

COSMOLOGÍA DE TIEMPO TARDÍO PARA UN
CAMPO ESCALAR CON ACOPLAMIENTOS
CINÉTICO Y DE GAUSS-BONNET

EDWIN LOAIZA ACUÑA

TESIS DOCTORAL PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS - FÍSICA

DIRECTOR: LUIS NORBERTO GRANDA VELÁSQUEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE POSTGRADO EN FÍSICA

JULIO 2016

Abstract

In this thesis we study late-time cosmological solutions for a scalar field model with kinetic coupling to curvature and the scalar field coupled to the Gauss-Bonnet invariant, in order to explain the late-time accelerated expansion of the universe. Initially, exact cosmological solutions that show the phases of decelerated expansion, accelerated expansion and transition to the phantom phase have been found. These phases are necessary for the satisfactory explanation of the early inflation, and the current accelerated (super accelerated) expansion of the universe. These solutions have been found by imposing appropriate restrictions on the Gauss-Bonnet and kinetic couplings, based on the asymptotic limits of the Friedmann equations. Solutions with Big Rip and without Big Rip singularities have been studied. An specific choice of the Gauss-Bonnet coupling, where the squared of the Hubble parameter is proportional to the kinetic term, allows the reconstruction of the model for an appropriate cosmological evolution. The new found solution can describe the three cosmological phases that go from the power-law expansion, that describes a matter dominated universe, to the scalar field dominated phantom phase. For this solution and according to the values of the equation of state parameter during different epochs, the parameters of the solution can be adjusted in order to obtain different scenarios with and without Big Rip singularities. Little Rip solutions, that give simmilar to Big Rip phenomenology but without finite time singularities, have been also considered. Finally, an analysis based on the autonomus system formalism have been performed in order to find the critical points of the system and analyse their properties of stability. There were found attractor solutions with scalar field dominance corresponding to late time accelerated expansion. Two new scaling solutions, related with the kinetic coupling to the curvature, have been found. There have been obtained trajectories in the phase space connecting unstable or saddle critical points with a late time attractor dominated by the scalar field. The behavior of the obtained solutions is consistent with the current

observational data coming from different sources, WMAP and PLANCK among others.

Resumen

En esta tesis se estudian las soluciones de tiempo tardío para un modelo de campo escalar con acoplamientos cinético a la curvatura y del campo escalar al invariante de Gauss-Bonnet, con el fin explicar el fenómeno de la expansión acelerada del Universo. Inicialmente se hallan varias soluciones cosmológicas exactas que muestran las fases de desaceleración, aceleración e incluso la fase fantasma. Estas fases son necesarias para la explicación satisfactoria de la inflación temprana, así como la fase actualmente observada de la aceleración (super-aceleración) en el universo de tardío. Dichas soluciones son posibles dadas las restricciones que se impone a los acoples de Gauss-Bonnet y cinético no-mínimo, basados en los límites asintóticos de las ecuaciones de Friedmann generalizadas. Se estudia un escenario quitom con y sin singularidades Big RIP. Una elección específica del acople de Gauss-Bonnet, donde el cuadrado del parámetro de Hubble proporcional al término cinético, permite la reconstrucción del modelo para una evolución cosmológica adecuada. Para una nueva solución hallada, se pueden describir tres fases de expansión del universo que van desde ley de potencias, que describe un universo dominado por materia, hasta expansión tipo phantom con super aceleración. Para esta misma solución, y acuerdo con los valores de la ecuación de estado durante diferentes épocas, se pueden ajustar los valores de los parámetros para obtener escenarios con o sin las singularidades Big RIP. Además se consideran soluciones tipo Little RIP, las cuales producen una fenomenología similar a Big Rip, pero sin singularidades en tiempo finito. Finalmente se realiza un estudio de las ecuaciones dinámicas del modelo considerando el potencial, los acoples cinético y de Gauss-Bonnet de forma exponencial los cuales dan lugar a escenarios cosmológicos muy atractivos, entre ellos soluciones tipo scaling. Se realiza una estudio de las ecuaciones dinámicas y se hace un analisis de los puntos críticos determinando las propiedades de estabilidad del sistema dinámico. Se observan soluciones que terminan en puntos estables con dominancia de campo escalar que corresponden a expansión acele-

rada con tiempo tardío. Se encuentran dos nuevas soluciones tipo scaling relacionadas con el acoplamiento cinético a la curvatura. Se determinan trayectorias que parten de puntos de silla o inestables y terminan en un punto crítico estable (atractor) con dominancia del campo escalar. Las soluciones obtenidos presentan un comportamiento acorde con los datos observacionales provenientes de diferentes fuentes, WMAP y Planck entre otras.

Publicaciones

El trabajo de esta tesis fue realizado en el el Grupo de Gravitación y Cosmología del Departamento de Física de la Universidad del Valle. Los siguientes capítulos están basados en trabajos publicados:

- Capítulo 3. L. N. Granda and E. Loaiza. Exact solutions in a scalar-tensor model of dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(09) : 011 – 011, September 2012.
- Capítulo 4. L. N. Granda and E. Loaiza. Big Rip And Little Rip Solutions In Scalar Model With Kinetic And Gauss-Bonnet Couplings. *International Journal of Modern Physics D*, 21(01) : 1250002 – 13, January 2012.
- Capítulo 5. L. N. Granda and E. Loaiza. Phase space analysis for a scalar-tensor model with kinetic and Gauss-Bonnet couplings. Accepted for publication as a Regular Article in Physical Review D.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, quienes ya no están presentes pero el recuerdo de su amor y su apoyo siempre fue motivo para continuar. A mi familia que siempre ha estado a mi lado brindándome amor y apoyo. Al profesor Norberto Granda, por su paciencia, dedicación y el estar siempre dispuesto a enseñarme un poco más. A mis amigos J. H. Reina, J. J. Jaramillo y Carlos A. Rengifo, amistades invaluables que han perdurado en el tiempo. A mis profesores durante todos estos años en la Universidad: Juan C. Granda, Nelsón Porras, Ernesto Combariza, Germán Pérez, Rubén Vargas, Jairo Roldan, Carlos Uribe, Pedro Prieto y Maria Elena Gómez de Prieto. A Yolanda Domínguez, Norma, Hector Fabio, Jaime, Ana Milena, Priscila, Janeth, Gerardo, Diego Franco, Diego Peña, Juan Carlos, Niny Johana, Alexander, Dorian, Gloria Stella, Denis, Evelia y demás compañeros de la Universidad del Valle, Sede Buga. Y finalmente a todos estudiantes que han pasado por mi aula permanentemente me contagian de su espíritu de querer aprender.

A la memoria de mis padres, Ilma Acuña y Gilberto Loaiza,
por sus lecciones de vida y amor.
A mis hijas Liseth Johana, Natalia y Ana Sofía,
fuente de inspiración inagotable.
a mi esposa Constanza,
por su amor y dedicación.

Índice general

Abstract	II
Resumen	IV
Publicaciones	VI
Agradecimientos	VII
Lista de tablas	XI
Lista de Figuras	XII
1. Introducción	1
2. Cosmología Estándar	19
2.1. Ecuaciones de Friedmann	19
3. Soluciones exactas	25
3.1. Ecuaciones de campo	25
3.2. Dominancia de campo escalar	28
3.2.1. Estabilidad de las soluciones	35
3.2.2. Estabilidad bajo perturbaciones escalares y tensoriales	39
3.2.3. Perturbaciones tensoriales	40
3.2.4. Perturbaciones escalares	43
3.3. Campo escalar y materia	48
3.4. Discusión	55

4. Soluciones Big RIP y Little RIP	58
4.1. Singularidades futuras	59
4.2. Soluciones con y sin singularidades Big RIP	61
4.2.1. Singularidades Big RIP	67
4.3. Soluciones Little RIP	68
4.4. Discusión	73
5. Análisis del espacio de fase	74
5.1. Teoría de estabilidad lineal	74
5.2. Ecuaciones dinámicas	78
5.3. Puntos críticos	85
5.3.1. Acople de Gauss-Bonnet (límite $k=0$)	86
5.3.2. Acople cinético (Límite $g=0$)	91
5.3.3. Acoples de Gauss-Bonnet y Cinético	95
5.4. Discussion	103
6. Conclusiones	106
A. Método de la Variedad central	114
Bibliography	119

Índice de tablas

5.1. Autovalores y estabilidad de un punto crítico.	78
5.2. Resumen de puntos críticos y cantidades fundamentales.	84
5.3. Resumen de autovalores en los puntos críticos	84

Índice de figuras

3.1. $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ versus $\ln(1+z)$	44
3.2. $\mathcal{G}_S$ and $\mathcal{F}_S$ versus $\ln(1+z)$	47
4.1. La EoS efectiva para $p = 2/3, \gamma = 0.93, \eta = 0.8$	66
4.2. La EoS efectiva para $p = 2/3$ y diferentes valores de (η, γ)	67
5.1. Retrato de fase ($\beta = \frac{1}{16}, \lambda = \frac{1}{8}, w_m = 0$)	87
5.2. Retrato de fase ($\beta = \frac{1}{16}, \lambda = \frac{1}{8}, w_m = 0$)	88
5.3. Retrato de fase ($\beta = 1, \lambda = \frac{81}{32}, w_m = 0$)	89
5.4. Retrato de fase ($\alpha = 2, \lambda = 4\sqrt{\frac{3}{7}}, w_m = 0$)	94
5.5. Retrato fase ($\alpha = \frac{1}{8}, \lambda = \frac{1}{4}, w_m = 0$)	95
5.6. Retrato de fase ($\alpha = 68/39, \lambda = 4\sqrt{3/7}, \beta = 2, w_m = 0$)	100
5.7. Retrato de fase ($\alpha = 1/8, \lambda = 1/2, \beta = 1/4, w_m = 0$)	101
5.8. Evolución de los parámetros de densidad	102

Capítulo 1

Introducción

Hace casi 90 años Edwin Hubble reportó el descubrimiento que abrió el camino a la Cosmología moderna. En 1929, informó el descubrimiento de una correlación entre la distancia de las Galaxias a la Tierra y sus velocidades [1]. Más tarde dicha relación fue denominada *ley de Hubble*¹ $v = H_0 D$, la correlación muestra que cuanto más lejos está una Galaxia, su luz cambia y se desplaza hacia el extremo rojo del espectro. Este corrimiento al rojo implica que las Galaxias se están alejando de la Tierra. Posteriormente los astrónomos interpretaron esto como una evidencia de que el Universo parece estar expandiéndose².

Pero, finalizando el siglo XX, aquel hallazgo revolucionario fue sucedido por otro más asombroso aún: *la expansión cósmica del Universo se estaba acelerando*. Durante muchos años los Científicos supusieron que la atracción gravitacional frenaría la expansión del Universo. Pero en 1998, dos equipos independientes de astrónomos que estaban estudiando supernovas tipo **Ia** (Las **SN Ia** son explosiones estelares que sirven como eventos cósmicos que permiten medir distancias) constataron justo

¹La constante de proporcionalidad H_0 es denominada constante de Hubble, D y v son la distancia y velocidad “propias”. En el SI H_0 es s^{-1} pero es más frecuente presentarla en $km/s/Mpc$

² Recientemente Mario Livio [2], astrónomo del *Space Telescope Science Institute* presentó argumentos que sostienen que Hubble no fue el primero en descubrir, en 1929, la expansión del Universo, sino el astrónomo y sacerdote Belga Georges Lemaître en 1927 [3]

lo contrario: *La expansión del Universo es acelerada* (High-Z Supernova Search Team [4, 5] y Supernova Cosmology Project[5]³). Este descubrimiento singular, corroborado por observaciones posteriores [7, 8, 9, 10], fue galardonado en 2011 con el premio Nobel de Física para Adam Riess, Brian P. Schmidt y Saul Perlmutter por el descubrimiento de la expansión acelerada del Universo.

La pregunta que surge es ¿Qué causa que el Universo se esté expandiendo cada vez más rápido?. Al respecto se plantean dos alternativas: La primera, es que tal vez ni Newton ni Einstein tienen la última palabra acerca de la gravedad. Y pese a que esta fuerza parece ser siempre atractiva, como ocurre en la Tierra y en el Sistema Solar, tal vez en las vastas distancias del espacio intergaláctico se comporte de otro modo.

La segunda hipótesis postula que el universo podría estar lleno de una sustancia desconocida, a la que se le ha dado el nombre de *energía oscura*, la cual contrarrestaría la fuerza de la gravedad y provocaría que las galaxias se repeliesen en lugar de atraerse, este agente sería el responsable de la fuerza repulsiva que, aparentemente, está desgarrando el universo.

La expresión “energía oscura” puede resultar confusa o incluso desafortunada, dado que un término similar y que no guarda relación con ella, la “materia oscura”, se ha utilizado para describir la materia sin presión (materia no relativista). Este tipo de materia interactúa muy débilmente con las partículas de materia estándar y su existencia fue indicada por Zwicky en los años 30 al comparar las velocidades de dispersión con la masa observada de las estrellas de las galaxias en el cúmulo de Coma. Puesto que la materia oscura no interactúa con la fuerza electromagnética, su existencia se infiere de sus efectos con la materia visible y es la responsable de forma-

³El primer artículo, que hizo uso de los datos observados para afirmar la existencia de un término lambda positivo fue el de Paál, G. et al. en 1992 [6]

ción de estructuras locales en el Universo. De hecho, las evidencias observacionales establecen que la materia oscura ha jugado un papel crucial para el crecimiento de la estructura a gran escala, tales como galaxias y cúmulos de galaxias. Un recuento muy interesante del descubrimiento y desarrollo de las ideas de la materia oscura se presentan en *A brief history of dark matter* [11].

Las observaciones cosmológicas indican que, en caso de existir, la energía oscura daría hoy cuenta del 69% de toda la masa y energía del Universo actual. La materia oscura, representa un 26%. La materia ordinaria, que incluye los átomos de los que están compuestas las Estrellas, los Planetas y los seres Humanos, apenas representaría el 5% de todo lo que existe. La radiación, que dominó sobre los otros componentes de la materia en el pasado, cuenta sólo con alrededor de 0,005% de la densidad de energía actual total [12, 13].

La hipótesis de la energía oscura ha cautivado más la atención que la posibilidad de cambios en el comportamiento de la Gravitación a grandes escalas, pues permite explicar de forma simple y elegante el proceso de formación de grandes estructuras cósmicas, además de no entrar en contradicción con los datos disponibles a la fecha.

De otro lado, en la cosmología moderna se postula la ocurrencia de otro tipo de aceleración cósmica llamada “Inflación”, la cual se produjo en el Universo temprano antes de la época en la que la radiación dominara. La teoría de la “Inflación” fue propuesta para resolver varios problemas cosmológicos tales como la planitud y el horizonte [14, 15, 16]. La inflación además propone un mecanismo causal que permite explicar el origen de la estructura a gran escala en el Universo.

La anisotropía de la temperatura del Fondo Cósmico de Microondas (FCM) observada por el Cosmic Background Explorer (COBE) en 1992 [17], permitió comprobar que el espectro de fluctuaciones es casi invariante ante la escala. Estos resultados son consistentes con las predicciones teóricas de las perturbaciones en el espectro de potencias de la densidad, originados de las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar generado durante la inflación. Desde el año 2003, el equipo de la Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) ha proporcionado datos observacionales de alta precisión en las anisotropía del FCM [18, 19, 9, 20]. El satélite Planck, puesto en órbita desde el 2009, tiene como misión medir con mayor precisión las anisotropías espaciales en la temperatura del FCM [21]. Estos resultados no sólo han proporcionado un fuerte apoyo a la existencia de un periodo de inflación, sino que al ser analizados junto con los datos de otras fuentes, sugieren la existencia de la energía oscura.

Con el propósito de estudiar la naturaleza de la energía oscura y garantizar que es la responsable de la expansión acelerada del Universo, diversos equipos internacionales de Científicos adelantan proyectos encaminados a estudiar la energía oscura (ver más adelante una lista detallada). Por ejemplo, uno de estos, es el proyecto: Sondeo de la Energía Oscura (Dark Energy Survey) el cual permitirá entender por que el Universo se esta desgarrando. El instrumento principal de DES es la Cámara de Energía Oscura (DECam)[22] montada en telescopio de cuatro metros de diámetro ubicado en el Observatorio Interamericano de Cerro Tololo Chile. Desde agosto de 2013 y durante 5 años estará tomando imágenes de una vasta franja del cielo del hemisferio sur, produciendo un mapa detallado de alta resolución de unos 200 millones de galaxias y un catálogo de explosiones estelares que permitirán tener un trazado de la expansión cósmica [23].

Luego del periodo de inflación, el Universo entró en una era de dominancia de radiación en la cual se formaron elementos livianos como el Deuterio y el Helio. A partir de allí, la densidad de energía de la radiación decayó más rápidamente que la de la materia no relativista, tal como los Bariones o la Materia Oscura. La época de dominancia de la radiación fue sucedida por la era de dominancia de materia.

La anisotropía observadas por el COBE, WMAP y Planck ocurrieron en la última superficie de dispersión, cuando los electrones fueron atrapados por el Hidrógeno para formar átomos. Después de esta *época de desacople*, los fotones se pudieron mover sin experimentar dispersión de Thomsom. De acuerdo a los datos proporcionados por el WMAP [9], los componentes del Universo en esta época eran: materia oscura 63%, radiación 25%(fotones 15% y neutrinos 10%) y bariones 12%, con una cantidad muy pequeña de energía oscura.

La formación de estructuras (Galaxias y Cúmulos) tuvo su principio en la era de dominancia de materia, cuando la materia sin presión inicio su dominio en la densidad de energía total del Universo. La contribución de los Bariones en la formación de estas estructuras fue importante en alguna medida. Durante esta era de dominancia de Materia oscura, la densidad de energía oscura debe ser insignificante a fin de lograr la formación de grandes estructuras. Si la Energía y Materia oscura se acoplan en alguna medida, en un escenario como la quintaesencia [24, 25], entonces es posible que la energía oscura contribuya tanto en la formación de estructuras a gran escala como la expansión del Universo. Las observaciones de Cúmulos de Galaxias y el FCM, permiten establecer límites a tales acoples.

