



**Una propuesta con Realidad Aumentada sobre el Volumen de Tetraedros usando el
Modelo 5E en Grado Octavo**

Juan Nicolás Peña Ledesma.

William Montero Enríquez.

Facultad de Educación y Pedagogía,

Universidad del Valle – Sede Norte Del Cauca

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santander De Quilichao 2024



**Una propuesta con Realidad Aumentada sobre el Volumen de Tetraedros usando el
Modelo 5E en Grado Octavo.**

Juan Nicolás Peña Ledesma-202057185

William Montero Enríquez-202056712

Proyecto de Grado elaborado como requisito parcial para la obtención del título de
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Msc. DIANA XIMENA ORTIZ COLLAZOS

Directora Trabajo de Grado

Facultad de Educación y Pedagogía,

Universidad del Valle – Sede Norte Del Cauca

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santander De Quilichao 2024

Dedicatoria.

Agradezco primeramente a Dios porque de su mano he logrado salir adelante en cada situación difícil y cada experiencia y aprendizaje me ha hecho crecer como persona y como profesional y hoy me tiene aquí.

A mi madre María Elena Peña, por su apoyo y amor incondicional en cada momento de la vida, porque incluso cuando no había fuerzas ni ánimos, siempre fue mi motivación e inspiración para superarme.

A mi tía Luz Angela Peña, porque siempre ha sido un apoyo fundamental en este proceso y directamente o indirectamente siempre me ha ayudado cuando las cosas no se veían favorables.

A mi novia Valentina Gómez, porque desde que llegó a mi vida se ha convertido en mi compañera y confidente, incluso cuando quise tirar la toalla, no me dejó hacerlo y hoy se reflejan ese esfuerzo.

Juan Nicolás Peña Ledesma.

En primer lugar, expreso mi más profunda gratitud a Dios, fuente de fortaleza y sabiduría, cuyo acompañamiento ha sido fundamental para superar los desafíos que he enfrentado. Cada experiencia adversa, lejos de ser un obstáculo, se convirtió en una oportunidad de crecimiento personal y profesional, permitiéndome desarrollar resiliencia y consolidar los valores que hoy sustentan este logro.

A mi padre, Rubén Montero y mi madre Ermencia Enríquez por ser mi guía, mi ejemplo y mi fortaleza. Su apoyo incondicional y sus enseñanzas han sido el cimiento sobre el cual he construido mi vida, y cada logro mío es también un reflejo de su esfuerzo.

Agradezco a Luisa por su cariño y acompañamiento en proceso, por sus consejos y por ser la persona que me impulso desde el principio.

A mis hermanos, Sharith Johana Montero y Fabio Montero, por estar siempre conmigo y ser mi motivación, su cariño y compañía me han recordado que nunca estoy solo

Cada uno de ustedes ha sido parte fundamental de mi historia, y hoy, al ver los frutos de este esfuerzo, sé que no son solo míos, sino también de quienes siempre creyeron en mí. ¡Gracias por ser mi familia, mi motivación y mi razón para seguir luchando!

William Montero Enriquez

Tabla de contenido

Introducción.....	6
Capítulo I: Aspectos Generales	9
Antecedentes.	9
Problemática.....	11
Planteamiento de los objetivos.	14
Objetivo general.	14
Objetivos específicos.....	14
Justificación.....	15
Capítulo II: Marco Teórico	17
Referente matemático.....	17
Referente curricular	23
Referente cognitivo.	27
Artefacto e Instrumento:.....	28
Esquemas y Técnicas:	28
Génesis Instrumental:	29
Instrumentalización:	30
Instrumentación:	31

Mediación:.....	31
Realidad aumentada	32
Referente didáctico.....	33
Articulaciones teóricas	36
Capítulo III: Metodología.....	39
Enfoque cualitativo	39
Estudio de casos	42
Campo de Trabajo y Contexto de Implementación.....	45
Desarrollo metodológico	46
Capítulo IV. Análisis.....	49
Descripción del Diseño de Tarea considerando el modelo 5E.....	49
Análisis general del diseño e implementación	52
Capítulo V. Conclusiones.....	79
Referencias Bibliográficas.....	87

Índice de Figuras

Figura 1 Pirámides de Guiza	17
Figura 2 Representación del tetraedro.....	19
Figura 3 Elementos del tetraedro	20
Figura 4 Descomposición de cubo en pirámides correspondientes I	21
Figura 5 Descomposición de cubo en pirámides correspondientes II.....	21
Figura 6 Coherencia horizontal	25
Figura 7 Coherencia vertical pensamiento espacial	26
Figura 8 Coherencia vertical pensamiento métrico.....	26
Figura 9 Esquema de Articulación Teórica.....	38
Figura 10 Institución Educativa Villacolombia.....	45
Figura 11 Estructura metodológica	46
Figura 12 Profesor organizando los grupos	52
Figura 13 Pregunta 1, subtarea 1, tarea 1	55
Figura 14 Pregunta 2, subtarea 1, tarea 1	56
Figura 15 Visualización del objeto matemático, subtarea 2	59
Figura 16 Pregunta 1, subtarea 2, tarea 1.....	60
Figura 17 Visualización del objeto matemático.....	61
Figura 18 Pregunta 2, subtarea 2, tarea 1.....	61
Figura 19 Pregunta 3, subtarea 2, tarea 1.....	62
Figura 20 Pregunta 4, subtarea 2, tarea 1.....	63
Figura 21 Pregunta 1, subtarea 3, tarea 1	64
Figura 22 Pregunta 2, subtarea 3, tarea 1.....	65

Figura 23 Pregunta 1, subtarea 1, tarea 2.	66
Figura 24 Pregunta 2, subtarea 1, tarea 2.	67
Figura 25 Pregunta 3, subtarea 1, tarea 2.	68
Figura 26 Pregunta 4, subtarea 1, tarea 2.	69
Figura 27 Pregunta 1, subtarea 2, tarea 2.	70
Figura 28 Visualización de pirámides de 4 y 8 centímetros.	72
Figura 29 Pregunta 1, tarea 3.	73
Figura 30 Pregunta 3, tarea 3	75
Figura 31 Pregunta 4, tarea 3	76
Figura 32 Pregunta 5, tarea 3	77

Lista de tablas

Tabla 1 Características del enfoque cualitativo.....	41
Tabla 2 Instrumentos de recolección.....	48
Tabla 3 Análisis del diseño según los referentes teóricos y los momentos del diseño.....	49

Introducción.

La presente investigación se desarrolla en el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, siguiendo la línea de tecnologías de la información y comunicación (TIC), perteneciente a la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, sede Norte del Cauca.

Primero se realiza una investigación previa que permite definir el problema de investigación el cual pretende abordar el concepto del volumen de las pirámides, específicamente de los tetraedros, mediante el uso de la realidad aumentada, como herramienta de visualización y manipulación de objetos tridimensionales. De esta forma, se plantean una serie de tareas que tienen como objetivo que los estudiantes pasen por diferentes etapas, en las que puedan identificar y manipular los elementos de las figuras, y de esa forma, comprender mejor el concepto de volumen de las mismas.

A continuación, se muestran en brevedad los diferentes apartados que fueron contruidos para el desarrollo de esta investigación: En primera instancia, se encuentran todos aquellos aspectos generales del trabajo, como algunos antecedentes a nivel local, nacional e internacional, que sirvieron como soporte para poder implementar la realidad aumentada en función del aprendizaje del volumen de una manera eficaz. Seguido a esto, se aborda la problemática, donde se identifican algunas dificultades relacionadas con el objeto matemático.

Posteriormente, está la justificación, donde presentan los argumentos que sirven como fundamento para desarrollar la investigación y, finalmente, dentro de estos aspectos generales, se dan a conocer los objetivos; tanto el general como los específicos de esta investigación.

Una vez abordados estos aspectos generales, se procede en segunda instancia a abordar el marco teórico de la investigación, donde se profundiza en los referentes teóricos, los cuales dieron algunas de las directrices para encaminar el desarrollo de este trabajo. Dentro de estos referentes, se encuentra el matemático, donde se define el concepto de volumen, así como su representación gráfica y simbólica, como también los aspectos curriculares, donde se muestra la importancia de utilizar diferentes herramientas y técnicas para el cálculo del volumen, dentro de los parámetros que establece el Ministerio de Educación Nacional de Colombia

Luego, se encuentran los aspectos cognitivos, donde se presenta la Génesis Instrumental de Rabardel (2002), como elemento principal para lograr una integración óptima entre el uso de la realidad aumentada y el proceso aprendizaje de las matemáticas. Y, finalmente, se abordan los aspectos didácticos, donde se hace mención al modelo de instrucción 5E definido por (Ruíz-Martín y Bybee, 2022), el cual define las etapas por las que deberán pasar los estudiantes mediante diferentes ejercicios, para lograr una mejor comprensión del objeto matemático.

En tercera instancia, está la metodología de investigación, la cual pretende dar un enfoque cualitativo a los resultados obtenidos en un estudio de casos, para lograr obtener los datos que serán objeto de análisis, se diseñan una serie de tareas siguiendo el modelo 5E las cuales se logran diseñar luego de una observación detallada del contexto de la institución educativa donde se desarrolla la implementación.

Por último, se presenta un análisis tanto inicial como final. En el inicial se tuvo en cuenta los aspectos matemáticos y curriculares para la creación del diseño de tareas entorno a las características de tetraedro y el cálculo de su volumen mediado por el artefacto Solidos RA, conllevado a la etapa en la que se ejecutó la implementación del del diseño y la recolección de los datos a través de instrumentos como las hojas de trabajo, registros fílmicos y fotográficos; y el

análisis final se dio a través de los datos donde se expone los alcances de los estudiantes a través de la interacción con cada una de las tareas expuestas en el diseño para fomentar el aprendizaje. Posteriormente, se presentan las conclusiones en relación con los aportes de los componentes respecto a las incidencias de propuesta de aprendizaje entorno a las características y cálculo de volumen del tetraedro. Como también las posibles proyecciones a otras investigaciones.

Capítulo I: Aspectos Generales

Antecedentes.

En este apartado se presentan algunos estudios realizados en el campo de la educación matemática, centrándose principalmente en el proceso de aprendizaje del concepto del volumen de una figura geométrica, de manera más exacta en las figuras piramidales de tres y cuatro caras. Todo esto con la intención de integrar el uso de la Realidad Aumentada (RA de aquí en adelante), como herramienta que permite un entendimiento más efectivo de dicho concepto.

Cumpliendo con el objetivo de este proyecto, se decidió estructurar este apartado de antecedentes, de tal forma que se crea una clasificación en tres niveles: local, nacional e internacional. Ubicando en el nivel local, todos aquellos trabajos de grados que se hayan encontrado en la Universidad del Valle y/o en otras universidades del suroccidente colombiano; a nivel nacional, se toman en cuenta algunos trabajos que hayan integrado el uso de la RA para el aprendizaje de objetos matemáticos en Colombia. Finalmente, a nivel internacional, se tomarán aquellos proyectos de grado que cumplan estas características a nivel mundial.

En primer lugar, es pertinente mencionar que en el ámbito local no se han encontrado investigaciones o trabajos de grado relacionados con el uso de la RA en el contexto educativo, lo que convierte a este estudio en una propuesta innovadora y útil, no solo para la Universidad del Valle, sino también para la región del suroccidente colombiano, ya que ofrece la oportunidad de explorar un campo muy versátil que ofrece múltiples ventajas con su uso.

Debido a lo anterior, el presente proyecto se nutre principalmente de los recursos encontrados en los repositorios de universidades y revistas nacionales e internacionales que han demostrado la efectividad de esta tecnología en el aprendizaje de conceptos geométricos.

A nivel nacional, existen múltiples trabajos que han resaltado la utilidad de integrar herramientas tecnológicas dentro del aula de clase para el aprendizaje de conceptos abstractos en matemáticas. En particular, se ha destacado la RA por su capacidad para aportar en la mejora de la comprensión de figuras tridimensionales, al favorecer a la visualización de las mismas y manipulación de sus elementos de manera concreta, lo que contribuye a un aprendizaje más significativo. Este enfoque ha demostrado ser eficaz en varios estudios realizados en el país.

Por ejemplo, Acosta & Flórez (2022), realizaron un estudio en Bogotá donde implementaron una Actividad Tecnológica Escolar (ATE) titulada *"El viaje. Un recorrido tecnológico por la geografía colombiana"*, el cual resalta que utilizando la RA se pueden desarrollar habilidades de pensamiento espacial en estudiantes de secundaria.

También se encuentra el proyecto de maestría de Gaitán Rosas, et al., (2021), titulado *"Modelado 3D y realidad aumentada para la enseñanza de los sólidos geométricos"* donde se resalta no solo *"la importancia de la geometría en la percepción y definición de la realidad, del espacio y de las formas"* (p.10), sino que también se muestra como el uso de la RA generan aprendizajes significativos frente al desarrollo del pensamiento espacial.

Finalmente, a nivel internacional se encontraron trabajos como el de Pulache Panta (2023), titulado: *"Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de segundo grado de secundaria en tareas sobre la pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra"* que da un punto de referencia clara respecto al objeto matemático que será abordado en este proyecto y permite identificar similitudes y diferencias entre dos recursos como GeoGebra y la RA.

En síntesis, las investigaciones revisadas han evidenciado múltiples esfuerzos por integrar recursos digitales en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en lo que respecta al

desarrollo del pensamiento espacial y métrico. Sin embargo, se identifica una limitada exploración en contextos escolares que utilicen tecnologías como la RA para trabajar conceptos específicos como el volumen de cuerpos geométricos, particularmente en niveles de educación básica. Además, en el contexto local se evidencian escasos estudios que articulen este enfoque con las prácticas pedagógicas reales. Por ello, este trabajo busca aportar a dicho campo mediante una propuesta que integre herramientas tecnológicas con un enfoque didáctico estructurado, orientado a mejorar la comprensión de conceptos geométricos claves para el aprendizaje de los estudiantes de grado octavo.

Problemática.

En este apartado, se analizarán las principales dificultades identificadas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, enfocándose en el campo de la geometría. Se presentan problemas generales relacionados con el desarrollo del pensamiento espacial y la representación visual de objetos geométricos, para luego adentrarse en retos más específicos, como la comprensión del volumen de las pirámides. Finalmente, se discutirá el uso de tecnologías, como la RA, como una alternativa para afrontar dichos problemas y mejorar el aprendizaje de conceptos geométricos tridimensionales.

Primero resulta necesario mencionar que el aprendizaje de las matemáticas ha enfrentado diversas dificultades a lo largo del tiempo, y una de las más persistentes es la limitada atención que se le ha dado al desarrollo del pensamiento espacial. Como bien menciona Aramendiz Sanjuan (2022), se ha priorizado el estudio de figuras planas, dejando en segundo plano la geometría del espacio.

Este enfoque ha generado que los estudiantes no logren desarrollar una comprensión profunda de los cuerpos tridimensionales, algo que es esencial para avanzar en la educación

matemática. En consecuencia, las representaciones visuales y el razonamiento geométrico se han visto afectados, dificultando su aplicación en situaciones cotidianas y académicas.

Sumado a esto, Jaramillo Carvajal (2023), señala que los estudiantes presentan problemas al conectar el concepto geométrico con su representación visual. Este distanciamiento entre la teoría y la práctica se hace evidente cuando los estudiantes no reconocen una figura geométrica si no se presenta de la manera estereotipada.

Además, Acosta y Trujillo en (2022), enfatizan que, a pesar de la relación constante que los estudiantes tienen con las dimensiones y el volumen en su vida diaria, estos conceptos no son asimilados de manera efectiva en su formación académica. Los estudiantes interactúan con objetos tridimensionales en su entorno, pero cuando se les presenta el reto de comprender y trabajar con estos conceptos en el aula, surgen dificultades.

Finalmente, el problema se acentúa cuando se aborda un objeto geométrico específico como la pirámide. Según Pulache Panta (2023), muchos estudiantes, desde la educación básica hasta niveles superiores, encuentran dificultades al trabajar con actividades que involucran el volumen y la forma de las pirámides. La deconstrucción visual de estos sólidos y su interpretación geométrica son retos que no solo afectan a los estudiantes, sino también a los futuros profesores, lo que evidencia la necesidad de encontrar nuevas estrategias para enseñar estos conceptos.

Por ejemplo, un estudio de Battista (2007), encontró que algunos estudiantes carecen de la habilidad para visualizar objetos tridimensionales y sus relaciones espaciales, lo que dificulta la comprensión de propiedades geométricas clave, como el volumen. Además, Clements y Sarama (2011), señalan que la falta de interacción con modelos tridimensionales concretos limita el

desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de primaria y secundaria, lo que genera dificultades en la aplicación de conceptos geométricos.

En este contexto, el uso de las TIC, y en particular la RA, surge como una alternativa prometedora para mejorar el proceso de aprendizaje de los conceptos de pirámides y su volumen. Al integrar la RA en el proceso educativo, no solo se responde a la necesidad de hacer más accesible el aprendizaje de conceptos como el volumen de las pirámides, sino que también se logra un aprendizaje más conectado con la realidad y el entorno cotidiano de los estudiantes.

La integración de la aplicación Sólidos RA presenta al estudiante una herramienta innovadora y efectiva para abordar las dificultades previamente mencionadas en el aprendizaje de la geometría, específicamente en la comprensión del volumen de las pirámides. Principalmente porque permite que los estudiantes interactúen con modelos tridimensionales en un entorno virtual, donde RA transforma la manera en que se comprenden los conceptos geométricos.

A diferencia de los métodos tradicionales, Sólidos RA ofrece una experiencia inmersiva que no solo facilita la visualización de los sólidos, sino que también fomenta el razonamiento espacial y la manipulación activa de los objetos, elementos clave para el aprendizaje significativo. Además, una de las ventajas significativas de Sólidos RA es que es una aplicación gratuita y de fácil acceso, lo que la convierte en una herramienta accesible para estudiantes y profesores sin necesidad de grandes inversiones en recursos, pero igualmente muy práctica.

Así, la aplicación Sólidos RA no solo atiende a algunas necesidades educativas actuales, sino que también promueve un enfoque pedagógico que prepara a los estudiantes para enfrentar retos matemáticos con mayor confianza y competencia.

Así pues, una vez conocida esta problemática permite al grupo investigador plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es la incidencia de una propuesta basada en la RA para el aprendizaje sobre el volumen de tetraedro usando el modelo 5E en grado octavo de educación básica en la Institución Educativa Villa Colombia?

Planteamiento de los objetivos.

Objetivo general.

Analizar la incidencia de una propuesta basada en la RA para el aprendizaje sobre el volumen del tetraedro usando el modelo 5E en grado octavo de educación básica en la Institución Educativa Villa Colombia

Objetivos específicos.

Consolidar los referentes matemático, curricular, didáctico y cognitivo en el diseño de una propuesta de tareas que favorece el aprendizaje del volumen del tetraedro en grado octavo de educación básica.

Diseñar una propuesta de tareas mediante el modelo 5E en relación con el volumen del tetraedro mediante la aplicación Sólidos RA en grado octavo de educación básica.

Identificar las mediaciones instrumentales que se dieron en la puesta en acto de la propuesta de tareas con relación al volumen del tetraedro.

Justificación.

En el presente apartado se expone la justificación del proyecto, donde se analiza la practicidad de implementar tecnologías como la RA en el aprendizaje de la geometría. Se destacan los beneficios de esta herramienta para mejorar la comprensión de conceptos tridimensionales, especialmente el volumen de pirámides, y se expone cómo su uso en estudiantes de grado octavo puede potenciar tanto el aprendizaje como el desarrollo de habilidades espaciales. Además, se presentarán estudios y referencias que apoyan la efectividad de la RA como recurso pedagógico innovador.

Primero, es necesario recordar que el aprendizaje de la geometría en los niveles de educación secundaria enfrenta una serie de retos, especialmente cuando se trata de ayudar a los estudiantes a comprender conceptos tridimensionales y su relación con las representaciones planas.

Debido a esto, existen diversos estudios que han mostrado que los métodos tradicionales, que se limitan a la representación bidimensional de objetos geométricos, no son suficientes para desarrollar plenamente el pensamiento espacial de los estudiantes. Como lo mencionan Moreno et al. (2020) el uso de la RA puede superar estas limitaciones, ya que proporciona una experiencia visual y manipulativa que permite a los estudiantes interactuar directamente con objetos tridimensionales, mejorando significativamente su comprensión espacial.

