deba llevar estas reflexiones al aula, lo que sí se está afirmando, es la necesidad de que un docente en formación construya una perspectiva más completa del objeto matemático que trabajará en sus futuras prácticas educativas.

En esta misma línea, se encuentra la definición de continuidad puntual en términos de filtros, en la cual se tiene que, si el filtro converge a un punto x en el espacio de partida, entonces en el espacio de llegada las imágenes del filtro convergen a la imagen de ese punto, gráficamente se puede bosquejar así:

Figura 14

Ilustración de la continuidad puntual en términos de filtros



Como ya se ha mencionado, al ser esta otra presentación abstracta del concepto, la continuidad en términos filtros se queda con los elementos centrales; en este caso, se puede ver el protagonismo de la noción de convergencia de filtros, la cual como se estudió en el capítulo anterior, captura la cercanía cuando se trabaja con estos en espacios topológicos. En este sentido, la presente caracterización de la continuidad se puede interpretar como que, siempre que los elementos del filtro sean cercanos a un punto, las imágenes de esos elementos deben

ser cercanas a la imagen del punto, para que la función sea continua en este. Así, de la misma manera que se da en la presentación de continuidad en términos de vecindades, en esta presentación, la cercanía es un elemento intrínseco.

Además, en el marco de estas ideas, se puede mencionar que esa noción de cercanía que se está retomando en la presentación del concepto de continuidad puntual, en esencia está dada a través de la idea de límite, lo cual permite destacar que este concepto es un elemento constitutivo del concepto de continuidad y esto se hace explícito, sobre todo, en estas definiciones en términos generales. Estas ideas son supremamente valiosas en términos de la formación de profesores, pues la continuidad puntual es un concepto que es importante trabajar en la escolaridad, y por ende, cabe ahondar en sus elementos epistemológicos.

Por lo general, la presentación que se hace de esta continuidad a un nivel básico, se trabaja en términos de que una función es continua en un punto, si la imagen del punto es igual al límite de la función en el mismo punto; así, teniendo en cuenta las reflexiones anteriormente presentadas sobre las potencialidades que tiene estudiar los conceptos en su forma más abstracta, si un docente tiene la oportunidad de estudiar el concepto de continuidad en espacios generales, nos atrevemos a decir que le permitirá tener una conciencia mayor del concepto de continuidad, más allá del simple algoritmo que permite reconocer si una función es continua, y esa misma comprensión profunda del concepto incidirá directamente en sus prácticas educativas, pues le dará un mejor dominio, por lo menos en términos conceptuales, de la presentación que haga del objeto matemático en su clase y a las mismas orientaciones en la construcción del conocimiento de los estudiantes.

Ahora, de manera análoga al análisis que se puede realizar de la continuidad en espacios generales, en relación con sus potencialidades para el desarrollo mismo de las matemáticas y la formación de profesores de matemáticas, se podría realizar para el concepto de límite; este concepto, como se ha mostrado a lo largo del trabajo, ha tenido algunas transformaciones y

desarrollos en estos espacios generales, lo cual deja ver que es posible trabajar con los límites a partir de sucesiones, filtros o que incluso es posible tener una reinterpretación de la definición usual de este en términos de vecindades, en la cual de manera similar a como sucede con la continuidad, es posible liberarse de los cálculos tediosos con ϵ y δ .

Adicionalmente, a propósito de que se centra la atención sobre los conceptos de límite y continuidad, otra reflexión que vale la pena suscitar en el marco de la formación de profesores de matemáticas, es la del problema de la completitud, pues esta propiedad está ligada a la convergencia de las sucesiones fundamentales, y por lo tanto a la noción de *cercanía*.

Es posible ver que la completitud no se verifica en los números racionales $\mathbb{Q}$, pues esta propiedad es característica de los números reales $\mathbb{R}$, a pesar de esto, en la escuela se trabaja una caracterización del conjunto de los números reales muy superficial, pues se queda en el mero trabajo con las propiedades de $\mathbb{R}$, las cuales son heredadas de $\mathbb{Q}$; en este sentido no hay una diferenciación conceptual sustancial entre ambos conjuntos numéricos, y teniendo esto en cuenta, no hay una conceptualización completa, veraz y más apropiada de los números reales.

Ahora, aunque el propósito de esta reflexión no es realizar una crítica de orden curricular, pues no se está diciendo que en los colegios la presentación del conjunto de los números reales debería hacerse de una manera formal y rigurosa, sí se reitera la necesidad de que un profesor de matemáticas sepa matemáticas, en este sentido, que tenga una comprensión amplia de los objetos matemáticos con los que a diario va a trabajar, que pueda comprender que la característica principal de los números reales es que son un conjunto completo, y que por esto, conceptos como el de límite y convergencia están en la base de su construcción, que sepa que la propiedad de la completitud recurre necesariamente a la noción de *cercanía*, pues estudia lo que sucede en el límite de un punto; en síntesis, es preciso que el futuro docente de matemáticas logre construir todos los distintos matices que intervengan en la definición de los conceptos.

