



**Caracterización del Aprendizaje de la Noción de Área en Estudiantes de grado
Sexto cuando Resuelven Problemas en un Ambiente que Integran Tecnología Digital**

Carmen Yurely Bolaños Bravo
1632269

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
2022



**Caracterización del Aprendizaje de la Noción de Área en Estudiantes de grado
Sexto cuando Resuelven Problemas en un Ambiente que Integran Tecnología Digital**

Carmen Yurely Bolaños Bravo
1632269

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas y Física

Directora del trabajo de grado: Mg. Leidy Cristina Cumbal

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

2022

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo le agradezco a Dios por permitirme culminar esta etapa tan importante para mí, por ser mi guía y darme la fortaleza para no desistir.

Agradezco a mis padres María del Carmen Bravo y Eliseo Bolaños, a mis hermanos, por creer en mí, por su amor y apoyo incondicional. A mi hija Nahomy que inicio conmigo esta etapa universitaria, por su comprensión, compañía, cariño y amor. A mi compañero de vida Johni Mendoza por su apoyo incondicional, por sus palabras de aliento cuando no podía más. Esto es de ustedes.

A la Universidad del Valle por abrirme sus puertas y permitirme ser parte de ella. Gracias a mis compañeros de carrera por todo el apoyo brindado durante todos los semestres.

A mi tutora Leidy Cumbal por su acompañamiento durante este largo proceso, por sus orientaciones y paciencia.

Resumen

Este trabajo de grado caracteriza el aprendizaje de estudiantes de grado 6° de una Institución Educativa Oficial de Cali, cuando resuelven problemas de área en un ambiente que integra tecnologías digitales. Lo anterior se realiza a partir de consideraciones didácticas, cognitivas, matemáticas y curriculares, las cuales fundamentaron la adaptación de las tareas, a través de una Investigación de diseño, particularmente un experimento de enseñanza. Esto permitió determinar las estrategias heurísticas y el dominio de conocimientos que los estudiantes emplean cuando resuelven problemas.

Palabras clave: Aprendizaje del área, Resolución de Problemas, Experimento de enseñanza, Ambiente Digital.

Tabla de Contenido

Resumen.....	4
Tabla de Contenido	5
Lista de Figuras.....	7
Lista de Tablas	9
Introducción	10
Capítulo I: Planteamiento del Problema	12
Antecedentes	12
Planteamiento y Justificación del Problema	13
Objetivo general.....	18
Objetivos específicos	18
Capítulo II: Marco teórico	20
Dimensión didáctica.....	20
<i>Aspectos sobre la Enseñanza y Aprendizaje del Área</i>	<i>20</i>
<i>Enfoques de la resolución de problemas</i>	<i>23</i>
<i>La Resolución de Problemas en la Educación Matemática</i>	<i>24</i>
<i>Resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales</i>	<i>28</i>
Dimensión Cognitiva	29
<i>Algunas Dificultades y Obstáculos en el Aprendizaje de la Noción de Área como</i>	
<i>Magnitud</i>	<i>30</i>
Dimensión matemática.....	31
<i>Conceptos asociados al área como magnitud: numero, medida y magnitud</i>	<i>31</i>
<i>Propiedades del Área.....</i>	<i>38</i>

<i>Aproximación a los Conceptos de Área y Superficie.....</i>	39
Dimensión Curricular.....	43
<i>Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en</i>	
<i>Matemáticas.....</i>	44
Capítulo III: Metodología	46
Fases del Experimento de Enseñanza	47
<i>Fase 1. Preparación del experimento.....</i>	47
<i>Fase 2. Experimento</i>	60
<i>Fase 3. Análisis retrospectivo.....</i>	63
Capítulo IV: Resultados de Investigación.....	73
Adaptación de las Tareas a un Ambiente que Integra Tecnologías Digitales.....	73
Estrategias Heurísticas Empleadas por los Estudiantes	75
Dominio del Conocimiento en la Resolución de Tareas.....	83
Conclusiones	86
Limitaciones y Recomendaciones.....	87
Aportes a mi Formación como Licenciada y Proyecciones a Futuro	88
Referencias.....	89

Lista de Figuras

Figura 1 Resultados Pruebas Saber I. E. O de Cali.....	16
Figura 2 Propiedad Aditiva.....	38
Figura 3 Propiedad de Disección	39
Figura 4 Tarea 1 (https://www.geogebra.org/material/edit/id/twuj4vju).....	49
Figura 5 Tarea 2 (https://www.geogebra.org/m/wcdvymv)	50
Figura 6 Tarea 3 (https://www.geogebra.org/m/tvgh3m8n).....	51
Figura 7 Tarea 4 (https://www.geogebra.org/m/bkwnvkbz)	53
Figura 8 Tarea 5(https://www.geogebra.org/m/tqg7pwnx)	54
Figura 9 Tarea 6 (https://www.geogebra.org/m/rkpqxtyp#material/vwkytacq).....	55
Figura 10 Continuación de la Tarea 6.....	56
Figura 11 Finalización de la Tarea 6	57
Figura 12 Tarea 7(https://www.geogebra.org/m/rkpqxtyp#material/nk9kyfpj)	58
Figura 13 Continuación de la Tarea 7.....	59
Figura 14 Finalización de la Tarea 7	59
Figura 15 Disposición de los Recursos Físicos en la Sala de Sistemas.....	61
Figura 16 Entrada donde el Estudiante Registró sus Respuestas.....	62
Figura 17 Ejemplo del Empleo del Arrastre por parte del Estudiante para descomponer y Reacomodar la Figura B	76
Figura 18 Ejemplo del Uso del Arrastre por parte del Estudiante para Componer Figuras Geométricas	77
Figura 19 Ejemplo del Reconocimiento de la Propiedad de Disección por parte del Estudiante	78

Figura 20 Ejemplo del Uso del Arrastre para Descomponer y Superponer Figuras para Comparar Superficies.....	79
Figura 21 Ejemplo del Empleo del Arrastre por parte del Estudiante para Superponer Figuras y Formar Superficies.....	80
Figura 22 Ejemplo del Empleo del Arrastre para Superponer Figuras y Comparar Superficies.	81
Figura 23 Ejemplo del Empleo del Arrastre para Recubrir Completamente una Superficie.....	82
Figura 24 Ejemplo del Reconocimiento de Superficies Congruentes por parte del Estudiante ..	83

Lista de Tablas

Tabla 1 Ejemplo de la Codificación de algunas Afirmaciones de los Estudiantes Registradas en las Hojas de Trabajo.....	64
Tabla 2 Ejemplo de la codificación de las Afirmaciones de E3 Tomando un Segmento de la Entrevista Semiestructurada.....	65
Tabla 3 Principales Categorías Emergentes de las Afirmaciones de los Estudiantes	66
Tabla 4 Rejilla de Análisis Relación entre las Categorías de la Etapa 2 con las Dimensiones de la RP.....	70

Introducción

El siguiente trabajo de investigación se inscribe en la línea de investigación de Prácticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática del programa Licenciatura en Matemáticas y Física, de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, y tiene como propósito la adaptación, implementación y análisis de unas tareas de aprendizaje sobre la conservación del área dirigido a estudiantes de grado sexto.

El primer capítulo está conformado por tres apartados; en el primer apartado se presentan los estudios que se han llevado a cabo a nivel nacional e internacional en relación con el aprendizaje de las magnitudes, particularmente la noción de área como magnitud. En el segundo apartado se expone la justificación del problema, se mencionan argumentos respecto a la importancia del aprendizaje de las medidas y sus magnitudes considerando la resolución de problemas y la integración de tecnologías digitales. Además, se presentan resultados de las pruebas nacionales de una Institución Oficial de Cali donde se llevó a cabo el estudio y se hace referencia a los aspectos curriculares que intervienen en este trabajo. En el tercer apartado se hacen explícitos los objetivos de investigación.

El segundo capítulo corresponde al marco teórico de este estudio, conformado por cuatro dimensiones: dimensión didáctica, cognitiva, matemática y curricular, donde se contemplan procesos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la noción de área como magnitud. En la dimensión didáctica se presentan algunos aspectos sobre la enseñanza y aprendizaje del área, se consideran algunas sugerencias de diversos autores, las cuales se tuvieron en cuenta para la adaptación de las tareas. Además, se toma como referentes los trabajos de Schoenfeld (1985) y Santos- Trigo (2000; 2014; 2020), dado que, proponen un marco para el aprendizaje de las matemáticas, mediante la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales. En la

dimensión cognitiva se presentan los posibles obstáculos, errores o dificultades que se presentan en el aprendizaje de la noción de área como magnitud. En la dimensión matemática se exponen elementos conceptuales asociados con la noción de área (número, medida y magnitud) donde se considerarán los trabajos de (Corberan, 1996; García, 2013) para el aprendizaje de la noción de área como magnitud. Finalmente se revisan los documentos curriculares propuestos por el MEN Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006), de los cuales se consideran aspectos que contribuyen en el desarrollo del pensamiento métrico.

En el cuarto capítulo se expone la metodología de investigación, la cual es de carácter cualitativo bajo el paradigma de Investigación Basada en el Diseño (IBD), contemplando un experimento de enseñanza. Donde se describe cada una de las fases del experimento: experimentación, intervención y análisis retrospectivo. En la fase de experimentación se presenta la adaptación de las tareas a un ambiente digital, particularmente GeoGebra; en la segunda fase, se describen las intervenciones que se realizaron con los estudiantes y las fuentes de recolección de datos; en la tercera fase se presentan el análisis retrospectivo de la implementación de las tareas adaptadas a los estudiantes.

En el Quinto capítulo se exponen los resultados de investigación obtenidos a partir del desarrollo del experimento de enseñanza.

En el ultimo capitulo se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas de los objetivos planteados y el proceso de investigación.

Por último, se presenta el listado de referencias que fundamentaron y contribuyeron este estudio de investigación.

Capítulo I: Planteamiento del Problema

En el capítulo I se presentan tres apartados. En el primero, se presentan estudios que se han llevado a cabo sobre el aprendizaje de la noción de área. En el segundo, se presenta el planteamiento y justificación del problema de investigación. Finalmente, se exponen los objetivos de investigación.

Antecedentes

A continuación, se presentan algunos estudios relacionados con el aprendizaje de las magnitudes y su medida, especialmente el de área como magnitud, considerando la resolución de problemas y la integración de las tecnologías digitales.

Nagles y Rivera (2021) diseñaron un Recurso Educativo Abierto (REA) empleando tecnologías digitales para construir el concepto de área como magnitud en estudiantes de 5°, este diseño que integro tecnologías digitales permitió que los estudiantes por medio de la estimación, comparación, ordenación y el cálculo de medidas de superficies movilizaran el concepto de área como magnitud.

Por otro lado, García y Zúñiga (2014) realizaron un estudio acerca del planteamiento y resolución de problemas de áreas en el laboratorio de educación matemática de la Universidad del Valle. La implementación se llevó a cabo con estudiantes de sexto y se empleó material manipulativo como el geoplano, monominó y figuras en fomi para su desarrollo. Los resultados de este estudio mostraron que el desarrollo de los problemas de áreas les permitió a los estudiantes comprender el área como magnitud, mediante diferentes procedimientos geométricos (traslación y rotación, superposición, descomposición y composición). Además, la interacción con los materiales manipulativos al resolver problemas les permitió a los estudiantes pasar de un

conocimiento informal integrado por procedimientos intuitivos, lúdicos, colaborativos, empíricos a un conocimiento formal, que se da a partir de construcciones, deducciones y abstracciones.

Álvarez y Escorcía (2017) realizaron un estudio para determinar el efecto de la resolución de problemas sobre la conservación de perímetro y área para estudiantes de grado 8°. El estudio se llevó a cabo con 37 estudiantes, divididos en dos grupos (15 experimental y 22 control) a los cuales se les aplicó un cuestionario de entrada. Luego, se tomó una muestra de 16 estudiantes quienes participaron de una entrevista flexible semiestructurada, la cual permitió observar los procesos cognitivos que utilizan los estudiantes para resolver problemas geométricos. Los resultados de este estudio mostraron que la resolución de problemas aumentó los procesos de comprensión, visualización, conocimiento geométrico-métrico e implementación de estrategias de solución.

En general, la consideración de estos trabajos de investigación que integran tecnologías digitales y consideran la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje del área como magnitud constituyen un referente y apoyo para el presente trabajo.

Planteamiento y Justificación del Problema

Históricamente en la educación, la enseñanza de la geometría ha presentado una serie de dificultades, pues durante mucho tiempo el currículo colombiano le dio prioridad a la teoría de conjuntos, convirtiendo la geometría en algo abstracto, difícil de comprender por los estudiantes. Poco después con el nuevo currículo de matemáticas, propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) se optó por volver a recuperar el sentido intuitivo de la geometría, pero no se obtuvo los resultados esperados, pues al parecer su enseñanza tradicional se enfoca hacia el uso de fórmulas o algoritmos sin sentido, haciéndola ver como una disciplina difícil de

comprender y poco útil para los estudiantes, en este sentido Gamboa y Ballesteros (2009) afirman que:

Los contenidos de geometría son presentados a los estudiantes como un producto acabado de la actividad matemática, que deja en segundo plano los procesos implícitos de razonamiento y construcción de este conocimiento. La enseñanza tradicional se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas (p. 2).

Uno de los contenidos de gran importancia en la enseñanza y aprendizaje de la geometría elemental, son las magnitudes y su medida, dado que es uno de los conceptos que tiene un origen muy antiguo en la historia y es usado universalmente. Su uso en la vida cotidiana, es el puente entre la aritmética y el mundo físico. Ya que, permiten explorar el mundo físico y describirlo por medio de las magnitudes área, longitud, volumen, etc. (Dickson, 1991 como se citó en Caggiani et al., s.f.). Además, “la medida constituye una de las principales actividades humanas, presente en todas las culturas desde las más antiguas, pues permite comparar, estimar, o calcular con más o menos precisión distintas magnitudes” (Bishop, 1999, como se citó en Luelmo, 2001, pp 727).

En múltiples investigaciones se ha podido evidenciar algunas de las dificultades que muestran los estudiantes en los procesos de medida, por ejemplo, el manejo incorrecto de las unidades de medida, el no reconocimiento del área como magnitud, confusiones entre área y perímetro, etc. como lo afirma Chamorro (1995).

Por otro lado, Marmolejo (2016) afirma que los estudiantes muestran bajos niveles de logros alcanzados en los sistemas de medidas, esto se debe en gran parte al tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones didácticas y epistemológicas sesgadas, la introducción a la

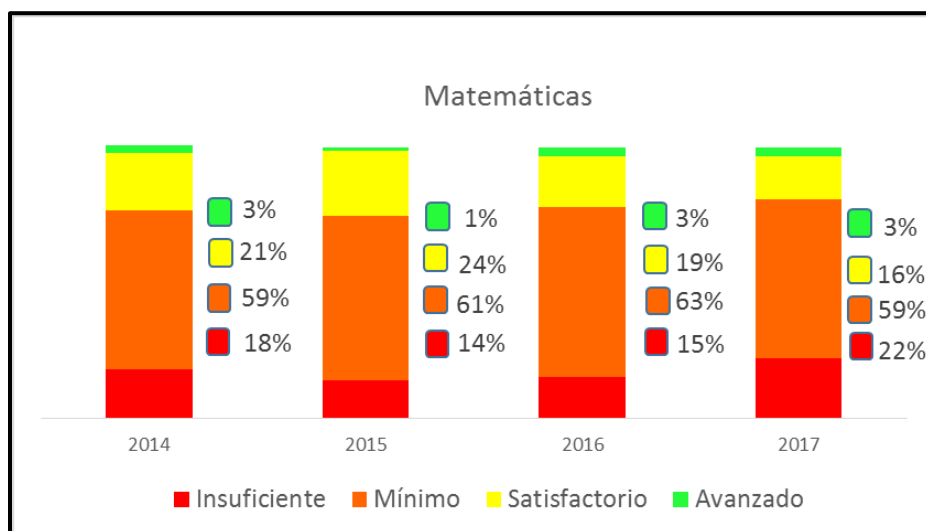
medida bajo el empleo de instrumentos complejos y refinados (descuidando la construcción de la magnitud y el desarrollo de los procesos de medición) así como el desconocimiento del desarrollo histórico de la medida.

En Colombia una de las herramientas que se emplean para conocer y evidenciar los niveles de desempeño del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes son las pruebas SABER. Estas pruebas brindan información a las instituciones educativas, padres de familia y al MEN sobre el desarrollo de competencias de los estudiantes, con el fin de crear nuevas estrategias para el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las competencias y componentes que son evaluadas en estas pruebas, se establecen tomando como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006). Por tal razón se considera necesario conocer los resultados de una Institución Educativa Oficial de Cali donde se llevó a cabo el presente estudio. En este sentido se reconocen los niveles de desempeño que se presentan los estudiantes de la institución mediante los resultados de las pruebas Saber 9°, como se puede observar en la figura 1.

Figura 1

Resultados Pruebas Saber I. E. O de Cali



Nota. Tomado del Informe de resultados históricos (2020) pruebas Saber de una Institución Educativa Oficial de Cali.

Con relación a los resultados del plantel educativo en el área de matemáticas durante los años 2014-2017, no se observan cambios significativos, dado que, durante los años 2014, 2016 y 2017, solamente el 3% de los estudiantes se encuentran en el nivel de desempeño avanzado y se mantiene durante estos años, y para el 2015 únicamente se encuentra el 1% del total de estudiantes. En cuanto al nivel satisfactorio se puede evidenciar que para el año 2015 hubo un mayor porcentaje de estudiantes ubicados en este nivel en relación con los demás años. Es decir, el mayor porcentaje de estudiantes se encuentra en el nivel mínimo e insuficiente.