Además, la investigación de Sánchez et al. (2021) evaluó el impacto de la RA en el aprendizaje de geometría y el desarrollo del pensamiento crítico, mostrando que los estudiantes que utilizaron esta tecnología lograron una mejor asimilación de los conceptos geométricos en comparación con aquellos que emplearon métodos tradicionales, lo que brinda más solidez a la idea de que la RA hace más accesibles los conceptos abstractos, como el volumen, al presentar

representaciones visuales en tiempo real que los estudiantes pueden manipular y observar desde diferentes perspectivas.

Asimismo, Pujiastuti y Haryadi (2024), muestran que el uso de RA en geometría es especialmente útil para mejorar la capacidad de los estudiantes en la manipulación de objetos tridimensionales, lo que facilita la comprensión de conceptos como el volumen. Este estudio evidenció una mejora significativa en el rendimiento de los estudiantes que utilizaron RA frente a aquellos que usaron métodos tradicionales.

Este proyecto está dirigido a estudiantes de grado octavo de una Institución Educativa Villa Colombia, adscrita a la Secretaría de Educación Municipal de Santiago de Cali, quienes se benefician particularmente de estas herramientas tecnológicas en el aprendizaje de conceptos geométricos complejos. La implementación de la app gratuita Sólidos RA les permitirá interactuar de manera directa con pirámides y otros sólidos, mejorando la visualización y el entendimiento del volumen mediante la manipulación virtual de las figuras, haciendo que la aprendizaje sea más efectivo y accesible.

Así pues, en un contexto donde las herramientas de aprendizaje tradicionales no logran llamar la atención de los estudiantes en gran medida, la RA surge como una alternativa pedagógica capaz de transformar la manera en la que se enseña geometría. Como señalan Bacca et al. (2014), la RA no solo mejora el aprendizaje de conceptos abstractos, sino que también aumenta la motivación de los estudiantes al ofrecer una experiencia interactiva y dinámica en el aula. Esta interacción permite a los estudiantes conectarse mejor con los contenidos y tener un aprendizaje más significativo.

Capítulo II: Marco Teórico

Referente matemático.

En la elaboración de este trabajo es oportuno hacer un recuento histórico de las formas en cómo se ha venido perfilando la manera de entender y calcular el volumen de las pirámides geométricas, enfocándonos en el tetraedro, permitiéndonos considerar los aspectos relevantes a la hora de interactuar con la noción del volumen del tetraedro.

Figura 1

Pirámides de Guiza



Nota: Las pirámides Egipcias de Guiza: Fuente: Wikipedia

Las pirámides egipcias conllevaron a que matemáticos y filósofos se incentivarán al estudio de sus propiedades geométricas como se logra visualizar en los libros de Euclides, se partirá de su obra *Los Elementos*, considerándose por excelencia como la recopilación más rigurosa de la antigüedad debido a la presentación de proposiciones matemáticas, postulados y axiomas.

Siendo uno de los primeros en formalizar el estudio de las figuras tridimensionales entre ellas las pirámides, además de definir conceptos como el volumen de esta manera Ríos Cuesta (2021), nos menciona que “*en el libro XII usa el lema de exhausción para demostrar cómo obtiene las fórmulas para calcular el volumen del prisma y pirámides*” (p. 159).

De acuerdo con lo planteado por Cabrero en 2019, después del gran aporte de Euclides otros matemáticos como, Arquímedes, Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri, propusieron diferentes maneras de calcular el volumen de estos cuerpos sólidos, teniendo en cuenta que lograron grandes avances no lograron encontrar una manera de calcular el volumen de estos cuerpos con exactitud.

Con el paso del tiempo otros importantes investigadores en el campo como: Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Georg Cantor, Peano, Jordán, Hilbert y Dehn con el desarrollo de sus investigaciones lograron formalizar los avances a los que habían llegado Euclides y Cavalieri, logrando calcular volúmenes de pirámides y otros sólidos con precisión.

Estos grandes matemáticos también lograron formalizar el cálculo diferencial e integral lo que les ayudo para encontrar áreas y volúmenes de manera precisa, como lo menciona Ríos Cuesta (2021), que según “Sus trabajos sobre las integrales sirvieron a la obtención de longitudes de arco, áreas y volúmenes de cuerpos” (p. 160), destacando que el desarrollo de este cálculo les facilitó la manera de calcular áreas y volúmenes de cuerpos, además esto ha permitido que se logre un avance hacia la geometría computacional y modelado tridimensional.

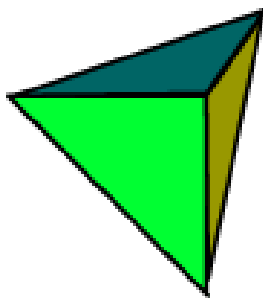
En el avance de este trabajo es necesario dar una definición formal del volumen, de igual manera, aquellas propiedades que la caracterizan. De acuerdo con Euclides en su libro XI de los elementos donde de una definición mencionando que “una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto” (Hernández, 2020).

Teniendo en cuenta que hay muchas clases de pirámides nuestra mirada esta puesta en el tetraedro considerándose un poliedro regular el cual es definido según Narváez & Polanco (2013), como “un poliedro de n caras se dice que es regular, si y sólo si todas sus caras son polígonos

regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras; además, sus ángulos poliedros también son congruentes” (p.40).

Figura 2

Representación del tetraedro

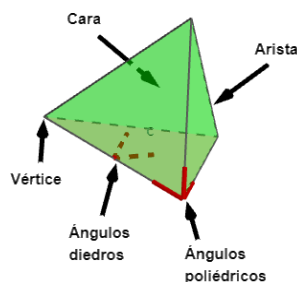


Nota: Representación gráfica del tetraedro, Está limitado por 4 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 4 vértices, 4 ángulos triedros, 6 aristas y 6 ángulos diedros. Fuente: Narváez & Polanco

De acuerdo con Narváez & Polanco (2013):

Se define como poliedro al cuerpo que está limitado por superficies planas (denominadas caras) y de contorno poligonal (denominadas aristas de las caras). Los vértices del poliedro son los vértices de las caras. Por ejemplo, un cubo, paralelepípedos, el tetraedro, hexaedro y así sucesivamente. (p. 38)

Elementos de un poliedro

Figura 3*Elementos del tetraedro*

Nota: Elementos que caracterizan un poliedro Fuente: Creación propia

Definición de cada una de las partes que componen el poliedro según Narváez & Polanco (2013):

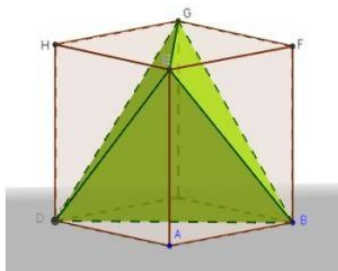
- **Cara:** Cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.
- **Aristas:** Los lados de las caras del poliedro. Dos caras tienen una arista en común
- **Vértices:** Los vértices de cada una de las caras del poliedro. Tres caras coinciden en un mismo vértice.
- **Ángulos diedros:** Los ángulos formados por cada dos caras que tienen una arista en común.
- **Ángulos poliédricos:** Los ángulos formados por tres o más caras del poliedro con un vértice común. (p. 39)

Después de hacer un recuento histórico de cómo fue la transición del concepto de volumen de las pirámides, se hace importante precisar el concepto y la manera de percibirlo, teniendo en cuenta lo mencionado por Godino, Batanero y Roa (2003), “el término volumen se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada, cuya unidad principal es el metro cúbico (m^3)” (p. 622).

Teniendo en cuenta la definición del volumen y las características del tetraedro la fórmula para calcular el volumen según Da Silva en el 2021 nos plantea hacerlo a partir de un cubo, descomponiéndolo en 4 pirámides congruentes.

Figura 4

Descomposición de cubo en pirámides correspondientes I

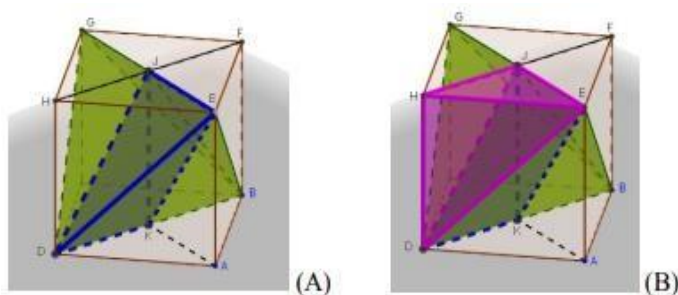


Nota: Descomposición de cubo en pirámides congruentes Fuente: Da Silva

Conduciendo a una representación algebraica: $\frac{1}{4} V_T$ teniendo en cuenta que V_T se considera como la medida del volumen del tetraedro, encontrando que cada tetraedro se puede dividir en tres pirámides congruentes.

Figura 5

Descomposición de cubo en pirámides correspondientes II



Nota: Descomposición de cubo en pirámides congruentes Fuente: Da Silva

Permitiendo considerar que: $\frac{1}{4} V_T = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right) V_C = \frac{1}{12} V_C$ teniendo en cuenta que V_C es la medida del volumen del cubo. Haciendo un cambio de variable tenemos lo siguiente $V_T =$

$$4 \left(\frac{1}{12} \right) V_C = \frac{1}{3} a^3 \text{ donde } a \text{ representa la medida de la arista del cubo.}$$

Hasta ahora hemos logrado encontrar la ecuación del volumen del tetraedro regular, $V_T = \frac{1}{3}a^3$ en función con la arista del cubo que le dio origen.

Para la generalización de la ecuación lo que se va a hacer es observar las figuras anteriores que nos permite afirmar que, todas las aristas del tetraedro regular son diagonales de las caras del cubo, conllevando a que sean congruentes, por tanto, se pueden representar con x , lo cual nos permite decir que $x = a\sqrt{2}$.

Vamos a hacer un cambio de variable, sustituyendo $a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ lo cual permite en la formula del volumen del tetraedro reemplazar obteniendo lo siguiente

$$V_T = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$$

encontrando así la ecuación $V_T = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ para calcular el volumen del tetraedro a partir de la longitud de su arista.

El volumen es fundamental en geometría, ya que permite la cuantificación del espacio tridimensional que llena un sólido. La definición y propiedades de esta magnitud no solo son herramientas claves para comprender el comportamiento de un sólido como el tetraedro, sino que también son una herramienta fundamental para análisis y aplicaciones prácticas de cálculo y visualización, especialmente en contextos de aprendizaje.

Teniendo en cuenta que en la actualidad las computadoras le han permitido a los matemáticos poder simular formas tridimensionales complejas y calcular volúmenes con precisión extrema, utilizando algoritmos de integración numérica; los múltiples software y aplicaciones de (RA) y virtual (RV) logran un acercamiento con visualización y cálculo de manera interactiva de los volúmenes de pirámides y otros sólidos.

Referente curricular.

Para el diseño de esta secuencia, se toman en cuenta los documentos de referencia conceptuales y curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, que establecen los objetivos y competencias esperados en el desarrollo de habilidades geométricas. En este caso, los lineamientos curriculares (1998), los estándares básicos de competencia (2002) y los derechos básicos de aprendizaje (2015), quienes orientan el aprendizaje de los estudiantes en relación con el pensamiento espacial y el pensamiento métrico, en particular en el estudio de sólidos geométricos como las pirámides y su volumen.

En primera instancia, están los **lineamientos curriculares**, quienes consideran el enfoque y los procesos que guían la enseñanza de la geometría, en particular los relacionados con el pensamiento espacial y los sistemas geométricos y el pensamiento métrico y los sistemas de medidas.

De esta forma, y según lo dicho por el MEN (1998), de los cinco conocimientos básicos que existen, se toman como punto de referencia; el pensamiento espacial, que “es el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio” (p. 37). Y el pensamiento métrico, definido como “el desarrollo de habilidades relacionadas con la medición y cuantificación de magnitudes en contextos diversos” (p. 40).

Lo anterior permite comprender la importancia que tiene que los estudiantes desarrollen habilidades para visualizar, representar y manipular objetos tridimensionales, así como el medir y calcular magnitudes, lo cual es fundamental en el aprendizaje del volumen de figuras como las pirámides.

Siguiendo con lo dicho en los lineamientos, de los cinco procesos generales enunciados por el MEN (1998), se optó por tomar un proceso como referente; el cual hace alusión a la “Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (p.20). Esto se debe a que este proceso les permite a los estudiantes no solo desarrollar los pensamientos expuestos previamente, sino que también favorece para el desarrollo de las actividades planteadas para esta secuencia.

Ahora bien, continuando con la estructura curricular planteada por el MEN, este menciona que existen varios contextos para el desarrollo de las actividades, y que a su vez

Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. (Lineamientos curriculares, 1998, p. 19).

Debido a esto, para poder llevar a cabo el desarrollo de esta propuesta pedagógica, resulta fundamental, ubicarla dentro de un contexto de la vida diaria, a partir del diseño de una serie de tareas que permita identificar el concepto de volumen de una pirámide, mediante elementos de la cotidianidad de los estudiantes.

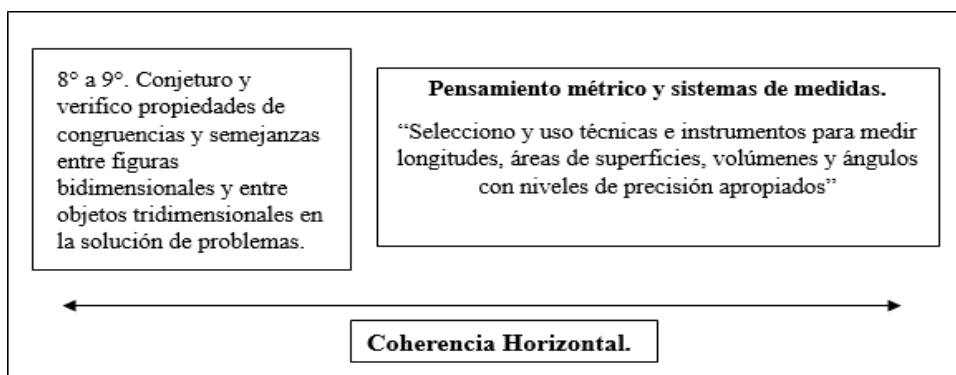
Los **estándares básicos de competencias** por otra parte especifican las metas de aprendizaje para cada nivel educativo, organizadas en función de diferentes tipos de pensamiento, incluyendo el espacial y el métrico. Estos estándares son, como define el Ministerio de Educación Nacional (2006), “procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente” (p. 76).

Ubicándonos en el grado octavo, se toma el siguiente estándar que establece que los estudiantes desarrollan la competencia de “Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados” (p.87).

Esta competencia refuerza la necesidad de que los estudiantes no solo dominen los procedimientos matemáticos, sino que también desarrollen una comprensión significativa de los sólidos tridimensionales y su volumen, integrando conocimientos previos relacionados a las propiedades y la caracterización de una figura.

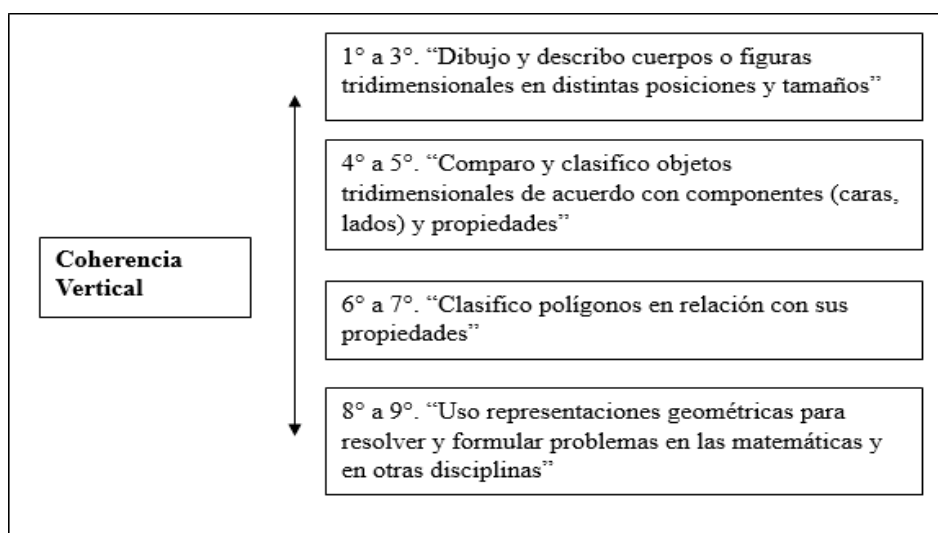
Dentro de estos estándares, también se tiene en cuenta la coherencia horizontal con la intención de reconocer las competencias matemáticas alrededor del volumen de las pirámides en relación con otro tipo de pensamiento matemático y la coherencia vertical para identificar los conocimientos adquiridos en los grados anteriores respecto al concepto de volumen.

La coherencia horizontal partiendo del estándar de competencia previamente mencionado “Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados” (p.87)., permite que los estudiantes apliquen su conocimiento geométrico y métrico en otros contextos y áreas como la física, donde el volumen se relaciona con densidad y masa, y en tecnología, donde la visualización de figuras tridimensionales es esencial para el diseño y modelado.

Figura 6*Coherencia horizontal*

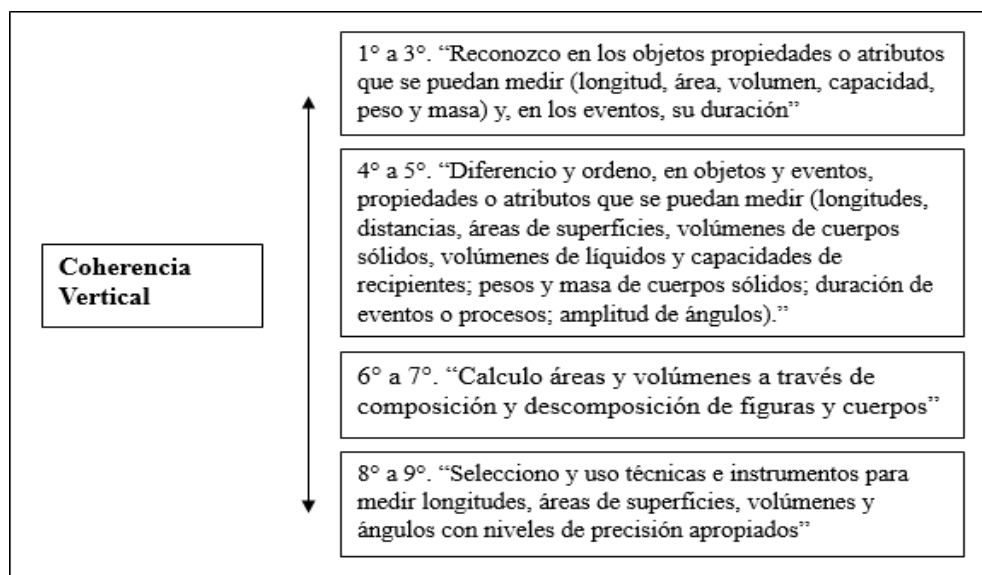
Nota. Relación desde el Pensamiento métrico y sistemas de medidas respecto a otros pensamientos, enfocado en el volumen. Fuente: MEN (2006)

Por otra parte, la coherencia vertical se establece mediante los estándares identificados y relacionados a los saberes previos que debe tener el estudiante, en este caso, para dar cuenta del volumen de una pirámide, por lo cual resulta pertinente basarse tanto en lo que indica el pensamiento geométrico o espacial como el pensamiento métrico.

Figura 7*Coherencia vertical pensamiento espacial*

Nota. Construcción de la noción de representaciones tridimensionales en grados anteriores.

Fuente: MEN (2006)

Figura 8*Coherencia vertical pensamiento métrico*

Nota. Construcción de la noción de volumen en grados anteriores. Fuente: MEN (2006)

Finalmente, los **Derechos Básicos de Aprendizaje** (DBA) aseguran que los estudiantes alcancen ciertos niveles mínimos de comprensión y habilidad en cada grado. Los DBA de octavo grado en el área de geometría enuncian que los estudiantes deben "reconocer, comparar y calcular el volumen de figuras tridimensionales, como cubos, prismas y pirámides" (MEN, 2016, p. 28).

Este derecho establece un objetivo específico en el aprendizaje del volumen de sólidos, promoviendo no solo el uso de fórmulas matemáticas, sino también el desarrollo del razonamiento espacial para comprender las relaciones geométricas en tres dimensiones.

