

Métricas conformes en superficies compactas con frontera

Gonzalo García

Oscar Andrés Montaña

Resumen

Sea (S, g) una superficie Riemanniana compacta con frontera. En este trabajo discutimos el problema de la curvatura gaussiana y la curvatura geodésica prescritas sobre S y su frontera ∂S , respectivamente. Si la característica de Euler $\chi(S)$ de S es no positiva, encontramos condiciones sobre las funciones $\tilde{k}$ definida sobre S y $\tilde{h}$ definida sobre ∂S para que exista una métrica $\tilde{g}$, conforme a la métrica g , con curvatura de Gauss $\tilde{k}$ sobre S y curvatura geodésica $\tilde{h}$ sobre la frontera de S .

Palabras y frases claves: Superficie riemanniana compacta con frontera, curvatura gaussiana y curvatura geodésica, métrica conforme.

1 Introducción

Consideremos una superficie riemanniana compacta (S, g) con frontera suave ∂S tal que la curvatura gaussiana sobre S es k y la curvatura geodésica sobre ∂S es h . Un problema interesante de geometría diferencial consiste en caracterizar las parejas de funciones $\tilde{k}$ definida sobre S y $\tilde{h}$ definida sobre ∂S para las cuales existe una métrica $\tilde{g}$ conforme a la métrica g ($\tilde{g} = e^{2u}g$ para alguna función $u \in C^\infty(S)$) con curvatura gaussiana prescrita $\tilde{k}$ definida sobre S y curvatura geodésica prescrita $\tilde{h}$ definida sobre ∂S .

Observamos que la existencia de $\tilde{g}$, dadas las funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$, es equivalente a mostrar la existencia de una función $u \in C^\infty(S)$ que satisfaga el problema siguiente.

$$\begin{cases} \Delta u - k + \tilde{k}e^{2u} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + h = \tilde{h}e^u & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (1)$$

donde $\tilde{g} = e^{2u}g$.

La primera ecuación nos dice que la curvatura gaussiana de S con la métrica $\tilde{g}$ es $k_{\tilde{g}} = \tilde{k}$, y la segunda ecuación nos dice que la curvatura geodésica de la frontera ∂S con la métrica $\tilde{g}$ es $h_{\tilde{g}} = \tilde{h}$.

Para que la ecuación (1) tenga solución, las funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ deben satisfacer la condición de Gauss-Bonnet

$$\int_S \tilde{k}(x) e^{2u} dv + \int_{\partial S} \tilde{h}(x) e^u d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

donde $\chi(S)$ es la característica de Euler de la superficie S .

En el caso de superficies con característica de Euler positiva se han encontrado otras obstrucciones para la solución del problema (1). Si S es el disco unitario B^2 , y las funciones x_i , $i=1,2$ son las restricciones de las dos primeras funciones coordenadas a la esfera S^2 , Hamza [7] demostró que si el problema (1) tiene solución entonces la condición integral siguiente es válida:

$$\int_{B^2} \frac{(1 + |y|^2)^2}{4} e^{2u} \nabla(x_{i0}\tau) \cdot \nabla k dv_{g_0} + 2 \int_{\partial B^2} e^u \nabla x_i \cdot \nabla h d\sigma_{g_0} = 0, \quad (2)$$

donde τ es la inversa de la proyección estereográfica con polo en $s = (0, 0, -1)$. Mas aún, Escudero y García encontraron en [5] una familia de parejas de funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ que satisfacen esta condición integral y que no son curvatura gaussiana o curvatura geodésica, respectivamente, de una métrica g conforme a la métrica usual del disco unitario. Aunque en este caso varios autores (Ver [1], [8], [10]) han encontrado condiciones suficientes sobre las funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ para la existencia de $\tilde{g}$, aún existe un gran salto entre las condiciones suficientes y las condiciones necesarias.

El caso de superficies con frontera y característica de Euler no positiva es más claro. Cherrier en [2] encontró condiciones generales sobre la superficie S , y las funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ para la existencia de la métrica $\tilde{g}$. En efecto, si k es la curvatura gaussiana de S y h es la curvatura geodésica de ∂S , respecto de la métrica g , si al menos una de las funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ es no nula, y f es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta f = k & \text{en } S \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = -h & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (3)$$

Cherrier encontró el resultado siguiente para superficies de característica de Euler cero.