De acuerdo al rendimiento que presentan los estudiantes en el área de matemáticas, en el componente geométrico-métrico, el cual está relacionado con estimación y descripción de magnitudes (longitud, área, capacidad, volumen, masa, etc.) y la solución de problemas de medición, se deduce que los estudiantes presentan dificultades con el pensamiento métrico.

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para grado sexto, se aborda uno de los contenidos del pensamiento métrico: la noción de área. Este estudio tiene como propósito aproximar a los estudiantes a la noción de área y describir su aprendizaje a través de la resolución de problemas como estrategia didáctica.

Para la aproximación a la noción de área, se considera el uso de ambientes que integran tecnologías digitales para el desarrollo de las tareas, debido a que las tecnologías digitales permiten nuevas formas de representación e interacción de la información, ofreciendo una comprensión conceptual más amplia y profunda de los conocimientos geométricos (Hegedus y Moreno-Armella, 2020). En virtud de esto, las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría se centran cada vez más en las formas de usar software de geometría dinámica.

El software de geometría dinámica permite a los estudiantes superar algunas dificultades en el aprendizaje de la geometría. Dado que, las funciones dinámicas del software de geometría dinámica, por ejemplo, GeoGebra, permite a los estudiantes manipular de manera flexible, duplicar, mover y rotar objetos geométricos (Aydin y Monaghan, 2011; Hohenwarter J., Hohenwarter M. y Lavicza, 2008; Taylor, Guzmán, Martin, Hall, Micolich, Jonas y Marlow, 2007).

Por otro lado, se considera la resolución de problemas, dado que favorece la comprensión de conceptos matemáticos, promueve los desarrollos de investigaciones, diseño curricular, educación matemática e intrusión en el aula de clases (Santos-Trigo y Moreno Armella 2013).

En este sentido, las tareas vinculadas con la resolución de problemas que pueden ser exploradas en ambientes ricos en tecnología, favorecen el aprendizaje de los estudiantes, dado

que, los ambientes de geometría dinámica permiten su experimentación, conjeturación y validación. (Camacho-Machin et al., 2018).

Dentro de la facultad de educación se han llevado a cabo múltiples propuestas sobre la enseñanza del área como magnitud y existen muy pocos trabajos cuyo interés sea el aprendizaje de esta noción. Es así, como este estudio es relevante, dado que busca describir el aprendizaje de los estudiantes cuando resuelven tareas de conservación de área, implementando como estrategia la resolución de problemas y considerando además la integración de tecnologías digitales.

Con base a los elementos anteriormente descritos, la presente investigación se centra en responder a la siguiente pregunta:

¿Qué caracteriza el aprendizaje de la conservación del área de los estudiantes de 6° cuando resuelven problemas en un ambiente que integra tecnologías digitales?

Objetivo general

Caracterizar el aprendizaje de la conservación de área de los estudiantes de 6° cuando resuelven problemas en un ambiente que integra tecnologías digitales.

Objetivos específicos

1. Adaptar tareas fundamentadas en la resolución de problemas para el aprendizaje de la noción de área en un ambiente digital, dirigidas a estudiantes de grado 6°.
2. Describir las estrategias heurísticas que usan los estudiantes de 6° cuando resuelven problemas de conservación del área en un ambiente que integra tecnologías digitales.

3. Identificar el dominio de conocimiento de los estudiantes de 6° cuando resuelven problemas de conservación del área en un ambiente que integra tecnologías digitales.

Capítulo II: Marco teórico

En este capítulo se presentan las bases teóricas que fundamentan la elaboración de este trabajo de investigación, considerando la dimensión didáctica, cognitiva, matemática y curricular. A continuación, se amplía cada una de ellas.

Dimensión didáctica

En esta dimensión se presentan algunos aspectos sobre la enseñanza y aprendizaje del área como magnitud, los diferentes enfoques de la resolución de problemas, la resolución de problemas en la educación matemática y la resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales.

Aspectos sobre la Enseñanza y Aprendizaje del Área

Algunos autores determinan aspectos importantes relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del área. En este apartado se mencionan algunos de ellos, junto con sus consideraciones más relevantes.

Del Olmo et al. (1993) considera los diferentes enfoques propuestos por Freudenthal en 1983 y los describe mediante tres tipos de aproximaciones que permiten iniciar la construcción de la noción de área como magnitud, estas son:

- Repartir equitativamente: el cual se da por el aprovechamiento de regularidades, estimación y medición. Este procedimiento se refiere al reparto equitativo. Por ejemplo, una trota circular puede partirse mediante un trazado de diámetros imaginarios; a su vez se puede estimar cuando se quiere partir una hoja en partes iguales y se requiere de la superposición para obtener la igualdad. Por último, se miden cuando se divide entre cierto número de partes y luego se mide cada una de ellas.

- Comparación y reproducción: Dadas por inclusión, transformaciones de romper y rehacer, por estimación, por medición y por medio de funciones.

Se da cuando nos enfrentamos a situaciones en las que hay que comparar dos superficies o cuando se pretende reproducir una superficie de forma diferente a otra. Por ejemplo, trazar un rectángulo que tenga la misma medida de área de un cuadrado.

- Medición: por el agotamiento con unidades de medida que corresponden a unidades más finas. Este proceso de medida puede darse por medio de las siguientes formas: recubrimiento con unidades, acotación entre un valor superior e inferior, transformaciones de romper y rehacer y por medio de relaciones geometrías generales. (pp. 19-21).

Las aproximaciones mencionadas anteriormente cuentan con ciertos procesos asociados que se encuentran relacionados transversalmente, los cuales son: *percepción, comparación, medida y estimación*.

Por otra parte, Hershkowitz et al. concluyeron que para que se dé un aprendizaje significativo de la medida se deberían seguir considerar *tres etapas*; la conservación del área, significado de la unidad de medida y fórmulas para calcular el área (Hershkowitz et al, 1990 como se citó en Corberán, 1996, pp. 31). Además, Corberán (1996) afirma que, tras el análisis de diversas investigaciones, los investigadores concuerdan que estas *tres etapas* son fundamentales para el aprendizaje de la medida del área, luego expone las orientaciones que se han considerado más importantes para la enseñanza del área estas son:

En un primer momento se insiste en la necesidad que los estudiantes realicen experiencias que les ayuden a desarrollar y reforzar *la conservación del área*, es decir que

comprendan que el área de una figura se conserva cuando esta se parte y reagrupa para formar una figura diferente (el área no cambia por desplazamiento).

En un segundo momento que los estudiantes comprendan el significado de *unidad de medida*, pero para ello los estudiantes deben comprender que la unidad de medida puede ser rota en partes para facilitar la medida de una cantidad, y la relación entre el tamaño de la unidad y el número de unidades medidas, además que el estudiante comprenda el carácter iterativo y de recubrimiento de la unidad de área. También sugiere comenzar la medida de área empleando unidades de área con variedad de formas.

Seguidamente, la autora recopila las recomendaciones realizadas por investigadores sobre el *cálculo de áreas*, concluyendo que las diversas investigaciones consideran necesario que los estudiantes estén familiarizados con otras técnicas de medida y tareas de estimación, y no solamente con el uso de fórmulas, además critican inadecuado el modo y momento que las fórmulas son presentadas a los estudiantes, finalmente recomiendan proponer a los estudiantes el cálculo de áreas, no sólo de figuras poligonales sencillas, sino de figuras irregulares. (Corberán, 1996, pp. 31- 32)

También, Corberán (1996) considera algunos aspectos del trabajo de Freudenthal (1983) en relación con los diferentes enfoques del objeto mental área y los expone como diferentes tratamientos, que conducen a distintas interpretaciones del área, como se presenta a continuación:

La autora considera el tratamiento cuantitativo y cualitativo que puede recibir el área, afirma que este concepto se puede concebir de diversas formas dependiendo de los procedimientos necesarios para el cálculo, bien sean numéricos o geométricos, de esta manera se

pueden clasificar en: El área como cantidad de plano ocupado por una superficie, el área como magnitud autónoma, el área como unidades que recubren la superficie y el área como producto de dos dimensiones lineales.

Enfoques de la resolución de problemas

La resolución de problemas, en la formación matemática de los estudiantes, comienza a adquirir importancia a finales de los años setenta en diferentes países, ante la necesidad de los cambios curriculares y metodológicos que se dieron en la época.

En la educación matemática, la resolución de problemas es un área de conocimiento y de investigación que ha estado en constante evolución. De acuerdo con Santos-Trigo (2020) existen comunidades que han aportado significativamente en la caracterización y desarrollo de la resolución de problemas. Por un lado están los matemáticos, quienes consideran que el proceso de formular, resolver y representar problemas es primordial en el desarrollo del conocimiento matemático (Polya 1945; Hadamard 1945; Halmos 1980) y por el otro lado se encuentran los educadores y profesores de matemáticas, cuyo interés es explicar, comprender y caracterizar los procesos cognitivos, sociales y afectivos de las personas que solucionan los problemas (Schoenfeld 1985, 1992; Lester y Kehle 1994, 2003; Lesh y Zawojewski 2007; English y Gainsburg 2016; Liljedahl y Santos-Trigo 2019).

Inicialmente Polya (1965) analiza y caracteriza su experiencia como matemático y como profesor, e identifica cuatro etapas en el proceso de resolver problemas: Comprensión del problema, construcción de un plan, ejecución de un plan y visión retrospectiva. Durante la segunda etapa hace alusión a las estrategias heurísticas como aquellas que por sí mismas no garantizan éxito, pero resultan de gran ayuda cuando se utilizan. Por otra parte, Schoenfeld (1985) reconoce el potencial de las estrategias heurísticas propuestas por Polya (1965) y propone

un programa de investigación donde se integra la implementación sistemática de diferentes estrategias de resolución de problemas en el aula de clases.

La Resolución de Problemas en la Educación Matemática

Un enfoque ampliamente usado en la educación matemática es el propuesto por Schoenfeld (1985), se trata de la implementación de un programa de investigación centrado en el análisis de las formas de pensamiento matemático de los estudiantes, cuyo fin fue caracterizar como los estudiantes llegan a tener éxito o desarrollan competencias en la resolución de tareas matemáticas. Como resultado, propuso un marco para analizar el proceso de resolución de problemas a partir de cuatro dimensiones:

Dominio del Conocimiento o Recursos. De acuerdo con Barrantes (2006) son los conocimientos previos que posee el individuo, las fórmulas, conceptos, algoritmos, de manera general, todas las nociones que se considere son necesarias para abordar un determinado problema.

Por otro lado, Santos-Trigo (2014) plantea que los recursos representan un inventario de lo que el individuo sabe y como adquiere ese conocimiento. Además, afirma que existen varios factores que determinan el uso de recursos ante situaciones problemáticas, de esta forma Schoenfeld (1985) identificó una serie de acciones y respuestas que los estudiantes exhiben en su interacción con el problema. Por ejemplo: los estudiantes categorizan sus experiencias en tipos o clases, además, los estudiantes tienden a clasificar sus nuevas experiencias en formas que son consistentes con sus conocimientos anteriores, también los estudiantes cuentan con herramientas y técnicas que les han sido útiles en el pasado y las emplean para tratar con la nueva experiencia.

Santos-Trigo (2014) describe cinco tipos de conocimientos identificados por Schoenfeld (1985) que influyen en el empleo de recursos:

1) Conocimiento informal e intuitivo acerca del problema por resolver: Las matemáticas se les identifica como un cuerpo de conocimientos donde existe un conjunto de significados y un lenguaje codificado que el estudiante debe aprender. Durante este proceso, el estudiante desarrolla intuiciones acerca de las matemáticas y la forma de aprender esta disciplina. Estas intuiciones, o conocimiento informal, se relaciona con las ideas que los estudiantes tienen acerca del uso de conceptos del mundo real. Schoenfeld afirma que muchas veces este conocimiento informal les impide entender el concepto matemático a los estudiantes.

2) Hechos y definiciones: En el transcurso de la resolución de un problema, el estudiante debe emplear algunos hechos necesarios para plantear o elegir algún camino de solución. Por ejemplo, en un problema de construcción de un cuadrado, “sus lados deben ser iguales y sus cuatro ángulos interiores rectos” es un hecho con información esencial para resolver el problema. Por ejemplo, esta información puede ser completamente desconocida para el estudiante, pues este puede sospechar que el hecho es válido, pero no estar seguro, y no encuentra la forma de probarlo; sospecha que la información es verdadera y busca alguna prueba geométrica, o piensa que la información es verdadera y la utiliza con confianza en la resolución del problema. En otras palabras, un inventario de recursos no solamente incluye definiciones básicas, conocimientos y hechos, sino la forma en que el estudiante recuerda ese conocimiento y tiene acceso a él para resolver el problema.

3) *Procedimientos rutinarios*: Se identifican técnicas no algorítmicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de problemas. Schoenfeld (1985) menciona que cuando el estudiante tiene acceso a un procedimiento rutinario, comúnmente no incluye decisiones estratégicas.

4) *Conocimiento acerca del discurso de la disciplina*: La percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas al resolver un problema, determina la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de solución.

5) *Errores consistentes o recursos débiles*: Se puede pensar que el resultado de un mal aprendizaje se da cuando el estudiante comete un gran número de errores en procedimientos simples. (pp. 64-65)

Estrategias Cognitivas. También conocidos como métodos heurísticos. Schoenfeld (1985) considera los métodos heurísticos como acciones, estrategias o técnicas que ayudan a la solución de problemas. Entre estas se tienen: descomponer el problema en casos especiales, considerar las hipótesis, buscar un problema análogo, invertir el problema, establecer subtemas y relajar las condiciones del problema.

Por su parte Santos-Trigo (2014) describe las estrategias heurísticas y cognitivas como “las formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución” (p.23)

Estrategias Metacognitivas. Los componentes de la metacognición, se basan en el análisis del proceso, siendo este un papel central. El monitoreo y el control del progreso de la solución. Este tipo de estrategias se refieren a las decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, otras acciones que hacen parte de las estrategias son

planear, evaluar y decidir. Las estrategias metacognitivas establecen un monitoreo del proceso y ayudan a tomar decisiones en momentos claves; selección de estrategias y cambio de dirección cuando sea necesario.

Sistema de Creencias. En esta dimensión se incluyen las ideas que los estudiantes tienen de las matemáticas, transferidas por medios culturales y sociales. Las creencias determinan la manera como aborda una persona el problema; por ejemplo, las técnicas que emplea o evita. De lo anterior se puede afirmar que “las creencias establecen el marco bajo el cual se utilizan los recursos, las heurísticas y el control” (Schoenfeld, 1985, pp. 45).

A partir de estas cuatro dimensiones que se encuentran interconectadas se puede promover y caracterizar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes cuando resuelven problemas.

Schoenfeld (1985) considera que en el proceso de aprender matemáticas los estudiantes deben estar inmersos en un microcosmos de la cultura matemática, ya que, en este medio pueden desarrollar estrategias y habilidades que les permitan identificar, usar y seleccionar estrategias generalmente usadas por los matemáticos cuando resuelven problemas. Schoenfeld plantea la necesidad de detallar el significado al usar el término “resolución de problemas” en las propuestas curriculares (Schoenfeld, 1992 como se citó en Santos Trigo, 2008). En este sentido (Santos Trigo, 2008) considera “la resolución de problemas como una forma de pensar, donde alumnos y profesores resuelven, contrastan diferentes formas de representación, reconocen y justifican sus respuestas, formulan conjeturas, desarrollan estrategias, recursos y la constante necesidad de reflexionar sobre el propio proceso de construcción del conocimiento”.(p.3)

Por otra parte, Santos-Trigo (2020) considera que, en un enfoque de resolución de problemas, lo más importante son las tareas y la forma de interactuar con ellas. Además, afirma que las tareas matemáticas son elementos esenciales para que los estudiantes representen objetos, los identifiquen y exploren detectando relaciones o invariantes

El aporte de los distintos enfoques de la resolución de problemas en la educación matemática, han permitido que se desarrollen propuestas como la de Santos- Trigo (2007; 2014) que caracteriza y promueve la utilización de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas.

Resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales

Los masivos desarrollos tecnológicos que han surgido desde hace algún tiempo han provocado que se planteen cambios en los sistemas educativos (Santos-trigo, 2014). Algunas de estas modificaciones guardan relación con las estrategias, habilidades y contenidos que deben aprender los estudiantes con la implementación de las diferentes tecnologías. En este sentido, Santos-trigo (2014) sugiere que se promuevan el empleo de herramientas tecnológicas, en lugar del lápiz y papel en el proceso de resolución de problemas, puesto que, “el uso de herramientas digitales no solo facilita la implementación de estrategias heurísticas, sino que también potencia o extiende el repertorio de heurísticas y formas de exploración” (p. 24). Además:

El uso de las tecnologías digitales amplía las formas de representar, explorar, resolver los problemas y por lo tanto demanda una revisión de los marcos conceptuales que se generaron a partir de analizar procesos de resolución que esencialmente involucran el uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, 2014b; Liljedahl et al., 2016 citado en Santos, 2019, , p.6).