En conjunto, los documentos curriculares que aportan los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencia y los derechos básicos de aprendizaje ofrecen un marco educativo que orienta y estructura el desarrollo de habilidades geométricas de los estudiantes, favoreciendo un aprendizaje progresivo y significativo del volumen de pirámides.

La integración de tecnologías como la RA fortalece el proceso de aprendizaje de los estudiantes, puesto que les proporciona experiencias visuales y manipulativas que fomentan una mejor comprensión de los conceptos tridimensionales y facilitan la conexión con su entorno cotidiano.

Referente cognitivo.

El presente apartado da cuenta de los principales aspectos cognitivos que fueron tomados en cuenta para el desarrollo de la presente investigación, los cuales, según Drijvers et al. (2010) sirven como fundamento para la integración de la tecnología en la educación matemática. De esta forma, se presenta a continuación el enfoque instrumental propuesto por Rabardel (2002) para lograr dicha integración, junto con algunos elementos necesarios para ello.

Artefacto e Instrumento:

Para comprender el enfoque instrumental, es fundamental establecer la diferencia entre artefacto e instrumento. Según Rabardel (2002), un artefacto es el objeto -no necesariamente físico- que se utiliza como herramienta. Mientras que, un instrumento surge cuando existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario para una tarea específica.

Esta relación puede que existe entre el artefacto y el instrumento puede expresarse mediante la fórmula: *Instrumento = Artefacto + Esquemas y Técnicas (Drijvers et al., 2010)*. La cual indica que para que se logre llegar a conformar un instrumento, hace falta tener más allá que un solo artefacto, sino que, a la vez este debe de contar con algunos esquemas y técnicas que permitan que su uso sea verdaderamente efectivo.

Esquemas y Técnicas:

Los esquemas, definidos por Vergnaud (1996) como una organización invariable de la conducta para una clase dada de situaciones, representan las estructuras mentales que los estudiantes desarrollan para interactuar con el software. En el caso específico del estudio del volumen de pirámides mediante Sólidos RA, estos esquemas incluyen:

- Identificación de elementos geométricos clave (base, altura, aristas laterales)
- Comprensión de la relación entre estos elementos y el volumen
- Desarrollo de la visualización espacial

Las técnicas, por su parte, son definidas por Vergnaud (1996), como los procedimientos específicos que los estudiantes emplean para operar el artefacto. Por lo tanto, en la aplicación Sólidos RA, estas técnicas se pueden ver reflejadas cuando existe:

- El estudiante aprende a mover y rotar las pirámides en el entorno que brinda la RA, observándolas desde diferentes ángulos, lo que permite una mejor comprensión de los elementos geométricos de las pirámides (base, altura, vértices, etc).
- El estudiante gracias a la comprensión adquirida previamente de los elementos, usa dicha comprensión para dar cuenta de la fórmula del volumen de la pirámide.
- El estudiante compara y construye modelos de figuras equivalentes para comprender cómo afecta el cambio de valores o tamaños en los elementos de la pirámide para dar cuenta del volumen de la misma.

Con todo lo anterior, se puede concluir entonces que el proceso de génesis instrumental se concreta cuando los estudiantes logran integrar estos esquemas y técnicas para construir una comprensión profunda del concepto de volumen de pirámides, aprovechando las capacidades de visualización y manipulación que ofrece la RA.

Génesis Instrumental:

La génesis instrumental es el concepto central del enfoque de este trabajo, ya que describe el proceso mediante el cual un artefacto se transforma en instrumento en manos del usuario, en este caso, el estudiante Rabardel (2002).

En el contexto específico de Sólidos RA, este proceso cobra especial relevancia al permitir la implementación de una aplicación de RA como una herramienta efectiva para el aprendizaje del concepto de volumen de pirámides, particularmente del tetraedro.

Para lograr esa transformación que habla Rabardel, es necesario la intervención de dos elementos claves, la instrumentación y la instrumentalización, los cuales resultan fundamentales para que el artefacto logre convertirse en un instrumento, como se muestra a continuación:

Instrumentalización:

La instrumentalización según Noss y Hoyles (2003), representa el proceso en el cual las interacciones del estudiante con el artefacto, están dictadas por el conocimiento previo del mismo. En el contexto de Sólidos RA, este proceso de instrumentalización se manifiesta en tres momentos claves, las cuales son:

- **Apropiación básica del recurso:** En este primer momento es fundamental que el estudiante realice una familiarización con la interfaz de la aplicación, mediante la interacción con todas las funciones de la misma, así como también que tenga una comprensión inicial de los controles de manipulación y el reconocimiento de las funciones básicas para visualizar pirámides.
- **Personalización:** Una vez lograda esa apropiación básica, se presenta el segundo momento, en el cual se busca que haya una adaptación de esa primera apropiación superficial con las necesidades pedagógicas del estudiante, así como también que haya una selección estratégica para llegar a realizar un primer análisis de las pirámides, en especial del tetraedro.

- **Transformación avanzada:** Como una etapa final del proceso de instrumentalización, se requiere que esa selección estratégica, llegue a un desarrollo para llevar a cabo el análisis de las relaciones entre dimensiones y también, que haya una creación de secuencias personalizadas de visualización para comprender mejor el volumen y la integración de múltiples funcionalidades para resolver problemas complejos.

Instrumentación:

La instrumentación, como lo describen Hoyles y Noss (2003), se manifiesta cuando las posibilidades y restricciones del artefacto (en este caso Sólidos RA) influyen en las estrategias de resolución de problemas y en las concepciones matemáticas de los estudiantes. Lo cual se evidencia principalmente cuando:

Las diferentes oportunidades que ofrece la aplicación para que los estudiantes den cuenta de la representación tridimensional de las pirámides abren múltiples oportunidades a los estudiantes de explorar y comprender la estructura de las pirámides; del mismo modo que las restricciones de la interfaz determinan cómo los estudiantes pueden interactuar con las representaciones de las pirámides o las herramientas disponibles en la aplicación, influyen en cómo los estudiantes abordan el análisis del volumen y sus relaciones matemáticas

Mediación:

La mediación como lo indica Vigotsky (1978), se refiere al “*proceso mediante el cual tanto las herramientas como los signos se interponen entre el sujeto y su actividad, modificando fundamentalmente la naturaleza de esta relación*” lo que dicho de otras palabras, significa que el hombre no interactúa de manera directa con su entorno, sino que esta interacción está mediada por diferentes elementos socioculturales.

Así pues, Vigotsky (1978), identifica dos tipos de mediación: La mediación instrumental y la mediación semiótica, las cuales se pueden entender de la siguiente forma.

Primero está la **mediación instrumental** que indica que los instrumentos son elementos materiales que son usados por el ser humano, para transformar su entorno físico, como puede ser un lápiz para dibujar, una calculadora para realizar operaciones o en el caso de la aplicación Sólidos RA, para visualizar las pirámides y sus elementos.

Mientras que la **mediación semiótica** indica que todos los signos que utiliza el ser humano son elementos simbólicos que median los procesos psicológicos, lo que, acorde con la adaptación al contexto matemático de Mariotti y Bartolini Bussi (2008), es el proceso mediante el cual un artefacto es utilizado de manera consciente o intencional por el profesor, con el fin de mediar contenidos matemáticos a través de una intervención didáctica planificada.

Realidad aumentada:

La RA “es una tecnología que permite al alumnado superponer objetos virtuales en el mundo real” (Ortí Martínez, 2024, p.63). Es decir, que permite que los estudiantes puedan ver representaciones de objetos virtuales en un espacio cotidiano, mediante el uso de un dispositivo.

Una vez realizada esta primera visualización de la representación, “es fundamental que se aborden diversas necesidades en el aprendizaje matemático, mediante experiencias de aprendizaje personalizadas y atractivas” (Ortí Martínez, 2024, p. 62), de esta forma es que se logrará sacar un mayor provecho a la herramienta de la RA, pues como lo indican Elbert et al., 2023; Gómez et al., 2023; Sánchez, 2017; Sánchez et al. 2023 (citados en Ortí Martínez, 2024) esta tecnología “tiene el potencial de mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes y hacer que las matemáticas sean más interesantes, accesibles e inclusivas”. (p. 63)

Finalmente mencionar que, con el fin de conocer la viabilidad del uso de esta aplicación, se hizo un sondeo previo, donde se pudo verificar que los estudiantes cuentan con los elementos necesarios para que la aplicación pueda funcionar de manera adecuada y se pueda desarrollar la actividad, así como permitió identificar el impacto que pueda llegar a generar el uso de una herramienta como esta en el aula de clase, capturando la atención de los estudiantes y sembrando en ellos diferentes expectativas.

Referente didáctico

En este apartado se presenta el modelo de instrucción 5E como referente didáctico para el diseño de una serie de tareas orientada hacia el proceso de aprendizaje del volumen del tetraedro. Este modelo ofrece un enfoque estructurado y dinámico que facilita la construcción activa del conocimiento. La elección de este referente responde a su capacidad para integrar herramientas tecnológicas, como la aplicación Sólidos RA, y promover un aprendizaje significativo a través de experiencias interactivas.

Además, es importante mencionar que si bien este modelo 5E es un marco teórico que pertenece a un área diferente a la educación matemática, se ha logrado implementar de manera adecuada en diferentes trabajos de esta, como se evidencia en el trabajo titulado "Implementing the 5E Model in Mathematics Education" Suwito et al. (2019) o de manera más específica, como se puede ver en el trabajo titulado "The Effect of Augmented Reality on Students' Understanding of Geometry through the 5E Model" Yilmas & Goktas (2021) donde se analiza el impacto de la RA en la comprensión de la geometría en los estudiantes.

Ahora bien, según (Ruíz-Martín y Bybee, 2022, p. 1), el modelo de instrucción 5E “*es un acercamiento a la ciencia de la enseñanza y aprendizaje desarrollados por el Estudio Curricular de Ciencias Biológicas (BSCS) en 1987*”, el cuál es un marco pedagógico de carácter constructivista que pretende que sean los estudiantes quienes construyan el conocimiento científico y matemático mediante la interacción con el objeto, organizando el proceso de aprendizaje en cinco fases secuenciales.

Estas fases son: *Enganchar, Explorar, Explicar, Elaborar y Evaluar*. Y cada una de ellas son definidas de la siguiente forma:

Enganchar (Engage): “*El maestro presenta un problema o un evento discrepante en un contexto familiar que los estudiantes no pueden explicar con su conocimiento actual porque es demasiado corto o no adaptarse a sus nuevas experiencias*” (Ruíz-Martín y Bybee, 2022, p. 2).

Durante esta etapa él profesor puede utilizar Sólidos RA para captar el interés de los estudiantes al presentarles un desafío visual, como una pirámide superpuesta a un cubo. Con preguntas iniciales como: ¿Cuál de estas figuras tiene más volumen? o ¿Cómo podríamos calcularlo?, se despierta la curiosidad y se introduce el tema sin proporcionar respuestas inmediatas. La interacción inicial con la pirámide virtual, sin restricciones, estimula la exploración y prepara a los estudiantes para cuestionarse conceptos previos sobre volumen.

Explorar (Explore): “*La etapa Explorar consiste en una actividad de indagación guiada, que brinda oportunidades para que los estudiantes aborden concepciones alternativas y construir nuevas explicaciones que hagan sentido para ellos*”. (Ruíz-Martín y Bybee, 2022, p. 4)

Durante la fase de Explorar, los estudiantes usan la aplicación para manipular virtualmente pirámides tridimensionales, ajustando sus dimensiones o rotándolas para observar cómo cambian las propiedades geométricas.

Esta interacción fomenta una indagación guiada, donde los estudiantes comparan diferentes pirámides (por ejemplo, con bases triangulares y cuadradas) y comienzan a identificar patrones relacionados con el volumen. La RA se convierte aquí en una herramienta clave para promover el aprendizaje activo y experimental.

Explicar (Explain): *“En esta etapa, los nuevos conceptos captados en la etapa de Exploración se formalizan, brindando oportunidades a los maestros de presentar de manera directa y formal dichos conceptos”.* (Ruíz-Martín y Bybee, 2022, p. 5)

Aquí el profesor aprovecha las representaciones gráficas de Sólidos RA para formalizar los conceptos explorados previamente. Mediante visualizaciones interactivas, los estudiantes comprenden la fórmula del volumen de la pirámide ($\frac{1}{3} * \text{Área base} * \text{altura}$) identificando cada componente directamente en el modelo virtual. Además, la comparación con un prisma que comparte base y altura permite ilustrar de forma visual y clara por qué el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma, fortaleciendo el puente entre teoría y práctica.

Elaborar (Elaborate): *“La etapa Elaborar incluye actividades que requieren que los estudiantes apliquen los conceptos y procedimientos que han aprendido para resolver nuevos problemas en nuevos contextos”.* (Ruíz-Martín y Bybee, 2022, p. 5)

En esta cuarta etapa, se invita a los estudiantes a aplicar lo aprendido en contextos nuevos y desafiantes. Por ejemplo, diseñar pirámides con características específicas usando la aplicación, calcular sus volúmenes y verificar resultados con las herramientas interactivas de medición de Sólidos RA. También pueden enfrentar problemas más complejos, como determinar cómo encajaría una pirámide en un contenedor virtual. Estas actividades refuerzan el aprendizaje al trasladar los conocimientos a situaciones novedosas.

Evaluar (Evaluate): *“Finalmente, en la etapa de Evaluar, los conocimientos y habilidades adquiridos por cada estudiante se evalúan a través de una actividad que desafía su comprensión”* (Ruíz-Martín y Bybee, 2022, p. 5).

Para esta etapa se utiliza la aplicación como herramienta de evaluación interactiva donde los estudiantes pueden reconstruir pirámides con volúmenes dados, ajustando dimensiones y comprobando la precisión de sus cálculos en tiempo real. Asimismo, la aplicación permite detectar errores en las mediciones o cálculos presentados, lo que ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre sus procesos. Este enfoque dinámico y visual no solo mide el conocimiento, sino que también fortalece la comprensión conceptual de forma práctica y significativa.

Articulaciones teóricas

En este apartado, se busca mostrar la relación de los referentes ya mencionados para el desarrollo de esta investigación, teniendo como propósito la realización de tareas por medio del modelo 5E alrededor de la RA, para el aprendizaje del volumen del tetraedro, utilizando la aplicación móvil Sólidos RA.

La secuencia está dirigida a estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Villa Colombia, con la intención de desarrollar en ellos tanto el pensamiento espacial y sistemas geométricos, como el pensamiento métrico y sistemas de medidas, en función del proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, en un contexto de la vida diaria.

Considerando lo anterior, el objeto matemático de interés se abordará desde la RA y la mediación instrumental, por medio de un artefacto como lo es la aplicación Sólidos RA, la cual está diseñada para el aprendizaje de geometría por medio de la RA, permitiendo la visualización y manipulación de distintos cuerpos y figuras geométricas, mediante la lectura de códigos QR en un teléfono inteligente o Tablet Android.

El volumen del tetraedro presenta una complejidad inherente que radica en la interrelación dinámica de sus elementos geométricos. A diferencia de figuras más simples, un tetraedro requiere comprender simultáneamente múltiples variables espaciales: la posición relativa de sus vértices, la variación de sus caras triangulares, y cómo pequeños cambios en su estructura pueden generar transformaciones significativas en su volumen. Esta complejidad matemática exige no solo calcular, sino interpretar las relaciones espaciales que determinan su estructura tridimensional.

De acuerdo a lo anterior, la RA resulta una herramienta práctica para su comprensión. La aplicación Sólidos RA se convierte en una ventana para explorar y descomponer las características espaciales del tetraedro (caras, vértices, ejes, etc), permitiendo a los estudiantes trascender las limitaciones de las representaciones tradicionales. Mediante la interacción con modelos tridimensionales superpuestos al entorno real, los estudiantes podrán visualizar de manera inmediata cómo los cambios en la estructura afectan directamente su volumen.

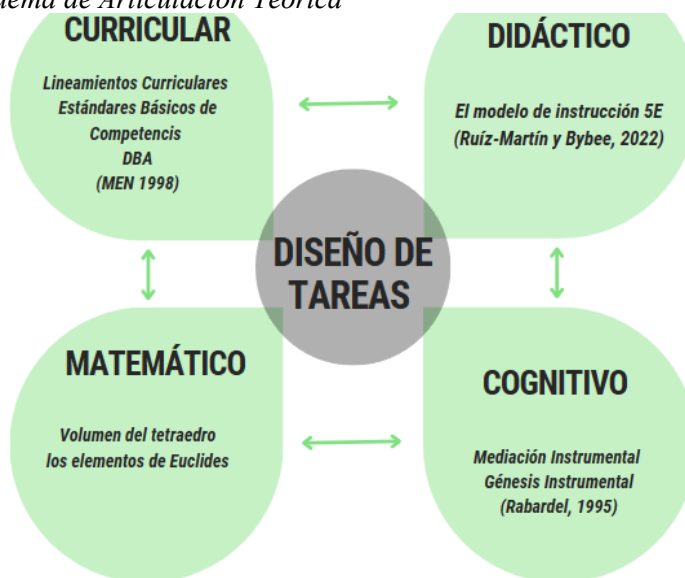
La RA potencia el aprendizaje matemático al: Convertir conceptos abstractos en experiencias visuales inmediatas, permitir la experimentación directa con propiedades geométricas, generar un puente entre la teoría matemática y la percepción espacial, motivar el aprendizaje mediante una experiencia interactiva y tecnológica, entre otras.

Es por esto, que las tareas propuestas para esta secuencia se desarrollarán acorde con el modelo de instrucción 5E, donde los estudiantes tendrán una tarea correspondiente a cada una de las etapas que se mencionan en este modelo (Enganchar, explorar, explicar, elaborar y evaluar), que serán atendidas siguiendo el enfoque constructivista donde será la interacción de los estudiantes con el recurso, lo que permitirá a ellos tener un rol principal en la construcción de su conocimiento respecto al concepto del volumen.

Por último, mencionar que, al tratarse del volumen de una figura tridimensional, se espera el uso de la RA resulte ser una herramienta novedosa que permita a los estudiantes identificar todos los elementos y características de una figura para poder llegar no solamente a calcular el volumen de la figura, sino también a entender cómo es que están relacionados los elementos de la misma para hallar ese valor.

Figura 9

Esquema de Articulación Teórica



Nota. La figura corresponde a una elaboración propia.

Capítulo III: Metodología

El siguiente apartado hace énfasis en la metodología que se desea desarrollar en esta investigación, donde se considera el enfoque cualitativo a partir de un estudio de caso, que para efectos de este trabajo se llevara a cabo con un grupo estudiantes de octavo grado de educación básica. Luego se presenta el campo de trabajo donde se llevará a cabo la implementación de tareas y los instrumentos de recolección de datos.

Enfoque cualitativo

Para desarrollar este trabajo se opta por tomar uno de los enfoques propuestos por Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2020), en su libro, metodologías de la información, en el cual se muestra los tipos de enfoques metodológicos (cualitativo, cuantitativo y mixto), cabe resaltar que no hay uno mejor que el otro, puesto que cada uno tiene sus características propias y estos enfoques emplean procesos detallados, sistemáticos y empíricos para ser desarrollados.

Sin embargo, para efectos de esta investigación se considera como referente metodológico el enfoque cualitativo, destacando que este posibilita el análisis del desarrollo natural de los acontecimientos a través de la exploración, es decir, sin manipulación ni alteraciones de la realidad, definiéndose mediante las interpretaciones proporcionadas por los individuos involucrados en la investigación, de esta manera, surgen diferentes realidades, incluyendo la de los estudiantes y la del investigador, las cuales se transforman a medida que avanza el estudio y se convierten en la fuente principal de información.

El método cualitativo es entendido como una metodología de tipo inductivo debido a que explora y describe para posteriormente generar perspectivas teóricas, de esta manera, se plantea que, a partir de un fenómeno específico, se haga posible identificar similitudes en otro, lo que facilita la comprensión del proceso.

Además, Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2020), denominan esta metodología como investigación fenomenológica, naturalista, interpretativa o etnográfico, teniendo en cuenta que en este enfoque se busca hacer una evaluación natural del desarrollo de los hechos, es decir que se estudia los hechos sin ocasionarles ningún tipo de alteración.