Finalmente, si bien es posible identificar en el trabajo con estos conceptos en espacios abstractos las potencialidades antes mencionadas, también es pertinente mencionar algunos aspectos que no resultan tan beneficiosos, pues no significar que el estudiar los conceptos matemáticos en espacios generales sea simple y se produzca de manera natural, para lograr hacer el trabajo en estos espacios, se requiere de un nivel mayor de abstracción y la comprensión de otros conceptos asociados, por ejemplo, para poder trabajar con la definición de continuidad en términos generales, se requiere o bien estudiar la idea de vecindad o los desarrollos ligados al concepto de filtro, y este camino no es precisamente el más corto o simple.

4. Conclusiones

A modo de cierre, cabe suscitar algunos comentarios generales que permiten visualizar los distintos resultados que se obtuvieron a lo largo del presente estudio histórico. Por un lado, este trabajo permitió evidenciar el rol que tuvo el caracterizar una noción de cercanía en la conceptualización de los distintos espacios abstractos, pues dicha noción posibilitó generalizar una serie de conceptos que se tenían para espacios particulares y desarrollar una nueva disciplina desde una perspectiva en la que todo estaba despojado del trabajo con la medida y el número, la cual posteriormente tomaría el nombre de topología general o topología conjuntista.

En relación con el surgimiento de los primeros espacios abstractos, es posible evidenciar que fue Fréchet el que marcó el camino inicial hacia los propósitos de generalización, al proponer capturar la cercanía a través de las ideas de límite, vecindad y distancia; sin embargo, su presentación de estos primeros espacios continúa siendo limitada, pues está ligada a algún tipo de objeto particular, como funciones o números reales. Es hasta que se presenta una definición conjuntista de las vecindades, como lo hace Hausdorff, que se logra liberar la caracterización de la *cercanía* de objetos particulares, y se entiende la vecindad como el lugar constituido por los puntos cercanos a un punto dado.

El protagonismo de la noción de cercanía en la conceptualización de espacios abstractos, no solo se da en el surgimiento de los primeros, sino también en el desarrollo de los mismos, por ejemplo con las vecindades ya se tenían caracterizados los espacios topológicos, sin embargo, Bourbaki desarrolló toda una teoría sobre filtros en la que capturó la cercanía a través de la convergencia de filtros, y con esto permitió seguir estudiando estos mismos espacios abstractos desde un nuevo lugar y a partir de otros conceptos. Además, en el desarrollo de nuevos espacios abstractos la cercanía también juega un papel fundamental, por ejemplo, en la caracterización de los espacios uniformes, fue preciso también capturar una cercanía, que en su estructura no necesitara de un referente para hablar de lo cercano, sino que esta se diera entre

dos elementos cualesquiera; así, es posible afirmar que capturar una noción de cercanía en términos generales es fundamental para el desarrollo de todos los elementos teóricos de los diferentes espacios abstractos en particular y de las matemáticas en general.

De todo lo anterior, posible afirmar que Fréchet marcó la pauta del camino hacia la generalización, pues como se pudo estudiar, por un lado Hausdorff elabora la idea de vecindad que ya Fréchet había presentado, en otros términos, en su clase (V) , y a partir de esto desarrolla la teoría que lo conduce a hablar de espacio topológico; por otro lado, con las redes y filtros se logra generalizar las ideas asociadas a la convergencia de sucesiones, concepto que Fréchet propuso al definir la clase (L) ; finalmente, con los espacios uniformes de Bourbaki se generalizan los espacios métricos o la denominada clase (E) en Fréchet. Además, como se logró visualizar, capturar la noción de cercanía en los espacios abstractos a través de estos diferentes conceptos, permitió que se obtuvieran distintos enfoques teóricos que hoy son muy potentes.

Finalmente, vemos cómo todos estos análisis históricos de la *noción de cercanía* cabe hacerlos presentes en el marco de una reflexión sobre la formación de profesores de matemáticas, pues como se logró visualizar, conceptos como el de límite, continuidad y completitud, por un lado, requieren de una *cercanía* para definirse, y por otro lado, su caracterización general permite reconocer aspectos que son fundamentales cuando se reflexiona sobre los conocimientos que debería poder construir un futuro profesor de matemáticas. En este sentido, los primeros capítulos permitieron reconocer elementos epistemológicos en la caracterización de la cercanía a través de conceptos como vecindades o filtros, y como se reflexionó en el tercer capítulo, el considerar estos elementos en el trabajo con los conceptos de límite, continuidad y completitud, resulta fundamental en el reconocimiento de los elementos constitutivos de estos conceptos.