Santos (2016) define las tecnologías digitales, como aquellas tecnologías que tienen propósitos múltiples, para fines de comunicación (pizarrones interactivos, PowerPoint, etc.) y también aquellas que son diseñadas para realizar tareas matemáticas como son los sistemas de geometría dinámica (GeoGebra), sistemas de álgebra computacional, etc. Las cuales ayudan en la construcción del conocimiento de los estudiantes.

GeoGebra. Se trata de un software dinámico potente que permite explorar y trabajar de manera interactiva y dinámica las diferentes áreas de las matemáticas (geometría, álgebra, cálculo, etc.). Sin embargo, GeoGebra también representa un conjunto de herramientas para la creación y gestión de recursos educativos en ambientes digitales denominadas Herramientas de Autor que permiten crear recursos de aprendizaje interactivos como: Libros, Actividades, Notas y *Classroom* (Rubio-Pizzorno y Montiel-Espinosa, 2021). Además, estas herramientas de autor se integran y articulan configurando un ambiente virtual de aprendizaje. Este ambiente interviene directamente en la conceptualización y manera de abordar los problemas por parte de los estudiantes.

Santos-Trigo (2020) afirma que el uso de un sistema dinámico como GeoGebra le proporciona un conjunto de posibilidades para que los estudiantes puedan conceptualizar, representar objetos matemáticos y tareas dinámicamente. Algunas de las posibilidades son movimiento de objetos (arrastre), encontrar lugares geométricos, cuantificar atributos de los objetos (longitudes, áreas, ángulos, etc.).

Dimensión Cognitiva

En esta dimensión se presentan algunas dificultades y obstáculos relacionados con el aprendizaje de la noción de área.

Algunas Dificultades y Obstáculos en el Aprendizaje de la Noción de Área como Magnitud

Teniendo en cuenta las diversas investigaciones relacionadas con el área como magnitud, se han considerado algunas dificultades, errores y obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, como se expone a continuación:

Corberán (1996) afirma que la mayoría de estudiantes desarrolla casi exclusivamente una concepción numérica del área, por ello reducen la comparación de superficies a la comparación de números. “Esta concepción del área como un número que se puede calcular se manifiesta como un obstáculo para el desarrollo del área como una propiedad que se conserva por recorte y pegado”. (Perrin-Glorían, 1992 como se citó en Corberán (1996).

Además, Corberán (1996) señala que al inicio de la enseñanza del concepto de área, es importante introducir a los estudiantes en situaciones donde se estudie de forma conjunta el área y el perímetro de algunas figuras, dado que uno de los errores mas comunes es la falsa relación que se establece entre estos dos objetos matemáticos.

En el mismo sentido, D’amore y Fandiño (2007) mencionan que una de las dificultades de los estudiantes, para apropiarse de la idea de superficie, son las falsas relaciones entre área y perímetro. Puesto que, “al variar la forma, el joven estudiante tiende a no ser capaz de aceptar la posible inmutabilidad de la medida de la superficie” (p. 41). Además, la confusión del área con el perímetro por parte de los estudiantes, puede generar dificultades relacionadas con la manipulación de fórmulas y unidades estandarizadas de manera mecánica y por ende poco útiles ante situaciones reales (Corberán, 1996).

Posteriormente, (Rogalski, 1979 como se citó en D’amore y Fandiño (2007) señala que uno de los grandes problemas en el aprendizaje de las superficies, “son los cambios en las

dimensiones, el estatuto específico de las unidades de medida, sus relaciones con las unidades de longitud y las medidas espaciales” (p. 41). Al respecto (Chamorro, 1997 como se citó en D’amore y Fandiño 2007) manifiesta que algunas de las dificultades relacionadas con el concepto de área, son el no reconocimiento por parte del estudiante de la superficie como magnitud, el manejo incorrecto de las unidades de medida, además, la relación que las unidades de superficie conservan con las unidades de longitud, siendo estas últimas la base de las primeras.

Dimensión matemática

En el siguiente apartado se presentan algunos aspectos que fundamentan el concepto de área como magnitud.

Conceptos asociados al área como magnitud: numero, medida y magnitud

A continuación, se presentan los aspectos matemáticos relacionados con el área como magnitud como son: numero, medida y magnitud.

Numero. Desde hace años el ser humano ha utilizado la noción de número tanto a nivel práctico como teórico. Desde el principio el hombre primitivo sintió la necesidad de usar la idea de cantidad y cuantificar todo lo que en ese entonces lo rodeaba, con el paso del tiempo surgieron varias escuelas y matemáticos que desarrollaron teorías de números.

De acuerdo con (Recalde, 2017) se incide que los primeros que desarrollaron una teoría sistemática de números fueron los pitagóricos, su teoría se basaba en arreglos geométricos puntuales. Asimismo, planteaban la unión indisoluble entre los números y las cosas, llegando a creer que el principio de todos los seres eran los números.

Unos de los aportes más valiosos de los pitagóricos tienen relación con el método de demostración por reducción al absurdo, este método va dando cavidad a los procesos infinitos, lo cual conlleva a la demostración de la existencia de magnitudes inconmensurables, lo que generó la gran crisis en la escuela pitagórica. Ya que para ellos “un número era discreto, y la unidad que lo constituía era indivisible y constituía la esencia del universo” Gutiérrez y Vanegas (2005).

Además, destacan que:

La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos griegos a pensar un continuo físico, sugerido por las magnitudes geométricas; siendo Eudoxo quien introduce la idea de magnitud continua; no se trataba de un número, sino de entidades geométricas (longitud, área, volumen, etc.), las cuales eran continuas, contrariamente a los números, que eran discretos. (p. 61)

Existen múltiples definiciones dirigidas a diferentes atributos y aspectos relacionados con la definición de número. Por ejemplo, Piaget (1991) define el número como:

Un número entero es, en efecto, una colección de unidades iguales entre sí y, por tanto, una clase cuyas subclases se hacen equivalentes mediante la supresión de cualidades; pero es también al mismo tiempo una serie ordenada y, por tanto, una seriación de las relaciones de orden” (pp. 73)

Además, el número se caracteriza por su doble naturaleza ser cardinal y ordinal. En este sentido Collado (2014) afirma que el número posee dos significados:

Cardinal cuando responde a la necesidad de saber cuántos hay en las tareas de cálculo o a las indicaciones de traer tantos objetos como se indique en las tareas de construcción y

Ordinal cuando manifiesta qué lugar ocupa un elemento dentro de una colección

ordenada en las tareas de cálculo o cuando se demanda colocar un objeto en el lugar que se indique en las tareas de construcción. (p. 69)

Medida. La génesis de la medida parte de la constitución de la magnitud como algo cuantificable, medible, que surge de la noción de igualdad al comparar el tamaño, el valor, entre las cosas, en situaciones comerciales o de trueque, además su desarrollo esta unido al desarrollo de nociones numéricas, la construcción y adaptación de los sistemas y unidades de medida, estas últimas entendidas como una cantidad estandarizada de una magnitud física establecida (García y Zúñiga, 2014).

La palabra *medida* tiene múltiples significados, en matemática y en el marco de este trabajo adoptamos la propuesta de (Pizarro, 2015), quien considera tres definiciones del diccionario de la lengua española de la RAE, y define la medida como: “Acción y efecto de medir”, “Cada una de las unidades que se emplean para medir longitudes, área o volúmenes de líquidos o áridos” y “Expresión del resultado de una medición”. Se deduce entonces que “para la RAE la medida puede ser usada en el acto de medir, en el resultado de la medición y en las unidades utilizadas para medir” (p. 15).

Por lo anterior, se hace necesario definir los siguientes términos: medir, medición y unidad de medida.

Medir. En su forma primigenia, “el proceso de medir dos magnitudes consisten en compararlas cuantitativamente” (Recalde, 2017). Por otro lado, desde el punto de vista cognitivo se considera el proceso de medir como “la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que

puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos” (Godino et al., 2002, p. 615).

En el mismo sentido, (Segovia y Rico, 2011) definen el termino *medir* como: la asignación de un número a una cantidad de magnitud. Dicho número es su medida e indica las veces que esa cantidad de magnitud contiene a la unidad de medida, es decir, a la cantidad que se toma como referencia o patrón.

Medición. Es el proceso mediante el cual se asigna el valor numérico a la anterior comparación, además considera los instrumentos utilizados en el proceso, las estrategias y la interpretación de datos que se requieren para la medida de las diferentes magnitudes (García y Zúñiga, 2014).

Unidades de Medida. Es una cantidad preestablecida, convencional o no, de una determinada propiedad o magnitud de objetos o eventos. Una unidad de medida convencional toma su valor a partir de un patrón inmodificable bajo ciertas condiciones o surgido como una composición de otras unidades definidas previamente (Galina, 2008).

Definición Formal del Concepto de Medida. Godino et al. (2002) afirman que las ideas intuitivas que surgen de la definición de medida se pueden formalizar mediante las siguientes definiciones y proposiciones:

Definición: se llama medida de la cantidad m de una magnitud escalar, respecto de la unidad u , al número $q \in S(M)$, tal que $m = qu$.

Proposición: La aplicación $\mu_u: M \rightarrow S(M)$ que asocia a cada cantidad de una magnitud escalar su medida respecto de u , es un isomorfismo de $(M, +)$ en $[S(M), +]$

Proposición (cambio de unidad de medida): Si u y u' son dos unidades de medida de una magnitud escalar, tales que $\mu_{u'}(u) = k$, entonces $\mu_{u'}(m) = k \mu_u(m)$

El isomorfismo entre magnitud escalar y número permite asignar a cada magnitud un número y recíprocamente, con lo que su enejo puede reducirse al de los números.

Además, de este modo podemos extender el campo de operaciones posibles con cantidades (multiplicación y cociente de cantidades), incluso de cantidades distintas. (p. 632)

Magnitud. Existen diferentes significados cuando se habla de magnitud, desde el punto de vista cognitivo (Godino et al., 2002) definen el termino *magnitud*, como: “Los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, área, peso, etc.) o también de manera discreta (número de personas); las cantidades son los valores de dichas variables.”

Además, afirma que, en la vida cotidiana y las ciencias experimentales, se habla de magnitudes, para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. Es decir “Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que pueden expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o luminosidad”.

Tipos de Magnitudes. (Godino et al., 2002) plantea que existen dos tipos de magnitudes:

magnitudes intensivas y extensivas. Los autores definen las magnitudes intensivas como las magnitudes donde “existen rasgos para los que tiene sentido agregar los objetos que los soportan, pero la cantidad del rasgo en el objeto agregado no es proporcionalmente aditiva” y definen las magnitudes extensivas como “la longitud, el peso, el área, etc.; estas magnitudes se pueden describir como “proporcionalmente agregables”, y la escala de medida correspondiente se dice que es la razón.” (p. 618)

Nuestro interés para este estudio son las magnitudes extensivas, las cuales se pueden sumar, es decir, “la cantidad de magnitud de un objeto compuesto de partes se obtiene agregando las cantidades de cada parte” (Godino et al., 2002, p. 618).

Definición Formal del Concepto de Magnitud. Desde una perspectiva matemática Fiol y Fortuny (1990) definen la magnitud como:

un conjunto no vacío M , con relaciones de orden ($<$) y una operación interna ($+$) tal que $a, b, c \in M$ cumplen las siguientes propiedades:

1. Ordenación: $a < b$, ó $a = b$, ó $b < a$
2. Transitiva: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b < c$
3. Propiedad Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Simplificación: Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$
5. Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$
6. Diferencia: $a < b$, si y sólo si existe c tal que $a + c = b$
7. Divisibilidad: Para cada a en M y n un número natural existe b en M , tal que $a = n \cdot b$, donde $n \cdot b = b + \dots + b$ con n -sumandos.
8. Postulado de Arquímedes: para cada c y d en M existe un número natural n tal que $d < n \cdot c$. A los elementos de M los llamaremos cantidades. Elegimos en M un elemento e al que llamaremos unidad. (p. 29)

Godino et al. (2002) definen matemáticamente el concepto de magnitud como: “Un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades” (p. 624). En este sentido, Luengo (1990) define algebraicamente la magnitud de la siguiente manera:

Se considera un conjunto de entes (ε) que cumplen las siguientes condiciones:

- (1) Entre ellos se puede definir una relación de igualdad (=)
- (2) La relación anterior constituye una relación de equivalencia porque:
 - (a) Es reflexiva $\forall e \in \varepsilon \rightarrow e = e$
 - (b) Es simétrica $\forall e_1, e_2 \in \varepsilon \rightarrow e_1 = e_2 \Rightarrow e_2 = e_1$
 - (c) Es transitiva $\forall e_1, e_2, e_3 \in \varepsilon \rightarrow e_1 = e_2 \text{ y } e_2 = e_3 \Rightarrow e_1 = e_3$
- (3) En el conjunto E ($\varepsilon/=\$) definimos una operación interna llamada Suma de elementos:

$$\forall e_1, e_2 \in E \Rightarrow \exists e_1 + e_2 \in E$$

- (4) La operación interna Suma (+) en E tiene las propiedades:
 - (a) Uniforme: $\forall e_1, e_2 \in \varepsilon \wedge \forall d_1, d_2 \in \varepsilon \rightarrow e_1 = e_2 \wedge d_1 = d_2 \Rightarrow e_1 + d_1 = e_2 + d_2$
 - (b) Conmutativa: $\forall e_1, e_2 \in E \rightarrow e_1 + e_2 = e_2 + e_1$
 - (c) Asociativa: $\forall e_1, e_2, e_3 \in E \rightarrow (e_1 + e_2) + e_3 = e_1 + (e_2 + e_3)$
 - (d) Modular: $\exists 0 \in \frac{E}{\forall e} \in E \rightarrow 0 + e = e + 0 = e$

Si en el conjunto ε se ha definido la relación de equivalencia (=) y la operación suma (+) con sus propiedades, los elementos del conjunto E definen una magnitud, entendiendo por tal la cualidad común que hace que los elementos de E sean igualables y sumables. (p. 48)

En síntesis, a partir de las anteriores definiciones se puede ver la relación entre número, medida y magnitud, por cuanto la magnitud es una característica o cualidad, de la cual su cantidad es susceptible de medición, la cual se realiza mediante el proceso de medida tomando una unidad arbitraria y que finalmente se expresa a través de la pareja número-unidad de medida.

Propiedades del Área

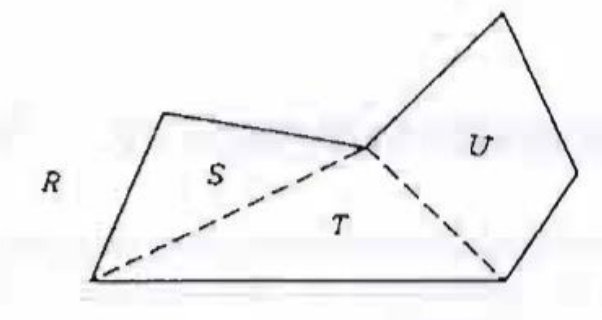
El área considerada como una función que permite determinar la medida del área de superficies planas, a través de diferentes procedimientos cumple las siguientes propiedades (O'Daffer y Clemens, 1977 como se citó en Corberán, 1996, p. 37):

Propiedad Aditiva: Si una región R se puede descomponer en un número finito de regiones, el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.

$$A(R) = A(S) + A(T) + A(U)$$

Figura 2

Propiedad Aditiva

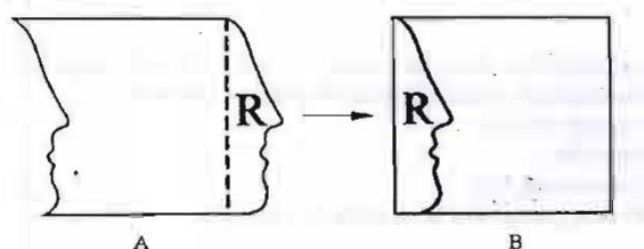


Fuente: Tomado de Corberán (1996)

Propiedad de Invarianza: Si dos regiones R y S son congruentes, entonces $A(R) = A(S)$.

Propiedad de Unidad: El área del cuadrado unidad es 1.

Propiedad de Disección: Si una región puede ser diseccionada en partes y esas partes reorganizadas para formar otra región, entonces las dos regiones tienen áreas iguales.

Figura 3*Propiedad de Disección*

Fuente: Tomado de Corberán (1996)

Se consideraron estas propiedades, puesto que estas propiedades hacen referencia a la conservación del área de una superficie cuando es sometida a determinadas transformaciones.

Aproximación a los Conceptos de Área y Superficie

Se considera importante reconocer la diferencia entre los conceptos *área* y *superficie* pues la literatura que se ha revisado hace dar cuenta que se trata de términos diferentes que generalmente se presentan asociados, tal vez por su uso en la vida cotidiana (Corberán, 1996).

Así pues, (Corberán, 1996) afirma que “el área es una propiedad más de una superficie que puede ser medible, y por tanto se le puede asociar un número resultado de su medida” (p. 40). Además, adopta las siguientes definiciones propuestas por Perrin-Glorían (1992): “Superficie: designa la parte de un plano, Área: designa una magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie y Medida: designa el número que representa el lugar ocupado por la superficie del plano” (Corberán, 1996, p.20).

De acuerdo con Godino et al. (2002) “La palabra superficie se debería reservar para designar la forma del cuerpo o figura (superficie plana, alabeada, triangular), mientras que la palabra área debería designar la extensión de la superficie.” (p. 623).