Teorema 1.1. Sean $\int_S k(x) dv = 0$ y $\int_{\partial S} h(x) d\sigma = 0$ y f la solución de (3).

1. Si $\tilde{k} \equiv 0$ el problema (1) tiene una solución suave si y sólo si $\tilde{h}$ cambia de signo y satisface $\int_{\partial S} \tilde{h} e^f ds < 0$.

2. Si $\tilde{h} \equiv 0$ el problema (1) tiene una solución suave si y sólo si $\tilde{k}$ cambia de signo y satisface $\int_S \tilde{k} e^{2f} dv < 0$.

En el caso de superficies con característica de Euler negativa, Cherrier demostró el teorema siguiente.

Teorema 1.2. Supongamos que $\int_S k(x) dv \leq 0$, $\int_{\partial S} h(x) d\sigma \leq 0$, y al menos una de ellas distinta de cero. Si $\tilde{k}$, $\tilde{h}$ son ambas no idénticamente cero y no positivas, entonces el problema (1) tiene una solución suave u .

El propósito del presente trabajo es señalar que las hipótesis sobre cada una de las integrales $\int_S k(x) dv$ y $\int_S h(x) dv$ se pueden debilitar y reemplazar por hipótesis sobre la característica de Euler de la superficie. Nuestros resultados que aparecerán en la Sección 3 son los siguientes:

Teorema 3.1 Supongamos que $\chi(S) < 0$. Si $\tilde{k} \leq 0$, $\tilde{h} \leq 0$ y una de las dos no es idénticamente cero entonces el problema (1) tiene una solución suave u .

Teorema 3.2 Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{h} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones

- i. $\tilde{k} \equiv 0$.
- ii. $\tilde{k}$ cambia de signo y satisface $\int_S \tilde{k} e^{2f} dv < 0$.

Teorema 3.3 Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{k} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones

- i. $\tilde{h} \equiv 0$.
- ii. $\tilde{h}$ cambia de signo y satisface $\int_{\partial S} \tilde{h} e^f ds < 0$.

Este artículo está organizado como sigue. En la segunda sección enunciamos algunos resultados debidos a Cherrier los cuales son básicos en geometría diferencial y ecuaciones diferenciales parciales elípticas, y fundamentales en el presente trabajo. La tercera sección está dedicada a la demostración de los resultados de existencia de soluciones del problema (1).

2 Preliminares

En esta sección presentamos en su orden un refinamiento de Cherrier de una desigualdad clásica de Trudinger, el teorema de regularidad de

Cherrier, y el principio de sub y super soluciones. La demostración del primer teorema aparece en [3], el teorema de regularidad en [2], y el principio de sub y super soluciones se puede consultar tanto en [2] como en [4].

Teorema 2.1. Sea (S, g) una variedad riemanniana, compacta, suave, con frontera ∂S suave. Para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $C(\varepsilon)$ tal que, si $\phi \in H_1$, se tiene:

$$\int_S e^\phi dv \leq C(\varepsilon) \exp \left(\frac{1+\varepsilon}{8\pi} \|\nabla \phi\|_2^2 + M(\phi) \right)$$

y

$$\int_{\partial S} e^\phi dv \leq C(\varepsilon) \exp \left(\frac{1+\varepsilon}{4\pi} \|\nabla \phi\|_2^2 + M(\phi) \right),$$

donde $M(\phi)$ designa indiferentemente la media de ϕ sobre S o sobre ∂S .

Definición 2.1. Sea (S, g) una variedad riemanniana, compacta, suave, con frontera ∂S suave. Sean $h \in C^\infty(R \times S)$, $r \in C^\infty(R \times \partial S)$ y $\phi \in L_1^2(S)$. Diremos que ϕ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta \phi + h(\phi, x) = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + r(\phi, y) = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (4)$$

Si existe un real $q > 1$ tal que $h(\phi, x) \in L^q(S)$, $r(\phi, y) \in L^q(\partial S)$ y para todo $\xi \in L_1^2(S)$

$$\int_S (-\nabla \phi \cdot \nabla \xi + h(\phi, x)\xi) dv(x) + \int_{\partial S} r(\phi, y)\xi ds(y) = 0.$$

Teorema 2.2. Sea (S, g) una variedad riemanniana, compacta, suave, con frontera ∂S suave. Si $\phi \in L_1^2(S)$ es una solución débil del problema (4) entonces es una solución suave.