Así pues, para el estudio se ha pensado que la recopilación y el análisis de la información obtenida de los datos, juegan un papel fundamental en la selección de la muestra. En este contexto, Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2020), indica que la muestra está formada por unidades no cuantificables, como personas, comunidades, animales, eventos o sucesos, entre otros.

En concordancia con este enfoque, la muestra de esta investigación está conformada por un grupo de estudiantes de grado octavo de educación básica, pertenecientes a la Institución Educativa Villa Colombia. Se busca recopilar información para analizar los "Aportes generados por la implementación de tareas utilizando el modelo 5E por medios de la App Solidos RA en su proceso de aprendizaje.

El enfoque cualitativo, mediante el análisis realizado a las personas en un experimento determinado permite comprender procesos que conducen a la creación de tareas, ejercicios o actividades que se desarrollan de manera secuencial con un objetivo específico. Además, este enfoque se caracteriza por cumplir con diversas características, de las cuales se destacan dos perspectivas particulares en este caso.

En un primer momento, Hernández et al. (2000), presentan de manera detallada seis características fundamentales del enfoque cualitativo (capítulo 1, p. 9), como se puede evidenciar también en (Arce y Gómez, 2021, pp.54). Por tanto, para los fines del presente trabajo, se

seleccionan algunas de esas características que resultan relevantes para el desarrollo de esta investigación como se evidencia en la siguiente tabla. (Ver tabla 1)

Tabla 1

Características del enfoque cualitativo

Características	Aspectos generales del trabajo
En la ruta inductiva predomina el razonamiento lógico inductivo	Se empleará la lógica y el razonamiento como base para analizar el volumen del tetraedro relacionado con la geometría.
En la mayoría de los estudios cualitativos no se plantean hipótesis iniciales; estas emergen o se ajustan conforme se recopilan más datos.	En lugar de definir hipótesis desde el inicio, estas surgirán y se ajustarán durante el desarrollo de la investigación y su implementación.
La investigación cualitativa se basa en un enfoque naturalista, donde se estudian los casos en su contexto real, según Corbetta (2007) y Singh (2015). Esto implica analizar los eventos en el entorno donde ocurren y comprenderlos en función de su contexto.	El enfoque será naturalista, con un énfasis en estudiar los casos en su contexto real.
Es interpretativa, ya que se enfoca en analizar fenómenos y hechos a partir de los significados que las personas les atribuyen.	Se llevará a cabo una interpretación de las respuestas de los estudiantes ante las tareas propuestas, destacando el carácter interpretativo del estudio.
Considera la realidad como una construcción entre las percepciones e interpretaciones tanto de los participantes como del investigador, en lugar de ser una verdad única y objetiva	El contexto se reflejará en el análisis de las tareas implementadas siguiendo el modelo 5E mediado por la aplicación Sólidos RA.
Busca comprender las percepciones, prioridades y significados de los participantes, reconociendo que el conocimiento y las experiencias son subjetivos y forman parte del fenómeno estudiado.	Se analizarán las pruebas diagnósticas realizadas a los estudiantes, teniendo en cuenta el objeto matemático en cuestión. Asimismo, se detallará cómo se implementan las tareas dentro del diseño investigativo.

Nota. Tabla tomada de Arce y Gómez (2021, p. 54).

Taylor y Bogdan (como se citó en Arce & Gómez, 2021, p. 54-55) mencionan que la metodología cualitativa se caracteriza por:

- Una investigación flexible, ya que los datos se recopilan de forma enfocada.
- El investigador busca comprender las perspectivas de las personas.
- Investigadores naturalistas que interactúan con los informantes de manera natural y no instructiva.

- Las personas, los grupos y los escenarios deben entenderse como un todo, no simplemente como variables.

Asimismo, estas se analizan en consonancia con lo expuesto por Hernández-Sampieri y Mendoza (2020), lo cual las relaciona de manera relevante con el presente estudio.

Monje Álvarez (2011) sostiene que la investigación cualitativa tiene como objetivo comprender los fenómenos desde la perspectiva de los participantes. Este enfoque se caracteriza por presentar los datos a través de narraciones y emplear métodos flexibles, diseñando procedimientos que surgen directamente a partir de la información recopilada.

En esta línea, los datos serán recolectados mediante la transcripción de actividades registradas en video, complementadas con técnicas como las respuestas de los estudiantes y las observaciones anotadas. Posteriormente, se analizará la información utilizando enfoques flexibles que permitan sintetizar las evidencias obtenidas.

Estudio de casos

Se contempla como estrategia el método estudio de casos que contribuirá de forma significativa al enfoque cualitativo de esta investigación, dado que según Jiménez y Cornet (como se citó en Cruz, 2020):

Los estudios cualitativos son más amigables de adaptarse al estudio de caso, por tratarse de temas que son únicos y que tienen determinadas características que ameritan un estudio profundo y un acercamiento real del contexto donde se desarrolla el fenómeno. (p. 20)

Permitiendo así, dar cuenta de los objetivos y la pregunta de investigación trazada en este trabajo.

Ahora bien, el estudio de casos se considera una táctica metodológica que posibilita a los investigadores explorar de manera exhaustiva un fenómeno en su contexto natural. Así, durante el análisis detallado de un caso particular, se pretende o se busca comprender las interacciones, procesos y significados que resultan del experimento. Además, este método se enfoca en la profundidad y la riqueza de los datos recopilados, permitiendo una comprensión holística y contextualizada del caso estudiado.

En concordancia con lo anterior, el estudio de casos en investigación cualitativa involucra la recopilación de datos a través de diversas fuentes, como entrevistas, observaciones y análisis de documentos.

Cebreiro y Fernández (como se citó en Espinoza y Rojas, 2022) afirman que:

Mediante este método, se recogen de forma descriptiva distintos tipos de informaciones cualitativas, que no aparecen reflejadas en números si no en palabras. Lo esencial en esta metodología es poner de relieve incidentes clave, en términos descriptivos, mediante el uso de entrevistas, notas de campo, observaciones, grabaciones de vídeo, documentos. (p. 35)

Estos datos se examinan de manera integral y contextual, con el objetivo de identificar patrones, relaciones y significados dentro del caso en cuestión. Es relevante destacar que este enfoque subraya que los resultados o conclusiones no deben ser generalizados estadísticamente, sino que deben analizarse a partir de las propuestas teóricas. El objetivo del investigador es construir y ampliar teorías a partir de la complejidad y diversidad de experiencias, perspectivas y contextos que inciden en el fenómeno investigado.

Según Yin (2009), existen cuatro tipos de diseño para los estudios de caso, sin embargo, acorde con los objetivos de este trabajo, se utilizará el Tipo 1, que hace referencia a diseños para un solo caso, donde habrá una sola unidad de análisis.

De acuerdo con lo anterior, para el desarrollo de esta investigación, se hará una prueba piloto con 10 estudiantes de grado octavo de educación básica, los cuales interactuarán con la aplicación Solidos RA, con el fin de atender o responder una serie de tareas diseñadas mediante el modelo 5E, y que permitirán realizar el análisis de cada una de las etapas que se mencionaron en el apartado didáctico.

Entendiendo que la prueba piloto según Van Teijlingen, & Hundley. (2001) es entendida como una estrategia metodológica empleada en investigación y desarrollo de proyectos, cuyo propósito es analizar la viabilidad, el tiempo, los costos y la eficacia de un estudio o intervención antes de aplicarlo en un contexto más amplio.

Además, de acuerdo con Thabane, Ma, Chu, et al. (2010), este nos planteamos tres objetivos para el desarrollo de la prueba piloto , a) Examinar si el diseño del estudio o intervención es practicable considerando los recursos disponibles, el tiempo y los aspectos logísticos, b) Identificar y corregir posibles dificultades que puedan presentarse durante la implementación y c) Evaluar y perfeccionar cuestionarios, encuestas u otros instrumentos de recolección de datos para garantizar su eficacia, los cuales serán tenidos en cuenta para la construcción y desarrollo de la prueba articulada con el estudio de caso.

Por último, es de suma importancia resaltar que la elección de este estudio de caso se da debido a que se hizo un sondeo posterior a la realización del trabajo, para analizar la posibilidad de trabajar con la App Solidos RA en los celulares de los estudiantes, teniendo en cuenta que muchos colegios prohíben el porte de estos aparatos electrónicos, se hará la elección del grupo de

estudiantes teniendo en cuenta “muestra intencional”, es decir, los estudiantes que se elijan será porque cuentan con el dispositivo móvil para la realización del estudio.

Campo de Trabajo y Contexto de Implementación

Este diseño se implementará en la Institución Educativa Villa Colombia, una institución pública, mixta, de carácter académico que está situada en la zona urbana de la ciudad de Cali, al sur del departamento del Valle en la carrera 12E No 48-36.

Figura 10

Institución Educativa Villacolombia



Nota. Occidente.co. (s.f.). Fachada de la Institución Educativa Villacolombia Fuente: Eduka. <https://eduka.occidente.co/los-5-mejores-colegios-publicos-de-cali/>

Dicha institución cuenta con un total de 3 sedes siendo la sede Villacolombia la principal, donde se encuentra la parte administrativa y las dos jornadas de bachillerato, también están la sede Santísima Trinidad y la sede República de Colombia. En total, la institución cuenta con 29 salones, 4 salas de sistemas, 1 restaurante escolar y una ludoteca.

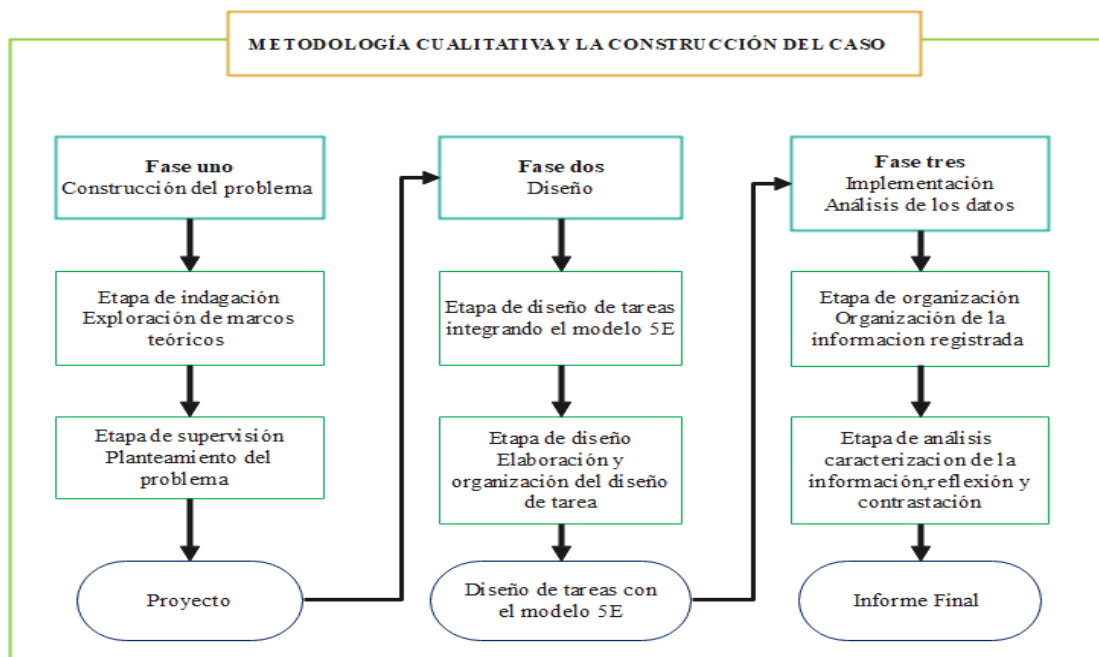
Acorde con estas características, la implementación tendrá lugar en la sede principal, puesto que, como se mencionó previamente, son los estudiantes de esta sede, son aquellos que se encuentran en el grado de escolaridad requerido y además cuentan con los dispositivos tecnológicos necesarios para llevar a cabo esta actividad.

Desarrollo metodológico

Para la realización del presente trabajo, se diseñaron tres fases alineadas con los objetivos planteados. Esta estructura se deriva de la metodología cualitativa, detallando las fases necesarias para llevar a cabo el estudio. Para mayor claridad, consultar la (figura 11).

Figura 11

Estructura metodológica



Nota: La figura presentada es de elaboración propia

En el desarrollo del caso, tal como se detalla en el esquema presentado (ver Figura 10), se identifican tres fases clave para el enfoque metodológico del estudio. Cada fase sigue un orden lógico y progresivo, contribuyendo de manera significativa al avance de la investigación.

La primera fase consiste en el planteamiento del problema, donde se realizó una revisión exhaustiva de la literatura relevante, que abarca antecedentes internacionales, nacionales y locales, con el fin de evaluar el volumen del tetraedro como objeto de estudio. Esta fase también incluyó la fundamentación teórica del proyecto, basada en la exploración y el análisis de diversos marcos teóricos que proporcionaron el respaldo conceptual necesario para la investigación.

A partir de esta base, se procede a la formulación del problema de investigación, que se enfoca en analizar las dificultades asociadas al aprendizaje del volumen del tetraedro dentro del desarrollo del pensamiento geométrico y métrico, abarcando competencias como la elaboración, comparación y práctica de procedimientos. De esta manera, se establece una conexión directa con los contenidos presentados en los capítulos 1 y 2, que son parte integral de este proyecto.

La segunda fase se orienta hacia la elaboración de preguntas y actividades diseñadas para contribuir a la resolución del problema de investigación. Para ello, se plantea el diseño tareas fundamentada en la propuesta del modelo 5E Ruíz-Martín y Bybee (2022) y los referentes teóricos que se sustentan en la génesis instrumental desarrollada por Rabardel (2002). Además, se considera como marco de referencia los lineamientos curriculares y matemáticos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998).

En esta fase, se emplearán diversos instrumentos de recolección de datos (cámara de video, cámara fotográfica, grabadora de audio, fichas de estudiante y prueba diagnóstica) que permitirán obtener información necesaria para realizar el respectivo análisis. Los resultados obtenidos en esta etapa servirán como base para desarrollar las actividades previstas en la tercera fase del proyecto.

Posteriormente, se realizará el análisis de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, lo que permitirá fundamentar el diseño de las tareas mediadas por las NTIC, utilizando la app

Solidos RA como herramienta principal. Este proceso culminará con la implementación de dichas tareas, estableciendo así una conexión directa con el desarrollo del capítulo 3 de este proyecto.

En la tercera y última fase, se llevará a cabo el análisis de los registros obtenidos, lo cual incluye la organización y sistematización de la información recolectada (resultados y observaciones en los estudiantes) durante la implementación de las tareas mediada por la app Solidos RA. Esta etapa permitirá profundizar en el análisis de los datos, identificar patrones y tendencias en los resultados, y finalmente, formular conclusiones que formarán parte del informe final correspondiente al trabajo de grado.

Adicionalmente, se hace imprescindible la descripción de los instrumentos empleados para la recolección de información. En coherencia con lo expuesto en las fases previas, se sintetiza el proceso de indagación mediante una tabla que resume los aspectos esenciales relacionados con dichos instrumentos, asegurando claridad y orden en el desarrollo metodológico del proyecto.

Tabla 2

Instrumentos de recolección

TIPO DE APLICACIÓN	HERRAMIENTAS	FUNCIONALIDADES
PRESENCIALIDAD	● Cámara de vídeo. ● Cámara fotográfica. ● Grabador de audio. ● Fichas del estudiante. ● Prueba diagnóstica.	● Grabación. ● Registro filmico. ● Registros de audios. ● Trabajo a través de la app (con las opciones que ofrezca la aplicación). ● Registro de notas y/o apuntes del estudiante.

Por consiguiente, a través de las herramientas descritas en la tabla 3, se procederá a la recolección de la información necesaria, la cual será objeto de un análisis detallado en las etapas subsecuentes del proyecto.

Capítulo IV. Análisis.

Descripción del Diseño de Tarea considerando el modelo 5E

A continuación, se describen los aspectos tenidos en cuenta en la etapa de construcción del diseño de las tareas, el cual se fundamenta teóricamente desde; el referente matemático, curricular, cognitivo y didáctico. Dicho diseño contempló una secuencia que además se desarrolla en una serie de tareas y subtareas. Donde cada una articula los lineamientos curriculares, estándares y DBA con los principios del modelo 5E, articulado con la herramienta tecnológica Sólidos RA. Cabe destacar que cada tarea tiene un objetivo. a). En la primera tarea se busca que los estudiantes interactúen con el objeto matemático a través del artefacto b). En la segunda tarea se busca una interacción entre el artefacto, el objeto matemático y el cálculo del volumen de manera algebraica. c). Para la última tarea después realizar la interacción con el artefacto y el objeto matemático, se espera que el estudiante cuente con las herramientas suficientes para dar solución a preguntas relacionadas con las características del volumen del tetraedro.

La siguiente tabla muestra la articulación entre el diseño y los referentes teóricos: (Ver Tabla)

Tabla 3

Análisis del diseño según los referentes teóricos y los momentos del diseño

Referente	Tarea 1:	Tarea 2:	Tarea 3:
Referente Matemático	Se le presenta a los estudiantes el objeto matemático(tetraedro) por medio de la representación verbal, también el concepto de volumen de manera indirecta desde situaciones problemáticas que requieren observar	Los estudiantes empiezan a interactuar con la representación simbólica (fórmula del volumen de las pirámides), y específicamente del tetraedro, lo que les permite contrastar lo que se visualiza en los sólidos que se representan mediante RA	Los estudiantes identifican de manera clara la relación que existe entre los elementos del tetraedro con la fórmula para calcular el volumen de este. Además, los estudiantes podrán validar los conocimientos adquiridos al interactuar

	figuras en RA. Ellos interactúan con la app Sólidos RA para visualizar la representación gráfica y por medio de estas representaciones comprendan las características (vértices, caras, aristas, base y vértice superior), además se busca que conecten los conocimientos previos (el cálculo del área de triángulos, ángulos, lados) y nuevos conocimientos a través del proceso como el cálculo de la altura de una pirámide, y las características de esta antes mencionadas.	con los modelos en papel y lápiz o en el tablero. Lo que favorece el hecho de que los estudiantes empiecen a generar conjeturas sobre cómo se calcula el volumen, además de que logré generar una idea de representación del objeto tridimensional, y que comprenda que el volumen es el espacio que ocupa un objeto.	con el diseño y la app Sólidos RA, también se espera que ellos justifiquen sus respuestas basadas tanto en el razonamiento como la experiencia. Además los estudiantes podrán validar los conocimientos adquiridos por medio de preguntas como: ¿Qué elementos se consideran para calcular el volumen de un tetraedro?
Referente Cognitivo	Los estudiantes empiezan a interactuar con la aplicación sólidos RA, la cual es un artefacto que les permite visualizar los sólidos de manera tridimensional, mientras que realizan diferentes transformaciones a los tetraedros, permitiendo que empiecen a reconocer los elementos de estos y asociarlos con los conocimientos previos, para dar cuenta del saber matemático que se va a trabajar en las demás actividades.	En esta serie de subtarear, la aplicación sólidos RA empieza a tener un rol de mediador, puesto que permite que después de que los estudiantes logren esa integración de los saberes previos con los elementos del sólido, empiecen a poner en práctica los nuevos conocimientos adquiridos, afianzando de esta forma el concepto del volumen y cómo es que se calcula. Además, esta tarea busca empezar a cumplir con la génesis instrumental, teniendo en cuenta la instrumentación y la instrumentalización.	Finalmente, los estudiantes responderán una serie de preguntas que permitirán verificar si este proceso de génesis instrumental se cumple o no. Estas preguntas se diseñan con la idea de que se respondan sin utilizar la aplicación, sino utilizando los conocimientos nuevos que fueron adquiridos, permitiendo identificar si se logran o no las metas trazadas para el diseño.
Referente Curricular	La propuesta de diseño contempla el pensamiento geométrico, puesto que el	En este segundo momento el estudiante sigue trabajando con relación al pensamiento	En este último momento se sigue trabajando a través del pensamiento

	estudiante gira en torno al volumen del tetraedro en una App de RA, que permite que el objeto abstracto se pueda visualizar en 3D. además en esta primera actividad se contempla que los estudiantes comparen la representación gráfica en múltiples tamaños y razonen para dar respuesta a preguntas como: 1 ¿Qué datos se necesitan para realizar el cálculo del espacio que ocupa una pirámide egipcia?	geométrico dando cuenta del volumen, además se puede visualizar que se trabaja las preguntas del diseño desde el contexto de las matemáticas mismas y se busca que interactúen entre pares para que discutan las ideas y logren desarrollar los procedimientos. La ejercitación de procedimientos, ayuda a consolidar la comprensión al aplicar estrategias geométricas, contrastar soluciones y validar sus resultados, fortaleciendo así el pensamiento matemático.	geométrico y en relación con las matemáticas mismas puesto que se busca hacer una interacción entre pares para que los estudiantes puedan validar sus conocimientos adquiridos a través del proceso realizado, considerando el ejercicio de la visualización de objetos en 3D. Además la retroacción del artefacto les va a permitir nutrir los argumentos matemáticos para que consoliden la idea del volumen del tetraedro.
Referente Didáctico	Esta tarea está diseñada con la intención de abordar las etapas de enganche y exploración que plantea el modelo 5E, por medio de la visualización y manipulación de figuras o sólidos mediante la RA, lo que permite identificar las características del sólido y formular preguntas o hipótesis.	Continuando con lo establecido por el modelo didáctico, las tareas y subtarear planteadas aquí, se realizan con el fin de abordar las etapas de explicación y elaboración, donde mediante la interacción con el artefacto, los estudiantes logran identificar no solamente los elementos del sólido, sino también reconocer cómo es que se logra calcular el volumen, acorde con los elementos del mismo.	Finalmente, se aborda la etapa de evaluación donde los estudiantes deberán responder una serie de preguntas sobre el objeto matemático en cuestión sin el uso de la herramienta tecnológica. Esto se realiza con el fin de identificar si el uso de esta aplicación permitió que los estudiantes pusieran en práctica los nuevos conocimientos y habilidades adquiridas en las etapas anteriores.