Respecto a lo anterior, al considerar el área de una superficie, es necesario diferenciar dicha noción del número que la mide. Para ello se integran tres representaciones propuestas por (Douady, 1996; Fioriti, 1998, como se citó en García, 2013, pp, 41-45): la geométrica, de las magnitudes y la numérica como se presenta a continuación:

- 1) *Desde la representación geométrica:* nos referimos a una *superficie* como una región del plano limitada por una curva cerrada.
- 2) *Desde la representación de las magnitudes:* se deben tener en cuenta algunos conceptos preliminares como los que se mencionan a continuación:

a). Una superficie S se puede descomponer en $S_1, S_2, \dots, S_n$ superficies convexas, de manera que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \dots \cup S_n$ y cada S_i , no se encuentran superpuestos con los restantes, es decir la intersección entre ellos en vacía.

b). Sean S y F dos superficies:

- Las superficies S y F son congruentes si existe un movimiento del plano que transforma una en otra, es decir, F en S .
- La congruencia de superficies cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Por tanto, las superficies que cumplen con ambas condiciones se denominan homogéneas, en consecuencia, las superficies congruentes son homogéneas.

c). Dos superficies F y S son equivalentes si mediante una descomposición conveniente se puede transformar una en la otra. Es decir, si dividimos una superficie (S) en un número finito de partes y con ellas, las componemos de tal forma que resulte

superpuesta con la otra superficie (F). De esta manera se dice que las superficies equivalentes son homogéneas.

d). Magnitudes medibles

- El área es una magnitud que admite comparar superficies en función del espacio ocupado. Se puede decir que: “la superficie F tiene la misma área que S si es posible cambiar una en otra a través de una descomposición conveniente”.

Si clasificamos las superficies de acuerdo con la relación de equivalencia enunciada, se obtienen subconjuntos (clases de equivalencia) a los cuales les corresponde una cantidad que se denomina “área”. De esta forma se deduce que el área no es una superficie, ni un número, es una característica de la superficie.

- Consideremos también la relación “tiene menos o igual que” al igual que: “La superficie F tiene área menor o igual que la superficie S ” si al descomponer la superficie F no es posible cubrir totalmente la otra superficie (S). Por consiguiente, siempre es posible comparar dos superficies mediante esta relación.
- Con esta magnitud se puede definir la adición de la siguiente manera:

Si se designa con r el área de la superficie S y con p el área de la superficie F , entonces, $r + p$ es el área de la superficie que obtiene componiendo ambas superficies ($S \cup F$) consecutivas y no solapadas.

Esta operación adición cumple las propiedades, asociativa, conmutativa y cancelativa.

- Se puede definir el producto de un natural por el área: sea r el área de una superficie S y n es un numero natural, entonces $n \times r$ es el área de la superficie obtenida uniendo “ n ” veces la superficie S , de forma continua y no solapada. Esta propiedad también se cumple si “ n ” es un número real positivo. Así:
- Como se mencionó anteriormente; La relación de equivalencia establecida y la operación “+” como ley interna asociada a las propiedades anunciadas de una familia de superficies homogéneas definen una magnitud.

Por lo tanto:

A la característica de las superficies, susceptible de variación de una superficie en otra, que las hace igualables y sumables, se le denomina magnitud área.

- Se dice que la magnitud es continua medible, cuando en la familia de superficies se ha establecido una relación de equivalencia “tienen igual área a ”, una relación de orden “tiene un área menor o igual que”, una ley interna “la operación adición” y una ley externa, “la operación multiplicación” compatibles con las relaciones mencionadas.
 - Tienen la misma cantidad de magnitud, todas las superficies que pertenecen a una misma clase de equivalencia.
 - La cantidad de área es lo que tiene en común las superficies equivalentes entre sí, en tanto que la magnitud “área” es la característica común a todas las superficies.
- 3) *Desde la representación numérica:* Medida del área, como ya se había mencionado, entendemos la medición, como el proceso por medio del cual asignamos un numero a elementos de una misma magnitud con el propósito de compararlos.

A partir de la elección de la unidad, la medida es el número de unidades necesarias para recubrir exactamente y sin superposición la superficie.

Fijamos una unidad de área “ u ” y a la medida del área de una superficie le asignamos un número por comparación con esa unidad “ u ”, es decir, establecemos una aplicación que notaremos

$$med_u(p) = r \quad \text{sí y solo si } p = r \cdot u$$

r es el número de veces que hay que iterar u para obtener p . Además, se puede decir que:

Medir el área de superficies; es establecer una correspondencia entre las áreas mencionadas y un número real positivo denominado medida, tal que a áreas iguales le corresponden medidas iguales, a áreas ordenadas le corresponden áreas ordenadas y a la medida de una suma de áreas le corresponden la suma de las medidas de cada una de las áreas.

- Si $p = q \Rightarrow med_u(p) = med_u(q)$
- Si $p < q \Rightarrow med_u(p) < med_u(q)$
- $med_u(p + q) = med_u(p) + med_u(q)$

En conclusión, los elementos conceptuales anteriormente mencionados se consideraron fundamentales para las tareas de aprendizaje, de la noción de área como magnitud.

Dimensión Curricular

Con el propósito de orientar y respaldar el presente estudio, se consideraron los documentos curriculares propuestos por el MEN para el área de matemáticas, principalmente los

Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) relacionados con la noción de área como magnitud.

Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) constituyen puntos de apoyo y orientación para organizar el currículo de matemáticas en las Instituciones Educativas, donde se contempla que se debe tener tres aspectos como son: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto.

La formulación de los Estándares Básicos de Competencias (EBC) (MEN, 2006) se dio a partir de los Lineamientos curriculares. Los EBC son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de la vida escolar” (p. 12). “Siendo una guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saben hacer con lo que aprenden” (MEN, 2006, p. 1)

Teniendo en cuenta lo anterior y el interés de este estudio, se pretende trabajar una serie de tareas que permitan fortalecer el *pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas* en los estudiantes de grado sexto, dado que en este pensamiento se busca que el estudiante desarrolle los siguientes procesos y conceptos (MEN, 1998, pp 42-46):

- La construcción de conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos de los procesos de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.

- La diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica
- El papel del trasfondo social de la medición

“Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (MEN, 2006, p. 63).

Desde lo planteado por el MEN en los Lineamientos Curriculares (1998) y en los EBC en Matemáticas (2006), los estudiantes en los grados 6° a 7° deben calcular áreas a través de la composición y descomposición de figuras y cuerpos, además deben reconocer en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área volumen, capacidad, masa y peso) y, en los eventos su duración (Grado 3°) empleando diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos (Grado 5°). Finalmente deben resolver y formular problemas que requieran técnicas de estimación.

Asimismo, se toma en consideración los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA (2016) los cuales “en su conjunto, explicitan los conocimientos, actitudes y habilidades que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende” para grado sexto, en relación con las evidencias de aprendizaje a desarrollar y proponer estrategias de medición, estimación y cálculo de diferentes cantidades (áreas, longitudes, volúmenes, etc.) para resolver problemas.

Por lo anterior, para el desarrollo de la propuesta de aprendizaje o proceso de enseñanza se trata de abordar algunos procesos y conceptos relacionados con la noción de área como magnitud.

Capítulo III: Metodología

La metodología que se empleó para desarrollar este estudio, tiene un carácter cualitativo, bajo el paradigma de la Investigación Basada en el Diseño (IBD), de acuerdo con Molina et al., (2011), “su objetivo es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de maneras particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistemática del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación” (p. 76).

Según Molina et al., (2011) la IBD se caracteriza por cinco aspectos fundamentales que son: (i) Se centran en la caracterización de una situación de aprendizaje en toda su complejidad; (ii) Persiguen el desarrollo de modelos teóricos empíricamente fundamentados, relativos a un dominio de aprendizaje específico; (iii) tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño; (iv) Dada la complejidad de las situaciones de aprendizaje, es necesario recoger extensos registros para capturar todo el proceso: lo que los alumnos, docentes e investigadores aprenden a lo largo del desarrollo del experimento; (v) Por su carácter cíclico, estos estudios implican dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan durante los diferentes ciclos y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación (pp. 77-78).

Dentro de la IBD se contemplan los experimentos de enseñanza, que consiste en una serie de episodios de enseñanza en los que los participantes son uno o más alumnos, un investigador-docente y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson como se citó en Molina et al., 2011). La característica principal de este estudio es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el razonamiento y aprendizaje de los alumnos. Por lo general, se espera que el

alumnado construya conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones.

Fases del Experimento de Enseñanza

De acuerdo con Cobb y Gravemeijer (2008) en la ejecución de los experimentos de enseñanza se distinguen tres fases: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. En la segunda fase tienen lugar las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo. A continuación, se describe cada fase que se desarrolló en este estudio.

Fase 1. Preparación del experimento

En esta fase se realizó una revisión de la literatura considerando trabajos enfocados en el aprendizaje mediante la resolución de problemas, especialmente propuestas para el aprendizaje del área. En este sentido, se consideró el trabajo de García (2013) el cual propone el desarrollo de una secuencia de aprendizaje para la construcción del concepto de área fundamentado en la resolución de problemas, de este trabajo se seleccionaron tareas de aprendizaje que permitieran un acercamiento a la noción de área. Se adaptaron siete tareas de aprendizaje teniendo en cuenta que se pudieran explorar en un ambiente digital.

La Tarea 1 se seleccionó de un cuestionario de conocimientos matemáticos primitivos; las Tareas 2, 3 y 4 se tomaron del cuestionario de ideas previas. Estas tareas se seleccionaron en el mismo sentido, identificar las ideas previas y conocimientos matemáticos vinculados al campo conceptual de estudio. Las Tareas 5, 6 y 7 fueron seleccionadas de la secuencia de aprendizaje propuesta por García (2013). Estas Tareas estaban propuestas para trabajar a lápiz y papel, para este estudio fueron adaptadas a un ambiente digital, donde se diseñaron applets de GeoGebra que

fueron empleados para crear una lección en *GeoGebra Classroom* denominada “*la finca de don pedro y sus piscinas*”. A continuación, se presentan las tareas de aprendizaje adaptadas:

La Tarea 1 (Figura 4) tenía por objetivo que los estudiantes establecieran relaciones entre figuras geométricas. Es decir, componer figuras a partir de otras para poder establecer afirmaciones sobre ellas. Por tanto, en esta tarea se les presentaba a los estudiantes varios triángulos etiquetados con algunas letras del abecedario y se les pedía que unieran parejas de triángulos para formar piscinas cuadradas y rectangulares.

La adaptación que se le hizo a esta tarea, consistió en la construcción de triángulos rectángulos que se pudieran mover, de tal manera que los estudiantes emplearan el arrastre y rotación para formar piscinas cuadradas y rectangulares.

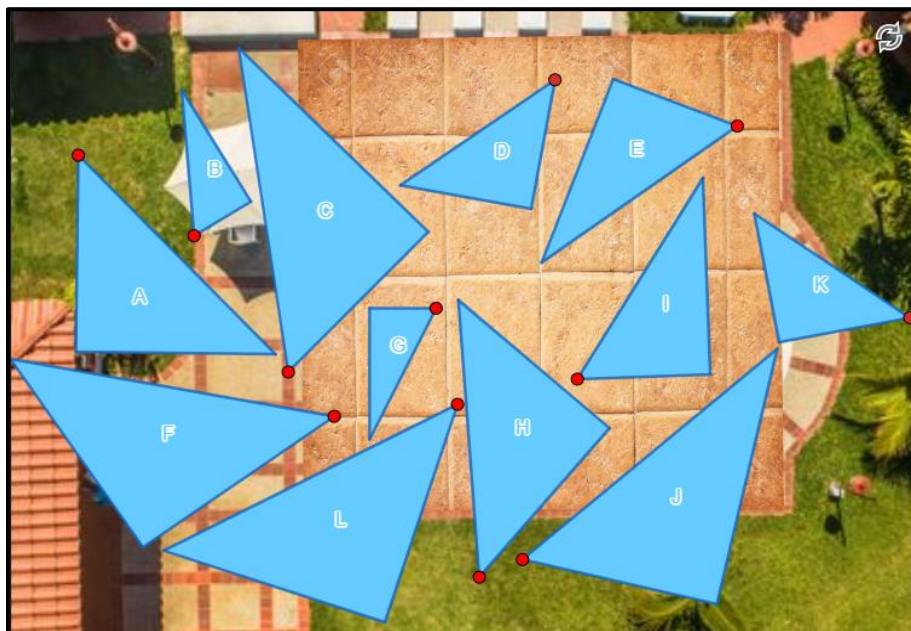
Tarea 1

A continuación, encontraras varios tipos de triángulos, con los cuales don Pedro quiere armar planos de piscinas cuadradas y rectangulares.

Une parejas de triángulos y ayuda a don Pedro a formar planos de piscinas cuadradas y rectangulares. **Indicación:** Puedes desplazar los triángulos mediante la pantalla, y girarlos a través del punto rojo.

Figura 4

Tarea 1 (<https://www.geogebra.org/material/edit/id/twuj4vju>)



1. ¿Cuáles parejas de triángulos te permiten formar planos de piscinas cuadradas?
2. ¿Como verificas que son cuadradas?
3. ¿Cuáles parejas de triángulos te permiten formar planos de piscinas rectangulares?
4. ¿Cómo verificas que son rectangulares?

La Tarea 2 (Figura 5) tenía por objetivo que los estudiantes identificaran la conservación de la magnitud área. En este sentido, la Tarea 2 consistió en la representación de dos piscinas Figura A y Figura B (las figuras que componen la piscina B se podían movilizar), las cuales se iban a pintar y se requería saber, si se necesitaba diferente cantidad de pintura o la misma, y además saber si las piscinas tenían o no la misma superficie. Para el desarrollo de esta actividad, en primer lugar, se pretendía que el estudiante moviera las figuras de la piscina B teniendo en cuenta la nota de la segunda pregunta, y diera cuenta de la cantidad de pintura que se necesitaba para pintar ambas figuras. Luego, que el estudiante empleara el arrastre para descomponer y recomponer la Figura B y comprobara que las dos piscinas tienen la misma área.

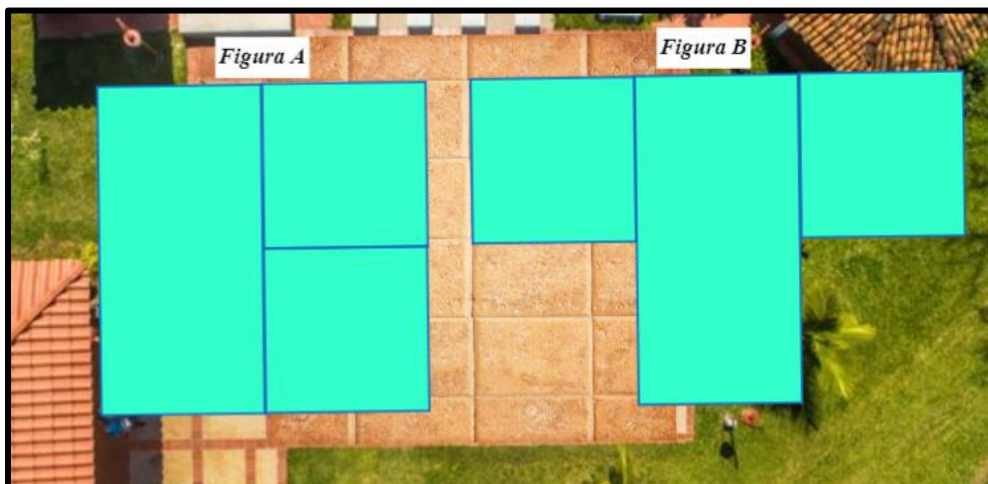
La Tarea inicial propuesta por García (2013) consistía en la representación de dos Figuras A y B, donde se especificaba que la Figura B se había formado con las piezas de la Figura A y se preguntaba a los estudiantes si se requería diferente cantidad de pintura para cada una de ellas, con la intención de detectar si los estudiantes manifestaban la conservación de la magnitud área cuando es sometida a transformaciones. La adaptación que se le hizo a esta tarea consistió en que las figuras que conforman la Figura B se pudiesen mover, para que los estudiantes emplearan el arrastre como componente didáctico que moviliza la conservación del área.

Tarea 2

Las figuras A y B representan el piso de dos piscinas de la finca de don Pedro.

Figura 5

Tarea 2 (<https://www.geogebra.org/m/wcdvymv>)



1. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizarías diferente cantidad de pintura para cada una de ellas? ¿Por qué?
2. La figura A y la figura B tienen igual área. ¿Cómo lo comprobarías? *Nota:* Las piezas de la figura B se pueden desplazar a través de la pantalla.