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(x, u) = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + g(x, u) = 0 & \text{sobre } \partial S \end{cases} \quad (5)$$

Definición 2.2. Diremos que $\bar{u} \in C^2(S)$ es una super-solución del problema (5) si

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + f(x, \bar{u}) \leq 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + g(x, \bar{u}) \geq 0 & \text{sobre } \partial S. \end{cases} \quad (6)$$

Si $\underline{u} \in C^2(S)$ satisface las desigualdades opuestas, diremos que es una subsolución de (5).

Teorema 2.3. Sea $f \in C^\infty(S \times R)$ y $g \in C^\infty(\partial S \times R)$. Si existe una super-solución $\bar{u}$ y una sub-solución $\underline{u}$ del problema (5), con $\underline{u} \leq \bar{u}$, entonces existe una solución suave de (5) tal que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

3 Existencia de métricas conformes

Aunque el problema (1) no ha sido completamente resuelto, entendemos relativamente bien el caso de característica de Euler no positiva. De la fórmula de Gauss-Bonnet tenemos que en el caso de característica de Euler negativa una de las funciones $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ tiene que ser negativa en algún punto. Logramos demostrar en este caso(teorema 3.1) que la condición $\tilde{k}$ y $\tilde{h}$ no positivas y al menos una no idénticamente cero es suficiente para resolver el problema (1). El lema siguiente y el principio de sub y supersoluciones son fundamentales para la obtención de este resultado.

Lema 3.1. Sea $2\pi\chi(S) = \int_S kdv + \int_{\partial S} hds < 0$. Si el problema (1) tiene una super-solución $\bar{u} \in C^2(S)$, entonces tiene una solución suave.

Demostración. Supongamos que existe una supersolución suave $\bar{u}$ del problema (1). De acuerdo con el teorema (2.3) basta con encontrar una sub-solución $\underline{u}$ del problema (1) con $\underline{u} \leq \bar{u}$. Sea ϕ una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = k - \frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} & \text{en } S \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = -h + \frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (7)$$

donde $v_1 = \int_S dv$ y $v_2 = \int_{\partial S} ds$.

Sea $\underline{u} = \phi - c$, donde c es un número positivo. Escogiendo c suficientemente grande tenemos

$$\Delta\underline{u} - k + \tilde{k}e^{2\underline{u}} = -\frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} + \tilde{k}e^{2(\phi-c)} > 0,$$

$$\frac{\partial\underline{u}}{\partial\eta} + h - \tilde{h}e^{\underline{u}} = \frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} - \tilde{h}e^{\phi-c} < 0,$$

y $\underline{u} \leq \bar{u}$. Esto concluye la demostración del lema. $\square$

Teorema 3.1. Supongamos que $\chi(S) < 0$. Si $\tilde{k} \leq 0$, $\tilde{h} \leq 0$ y una de las dos no es idénticamente cero entonces el problema (1) tiene una solución suave u .

Demostración. En virtud del lema anterior, necesitamos solamente encontrar una super solución de (1). Sea $\bar{u} = a\phi + b$, donde a y b son constantes positivas y ϕ es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = R_0 - \tilde{k} & \text{en } S \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = -R_0 + \tilde{h} & \text{sobre } \partial S, \end{cases}$$

donde $R_0 = \frac{\int_S \tilde{k} dv + \int_{\partial S} \tilde{h} ds}{v_1 + v_2}$.