La elaboración de esta tabla tiene como propósito evidenciar la coherencia y articulación entre los referentes teóricos (matemático, cognitivo, curricular y didáctico) y los tres momentos que estructuran el diseño de las actividades, tal como se mencionó previamente.

Sin embargo, también busca mostrar cómo cada referente aporta al desarrollo progresivo del entendimiento del objeto matemático, integrando el uso de la herramienta tecnológica “Sólidos RA” con las fases del modelo 5E.

Análisis general del diseño e implementación

La implementación del diseño de tareas se llevó a cabo en la Institución Educativa Villa Colombia, en una de las salas de sistemas de la institución, la cual estaba equipada con un proyector de imagen para presentar toda la información. Además, para poder utilizar la aplicación Sólidos RA, se contó con la autorización de la institución para que los estudiantes llevaran consigo los dispositivos electrónicos que fueron utilizados en dicho espacio.

Para llevar a cabo la implementación, se eligió un grupo de 14 estudiantes de grado octavo nominados de manera aleatoria y quienes tenían la autorización de sus padres para formar parte de la actividad. El grupo se dividió en 6 subgrupos de 2 o 3 estudiantes, verificando que cada grupo tuviera a disposición por lo menos un dispositivo electrónico en el que la app funcionara de manera correcta.

Figura 12

Profesor organizando los grupos



El diseño de tareas, constaba de tres tareas principales y cada una de estas a su vez, contaba con diferentes subtareas, teniendo de esta forma, que la Tarea 1 tenía 3 subtareas, la tarea 2 tenía 3 subtareas también y la tarea 3 era una sola subtask, esto se puede ver reflejado en la siguiente información:

Tarea 1. La realidad aumentada y la geometría.

Subtarea 1. La realidad aumentada

Subtarea 2. Acercamiento histórico a las pirámides.

Subtarea 3. Explorando la RA.

Tarea 2. Explora, construye y calcula como un ingeniero egipcio.

Subtarea 1. Introduciendo el concepto de volumen.

Subtarea 2. Emplea y elabora.

Subtarea 3. Transformando el tetraedro.

Tarea 3. Evaluando saberes.

Además, cabe mencionar que este diseño se hizo basado en el modelo de aprendizaje 5E, el cual busca que los estudiantes pasen por 5 fases, donde mediante una secuencialidad para dar cuenta primero de los elementos y características de un sólido, y posteriormente abordar el concepto de volumen.

Partiendo de lo anterior, Es importante destacar que se realizó un análisis detallado de los datos obtenidos durante la implementación, enfocado en el estudio del volumen del tetraedro

mediante RA. Para ello, se consideraron las producciones de los estudiantes, así como los registros filmicos y fotográficos capturados durante su interacción con las tareas. Estos elementos proporcionaron información clave para el análisis, orientado a responder la pregunta problema de esta investigación.

La implementación se realizó con estudiantes antes mencionados, y para garantizar su privacidad, se utilizó una nomenclatura específica: los participantes se identificaron como E1, E2, ..., E14, y el profesor como P. Esta codificación permite un mayor entendimiento de la situación y aporta en la organización de los resultados en el documento.

Tarea 1. La realidad aumentada y la geometría.

Esta primera tarea mediante las diferentes subtareas que contenía nos ofreció información respecto a cómo los estudiantes entienden la RA, así como el conocimiento básico que pudieran llegar a tener de la misma. De igual forma, nos permitió identificar si los estudiantes de manera personal podían llegar o no a relacionar el uso de esta herramienta con algunos objetos matemáticos, específicamente en este caso, un sólido regular como un tetraedro.

Estos datos que se recolectaron permitieron realizar el análisis específico de cada uno de los puntos que se muestra a continuación:

Subtarea 1. La realidad aumentada.

Esta subtarea tenía dos preguntas que tenían la finalidad de que el estudiante diera cuenta de qué entendía por RA y cómo es que esta herramienta podría ser usada en la geometría tanto en la construcción de figuras, sólidos, etc., como en el cálculo de algunas características. Lo que nos permitió identificar que 5 de los 6 grupos tenía una idea bastante acertada sobre qué es la RA y veían una relación clara entre esta y la geometría.

A continuación, se muestran algunas de las respuestas obtenidas de los estudiantes en las dos preguntas que componían esta subtarea, junto con el análisis de cada caso.

¿Qué entiendes por realidad aumentada y por realidad virtual? ¿Son lo mismo?

Explica tu respuesta.

Es sumamente importante resaltar que algunos de los estudiantes mencionaron que conocían sobre este tipo de realidades por medio de películas y juegos, además la mayoría lograba diferenciar entre realidad virtual y realidad aumentada, como se muestra a continuación.

Figura 13

Pregunta 1, subtarea 1, tarea 1

combinar elementos virtuales con el entorno real, crea entorno completamente digital.
No son lo mismo, RA mezcla lo virtual con lo real, mientras que RV reemplaza el mundo real.

Nota. Respuesta sobre el tipo de realidades. Fuente: Producción del grupo 3.

Esto deja evidenciar que los estudiantes por medio de su producción escrita dejan en evidencia que las realidades no son lo mismo, además justifican diciendo que: RA mezcla lo real con lo virtual, para lo cual se puede mencionar que los estudiantes hacen referencia a que se puede visualizar la representación un objeto tridimensional por medio de un dispositivos electrónicos en un espacio real, por el contrario, Realidad virtual busca reemplazar es espacio real por un espacio completamente virtual y que esto se hace medio de gafas especiales como lo plasmaron en la respuesta.

En relación con las respuestas y la interacción entre el profesor y el estudiante El queda registrado este momento en el video, a continuación, se muestra el dialogo:

Nomenclatura: Profesor: P - Estudiante: E1-Minuto 13:00-14:20

P: ¿Qué entiendes por RA y por RA? ¿Son lo mismo? ¿qué dicen ustedes?

E1: No son lo mismo, aunque son parecidos.

P: Okey

E1: El hecho que sean parecidos no quiere decir que sean lo mismo.

P: ¿Cuál creen que puede ser una diferencia entre realidad virtual y RA?

E1: La realidad virtual es con gafas y todo eso.

P: Okey.

E1: La RA es por medio del celular u otros aparatos electrónicos.

P: Okey muy bien

Este dialogo entre el profesor y el estudiante E1, nos ayuda a dar cuenta de lo mencionado anteriormente y así concluir que si bien la mayoría no han tenido una interacción con este tipo de realidades se logra evidenciar que las conocen o han escuchado de ellas, esto debido a que la idea, fue posteriormente apoyada por otros estudiantes de los demás grupos.

Relacionado con la segunda pregunta **¿Qué relación puede mencionar entre la realidad aumentada y la geometría?** Los estudiantes mencionan que por medio de la RA se puede representar objetos abstractos, permitiéndonos mencionar que reconocen el principal objetivo de la RA que es mostrar representaciones visuales de solidos u objetos a través de los dispositivos electrónicos como se muestra a continuación.

Figura 14

Pregunta 2, subtarea 1, tarea 1

La RA utiliza calculos geometricos para
posicionar y proyectar objetos virtuales
en el entorno real

Nota. Respuesta sobre la relación de la geometría y la RA. Fuente: Producción grupo 2.

Teniendo en cuenta la respuesta anterior, es importante mencionar que la mayoría de los estudiantes conectan la RA con algunos objetos matemáticos como, por ejemplo: línea, vértice y triángulo, pero además otros mencionaron ideas como la construcción y visualización de cuerpos geométricos tridimensionales.

De acuerdo con lo anterior podemos decir que cuando están hablando de la visualización de cuerpos geométricos, entienden que la RA les permite ver una representación gráfica de cuerpos abstractos que no son comunes en su realidad.

Además, este tipo de respuesta aportó ideas para seguir con la implementación del diseño debido a que los estudiantes tenían una noción clara sobre el tema que iban a trabajar y cómo se iba a hacer, lo que los motivó a atender de manera atenta a las indicaciones y responder cada pregunta planteada.

Posteriormente, mediante la interacción con el artefacto (Sólidos RA) por medio de los dispositivos celulares, se logró evidenciar esa atención y participación mencionada, puesto que se los notó discutiendo las respuestas e intercambiando las ideas entre pares y con el profesor, como se muestra en el siguiente fragmento registrado en el video:

Nomenclatura: Profesor: P - Estudiante: E1-Minuto 17:00 – 18:50

P: ¿Qué relación pueden mencionar entre la RA y por ejemplo la geometría? Desde la idea que tienen ustedes de RA y geometría ¿creen que se puede relacionar? ¿creen que pueda servir para algo?

E5: si puede servir

P: ¿para qué?

E5: para medir segmentos, ángulos, triángulos.

P: Okey, ¿Y qué más?

E1: Puede crear objetos, figuras y estructuras.

P: Muy bien, esa es otra opción, entonces a continuación, vamos a leer el siguiente texto y vamos a sacar algunas ideas de lo que vamos a trabajar.

E5: Ya lo vi (*sonríe*)

P: ¿Ya lo viste?

E5: Si, es una pirámide. (*Muestra el celular con la imagen proyectada de la pirámide*)

P: Correcto, es una pirámide

E4: Yo también la vi.

Todos: Yo también profe.

E1: ¿Tenemos que responder las preguntas con esa imagen?

P: Así es, pero ya les doy las pautas.

Del fragmento anterior se resalta la participación y la expectativa que tenían los estudiantes de interactuar con el artefacto, lo que muestra su interés por visualizar el objeto reflejado por medio del código QR, haciéndose muy importante como se mencionó anteriormente, logrando evidenciar las bondades que da la RA para el aprendizaje de la geometría.

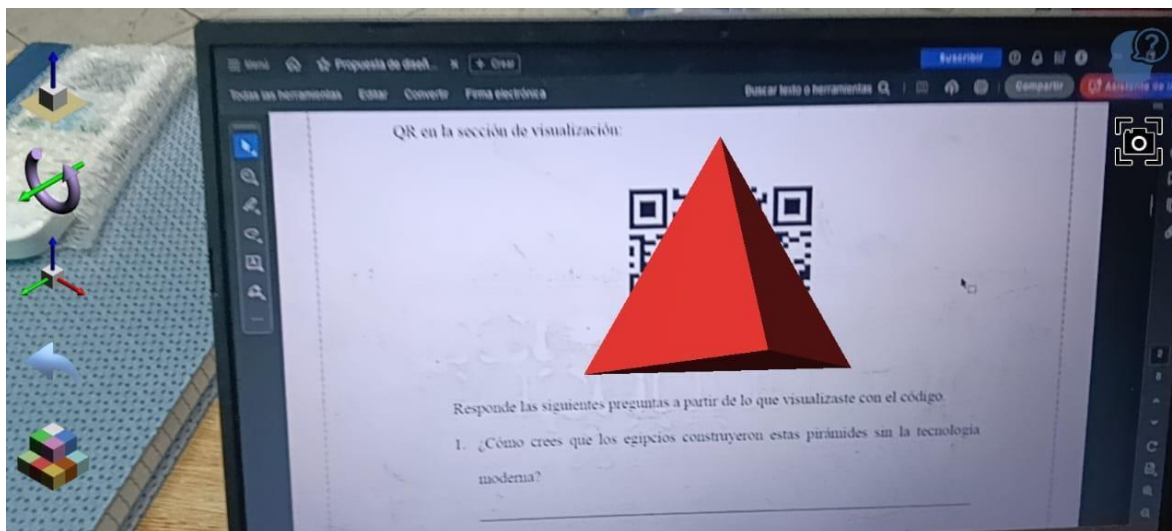
Subtarea 2. Acercamiento histórico a las pirámides.

Para esta subtarea, se presenta un apartado histórico de las pirámides que permite a los estudiantes identificar una posible representación del objeto matemático que se va a trabajar en el resto del diseño, además funciona como punto de introducción de la app permitiendo que los estudiantes exploraran las herramientas que ofrece esta para visualizar objetos tridimensionales y así, reconocer las características y elementos de este tipo de sólidos.

La siguiente figura muestra cómo es que los estudiantes visualizaban la representación de la pirámide mediante el artefacto:

Figura 15

Visualización del objeto matemático, subtarea 2



Nota. Visualización del objeto matemático por medio del artefacto. Fuente: Registro filmico.

Mediante una serie de preguntas, los estudiantes en su gran mayoría logran dar cuenta de las características de la pirámide, identificando algunas como los vértices, las caras, los lados, la base, entre algunos otros. Después de esto, dan cuenta de algunas transformaciones que afectan directamente estas características, en este caso, dando cuenta de que, si se aumenta o se disminuye el tamaño del sólido, afecta directamente su volumen.

La primera pregunta de esta subtarea era: **¿Cómo crees que los egipcios construyeron estas pirámides sin la tecnología moderna?** Donde teniendo en cuenta la visualización del objeto matemático por medio del artefacto, en varias de las respuestas plasmadas por los estudiantes se logra reconocer que tenían la idea de que la construcción se realizó gracias a que los egipcios utilizaron la geometría para dicho fin como se muestra en la siguiente respuesta.

Figura 16

Pregunta 1, subtarea 2, tarea 1.

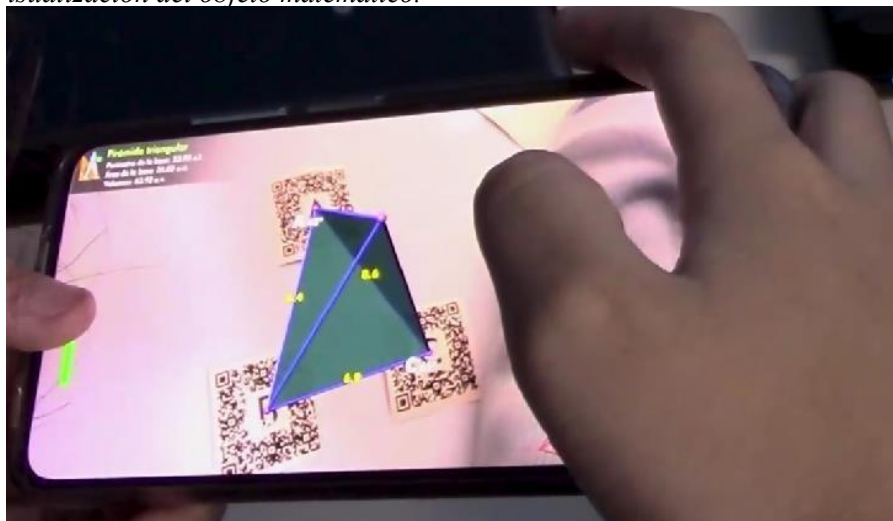
veo que con la geometria los
egipcios construyeron una estructura base

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre los conceptos usados para la construcción de pirámides egipcias. Fuente: Producción grupo 6.

Esta respuesta es relevante ya que asoció el objeto geométrico con una posible representación física del mismo y además de esto, menciona elementos fundamentales para la construcción de este tipo de sólidos como la base.

También cabe resaltar que a pesar de que la respuesta esperada a esa pregunta era “por medio del cálculo del volumen” no se intervino por parte del profesor teniendo en cuenta que el modelo 5E menciona que en las primeras fases es el estudiante debe responder basado en sus conocimientos previos, sin embargo, esto no quiere decir que el profesor no esté presente, sino que debe tomar una postura de mediador.

Relacionado con la pregunta **¿Qué características puedes observar, al interactuar con la app Sólidos RA?** Cuatro de los grupos lograron reconocer las características de las pirámides (vértices, caras, lados), esto debido a la interacción con las herramientas que nos ofreció el artefacto, visualizando la representación gráfica de la pirámide desde múltiples ángulos como se muestra a continuación.

Figura 17*Visualización del objeto matemático.*

Nota. Grupo 1 visualizando la representación gráfica de la pirámide por medio del artefacto (Sólidos RA) Fuente: Registro filmico.

Los estudiantes lograron visualizar con éxito algunas de las características del objeto matemático como los vértices, los lados y las caras, tal y como se muestra en la anterior imagen; así también en las respuestas plasmadas en las hojas de trabajo como se muestra a continuación.

Figura 18*Pregunta 2, subtarea 2, tarea 1.*

Se puede observar las figuras
también las líneas y vértices
también con caras.

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre las características del objeto matemático.

Fuente: Producción grupo 1.

Esta respuesta resulta ser bastante cercana a la esperada, teniendo en cuenta que, al reconocer las características del objeto de estudio, posteriormente serán utilizadas para hacer la introducción del tema que se quiere trabajar, que es el volumen del tetraedro, además se logra

rastrear que los estudiantes lograron visualizar del objeto de estudio a través de las herramientas que ofrece el artefacto, mostrando algunas de las ventajas, como interacción y manipulación del objeto matemático en tres dimensiones en su entorno de aprendizaje.

Relacionado con la quinta pregunta **“Mueve la pirámide egipcia, de forma que aumente y disminuya su tamaño ¿Qué características cambian cuando se generan estos movimientos y cuáles se conservan?”** los estudiantes lograron reconocer por medio de la visualización del objeto matemático a través del artefacto que al mover el sólido o cambiarle el tamaño este seguía conservando su forma, el reconocimiento que hacen los estudiantes es sustancial teniendo en cuenta que en la anterior respuesta reconocieron las características, esto es un insumo importante para seguir construyendo la idea de tetraedro como sólido regular, a continuación se muestra la producción escrita de los estudiantes.

Figura 19

Pregunta 3, subtarea 2, tarea 1.

Cambia su tamaño y se conserva su forma

Nota. Respuesta de los estudiantes al mover el objeto matemático y cambiarle el tamaño.

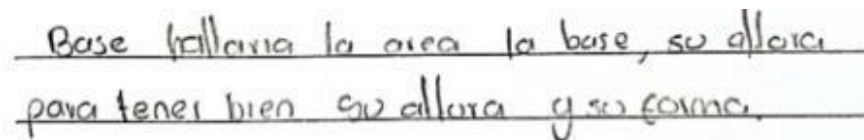
Fuente: Producción grupo 5.

De lo mencionado anteriormente y según la respuesta presentada se logra reconocer el papel tan importante que jugó el artefacto en este proceso, debido a que los estudiantes lograron hacer una visualización del artefacto en múltiples tamaños y desde diferentes ángulos, lo que llevó a que generalizaran que ese tipo de pirámide por más grande o pequeña que la hicieran no iba a cambiar.

Por su parte, cuando se llegó a la pregunta **“¿Qué cálculos matemáticos crees que utilizaron los egipcios para diseñar sus pirámides? ¿o cuáles usarías tú?”** Se pudo notar que la mayor parte de los grupos (cuatro de seis grupos), tenían unas ideas sobre las propiedades o elementos que debía tener una pirámide, puesto que anunciaron lo siguiente:

Figura 20

Pregunta 4, subtarea 2, tarea 1.



Base hallaria la area la base, su altura
para tener bien su altura y su forma.

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre los cálculos para la construcción de pirámides egipcias Fuente: Producción grupo 4.