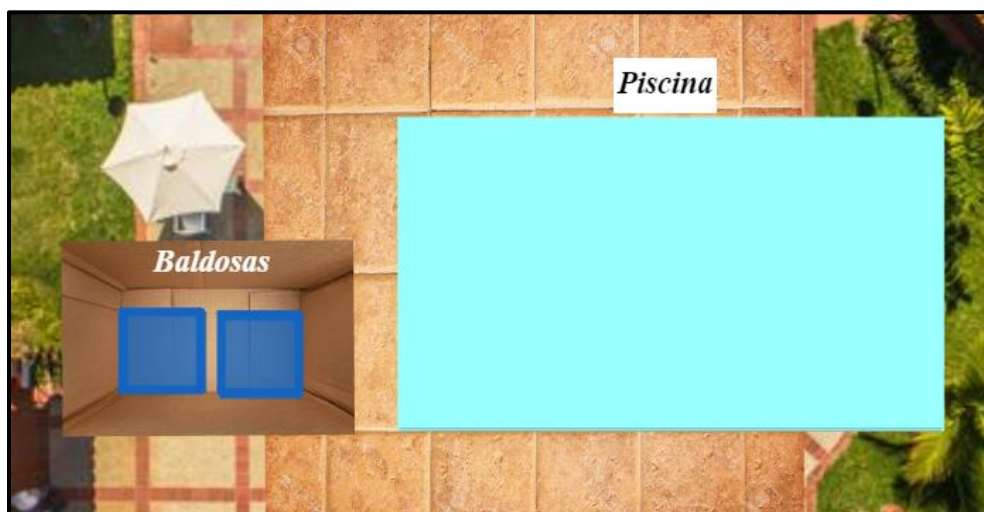
La Tarea 3 (Figura 6) tenía por objetivo que los estudiantes midieran la superficie mediante recubrimiento o pavimentación, tomando como unidad de medida baldosas. En consecuencia, la Tarea 3 consistió en la representación de una piscina rectangular, la cual don Pedro desea embaldosar y se dispone de un numero de baldosas que el estudiante debe tomar para cubrir completamente la piscina. Esta tarea, fue propuesta para que los estudiantes la trabajen con lápiz y papel. Para este estudio se adaptó a un applet de GeoGebra donde se construyeron un rectángulo (piscina) y varios cuadrados (baldosas). Los cuadrados se diseñaron de tal manera que el estudiante los pudiera desplazar y reacomodar en la piscina, y así determinar la cantidad de baldosas que se necesitaba para cubrir completamente la piscina.

Tarea 3

La finca de Pedro tiene una piscina rectangular. Él desea embaldosar la piscina con baldosas cuadradas, como se indican a continuación.

Figura 6

Tarea 3 (<https://www.geogebra.org/m/tvgh3m8n>)



1. ¿Cuántas baldosas necesita don Pedro para cubrir completamente la piscina? *Indicación:* ¡Puedes tomar cuantas baldosas necesites!

2. ¿Describe como calculaste la cantidad de baldosas que necesitaba don Pedro para cubrir su piscina?

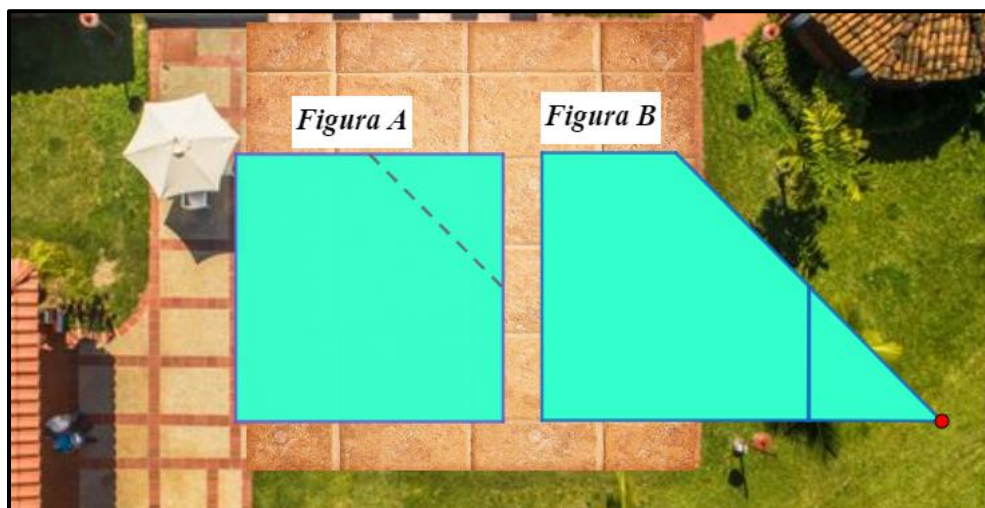
La Tarea 4 (Figura 7) tenía por objetivo que los estudiantes identificaran la conservación del área cuando una figura se descompone y recompone en otra diferente. En este sentido, la Tarea 4 estaba conformada por la representación de dos piscinas (Figura A y Figura B) donde se precisaba a los estudiantes que don Pedro quería formar el modelo de la piscina B a partir de la figura A. Asimismo, en el modelo de la piscina A se presentaba una línea punteada en la esquina de la figura, con el propósito de que el estudiante recortara esa parte de la figura y la reubicara como se muestra en la figura B. Esta tarea, propuesta en García (2013) se adaptó a un applet de GeoGebra donde se construyeron las Figuras A y B, permitiendo que el triángulo que se encuentra en la parte inferior de la Figura B se pudiera mover para que el estudiante identificara que es el mismo triángulo que se forma en la Figura A, y que al recortarlo por las líneas punteadas y reacomodarlo permite construir el modelo requerido.

Tarea 4

Don Pedro quiere hacer un diseño de piscina, como se muestra en la figura **B**, a partir del diseño de la figura **A**.

Figura 7

Tarea 4 (<https://www.geogebra.org/m/bkwnvkbz>)



1. ¿Cómo don Pedro obtiene el diseño de la piscina **B**, a partir del diseño de la piscina **A**?
2. Don Pedro afirma que el área de la figura **A** es igual al área de la figura **B**. ¿Cómo lo comprobarías?

Indicación: puedes mover el triángulo que se forma en la figura **B** y girarlo mediante el punto rojo.

La Tarea 5 (Figura 8) tenía por objetivo que los estudiantes comparan las figuras según su área, a través de la descomposición y superposición. En este aspecto, la tarea 5 consistió en la representación de cuatro planos de piscinas (Figuras A, B, C y D) donde el estudiante debía determinar cuál de los planos ocupaba mayor o menor superficie.

La tarea inicial propuesta por García (2013) consistía, en que sobre una hoja de papel se dibujaron diseños de escudos para un club y se preguntaba por cuál de los diseños necesitaba la menor cantidad de tela para su confección, se pretendía que los estudiantes compararán y ordenarán las figuras según su área, por inclusión o por romper y rehacer. Esta tarea, hacia parte de la secuencia de aprendizaje y fue propuesta para que los estudiantes la trabajen con lápiz y

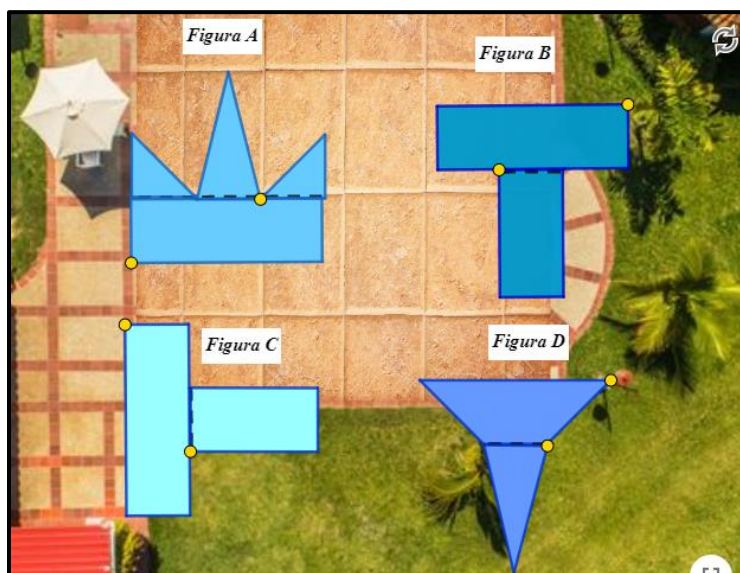
papel. Para este estudio, se cambió el contexto por planos de piscinas y se elaboraron algunas de las figuras en GeoGebra, de tal forma que los estudiantes pudieran emplear el arrastre para descomponer, recomponer y superponer las figuras, con el fin de que ellos compararan los planos mediante procedimientos directos e indirectos y establecieran cuál de los planos tenía mayor o menor superficie.

Tarea 5

A don Pedro le sugirieron que diseñara planos de piscinas como los que se muestran a continuación.

Figura 8

Tarea 5(<https://www.geogebra.org/m/tqg7pwnx>)



Don Pedro desea saber cuál de los planos ocupa menor y mayor superficie.

1. ¿Cuál de los planos crees tú que ocupa menor superficie? Justifica tu respuesta.

Indicación: Puedes desplazar cada una de las figuras, y girarlas mediante los puntos amarillos que se encuentran en sus bordes.

2. ¿Cuál de los diseños crees tú que ocupa mayor superficie? Justifica tu respuesta.

La Tarea 6 (Figuras 9, 10 y 11) tenían por objetivo que los estudiantes identificaran la conservación del área mediante la superposición de figuras y además describieran los métodos que utilizaron para resolver las tareas. En este sentido, la tarea 6 está conformada por tres applets: en el primero y segundo se presentaba a los estudiantes siete fichas del *tangram* y una figura que representa el piso de una piscina que se quiere construir, se pide a los estudiantes determinar con cuales piezas del tangram fue construido el piso de la figura 1 y 2. En el tercer applet el estudiante dispone de catorce fichas del tangram y la representación del piso de las piscinas (Figuras 1 y 2), don Pedro afirma que las dos figuras tienen igual área, en este caso el estudiante debía emplear las fichas del tangram para determinar si la afirmación de don Pedro es correcta.

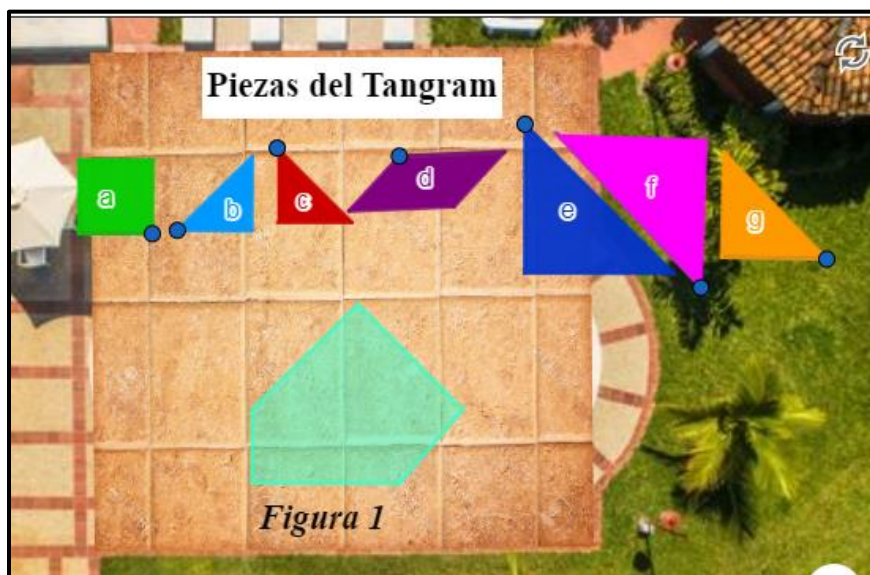
Tarea 6

Con las siguientes figuras se desean construir pisos de piscinas.

La figura **1** representa el piso de una piscina, que don Pedro desea construir.

Figura 9

Tarea 6 (<https://www.geogebra.org/m/rkpqxtyp#material/vwkytacq>)



Teniendo en cuenta que se necesitan algunas piezas del Tangram para construir los pisos de las piscinas, Responde.

1. ¿Cuáles piezas del tangram te permiten construir el piso de la piscina 1? Justifica tu respuesta.

Indicación: Las piezas del tangram se pueden movilizar a través de la pantalla, y rotar mediante el punto azul.

La figura 2 representa el piso de otra piscina que don Pedro quiere hacer.

Figura 10

Continuación de la Tarea 6



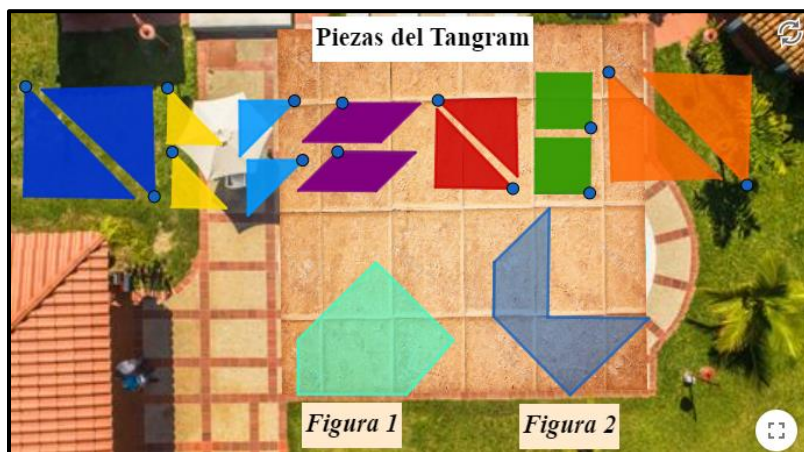
2. Don pedro desea saber ¿Con cuáles piezas del tangram se puede formar el piso de la Figura 2? Justifica tu respuesta.

Indicación: Las piezas del tangram se pueden movilizar a través de la pantalla, y rotar mediante el punto azul.

Don pedro afirma que el piso de la piscina 1 y la piscina 2 son iguales.

Figura 11

Finalización de la Tarea 6



3. La afirmación de Don Pedro es correcta ¿Si o No?
4. ¿Cómo comprobarías que los pisos de las dos piscinas son iguales, o no? Justifica tu respuesta. *¡Recuerda que puedes mover las piezas del Tangram!*

La Tarea 7 (Figuras 12, 13 y 14) tenían por objetivo que los estudiantes identificaran la conservación del área mediante la superposición de figuras y realizaran comparaciones que les permitieran determinar cuál figura ocupa mayor superficie. En este sentido, la Tarea 7 está conformada por tres applets: en el primero y segundo se presenta a los estudiantes siete fichas del *tangram* y una figura que representa el piso de una piscina que se quiere construir, se pide a los estudiantes determinar con cuales piezas del tangram fue construido el piso de la figura 3 y 4. En el tercer applet el estudiante dispone de catorce fichas del tangram y la representación del piso de las piscinas (figuras 3 y 4), en este caso el estudiante debe emplear las fichas del tangram para determinar cuál de los planos ocupa mayor superficie.

Las Tareas 6 y 7, propuestas en García (2013) consistía en averiguar con cuales piezas del tangram se habían construido las figuras que se presentaban a los estudiantes en material impreso y además se les proporcionaba fichas del tangram en goma Eva. La adaptación que se le

hizo a estas tareas, en un primer momento fue cambiar el contexto por planos de piscinas, luego se adaptaron a un ambiente digital mediante la elaboración de varios applets, donde se elaboraron las fichas del tangram y las figuras que representaban el piso de las piscinas, de tal manera que las fichas se pudieran arrastrar y rotar, para que los estudiantes emplearan la superposición y comparación. Y de esta manera determinaran las fichas que necesitaban para formar los pisos de las piscinas, comparar su área y establecer cuál de las figuras tenía mayor superficie.

Tarea 7

La hija de don Pedro le ha propuesto las figuras 3 y 4 para que construya los pisos de las piscinas.

Figura 12

Tarea 7(<https://www.geogebra.org/m/rkpqxtyp#material/nk9kyfpi>)



1. Don Pedro quiere saber, ¿Cuáles piezas del Tangram se usaron para construir el piso de la figura 3? Justifica tu respuesta.

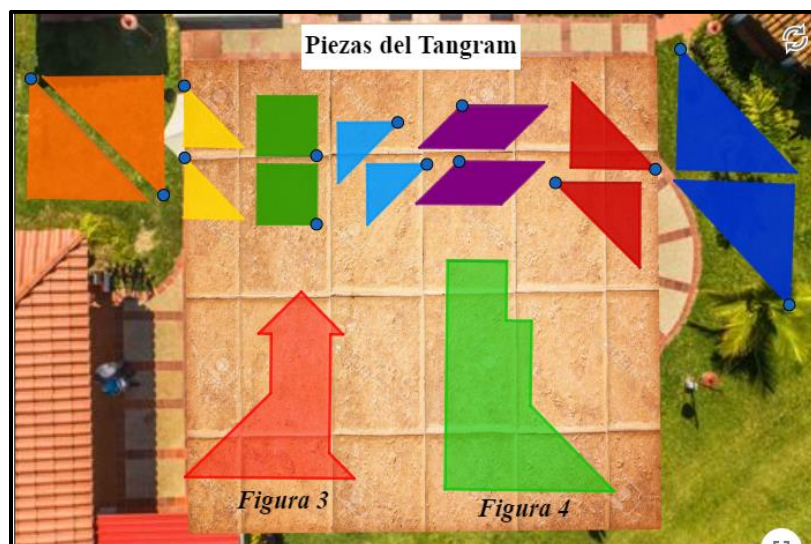
Indicación: Las piezas del tangram se pueden movilizar a través de la pantalla, y rotar mediante el punto azul.

La figura 4 representa otro diseño, para hacer el piso de la piscina.

Figura 13*Continuación de la Tarea 7*

2. Don pedro quiere saber ¿Con cuáles piezas del tangram, su hija formo el plano de la figura 4? Justifica tu respuesta.

Indicación: Las piezas del tangram se pueden movilizar a través de la pantalla, y rotar mediante el punto azul.

Figura 14*Finalización de la Tarea 7*

Don Pedro y su hija necesitan saber:

3. ¿Cuál de los dos planos ocupa mayor superficie? Justifica tu respuesta.

Las tareas presentadas anteriormente fueron el resultado del proceso de validación por parte de los profesores y la implementación piloto con el estudiante de grado 6°.