A la pregunta sobre la causa de la expansión acelerada, consideramos la posibilidades de o bien no conocemos suficientemente el comportamiento de la gravedad o postu-

lamos la existencia de la energía oscura. Si partimos de la existencia de la Energía Oscura, es necesario dar respuesta a la pregunta: ¿Qué es la Energía Oscura?. Se han planteado dos tipos de alternativas: La energía del espacio vacío y la quintaesencia⁴. Esta última implica modificaciones a la Teoría General de la Relatividad.

La idea de la energía del vacío, resulta equivalente a la *Constante Cosmológica* [26], la cual fue introducida por Albert Einstein [27], en sus ecuaciones del campo gravitacional buscando que estas tuvieran una solución finita, estática y compatible con el principio de Mach⁵. El término Cosmológico pese a no ser observable a escala del Sistema Solar, producía a escalas mayores una repulsión cósmica que compensaba la atracción gravitacional sobre objetos distantes. Es importante aclarar que el modelo de Universo que resultaba de las observaciones de la época era muy limitado, pues se consideraba que el Universo se reducía a la vía láctea.

Si embargo el entusiasmo de Einstein duró muy poco, pues en 1917 Willem de Sitter demostró que las ecuaciones de Einstein con Constante Cosmológica, contenían una solución sin materia [28], lo cual no estaba precisamente acorde con principio de Mach. Más tarde se llegó a la conclusión que este modelo no era estático [29]. En 1930 Arthur Eddington demostró que el Universo que emerge de las ecuaciones de Einstein no era realmente estático y además resultaba muy inestable pues bastaban una pequeñas perturbaciones para que se desencadenara un colapso o una expansión gravitacional desbocadas [30].

En 1931 Hubble confirmó la expansión del Universo, ya para este tiempo Einstein había abandonado el término Cosmológico y había considerado un error su

⁴Partícula aún si descubrir, pariente lejana del Boson de Higgs, pero 44 ordenes de magnitud más ligera.

⁵Para H. Mach la distribución de materia en el Universo definía los sistemas de referencia inerciales

inclusión en las ecuaciones del campo gravitatorio. Si bien el descubrimiento de Hubble, acabó con la necesidad de una constante cosmológica, cabe preguntarse si la gravedad puede adquirir la intensidad suficiente para detener la expansión del Universo y obligar a contraerse o si por el contrario, el cosmos se expandiría para siempre.

La constante cosmológica desapareció casi completamente de la cosmología durante 60 años. Si bien Einstein intentó justificar la presencia desde la relatividad general, la presencia de este término resulta ineludible desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos (TCC). En su concepción actual [26], la constante cosmológica difiere bastante de la propuesta de Einstein. En las ecuaciones del campo gravitatorio, $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, en las que se relacionan la curvatura $G_{\mu\nu}$ con el contenido de materia $T_{\mu\nu}$, cuando Einstein introduce el término cosmológico lo colocó en el lado izquierdo, dando a entender que era una propiedad del espacio. Si se traslada al lado derecho, adquiere un sentido radicalmente diferente: una nueva y extraña forma de densidad de energía que permanece constante, incluso cuando el Universo se expande y cuya gravedad no es atractiva sino repulsiva.

De acuerdo a las leyes de la TCC, el vacío no es *la nada*, sino un hervidero de partículas y antipartículas *virtuales* que, continuamente, aparecen de manera espontánea para aniquilarse una fracción de segundo después. Este mar de partículas efímeras tiene energía. Y la energía, al igual que la masa, es responsable de la gravedad. Sin embargo, a diferencia de la masa, la energía puede dar lugar a una fuerza de la gravedad tanto atractiva como repulsiva, dependiendo de si la presión que ejerce es positiva o negativa. De acuerdo con las teorías actuales, la energía asociada al espacio vacío debería producir una presión negativa, por lo que podría actuar como fuente de la gravedad repulsiva que acelera la expansión del

Universo. Para una revisión del tema de la Constante Cosmológica ver [26, 31, 32, 33].

Desde el punto de vista de la física de partículas, la Constante Cosmológica aparece como la densidad de energía del vacío. Si sumamos energías de punto-cero de todos los modos normales de un campo y tomamos la escala cut-off del impulso en la escala de Planck, se estima que la densidad de energía del vacío es del orden $\rho_{Vac} \approx 10^{74} GeV^4$. Este valor es mucho mayor al observado para la energía oscura: $\rho_{DE} \approx 10^{-47} GeV^4$. Una energía de vacío con una densidad de energía del orden de $\rho_{Vac} \approx 10^{74} GeV^4$ en el pasado habría llevado al Universo a una fase de aceleración cósmica eterna, incluso en el Universo primitivo. Lo anterior representa un problema, pues el éxito del modelo cosmológico del Big Bang se basa en la existencia de épocas de dominancia de radiación y materia. El problema de la gran densidad de energía del vacío era conocida mucho antes del descubrimiento de expansión acelerada en 1998 [26, 34].

Si la constante cosmológica es responsable de la actual aceleración cósmica, es necesario encontrar un mecanismo para obtener un valor lo suficientemente pequeño que resulte consistente con las observaciones. Se ha realizado una gran cantidad de esfuerzos el marco de la física de partículas. Por ejemplo, en los desarrollos recientes de la teoría de cuerdas, se muestra que es posible construir un vacío de Sitter a partir de la compactificación de dimensiones adicionales [35].

Si la constante cosmológica no es la respuesta a la energía oscura, se deben plantear modelos alternativos. Tales modelos suelen presentarse como modificaciones de la ecuación de Einstein ya sea por modificaciones del Tensor de Energía-Impulso $T_{\mu\nu}$ con una presión negativa (modificando el lado derecho de las ecuaciones) o modificando el lado izquierdo de las ecuaciones o gravitación modificada. Los modelos representativos del primer enfoque son: el Cosmón o Quintaesencia

[36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52], k-Escencia [53, 54, 55, 56], campos escalares fundamentales de la teoría de cuerdas como el Tachyon [57], campos escalares con energía cinética negativa o campos Phantom [58, 59], los modelos de fluidos perfectos como el gas de Chapligyn [60] y su generalización [61, 62, 63, 64, 65]

El segundo enfoque para la construcción de modelos de energía oscura, consiste en la modificación del lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein. En el marco de los modelos de “gravitación modificada”, se incluyen gravedad $f(R)$, teorías Escalar-Tensoriales, Gravitación Gauss-Bonnet y modelos de branas de energía oscura. En estas teorías, se modifica la ley de gravitación Universal de tal forma que se obtenga la expansión acelerada del Universo en tiempo tardío sin recurrir a un término de energía explícito. Se debe aclarar que las modificaciones a la ley de Gravitación están seriamente restringidas por las observaciones ya sean locales o globales.

Es importante tener en cuenta, que los dos enfoques, que se designan como “materia modificada” y la “gravedad modificada”, no son fundamentalmente diferentes, a menos que se tengan en cuenta sus implicaciones desde la TCC. Desde el punto de vista clásico de la relatividad general (que es todo lo que importa para la mayor parte de la cosmología), siempre se puede reformular una en términos de la otra mediante la redefinición de un tensor de energía-impulso adecuado que se iguale al tensor de Einstein.

En su expresión más simple la gravitación $f(R)$ se expresa en la acción 4-dimensional

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \phi_m) \quad (1.1)$$

Donde $\kappa^2 = 8\pi G$ y S_m es la acción con campos de materia ϕ_m . El escenario de Constante Cosmológica o Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter) corresponde a la densidad lagrangiana $f(R) = R - 2\Lambda$. Se tienen dos formalismos para derivar las ecuaciones de campo a partir de esta acción: El formalismo de la métrica y el formalismo de Palatini⁶

Ya en los años 80, se conocía que el modelo $f(R) = R + \alpha R^2$ podía ser responsable de inflación en el Universo temprano, esto resulta del hecho que el término cuadrático αR^2 da lugar a una solución de Sitter asintóticamente exacta. La inflación termina cuando el término αR^2 es despreciable frente a R , de la misma forma es despreciable en la época actual y no es responsable de la expansión acelerada. Puesto que la expansión acelerada requiere modificaciones para valores pequeños de R , los modelos que se proponen para explicar la expansión acelerada son del tipo: $f(R) = R - \alpha/R^n$ ($\alpha > 0$ y $n > 0$) [66]. Pese a que la expansión acelerada es posible en este modelo, se presentan problemas relacionados con las restricciones locales [67, 68]. Además no se presenta una época de dominancia de materia dado el fuerte acople entre la materia estándar y la curvatura escalar. En la literatura han sido propuestos diferentes tipos de modelos para la función $f(R)$ [69, 70]. Un aspecto importante del estudio de las teorías $f(R)$ es la posibilidad de realizar un análisis dinámico en el formalismo de la métrica, sin recurrir a una forma específica de la función $f(R)$ [71].

Al igual que el formalismo de la métrica, la viabilidad del formalismo de Palatini ha sido discutido por diversos autores [72, 73, 74] y también se han estudiado las restricciones [75, 76, 77]. Una de las ventajas del formalismo de Palatini, es el orden de las ecuaciones de campo que se generan, además de otras razones por las que el estudio de las soluciones dinámicas se hace menos complejo.

⁶En el formalismo de la métrica las conexiones $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ se definen en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$, en el formalismo de Palatini $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son tratadas como variables independientes.

La teoría general de la relatividad de Einstein es una teoría geométrica del espacio-tiempo cuyo punto fundamental es la métrica (un tensor). Es por ello que se considera una teoría tensorial. Luego del descubrimiento de la aceleración cósmica varios autores han recurrido a generalizar la constante cosmológica [78, 79], por la inclusión de un campo escalar, buscando explicar problemas como el ajuste fino y el problema de la coincidencia. La forma general de la acción de las teorías Escalar-Tensoriales es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \zeta(\phi) (\nabla \phi)^2 \right] + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m) \quad (1.2)$$

Donde f es una función general del campo escalar ϕ y el escalar de Ricci R , ζ es una función de ϕ y S_m es el lagrangiano de materia que depende de la métrica $g_{\mu\nu}$ y del campo de materia Ψ_m . Se ha tomado $\kappa^2 = 1$. La acción (1.2) incluye una amplia variedad de teorías como gravitación $f(R)$, Brans-Dicke [80] y la gravedad con dilatón que surgen de la teoría efectiva de cuerdas de baja energía [81]

Estas teorías no agotan todas las posibilidades de modificación de la gravedad. Otra posibilidad es añadir al lagrangiano de Einstein funciones generales de los tensores de Ricci y Riemann $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \dots)$ [82]. Si embargo estos lagrangianos están plagados de problemas como los estados de energía negativos [83, 84, 85]. Pero una combinación adecuada de los tensores de Ricci y Riemann que mantiene las ecuaciones de la métrica de segundo orden y no conlleva inestabilidades, es el término de Gauss-Bonnet (GB) acoplado a un campo escalar [86, 87, 88].

La combinación de GB es una cantidad invariante topológico que contribuye a la dinámica 4-dimensional dado que está acoplado al campo escalar. El término de GB es el único invariante para el cual las derivadas de orden superior aparecen linealmente en las ecuaciones de movimiento, asegurando la unicidad de las soluciones. El término

de GB aparece de forma natural como una corrección a la acción efectiva de baja energía de la teoría de cuerdas [89, 90]. El modelo general está dado por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) - f(\phi) R_{GB}^2 \right] + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m) \quad (1.3)$$

Donde $V(\phi)$ y $f(\phi)$ son funciones de ϕ y R_{GB}^2 es el término de Gauss-Bonnet definido como:

$$R_{GB}^2 \equiv R^2 - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1.4)$$

Este modelo ha sido estudiado en por diferentes autores [91, 88, 92].

La presente tesis se centra en el estudio de un modelo Escalar-Tensorial de la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - F_2(\phi) \mathcal{G} \right] + S_m \quad (1.5)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, $\mathcal{G}$ es el invariante 4-dimensional de GB, $\mathcal{G} = R^2 - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$. El acople $F_1(\phi)$ tiene dimensiones de $(length)^2$ y el acople $F_2(\phi)$ es adimensional.

Inicialmente en [93] se considera la posibilidad de un acoplamiento explícito entre el campo escalar, el término cinético y la curvatura, como fuente de energía oscura, analizando el papel de este nuevo acoplamiento en un escenario de evolución con la expansión acelerada en tiempo tardío. El acoplamiento no-mínimo entre el campo escalar y la curvatura ha sido considerado ampliamente para explicar la expansión acelerada del universo [94, 95, 96]. La motivación básica para considerar modelos escalares con acoplamientos a la curvatura tiene que ver con el hecho de que estos acoplamientos aparecen en el límite de bajas energías de teorías de gravitación en altas dimensiones como la teoría de supercuerdas [97] o aparecen como parte de la anomalía de Weyl en supergravitación conforme $N = 4$ [98, 99]. Los

acoplamientos cinéticos a la curvatura han sido considerados como modelos inflacionarios en [100, 101, 102, 103], donde se han hecho restricciones a los acoplamientos.

En [104] se estudia el modelo con campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura como una fuente de energía oscura, pero ahora se estudia la ecuación de estado en dos casos: con término cinético y sin término cinético, los resultados mostraron una correspondencia con la fenomenología de la energía oscura.

Posteriormente en [105] se obtienen soluciones cosmológicas aceptables fenomenológicamente con las evidencias de energía oscura. Las soluciones que se obtienen al restringir el potencial son del tipo ley de potencia. La generalidad del acople cinético no-mínimo se lleva al escenario de la inflación en [106] donde se hallan condiciones slow-rolling, al considerar potenciales del tipo cuadrático y de Higgs, además se hallan los valores de los campos al final de la inflación. Esto permite recuperar la conexión con la teoría de partículas.

En [107] se establece la conexión entre el acoplamiento cinético no-mínimo y el gas Chaplygin, al obtener soluciones de las ecuaciones de campo que reproducen la evolución cosmológica propuesta por el fluido perfecto con ecuación de estado del gas de Chaplygin [60]. Se encuentran expresiones analíticas para el campo escalar y los potenciales reconstruidos, que describen los modelos de gas Chaplygin estándar, generalizado y modificado. Estos describen la unificación de la energía oscura y la materia oscura.

El paso siguiente en el estudio del modelo consistió en la inclusión del término de GB. En [108] se estudian los posibles efectos del acoplamiento de GB combinado con el acoplamiento cinético, en cosmologías de energía oscura, con el fin de aclarar si son

compatibles con la fenomenología actual. Se encuentran dos soluciones: la primera unifica el comportamiento de ley de potencia en con la dominancia de la constante cosmológica en tiempos tardíos; la segunda describe un universo en la fase fantasma y dependiendo de los parámetros puede describir el comportamiento de la energía oscura o puede contener las fases desaceleradas y aceleradas.

En [109] se hallan soluciones del modelo con acople de GB y acoplamiento cinético no mínimo, las cuales unifican la dominancia de materia (radiación) en etapas tempranas con transiciones a fases de quintaesencia y fantasmas en tiempo tardío. Además se reconstruyen la cosmología del gas Chaplygin y del gas Chaplygin generalizado.

Finalmente, los modelos de Branas son motivados en las Teorías de Supercuerdas/Teoría M. En una teoría de Kaluza-Klein convencional, las dimensiones extra son compactificadas a fin de obtener una teoría gravitacional efectiva en 4 dimensiones [110]. En los modelos estándar de Branas las partículas están confinadas a un espacio 3 dimensional incrustado en un espacio-tiempo 5 dimensional con dimensiones extra muy grandes. Entre las propuestas de mundos brana estan la de Randall y Sundrum [111, 112] y la de Dvali, Gabadadze, y Porrati (DGP) [113]. En estos modelos, es posible alcanzar la aceleración cósmica en tiempo tardío sin recurrir a una fuente de materia exótica. En este sentido estas soluciones son Universos auto acelerados.

Para discernir entre las posibles causas de la aceleración cósmica, los científicos investigan cuatro fenómenos especialmente sensibles a las distintas hipótesis. Puesto que cada uno se halla asociado a un tipo diferente de observación, no se ven afectados por el mismo tipo de error. Los cuatro fenómenos que se estudian son: La supernovas **SN Ia**, las anisotropía del Fondo Cosmológico de Microondas (CMB), los cúmulos de Galaxias, la detección de picos en las ondas acústicas primordiales también

llamadas Oscilaciones Acústicas Bariónicas (Barionic Acoustic Oscillations) y las lentes gravitacionales.

Con el fin de analizar la viabilidad de los diferentes modelos de energía oscura, es importante establecer restricciones mediante el uso de los datos observacionales provenientes de diferentes fuentes SNIa, CMB y *LSS* (Large Scale Structures). Generalmente, la ecuación de estado de la energía oscura $w_{DE} = P_{DE}/\rho_{DE}$, (donde ρ_{DE} es la densidad de energía oscura y P_{DE} es la presión) es una buena cantidad para describir el comportamiento de la energía oscura a nivel fundamental. En el caso de constante cosmológica se tiene que $w_{DE} = -1$ y por lo tanto $\rho_{DE} = -P_{DE}$. En otros modelos de energía oscura w_{DE} varía con el tiempo. En la determinación de la energía oscura, el punto de partida es detectar las desviaciones del valor $w_{DE} = -1$ a fin de encontrar si la energía oscura puede ser identificada con la constante cosmológica.

La observación de Super Novas **SNIa**, permite obtener información de la historia de la expansión cósmica por el corrimiento al rojo. Son varios los grupos dedicados a realizar medidas de energía oscura usando como principio las Super Novas tipo *Ia*: High-Z- SN Search [4], Super Nova Cosmology Project (SNCP) [5], Space Telescope Science Institute(STSI) [114], Super Nova Legacy Survey (SNLS) [115], ESSENCE Supernova Survey [116], Carnegie Supernova Project (CSP) [117, 118], Sloan Digital Sky Survey-II [119], DES (Dark Energy Survey) [120], Sloan Digital Sky Survey-III [121, 122, 123, 124], Cosmic Assembly Near-infrared Deep Extragalactic Legacy Survey (CANDELS) y LSST(Large Synoptic Survey Telescope) en construcción.