Dado que cuatro de los cinco grupos respondieran de forma similar respecto a estos elementos, que tanto las herramientas de visualización de la app como los conocimientos previos de los estudiantes fueron determinantes. Esto se evidencia en su capacidad de reconocer dichos elementos como fundamentales para la construcción de un nuevo sólido, la cual resulta ser un aspecto importante para las preguntas posteriores del diseño.

Subtarea 3. Explorando la RA.

En este momento, mediante la aplicación de RA, los estudiantes empiezan a dar cuenta de los diferentes elementos del tetraedro que se necesitan para calcular el volumen del sólido. De esta forma, se plantean dos preguntas que buscan validar esta información o al menos conocer qué ideas tienen los estudiantes que deben seguir para poder realizar el cálculo del volumen.

De lo anterior, se evidencia en la mayoría de los grupos que antes de la introducción formal de la fórmula para calcular el volumen, los estudiantes no tenían una idea clara de cómo calcularlo, puesto que hay respuestas que mencionan que para ello se necesitaba conocer los ángulos, otros que multiplicando el perímetro y el área y otros directamente afirmaron no tener una idea de cómo calcular el volumen, a excepción de un grupo que mediante los elementos de la aplicación, afirmaron que debían operar el área de la base con otros elementos.

Después de responder estas preguntas, los estudiantes empezaron con la fase de exploración de la app de RA, donde tuvieron que responder a preguntas como: “**¿Qué datos se necesitan para realizar el cálculo del espacio que ocupa una pirámide egipcia?**” de la cual se pudo obtener datos mucho más precisos respecto a la idea que tenían los estudiantes sobre cómo se puede llegar a calcular el espacio que ocupa una pirámide, obteniendo respuestas bastante acercadas a la esperada, como:

Figura 21

Pregunta 1, subtarea 3, tarea 1

calcular su altura, su base y su volumen
para saber que tanto espacio ocupa.

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre los datos para calcular el volumen. Fuente:

Producción grupo 3.

Esta respuesta, aunque incluye dos elementos clave como la base y la altura, muestra una confusión conceptual al incluir el volumen dentro de los datos necesarios para calcular el volumen mismo. Este hecho sugiere que los estudiantes aún no logran diferenciar entre los **datos requeridos** y el **resultado que se obtiene** al realizar el cálculo del volumen. Esta dificultad es común cuando se introduce el volumen, y refleja la necesidad de trabajar de manera más explícita la estructura de las fórmulas, así como el significado de cada uno de sus componentes.

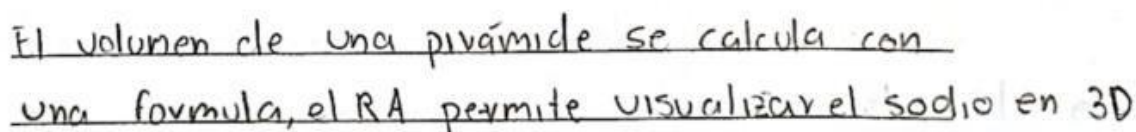
Aunque inicialmente algunos estudiantes mezclaban datos (como perímetro o ángulos), es necesario mencionar que la posibilidad de **manipular el objeto tridimensional en RA** permitió que los estudiantes visualizaran con mayor claridad qué representa cada magnitud. Por ejemplo, al ver cómo la altura es perpendicular a la base o cómo cambia el volumen al variar esa dimensión, se favorece el proceso de aprendizaje de variables tradicionalmente difíciles de imaginar en el

plano. Esta interacción activa con el sólido contribuye a que los estudiantes construyan significados más profundos y conecten el procedimiento con su representación geométrica real.

Por su parte, cuando se pidió a los estudiantes **“Indica la forma en la que calcularías el volumen que ocupa una pirámide egipcia, considerando los resultados que te ofrece RA sólidos”** Se encontró que las respuestas fueron menos precisas, pero de igual forma se evidencia un dominio leve del concepto matemático de volumen y de su aplicación. Como se puede evidenciar a continuación:

Figura 22

Pregunta 2, subtarea 3, tarea 1.



El volumen de una pirámide se calcula con una fórmula, el RA permite visualizar el solido en 3D

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre el cálculo del volumen de una pirámide. Fuente: Producción grupo 5.

Esta respuesta resulta ser un poco limitada, ya que muestra cómo algunos estudiantes aún no logran ver una relación entre las herramientas que ofrece el artefacto con el cálculo del objeto matemático que se busca abordar, ni mencionan cómo la visualización tridimensional puede apoyar la identificación de las dimensiones relevantes como la altura o el área de la base. Además, cabe resaltar que esta fue una de las preguntas donde más dificultad tuvieron los estudiantes al momento de responder, porque en las demás preguntas se evidencia que fue muy positiva la interacción del estudiante con el objeto matemático a través del artefacto.

Tarea 2. Explora, construye y calcula como un ingeniero egipcio.

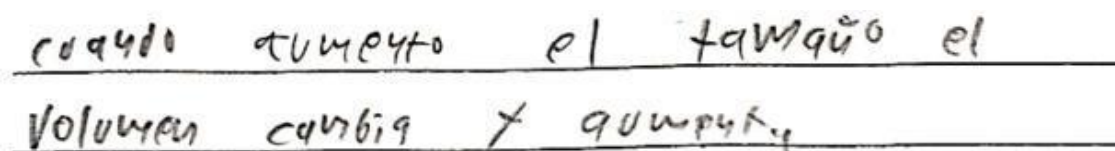
De acuerdo con lo mostrado anteriormente de la primera tarea donde se planteó dar cuenta de las fases de enganche y exploración propuestas en el modelo 5E, a través de la visualización

del objeto matemático por medio del artefacto de RA en 3D; en esta segunda tarea se buscó dar cuenta de las fases de explicación y elaboración mediante una serie de preguntas como las que se muestran continuación.

¿Qué relación existe entre el tamaño y el volumen cuando se duplica la medida de las aristas en un tetraedro? Los estudiantes lograron determinar por medio de la visualización del objeto matemático a través del artefacto que había una relación directa entre el tamaño del tetraedro y su volumen, dicho de otra manera, mientras el tamaño aumenta el volumen también aumenta o que si el volumen disminuye el tamaño también disminuye como se muestra a continuación una de las respuestas de los estudiantes.

Figura 23

Pregunta 1, subtarea 1, tarea 2.



cuando aumento el tamaño el
volumen cambia x quince

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre la relación entre tamaño y volumen. Fuente:

Producción grupo 2.

De acuerdo a la respuesta anterior de uno de los grupos se logra reconocer que por medio de la visualización que permitía el artefacto los estudiantes lograron dar cuenta que en este tipo de sólidos (tetraedro) tiene unas particularidades las cuales consisten en que si se aumenta el tamaño de una de sus aristas las demás hacen lo mismo.

Teniendo en cuenta esto encontramos una relación entre el las aristas, la altura y el volumen, que los estudiantes no lo escribieron tan claro en sus respuestas pero si lograron reconocer una de las tres relaciones importantes que tiene este solido geométrico entre el tamaño de las aristas y el volumen, por medio de esta relación que lograron construir junto con otras preguntas surge la posibilidad que ellos construyan la idea del porqué es un sólido regular, además

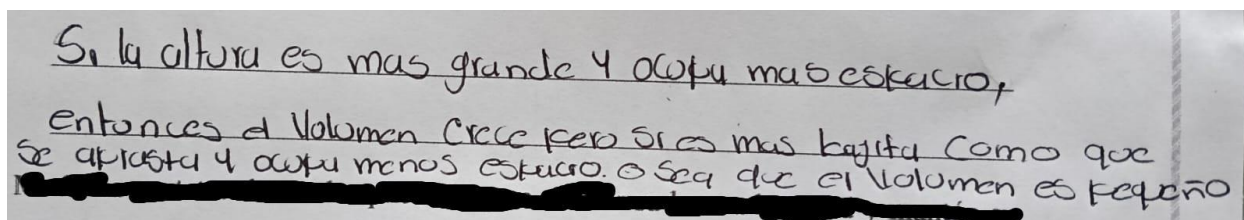
del significado que tiene que un objeto matemático sea regular como por ejemplo: que todas sus caras sean iguales y sus aristas tengan la misma longitud como también que en cada uno de sus vértices concurra el mismo número de caras.

Relacionado con la segunda pregunta **¿Qué sucede con el volumen de un tetraedro si se aumenta el tamaño de su altura? ¿Y si se disminuye? Justifica tu respuesta.** Cuatro de los 6 grupos al dar respuesta a la pregunta mencionaron que había una relación entre el volumen, la altura y la dimensión de la arista, Dado que existía una relación de proporcionalidad directa entre los tres componentes del tetraedro, de modo que un aumento o disminución en uno de ellos implicaba una variación correlativa en los demás.

La RA permite realizar transformaciones que serían muy complejas con materiales físicos o dibujos, como escalar, rotar y modificar dimensiones con inmediatez, los estudiantes no solo observaron los efectos de cambiar la base o la altura, sino que **evidenciaron de manera directa el impacto en el volumen**, generando relaciones proporcionales de forma intuitiva. Mostrando una relación directa entre la altura y el espacio que ocupa la pirámide haciendo referencia al volumen.

Figura 24

Pregunta 2, subtarea 1, tarea 2.



Si la altura es mas grande y ocupa mas espacio,
entonces el Volumen crece pero si es mas bajita como que
se aprieta y ocupa menos espacio. O sea que el Volumen es pequeño

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre la relación entre tamaño y volumen. Fuente:

Producción grupo 5.

Lo anterior se puede evidenciar de manera más detenida en la siguiente respuesta:

Aquí, los estudiantes usan expresiones como “queda más alto” o “se aplasta” para justificar cómo el volumen cambia. Y, aunque no mencionan la fórmula o cómo calcular el volumen, su razonamiento se alinea con la lógica de la relación directa entre el volumen y la altura. Este tipo de respuesta nos muestra que los estudiantes han interiorizado el vínculo entre dimensiones geométricas y espacio ocupado, lo cual es un avance importante en la comprensión del volumen como una magnitud tridimensional.

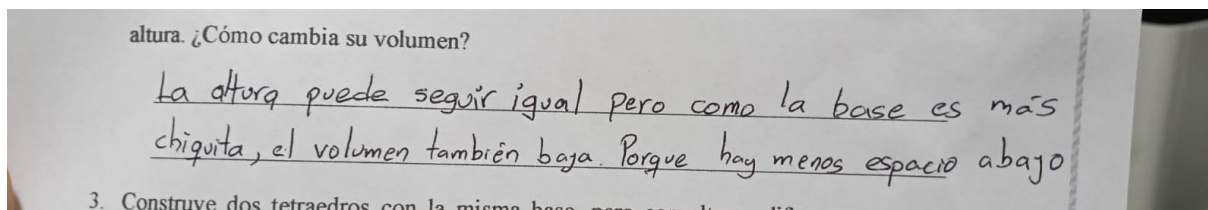
Posteriormente, los estudiantes tuvieron que dar respuesta a la pregunta que decía:

Modifica un tetraedro en la aplicación para reducir su base a la mitad ¿mantiene su altura? ¿Cómo cambia su volumen?

De esta pregunta se obtuvo, que un par de grupos dieron respuestas bastante cercanas a la esperada, esto se puede ver reflejado en lo dicho por el siguiente grupo:

Figura 25

Pregunta 3, subtarea 1, tarea 2.



Nota. Respuesta de los estudiantes sobre la relación entre tamaño y volumen. Fuente:

Producción grupo 4.

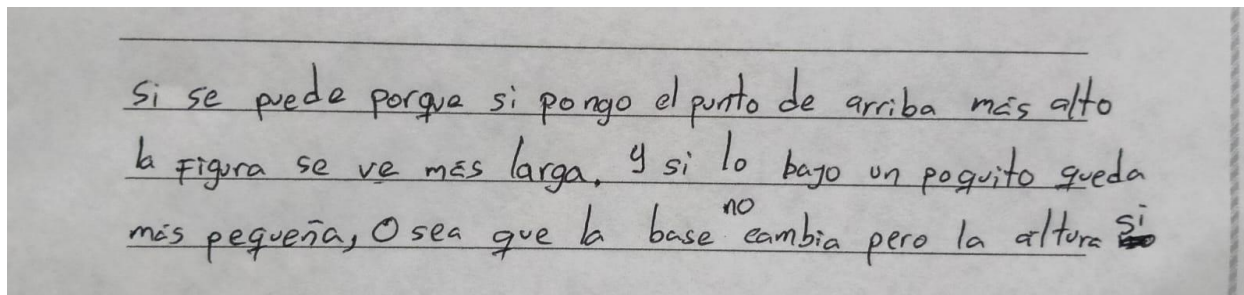
Aquí se evidencia como los estudiantes reconocen que al hacer “la base más chiquita”, el volumen disminuye, y usan una idea visual (“menos espacio abajo”) para justificarlo. Esta explicación evidencia que el grupo no está simplemente repitiendo una fórmula, sino que está razonando con base en lo que ha observado y manipulado en la aplicación RA.

Aunque estas expresiones no adoptaron un marco formalizado de representación matemático, sí evidencian razonamiento en la manera de plasmar sus respuestas. La ventaja de la RA aquí es crucial: al permitir experimentar con cambios en las dimensiones y ver el resultado de inmediato, se crea un vínculo directo entre **manipulación, observación y generalización**. Esto es difícil de lograr solo con fórmulas o modelos rígidos, por lo que se puede afirmar que en este caso la RA potencia el desarrollo del pensamiento geométrico.

Después los grupos debían dar respuesta a la siguiente pregunta: **¿Crees tú que se puede Construir dos tetraedros con la misma base, pero con alturas diferentes?** La cuál proporcionó respuestas como:

Figura 26

Pregunta 4, subtarea 1, tarea 2.



Nota. Respuesta de los estudiantes sobre la relación entre tamaño y volumen. Fuente:

Producción grupo 6.

Esta pregunta que trata sobre la posibilidad de construir tetraedros con la misma base pero diferente altura, permite evaluar el nivel de abstracción espacial. Se evidencia que los estudiantes mencionan que al mover el “punto de arriba” (es decir, el vértice opuesto a la base) se puede cambiar la altura sin alterar la base. Si bien no logran formalizar su idea, se refleja que el razonamiento geométrico es correcto. Lo que sugiere que han comprendido que el volumen no depende únicamente de la forma del sólido, sino también de cómo se posicionan sus elementos.

Subtarea 2. Emplea y elabora.

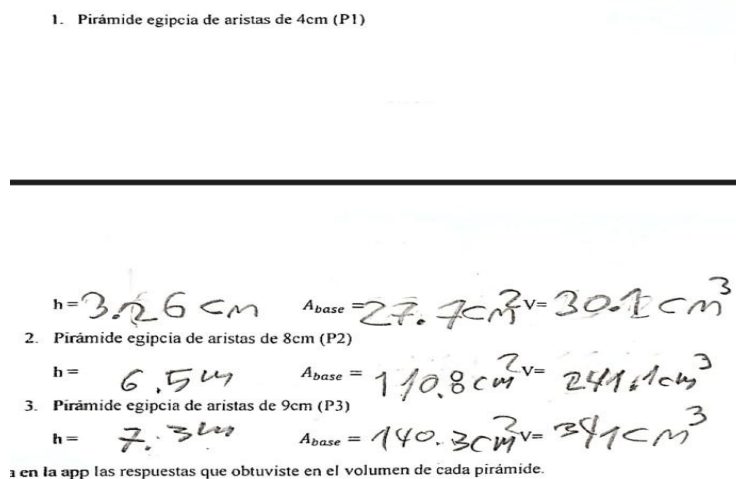
Esta subtarea tenía una finalidad bastante clara, que era que la de presentar a los estudiantes cómo es que funciona la fórmula para calcular el volumen del tetraedro y cómo es que esta fórmula depende directamente del tamaño de las aristas.

Debido a esto, en esta subtarea se logró que los estudiantes pudieran no solo poner en práctica la fórmula para calcular el volumen de manera satisfactoria, sino que también calcularan el tamaño que debería tener el sólido a partir del tamaño de las aristas. Se afirma que se logró, puesto que al pedirles a los estudiantes que construyeran los tres tetraedros, a partir de unas aristas definidas, todos los grupos respondieron exitosamente a las preguntas que daban cuenta sobre qué tamaño debía tener entonces la altura, el área de la base y el volumen.

Esto se pudo comprobar gracias a las respuestas y construcciones que se muestran a continuación:

Figura 27

Pregunta 1, subtarea 2, tarea 2.



Nota. Respuesta de los estudiantes sobre el cálculo del volumen. Fuente: Producción grupo 6.

El hecho de que los seis grupos respondieran de manera acertada cada uno de los cálculos y pudieran construir sin problemas los tres tetraedros en el artefacto, refleja que se logró un dominio adecuado de las fórmulas presentadas denotando entonces que los conocimientos nuevos que se presentaron pudieron ser aplicados en un contexto práctico que exigía la articulación entre el razonamiento geométrico y el uso del recurso tecnológico.

Este resultado sugiere no solo una apropiación de la estructura algebraica del volumen, sino también una comprensión espacial de los elementos que intervienen en su cálculo (base y altura), facilitada por la manipulación activa del sólido en RA. Asimismo, se evidencia un avance en la autonomía de los estudiantes para tomar decisiones, construir modelos y verificar resultados, lo cual da cuenta del cumplimiento de los propósitos de la segunda fase del diseño, orientados al afianzamiento conceptual mediante la experiencia directa y guiada.

Subtarea 3. Transformando el tetraedro.

Con el fin de identificar las relaciones encontradas por los estudiantes mediante la comparación de la subtarea 2, se hace una serie de preguntas que buscan que los estudiantes expliquen dichas relaciones.

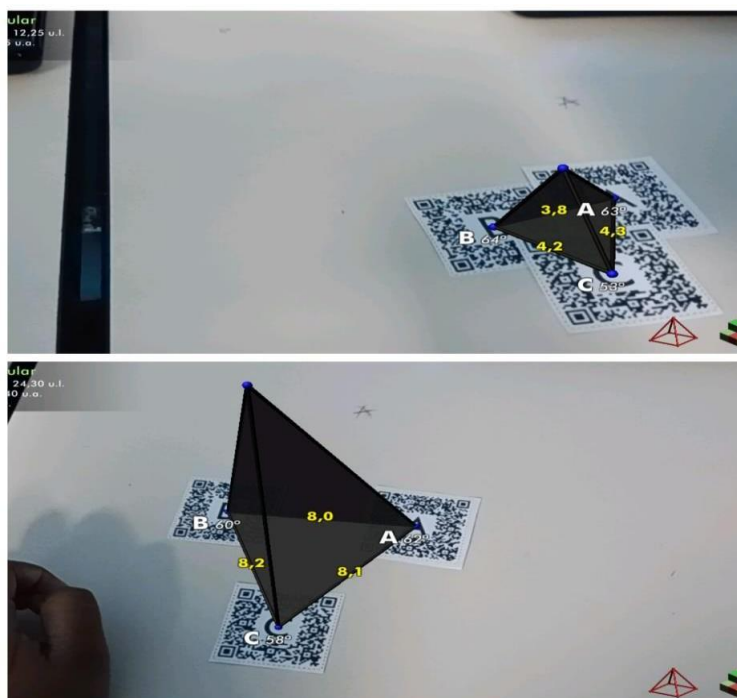
En primer lugar, para las pirámides de aristas 4cm y 8 cm, los estudiantes evidenciaron que ante un crecimiento del doble de las aristas, el volumen aumenta de manera directamente proporcional. En algunos casos en particular se evidencian respuestas más específicas como el hecho de que si se aumenta el doble en las aristas, también aumenta el doble en la altura, mientras que el crecimiento del volumen es exponencial, puesto que, ante un incremento del doble en el

tamaño de las aristas, el volumen aumenta aproximadamente 8 veces más, mostrando un conocimiento más detallado sobre lo que se espera en estas actividades.

Estas relaciones surgieron gracias a la comparación y revisión de los datos que realizaron los estudiantes con cada una de las construcciones que realizaron como se evidencia a continuación.