Fase 2. Experimento

La fase 2 consistió inicialmente en una implementación piloto con estudiante de grado sexto, de esta intervención, surgieron cambios respecto al discurso empleado en las tareas. Del mismo modo, las tareas fueron revisadas y validadas por dos profesores expertos. De estos procedimientos fue necesario realizar modificaciones a las tareas con el fin de atender algunas observaciones.

Posteriormente se realizó la intervención de las tareas, con estudiantes de sexto grado de una Institución Oficial de Cali. Durante su desarrollo se realizaron: videograbaciones, fotografías, notas de audios, hojas de trabajo *online* de las respuestas que los estudiantes iban registrando a cada tarea propuesta y una entrevista semiestructura.

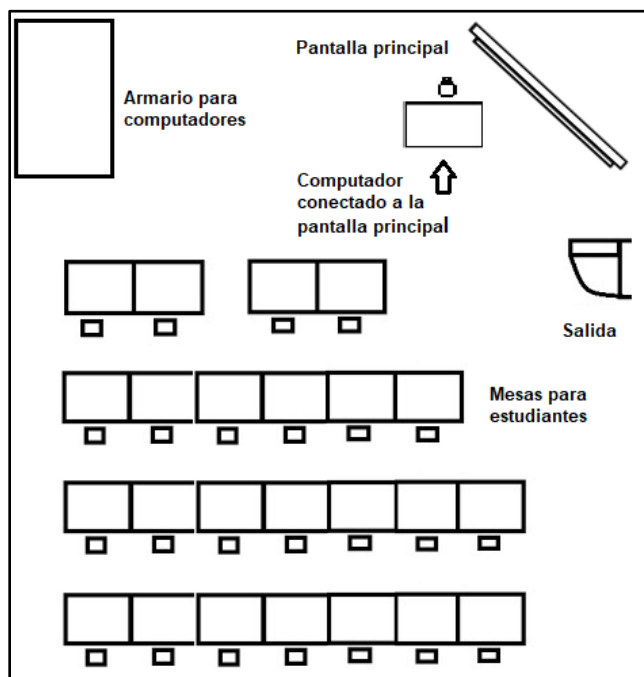
El estudio se llevó a cabo en una Institución Educativa Oficial, ubicada en la comuna 3 de la ciudad de Cali, Valle del Cauca. Su modalidad es formar maestros para nivel preescolar y básica primaria. Los participantes con los cuales se realizó el estudio, fueron 14 estudiantes de sexto grado con edad promedio de 12 años, que pertenecen a los estratos 1, 2 y 3.

En cuanto a la descripción física del entorno donde se hizo la implementación. Se habilitó una sala de sistemas, donde los estudiantes tenían acceso a tabletas y estaban dispuestos en filas. Además, se contó con un equipo de proyección para que los estudiantes pudieran seguir las

indicaciones. En la Figura 15 se puede observar la distribución de los recursos físicos en el salón de clases.

Figura 15

Disposición de los Recursos Físicos en la Sala de Sistemas



Fuente: Elaboración Propia

La sesión tuvo una duración de 2 horas. Posteriormente se realizó una entrevista semiestructurada con tres estudiantes del grupo, la cual tuvo una duración de 1 hora.

Para este trabajo se utilizaron principalmente cuatro fuentes de datos: hojas de trabajo de los estudiantes, notas de audio, videograbación de la sesión de clase y una entrevista semiestructurada.

Se utilizaron hojas de trabajo *online* como instrumento de recolección, se diseñaron con el objetivo de caracterizar el aprendizaje de los estudiantes cuando resuelven problemas. Las

hojas de trabajo se obtuvieron de la lección que fue elaborada en *GeoGebra Classroom*, la cual estaba formada por siete tareas con sus respectivas preguntas. Las preguntas fueron construidas o adaptadas teniendo en cuenta el trabajo de García (2013), este estudio está relacionado con la construcción del concepto de área mediante la resolución de problemas. Cada pregunta de las tareas tenía un espacio, para que los estudiantes registraran sus respuestas, las cuales se iban guardando automáticamente, ver (Figura 16).

Figura 16

Entrada donde el Estudiante Registró sus Respuestas

Tarea 2

1. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizarías diferente cantidad de pintura para cada una de ellas? ¿Porque?

Aa
 π
no utilizaria diferente cantidad porque tienen las mismas figuras solo que estan en diferente orden

Tarea 3

2. La figura **A** y la figura **B** tienen la misma superficie. ¿Cómo lo comprobarías?

Nota: Las piezas de la figura **B** se pueden desplazar a través de la pantalla.

Aa
 π
porque las formas son as mismas de mismo tamaño solo que estan en diferente posicion

La videograbación tuvo una duración aproximada de 60 minutos y se hizo con el fin de complementar la información que los estudiantes registraron en las hojas de trabajo y capturar momentos del proceso que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven problemas.

Las notas de audio fueron intervenciones por parte de los estudiantes a algunas inquietudes que surgieron, durante el desarrollo de las tareas.

La entrevista semiestructurada tuvo una duración de 60 minutos, se diseñó con el fin de obtener más información de las respuestas que los estudiantes registraron en las hojas de trabajo.

La entrevista fue diseñada teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes en cada una de las tareas.

Fase 3. Análisis retrospectivo

El análisis de los datos se desarrolló en tres etapas. En la primera etapa, se realizó la transcripción en un documento de Excel de las respuestas de los estudiantes, escritas en las hojas de trabajo, la videograbación y notas de audios. Estas respuestas se segmentaron y se codificaron en diferentes hojas de Excel con su respectiva tarea. Posteriormente, se transcribió la entrevista semiestructurada en una hoja de Excel y se codificaron las respuestas de los estudiantes. En una segunda etapa, se realizó un proceso de categorización y construcción de categorías. Finalmente, en la tercera etapa se utilizaron las dimensiones de la resolución de problemas propuesta por Schoenfeld, para analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes teniendo en cuenta las categorías que emergieron de la segunda etapa. A continuación, se describe cada una de estas etapas.

Etapas 1: Transcripción Hojas de Trabajo, Videograbación y Notas de Audio.

Inicialmente se transcribieron las hojas de trabajo *online*, videograbación de la sesión y notas de audio. De las hojas de trabajo *online* surgieron las respuestas de los estudiantes a cada tarea, estas fueron colocadas en hojas de Excel (cada grupo de respuestas con su respectiva tarea) donde se hizo una tabla que contenía; las preguntas formuladas a los estudiantes, numero de estudiante y las respuestas que ellos registraron en cada una de las tareas. A cada hoja se le asigno el nombre de tarea 1, tarea 2, tarea 3, etc.

De la videograbación y notas de audio se obtuvieron intervenciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, estas fueron colocadas en una columna de las hojas de Excel

teniendo en cuenta que correspondiera con el estudiante. Para lo cual se asignaron las etiquetas E (E1, E2, E3, etc.) para referirse al estudiante y “P” para referirse a la profesora en formación.

Posteriormente se realizó una lectura de las transcripciones de los datos (hojas de trabajo, videograbación y audios), lo que permitió tener una idea global de los datos obtenidos y el reconocimiento de particularidades, acerca de las respuestas e intervenciones de los estudiantes.

Luego se llevó acabo la codificación abierta del cuerpo de datos, donde se tuvo en cuenta las afirmaciones y acciones de los estudiantes al desarrollar cada una de las tareas. De este proceso surgieron 123 códigos alusivos a las afirmaciones del estudiante. La descripción de cada afirmación de los estudiantes se realizó dando respuesta a tres cuestionamientos: ¿Qué hizo el estudiante?, ¿cómo lo hizo? y ¿Para qué lo hizo? A cada afirmación o acción se le asigno un código que representaba la afirmación de los estudiantes respecto a tema que se estaba trabajando. En la Tabla 1 se presenta un ejemplo de la forma cómo se codificaron las afirmaciones del estudiante.

Tabla 1

Ejemplo de la Codificación de algunas Afirmaciones de los Estudiantes Registradas en las Hojas de Trabajo

N° Tarea	Pregunta	Afirmación del estudiante	Código
Tarea 2	La figura A y la figura B tienen la misma superficie. ¿Cómo lo comprobarías?	E3: “ <i>Porque se puede mover la de la figura b y la pongo igual que la a</i> ”	Afirma que, al descomponer las figuras, se puede comprobar que tienen la misma superficie
Tarea 3	¿Describe como calculaste la cantidad de baldosas que necesitaba don Pedro para cubrir su piscina?	E7: “ <i>abajo hay 7 y arriba 4, los multiplique</i> ”	Determinó que se necesitaban 28 baldosas para cubrir completamente multiplicando la primera fila por la primera columna.

Tarea 4	¿Cómo don Pedro obtiene el diseño de la piscina B, a partir del diseño de la piscina A?	E10: <i>“Solo tiene que quitar una esquina de la piscina y ponerla abajo”</i>	Afirma que, al recortar una parte de la figura A y moverla, se puede formar la figura B
---------	---	---	---

Fuente: Elaboración propia

Una vez codificadas las hojas de trabajo, videograbación y notas de audio fue necesario realizar una entrevista semiestructurada con el fin de obtener más información acerca de las respuestas dadas por los estudiantes. Para la entrevista se seleccionaron tres estudiantes teniendo en cuenta que fueron los que avanzaron en las tareas. La entrevista semiestructurada fue grabada en notas de audio y transcrita. Luego de la transcripción, se codificaron las afirmaciones de los estudiantes ver Tabla 2.

Tabla 2

Ejemplo de la codificación de las Afirmaciones de E3 Tomando un Segmento de la Entrevista Semiestructurada

Nº Tarea	Segmento de Entrevista Semiestructurada	Códigos
Tarea 5	P: ¿La cinco es esta, la recuerdas? E3: <i>“ Si, si ya me acuerdo, esa me parece que eran los tamaños, cuál era la más chiquita me parece ”</i> P: Si, entonces la pregunta es: ¿Cómo hiciste para determinar que el plano D ocupaba menor superficie? E3: <i>“Porque saque las fichitas que estaban ahí y las trate de acomodar en las demás y no daba porque quedaba mucho espacio, y entonces, es decir que era la más chiquita.”</i> P: ¿Qué procedimiento empleaste para decir que el plano A ocupa mayor superficie? E3: <i>“Igual, el mismo proceso y quedaba restando, ósea quedaba figuras por fuera y así.”</i>	• Compara los modelos de piscinas, mediante la sobreposición de figuras. • Establece cual de las superficies es la más pequeña y cuál es la más grande. • Observa que, si al sobreponer una figura y le sobra espacio, la otra tiene mayor superficie.

Fuente: Elaboración propia

Etapas 2: Construcción de Categorías. A partir de los códigos que emergieron de la Etapa 1, se realizó el proceso de construcción de categorías. Los códigos se clasificaron y marcaron con colores con el fin de construir categorías que expresaran los elementos comunes entre ellos. Asimismo, se definían las categorías, se comparaban entre sí para refinarlas y hacerlas más fiables. De este proceso surgieron 10 categorías que enmarcaban las acciones y afirmaciones de los estudiantes. En la Tabla 3 se presentan las categorías que emergieron teniendo en cuenta el interés de esta investigación y su definición.

Tabla 3

Principales Categorías Emergentes de las Afirmaciones de los Estudiantes

Categoría	Definición de la Categoría
1	<i>Afirmaciones sobre la congruencia de figuras en relación con la descomposición:</i> En esta categoría se agruparon las afirmaciones de los estudiantes, donde daban cuenta de la congruencia de figuras bidimensionales. Por ejemplo, los estudiantes determinaban que la descomposición, al mover o arrastrar las figuras, les permitía comprobar que las figuras eran iguales.
2	<i>Afirmaciones sobre la congruencia en relación a la posición de las figuras:</i> en esta categoría se agruparon las afirmaciones donde los estudiantes expresaban que la posición de las figuras no afectaba su forma o tamaño. Por ejemplo, los estudiantes determinaban que dos figuras colocadas en diferente posición pueden ser iguales.
3	<i>Afirmaciones sobre la forma y tamaño de las figuras:</i> En esta categoría se agruparon las afirmaciones de los estudiantes, donde daban cuenta que la forma y tamaño de las figuras les permitía establecer la congruencia de las figuras, además de la identificación de las figuras geométricas triángulo o cuadrado.
	<i>Reconocimiento de la composición de figuras:</i> En esta categoría se agruparon las afirmaciones de los estudiantes, donde daban cuenta del reconocimiento de la composición de figuras

4 bidimensionales. Por ejemplo, los estudiantes tomaban dos triángulos congruentes y los unían para formar superficies cuadradas o rectangulares.

5 *Afirmaciones sobre el recubrimiento de una superficie:* En esta categoría se agruparon las afirmaciones en las cuales los estudiantes, daban cuenta del recubrimiento de una figura mediante baldosas que se tomaron como unidades de medida.

6 *Reconocimiento de la descomposición de figuras:* En esta categoría se agruparon las afirmaciones de los estudiantes sobre la descomposición de figuras. Por ejemplo, los estudiantes identificaban que al recortar una parte de una figura y ubicarla en otro lado, se formaba la figura deseada.

7 *Afirmaciones sobre el área de una figura empleando la descomposición y superposición:* En esta categoría se agruparon las afirmaciones de los estudiantes en relación con la superposición y descomposición de figuras para comparar las superficies y determinar si tenían mayor o menor área. Por ejemplo, los estudiantes sobreponían las figuras y observaban que, si sobraba superficie, la otra figura tenía menor área.

8 *Afirmaciones sobre las propiedades del rectángulo:* En esta categoría se agruparon las afirmaciones en las cuales los estudiantes daban cuenta de las propiedades (lados y ángulos) del rectángulo y cuadrado. Por ejemplo, los estudiantes afirmaban que una de las propiedades del cuadrado es que todos sus lados son iguales. También identificaban que el rectángulo tiene dos de sus lados más largos.

9 *Afirmaciones sobre la medida del área:* En esta categoría se agruparon las afirmaciones de los estudiantes sobre los métodos que emplearon para medir la cantidad de superficie en una figura. Por ejemplo, algunos emplearon técnicas de conteo como, la multiplicación y adición para determinar el número de baldosas que se necesitan para cubrir una superficie completamente.

10 *Percepción en la comparación de áreas:* En esta categoría se agruparon las afirmaciones donde los estudiantes comparaban e identificaban las figuras a través de la percepción visual, para determinar si una figura tenía menor o mayor área.

Fuente: Elaboración propia

Etapas 3: Relación de las Categorías con el Marco Teórico. Durante esta etapa, se operativizaron las dimensiones propuestas por Schoenfeld (1985 ver Marco Teórico) para

interpretar el proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes. En seguida, se presentan las dimensiones definidas.

Estrategias Cognitivas. Se entienden las estrategias cognitivas como métodos heurísticos que resultan de utilidad para resolver problemas, las heurísticas son acciones, estrategias o técnicas que ayudan en el proceso de solución. A partir de esta definición, se estableció que las categorías 1, 4, 5, 6, 7, 9 y 10 están relacionadas con la dimensión Cognitiva.

Dominio de un conocimiento. Se entiende el dominio de un conocimiento como las definiciones, hechos y procedimientos usados en un dominio matemático, a partir de esta definición se estableció que las categorías 3, 8, 9, 10 se relacionan con esta dimensión.

Estrategias metacognitivas. Se relacionan con el monitoreo empleado al resolver el problema, por ejemplo; el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso. Cabe señalar que esta estrategia no se relacionó con ninguna de las categorías.

Sistema de creencias. Ideas que los estudiantes tiene acerca de la matemática y como resuelven problemas. A partir de esta definición, se estableció que la categoría *Afirmaciones sobre la congruencia en relación a la posición de las figuras* se relacionó con esta dimensión porque algunos estudiantes consideran que dos figuras colocadas en diferente posición siguen siendo las mismas. Por ejemplo, en la Tarea 2 se le preguntó al estudiante: La figura A y la figura B tienen la misma superficie. ¿Cómo lo comprobarías? La estudiante E11 respondió: E11: “*las figuras son iguales y del mismo tamaño solo que en diferente lugar*” Asimismo en la entrevista semiestructurada la profesora preguntó: “*¿Por qué utilizarías la misma cantidad de pintura, para pintar las figuras A y B?*” el estudiante E3 respondió: “*Porque, es exactamente la*

misma figura, simplemente en distinto ángulo.” Luego el profesor continuó preguntando “¿Qué quieres decir, cuando dices que una figura está en distinta posición?” a lo que el estudiante E3 respondió: “Ángulo, por ejemplo, esto, *¿digamos que esto está así cierto? y si lo voltean así, es lo mismo exactamente, simplemente que está en distinto ángulo, en distinta posición.*” Los estudiantes consideraban que al descomponer parte de una figura y reubicarla, su nueva posición no afectaba su congruencia. Estas son creencias de los estudiantes que determinan como ellos dan solución a un problema.

Posteriormente se elaboró una rejilla de análisis (Tabla 4) que permitió relacionar las categorías emergentes que se definieron en la Etapa 2 con las dimensiones de la resolución de problemas.