En 1990, el satélite Explorador del Fondo Cósmico COBE (Cosmic Background explorer) midió el espectro del Fondo Cósmico de Microondas, los resultados confirmaron en parte los postulados básicos de la Teoría del Big Bang. La presencia de la energía

oscura produce un efecto de desplazamiento de la posición de los picos acústicos en la anisotropía del FCM, así como una modificación a gran escala espectro FCM a través del llamado efecto Sachs-Wolfe. Aunque los datos del FCM por sí solos no son suficientes para poner fuertes restricciones sobre la energía oscura, el análisis combinado de $SN Ia$ y FCM puede proporcionar límites para la Ecuación de Estado (EoS) w_{DE} y la fracción de energía oscura Ω_{DE}^0 en momento actual [13, 9, 20].

La distribución de la agrupación a gran escala de las galaxias en el cielo también proporciona información adicional sobre las propiedades de la energía oscura. Combinando las observaciones del Observatorio de rayos X , Chandra de la NASA, la luz óptica del telescopio espacial Hubble y el Sloan Digital Sky Survey (SDSS), se ha obtenido información adicional sobre las propiedades de la energía oscura [125, 126, 127]. En 2005 fue reportado por Eisenstein et al [128] un pico de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) en el desplazamiento al rojo $z = 0.35$, promediando las observaciones de galaxias rojas luminosas en el Sloan Digital Sky Survey. Esto también nos ha dado otra prueba independiente la Energía Oscura [128]. El grupo del HETDEX (Hobby-Eberly Telescope Dark Energy Experiment) estudia las BAO y el efecto de lente gravitacional para entender la naturaleza de la Energía oscura [129].

En el presente trabajo se estudia un modelo Escalar-Tensorial con acoplamientos de GB y cinético no-mínimo (1.5), en tres fases: Soluciones exactas, soluciones Big RIP y Little RIP y finalmente se hace un análisis de sistemas dinámicos para el modelo. La estructura del documentos es la siguiente.

En el capítulo 2, se presenta una breve introducción a la Cosmología Estándar que tiene como fin introducir los conceptos básicos del trabajo.

En el capítulo 3, se estudian soluciones cosmológicas exactas del modelo que pueden explicar la aceleración cósmica tardía y que pueden contener las fases de desaceleración y también una fase phantom que no está descartada por las observaciones actuales [130]. Para lograr estas soluciones se parte de los límites asintóticos de las ecuaciones de Friedmann generalizadas para imponer restricciones a los acoplamientos tanto de GB como el cinético no-mínimo. Estas restricciones simplifican considerablemente las ecuaciones permitiendo determinar soluciones exactas que unifican dominancia de materia en etapas tempranas con transiciones de fase a quintaesencia o phantom en etapas tardías. Las soluciones halladas resultan compatibles con la gran cantidad de datos existentes que apoyan la expansión acelerada tardía del universo. Se estudia además la estabilidad bajo perturbaciones escalares y tensoriales.

En el capítulo 4, se estudia un escenario quintom, con y sin singularidades tipo Big RIP y Little RIP [131]. Una elección adecuada del acople de GB simplifica considerablemente el modelo permitiendo soluciones en la que el cuadrado del parámetro de Hubble es proporcional al término cinético, y a partir de este resultado se realiza la reconstrucción del modelo para evoluciones cosmológicas acorde con las observaciones. Se consideró una solución que se ajusta al comportamiento observado de la ecuación de estado, donde, la singularidad Big RIP puede estar presente o ausente, dependiendo de los parámetros de la solución. También se consideran soluciones tipo Little RIP, las cuales reproducen una fenomenología similar al Big RIP pero sin la singularidad de tiempo finito.

En el capítulo 5, se utiliza la técnica de los sistemas dinámicos autónomos para estudiar las soluciones de puntos críticos del modelo y hacer un análisis de la estabilidad del modelo en estos puntos críticos. También se estudian las trayectorias en el espacio de fase que conectan soluciones de tiempo temprano con soluciones de tiempo

tardío, dominadas por el campo escalar, en el caso en que las soluciones de tiempo tardío son estables. Los puntos críticos hallados describen una amplia variedad de escenarios cosmológicos que van desde Universos dominados por materia o radiación, a Universos dominados por energía oscura.

Las conclusiones del trabajo son presentadas en el capítulo 6. En el apéndice se discuten los aspectos técnicos para aplicar el método de variedad central en el estudio de la estabilidad de un sistema dinámico en puntos críticos con autovalores de parte real nula.

Capítulo 2

Cosmología Estándar

La Cosmología estándar de Gran Expansión Caliente (Standard Hot Big Bang Cosmology) está basada en el principio Cosmológico que establece que: *El Universo es homogéneo e Isotrópico, por lo menos a gran escala*. Este principio está sustentado en una serie de observaciones astronómicas tales como los fotones del FCM provenientes de diferentes direcciones y que tienen casi la misma temperatura. La historia del Universo se reconstruye a partir de la solución de las ecuaciones de Einstein en un Universo homogéneo e isotrópico. Es claro que existen irregularidades y anisotropía a nivel local, tales como Estrellas y Galaxias, estas son el resultado de la inestabilidad de la gravedad actuando sobre una distribución de materia que fue más homogénea en el pasado, en el inicio del Universo.

En este capítulo se presentarán los conceptos básicos para abordar el modelo estándar del Universo y su relación con los datos observacionales.

2.1. Ecuaciones de Friedmann

El elemento de línea que describe un espacio 4-Dimensional homogéneo e isotrópico, llamado Espacio-tiempo de Friedmann-Lemaitre-Roberson-Walker (FLRW) está dado

por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.1)$$

Donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica y $a(t)$ es el factor de escala que depende del tiempo cosmológico t . La curvatura constante del espacio tridimensional $K = +1, 0, -1$, corresponde a una geometría cerrada, abierta o plana, respectivamente. Esta métrica puede se deducida de un espacio máximalmente simétrico (ver deducción en [132])

Las ecuaciones de dinámicas pueden ser obtenidas a partir de la las Ecuaciones de Einstein

$$G_\mu^\nu = 8 \pi G T_\mu^\nu \quad (2.2)$$

Donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ es el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de Energía-Impulso y G es la constante de gravitación universal. El lado izquierdo de (2.2) caracteriza la geometría del espacio-tiempo, en tanto que el lado derecho caracteriza la energía y el momento de las componentes de materia.

En términos cosmológicos la tasa de expansión cósmica se determina mediante la especificación de las propiedades de la materia en el Universo. En el espacio de FLRW el tensor de energía impulso de la materia se restringe a la forma de fluido perfecto:

$$T_\nu^\mu = (\rho + P) u^\mu u_\nu + P \delta_\nu^\mu \quad (2.3)$$

Donde $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ es la velocidad del fluido en coordenadas comoviles, ρ y P son las funciones del tiempo densidad de energía y presión respectivamente. Las componentes 00 y ij de $T_{\mu\nu}$ son $T_0^0 = -\rho$ y $T_i^j = P \delta_i^j$. De las componentes (00) y (ii) de las ecuaciones de Einstein (2.2), se obtiene:

$$H^2 = \frac{8 \pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.4)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G - \frac{K}{a^2} \quad (2.5)$$

Donde $H \equiv \dot{a}/a$ y el punto representa la derivada con respecto al tiempo. Eliminando K se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (2.6)$$

De las Ecuaciones de Einstein (2.2) se tiene que $\nabla_\mu T^\mu_\nu = \nabla_\mu G^\mu_\nu \equiv 0$, lo que reproduce de nuevo la ecuación (2.6) en la métrica de FLRW.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es llamada la *ecuación de continuidad*.

De otro lado la ecuación (2.4), se puede escribir de la forma:

$$\Omega_M + \Omega_K = 1 \quad (2.8)$$

Donde

$$\Omega_M \equiv \frac{8\pi G \rho}{3H^2} \quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{(aH)^2} \quad (2.9)$$

A menudo se denominan los valores actuales de los parámetros de densidad:

$$\Omega_r^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_r^{(0)}}{3H_0^2}, \quad \Omega_m^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_m^{(0)}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{DE}^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_{DE}^{(0)}}{3H_0^2}, \quad \Omega_K^{(0)} = \frac{8\pi G \rho_K^{(0)}}{(a_0 H_0)^2} \quad (2.10)$$

para partículas relativistas $\rho_r^{(0)}$, materia no relativista $\rho_m^{(0)}$, energía oscura $\rho_{DE}^{(0)}$ y curvatura $\rho_K^{(0)}$. Cuando es necesario identificar la radiación electromagnética, en lugar de todas las partículas relativistas, se utiliza el subíndice γ . Cuando es necesario distinguir entre la materia oscura (cold) y bariones que usan los subíndices c y b , respectivamente. Cuando nos referimos a la constante cosmológica, también se usa el

subíndice Λ en lugar de DE. La M denomina un componente de materia genérico.

Si la expansión del Universo es acelerada ($\ddot{a} > 0$) entonces el termino de curvatura $|\Omega_K^{(0)}|$ decrece (puesto que $aH = \dot{a}$ crece). Los datos de los 5 años del WMAP limitan la curvatura del Universo en la actualidad a $\Omega_K^{(0)} = -0.0027_{-0.0038}^{+0.0039}$ [133, 134].

Considerando el caso en el que el Universo es dominado por una única componente la Ecuación de Estado (EoS) toma la forma:

$$w \equiv P/\rho \quad (2.11)$$

Si w es constante , es posible determinar analíticamente la evolución de ρ y a para el Universo plano $K = 0$. Solucionando las ecuaciones (2.4,2.7) en este caso se obtienen las soluciones:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad a \propto (t - t_i)^{2/(3(1+w))} \quad (2.12)$$

Donde t_i es una constante. Las etapas tempranas del universo se pueden caracterizar con una ecuación de estado constante. La radiación corresponde a $w = 1/3$, por lo tanto la evolución de la densidad de energía y el parámetro de escala durante la era de dominancia de la radiación están dados por $\rho \propto a^{-4}$ y $a \propto (t - t_i)^{1/2}$. La materia no relativista corresponde al caso de una presión despreciable con respecto a su densidad de energía $w \approx 0$, la densidad de energía y el parámetro de escala durante la dominancia de materia se comportan como $\rho \propto a^{-3}$ y $a \propto (t - t_i)^{2/3}$. Para que la aceleración cósmica tenga lugar $\ddot{a} > 0$, es necesario que:

$$P < -\rho/3 \quad w < -1/3 \quad (2.13)$$

asumiendo que $\rho > 0$. El hecho de que la presión negativa conlleve una aceleración cósmica, puede resultar contra intuitivo. En la gravedad newtoniana la presión está relacionada con una fuerza asociada a un potencial local que depende de la posición en el espacio. En el Universo homogéneo e isótropo tal potencial local no está presente, lo que significa que no hay presión en la analogía Newtoniana. En otras palabras, la presión P en función del tiempo (t) en el espacio-tiempo FLRW sólo aparece en la relatividad general. Los mecanismos que generan esta presión negativa y la aceleración cósmica son el tema principal de este trabajo.

Cuando $w = -1$, es decir, $P = -\rho$, se deduce de la ecuación (2.7) que ρ es constante. Este caso corresponde de hecho a la llamada constante cosmológica. Considerando H es constante en el Universo plano ($K = 0$), el factor de escala se comporta de manera exponencial: $a \propto e^{-\alpha(Ht)}$. La constante cosmológica no puede ser responsable de la expansión acelerada en la etapa de inflación en el universo temprano puesto que esta expansión no habría terminado. Sin embargo, es posible que la constante cosmológica sea la responsable de la energía oscura y por tanto de la aceleración cósmica actual pues esta podría continuar indefinidamente.

La ley de Hubble, establece la proporcionalidad entre la velocidad recesional v y la distancia propia de una Galaxia D .

$$v \approx H_0 D \tag{2.14}$$

Recientemente el equipo liderado por Adam G. Riess usando la Cámara Gran Angular 3 (WFC3) en el telescopio espacial Hubble (HST) han determinado el valor de la constante de Hubble en $H_0 = 73.24 \pm 1.24 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con una precisión de 2.3% [135]. La constante de Hubble H_0 medida localmente y en el horizonte de

sonido observado del Fondo C3smico de Microondas (CMB) proporcionan evidencias en los extremos opuestos de la historia de la expansi3n visible del Universo. Al comparar los dos resultados se obtiene una prueba rigurosa de la expansi3n acelerada.

El par3metro de Hubble generalmente se escribe:

$$H_0 = 100 \, h \, km \, seg^{-1} \, Mpc^{-1} = 2.1332 \, h \times 10^{-42} \, GeV \quad (2.15)$$

Se definen el tiempo y el radio de Hubble :

$$t_H \equiv \frac{1}{H_0} = 9.78 \times 10^9 \, h^{-1} \, a\tilde{n}os \quad D_H \equiv \frac{c}{H_0} = 2998 \, h^{-1} \, Mpc \quad (2.16)$$

que corresponden con medida aproximadas de la edad del Universo y la mayor escala observada en la actualidad.

Adem3s es 3til introducir la densidad cr3tica

$$\rho_c^{(0)} \equiv \frac{3 \, H_0^2}{8 \, \pi \, G} = 1.88 \, h^2 \times 10^{-29} \, gm/cm^3 \quad (2.17)$$

esta densidad representa la densidad promedio del Universo en la actualidad. Esta densidad cr3tica es muy peque\~na comparada con las densidades locales del Universo (la Tierra $\rho \approx 5 \, gm/cm^3$ y la densidad homog3nea bariones/Materia oscura de nuestra Galaxia $\rho \approx 10^{-24} \, gm/cm^3$). A pesar de ser una cantidad muy peque\~na, es la responsable de la expansi3n acelerada del Universo.

Capítulo 3

Soluciones exactas

En el presente capítulo consideramos un modelo de campo escalar con acoples cinético no mínimo y de Gauss-Bonnet como fuente de energía oscura y discutiremos algunos casos de soluciones exactas de Universo tardío. Partiendo de los límites asintóticos de la ecuación de Friedmann generalizada, se pueden imponer restricciones a los acoples. Estas restricciones simplifican considerablemente las ecuaciones, permitiendo obtener soluciones exactas, que pueden describir tanto la dominancia temprana de materia como las transiciones de fase en tiempo tardío a quintaesencia y phantom. Asimismo, se estudia la estabilidad de las soluciones en ausencia de materia.

3.1. Ecuaciones de campo

El punto de partida es la acción que contiene el campo escalar con un acople cinético a la curvatura y un acople de Gauss-Bonnet (GB)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - F_2(\phi) \mathcal{G} \right] + S_m \quad (3.1)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, $\mathcal{G}$ es el invariante 4-dimensional de GB, $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. El acople $F_1(\phi)$ tiene dimensiones de $(longitud)^2$ y el acople $F_2(\phi)$ es adimensional.

Se espera que tanto el acoplamiento de la curvatura con el término cinético como el acoplamiento GB, sean relevantes para la explicación de los fenómenos de energía oscura. El acoplamiento de GB tiene la ventaja de no contribuir con términos de orden superior al segundo a las ecuaciones de movimiento y por lo tanto no introduce términos fantasma en la teoría. Así que las ecuaciones derivadas de esta acción contienen únicamente segundas derivadas de la métrica y del campo escalar, evitando los problemas que provienen de las derivadas de orden superior [136].

Realizando la variación de la ecuación (3.1) con respecto a la métrica, se obtiene la expresión general:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$, $T_{\mu\nu}^m$ es el tensor de energía-impulso para la componente de materia. El tensor $T_{\mu\nu}$ representa la variación de los términos que dependen del campo escalar ϕ y puede escribirse como:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^K + T_{\mu\nu}^{GB} \quad (3.3)$$

donde $T_{\mu\nu}^\phi$, corresponde a las variaciones de los términos estándar mínimamente acoplados, $T_{\mu\nu}^K$ proviene del término cinético y $T_{\mu\nu}^{GB}$ proviene de la variación del acople GB. Dada la presencia de los acoples cinético con la curvatura y de Gauss-Bonnet, las cantidades derivadas de este tensor de energía-impulso pueden ser consideradas como cantidades efectivas.

Las variaciones están dadas por:

$$T_{\mu\nu}^\phi = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^K = & \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) F_1(\phi) \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi) \\
& - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) (F_1(\phi) \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi) + R F_1(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\
& - 2 F_1(\phi) (R_{\mu\lambda} \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \phi + R_{\nu\lambda} \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi) + g_{\mu\nu} R_{\lambda\gamma} F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla^\gamma \phi \\
& + \nabla_\lambda \nabla_\mu (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \phi) + \nabla_\lambda \nabla_\nu (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi) \\
& - \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\gamma (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla^\gamma \phi)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

y

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{GB} = & 4 \left([\nabla_\mu \nabla_\nu F_2(\phi)] R - g_{\mu\nu} [\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] R - 2 [\nabla^\rho \nabla_\mu F_2(\phi)] R_{\nu\rho} - 2 [\nabla^\rho \nabla_\nu F_2(\phi)] R_{\mu\rho} \right. \\
& \left. + 2 [\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] R_{\mu\nu} + 2 g_{\mu\nu} [\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)] R_{\rho\sigma} - 2 [\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)] R_{\mu\rho\nu\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

En esta expresión han sido aplicadas las propiedades del invariante 4-dimensional de Gauss-Bonnet (ver [137, 138]). La variación con respecto al campo escalar, genera la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} (R F_1(\phi) \partial^\mu \phi - 2 R^{\mu\nu} F_1(\phi) \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi)] + \frac{dV}{d\phi} + \\
& \frac{dF_1}{d\phi} (R \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2 R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) - \frac{dF_2}{d\phi} \mathcal{G} = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Considerando la métrica plana de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) (2.1) con $K = 0$,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{3.8}$$

Asumiendo un campo escalar ϕ homogéneo dependiente del tiempo, las componentes (00) y (11) de la ecuación (3.2), especificadas en (3.3)-(3.6), toman la forma (H es el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$)

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_{DE} + \rho_m) \tag{3.9}$$

$$\rho_{DE} = \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + 9H^2 F_1(\phi) \dot{\phi}^2 - 24H^3 \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} \right)$$

y

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \kappa^2 (p_{DE} + p_m) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} p_{DE} = & \kappa^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - (3H^2 + 2\dot{H}) F_1(\phi) \dot{\phi}^2 - 2H (2F_1(\phi) \dot{\phi} \ddot{\phi} \right. \\ & \left. + \frac{dF_1}{d\phi} \dot{\phi}^3) + 8H^2 \frac{dF_2}{d\phi} \ddot{\phi} + 8H^2 \frac{d^2 F_2}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 + 16H \dot{H} \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} + 16H^3 \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} \right) \end{aligned}$$

En adelante se asume la dominancia del campo escalar (el término de materia no está presente en la acción). La ecuación de movimiento para el campo escalar (3.7) toma la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 3H^2 \left(2F_1(\phi) \ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi} \dot{\phi}^2 \right) + 18H^3 F_1(\phi) \dot{\phi} \\ + 12H \dot{H} F_1(\phi) \dot{\phi} - 24 \left(\dot{H} H^2 + H^4 \right) \frac{dF_2}{d\phi} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Asumiendo un comportamiento asintótico del campo escalar $\phi = \phi_0 = \text{const}$, independiente de $F_1(\phi)$ y para $F_2(\phi) = \text{const}$ se llega a una solución *de Sitter*, como puede ser observado de las ecuaciones (3.9) y (3.11). Para $\phi = \text{const}$ a partir de las ecuaciones (3.9) y (3.11) se sigue que $V = V_0 = \text{const}$ y $H = H_0 = \kappa \sqrt{V_0/3}$.