Sea $a > 0$ tal que

$$\begin{aligned} aR_0 &< k && \text{para todo } x \in S \\ aR_0 &< h && \text{para todo } x \in \partial S \end{aligned}$$

Dado a , tomemos b tal que

$$\begin{aligned} e^{2(a\phi+b)} - a &> 0 && y \\ e^{(a\phi+b)} - a &> 0. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta\bar{u} - k + \tilde{k}e^{2\bar{u}} &= (aR_0 - k) + \tilde{k}(e^{2(a\phi+b)} - a) < 0 && y \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta} + h - \tilde{h}e^{\bar{u}} &= (-aR_0 + h) + \tilde{h}(a - e^{a\phi+b}) > 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\bar{u}$ es una super-solución, lo cual concluye la demostración del teorema. $\square$

Ahora discutimos el caso de característica de Euler cero. Bajo la suposición de que una de las dos funciones $\tilde{k}$ ó $\tilde{h}$ es idénticamente cero, tenemos condiciones necesarias y suficientes (teoremas 3.2 y 3.3) para la solución del problema (1).

Teorema 3.2. Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{h} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones

- i. $\tilde{k} \equiv 0$.
- ii. $\tilde{k}$ cambia de signo y satisface $\int_S \tilde{k} e^{2f} dv < 0$.

Demostración. Supongamos primero que u es una solución suave de (1), y demostremos la validez de las condiciones i) y ii) del teorema. Sea f una solución de (3). Si $v = u - f$, entonces v satisface el problema

$$\begin{cases} \Delta v + \tilde{k}e^{2v+2f} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial v}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (8)$$

y por lo tanto $\tilde{k}e^{2f} = -e^{-2v}\Delta v$. Integrando la igualdad anterior, usando la identidad de Green y el hecho que v satisface el problema (8) encontramos que

$$\int_S \tilde{k}e^{2f} dv = - \int_S e^{-2v} \Delta v dv = -2 \int_S e^{-2v} |\nabla v|^2 dv \leq 0.$$

Si la integral es igual a cero, se sigue que $|\nabla v| = 0$ lo cual implica que $\tilde{k}e^{2v+2f} = 0$, y por lo tanto $\tilde{k} \equiv 0$. De otro lado, si la integral es estrictamente menor que cero, como $\chi(S) = 0 = \int_S \tilde{k}e^{2u} dv$ entonces $\tilde{k}$ tiene que cambiar de signo.

Demostremos ahora que cada una de las condiciones i) y ii) es suficiente para la existencia de una solución suave del problema (1). Si $\tilde{k} \equiv 0$ entonces la función f es una solución del problema (1). Supongamos entonces que la función $\tilde{k}$ es no nula. Consideremos el conjunto

$$M = \{u \in L_1^2(S) : \int_S u dv = 0, \int_S \tilde{k}e^{2u+2f} dv = 0\}.$$

Puesto que $\tilde{k}$ cambia de signo, el conjunto M es un subconjunto no vacío de $L_1^2(S)$. Consideremos el problema de minimización de la funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_S |\nabla u|^2 dv.$$

sobre el conjunto M . Supongamos que existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u)$. Por la teoría de los multiplicadores de Lagrange existen constantes α y β tales que

$$\int_S \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dv = \alpha \int_S \phi dv + \beta \int_S \tilde{k}e^{2u_0+2f} \phi dv \quad \text{para toda } \phi \in L_1^2(S).$$

Tomando $\phi \equiv 1$ en la igualdad anterior tenemos que

$$\alpha \int_S dv = -\beta \int_S \tilde{k}e^{2u_0+2f} dv = 0,$$

dado que $u_0 \in M$. Por lo tanto $\alpha = 0$ y

$$\int_S \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dv = \beta \int_S \tilde{k}e^{2u_0+2f} \phi dv \quad \text{para toda } \phi \in L_1^2(S),$$

es decir u_0 es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta u_0 + \beta \tilde{k}e^{2u_0+2f} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial S. \end{cases} \quad (9)$$

La primera desigualdad del teorema (2.1) implica que $e^{u_0} \in L^p(S)$ para todo $p \geq 1$. Se sigue del teorema de regularidad de Cherrier (2.2) que u_0 es una solución suave de (9). Por consiguiente $\beta \tilde{k} e^{2f} = -e^{-2u_0} \Delta u_0$. Integrando esta última igualdad, usando la identidad de Green, y el hecho que $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$, obtenemos que

$$\beta \int_S \tilde{k} e^{2f} dv = - \int_S e^{-2u_0} \Delta u_0 dv = -2 \int_S e^{-2u_0} |\nabla u_0|^2 dv < 0.$$

Esta desigualdad, y el hecho que $\int_S \tilde{k} e^{2f} dv < 0$, implican que $\beta > 0$.