Tabla 4

Rejilla de Análisis Relación entre las Categorías de la Etapa 2 con las Dimensiones de la RP

Categorías	Estrategias cognitivas/ Heurísticas	Dominio de un Conocimiento	Estrategias Metacognitivas	Sistema de Creencias
1	Los estudiantes empleaban como estrategia la descomposición y como acción el arrastre de figuras para determinar la congruencia de dos figuras.			
2				Los estudiantes determinaban que dos figuras colocadas en diferente posición seguían siendo las mismas.
3		Los estudiantes consideraban la forma y tamaño de las figuras, para establecer su congruencia y semejanza.		
4	Los estudiantes empleaban como estrategia la composición de figuras para determinar el área de una superficie, además para formar cuadrados y rectángulos.			
5	Los estudiantes emplearon como procedimiento el recubrimiento, mediante unidades de medida (baldosas) para medir una superficie.			
6	Los estudiantes consideraban que, al mover, recortar, rotar una parte de la figura y reubicarla se podía obtener la figura que había sufrido transformaciones y su magnitud área se conservaba en ambas superficies			
7	Los estudiantes emplearon como estrategias la descomposición y superposición para comparar y establecer el área de una superficie			
8		Los estudiantes consideraban propiedades de las figuras geométricas tales como: los ángulos, medida de sus lados y número de lados.		
9	Los estudiantes empleaban técnicas de conteo como la adición y multiplicación para resolver el problema de recubrimiento.	Los estudiantes, consideraban conceptos matemáticos como la suma y multiplicación para resolver problemas.		
10	Los estudiantes usaron la percepción visual para establecer inferencias sobre las superficies	Los estudiantes usaban la comparación para determinar si las superficies tenían mayor o menor área, además para establecer si el área de las superficies se conserva.		

Las categorías que emergieron de las afirmaciones y acciones por parte de los estudiantes al resolver las tareas, se relacionaron teniendo en cuenta las definiciones de las dimensiones. Es importante mencionar que las casillas en blanco indican que no hubo relación alguna entre las categorías y las dimensiones propuestas por Schoenfeld.

Capítulo IV: Resultados de Investigación

Los resultados de este estudio fueron principalmente tres. En el primer resultado, se adaptaron tareas de aprendizaje en un ambiente digital fundamentadas en la resolución de problemas para que los estudiantes de grado 6° se aproximaran a la noción de área. El segundo resultado mostró las estrategias heurísticas que empleaban los estudiantes de grado 6° en la resolución de problemas de conservación del área. Finalmente, el tercer resultado estableció el dominio de conocimiento de los estudiantes de grado 6° cuando resolvieron las tareas. A continuación, se amplía cada uno de los resultados.

Adaptación de las Tareas a un Ambiente que Integra Tecnologías Digitales

En relación con el primer objetivo específico de este estudio, se adaptaron una secuencia de tareas para que los estudiantes tuvieran una aproximación a la noción de área como magnitud. En la elaboración de estas tareas, se tuvo en cuenta algunos procedimientos para hallar el área. En este sentido, se propusieron tareas de área como cantidad de plano ocupado por una superficie y como número de unidades que recubren una superficie.

Respecto a la Tarea 1, se construyeron las figuras (triángulos) de tal manera que se pudieran mover, rotar y trasladar. Estas configuraciones que se hicieron a las figuras, permitieron que los estudiantes emplearan la composición para formar los triángulos y rectángulos que se pedían en la Tarea 1.

En la Tarea 2 se construyeron las Figuras A y B, estas figuras se formaron con figuras geométricas, un rectángulo y dos cuadrados respectivamente. Las figuras que integraban la Figura B se diseñaron de tal forma que el estudiante pudiera moverlas y trasladarlas. Fue así como el diseño de las figuras, les permitió a los estudiantes emplear la descomposición para comprobar que el área de las Figuras A y B se conservaba.

Respecto a la Tarea 3, se diseñó un rectángulo que representaba una piscina y cuadrados que representaban baldosas. Los cuadrados se elaboraron de modo que, el estudiante los pudiera arrastrar y reubicar en el rectángulo. Esto permitió que los estudiantes recubrieran el rectángulo empleando las baldosas cuadradas y determinaran el área de la piscina rectangular.

En relación con la Tarea 4 se construyeron la Figura A y B, en la Figura A se dibujó una línea punteada en una esquina para dar a entender al estudiante que debía recortar esa parte de la figura y acomodarla como en la Figura B, la parte que se recortaba correspondía a un triángulo. En la Figura B se presentaba el triángulo que se había recortado de la Figura A en la parte inferior formando un trapecio recto, el triángulo que hacía parte de la Figura B se construyó permitiendo el arrastre, rotación y traslación. Estas acciones puestas al triángulo, permitieron que el estudiante comprobara que era el mismo que se formaba al recortar la línea punteada de la Figura A. En esta tarea fueron pocos los estudiantes que hicieron uso del arrastre para resolver las preguntas.

En la Tarea 5 se construyeron cuatro figuras: Figura A, Figura B, Figura C y Figura D, las cuales estaban formadas por otras figuras geométricas en su interior. En la Figura A se construyeron tres triángulos y un rectángulo que se podían mover, rotar y trasladar; en las Figuras B y C se elaboraron rectángulos que se podían arrastrar, rotar y trasladar; finalmente en la Figura D se construyeron un trapecio y un triángulo que permitían el arrastre, rotación y traslación. La configuración de estas acciones en las figuras permitió que los estudiantes emplearan la descomposición, superposición y comparación de las figuras para hacer afirmaciones acerca del área de cada figura.

En las Tareas 6 y 7 se construyeron las piezas del *tangram* y varias figuras irregulares (Figura 1, Figura 2, Figura 3 y Figura 4). Las piezas del *tangram* fueron diseñadas para que el

estudiante las pudiera arrastrar, rotar y trasladar. Estas configuraciones en las figuras permitieron que los estudiantes emplearan la superposición para comparar y determinar el área de las figuras irregulares. Cabe resaltar que las Tareas 6 y 7 fueron desarrolladas por muy pocos estudiantes.

En todas las tareas se movilizó el arrastre como componente didáctico fundamental, ya que los estudiantes hicieron uso de este, para avanzar en solución de los problemas. Las tareas destacaron ser útiles para el aprendizaje del área, dado que al ser adaptadas a un AGD promovieron en los estudiantes la exploración y explotación en su desarrollo.

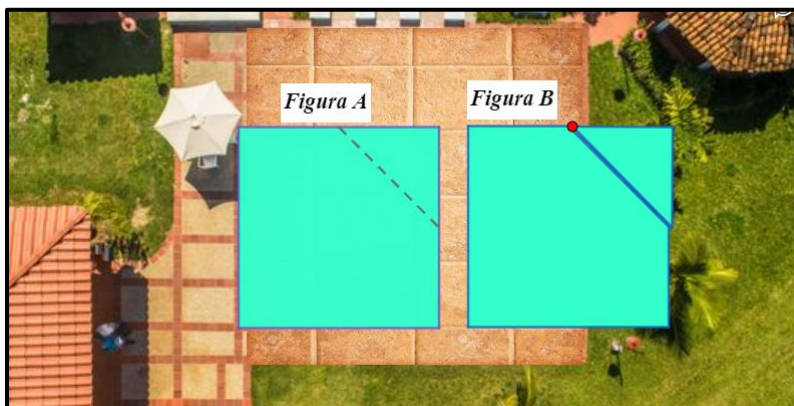
Estrategias Heurísticas Empleadas por los Estudiantes

En coherencia con el segundo objetivo específico de este estudio, se puede afirmar que las estrategias heurísticas que emplearon los estudiantes de grado 6° al resolver las tareas de área fueron las siguientes:

Los estudiantes resolvieron las tareas descomponiendo las figuras para poder determinar si las áreas eran iguales. En este sentido, los estudiantes afirmaron que dos figuras tenían la misma área si al descomponer una figura, podían componer la otra, además, para esto los estudiantes arrastraban y comprobaban la congruencia de las figuras. Por ejemplo, en la Tarea 4 el profesor le preguntó al estudiante en la hoja de trabajo *“Don Pedro afirma que el área de la figura A es igual al área de la figura B. ¿Cómo lo comprobarías?”* El estudiante E12 respondió *“porque son el mismo diseño, solo es que teníamos que mover la figura de la b para que quedara como la de la a”* (Figura 17). Cuando el estudiante se refería a que se debía “mover la figura” hizo uso del arrastre para configurar de nuevo la figura y determinar que las dos figuras son congruentes. También, los estudiantes emplearon el arrastre para descomponer las figuras y reacomodarlas, y establecer que su área se conservaba.

Figura 17

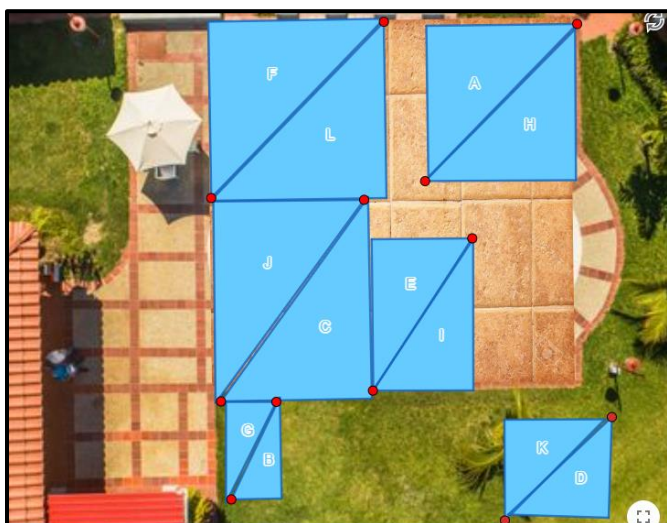
Ejemplo del Empleo del Arrastre por parte del Estudiante para descomponer y Reacomodar la Figura B



Además, los estudiantes utilizaban la composición de las figuras para formar cuadrados y rectángulos tomando como figuras base triángulos rectángulos, también para determinar el área de una superficie. Por ejemplo, en la entrevista semiestructurada el profesor preguntó: *¿Cómo hiciste para establecer que los triángulos L- F, D- K y A-H te permiten formar planos de piscinas cuadradas?* Luego el profesor continuó preguntando *“Ósea, ¿qué proceso hiciste para formarlos? Y el estudiante E7 respondió “Coger los triángulos que eran iguales y formarlos, y si me daba un lugar así (señala un cuadrado que estaba formado en la Tarea 1) que me quedara bien formadito, quería decir que esos eran cada uno su pareja. Entonces así formaba un cuadrado o un rectángulo”* (Figura 18). Cuando los estudiantes se referían a que se debían unir los triángulos estaban haciendo uso de la composición de figuras para formar cuadrados y rectángulos, y además describir las propiedades de estas figuras geométricas. En este sentido la composición de figuras permitió que los estudiantes relacionaran los cuadrados y rectángulos con sus propiedades.

Figura 18

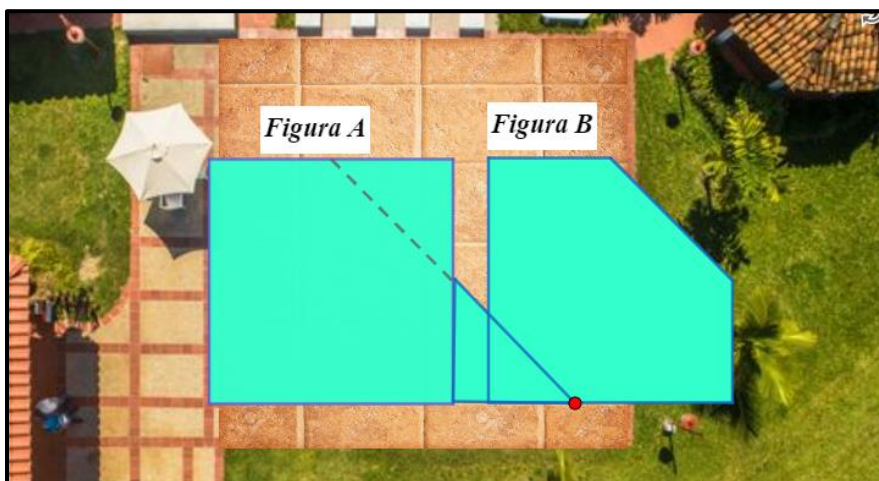
Ejemplo del Uso del Arrastre por parte del Estudiante para Componer Figuras Geométricas



Por otro lado, los estudiantes empleaban el arrastre, recorte, rotación y reacomodación de una figura para reconocer que dos figuras tenían diferente forma, pero igual superficie. Por ejemplo, cuando se le preguntó al estudiante en la hoja de trabajo: “¿Cómo don Pedro obtiene el diseño de la piscina B, a partir del diseño de la piscina A?” El estudiante E10 respondió: “solo tiene que quitar una esquina de la piscina y ponerla abajo” asimismo el estudiante E7 escribió que: “Que este pedacito que estuviera recortado estuviera también acá (señala las figuras de la Tarea 4)” (Figura 19). Cuando los estudiantes mencionaron que se debía quitar una esquina y reubicarla, hicieron uso del arrastre, descomposición y reacomodación como estrategias para dar solución a la Tarea 4. Además, los estudiantes reconocieron la propiedad de disección (ver marco teórico), referente a la conservación del área de una superficie cuando sufre transformaciones.

Figura 19

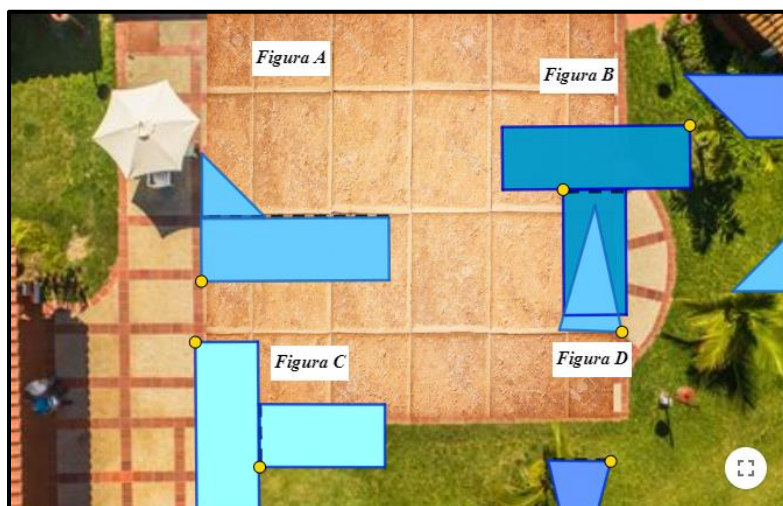
Ejemplo del Reconocimiento de la Propiedad de Disección por parte del Estudiante



También los estudiantes emplearon como estrategia la descomposición y superposición, para comparar y establecer cuál de las figuras ocupaba mayor o menor superficie respecto a la Tarea 5. Por ejemplo, en la entrevista semiestructurada el profesor preguntó: “¿Cómo hiciste para determinar que el plano D ocupaba menor superficie?” El estudiante E3 respondió: “Porque saque las fichitas que estaban ahí y las trate de acomodar en las demás y no daba porque quedaba mucho espacio, y entonces, es decir que era la más chiquita.” (Figura 20).

Figura 20

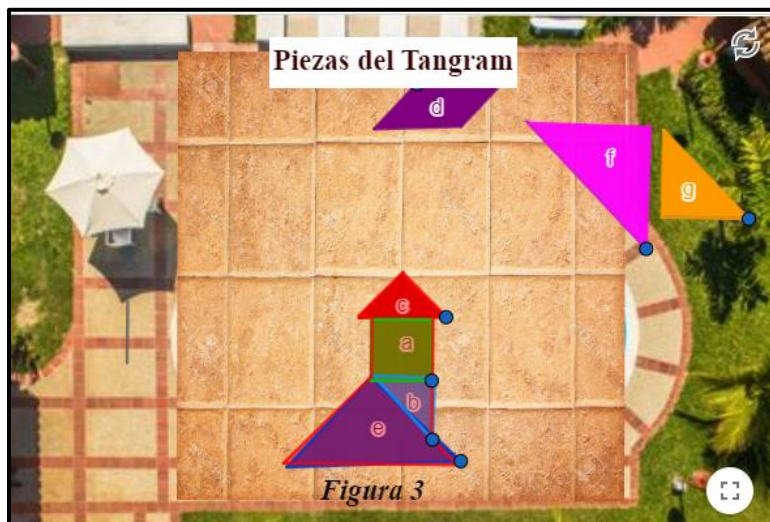
Ejemplo del Uso del Arrastre para Descomponer y Superponer Figuras para Comparar Superficies



Además, hicieron uso de la superposición de figuras del *tangram* para resolver las Tareas 6 y 7. Por ejemplo, cuando se le preguntó al estudiante en la hoja de trabajo: “Don pedro quiere saber, ¿Cuáles piezas del Tangram se usaron para construir el piso de la figura 3?” el estudiante E10 respondió: “UTILIZE LAS FIGURAS E A B C” (Figura 21).

Figura 21

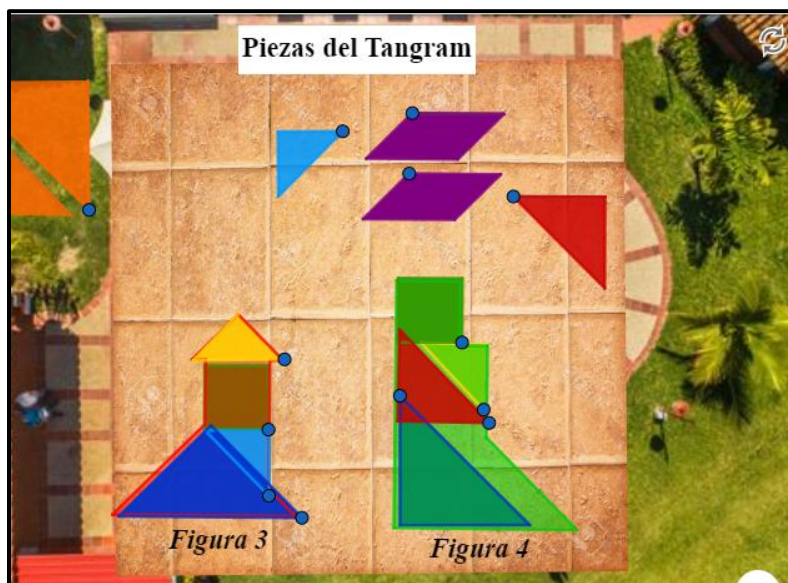
Ejemplo del Empleo del Arrastre por parte del Estudiante para Superponer Figuras y Formar Superficies



De la misma forma en la revisión del desarrollo de las tareas, se evidencia que los estudiantes hicieron uso del arrastre para emplear como estrategia la superposición y descomposición de superficies para comparar y determinar el área de las figuras. Por ejemplo, cuando se le preguntó al estudiante en la hoja de trabajo: “¿Cuál de los dos planos ocupa mayor superficie?” el estudiante E10 respondió: “LA FIGURA 4” (Figura 22).