En las secciones siguientes se estudiarán soluciones a las ecuaciones (3.9) a (3.11) que dan lugar a expansión acelerada.

3.2. Dominancia de campo escalar

Iniciamos estudiando soluciones de las ecuaciones (3.9)-(3.11), en un caso muy importante, cuando potencial del campo escalar y la contribución de la materia están ausentes ($V = 0$, $\rho_m = 0$). En ausencia de potencial evadimos el problema del ajuste fino en el potencial y en ausencia de materia estamos considerando solo la descripción de la componente de energía oscura. Esto deja los acoples $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$ como grados

de libertad que caracterizan la dinámica cosmológica tardía. Considerando el límite de dominancia de energía oscura ($\rho_m \rightarrow 0$) y energía oscura dominada por el acople cinético, podemos despreciar el término cinético libre y el acople de Gauss-Bonnet, partiendo de (3.9), (3.11) y llegando a:

$$H^2 \rightarrow 3F_1\dot{\phi}^2 H^2 \quad (3.12)$$

Este límite sugiere la siguiente restricción para el acople cinético:

$$F_1\dot{\phi}^2 = k \quad (3.13)$$

donde k es una constante. Si dividimos la ecuación (3.9) entre H^2 tomando en cuenta la ecuación (3.11) se puede escribir la ecuación (3.9) en términos de los parámetros de densidad de energía oscura y materia, de la siguiente forma

$$\Omega_{DE} + \Omega_m = \Omega_\phi + \Omega_k + \Omega_{GB} + \Omega_m = 1 \quad (3.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{\rho_\phi}{3 H^2} \\ \Omega_k &= 3F_1\dot{\phi}^2 \\ \Omega_{GB} &= 8 H \frac{dF_2}{d\phi}\dot{\phi} = 8 H \frac{dF_2}{dt} \\ \Omega_m &= \frac{\rho_m}{3 H^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

además se a tomado $\kappa^2 = 1$ y $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V$; Ω_k y Ω_{GB} son los parámetros de densidad asociados con el término cinético y GB respectivamente. Considerando el límite de dominancia de energía oscura por el acople GB (i.e. $\dot{\phi} \rightarrow 0$), entonces de las ecuaciones (3.9) y (3.11) se sigue

$$H^2 \rightarrow 8 H^3 \frac{dF_2}{d\phi}\dot{\phi} \quad (3.16)$$

Lo cual motiva una restricción al acople de GB

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{g}{H(t)} \quad (3.17)$$

Por lo tanto, considerando las definiciones de (3.15), podemos interpretar las restricciones en los acoples cinético y GB como las condiciones bajo las cuales los parámetros de densidad Ω_k y Ω_{GB} se hacen constantes.

$$\Omega_k = 3 k, \quad \Omega_{GB} = 8 g \quad (3.18)$$

donde k y g son valores constantes. Habiendo fijado los acoples F_1 y F_2 podemos resolver las ecuaciones. (3.9)-(3.11).

Una consecuencia importante de los acoples de la forma (3.13) y (3.17) proviene de la ecuación de Friedmann generalizada (3.9), (3.11). Partiendo de esta ecuación y haciendo $V = 0, \rho_m = 0$, se llega a

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + 9 k H^2 + 24 g H^2 \right) \quad (3.19)$$

Lo que impone un comportamiento al término cinético

$$\dot{\phi}^2 = \lambda^2 H^2 \quad (3.20)$$

donde $\lambda^2 = 6 (1 - 3 k - 8 g)$, que debe ser positivo, i.e. $1 - 3 k - 8 g > 0$. Esto también indica que el término cinético escala de la misma forma que ρ_{DE} . Observe que si tomamos $1 - 3 k - 8 g = 1$, entonces se llega a un límite importante $\dot{\phi}^2 = 6H^2$, el cual en ausencia de acoples cinético y GB correspondería al modelo puramente cinético que describe *Stiff matter* o materia rígida, con ecuación de estado $w = 1$. Pero el

campo escalar debe satisfacer adicionalmente la ecuación de movimiento (3.9), la cual depende de los acoples.

Multiplicando la ecuación (3.9) por $\dot{\phi}$ es posible reducir el orden de la ecuación a una de primer orden en función de: $\dot{\phi}^2$, de la siguiente forma (haciendo $V = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\phi}^2)}{dt} + 3 H \dot{\phi}^2 + 3 H^2 \frac{d}{dt} (F_1 \dot{\phi}^2) + 18 H^3 F_1 \dot{\phi}^2 \\ + 12 H \dot{H} F_1 \dot{\phi}^2 + 24 (\dot{H} H^2 + H^4) \frac{dF_2}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Reemplazando $F_1 \dot{\phi}^2$ de (3.13) y dF_2/dt de (3.17) hallamos

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{\phi}^2)}{dt} + 3 H \dot{\phi}^2 + 18 k H^3 + 12 k H \dot{H} + 24 g H (\dot{H} + H^2) = 0 \quad (3.22)$$

tomando en cuenta la ecuación (3.20), se obtiene

$$(1 - k - 4 g) \dot{H} + (3 - 6 k - 20 g) H^2 = 0 \quad (3.23)$$

esta ecuación tiene una solución *power-law*

$$H = \frac{p}{t}, \quad p = \frac{1 - k - 4 g}{3 - 6 k - 20 g} \quad (3.24)$$

la cual conduce a expansión acelerada si $p > 1$. Considerando la constante de integración, entonces esta solución podría describir el comportamiento phantom con singularidad futura Big RIP. Observe que al hacer $3 - 6 k - 20 g = 0$, se llega a una solución de Sitter $H = const.$. Usando (3.24) en la ecuación (3.20) se determina el campo escalar

$$\phi = \lambda p \ln t \quad (3.25)$$

y los acoples cinético y de GB de (3.20) y (3.22) respectivamente

$$F_1 = \frac{k}{\lambda^2 p^2} e^{2\phi/(\lambda p)}, \quad F_2 = \frac{g}{2p} e^{2\phi/(\lambda p)} \quad (3.26)$$

Donde se ha usado (3.25) para t .

Es necesario enfatizar que este comportamiento es exactamente lo que se espera desde la teoría de cuerdas para los acoples cinéticos y GB (reescalando apropiadamente el campo escalar)[139, 140].

Un resultado importante de la ecuación (3.23) es que esta se puede satisfacer cuando los dos coeficientes constantes son cero. Esto lleva dos ecuaciones lineales para k y g con soluciones: $k = -2$, $g = 3/4$.

Para estos valores concretos las ecuaciones (3.22) y (3.23) se satisfacen automáticamente para cualquier $H(t)$. Este hecho puede ser utilizado para reconstruir el modelo para cualquier evolución cosmológica codificada en $H(t)$.

En cualquier caso, si el parámetro de Hubble difiere de una solución *power-law*, los acoples reconstruidos F_1 y F_2 pueden ser diferentes de simples funciones exponenciales. Como hemos visto, las restricciones (3.18) son aproximaciones razonables de cosmología de tiempo tardío.

También podemos encontrar soluciones exactas de las ecuaciones (3.9) y (3.11) considerando las restricciones

$$\Omega_k = c_k a^{-\alpha}, \quad \Omega_{GB} = c_g a^{-\alpha} \quad (3.27)$$

donde c_k and c_g son constantes numéricas. Esta restricción para el acople de GB ha sido considerada en [141]. Usando la variable e-folding $N = \ln a$, las ecuaciones (3.9) y (3.11) toman la forma

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} H^2 \theta + V + 9 H^4 F_1 \theta + 24 H^4 \frac{dF_2}{dN} \right] \quad (3.28)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dN} (H^2 \theta) + 3 H^2 \theta + \frac{dV}{dN} + 9 H^2 (F_1 \theta) \frac{dH^2}{dN} + 3 H^4 \frac{d}{dN} (F_1 \theta) \\ & + 18 H^4 (F_1 \theta) + 12 H^2 \frac{dH^2}{dN} \frac{dF_2}{dN} + 24 H^4 \frac{dF_2}{dN} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se ha usado la propiedad $d/dt = H d/dN$. Se ha multiplicado la ecuación (3.22) por $\dot{\phi}$ y se ha reemplazado $(d\phi/dN)^2 = \theta(N)$. Usando las restricciones (3.27), adicionalmente se ha considerado que el campo escalar evoluciona como $\theta = \text{const} = \lambda^2$ (i.e. $\phi = \lambda N + \phi_0$), entonces de la ecuación (3.28) se tiene que

$$V = H^2 \left(3 - \lambda^2/2 - 3(c_k + c_g) e^{-\alpha N} \right) \quad (3.30)$$

Tomando $\lambda^2 = 6a$ fin de simplificar la expresión para el potencial (i.e. $V = -3(c_k + c_g) H^2 e^{-\alpha N}$) y reemplazando en la ecuación (3.29), se tiene que la ecuación para H^2 se transforma en

$$3 \frac{dH^2}{dN} + 18 H^2 - (c_k + \frac{3}{2} c_g) e^{-\alpha N} \frac{dH^2}{dN} + (2(3 + \alpha) c_k + 3(1 + \alpha) c_g) e^{-\alpha N} H^2 = 0 \quad (3.31)$$

Resolviendo esta ecuación se halla

$$H^2 = C e^{\eta_1 N} \left[3c_g + 2c_k - 6e^{\alpha N} \right]^{\eta_2} \quad (3.32)$$

donde C es una constante de integración

$$\eta_1 = 2 \left(\frac{3c_g + 6c_k}{3c_g + 2c_k} + \alpha \right), \quad \eta_2 = -2 - \frac{24(c_g + c_k)}{(3c_g + 2c_k)\alpha} \quad (3.33)$$

De las ecuaciones (3.27) y (3.32) se hallan las expresiones para los acoplamientos cinético y GB

$$F_1 = \frac{c_k}{18C} e^{-(\alpha+\eta_1)N} [3c_g + 2c_k - 6e^{\alpha N}]^{-\eta_2} \quad (3.34)$$

y

$$F_2 = -\frac{c_g e^{-(\alpha+\eta_1)N}}{8C(\alpha+\eta_1)(3c_g+2c_k)^{\eta_2}} {}_2F_1 \left[-\frac{\alpha+\eta_1}{\alpha}, \eta_2, -\frac{\eta_1}{\alpha}, \frac{6e^{\alpha N}}{3c_g+2c_k} \right] \quad (3.35)$$

Obsérvese que $\eta_2 = 0$ produce una solución del tipo *Stiff matter*: $H^2 \propto e^{-6N} \sim a^{-6}$.

Otras soluciones cosmológicas interesantes se pueden hallar fijando la potencia $\eta_2 = 1$, o 2. Solucionando la ecuación $\eta_2 = 1$ con respecto a α se halla

$$H^2 = C e^{-2\frac{5c_g+2c_k}{3c_g+2c_k}N} \left(3c_g + 2c_k - 6e^{-\frac{8(c_g+c_k)}{3c_g+2c_k}N} \right) \quad (3.36)$$

Observe que todas las soluciones halladas pueden escribirse en términos del campo escalar, reemplazando $N = \phi/\sqrt{6}$. Para que esta solución tenga sentido, la constante de integración C debe ser negativa y $3c_g + 2c_k < 0$. Combinando esta última ecuación con $c_g + c_k < 0$ (que proviene de la condición de que el potencial es positivo (3.30) para $\lambda^2 = 6$) lleva a las restricciones $(c_g \leq 0 \text{ y } c_k \leq -c_g)$ o $(c_g > 0 \text{ y } c_k < -3c_g/2)$. En estas condiciones, el argumento de la segunda exponente en la ecuación (3.36) se hace negativo y el signo en el argumento del primer exponente depende de los valores particulares de c_g y c_k . Así que la solución (3.36) permite explicar la aceleración cósmica tardía. En términos del campo escalar, el potencial toma la forma

$$V = 18C(c_g + c_k)e^{\beta_1\phi} - 3C(c_g + c_k)(3c_g + 2c_k)e^{\beta_2\phi} \quad (3.37)$$

donde

$$\beta_1 = -2 \frac{5c_g + 2c_k}{\sqrt{6}(3c_g + 2c_k)}, \quad \beta_2 = -\frac{2(c_g - 2c_k)}{\sqrt{6}(3c_g + 2c_k)}$$

Tomando $\eta_2 = 2$, y solucionado esta condición con respecto a α se tiene

$$H^2 = C e^{-\frac{\sqrt{6}c_g}{3c_g+2c_k}\phi} \left(3c_g + 2c_k - 6e^{-\frac{\sqrt{6}(c_g+c_k)}{3c_g+2c_k}\phi} \right)^2 \quad (3.38)$$

donde $C > 0$. La única restricción sobre las constantes c_g y c_k es $c_g + c_k < 0$, para garantizar que el potencial sea positivo. Por lo tanto, la presente solución puede explicar la aceleración cósmica para tiempo tardío, incluyendo la super aceleración ($w_{eff} < -1$) si uno de los argumentos en la potencia (3.39) es positivo. El potencial escalar toma la forma

$$V = V_0 e^{\gamma_1 \phi} \left(3c_g + 2c_k - 6e^{\gamma_2 \phi} \right)^2 \quad (3.39)$$

donde $V_0 = -3C(c_g + c_k)$, $\gamma_1 = \frac{\sqrt{6}c_k}{3c_g+2c_k}$, $\gamma_2 = -\frac{\sqrt{6}(c_g+c_k)}{3c_g+2c_k}$.

3.2.1. Estabilidad de las soluciones

Para abordar el tema de la estabilidad de las soluciones correspondientes a las restricciones (3.18) y (3.27) vamos a introducir el sistema autónomo para las ecuaciones (3.9)-(3.11) en ausencia de materia. Sobre las generalidades del sistemas dinámicos y la teoría de la estabilidad lineal, se hará una breve introducción en el capítulo 5.

Se utilizó este enfoque debido a la naturaleza de las restricciones que hemos considerado, que tienen conexión directa con las variables dinámicas definidas para este modelo. El análisis de estabilidad basándose en perturbaciones, de soluciones inflacionarias en la teoría Escalar-Tensorial de segundo orden más general, se ha realizado

en [142]. Vamos a considerar las siguientes variables dinámicas

$$\begin{aligned} x &= \frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{2}H}, & y &= \frac{\kappa^2 V}{H^2}, & k &= 3\kappa^2 F_1 \dot{\phi}^2, \\ g &= 8\kappa^2 H \dot{\phi} \frac{dF_2}{d\phi}, & \epsilon &= \frac{\dot{H}}{H^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Los términos con derivadas en (3.9)-(3.11) transforman bajo el cambio de variable de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{\sqrt{2}H^2(x\epsilon + x')}{\kappa} \\ \frac{dV}{d\phi} &= \frac{H^2(2y\epsilon + y')}{\sqrt{2}\kappa x} \\ \frac{d^2 F_2}{d\phi^2} &= \frac{xg' - g(2x\epsilon + x')}{16H^2 x^3} \\ \frac{dF_1}{d\phi} &= \frac{xk' - \kappa k(x\epsilon + x')}{3\sqrt{2}H^2 x^4} \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde la “prima” denota derivada con respecto a la variable e-folding N . En el análisis posterior estableceremos $\kappa^2 = 1$.

En términos de las variables (3.40) y haciendo uso de (3.41), las ecuaciones (3.9)-(3.11) pueden ser transformadas en el siguiente sistema autónomo de primer orden

$$\begin{aligned} x^2 + y + 3k + 3g - 3 &= 0 = 0 \\ 2xx' + 2(3 + \epsilon)x^2 + y' + 2\epsilon y + k' + 2(3 + 2\epsilon)k + 3(1 + \epsilon)g &= 0 \\ 2\epsilon + 3 + x^2 - y - \frac{2}{3}k' - \frac{1}{3}(3 + 2\epsilon)k - g' - (2 + \epsilon)g &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Debemos tener en cuenta que la solución (3.24)-(3.26) se obtuvo sin potencial (i.e. $V = 0$) en (3.40) y por lo tanto no hay variable y asociada con el potencial. Además hay que tener en cuenta las restricciones de las variables dinámicas k y g (3.18), que conducen a la solución (3.24)-(3.26). Todo esto contribuye a complementar el sistema

dinámico(3.42) con las siguientes ecuaciones

$$y = 0, \quad g' = 0, \quad k' = 0 \quad (3.43)$$

Y por lo tanto, el sistema se reduce al siguiente sistema dinámico unidimensional para x

$$3g + 3k + x^2 - 3 = 0 \quad (3.44)$$

$$3g(\epsilon + 1) + 2\epsilon(2k + x^2) + 6k + 2x(3x + x') = 0 \quad (3.45)$$

donde

$$\epsilon = -\frac{3(2g + k - x^2 - 3)}{3g + 2k - 6} \quad (3.46)$$

Tenga en cuenta que las constantes k y g no son arbitrarias, ya que debe satisfacer la restricción (3.44). A partir de (3.45) y (3.46) se sigue

$$x' = f(x) = \frac{3(g - 2x^2)(3(g + k - 1) + x^2)}{2x(3g + 2k - 6)} \quad (3.47)$$

Los puntos críticos de (3.47) son: $x_{1,2} = \pm\sqrt{g/2}$ y $x_{3,4} = \pm\sqrt{3(1 - g - k)}$. Es fácil comprobar que la solución (3.24), (3.25) es un punto crítico cuando $\lambda = \sqrt{2}x_{1,2}$ o $\lambda = \sqrt{2}x_{3,4}$. Tomando la derivada de (3.47) con respecto a x y evaluando en los puntos críticos, nos encontramos con las ecuaciones de valores propios

1. $\lambda_1 = \frac{df}{dx}|_{x=x_{1,2}} = -\frac{3(7g+6k-6)}{3g+2k-6}$. La estabilidad del punto crítico $x_{1,2}$ exige que $\lambda_1 < 0$, lo que lleva a una de las siguientes condiciones: $(g > 6, k > \frac{1}{6}(6 - 7g))$, $(g \leq 6, k > \frac{1}{2}(6 - 3g))$, $(g \leq 6, k < \frac{1}{6}(6 - 7g))$ o $(g > 6, k < \frac{1}{2}(6 - 3g))$. Si una de estas condiciones se cumple, entonces el punto fijo $x_{1,2}$ es un atractor.