Figura 28

Visualización de pirámides de 4 y 8 centímetros



Nota. Grupo 4 visualizando la representación gráfica de la pirámide por medio del artefacto (Sólidos RA) Fuente: Registro filmico

La imagen anterior refleja las construcciones de los estudiantes, quienes además de comprobar que los cálculos realizados con la fórmula fueron correctos, pudieron visualizar de manera clara cómo es que se ve reflejado en el sólido este cambio de volumen, fortaleciendo la ideas que se habían obtenido previamente, como el hecho de que mantiene siempre la forma, pero que cambia la altura y otras relaciones que se mencionaron en las diferentes respuestas.

Tarea 3. Evaluando saberes.

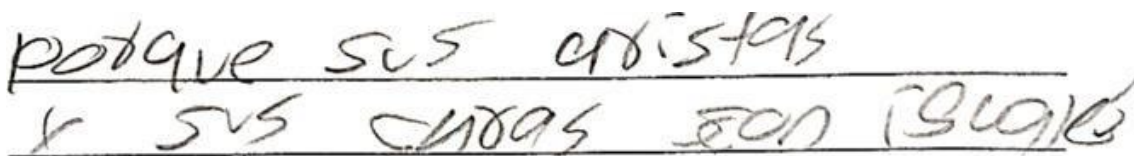
La tarea 3 se diseñó con el propósito de reunir evidencias del aprendizaje de los estudiantes tras su interacción con el objeto matemático por medio del artefacto. Esta tarea tiene un rol muy importante dentro del modelo de aprendizaje 5E, buscando dar cuenta de la fase de evaluación, permitiendo evaluar la forma en que estudiantes lograron consolidar y formalizar los conocimientos adquiridos en las tareas anteriores que daban cuenta de las fases de: enganche, exploración, explicación y elaboración.

A continuación, se presenta el análisis de las preguntas que conforman esta tarea.

En primer lugar, los estudiantes debían responder **¿Por qué un tetraedro es un sólido regular?** Al dar respuesta de esta pregunta los estudiantes nos permiten reconocer si lograron identificar las propiedades que caracteriza a un sólido regular, por medio de la visualización que hicieron del objeto matemático a través del artefacto en las tareas anteriores, a continuación, se muestra una de las respuestas de los estudiantes.

Figura 29

Pregunta 1, tarea 3.



por que sus aristas
y sus caras son iguales

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre la regularidad del tetraedro. Fuente: Producción grupo 3.

De la respuesta anterior obtenida por el grupo 3 se evidencia que lograron dar la razón de dos elementos que caracterizan a un sólido regular, aunque no son claros en la forma de expresarlo se logra reconocer que hicieron referencia a que todas las aristas del sólido eran de igual medida y que la forma de sus caras también, permitiendo resaltar que al igual que ellos otros cuatro grupos

daban cuenta de estos elementos, llevándonos a concluir que por medio de la visualización del objeto los estudiantes reconocieran aspectos importantes de la regularidad del tetraedro.

Relacionado con la segunda pregunta **¿Qué diferencias logras reconocer en un tetraedro si cambiamos las dimensiones de sus aristas o su altura?** Esta pregunta se relaciona con la anterior, la cual busco dar cuenta de la regularidad del objeto matemático y la relación de algunas de las características del tetraedro.

Los estudiantes mencionaron en sus respuestas que había una relación entre las aristas y la altura del tetraedro así como con el volumen, si aumentamos las dimensiones de las aristas la altura aumenta de igual manera lo hacia el volumen, entonces esto también nos permite reconocer que el artefacto es importante al momento de permitir la visualización del objeto matemático para que los estudiantes logaran dar cuenta de esa relación, como se muestra en el siguiente fragmento registrado en el video, mostrando una interacción entre el profesor y el estudiante E8 y E6 como se refleja a continuación:

Nomenclatura: Profesor: P - Estudiante: E1-Minuto 1:56:00- 1:57:05

P: ¿Qué diferencias logras reconocer en un tetraedro si cambiamos las dimensiones de sus aristas o su altura?

E8: Si aumentamos el tamaño de las aristas también aumenta su altura.

E6: Además aumenta el volumen.

P: Muy bien, ¿Qué más podemos decir?

E6: Que, si disminuimos el tamaño de la arista, también disminuye su altura y el volumen.

P: Okey, muy bien. ¿Qué más podrían concluir?

E8: Que se relacionan de forma directa.

P: Si, muy bien. ¿Qué más visualizaron? ¿Cuándo lo movíamos, el tetraedro cambiaba?

E8: Si, cambiaba su tamaño, pero mantenía su forma

En este fragmento se logra evidenciar lo que mencionábamos anteriormente que los estudiantes reconocieron que había una relación directa entre el volumen, las aristas y la altura, pero además mencionaron un aspecto muy importante al mencionar que cambiaba su tamaño, pero mantenía su forma, esto ligado con lo dicho en la anterior pregunta nos permite entender que ellos reconocieron de manera directa las características para que un sólido fuese regular.

Relacionado con la tercera pregunta **¿Qué características geométricas tiene una pirámide?** Se logra evidenciar que los estudiantes en la interacción del objeto matemático por medio del artefacto en 3D, consiguieron dar cuenta de las características que tiene una pirámide como las aristas, los vértices y las caras como se muestra a continuación.

Figura 30

Pregunta 3, tarea 3

A handwritten note on lined paper that reads "aristas, vértices, caras". The word "aristas" is written with a tilde over the 'i', and "vértices" has a tilde over the 'e'. The word "caras" is written with a tilde over the 'a'. There is a small mark to the right of the text.

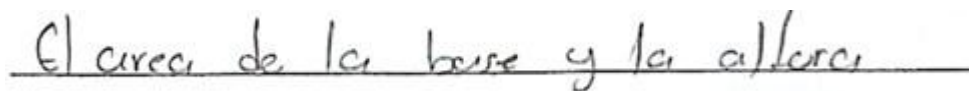
Nota. Respuesta de los estudiantes sobre las características de una pirámide. Fuente: Producción grupo 4.

La anterior respuesta deja ver que a través del proceso o del desarrollo del diseño los estudiantes por medio de la visualización de un objeto matemático abstracto lograron reconocer las características, permitiendo concluir que es de suma importancia el trabajo de sólidos como el tetraedro desde un plano tridimensional lo que ayuda a que los estudiantes a visualizar una representación gráfica del objeto matemático.

Relacionado con la cuarta pregunta **¿Qué elementos se consideran para calcular el volumen de un tetraedro?** Los estudiantes al responder esta pregunta plasmaron en sus hojas de trabajo que para calcular el volumen del tetraedro era necesario conocer las dimensiones de la arista, el área de la base y su altura, teniendo en cuenta que esos datos al remplazarlo en la fórmula les permitía conocer el valor de los sólidos, como se muestra a continuación.

Figura 31

Pregunta 4, tarea 3



El área de la base y la altura.

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre los elementos para calcular el volumen del tetraedro. Fuente: Producción grupo 5.

De la respuesta obtenida, se observó que un número importante de estudiantes logró identificar estos dos elementos, lo que denota una apropiación general del procedimiento abordado en las tareas anteriores. Además, esta respuesta nos permite reconocer la mediación instrumental que se dio en el momento que el estudiante manipulo el objeto matemático por medio del artefacto y logra dar cuenta de los elementos mencionados anteriormente.

Finalmente, la pregunta: **“¿Qué es el volumen?”** permitió evaluar el grado de abstracción y formalización alcanzado por los estudiantes en relación con el concepto central de este diseño. En las respuestas analizadas se encontró que, en su mayoría, los estudiantes definieron el volumen como “el espacio que ocupa un cuerpo”, lo cual es una conceptualización adecuada dentro del nivel escolar correspondiente, como se muestra a continuación.

Figura 32*Pregunta 5, tarea 3*

El espacio que ocupa un objeto
en el espacio tridimensional

Nota. Respuesta de los estudiantes sobre el significado del volumen. Fuente: Producción grupo 4.

Esta respuesta refleja que, a lo largo del diseño, los estudiantes lograron construir una idea general del volumen como una magnitud métrica tridimensional, asociada a los cuerpos geométricos. También cabe resaltar que los estudiantes no habían trabajado este concepto matemático anteriormente en el año lectivo, inicialmente se les preguntó sobre el volumen y no daban cuenta de este, lo cual nos permite identificar que la mediación entre el estudiante con la manipulación objeto matemático por medio del artefacto da cuenta de la construcción del conocimiento matemático.

En síntesis, el análisis presentado previamente evidencia que la secuencia de tareas diseñada con el modelo 5E, mediada por la aplicación Sólidos RA, permitió a los estudiantes acercarse de forma activa, visual y detallado hacia el concepto de volumen del tetraedro. Pues a lo largo de las distintas fases, se observó cómo la RA facilitó no solo la motivación y el interés por el contenido, sino también la construcción de ideas geométricas que usualmente resultan abstractas o difíciles de representar.

Además, la posibilidad de manipular modelos tridimensionales en tiempo real fortaleció tanto la identificación de propiedades del sólido como el razonamiento relacionado con el cálculo del volumen. Aunque persistieron algunas imprecisiones conceptuales, los estudiantes lograron aplicar la fórmula con éxito y explicar con sus propias palabras las relaciones entre dimensiones y volumen.

En consecuencia, se reafirma el valor de incorporar tecnologías emergentes como la RA en el aula, no como un complemento visual, sino como un recurso que transforma la experiencia de aprendizaje y abre nuevas posibilidades para el entendimiento profundo de las matemáticas.

Capítulo V. Conclusiones

En el presente capítulo se exponen las conclusiones derivadas del desarrollo de la investigación, abordadas desde cuatro momentos fundamentales. En un primer momento corresponde a los aspectos relevantes asociados a la problemática de estudio, la metodología empleada y el marco teórico que sustenta el análisis. En un segundo momento se contempla el grado de cumplimiento de los objetivos planteados y su pertinencia en el desarrollo de este trabajo. En un tercer momento se consideran aspectos que devienen de los análisis iniciales y finales. Para finalizar, se abordan los alcances, limitaciones y recomendaciones derivadas del trabajo.

Relacionado con el primer momento, se corroboró como relevante el indagar sobre; ¿Cuál es la incidencia de una propuesta basada en la RA para el aprendizaje sobre el volumen de tetraedros usando el modelo 5E en grado octavo de educación básica en la I.E Villa Colombia?, siendo esto el foco de este trabajo, donde se demostró que la propuesta basada en RA tiene elementos que permiten reconocer las representaciones abstractas de objetos matemáticos como es caso de las pirámides, haciendo evidente el reconocimiento de sus propiedades a través de la visualización que proporciona el artefacto. Además de permitir un dinamismo e interacción con los objetos que da paso a la exploración y descubrimiento. Aspectos que inciden en elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos por parte del educando, siendo este uno de los procesos curriculares que se desarrolló en esta propuesta.

Asimismo, por medio de la metodología de investigación basada en el enfoque cualitativo fue fundamental al momento del desarrollo del diseño de tareas, debido a que permitió analizar los aspectos de carácter didáctico, cognitivo e instrumental que sucedieron en el aula, con la interacción de la secuencia de tareas. Donde el artefacto fue potencial para generar interacción con el estudiante, con sus pares académicos y con el profesor a cargo de la implementación.

Ahora bien, respecto al marco teórico, fue fundamental para abordar la problemática de investigación mencionada en apartados anteriores. Dicho marco se sustentó por medio de los referentes teóricos articulados de manera coherente (matemático, curricular, didáctico y cognitivo), los cuales permitieron consolidar la secuencia de tareas, dar paso a la implementación y analizar los resultados obtenidos. Este último aspecto es fundamental, dado que propiciaron reflexiones sobre los aciertos y posibles ajustes para una nueva intervención (aspectos que se desarrollarán en apartados posteriores).

El primer referente contemplado, fue el matemático centrado en el tetraedro, enfatizando en sus propiedades geométricas como figura regular, sus dimensiones fundamentales (arista, altura y área de la base) y las relaciones métricas que permiten calcular su volumen. Estos elementos fueron el pilar para tomar decisiones en relación con el segundo referente, el cual se centró en aspectos curriculares, dado que permitió establecer, pensamientos, procesos, contexto, DBA y estándar a desarrollar. En relación con los estándares se consideró la coherencia horizontal y vertical como aspecto relevante para determinar los conocimientos previos y la relación con otros pensamientos.

De acuerdo con lo anterior cabe resaltar que se cumplió el estándar propuesto en el momento que los estudiantes dieron cuenta en la implementación del conocimiento matemático a través de producciones escritas como también cuando verbalizan las características del objeto matemático y las estrategias que utilizaron para el cálculo del volumen del tetraedro.

Así pues, los anteriores referentes se articulan con el tercero que aborda aspectos didácticos para dar cuenta del aprendizaje por medio de lo establecido en el modelo 5E, debido a que suministró elementos importantes para estructurar el diseño de la secuencia de tareas, en conjunto con la app sólidos RA. Este artefacto permite a los estudiantes explorar, manipular y visualizar las

representaciones simbólicas y gráficas del objeto abstracto. Lo cual conllevó a analizar las conexiones entre los anteriores referentes con el referente cognitivo, el cual aborda la mediación del estudiante con el artefacto para dar cuenta del aprendizaje sobre el objeto matemático.

Lograr estructurar y desarrollar estos referentes permitió realizar el diseño de una secuencia de tareas que abordara y diera cumplimiento de los objetivos de la investigación, empezando por la consolidación de los referentes, que dio paso a desarrollar una secuencia que lograra integrar el uso de la RA como un artefacto para potenciar el aprendizaje del volumen del tetraedro en grado octavo.

Esta consolidación de referentes permitió a su vez dar cumplimiento con el segundo objetivo específico, orientado al diseño de una propuesta de tareas basada en el modelo 5E utilizando la aplicación Sólidos RA, pues se logró estructurar una secuencia coherente, compuesta por tres tareas y siete subtarear, que integró de buena forma todas las fases del modelo 5E con las funcionalidades de la herramienta digital, permitiendo que los estudiantes dieran cuenta de manera secuencial de los elementos y características del tetraedro, de cómo funciona la fórmula para calcular el volumen y finalmente del concepto del volumen como objeto matemático.

Ahora bien, respecto al tercer objetivo específico, centrado en identificar las mediaciones instrumentales que se presentaron durante la implementación de la secuencia de tareas, también se le pudo dar cumplimiento, puesto que la aplicación Sólidos RA funcionó inicialmente como un artefacto que ofrecía a los estudiantes la posibilidad de visualizar y manipular el sólido en un entorno tridimensional, para posteriormente, mediante la interacción con este pudieran dar paso a la creación de esquemas y técnicas que les permitiera apropiarse del artefacto y fortalecer el proceso de aprendizaje del concepto de volumen.

Basados en el cumplimiento de los objetivos específicos, se puede afirmar que el objetivo general, el cual estaba orientado a analizar la incidencia de una secuencia de tareas con RA sobre el volumen de tetraedros mediante el modelo 5E, aportó resultados que permiten afirmar su cumplimiento, puesto que la manera en la cual la secuencia fue diseñada, estructurada e implementada, brindó insumos para realizar un análisis detallado de cómo fue y cómo se evidenció dicha incidencia en los estudiantes.

Se logró identificar como la RA jugó un papel trascendental puesto que se utilizó como un artefacto en la clase que no solo despertó el interés de los estudiantes, sino que favoreció el aprendizaje del volumen del tetraedro, ya que permitió interactuar con el objeto matemático de una forma más tangible y con una visualización más detallada, favoreciendo que los estudiantes identificaran tanto las características del sólido como las relaciones entre los elementos de este y la fórmula.

A partir del análisis de la puesta en acto de la secuencia de tareas, se destacó que el trabajo con el volumen del tetraedro puede abordarse de manera amplia con estudiantes de grado octavo mediante propuestas centradas en la exploración e interacción. El uso de la app Sólidos RA permitió una interacción inmediata con los sólidos tridimensionales, generando una percepción positiva en los usuarios desde el momento inicial de su uso. Este interés inicial se mantuvo a lo largo del desarrollo de las actividades, debido a que muchos manifestaron que era la primera vez que trabajaban con este tipo de tecnología, lo que favoreció la participación constante de los estudiantes, lo cual dio lugar a espacios de diálogo, descubrimiento y análisis colectivo del objeto matemático.

Uno de los aspectos más relevantes fue la posibilidad que tuvieron los estudiantes de identificar, de forma autónoma, los elementos del sólido involucrados en el cálculo del volumen. Aunque en un inicio algunos confundían los datos con el resultado, la manipulación del artefacto contribuyó a que aclararan estas ideas progresivamente. Además, el desarrollo de las tareas favoreció el planteamiento de preguntas entre compañeros, la validación de ideas mediante la observación de los cambios en los sólidos y la identificación de regularidades entre dimensiones y volumen, lo que permitió avanzar en la construcción del conocimiento sin necesidad de intervenciones constantes del profesor.

A lo largo del proceso, se evidenció que la visualización ofrecida por el entorno de RA no solo ayudó a identificar con precisión los atributos del tetraedro, sino que también posibilitó establecer comparaciones entre las diferentes construcciones que contempla la secuencia de tarea. Esto se reflejó en afirmaciones de los estudiantes que reconocían, por ejemplo, que aunque el tamaño del tetraedro se modifica, su forma se mantiene. Este tipo de observaciones revelan un acercamiento al objeto matemático, más allá de la simple reproducción de fórmulas, y da cuenta del tipo de pensamiento espacial que se promovió a lo largo del trabajo.

Con base en las observaciones de clase, los registros de las tareas y las grabaciones, se identificó que la mayoría de los estudiantes logró aplicar correctamente la fórmula del volumen, relacionando adecuadamente las dimensiones del tetraedro. Sin embargo, algunas dificultades persisten, especialmente en la identificación de la altura como dimensión perpendicular a la base. Este hallazgo sugiere la necesidad de reforzar dicho concepto en otros espacios, donde se trabaje la idea de altura desde otra perspectiva.

Además, también surgieron razonamientos que, aunque no estaban previstos como objetivos directos, evidenciaron relaciones emergentes con el concepto de proporcionalidad.

Algunos estudiantes hicieron observaciones sobre los cambios en el volumen al modificar dimensiones, lo que permitió abrir espacios para introducir nociones relacionadas con el pensamiento multiplicativo. Frases como “este tiene más volumen porque creció en todas las partes” indicaron que los estudiantes estaban comenzando a establecer vínculos entre dimensiones y resultado, generando una base para aprendizajes futuros.

En términos generales, el grupo de estudiantes mostró avances significativos en la apropiación del concepto de volumen del tetraedro, pese a las dificultades iniciales identificadas. El diseño estructurado de las tareas, el acompañamiento del profesor y potencialidades del artefacto permitieron superar obstáculos y dar lugar a un aprendizaje de las características del tetraedro y el cálculo de su volumen.

Respecto a los alcances de la presente investigación, se identificó que uno de los principales fue el diseño y la aplicación de una secuencia de tareas estructurada a partir del modelo 5E, que permitió planear la enseñanza del volumen del tetraedro no como un conjunto de contenidos aislados, sino como un proceso secuencial, situado y coherente. Donde cada una de las cinco fases del modelo 5E (enganche, exploración, explicación, elaboración y evaluación) fue cuidadosamente articulada con la RA, lo cual permitió que los estudiantes no solo se involucraron con el contenido desde el interés inicial, sino que también avanzan hacia niveles más profundos de análisis, argumentación y construcción de ideas matemáticas.

Otro alcance importante fue la integración de la aplicación Sólidos RA como eje central de la propuesta. Esta herramienta permitió generar una experiencia de aprendizaje distinta a la que se vive normalmente en clases de geometría. La posibilidad de manipular sólidos tridimensionales, construir modelos con diferentes dimensiones, rotar, escalar y observar los efectos de los cambios en tiempo real representó una ruptura con los enfoques tradicionalmente centrados en el uso de

papel, lápiz o figuras planas. En ese sentido, la RA actuó no como un complemento, sino como una herramienta novedosa para el aprendizaje, que brindó a los estudiantes una forma interactiva y visual de identificar el objeto matemático.

Adicionalmente, a partir de los hallazgos obtenidos, se sugiere también promover una mirada más crítica y propositiva frente al uso del celular en espacios educativos. La experiencia mostró que, cuando este dispositivo se emplea con un propósito didáctico claro y acompañado de una guía profesor adecuada, puede contribuir a la construcción del conocimiento, especialmente en contenidos de carácter abstracto y que se potencian visualmente con el uso de artefactos tridimensionales. Por tanto, se invita a las instituciones a superar la estigmatización del celular como distractor, y a considerarlo como una herramienta pedagógica válida en contextos geométricos.