Figura 22

Ejemplo del Empleo del Arrastre para Superponer Figuras y Comparar Superficies



Por otra parte, los estudiantes emplearon el arrastre y superposición para recubrir completamente una superficie, a través de unidades de medida (baldosas). Por ejemplo, en la entrevista semiestructurada el profesor le preguntó sobre la Tarea 3 al estudiante E3: “¿Qué procedimiento empleaste para establecer que se necesitaban 28 baldosas para cubrir completamente la piscina?” El estudiante E3 respondió: “Pues, empezando a llenar las baldosas y colocarlas y ahí se. Porque acá decía, porque acá empiezas a contar y ya (señala las baldosas que se encuentran ubicadas dentro de la piscina)” (Figura 23). Cuando el estudiante se refirió que empezó a “llenar las baldosas y colocarlas ahí” estaba empleando el arrastre y superposición para determinar en número de unidades que recubren completamente una superficie.

Figura 23

Ejemplo del Empleo del Arrastre para Recubrir Completamente una Superficie



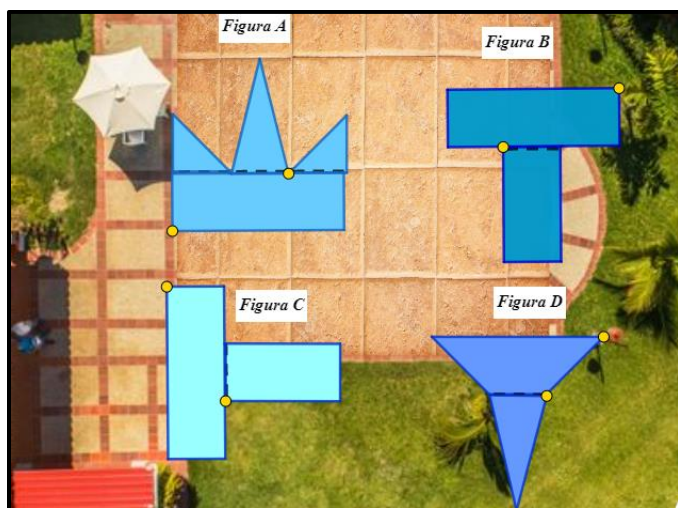
Asimismo, los estudiantes emplearon técnicas de conteo como la adición y multiplicación para avanzar en proceso de solución de la Tarea 3. Por ejemplo, en la entrevista semiestructurada el profesor preguntó: “¿*Qué procedimiento empleaste para establecer que se necesitaban 28 baldosas para cubrir completamente la piscina?*” El estudiante E7 respondió: “*Tenía cuatro así de lado (señala las baldosas que se encontraban dentro de la piscina) y siete más hacia abajo. Entonces simplemente dije; cuatro por siete pues me da veintiocho. Entonces veintiocho es el total de las que tienen que haber.*” En un primer momento los estudiantes usaron el arrastre para recubrir la superficie, luego hicieron uso de la multiplicación y adición para medir la superficie.

Otra de las estrategias que emplearon los estudiantes fue la percepción visual para emitir juicios en tareas de comparación de áreas, especialmente de en las Tareas 1 y 5. Por ejemplo en la entrevista semiestructurada el profesor preguntó: “¿*Cómo hiciste para determinar que el plano D ocupaba menor superficie?*” El estudiante E7 respondió: “*Porque se veía que era más chiquito que los demás, ya que tenía un solo triángulo y más era largo, pero no tenía tanto grosor, para*

ocupar más que estas dos y esta (compara las figuras de la situación 5) está, por lo menos la B y la C tiene igual superficie” (Figura 24). Los estudiantes emplearon la percepción visual para comparar y determinar si dos superficies eran congruentes, también para establecer cuál de los planos de la Tarea 5 ocupaba mayor o menor superficie.

Figura 24

Ejemplo del Reconocimiento de Superficies Congruentes por parte del Estudiante



Teniendo en cuenta lo anterior, las estrategias heurísticas que emplearon los estudiantes en el desarrollo de las tareas fueron: *la comparación directa (superposición) e indirecta (descomposición), composición y recubrimiento de superficies.*

Dominio del Conocimiento en la Resolución de Tareas

En coherencia con el tercer objetivo específico de investigación, se reconoce que los conocimientos previos (conceptos, algoritmos y fórmulas) que tuvieron en cuenta los estudiantes para resolver las tareas fueron los siguientes:

Los estudiantes tuvieron en cuenta algunas de las propiedades de las figuras geométricas tales como: los ángulos, la medida y número de lados de los cuadrados y rectángulos para hacer

afirmaciones de las tareas. Por ejemplo, en la entrevista semiestructura el profesor preguntó: “¿Que otra propiedad, nos permitirá ver qué se trata de un rectángulo, y no de un cuadrado y no de otra figura?” El estudiante E7 respondió: “Un cuadrado tiene que tener todos los lados iguales, un rectángulo tiene que tener dos iguales; dos más largos y dos más pequeños.” Cuando el estudiante se refirió que “un cuadrado tiene que tener todos los lados iguales” tuvo en cuenta una de las propiedades del cuadrado. Asimismo, los estudiantes consideraron que un cuadrado tenía sus cuatros lados iguales, la longitud de sus lados era la misma y sus ángulos internos eran iguales. Para el caso del rectángulo identificaban que sus lados opuestos tienen la misma longitud. A partir de estos conceptos de las figuras geométricas resolvieron la Tarea 1.

Por otro lado, los estudiantes emplearon conceptos matemáticos como la suma y multiplicación para avanzar en el proceso de solución de la Tarea 3. Por ejemplo, cuando se le pregunta al estudiante en la hoja de trabajo: “¿Describe como calculaste la cantidad de baldosas que necesitaba Pedro para cubrir su piscina?” El estudiante E4 respondió: “Primero conté cuantas baldosas necesito la primera fila y como todas necesitan lo mismo ósea 4 las multiplique”. Cuando los estudiantes se referían que habían “contado y multiplicado” estaban empleando procedimientos cuantitativos para determinar el área de una superficie, además, implícitamente se deduce que usaron la fórmula $b \times h$ para calcular el área del rectángulo.

Además, los estudiantes consideraron la forma, tamaño y semejanza de las figuras para establecer su congruencia y además diferenciar las figuras geométricas cuadrado y rectángulo. Por ejemplo, en la entrevista semiestructurada el profesor preguntó: “¿A qué te refieres cuando dices acomodándolo a su semejanza?” El estudiante E4 respondió: “Pues la semejanza es de igual forma, ósea si yo lo tengo está así y me está diciendo acomodarlo de forma que quede igual. Entonces pues lo acomodo viéndolo a la semejanza del que ya está hecho.” Otro ejemplo

se dio cuando el profesor pregunto: “¿*Cuándo dos figuras crees que son las mismas?*” y el estudiante E3 respondió: “*Que sean del mismo tamaño, que sean iguales, y si no estoy muy segura que traten de ser de la misma forma y ya.*” En las respuestas de los estudiantes se evidencia que consideraron conceptos como la congruencia y semejanza. A partir de estas concepciones los estudiantes resolvieron algunas de las tareas.

Conclusiones

En este estudio se planteó como objetivo general caracterizar el aprendizaje de la noción de área de los estudiantes de 6° cuando resuelven problemas en un ambiente que integra tecnologías digitales, lo cual se logró mediante la adaptación de las tareas a un ambiente digital, las categorías que emergieron del desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes y las dimensiones propuestas por Schoenfeld (1985) para analizar el proceso de resolución de problemas en los estudiantes.

Asimismo, lo anterior fue posible gracias al diseño metodológico empleado para desarrollar este estudio, dado que un experimento de enseñanza, además de ser un diseño metodológico ampliamente usado para estudiar la enseñanza, también se puede emplear para estudiar el aprendizaje.

En primer lugar, para la adaptación de las tareas de aprendizaje a un ambiente que integra tecnologías digitales, se consideró que las tareas propuestas por García (2013) pudieran ser diseñadas y explotadas en el *software* GeoGebra, permitiendo emplear aspectos didácticos como el arrastre, para que los estudiantes resolvieran los problemas de área.

En segundo lugar, a partir de la implementación piloto y la intervención con los estudiantes, se obtuvieron resultados que dan cuenta de las estrategias heurísticas que emplean los estudiantes 6° para resolver las tareas propuestas, los principales procedimientos que los estudiantes emplearon fueron: la comparación directa (superposición) e indirecta (descomposición), composición, percepción visual y medida de superficies por medio del recubrimiento.

De igual manera los resultados de la intervención, permitieron describir el dominio de conocimiento que los estudiantes de 6° consideraron para el desarrollo de las tareas, estos fueron: propiedades de las figuras geométricas sobre la forma y tamaño; uso intuitivo del arrastre de las figuras; empleo de la suma y multiplicación para medir superficies.

Limitaciones y Recomendaciones

Como en la mayoría de los procesos, se encontraron limitaciones en el desarrollo de la investigación, algunas sujetas al trabajo propio en el salón de clases y otras externas pero que tenían incidencia en el alcance de los propósitos. Una de las limitaciones de este estudio se evidencio en el diseño de las tareas pues este, estaba propuesto para trabajar la conservación del área. Sin embargo, los datos recogidos de la implementación y el análisis de los mismos, se enfatizaron en las concepciones que los estudiantes tenían sobre los objetos geométricos, y muy poco sobre las propiedades métricas del área, las cuales no dependen de las formas de las figuras.

Por otro lado, se presentaron dificultades en el desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes, dado que en algunos dispositivos electrónicos no funcionaba algunas teclas del teclado, lo cual no les permitió registrar con claridad sus respuestas. Asimismo, no se contó con *mouses*, de modo que se les dificultó el arrastre de las figuras.

En este trabajo de investigación se pusieron en juego el desarrollo de un experimento de enseñanza, las dimensiones de la resolución de problemas y el empleo de un ambiente que integrara tecnologías digitales para caracterizar el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, la lección desarrollada en un ambiente digital, permitió registrar las respuestas de los estudiantes a cada tarea, sin embargo, no posibilitó interacciones entre los estudiantes. Se sugiere que para próximos trabajos se organicen grupos de trabajo para que los estudiantes discutan las tareas y se

haga una prueba diagnostica para determinar los saberes previos de ellos estudiantes, ya que en este estudio no se realizó.

Aportes a mi Formación como Licenciada y Proyecciones a Futuro

En primer lugar, es importante mencionar que el haber elegido el objeto matemático área como magnitud para estudiar el aprendizaje de los estudiantes permitió dar cuenta de la importancia de las magnitudes y su medida.

Además, esta experiencia me permitió conocer aspectos importantes sobre el área como magnitud. Pues inicialmente asociaba el área al resultado de aplicar una formula. Después de haber realizado este estudio, me queda claro que la magnitud es todo aquello que podemos medir, en este sentido un fenómeno que se puede medir es la cantidad de superficie, la cual se le denomina área. También me posibilito reconocer los diferentes procedimientos que permiten medir y compara áreas de superficies planas. Lo anterior me permitió reconocer la importancia de estudiar un objeto matemático, antes de llevarlo a las aulas de clase.

Finalmente, se pretende que este trabajo pueda ser empleado por docentes como punto de apoyo para ir mas allá de esta propuesta de aprendizaje del área como magnitud. Como consideraciones futuras, se espera poder direccionar esta investigación, más a fondo contemplando elementos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, intentando dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué caracteriza la enseñanza y el aprendizaje de estudiantes de grado 6°, cuando resuelven problemas de conservación de área, haciendo uso de materiales manipulativos y tecnologías digitales?

Referencias

- Álvarez, L., & Escorcía, L. (2017). *El efecto de la resolución de problemas sobre la conservación de perímetro y área en estudiantes de octavo grado*. [(Tesis de Maestría). Universidad del Norte]. <http://hdl.handle.net/10584/8035>
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, 1(1), 1–9.
www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes
- Caggiani, I., Pastrana, N., & Alliaume, J. (n.d.). *Magnitud y medida. El lugar de las ideas previas de los niños en la estimación; la experimentación y las prácticas de medidas*. 1–13.
<https://www.monografias.com/trabajos-pdf2/ideas-ninos-estimacion-experimentacion-medidas/ideas-ninos-estimacion-experimentacion-medidas.pdf>
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Collado, L. (2014). La enseñanza del número cardinal y ordinal en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia*, 3(2), 67–83.
<https://doi.org/10.24197/edmain.2.2014.67-83>
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria hasta universidad* (p. 465).
<http://www.uv.es/apregeom/archivos2/Corberan96.pdf>
- D'amore, B., & Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de

maestros y de estudiantes. *Relime*, 10(1), 39–68.

Galina, E. (2008). Medida , geometría y el proceso de medir. *XXXI Reunión de Educación Matemática y LVIII Reunión Anual de La Unión Matemática Argentina*, 1–23.

<http://www.famaf.unc.edu.ar/~galina/Imagenes/mgpm3.pdf>

García, G. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas : las interacciones y el análisis cognitivo*. [Universidad de Huelva.].

http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/7517/La_construccion_del_concepto_de_area.pdf?sequence=2

García, Y., & Zúñiga, R. (2014). *Planteamiento y Resolución de Problemas en el Laboratorio de Educación Matemática*. [(Tesis de pregrado). Universidad del Valle.].

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/7639/3469-0473475.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Godino, J. D., Batero, C., & Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. In *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros* (pp. 607–692). [https://www.researchgate.net/profile/Carmen-](https://www.researchgate.net/profile/Carmen-Batanero/publication/273444944_Medida_y_su_didactica_para_maestros/links/5501718f0cf231de0769e0c0/Medida-y-su-didactica-para-maestros.pdf)

[Batanero/publication/273444944_Medida_y_su_didactica_para_maestros/links/5501718f0cf231de0769e0c0/Medida-y-su-didactica-para-maestros.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Carmen-Batanero/publication/273444944_Medida_y_su_didactica_para_maestros/links/5501718f0cf231de0769e0c0/Medida-y-su-didactica-para-maestros.pdf)

Gutiérrez, J., & Vanegas, M. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Métrico en la Educación Básica Secundaria*. [Universidad de Antioquia].

https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7079/1/JesusGutierrez_2005_pensamientometrico.pdf

Marmolejo, G. (2016). Situaciones problemáticas para la enseñanza del área de regiones

poligonales en los primeros ciclos de la educación básica. Introducción a la magnitud área y su medida. In *Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria*. (pp. 27–64).

[http://sired.udenar.edu.co/3528/1/INTRODUCCIÓNALDESARROLLO
DEPENSAMIENTO METRICO.....pdf](http://sired.udenar.edu.co/3528/1/INTRODUCCIÓN%20AL%20DESARROLLO%20DE%20PENSAMIENTO%20METRICO.....pdf)

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*.

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. In *Revolución educativa* (Issue 3).

file:///C:/Users/marym_000/Pictures/estandares basicos.pdf

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un Acercamiento a la Investigación de Diseño a través de los Experimentos de Enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*, 29(1), 75–88. <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/243824/353427/>

Nagles, N., & Rivera, C. (2021). *Un Recurso Educativo Abierto para la Enseñanza del Área como Magnitud en quinto grado de primaria*. Universidad del Valle.

Piaget, J. (1991). Seis Estudios de Psicología. In *colección labor*.

http://dinterrondonia2010.pbworks.com/f/Jean_Piaget_-_Seis_estudios_de_Psicologia.pdf

Pizarro, R. N. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria*. 225.

https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_309285/rnpc1de1.pdf

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem*

solving (Vol. 2). New York, NY: Wiley.

Recalde, L. C. (2017). *Lecturas de Historia de las Matematicas*. 451.

Rubio-Pizzorno, S., & Montiel-Espinosa, G. (2021). Ambientes Virtuales de Aprendizaje
construidos socialmente con Herramientas de Autor de GeoGebra. *Innovaciones
Educativas*, 23(34), 213–227. <https://doi.org/10.22458/ie.v23i34.3432>

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. In *Encyclopedia of
Mathematics Education* (2nd ed., pp. 686–692). Stephen Lerman, Springer.

Santos, L. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías
digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática.*, 11(15),
333–346. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23952>

Santos, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la
Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *Investigación En Educación
Matemática XII*, 1985, 1–24.
[https://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario
2SantosTrigo.pdf](https://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Seminario2SantosTrigo.pdf)

Santos, M. (2019). La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya
con el desarrollo del razonamiento digital. *Conferencia Presentada En XV CIAEM-IACME*,
12. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1085/584>

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press Inc.

Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid:
Pirámide.