2. $\lambda_2 = \frac{df}{dx}|_{x=x_{3,4}} = \frac{3(7g+6k-6)}{3g+2k-6}$. For $\lambda_2 < 0$ este punto fijo es un atractor, que conduce a las condiciones: $(g < 6, \frac{1}{6}(6-7g) < k < \frac{1}{2}(6-3g))$ or $(g > 6, \frac{1}{2}(6-3g) < k < \frac{1}{6}(6-7g))$.

Teniendo en cuenta que la solución es un punto fijo $x = x_0 = \lambda/\sqrt{2}$, entonces λ toma los siguientes valores: $\lambda = \pm\sqrt{g}$ para los puntos fijos $x_{1,2}$ y $\lambda = \pm\sqrt{6(1-k-g)}$ para $x_{3,4}$. Usando este resultado en la ecuación (3.44), a continuación, las desigualdades anteriores se traducen en las siguientes condiciones para g a fin de conseguir la estabilidad de la solución de (3.24)-(3.26):

$$\lambda_1 < 0: \quad 0 < g < 12 \quad (3.48)$$

$$\lambda_2 < 0: \quad g < 0 \text{ or } g > 12 \quad (3.49)$$

Para la segunda solución hemos utilizado las restricciones (3.27) en los parámetros de densidad, los acoplamientos cinéticos y Gauss-Bonnet como se define en (3.15). Tenga en cuenta que estos parámetros de densidad coinciden con los definidas como las variables dinámicas correspondientes en (3.40) (i.e. $k \equiv \Omega_k$ y $g \equiv \Omega_g$, tomando $\kappa^2 = 1$). Además, para obtener la solución (3.32) hemos considerado el ansatz:

$$\theta = \phi'^2 = \lambda^2 \quad (3.50)$$

donde nos hemos limitado al caso $\lambda^2 = 6$, lo que le da al potencial la forma

$$V = V_0 H^2 e^{-\alpha N}, \quad V_0 = -3(c_k + c_g) \quad (3.51)$$

De la ecuación (3.50) se sigue que

$$\phi = \phi_0 + \sqrt{6}N \quad (3.52)$$

Y por lo tanto la variable x se hace constante como se deduce de la definición $x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{2}H} = \frac{\phi'}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} = x_0$. Esto permite establecer que $x' = 0$. Haciendo $\phi_0 = 0$, podemos volver a expresar la variable N en términos de ϕ y el potencial de la forma: $V = V_0 H^2 e^{-\alpha\phi/\sqrt{6}}$, que de acuerdo con (3.40) produce $y = V_0 e^{-\alpha\phi/\sqrt{6}}$ y de (3.27): $k = c_k e^{-\alpha\phi/\sqrt{6}}$, $g = c_g e^{-\alpha\phi/\sqrt{6}}$. Haciendo uso de estos resultados, el sistema dinámico se reduce a las ecuaciones

$$y' = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}xy \quad g' = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}xg, \quad k' = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}xk \quad (3.53)$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que el único punto crítico es $(0, 0, 0)$ y la matriz de valores propios se convierte en una matriz diagonal con todos los valores propios iguales

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}x_0 = -\alpha \quad (3.54)$$

de lo que se deduce que el punto $(0, 0, 0)$ es un punto crítico estable (atractor) si $\alpha > 0$. Esto tiene sentido si vemos que en $t \rightarrow \infty$ (o $a \rightarrow \infty$) (como se desprende de la solución (3.33) de las restricciones discutidas en c_k y c_g), entonces $g \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 0$ para valores positivos de α , como se sigue de (3.27) y (3.51).

3.2.2. Estabilidad bajo perturbaciones escalares y tensoriales

El modelo presentado es un caso particular de la teoría Galileón generalizada [142, 143, 144, 145]. En [142] se presentan las condiciones para evitar las inestabilidades fantasma y de gradiente en la teoría generalizada del Galileón. Aquí nos basaremos en el análisis general de estabilidad presentado en [142] y lo aplicaremos al modelo (3.1), como caso especial en ausencia de materia.

El modelo generalizado del Galileón se puede escribir como [142] (setting $\kappa^2 = 1$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[K(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi, X) R + \frac{\partial G_4}{\partial X} ((\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2) \right. \\ \left. + G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{6} \frac{\partial G_5}{\partial X} [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 + 2(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3] \right] \quad (3.55)$$

donde $X = -\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi / 2$ y $(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3 = (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\nu \nabla^\sigma \phi)(\nabla_\sigma \nabla^\mu \phi)$. Para obtener el modelo (3.1) (con $S_m = 0$) utilizamos la siguiente correspondencia:

$$K(\phi, X) = -V(\phi) + X - 8 \frac{d^4 F_2}{d\phi^4} X^2 (3 - \ln X), \quad G_3 = -4 \frac{d^3 F_2}{d\phi^3} X (7 - 3 \ln X) \\ G_4 = \frac{1}{2} - 4 \frac{d^2 F_2}{d\phi^2} X (2 - \ln X), \quad G_5 = -\frac{\phi F_1(\phi)}{1 + \phi \frac{d(\ln F_1)}{d\phi}} + 4 \frac{dF_2}{d\phi} \ln X \quad (3.56)$$

donde el primer término en la expresión para G_5 da (hasta una derivada total) el acoplamiento cinético no mínimo como aparece en el tercer término de (3.1) (tenga en cuenta que $F_1 = 1$ con lleva a $G_5 = -\phi$) y todos los términos dependiendo de F_2 en (3.56) reproducen el acople GB de (3.1).

3.2.3. Perturbaciones tensoriales

La acción cuadrática para las perturbaciones tensoriales h_{ij} están dadas por (ver [142])

$$\delta^2 S_T = \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{G}_T \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} (\vec{\nabla} h_{ij})^2 \right) \quad (3.57)$$

donde

$$\mathcal{G}_T = 2 \left[G_4 - 2X \frac{\partial G_4}{\partial X} - X \left(H \dot{\phi} \frac{\partial G_5}{\partial X} - \frac{\partial G_5}{\partial \phi} \right) \right], \\ \mathcal{F}_T = 2 \left[G_4 - X \left(\ddot{\phi} \frac{\partial G_5}{\partial X} + \frac{\partial G_5}{\partial \phi} \right) \right] \quad (3.58)$$

a partir de (3.57) se deduce que las condiciones para evitar inestabilidades fantasmas y de gradiente bajo perturbaciones tensoriales se reducen a

$$\mathcal{G}_T > 0, \quad \mathcal{F}_T > 0 \quad (3.59)$$

Sustituyendo las soluciones (3.24)-(3.26) en (3.58), teniendo en cuenta las definiciones (3.56), podemos analizar las condiciones (3.59). La condición $\mathcal{G}_T > 0$ toma la forma

$$\mathcal{G}_T = 1 - 8g - \frac{k(\lambda^2 p^2 + 2\lambda p\phi + 4\phi^2)}{(\lambda p + 2\phi)^2} > 0 \quad (3.60)$$

Entonces el tensor fantasma desaparece si se satisface la desigualdad anterior, o si $g < 0$ y $k < 0$ (siempre que $\phi = \lambda p \ln t > 0$). Tenga en cuenta que para tiempos grandes $\mathcal{G}_T$ se comporta como

$$\mathcal{G}_T = 1 - 8g - k \quad (3.61)$$

que es también el límite *de Sitter* que tiene lugar en $p \rightarrow \infty$ (en este límite el parámetro EoS $w = -1 + \frac{2}{3p}$ toma el valor $w = -1$). Así que la condición $k < 1 - 8g$ garantiza la ausencia de inestabilidades fantasmas para tiempos grandes y en el límite *de Sitter*.

La condición para $\mathcal{F}_T$ está dada por

$$\mathcal{F}_T = 1 - \frac{8g}{p} + \frac{k(\lambda^2 p^2 + 2\lambda p\phi + 4\phi^2)}{(\lambda p + 2\phi)^2} > 0 \quad (3.62)$$

para tiempos grandes y en el límite *de Sitter* $\mathcal{F}_T$ se comporta respectivamente como

$$\mathcal{F}_T|_{t \rightarrow \infty} = 1 - \frac{8g}{p} + k, \quad \mathcal{F}_T|_{p \rightarrow \infty} = 1 + k \quad (3.63)$$

Al combinar las condiciones anteriores, evitar inestabilidades fantasmas y de gradiente bajo perturbaciones tensoriales impone las siguientes restricciones para tiempos

grandes:

$$p > 0, \quad g < \frac{p}{4+4p}, \quad \frac{8g-p}{p} < k < 1-8g \quad (3.64)$$

y en el límite *de Sitter* nos encontramos con las siguientes restricciones

$$g < \frac{1}{4}, \quad -1 < k < 1-8g \quad (3.65)$$

Otro resultado interesante se obtiene cuando despreciamos el acoplamiento cinético. Haciendo $k = 0$ en (3.60) y (3.62) de esto se sigue $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ se hacen constante iguales a

$$\mathcal{G}_T = 1-8g, \quad \mathcal{F}_T = 1 - \frac{8g}{p} \quad (3.66)$$

Así, en el caso particular sin acoplamiento cinético, el modelo está libre de inestabilidades fantasmas y de gradiente (independientemente del tiempo) bajo perturbaciones tensoriales, para la evolución de ley de potencia, siempre que g cumpla las restricciones

$$0 < p < 1, \quad g < p/8, \quad \text{or,} \quad p > 1, \quad g < 1/8 \quad (3.67)$$

Vamos a considerar la segunda solución dada por las ecuaciones (3.30) (con $\lambda^2 = 6$), (3.32)-(3.35) en la variable N . Para evaluar las condiciones (3.59) de esta solución, hacemos uso $d/dt = Hd/dN$ en las ecuaciones (3.56) y (3.58). En este caso las expresiones $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ están más involucradas, pero asumiendo $\alpha > 0$ se ha encontrado que para tiempos grandes (futuro infinito) $\mathcal{G}_T \rightarrow 1$ y $\mathcal{F}_T \rightarrow 1$ (independientemente de c_g and c_k), lo que indica que podemos esperar estabilidad bajo perturbaciones tensoriales en el futuro.

Por otro lado, si consideramos $\alpha < 0$ las condiciones de estabilidad tienen lugar en los primeros instantes. Sin embargo, estas apreciaciones corresponden a un comportamiento asintótico. Para dar un ejemplo numérico se analiza el modelo viable específico

de energía oscura (3.38), (3.39) que corresponde a $\eta_2 = 2$. Para simplificar el análisis numérico utilizamos las unidades $\kappa^2 = 1, H_0^2 = 1$. Como condición inicial vamos a suponer que el valor actual de la EOS es $w = -1$ y las constantes c_g, c_k y C están sujetos a la condición de planitud (aquí las constantes C se presenta en unidades de H_0^2).

Además podemos restringir las constantes c_g y c_k de tal forma que el término de *Stiff matter* ($\propto a^{-6}$) en la expresión para H desaparezca. Esto produce la relación

$$c_k = -\frac{3(g^2 - 8g)}{2(g - 6)}$$

El análisis numérico para los valores específicos de $c_g = 10^{-12}$ y $c_k = -2 \times 10^{-12}$ se resume en la figura (3.1) Para estos valores el modelo energía oscura describe con gran precisión un universo *de Sitter*, con EoS prácticamente constante, $w = -1$.

Vemos que la solución es estable bajo perturbaciones tensoriales durante diferentes épocas cosmológicas, incluyendo tiempos tardíos y la evolución futura, que van desde los $z \sim -0.98$, $\mathcal{F}_T$ tiende a valores negativos, indicando inestabilidades en el futuro lejano, cuando el Eos tiende a $w|_{z \rightarrow -1} = -3$.

3.2.4. Perturbaciones escalares

Una expresión similar para la acción cuadrática de las perturbaciones escalares ζ está dada por

$$\delta^2 S_S = \int dt d^3x a^3 \left(\mathcal{G}_S \dot{\zeta}^2 - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} (\vec{\nabla} \zeta)^2 \right) \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_S &= \frac{\Sigma}{\Theta^2} \mathcal{G}_T^2 + 3\mathcal{G}_T \\ \mathcal{F}_S &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{G}_T^2}{\Theta} \right) + H \frac{\mathcal{G}_T^2}{\Theta} - \mathcal{F}_T \end{aligned} \quad (3.69)$$

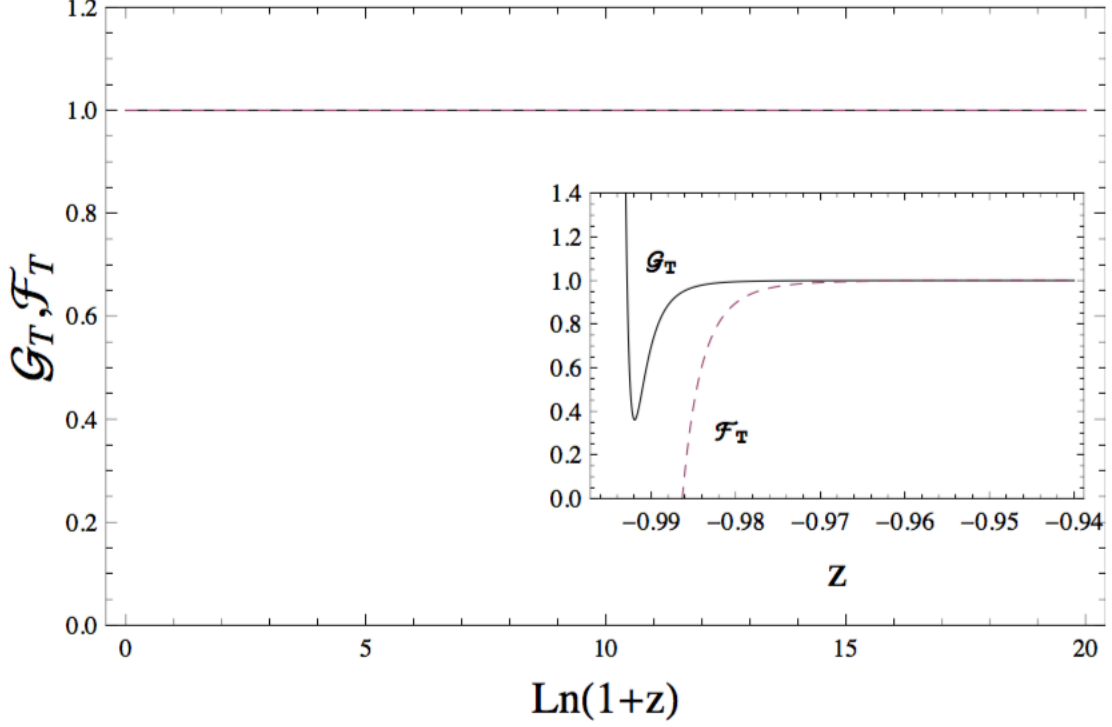


Figura 3.1: $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ versus $\ln(1+z)$, para $c_g = 10^{-12}$ y $c_k = -2 \times 10^{-12}$. Tenga en cuenta que $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ son prácticamente constantes e iguales a 1, durante todas las épocas cosmológicas. El gráfico interior muestra el comportamiento futuro de $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ para el corrimiento al rojo z en la región $(-0.99, -0.94)$. Tenga en cuenta que a partir de $z \sim -0.97$ los valores de $\mathcal{G}_T$, $\mathcal{F}_T$ comienzan a diferir de 1. Esta solución es estable bajo perturbaciones tensoriales para una amplia gama de desplazamientos al rojo

con Σ y Θ dados por

$$\begin{aligned}
\Sigma = & X \frac{\partial K}{\partial X} + 2X^2 \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} + 6H\dot{\phi}X \left(2\frac{\partial G_3}{\partial X} + X\frac{\partial^2 G_3}{\partial X^2} \right) - 2X \left(\frac{\partial G_3}{\partial \phi} + X\frac{\partial^2 G_3}{\partial \phi \partial X} \right) \\
& - 6H^2 G_4 + 6 \left[H^2 X \left(7\frac{\partial G_4}{\partial X} + 16X\frac{\partial^2 G_4}{\partial X^2} + 4X^2\frac{\partial^3 G_4}{\partial X^3} \right) \right. \\
& \left. - H\dot{\phi} \left(\frac{\partial G_4}{\partial \phi} + 5X\frac{\partial^2 G_4}{\partial \phi \partial X} + 2X^2\frac{\partial^3 G_4}{\partial \phi \partial X^2} \right) \right] + H^3\dot{\phi}X \left(30\frac{\partial G_5}{\partial X} + 26X\frac{\partial^2 G_5}{\partial X^2} \right. \\
& \left. + 4X^2\frac{\partial^3 G_5}{\partial X^3} \right) - 6H^2 X \left(6\frac{\partial G_5}{\partial \phi} + 9X\frac{\partial^2 G_5}{\partial \phi \partial X} + 2X^2\frac{\partial^3 G_5}{\partial \phi \partial X^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}\Theta = & -\dot{\phi}X\frac{\partial G_3}{\partial X} + 2H\left(G_4 - 4X\frac{\partial G_4}{\partial X} - 4X^2\frac{\partial^2 G_4}{\partial X^2}\right) + \dot{\phi}\frac{\partial G_4}{\partial \phi} \\ & + 2X\dot{\phi}\frac{\partial^2 G_4}{\partial \phi \partial X} - H^2\dot{\phi}\left(5X\frac{\partial G_5}{\partial X} + 2X^2\frac{\partial^2 G_5}{\partial X^2}\right) + 2HX\left(3\frac{\partial G_5}{\partial \phi} + 2X\frac{\partial^2 G_5}{\partial \phi \partial X}\right)\end{aligned}\quad (3.71)$$