Definamos ahora la función $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} \log \beta$. Entonces v_0 es una solución suave del problema

$$\begin{cases} \Delta v + \tilde{k} e^{2v+2f} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (10)$$

y por lo tanto $u = v_0 + f$ es una solución suave de (1).

A continuación demostraremos la existencia de u_0 . Sea $\{u_i\} \subset M$ una sucesión minimizante, esto es $J(u_i) \rightarrow c_0 = \inf_{u \in M} J(u)$. Puesto que $\int_S u_i dv = 0$, la desigualdad de Poincaré implica que $\|u_i\|_2^2 \leq c J(u_i)$. Así $\{u_i\}$ es acotada en $L_1^2(S)$, y por lo tanto existe una subsucesión, que denotaremos también por $\{u_i\}$, que converge debilmente a $u_0 \in L_1^2(S)$ y fuertemente en $L^p(S)$. Por la semicontinuidad débil inferior de $J(u)$ (Ver [6]), $J(u_0) \leq c_0$. En lo que sigue mostraremos que $u_0 \in M$. De la convergencia débil de $\{u_i\}$ se deduce que $\int u_0 dv = 0$. Reemplazando ϕ por $p\phi$ en la primera desigualdad del teorema (2.1), observamos que si $\phi \in L_1^2(S)$ entonces $e^\phi \in L^p(S)$. En particular tenemos que e^{u_i} y e^{u_0} son acotadas en $L^p(S)$. Por lo tanto la desigualdad de Hölder, la convergencia fuerte de u_i en L^p , y la primera desigualdad del teorema (2.1) implican que la integral

$$\begin{aligned} \int_S \tilde{k} e^{2f} (e^{2u_i} - e^{2u_0}) dv &= \int_S \tilde{k} e^{2f} \int_0^1 \frac{d}{dt} e^{2u_0+2t(u_i-u_0)} dt dv \\ &= 2 \int_0^1 \int_S \tilde{k} e^{2f} e^{2u_0+2t(u_i-u_0)} (u_i - u_0) dv dt. \end{aligned}$$

tiende a cero cuando $i \rightarrow \infty$. Así

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_S \tilde{k} e^{2u_i+2f} dv = \int_S \tilde{k} e^{2u_0+2f} dv = 0.$$

Se sigue de esta igualdad junto con $\int u_0 dv = 0$ que $u_0 \in M$. De la definición de c_0 también tenemos $J(u_0) \geq c_0$, y por lo tanto $J(u_0) = c_0$.

Como se explicó en el párrafo anterior, esto implica que el problema (1) tiene una solución suave. $\square$

Teorema 3.3. Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{k} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones

- i. $\tilde{h} \equiv 0$.
- ii. $\tilde{h}$ cambia de signo y satisface $\int_{\partial S} \tilde{h} e^f d\mathbf{s} < 0$.

Demostración. Supongamos primero que u es una solución suave de (1), y demostremos la validéz de las condiciones i) y ii) del teorema. Sea f una solución de (3). Si $v = u - f$, entonces v satisface el problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{h} e^{v+f} & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (11)$$

y por lo tanto $\tilde{h} e^f = e^{-v} \frac{\partial v}{\partial \eta}$. Integrando la igualdad anterior, usando la identidad de Green y el hecho que v satisface el problema (11) encontramos que

$$\int_{\partial S} \tilde{h} e^f d\mathbf{s} = - \int_S e^{-v} |\nabla v|^2 d\mathbf{v} \leq 0.$$

Si la integral es igual a cero, se sigue que $|\nabla v| = 0$ en S , de donde tenemos que $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ en ∂S , lo cual junto con (11) implican $\tilde{h} \equiv 0$. De otro lado, si la integral es estrictamente menor que cero, como $\chi(S) = 0 = \int_{\partial S} \tilde{h} e^{2u} d\mathbf{s}$, entonces $\tilde{h}$ tiene que cambiar de signo.