Considerando que este trabajo se realizó con una prueba piloto de 14 estudiantes, si se desea proyectar a un grupo regular se debe tener en cuenta que es recomendable ampliar el tiempo de implementación para permitir una mayor consolidación de los aprendizajes o incluso dividir el tiempo de implementación en dos sesiones distintas para que los estudiantes puedan tener un mayor tiempo de interacción con el recurso.

De igual forma, para otras investigaciones se recomienda replicar la experiencia con otros grupos de grado octavo y en contextos diversos, tanto urbanos como rurales, para observar cómo varía la respuesta de los estudiantes frente a la RA y qué ajustes deben realizarse en el diseño en función de las características particulares de cada comunidad educativa. Este enfoque ampliado permitiría validar la propuesta desde una perspectiva más amplia.

Además, sería valioso incorporar instrumentos de evaluación mixtos (cuantitativos y cualitativos) que permitan contrastar percepciones, desempeños y niveles de apropiación conceptual antes y después de la intervención. Esto podría incluir rúbricas de desempeño, entrevistas semiestructuradas, encuestas de percepción, pruebas escritas o actividades de autoevaluación que den cuenta de los procesos de pensamiento que se activan con el uso de la RA.

A partir del trabajo realizado, se pueden proyectar nuevas rutas investigativas que permitan seguir profundizando en el aprendizaje de la geometría desde enfoques didácticos activos y apoyados en recursos digitales.

Una línea de investigación que podría derivarse de esta experiencia consiste en extender el trabajo hacia otros objetos geométricos tridimensionales, como prismas, pirámides o cuerpos redondos, para observar cómo varían las estrategias de mediación y qué nuevos desafíos didácticos emergen. Igualmente, sería pertinente aplicar este tipo de propuestas en otros niveles educativos desde grados más tempranos hasta los últimos años de secundaria para analizar cómo cambia la comprensión geométrica según el nivel de desarrollo del pensamiento espacial.

También resultaría valioso explorar otras formas de estructurar la secuencia de tareas, por ejemplo, integrando enfoques como la resolución de problemas, el aprendizaje basado en proyectos o incluso la gamificación. Esto permitiría comparar qué tipo de interacciones se generan con los contenidos y qué efectos tienen sobre las interacciones que se dan en la clase entre los estudiantes, el artefacto y el profesor. Finalmente, se espera que este trabajo sea objeto de interés para futuras investigaciones en el campo de la educación matemática para las generaciones venideras y brinde insumos para continuar explorando el uso de artefactos tecnológicos en el aula de clase.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, N., & Flórez, J. (2022). *El viaje. Un recorrido tecnológico por la geografía colombiana: Diseño, validación y aplicación de una Actividad Tecnológica Escolar (ATE) con realidad aumentada*. Trabajo de grado, Universidad de Bogotá.
- Aramendiz S. N. (2023). Secuencia didáctica mediada por las aplicaciones de realidad aumentada AR Sólidos platónicos y Geometría RA para el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de octavo grado
- Bacca, J., Baldiris, S., Fabregat, R., Graf, S., & Kinshuk. (2014). Augmented reality trends in education: A systematic review of research and applications. *Educational Technology & Society*, 17(4), 133-149.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). North Carolina: Information Age Publishing.
- Bieda, K., & Staples, M. (2020). Augmented reality in geometry education. *Journal of Educational Technology Research*, 15(3), 45-60.
- Cebreiro, B., & Fernández, M. C. (2004). Estudio de casos. *Diccionario enciclopédico de didáctica. Málaga: Aljibe*.
- Chadid, I. C., & Pérez, J. H. (2004). Primeros antecedentes sobre lo infinitamente pequeño. *Universitas Scientiarum*, 9(1), 13-22.

- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.
- Cruz Linares, J. K. (2020). *Propuesta para reducir el riesgo en el otorgamiento de crédito a los clientes de la empresa Wiener Lab—sede Colombia* (Doctoral dissertation, Corporación Universitaria Minuto de Dios).
- Da Silva, M. J. F. (2021). La construcción de fórmulas: una articulación entre geometría y álgebra. *Quintaesencia*, 12(1), 103-114.
- Del Cerro Velázquez, F., & Morales Méndez, G. (2017). Realidad aumentada como herramienta de mejora de la inteligencia espacial en estudiantes de educación secundaria. *Revista de Educación a Distancia*, 54(5).
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In P. Drijvers et al. (Eds.), *Mathematics Education in the Digital Era* (pp. 129-145). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7
- Espinoza Yantorno, C., Rojas García, C., & Trengove Thiele, E. (2022). *Estrategias basadas en el método TEACCH para estudiantes con diagnóstico de tea de nivel preescolar* (Doctoral dissertation, Universidad Academia de Humanismo Cristiano).
- Fayos, I. C. (2019). Demostración del volumen de la esfera, una muestra genético-histórica. *Opción: Revista de Ciencias Humanas y Sociales*, 35(90), 542-580.

Gaitán Rosas, J. C., Moreno Granado, C. D., & Yopasá Murcia, M. (2021). Modelado 3d y realidad aumentada para la enseñanza de los sólidos geométricos.

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2002). *Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de abril de 2020, de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Hernández Brito, L. M. (2020). *Euclides: Libros XI-XIII-XIII*.

Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. P. (2020). *Metodología de la Investigación. Las Rutas Cuantitativas, Cualitativa y Mixta*. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-1-4562-6096-5.

Hoyles, C., Noss, R. y Kent, P. (2004). Sobre la integración de tecnologías digitales en las aulas de matemáticas. *Revista Internacional de Informática para el Aprendizaje Matemático* , 9 , 309-326.

Jaramillo Carvajal, T. (2024). La integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje del volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo.

Jiménez V. y Comet C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades* Vol. 3 Nro. 2

Margolinas, C. (2013). Task design in mathematics education. *Proceedings of ICMI Study 22*. Springer.

Mariotti, MA & Bussi, MB (2008). Mediación semiótica en el aula de matemáticas: Artefactos y signos desde una perspectiva vygotskiana. *Manual de investigación internacional en educación matemática* , 746 .

- Martínez, J. O. (2024). La realidad aumentada y realidad virtual en la enseñanza matemática: educación inclusiva y rendimiento académico. *Edutec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (88), 62-76.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencia. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- MEN. (2016). Derechos básicos de aprendizaje.V.2. Bogotá, Colombia.
- Monje Álvarez, C. A. (2011). *Metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa, guía didáctica*. Universidad Surcolombiana.
- Moreno, A., Cerezo, A., & Cubero, S. (2020). Aplicación de la realidad aumentada en el aprendizaje de geometría: un estudio con estudiantes de secundaria. *Revista de Educación Matemática*, 32(1), 29-47.
- Narváez Puentes, F. A., & Casas Polanco, A. (2013). *Geometría Espacial* (Doctoral dissertation, Universidad Surcolombiana).
- Ortí Martínez, J. (2024). The impact of AR and VR in mathematics education. *EDUTECH. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 88, 65-82.
- Pujiastuti, H., & Haryadi, R. (2024). The effectiveness of using augmented reality on the geometry thinking ability of junior high school students. *Procedia Computer Science*, 234, 1738–1745.
- Pulache Panta, C. Y. Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de segundo grado de secundaria en tareas sobre la pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra.

- Quintero, J. (2020). Uso de la realidad aumentada en la enseñanza del cálculo vectorial. *Revista de Tecnología Educativa*, 35(2), 23-39.
- Rabardel, P. (2002). People and technology: A cognitive approach to contemporary instruments.
- Ríos-Cuesta, W. (2021). Desarrollo histórico del concepto de volumen y su tratamiento en libros de texto colombianos. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, 4(2), 155-172.
- Ruiz-Martín, H., & Bybee, R. W. (2022). The cognitive principles of learning underlying the 5E Model of Instruction. *International Journal of STEM Education*, 9(1), 21.
- Sánchez, E., García, M., & Pérez, J. (2021). Integrating augmented reality into mathematics teaching and learning and examining its effectiveness. *Educational Technology Research and Development*, 69(2), 391–409.
- Suwito, E., Suparman, S., & Wahyudin, W. (2019). The 5E instructional model: A constructivist approach for enhancing students' learning outcomes in mathematics. *Academia.edu*.
<https://www.academia.edu/67641888>
- Thabane, L., Ma, J., Chu, R., et al. (2010). "A tutorial on pilot studies: the what, why and how." *BMC Medical Research Methodology*, 10, 1-10.
- Van Teijlingen, E. R., & Hundley, V. (2001). "The importance of pilot studies." *Social Research Update*, 35
- Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget sobre la didáctica. *Revista Perspectivas XXVI*
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (Vol. 86). Harvard university press.

Yilmaz, R., & Goktaş, Y. (2021). The effect of augmented reality on students' understanding of geometry through the 5E model.

Yin, R. K. (2009). Case study research: Design and methods (4 ed.). Los Angeles, CA: Sage.

Anexos.

Autorización de filmación compartida a los padres de familia,



Rectoría – Dirección de Regionalización
Sede Norte del Cauca

Autorización de fotos, audios y videos para menores de edad.

Yo, _____,

Identificado(a) con cédula de ciudadanía _____

de _____, mayor de edad y residente en el municipio de _____

en el departamento del _____,

y en mi calidad de _____ (padre, representante legal, en su defecto, del ICBF por medio de los defensores y comisarios de familia competentes según los artículos 97 y 98 del código de Infancia y Adolescencia), obrando como representante del/la menor de edad, _____,

identificado/a con registro civil o tarjeta de identidad número _____,

de conformidad con lo dispuesto en las normas vigentes sobre protección de datos personales, en especial la Ley 1581 de 2012 y el Decreto 1074 de 2015, autorizo libre, expresa e inequívocamente a los estudiantes *Yulie Katherine Gutiérrez Manrique (1961364)* y *Julder Jamith Quitumbo Yule (1756769)* de la Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca de la carrera de pregrado *Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (3469)*, hacer uso de lo siguiente en pro de la investigación “Un Micromundo Para el Aprendizaje de Transformación de Rotación Mediado por Robótica en Grado Séptimo de Educación Básica con el objetivo principal: Reconocer los aportes que genera la implementación de un micromundo para el aprendizaje de la rotación mediado por robótica en estudiantes de séptimo grado.

Autorización.	FOTOS.	AUDIOS.	VIDEOS.	OTROS DATOS.
X	X	X	X	X

Reconozco que esta autorización se realiza con fines académicos y, por tanto, manifiesto que no se nos adeuda suma alguna por concepto de este documento. En consecuencia, me comprometo a no reclamar valor alguno por la utilización que hiciere los estudiantes de la Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca del programa de pregrado (3469) o cualquier otra persona, natural o jurídica, o que haya sido autorizada por los estudiantes de la propuesta de trabajo de grado para la utilización de las imágenes. Además, se enmarca que las actividades durante el desarrollo de la propuesta se observaran como objeto de estudio, análisis y reflexión en la práctica docente lo que trae consigo el interés fundamental de los

**Estamos en la renovación de la
acreditación institucional en alta calidad
2024-2034. ¡La vamos a lograr!**

Universidad del Valle
Sede Norte del Cauca - Campus Canajal
Carrera 13 No. 19 - 231 Via Cali - Popayán
Celular: +57 2 8294290 - +57 2 8298718
Correo electrónico: nortedelcauca@correounivalle.edu.co
Bancolombia de Guichao - Cauca, Colombia



Rectoría – Dirección de Regionalización
Sede Norte del Cauca

niños, niñas y profesora, en el respeto de sus derechos fundamentales.

La presente se firma el DÍA ____ del MES _____ de 2024

Suscribe:

Firma: _____

Nombre: _____

Celular: _____

**Estamos en la renovación de la
acreditación institucional en alta calidad
2024-2034. ¡La vamos a lograr!**

Universidad del Valle
Sede Norte del Cauca - Campus Canajal
Carrera 13 No. 19 - 231 Via Cali - Popayán
Celmutador: +57 2 6284290 - +57 2 6285718
Correo electrónico: nortedelcauca@correounivalle.edu.co
Santander de Quilichao - Cauca, Colombia

Diseño de tareas – Domina el volumen del tetraedro.

Domina el Volumen del Tetraedro: Un Viaje Interactivo con Realidad Aumentada

Colegio: _____ **Grado:** _____

Nombre: _____ **Edad:** ____ **Sexo:** ____ **F** ____ **M**

Objetivo: Permitir la exploración y resolución de problemas relacionados con el volumen del tetraedro en un contexto matemático implementando la realidad aumentada.

Tarea 1.

Subtarea 1. La realidad aumentada.



1. ¿Qué entiendes por realidad aumentada y por realidad virtual? ¿Son lo mismo? Explica tu respuesta.

2. ¿Qué relación puede mencionar entre la realidad aumentada y la geometría?

Subtarea 2. Acercamiento histórico a las pirámides.

Lee atentamente el siguiente texto que muestra un poco la historia de las pirámides egipcias:

“Las pirámides de Egipto son una de las construcciones más impresionantes y misteriosas consideradas como una de las 7 maravillas del mundo antiguo. Fueron construidas hace más de 4,500 años durante el período conocido como el Imperio Antiguo (alrededor del 2686-2181 a.C.). Estas majestuosas estructuras servían como tumbas para los faraones, los gobernantes de Egipto, quienes creían en una vida después de la muerte y preparaban estos monumentos para asegurar su viaje al más allá como lo plantea (Lehner, 1997; Shaw, 2000).

La más famosa es la Gran Pirámide de Guiza, construida para el faraón Keops. Con una altura original de 146 metros y una distancia de su base de 230 metros, fue la estructura más alta del mundo durante casi 4,000 años. Las pirámides no sólo son un símbolo del poder y la ingeniería avanzada de los antiguos egipcios, sino también un testimonio de su conocimiento en matemáticas, astronomía y arquitectura como lo menciona (National Geographic, s.f.; History.com, 2023). ”

Ahora, vamos a ver la representación de una pirámide con realidad aumentada. Para ello ingresa en la app de realidad aumentada “Sólidos RA” y escanea el siguiente código QR en la sección de visualización:



Responde las siguientes preguntas a partir de lo que visualizaste con el código.

1. ¿Cómo crees que los egipcios construyeron estas pirámides sin la tecnología moderna?

-
-
2. Considerando que esta es una réplica de una pirámide egipcia ¿Qué características puedes observar, al interactuar con la app Sólidos RA?

-
-
-
3. Mueve la pirámide egipcia, de forma que aumente y disminuya su tamaño ¿Qué características cambian cuando se generan estos movimientos y cuáles se conservan?

-
-
-
4. ¿Qué cálculos matemáticos crees que utilizaron los egipcios para diseñar sus pirámides? ¿o cuales usarías tu?
-
-

Subtarea 3. Explorando la RA

Sigue las instrucciones a continuación:

- Dentro de la app "Sólidos RA", representa un sólido en forma de pirámide egipcia de base triangular (tetraedro). Luego, identifica sus características y manipúlala de manera que puedas observar sus diferentes vistas.

- Usa la herramienta de modelación para construir una nueva pirámide egipcia de base triangular y compara sus propiedades con la pirámide que representaste anteriormente.
- Busca la opción que permita validar cuánto volumen ocupa la pirámide egipcia que construiste.

Una vez realizado este proceso, responde:

1. ¿Qué datos se necesitan para realizar el cálculo del espacio que ocupa una pirámide egipcia?

2. Indica la forma en la que calcularías el volumen que ocupa una pirámide egipcia, considerando los resultados que te ofrece el RA sólidos.

Tarea 2. Explora, construye y calcula como un ingeniero egipcio

Subtarea 1. Introduciendo el concepto de volumen.

Ahora selecciona el código QR que representa un tetraedro en la app y sigue las instrucciones:

- Mueve el sólido de diferentes formas y observa cómo varía el espacio que ocupa al modificar sus dimensiones.
- Construye una pirámide egipcia de base triangular con aristas de 5cm y observa el espacio que ocupa.
- Duplica el tamaño de sus aristas y compara los datos con relación a la primera construcción.



Nota: Recuerda que el volumen es la medida del espacio tridimensional que ocupa un objeto, expresado en unidades cúbicas.

Acorde con la información anterior responde.

1. ¿Qué relación existe entre el tamaño y el volumen cuando se duplica la medida de las aristas en un tetraedro?

Una vez resuelta esta pregunta, explora cómo se calcula el volumen de un tetraedro, siguiendo los siguientes pasos:

- Usa la app para calcular el volumen de un tetraedro construido por ti. Explora la opción que muestra la fórmula y verifica el resultado manualmente.
- Observa cómo la aplicación representa la fórmula: $V = \frac{1}{3} * A_{base} * h$
- Compara los resultados obtenidos en la aplicación con tus propios cálculos

A continuación, responde las siguientes preguntas relacionadas con el volumen del tetraedro:

1. ¿Qué sucede con el volumen de un tetraedro si se aumenta el tamaño de su altura? ¿Y si se disminuye? Justifica tu respuesta.

2. Modifica un tetraedro en la aplicación para reducir su base a la mitad y mantén su altura.
¿Cómo cambia su volumen?

3. ¿Crees tú que se puede Construir dos tetraedros con la misma base, pero con alturas diferentes? Si crees que es posible, compara sus volúmenes y describe la relación entre la altura y el volumen.

Subtarea 2. Emplea y elabora.

Observa la siguiente tabla que indica las fórmulas que se requieren para calcular el volumen de un tetraedro.

Fórmula del volumen	Fórmula de la altura	Fórmula área de la base
$V = \frac{1}{3} * A_{base} * h$	$h = a * \frac{\sqrt{6}}{3}$	$A_{base} = a^2 * \sqrt{3}$
Nota: La "a" equivale al valor de las aristas.		

Partiendo de esta información, construye en la app tres pirámides egipcias de base triangular, donde sus aristas midan 4 cm, 8 cm y 9 cm respectivamente, Responde las siguientes preguntas usando la opción de cálculo de la app.

1. Pirámide egipcia de aristas de 4cm (P1)

h =

A_{base} =

V=

2. Pirámide egipcia de aristas de 8cm (P2)

$$h = \quad \quad \quad A_{base} = \quad \quad \quad V =$$

3. Pirámide egipcia de aristas de 9cm (P3)

$$h = \quad \quad \quad A_{base} = \quad \quad \quad V =$$

Valida en la app las respuestas que obtuviste en el volumen de cada pirámide.

Subtarea 3. Transformando el tetraedro.

Teniendo en cuentas las medidas obtenidas en las pirámides P1, P2 y P3, responde:

1. ¿Qué relación encuentras entre la medida de las aristas y el volumen de las pirámides P1 y P2? ¿Es la misma relación que para las pirámides P2 y P3?

2. ¿Cómo explicarías la relación que existe entre la altura de una pirámide egipcia y su volumen? ¿Y entre el área de la base y el volumen?

3. ¿Qué se puede concluir en relación con las dos preguntas anteriores? ¿Logras encontrar alguna relación entre los resultados obtenidos?

Tarea 3. Evaluando saberes.

Subtarea 1.

1. ¿Por qué un tetraedro es un sólido regular?

2. ¿Qué diferencias en una pirámide si cambiamos las dimensiones de sus aristas o su altura?

3. ¿Qué características geométricas tiene una pirámide?

4. ¿Qué elementos se consideran para el calcular el volumen de un tetraedro?

5. ¿Qué es el volumen?

Verificación en turniting de plagio

Guillermo Montero

Informe Final Montero_Peña 2025.docx

Similitud 11%

Marcas de alerta

Escritura con IA **%



Una propuesta con Realidad Aumentada sobre el Volumen de Tetraedros usando el Modelo SE en Grado Octavo

Juan Nicolás Peña Ledesma.

William Montero Enriquez.

11% Similitud General

Fuentes

Mostrar las fuentes solapadas

1 Internet

bibliotecadigital.univalle.edu.co

<1%

9 bloques de texto

115 palabra que coincide

2 Internet

docplayer.es

<1%

3 bloques de texto

102 palabra que coincide

Página 1 de 106

22525 palabras

124 %

William Montero

Informe Final Montero_Peña 2025.docx

- My Files
- My Files
- Universidad del Valle

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::26066:470320371

Fecha de entrega

27 jun 2025, 10:37 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

27 jun 2025, 10:47 p.m. GMT-5

Nombre de archivo

Informe Final Montero_Peña 2025.docx

Tamaño de archivo

2.1 MB

106 Páginas

22.525 Palabras

128.334 Caracteres