Las inestabilidades fantasmas y de gradiente están ausentes siempre que

$$\mathcal{G}_S > 0, \quad \mathcal{F}_S > 0 \quad (3.72)$$

En el caso de la solución de (3.24)-(3.26), y haciendo uso de (3.56) y (3.69)-(3.71), se halla

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_S = & \left[3\left(4(8g+k-1)\ln^2(t) + 2(16g+k-2)\ln(t) \right. \right. \\ & + 8g+k-1\left.)\left(16(64g^2+8g(4k-1)-6k^2+3k-1)\ln^4(t) + 8(256g^2+8g(9k-4) \right. \right. \\ & - 15k^2+12k-4)\ln^3(t) + 4(384g^2+80gk-48g-21k^2+18k-6)\ln^2(t) \\ & + 2(256g^2+8g(9k-4)-15k^2+12k-4)\ln(t) + 64g^2+8g(4k-1)-6k^2+3k-1\left.)\right) \\ & \left. / \left[(2\ln(t)+1)^2(4(3k-1)\ln^2(t) + (6k-4)\ln(t) + 3k-1)^2\right] \right]\end{aligned}\quad (3.73)$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S = & \frac{3(-64g^2(p+1) + 8g(-2kp+k+2p+1) - k(4kp+k-2) - 1)}{3p(3k-1)} + \frac{4kp+k}{3p(2\ln(t)+1)} \\ & - \frac{k(4p+3)}{3p(2\ln(t)+1)^2} - \frac{8(1-12g)^2k((p+1)\ln(t)-1)}{3p(3k-1)[2\ln(t)((6k-2)\ln(t)+3k-2)+3k-1]} \\ & + \frac{4k}{3p(2\ln(t)+1)^3} - \frac{(16(1-12g)^2k((3k-2)\ln(t)+3k-1))}{3p(3k-1)[2\ln(t)((6k-2)\ln(t)+3k-2)+3k-1]^2}\end{aligned}\quad (3.74)$$

Para tiempo grandes, tomando el límite $t \rightarrow \infty$ en (3.73) y (3.74) hallamos

$$\mathcal{G}_S|_{t \rightarrow \infty} = \frac{3(8g+k-1)(64g^2+8g(4k-1)-6k^2+3k-1)}{(1-3k)^2} \quad (3.75)$$

y

$$\mathcal{F}_S|_{t \rightarrow \infty} = \frac{-1 + 2k - 64g^2(1+p) - k^2(1+4p) + 8g(1+k+2p-2kp)}{(-1+3k)p} \quad (3.76)$$

Así que la estabilidad bajo perturbaciones escalares para tiempos grandes es posible, con la condición de que $\mathcal{G}_S|_{t \rightarrow \infty} > 0$ y $\mathcal{F}_S|_{t \rightarrow \infty} > 0$. Tenga en cuenta que los mismos límites que se describen por las ecuaciones. (3.75) y (3.76) tienen lugar en los tiempos primitivos $t \rightarrow 0$, y por lo tanto las mismas condiciones garantizan la estabilidad en tiempos tempranos y tardíos.

Tomando el límite $p \rightarrow \infty$ en (3.76), se encuentra el límite *de Sitter*

$$\mathcal{F}_S|_{dS} = \frac{4(16g^2 - 4g + 4gk + k^2)}{1 - 3k} \quad (3.77)$$

Tenga en cuenta que $\mathcal{G}_S|_{t \rightarrow \infty}$ no depende de p . Por lo tanto la solución es estable bajo perturbaciones escalares en el límite *de Sitter* si g y k satisfacen las restricciones

$$(8g+k-1)(64g^2+8g(4k-1)-6k^2+3k-1) > 0, \quad 16g^2-4g+4gk+k^2 > 0, \quad 1-3k > 0 \quad (3.78)$$

Si despreciamos el acoplamiento cinético ($k = 0$), así que de (3.73) y (3.74) se halla que $\mathcal{G}_S$ y $\mathcal{F}_S$ son constantes dadas por

$$\mathcal{G}_S = 3 - 384g^2 + 1536g^3, \quad \mathcal{F}_S = \frac{1 + 64g^2(1+p) - 8g(1+2p)}{p} \quad (3.79)$$

Por lo tanto, en este caso, el modelo está libre de inestabilidades fantasmas y de gradiente (independientemente del tiempo) bajo perturbaciones escalares, por la evolución en ley de potencia, siempre que g satisfaga las restricciones de $p > 0$

$$3 - 384g^2 + 1536g^3 > 0, \quad 1 + 64g^2(1+p) - 8g(1+2p) > 0 \quad (3.80)$$

La expansión acelerada ocurre para $p > 1$, la cual junto como (3.80) conduce a las restricciones:

Para $1 < p \leq 1 + \sqrt{5}$

$$\frac{1}{16}(1 - \sqrt{5}) < g < \frac{1 + 2p}{16(1 + p)} - \frac{1}{16}\sqrt{\frac{4p^2 - 3}{(1 + p)^2}}, \text{ o, } g > \frac{1}{16}(1 + \sqrt{5}) \quad (3.81)$$

Para $p > 1 + \sqrt{5}$

$$(1 - \sqrt{5}) < g < \frac{1 + 2p}{16(1 + p)} - \frac{1}{16}\sqrt{\frac{4p^2 - 3}{(1 + p)^2}}, \text{ o, } g > \frac{1 + 2p}{16(1 + p)} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{4p^2 - 3}{(1 + p)^2}} \quad (3.82)$$

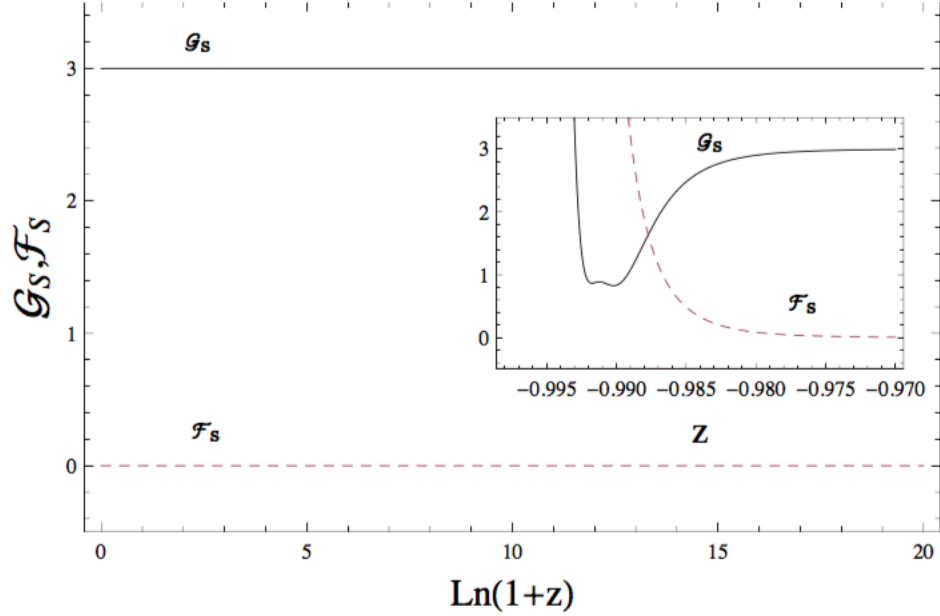


Figura 3.2: $\mathcal{G}_S$ and $\mathcal{F}_S$ versus $\ln(1+z)$, para $c_g = 10^{-12}$ y $c_k = -2 \times 10^{-12}$. Se determinó que $\mathcal{G}_S = 3$ y $\mathcal{F}_S = 0$ con una alta precisión durante una amplia gama de desplazamientos al rojo que cubre las épocas relevantes para la energía oscura. La gráfica interna muestra el comportamiento futuro de $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{F}_T$ para el corrimiento al rojo z en la región $(-0.99, -0.97)$. Tenga en cuenta que a partir de $z \sim -0.99$ los valores de $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{F}_S$ comenzarán a cambiar

En cuanto a la segunda solución (3.32), consideramos el caso $\eta_2 = 2$, pero las expresiones de $\mathcal{G}_S$ y $\mathcal{F}_S$ son expresiones demasiado extensas para presentarlas aquí. Se realizó el análisis numérico para el mismo caso particular considerado en las perturbaciones

tensoriales. En la figura (3.2) se resumen los resultados numéricos obtenidos para el estudio de estabilidad bajo perturbaciones escalares.

Los resultados numéricos demuestran que después de $z \sim -0.998$ la cantidad $\mathcal{G}_S$ se hace negativa y $\mathcal{F}_S$ comienza a aumentar a valores grandes positivos. En resumen, hemos encontrado que la solución está libre de inestabilidades fantasmas y de gradiente bajo perturbaciones escalares en un amplio rango de desplazamientos al rojo, que abarca diferentes épocas cosmológicas, incluyendo aquellas que son relevantes para la energía oscura.

3.3. Campo escalar y materia

Vamos a considerar el modelo completo con la contribución de sector de la materia. Combinando la ecuación de estado $p_m = w \rho_m$ con la ecuación de continuidad $\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0$, se obtiene la densidad de energía de la materia $\rho_m = \rho_{m0} e^{-3(1+w)N}$. Por lo general se supone que el sector de la materia está compuesto en su mayoría de materia no relativista con $w = 0$. En la variable e-folding N , la ecuación (3.3) toma la forma

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} H^2 \theta + V + 9H^4 F_1 \theta + 24H^4 \frac{dF_2}{dN} + \rho_{m0} e^{-3(1+w)N} \right] \quad (3.83)$$

y la ecuación de movimiento (3.11) permanece como la ecuación (3.29). Definiendo los mismos límites como se hizo antes, para determinar los acoplamientos cinéticos y GB, en la variable e-folding toman la forma

$$F_1 \theta = \frac{k}{H^2}, \quad \frac{dF_2}{dN} = \frac{g}{H^2} \quad (3.84)$$

Usando la definición de los parámetros de densidad, esto corresponde a límites cosmológicamente viables para los parámetros de densidad $\Omega_k = \text{const} = 3k$ y $\Omega_{GB} =$

$const = 8g$. Queda por determinar el potencial a fin de integrar las ecuaciones (3.83) y (3.29). Si exigimos que $\Omega_\phi = const$, entonces $\Omega_{DE} = const$ e independientemente del potencial, las soluciones corresponden a un régimen de scaling en el que la densidad de energía de la Energía Oscura imita la densidad de la materia ρ_m . De hecho, la condición $\Omega_\phi = const$ se puede lograr haciendo $\dot{\phi}^2 \propto H^2$ y $V \propto H^2$. Pero para tener una transición a expansión acelerada, podemos optar por restringir el potencial de tal manera que el término cinético en la ecuación de Friedmann (3.83) se comporte como $\dot{\phi}^2 \propto H^2$. La restricción

$$V + \rho_{m0}e^{-3(1+w)N} = 3\alpha H^2 \quad (3.85)$$

reduce la ecuación (3.83) a la forma

$$\theta = 6(1 - \alpha - 3k - 8g) = \theta_0 \quad (3.86)$$

donde $1 - \alpha - 3k - 8g > 0$. La integración de esta ecuación se obtiene el campo escalar como $\phi = \sqrt{\theta_0}N + \phi_0$. La presencia del término de materia (3.85) marca la diferencia con el comportamiento de scaling. El límite $V \rightarrow 0$ da lugar a soluciones de escala, y deberíamos esperar que en los tiempos primitivos el potencial escalar sea insignificante o sea proporcional a ρ_m . Si introducimos la densidad relativa de potencial $\Omega_V = V/(3H^2)$, entonces la restricción (3.85) es equivalente a $\Omega_V + \Omega_m = \alpha$. Por el contrario, podemos considerar (3.86) como un ansatz para el término cinético libre (i.e $\dot{\phi}^2/(6H^2) = const.$) (ver [141]) y se llega a la forma del potencial (3.85) para la ecuación de Friedmann (3.83). Como se verá, las restricciones (3.84) y (3.85) (o (3.84) y (3.86)) son buenas aproximaciones cosmológica de tiempo tardío. Reemplazando (3.84)-(3.86) en la ecuación de movimiento (3.11) se obtiene

$$(1 - k - 4g) \frac{dH^2}{dN} + 2(3 - 3\alpha - 6k - 20g) H^2 + (1 + w) \rho_{m0} e^{-3(1+w)N} = 0 \quad (3.87)$$

El cumplimiento de una de las dos condiciones $1 - k - 4g = 0$ o $3 - 3\alpha - 6k - 20g = 0$, da lugar a la solución $H^2 \propto e^{-3(1+w)N}$ que de acuerdo con (3.14) implicaría comportamiento de escala de la energía oscura. Solucionando (3.87) se obtiene

$$H^2 = H_0^2 \left(\eta \Omega_{m0} e^{-3(1+w)N} + \Omega_0 e^{-\gamma N} \right) \quad (3.88)$$

$$\eta = \frac{3}{6\alpha + 9k + 28g + 3w(1 - k - 4g) - 3}, \quad \gamma = 2 \frac{3\alpha + 6k + 20g - 3}{k + 4g - 1}$$

donde Ω_0 es la constante de integración y $\Omega_{m0} = \rho_{m0}/(3H_0^2)$ (H_0 es el valor actual del parámetro de Hubble). Tenga en cuenta que el término $\eta \Omega_{m0}$ puede ser interpretado como un parámetro efectivo de materia. La restricción(3.14) implica que $\eta \Omega_{m0} + \Omega_0 = 1$. De (3.85) el potencial escalar toma la forma

$$V = (\alpha\eta - 1)\rho_{m0}e^{-3(1+w)N} + 3\alpha H_0^2 \Omega_0 e^{-\gamma N} \quad (3.89)$$

Reemplazando la solución(3.88) en las ecuaciones (3.84), se encuentran las expresiones para los acoplamientos cinético y GB

$$F_1 = \frac{k}{\theta_0 H_0^2} \left(\eta \Omega_{m0} e^{-3(1+w)N} + \Omega_0 e^{-\gamma N} \right)^{-1} \quad (3.90)$$

donde θ_0 está dado por (3.86).

$$F_2 = \frac{g e^{\gamma N}}{\gamma \Omega_0 H_0^2} {}_2F_1 \left[-\frac{\gamma}{3w - \gamma + 3}, 1, \frac{3w - 2\gamma + 3}{3w - \gamma + 3}, -\frac{\eta \Omega_{m0} e^{-(3w - \gamma + 3)N}}{\Omega_0} \right] \quad (3.91)$$

Un caso interesante tiene lugar en la ecuación(3.89) cuando $\alpha\eta = 1$. En este caso, el término de materia en los potenciales desaparece, dando lugar al comportamiento

exponencial simple

$$V = 3\alpha H_0^2 \Omega_0 e^{-\gamma N} = 3\alpha H_0^2 \Omega_0 e^{-\gamma\phi/\sqrt{\theta_0}} \quad (3.92)$$

donde $-3\alpha = 9k + 28g + 3w(1 - k - 4g) - 3$ y se utilizó la solución para el campo escalar con $\phi_0 = 0$. Según la solución(3.88) y la ecuación de Friedmann (3.3) la densidad de energía oscura está dada por

$$\rho_{DE} = (\eta - 1) \rho_{m0} e^{-3(1+w)N} + 3\Omega_0 H_0^2 e^{-\gamma N} = (\eta - 1) \rho_{m0} (1 + z)^{3(1+w)} + 3\Omega_0 H_0^2 (1 + z)^\gamma \quad (3.93)$$

donde utilizamos la relación de corrimiento al rojo: $N = -\ln(1 + z)$. Es evidente que el campo escalar realiza un seguimiento de la materia oscura en los tiempos tempranos si $\gamma < 3(1 + w)$ (o más puntualmente si $\gamma < 0$, ya que en este caso el segundo término se vuelve insignificante para $z \gg 1$). Esta solución concuerda con el hecho de que durante la época de dominancia de materia $w_{DE} \sim w$. El primer término en (3.88) es un ajuste del parámetro inicial que aparece en la densidad lagrangiana de la materia debido a los términos de interacción, que interpretamos como un parámetro de la materia efectivo. Por lo tanto, es la cantidad $\eta\Omega_{m0}$ la que tiene que ser ajustada con los datos de observación y debe ser alrededor de 0.27.

Si $\eta = 1$, la energía oscura presenta un comportamiento *power-law* con EoS constante $w_{DE} = -1 + \gamma/3$. La condición $\gamma < 0$ en (3.93) da lugar a un comportamiento quintom, ya que permite la transición a la fase fantasma. En el caso importante de componente de materia oscura no relativista con $w = 0$, la ecuación de estado de la Energía Oscura que se deriva de(3.93) es

$$w_{DE} = -\frac{(1 - \eta\Omega_{m0})(3 - \gamma) e^{-\gamma N}}{3(1 - \eta\Omega_{m0})e^{-\gamma N} + 3(\eta - 1)\Omega_{m0} e^{-3N}} \quad (3.94)$$

el valor actual $w_{DE}(0) = w_0$ se puede escribir como

$$w_0 = \left(\frac{1 - \eta \Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}} \right) \left(-1 + \frac{\gamma}{3} \right) \quad (3.95)$$

El primer factor en esta ecuación clasifica la diferencia con respecto a una EoS constante, que es el caso para $\eta = 1$. De acuerdo con las observaciones actuales w_{DE} podría estar muy cerca de -1 ; por lo que al establecer $w_0 = -1$ en (3.95) obtenemos la relación

$$\gamma = \frac{3(1 - \eta) \Omega_{m0}}{1 - \eta \Omega_{m0}} \quad (3.96)$$

De otro lado, la transición de desaceleración a aceleración se produce en un corrimiento al rojo z_T cuando $w_{eff} = -1/3$. Evaluando $w_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}$ de (3.88), y haciendo $w_{eff}(z_T) = -1/3$ nos encontramos con otra relación

$$\eta = \frac{3(2 - \gamma)}{3(2 - \gamma) + \gamma(1 + z_T)^{3-\gamma}} \quad (3.97)$$

Donde hemos usado (3.96). Así, por ejemplo, teniendo $z_T = 0.7$ y $\gamma = -0.1$, se obtiene $\eta \approx 1.09$ y de (3.96), $\Omega_{m0} \approx 0.26$. Así, que las restricciones (3.84) y (3.85) permiten describir un escenario cosmológico viable.