Referencias bibliográficas

- Anaconda, M., & Ortiz, G. (2011) *La noción de vecindad en la apropiación de los números reales*: Arbeláez, G., & Recalde, L. (Eds). Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica (pp. 184-233). Cali: Programa editorial Universidad del Valle.
- Anaconda, M. (2017). *Los números reales en el estructuralismo bourbakista: un análisis histórico-epistemológico con fines educativos*. Tesis de doctorado, Universidad de Cádiz.
- Arboleda, L.C (1980). *Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos*. X Coloquio colombiano de Matemáticas. Sociedad colombiana de Matemáticas. Paipa.
- Arboleda, L. (2017). Introducción de la topología de vecindades en los trabajos de Fréchet y Hausdorff. *La Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 41 (161), 528-537. <https://raccefyn.co/index.php/raccefyn/article/view/510>
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 40-55.
<https://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf>
- Baire, R. (1905). Les fonctions de n variables. *Leçon sur les fonctions discontinues*. (pp.99-127) <https://archive.org/details/leconsdiscontinues00bairrich/page/n3/mode/2up?view=theater>

Bourbaki , N. (1938) “Topologie: Structures topologiques/uniformes (état 2)”. Archives

Bourbaki, R021_iecnr024. Disponible en <http://purl.oclc.org/net/archives-bourbaki/646>

Bourbaki, N. (1965). Topologie générale. *Éléments de Mathématique*. Livre III. Hermann. Paris.

Bourbaki, N. (1974). *Éléments d’histoire des mathématiques*. Hermann. Paris.

<https://archive.org/details/elementsdhistoir0000bour/page/180/mode/2up>

Cartan, H. (1937). Théorie des filtres. *Comptes-rendus de l’Académie des Sciences de Paris*. No. 205, pp. 595–598.

Cartan, H. (1943). Sur le fondement logique des mathématiques. *Revue Scientifique*, 81, 3-11.

Choquet, G. (1948). *Convergences*. Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.), 23, 57– 112.

Cochran, A. (1966), *On uniform convergence structures and convergence spaces*. [Tesis de doctorado, The university of Oklahoma].

<https://core.ac.uk/download/pdf/215275702.pdf>

Clark, P. (2016). Convergence. <https://www.mimuw.edu.pl/~mis/AF2/convergence.pdf>

Cullinane, M. (1997). *Contributions to the theory of neighborhoods and its applications*

[Tesis de doctorado, University of New Hampshire].

<https://scholars.unh.edu/dissertation/1942>

Dugac, P. (1984). Histoire des espaces complets. *Revue d'histoire des sciences*. Tome 37,

No. 1, pp. 3-28

Dugundji, J. (1978). *Topology*. Allyn y Bacon, Inc.

<https://archive.org/details/topologydugundji/page/n3/mode/2up>

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo*

Matematico di Palermo, 22, 1-74.

Guacaneme, E., & Mora, L. (2012). *La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación*. *Revista Papeles*, 4 (7), 102-109.

<https://core.ac.uk/download/pdf/236383841.pdf>

Guacaneme, E., (2018, mayo 9-10-11). *La Historia de las Matemáticas como vector en la formación de profesores de Matemáticas* [Ponencia]. XIV Coloquio Regional de Matemáticas y IV Simposio de Estadística, Pasto, Colombia.

<http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/4602>

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre* (2ª ed.). Leipzig: Veit & Company.

<https://archive.org/details/grundzgedermen00hausuoft>

Hilbert, D. (1903) *Grundlagen der geometrie* (7ª ed.). Leipzig: B. G. Teubner.

<https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich/page/n9/mode/2up>

Rico, L., Gil, F. (2003). *Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de matemáticas*, 21 (1), 27-47.

<https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21885/21719>

Rodriguez, L. (2014). Frigyes Riesz and the emergence of general topology: The roots of ‘topological space’ in geometry. *Arch. Hist. Exact Sci.* 69, 55–102.

<https://doi.org/10.1007/s00407-014-0144-6>

Root, R. (2014). Iterated limits in general analysis, *Amer. J. Math.* 36 (1), 79-104.

Rubiano, G. (2010). *Topologia General*. Editorial UN. <https://guillermo-math.weebly.com/uploads/3/8/7/1/38718555/topologia-texto.pdf>

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14. <https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf>

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, 82, 44- 49. 1978.

Willard, S. (2004). Convergence. En L. Loomis (Ed.), *General topology*. Addison-Wesley series in mathematics.