Demostremos ahora que cada una de las condiciones i) y ii) es suficiente para la existencia de una solución suave del problema (1). Si $\tilde{h} \equiv 0$ entonces la función f es una solución del problema (1). Supongamos ahora que $\tilde{h}$ es no nula. Consideremos el conjunto

$$M = \{u \in L_1^2(S) : \int_S u d\mathbf{v} = 0, \int_{\partial S} \tilde{h} e^{u+f} d\mathbf{s} = 0\}.$$

Puesto que $\tilde{h}$ cambia de signo, el conjunto M es un subconjunto no vacío de $L_1^2(S)$.

Consideremos el problema de minimización de la funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_S |\nabla u|^2 d\mathbf{v}.$$

sobre el conjunto M . Un razonamiento similar al del teorema anterior, usando la segunda desigualdad del teorema (2.1) en vez de la primera,

demuestra que existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u)$. Por la teoría de los multiplicadores de Lagrange existen constantes α y β tales que u_0 es una solución débil de

$$\begin{cases} \Delta u_0 + \alpha = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} - \beta \tilde{h} e^{u_0+f} = 0 & \text{sobre } \partial S. \end{cases} \quad (12)$$

Lo anterior, unido a que $u_0 \in M$, implican que

$$\int_S \alpha d\mathbf{v} = -\beta \int_{\partial S} \tilde{h} e^{u_0+f} d\mathbf{s} = 0,$$

y $\alpha = 0$. Usando las ecuaciones (12) de nuevo tenemos

$$\beta \int_{\partial S} \tilde{h} e^f d\mathbf{s} = \int_{\partial S} e^{-u_0} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} d\mathbf{s} = - \int_S e^{-u_0} |\nabla u_0|^2 d\mathbf{v} < 0.$$

Puesto que también $\int_{\partial S} \tilde{h} e^f d\mathbf{s} < 0$, entonces $\beta > 0$. Las ecuaciones (3) y (12) implican que $u = u_0 + \log \beta + f$ es solución débil de (1). El teorema de regularidad de Cherrier (2.2) asegura la suavidad de la solución. $\square$

Agradecimientos G. García fué apoyado por la Universidad del Valle, y parcialmente por Colciencias con el proyecto 1106-05-10283, CT-220-2000. Oscar A. Montaña fué apoyado por la Pontificia Universidad Javeriana.

Referencias

- [1] A. Chang y P. Yang, Conformal deformation of metrics on S^2 . *J. Differential Geometry*, 27 (1988), 259-296
- [2] P. Cherrier, Problèmes de Newman non linéaires sur les variétés riemanniennes, *J. Functional Analysis*. 57 (1984), 154-206.
- [3] P. Cherrier, Meilleures constantes dans des inégalités sur les variétés riemanniennes, *C.R.Acad. Sci. Paris Série A* 292 (1981), 235-288.
- [4] J. Escobar, Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary, *Cal. Var.* 4(1996), 559-592.
- [5] C. Escudero y G. García, Una nota sobre la deformación conforme de métricas en la bola euclidiana. Aceptado *Revista Colombiana de Matemáticas*. 2003.
- [6] L. Evans, *Partial Differential Equations*, Vol 19. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1998.

- [7] H. Hamza, Sur les transformations conformes des variétés riemanniennes à bord. *J. functional analysis*. 92,1990, N° 2, 403-447.
- [8] L.Jia-Quan y L. Ping-Li, Nirenberg's problem on the 2-dimensional hemi-sphere, *International Journal of Mathematics*, volume 4, N° 6, 1993, 927-938.
- [9] R. Schoen y S. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press, Boston, 1994.
- [10] L. Yanyan, The Nirenberg problem in a domain with boundary, *Topological methods in nonlinear analysis*, volume 6, 1995, 309-329.

Dirección de los autores: Gonzalo García Universidad del Valle, Cali, Colombia. ggarcia@univalle.edu.co — Oscar Andrés Montaña Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia. omontano@puj.edu.co