Podemos considerar otra opción interesante para los acoplamientos cinéticos y GB, es decir, consideramos el ansatz de los parámetros de densidad

$$\Omega_k = c_k e^{-\lambda N}, \quad \Omega_{GB} = c_g e^{-\lambda N} \quad (3.98)$$

esto significa que Ω_k, Ω_{GB} escala como $a^{-\lambda}$, donde λ debe tomar un valor tal que garantice el dominio en tiempo temprano del sector de la materia y la más baja tasa de decaimiento de la energía oscura durante la expansión en el tiempo tardío. Con

esta elección la ecuación de Friedmann (3.83) se convierte en

$$3H^2 = \frac{1}{2}H^2\theta + V + 3(c_k + c_g)H^2e^{-\lambda N} + \rho_{m0}e^{-3(1+w)N} \quad (3.99)$$

y restringiendo el potencial a la forma

$$V + 3(c_k + c_g)H^2e^{-\lambda N} + \rho_{m0}e^{-3(1+w)N} = 3\alpha H^2, \quad (3.100)$$

reduce la ecuación (3.99) a: $\theta = \theta_0 = 6(1 - \alpha)$, where $0 \leq \alpha < 1$. Reemplazando (3.98), (3.100) y θ en la ecuación de movimiento (3.11) se obtiene

$$\begin{aligned} (3 - (c_k + 3c_g/2)e^{-\lambda N}) \frac{dH^2}{dN} + (18(1 - \alpha) + [2(3 + \lambda)c_k + 3(1 + \lambda)c_g]e^{-\lambda N}) H^2 \\ + 3(1 + w)\rho_{m0}e^{-3(1+w)N} = 0 \end{aligned} \quad (3.101)$$

A fin de simplificar la integración de esta ecuación tomamos $\alpha = \frac{24(c_g + c_k) + 3c_g\lambda + 2c_k\lambda}{6(3c_g + 2c_k)}$, y teniendo en cuenta el importante caso de la materia no relativista sin presión $w = 0$, hallamos

$$H^2 = \frac{6\sigma_1\rho_{m0}(1+z)^3}{(6 - \sigma_1(1+z)^\lambda)\sigma_2} + \frac{C(1+z)^{-2\sigma_3/\sigma_1+\lambda}}{6 - \sigma_1(1+z)^\lambda} \quad (3.102)$$

Donde hemos usado la relación $N = -\ln(1+z)$, y $\sigma_1 = 3c_g + 2c_k$, $\sigma_2 = 3c_g(\lambda + 5) + 2c_k(\lambda + 9)$ and $\sigma_3 = 3c_g(\lambda + 1) + 2c_k(\lambda + 3)$. Usando este resultado y la ecuación(3.84) nos encontramos con las siguientes expresiones para los acoplamientos cinéticos y GB

$$F_1 = \left(\frac{k}{\theta_0}\right) \frac{6 - \sigma_1e^{-\lambda N}}{\frac{6\sigma_1}{\sigma_2}\rho_{m0}e^{-3N} + Ce^{(2\sigma_3/\sigma_1-\lambda)N}}, \quad (3.103)$$

donde $\theta_0 = 6(1 - \alpha)$, y

$$F_2 = \frac{6\rho_{m0}e^{-(3-\lambda)N}}{(3-\lambda)\sigma_2} {}_2F_1\left[1, \frac{\lambda-3}{\lambda}, 2 - \frac{3}{\lambda}, \frac{6e^{\lambda N}}{\sigma_1}\right] - \frac{Ce^{2\sigma_3N/\sigma_1}}{2\sigma_3} {}_2F_1\left[1, \frac{2\sigma_3}{\lambda\sigma_1}, 1 + \frac{2\sigma_3}{\lambda\sigma_1}, \frac{6e^{\lambda N}}{\sigma_1}\right] \quad (3.104)$$

Tenga en cuenta que la solución (3.102) tiene sentido sólo si $\lambda < 0$. En este caso, en los primeros instantes ($z \rightarrow \infty$), el parámetro de Hubble se comporta como $H^2 \sim (\sigma_1/\sigma_2)\rho_{m_0}(1+z)^3 + (C/6)(1+z)^{\lambda-2\sigma_3/\sigma_2}$. El primer término es el término usual de materia y el segundo término se comporta como $(1+z)^{\lambda-2\sigma_3/\sigma_2}$. Así que para mantener el dominio en cuestión en los primeros tiempos es suficiente la condición $\lambda - 2\sigma_3/\sigma_2 < 2$, que satisface la restricción de núcleo síntesis (con constante apropiada C) sobre la energía oscura en la cosmología temprana.

Un hecho interesante de la solución (3.102) es la existencia de una singularidad a futuro en el corrimiento al rojo $z_s = (6/\sigma_1)^{1/\lambda} - 1$, donde σ_1 debe satisfacer la desigualdad $0 < (6/\sigma_1)^{1/\lambda} < 1$ con el fin de tener la singularidad en el futuro. Es fácil de ver desde (3.102) que en este punto $\dot{H} \rightarrow \infty$, que junto con la singularidad en el parámetro Hubble significan que la densidad de energía y la presión tienden a infinito en z_s . Por definición, en este punto $a = 1/(z_s + 1)$ es infinito, así que tenemos una singularidad de tipo III ([137], [146]).

Tenga en cuenta también que a partir de las ecuaciones. (3.103) y (3.104), se deduce que el acoplamiento cinético desaparece ($F_1 \rightarrow 0$) y el acople de GB diverge en el punto singular z_s . De la ecuación (3.102), la ecuación de estado de la energía oscura está dada por (asumiendo la materia sin presión)

$$w_{DE} = \frac{(1+z)\frac{d\tilde{H}^2}{dz} - 3\tilde{H}^2}{3\tilde{H}^2 - 3\Omega_{m0}(1+z)^3} \quad (3.105)$$

Donde $\tilde{H} = H/H_0$ and H_0 es el valor actual del parámetro de Hubble. Como ejemplo, un conjunto de parámetros que satisfacen todas las restricciones discutidas anteriormente es: $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 18$, $\sigma_3 = 1$, $\lambda = -1/4$, $\Omega_{m0} = 0.27$, $\tilde{C} = 0.92$, y la constante C se relaciona con los otros parámetros a través de la condición de planitud:

$\tilde{C} = C/H_0^2 = 6 - \sigma_1 - 18\sigma_1\Omega_{m0}/\sigma_2$. Para este conjunto de parámetros, en etapas tempranas $w_{DE}|_{z \rightarrow \infty} = 0$, lo que significa que en los tiempos iniciales la energía oscura imita el comportamiento de la materia usual (dominancia de materia en tiempos tempranos) como se sigue a partir de (3.102). El valor actual de la EoS de la Energía Oscura es $w_{DE}(0) \approx -1.02$, y el valor asintótico en un futuro lejano es $w_{DE}|_{z \rightarrow \infty} = -1 - 1/6$. La singularidad futura de tipo III tiene lugar para $z_s \approx -0.8$. Tenga en cuenta que si bien la singularidades de tipo III son más débiles que las singularidades Big RIP, en algunos casos se puede extender la evolución más allá de esta singularidad [147, 147, 148], en el caso concreto examinado aquí, aunque la densidad se convierte en finita después de la singularidad, también llega a ser negativa (i.e $H^2 < 0$ para $t > t_s$), lo cual hace que sea imposible para el Universo evolucionar más allá de esta singularidad. Por lo tanto, se puede distinguir un escenario de la singularidad de tipo III, que es más fuerte en el sentido de que la evolución más allá de ella, no es físicamente permitida.

3.4. Discusión

Hemos estudiado el problema de la energía oscura en el contexto del modelo escalar-tensorial, con acoplamientos cinético y GB que contribuyen a la densidad total de energía. Mediante la imposición de restricciones motivadas físicamente sobre los parámetros de densidad que implican los términos de interacción, hemos simplificado significativamente las ecuaciones cosmológicas y se han obtenido soluciones viables exactas, compatibles con la fenomenología actual de la energía oscura.

Como criterio para fijar los acoplamientos se han tomado los límites asintóticos del modelo. Así, en ausencia de potencial, en el límite de la anulación de la derivada temporal del campo escalar ($\dot{\phi} \sim 0$) sugiere la restricción (3.13) impuesta sobre el

acoplamiento GB.

Despreciando el término cinético ($F_2 \rightarrow 0$, $V \rightarrow 0$) sugiere una restricción cosmológicamente viable para el acoplamiento cinético (3.20). El límite ($F_1 \rightarrow 0$, $F_2 \rightarrow 0$, $V \rightarrow 0$) propone un comportamiento del término cinético (3.18) que es suficientemente general para obtener escenarios cosmológicos interesantes.

Las restricciones en los términos de interacción son también equivalentes a tomar constantes los respectivos parámetros de densidad, i.e. $\Omega_k = \text{const}$ y $\Omega_{GB} = \text{const}$ (ver (3.15)), que son límites razonables para un universo de tiempo tardío. Estas restricciones en el caso de dominancia de campo escalar, conducen a acoplamientos exponenciales característicos de la expansión a baja energía α' de la teoría de cuerdas [139, 140, 149].

En el caso más realista con la presencia de la materia, las restricciones (3.15) (o (3.84)) conduce a soluciones (3.88) con la energía oscura que mantiene un registro de la dominancia de materia temprana y que contiene fases tardías de dominancia de quintaesencia y fantasmas. En este caso, para mantener el comportamiento del término cinético de la forma $\dot{\phi} \propto H^2$, se restringe el potencial escalar de acuerdo con la expresión (3.85), que conduce a un comportamiento exponencial (3.91)-(3.92).

Otra de las expresiones cosmológicamente viables para los acoplamientos cinético y GB se obtienen mediante la imposición comportamiento del tipo scaling $a^{-\lambda}$ a los parámetros de densidad correspondientes, i.e. $\Omega_k \propto a^{-\lambda}$ and $\Omega_{DE} \propto a^{-\lambda}$, donde se consideró la misma potencia a fin de encontrar soluciones analíticas exactas.

En todas las soluciones consideradas en el capítulo 3, el comportamiento de escala de la energía cinética es el mismo que el de la densidad total de energía, i.e. $\dot{\phi}^2 \propto H^2$,

que en ausencia de interacciones corresponde a un límite conforme del modelo (un modelo escalar cinético puramente libre es conforme invariante).

Capítulo 4

Soluciones Big RIP y Little RIP

Uno de los aspectos interesantes de los modelos escalar-tensoriales es el hecho de que pueden contener soluciones tipo quintom, es decir que pueden describir la fase de quintaesencia ($w > -1$) y la consiguiente transición a la fase phantom ($w < -1$). Los datos observacionales actuales no descartan una ecuación de estado de la energía oscura por debajo del límite de la constante cosmológica, lo cual hace importante el estudio de modelos que reproduzcan una fase phantom. Cuando el universo es dominado por la componente de energía phantom, el factor de escala comienza a crecer hasta que diverge en un tiempo finito, lo cual es conocido como singularidad. En este capítulo analizaremos escenarios cosmológicos tipo quintom, tanto con singularidades como sin singularidades Big RIP. Hallamos que bajo una elección específica del acople de Gauss-Bonnet el modelo se simplifica considerablemente, dando lugar a soluciones donde el término cinético es proporcional al cuadrado del parámetro de Hubble. Esto permite la reconstrucción del modelo para una solución cosmológica adecuada. Se considera una solución de la ecuación de estado, acorde el comportamiento de las observaciones, en la que la singularidad del tipo Big RIP puede o no estar presente, dependiendo de la elección de los parámetros de la solución. También se estudian

otros escenarios de evolución conocidos como Little RIP, donde se tiene expansión tipo phantom pero no hay singularidades en tiempo finito.

4.1. Singularidades futuras

Cuando la ecuación de estado de la Energía Oscura toma un valor menor que -1 , el Universo puede alcanzar una singularidad en tiempo finito conocida como Big RIP. Esto corresponde a la violación de la condición de energía conocida como energía nula, dada por $\rho + P \geq 0$. De acuerdo a la referencia [137], existen varios tipos de singularidades en tiempo finito que se clasifican de acuerdo al comportamiento de la presión, la densidad y el parámetro de escala. La singularidad Big RIP, es llamada de tipo I y tiene el siguiente comportamiento:

$$(I) \text{ Tipo I: } a \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad |P| \rightarrow \infty, \quad \text{cuando, } t \rightarrow t_s \quad (4.1)$$

Se han estudiado singularidades considerando ρ y $\rho + 3P > 0$ [150, 151], con ecuación de estado $P = -\rho_d - A\rho^\alpha$ [152], suponiendo una viscosidad mayor en el fluido cósmico [153], considerando el parámetro de desaceleración, derivadas de orden superior del factor de escala [154] y para un gas de Chaplygin phantom generalizado [155]; todos estos para un tiempo finito, incluso cuando no se viole la condición de energía nula. Barrow en [151], halla una singularidad futura súbita (sudden future singularity) caracterizada por:

$$(II) \text{ Tipo II: } a \rightarrow a_s, \quad \rho \rightarrow \rho_s, \quad |P| \rightarrow \infty, \quad \text{cuando, } t \rightarrow t_s \quad (4.2)$$

Otros tipos de singularidades futuras son:

$$(III) \text{ Tipo III: } a \rightarrow a_s, \rho \rightarrow \infty, |P| \rightarrow \infty, \text{ cuando, } t \rightarrow t_s \quad (4.3)$$

$$(IV) \text{ Tipo IV: } a \rightarrow a_s, \rho \rightarrow 0, |P| \rightarrow 0, \text{ cuando, } t \rightarrow t_s \quad (4.4)$$

En la singularidad de tipo IV, además las derivadas de orden superior de H divergen.

Considerando un fluido para el que la presión y la densidad estén relacionados por:

$$P = -\rho - f(\rho) \quad (4.5)$$

Donde $f(\rho)$ es una función de la densidad ρ , se pueden asumir diferentes formas para $f(\rho)$. Por ejemplo en [156] se tomó $f(\rho) \propto \rho^\alpha$ en el contexto de una cosmología inflacionaria. Al sustituir la ecuación (4.5) en la ecuación de continuidad (2.7), se determina el factor de escala:

$$a = a_0 \exp \left[\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{f(\rho)} \right] \quad \text{donde } a_0 \text{ es una constante} \quad (4.6)$$

Si el fluido es dominante en un Universo FLRW, entonces de la ecuación (2.4) se tiene que $H^2 = \kappa^2 \rho$ así que el tiempo se puede expresar como:

$$t = \int \frac{\rho}{\kappa \sqrt{3} \rho f(\rho)} \quad (4.7)$$

Como ejemplo de una singularidad de tipo II, consideremos la siguiente función

$$f(\rho) = A (\rho_0 - \rho)^{-\gamma} \quad (4.8)$$

Donde A , ρ_0 y γ son constantes positivas. Tomando el límite $\rho \rightarrow \rho_0$, se tiene que $|P| \rightarrow \infty$, dado que $f(\rho)$ diverge. Así que de la ecuación (4.6), se tiene que el factor

de escala toma la forma:

$$a = a_0 \left[-\frac{(\rho_0 - \rho)^{-\gamma}}{3 A (\gamma + 1)} \right] \quad (4.9)$$

De donde se puede ver que: si $\rho \rightarrow \rho_0$, $a \rightarrow a_0$. Puesto que el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a \propto \sqrt{\rho}$ es finito, la cantidad $\dot{a}$ es finita. En tanto que la segunda derivada $\ddot{a}$ es divergente cuando $\rho \rightarrow \rho_0$, dado que la presión P diverge, como se puede observar en la ecuación (2.6). La relación (4.7) se determina la siguiente relación, en el caso en que $\rho \sim \rho_0$

$$t \simeq t_s - \frac{(\rho_0 - \rho)^{\gamma+1}}{\kappa A \sqrt{3 \rho_0 (\gamma + 1)}} \quad (4.10)$$

Donde t_s es una constante de integración, se tiene que $t \rightarrow t_s$ cuando $\rho \rightarrow \rho_0$. De acuerdo a (4.2), la función (4.8) genera una singularidad tipo II. La ecuación de estado está dada por

$$w = \frac{P}{\rho} = -1 - A \frac{A}{\rho (\rho - \rho_0)^\gamma} \quad (4.11)$$

Por lo tanto $w > -1$ para $A < 0$ y $\rho < \rho_0$, lo cual indica que la singularidad súbita está presente incluso para energía oscura no phantom ($w > -1$).

En la referencia [137], se encontró que las correcciones cuánticas procedentes de anomalía conforme pueden moderar las singularidades en tiempo finito.

4.2. Soluciones con y sin singularidades Big RIP

Continuamos estudiando las soluciones de las ecuaciones (3.9) y (3.11), en un caso muy importante en el cual el potencial está ausente. (i.e. $V = 0$), lo cual conlleva a que los dos acoples $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$ sean grados de libertad que describen la dinámica cosmológica. Tomando $\dot{\phi}^2 = \psi$, de la ecuación (3.9) con $V = 0$, se sigue que:

$$F_1 \psi = \frac{1}{3} - \frac{\psi}{18 H^2} + \frac{8}{3} H \frac{dF_2}{dt} \quad (4.12)$$

reemplazando en (3.11) y luego de realizar las simplificaciones adecuadas, se obtiene:

$$H \frac{d\psi}{dt} + 6H^2\psi - \psi \frac{dH}{dt} + 48H^3 \frac{dH}{dt} \frac{dF_2}{dt} + 72H^5 \frac{dF_2}{dt} + 24H^4 \frac{d^2 F_2}{dt^2} + 12H^2 \frac{dH}{dt} + 18H^4 = 0 \quad (4.13)$$

aquí se ha tomado $\kappa^2 = 1$. Considerando el acople de Gauss-Bonnet propuesto en [109]

$$\frac{dF_2(t)}{dt} = \frac{g}{H(t)} \quad (4.14)$$

Reemplazando (4.14) en (4.13) se obtiene

$$H \frac{d\psi}{dt} + 6H^2\psi - \psi \frac{dH}{dt} + 12(2g+1)H^2 \frac{dH}{dt} + 18(4g+1)H^4 = 0 \quad (4.15)$$

Una solución cosmológica viable de tiempo tardío, muy interesante es la siguiente:

$$H(t) = \frac{p}{t} + \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \eta} \quad (4.16)$$

donde p, β, η son constantes adimensionales y α, γ son constantes con dimensión de inverso del tiempo.

En etapas temprana del Universo, el primer término domina, dando lugar a un comportamiento tipo *power law*: $H \sim p/t$. En etapas tardías del Universo, el segundo término ofrece una alternativa interesante a la constante cosmológica puesto que se comporta como α/γ , lo cual se corresponde con el comportamiento cosmológico actual. Dependiendo de los signos de γ y η se pueden presentar singularidades del tipo Big RIP.

Integrando con respecto al tiempo, se determina el parámetro de escala:

$$a(t) = t^p e^{\alpha t/\gamma} (\gamma t + \eta)^{\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\alpha \eta}{\gamma^2}} \quad (4.17)$$

Obsérvese que en $t = 0$, $a = 0$ lo cual indica que la solución puede contener la época de inflación. La ecuación (4.15) se simplifica sustancialmente si elegimos el valor de la constante $g = -3/4$, obteniéndose que la función $\psi(t) = 6 H^2(t)$ satisface la ecuación para cualquier $H(t)$ dado. Por tanto, para $H(t)$ dado por la ecuación (4.16) se obtiene la solución

$$\psi(t) = 6 \left(\frac{p}{t} + \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \eta} \right)^2 \quad (4.18)$$

Donde se ha simplificado la solución haciendo la constante de integración igual a cero.

Integrando la raíz cuadrada de ψ se obtiene el campo escalar

$$\phi(t) = \sqrt{6} \left(\frac{\alpha t}{\gamma} + p \ln(t) + \frac{(\beta \gamma - \alpha \eta) \ln(\gamma t + \eta)}{\gamma^2} \right) \quad (4.19)$$

Si los parámetros en (4.16) están relacionados por $\beta \gamma - \alpha \eta = 0$, entonces el campo escalar se simplifica y la función de Hubble toma la forma $H = p/t + \beta/\eta$, lo cual ya ha sido considerado en [146]. El acople de Gauss-Bonnet se obtiene de (4.14)

$$F_2(t) = -\frac{3}{4} \left[\frac{\gamma t}{\alpha} + \frac{(\gamma A - \alpha \beta \eta - 3p\alpha\gamma\eta)}{\alpha^2 \sqrt{4p\alpha\eta - A}} \arctan \left[\frac{2\alpha t + \gamma p + \beta}{\sqrt{4p\alpha\eta - A}} \right] \right] - \frac{3}{8\alpha^2} (\alpha \eta - p\gamma^2 - \beta \gamma) \ln(\alpha t^2 + (\beta + p\gamma)t + p\eta) \quad (4.20)$$

donde $A = \beta^2 + 2p\beta\gamma + p^2\gamma^2$. El término cinético que se obtiene de (4.12) es

$$F_1(t) = -\frac{1}{3} \left(\frac{p}{t} + \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \eta} \right)^{-2} \quad (4.21)$$

La ecuación de estado (EoS) efectiva se obtiene de la solución (4.16)

$$w_{eff} = -1 + \frac{2[(p\gamma^2 + \beta\gamma - \alpha\eta)t^2 + 2p\gamma\eta t + p\eta^2]}{3(\alpha t^2 + (p\gamma + \beta)t + p\eta)^2} \quad (4.22)$$

Esta EoS tiene dos límites importantes:

$$\lim_{t \rightarrow 0} w_{eff}(z) = -1 + \frac{2}{3p} \quad (4.23)$$

En particular el valor $p = 2/3$ produce el conocido régimen de dominancia de materia. En etapas tardías ($t \rightarrow \infty$), de acuerdo a la ecuación (4.16) el Universo tiende a estar dominado por la constante cosmológica y termina en una fase de Sitter $w_{eff} = -1$.

Podemos usar los parámetros que aparecen en (4.16) para alcanzar un comportamiento acorde con las observaciones astrofísicas. Normalizando el tiempo cosmológico con el tiempo actual, lo cual corresponde $t = t_0 = 1$ y tomando el valor actual de la EoS $w_{eff}(1) = w_0 = -1$ (la cual de acuerdo a las observaciones actuales es muy cercana a -1) se llega a las siguientes restricciones para los parámetros

$$p(\gamma + \eta)^2 + \beta\gamma - \alpha\eta = 0 \quad (4.24)$$

De igual forma se puede normalizar el parámetro de escala $a(t)$ de tal forma que $a(1) = 1$. Lo cual produce la restricción:

$$\beta = \alpha \left(\frac{\eta}{\gamma} - \frac{1}{\ln(\eta + \gamma)} \right) \quad (4.25)$$

Estas dos restricciones permite expresar la EoS en términos de los tres parámetros p , η y γ , de la siguiente forma

$$w_{eff} = -1 - \frac{2\gamma^4\eta((2\gamma+\eta)t+\eta)(t-1)}{3p[(\gamma+\eta)^2(\gamma t+\eta)t\log(\gamma+\eta)+\gamma\eta(\gamma-(2\gamma+\eta)t)]^2} \quad (4.26)$$

La transición desde la fase con desaceleración a la fase acelerada tiene lugar cuando $w_{eff}(t_{tr}) = -1/3$, la cual genera la siguiente expresión para determinar el tiempo de transición t_{tr} para valores dados de p , γ y η

$$p[\eta\gamma^2 - \eta\gamma(2\gamma+\eta)t_{tr} + (\gamma+\eta)^2\ln(\gamma+\eta)(\gamma t_{tr}+\eta)t_{tr}]^2 = \gamma^4\eta((2\gamma+\eta)t_{tr}+\eta)(1-t_{tr}) \quad (4.27)$$

Aquí se han reemplazado α y β de (4.24) y (4.25). Existe una fase más, presente en la solución, la cual de acuerdo con la restricción (4.24) tiene lugar en la actualidad: la transición a fase *phantom*, delimitada por $w_0 = -1$. Podemos esperar que para $t > 1$ la EoS tome valores $w_{eff} < -1$. Una característica importante de la EoS es que no decrece monótonamente con el tiempo, pero tiene un mínimo en t_{min} que satisface:

$$\ln(\gamma+\eta)(\gamma(2\gamma+\eta)t_{min}^3 - 3\gamma^2t_{min}^2 - 3\gamma\eta t_{min} - \eta^2) + \gamma\eta = 0 \quad (4.28)$$

Como se puede observar en el ejemplo numérico, este mínimo ocurre por debajo de la barrera phantom, es allí cuando la EoS inicia su aumento hacia el valor $w_0 = -1$ a medida que $t \rightarrow \infty$.

En la solución (4.16) se pueden diferenciar dos casos interesantes: (i) si consideramos que γ y η son positivos, la evolución de la constante cosmológica evita las singularidades Big RIP y por el contrario, (ii) si se considera $\gamma < 0$, la evolución de tiempo tardío produce singularidades Big RIP.

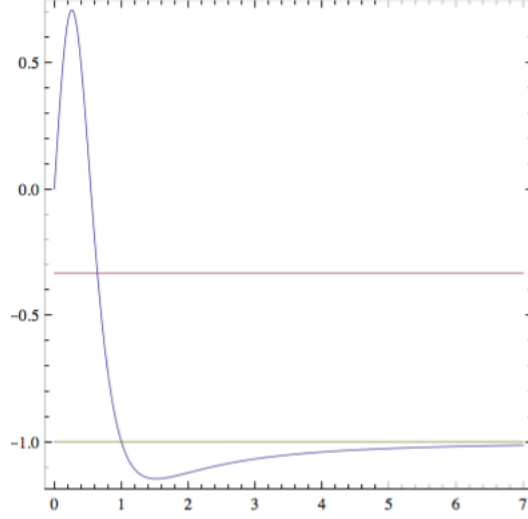


Figura 4.1: La EoS efectiva para $p = 2/3, \gamma = 0.93, \eta = 0.8$. Obsérvese la presencia de las tres fases: dominancia de materia (fase desacelerada) por encima de la línea $w_{eff} = -1/3$, la fase acelerada-quintaesencia entre las $w_{eff} = -1/3$ y $w_{eff} = -1$, y la fase phantom por debajo de la línea $w_{eff} = -1$

Tomando por ejemplo $p = 2/3$ y usando (4.24) y (4.25), se determina el valor de la EoS de tal forma que en $t = 1$ cruce la barrera *phantom*, donde γ y η se ajustan apropiadamente para determinar el tiempo de transición desaceleración-aceleración, de acuerdo a la ecuación (4.26).

Tomando por ejemplo los valores $\gamma = 0.93$ y $\eta = 0.8$, usando las ecuaciones (4.24)-(4.28) se halla $t_{tr} \sim 0.64$ y $t_{min} \sim 1.5$. En la figura (4.1) se observa el comportamiento de la EoS en este caso.

Un aspecto importante de esta solución es que a pesar de que el Universo entra en una fase phantom, sin embargo la densidad de energía permanece finita como se puede observar en el comportamiento de la función de Hubble (4.16). Un comportamiento similar de la EoS en un modelo quintom con campo espinorial ha sido reportado en [157].

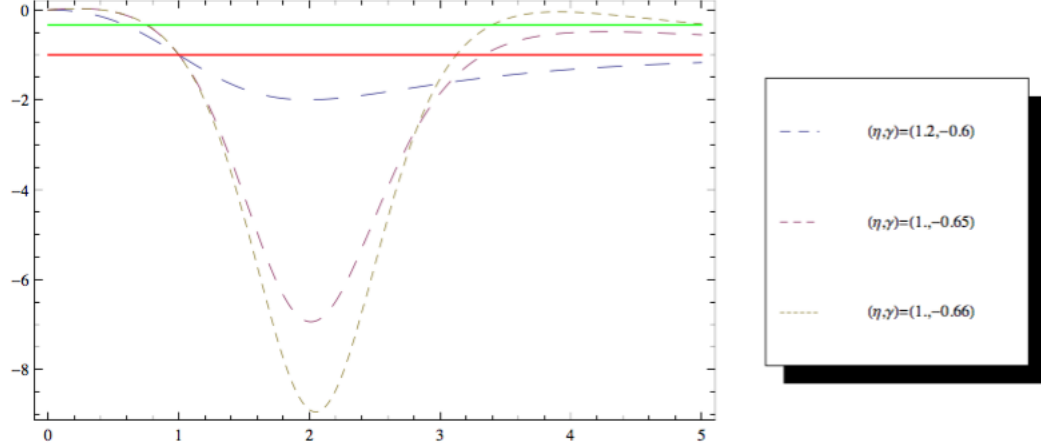


Figura 4.2: La EoS efectiva para $p = 2/3$ y diferentes valores de (η, γ) : $(1.2, -0.6)$, $(1, -0.65)$, $(1, -0.66)$. A pesar de la singularidad Big Rip, la EOS tiene un comportamiento suave. La curva $(1, -0.66)$ regresa de nuevo a la fase acelerada, entrando de nuevo en la fase acelerada-quintaesencia en el futuro lejano. Tenga en cuenta que la singularidad Big Rip puede retrasarse haciendo $t_s = -\eta/\gamma$ mayor.

4.2.1. Singularidades Big RIP

De acuerdo a la solución (4.16) la singularidad futura Big RIP ocurre siempre que $\gamma < 0$. Así que, definimos $t_s = -\eta/\gamma$ como el tiempo en el que la singularidad Big RIP es alcanzada. De la ecuación (4.16) se tiene que cuando $t \rightarrow t_s$, $H \rightarrow \infty$ y $\dot{H} \rightarrow \infty$, lo que significa que $\rho_{eff} \rightarrow \infty$, $p_{eff} \rightarrow \infty$, y de la ecuación (4.17) $a \rightarrow \infty$.

En la figura (4.2) se muestra la EoS para diferentes casos con singularidad Big RIP, mostrando diferentes comportamientos de la EoS dependiendo de los valores de γ y η . Así que, el parámetro de Hubble dado por (4.26) conlleva singularidad (4.2), dependiendo de los valores de γ y η . Si $\eta = -3\gamma$, entonces la singularidad Big RIP ocurre en $t_s = 3$, i.e. aproximadamente $28 Gys$. a partir de ahora.

Vale la pena señalar que la única singularidad futura en a , H y $\dot{H}$ ocurre simultáneamente en $t \rightarrow t_s = -\eta/\gamma$ ($\gamma < 0$), cuando $\rho \rightarrow \infty$ y $|p| \rightarrow \infty$, lo cual excluye las singularidades de tipo III de acuerdo a la clasificación dada por [137] la cual requiere

que $a_s \neq 0$ finito cuando $t \rightarrow t_s$. La singularidad tipo II, requiere a y ρ finitos, mientras que $|p| \rightarrow \infty$ lo cual no puede ser alcanzado en la presente solución.

De otro lado, resolviendo simultáneamente las ecuaciones $H = 0$ y $\dot{H} = 0$ (manteniendo $\gamma < 0$ se puede hallar un tiempo finito t_s (en términos de los parámetros α , β , γ y η) cuando $\rho \rightarrow 0$ y $|p| \rightarrow 0$ y la EoS diverge. Sin embargo, en este tiempo (t_s) las derivadas de orden superior de H permanecen finitas, no hay singularidad de tipo IV tal como se describe en [137]

4.3. Soluciones Little RIP

En las nuevas soluciones conocidas como Little RIP, ni el factor de escala ni la densidad de energía se hacen infinitas en un tiempo finito. Como en la singularidad Big RIP, tales soluciones tienen como efecto la desintegración de la estructura en un tiempo finito, el cual puede ser anterior o posterior que en el modelo con Big RIP [158, 159, 160].

Consideremos el comportamiento de parámetro de Hubble

$$H(t) = H_0 e^{ht} \quad (4.29)$$

donde h es una constante positiva. Integrando esta ecuación hallamos el parámetro de escala:

$$a(t) = a_0 e^{e^{ht}} \quad (4.30)$$

El cual conlleva a un comportamiento de la densidad como $\rho \propto (\ln a)^2$, este aumenta con el aumento de a .

De la ecuación (4.29) se sigue que $\dot{H} > 0$, lo cual reproduce una fase super acelerada libre de singularidades futuras. Las propiedades de disolución de las estructuras de este tipo de soluciones se presenta en [160].

En el marco del presente modelo podemos reconstruir los acoples y el campo escalar, de acuerdo con la solución (4.28). Reemplazando esta solución en (4.15) se obtiene (en el caso de $g = -3/4$)

$$\psi(t) = 6 H_0^2 e^{2ht} + C e^{-\frac{6 H_0 e^{ht}}{h} + ht} \quad (4.31)$$

Donde C es la constante de integración. El campo escalar esta dado por:

$$\phi(t) = \int (6 H_0^2 e^{2ht} + C e^{-\frac{6 H_0 e^{ht}}{h} + ht})^{1/2} dt \quad (4.32)$$

Haciendo $C = 0$, el campo escalar toma la forma simplificada $\phi = \sqrt{6} H_0 e^{ht}/h$. El acople de GB, como se sigue de (4.14) está dado por:

$$F_2(t) = \frac{3}{4 H_0 h} e^{-ht} \quad (4.33)$$

El acople cinético se toma de (4.12) y en el caso que $C = 0$, se tiene

$$F_1(t) = -\frac{1}{3 H_0^2} e^{-2ht} \quad (4.34)$$

En términos del campo escalar los acoples cinético y de GB están dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} F_1(\phi) &= -\frac{2}{h^2} \phi^{-2} \\ F_2(\phi) &= \frac{3\sqrt{6}}{4 h^2} \phi^{-1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Retomando el acople Newtoniano ($\kappa^2 = 8\pi G$), hallamos el modelo reconstruido

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{2}{\kappa^2 h^2} \frac{1}{\phi^2} G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) + \frac{3}{\kappa^3 h^2} \frac{1}{\phi} \mathcal{G} \right] \quad (4.36)$$

De acuerdo a las referencias [158] y [160], la solución Little RIP (4.29) reconstruye el modelo Λ CDM a bajo corrimiento al rojo y es consistente con las observaciones actuales de las supernovas (las cuales restringen el valor del parámetro h). De hecho, podemos dar una interpretación dinámica a una clase de soluciones que satisfacen los requerimientos de BR o de LR (ver referencias [158, 159]) en el marco del presente modelo con acople cinético y GB.

Obsérvese que la ecuación (4.15) para el valor $g = -3/4$ toma la forma

$$H \frac{d\psi}{dt} + \left(6H^2 - \frac{dH}{dt} \right) \psi - 6H^2 \frac{dH}{dt} - 36H^4 = 0 \quad (4.37)$$

Así que, para un valor dado del $H(t)$, la solución particular

$$\psi(t) = 6H(t)^2 \quad (4.38)$$

satisface la ecuación automáticamente. El campo escalar correspondiente

$$\phi(t) = \sqrt{6} \int H(t) dt \quad (4.39)$$

El acople GB se determina por integración de la ecuación (4.14) y el acople cinético de la ecuación (4.12) toma la forma

$$F_1(t) = -\frac{1}{3H(t)^2} \quad (4.40)$$

Por lo tanto, para esta elección particular del acople de GB dado por (4.31) con $g = -3/4$, podemos dar una interpretación dinámica a unos valores dados del parámetro de Hubble, en el marco del campo escalar actual con términos cinético y GB. De hecho una solución Little RIP está caracterizada por una densidad de energía no singular ρ la cual incrementa con el aumento del factor de escala a . Así que, tomando el factor de escala de la forma [160]

$$a(t) = e^{\alpha(t)} \quad (4.41)$$

donde $\alpha(t)$ es una función no singular del tiempo, el parámetro de Hubble toma la forma $H(t) = \dot{\alpha}(t)$. Así que la densidad de energía se expresa como $\rho = 3\dot{\alpha}(t)^2$ y la condición para una densidad creciente es $\dot{H} = \ddot{\alpha} > 0$, la cual automáticamente reproduce comportamiento super acelerado.

De la ecuación(4.38-4.40) se obtiene la expresión para el campo escalar

$$\phi(t) = \sqrt{6}\alpha(t) \quad (4.42)$$

El acople de GB toma la forma:

$$F_2(t) = -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{\dot{\alpha}(t)} \quad (4.43)$$

y el acople cinético (4.12) es

$$F_1(t) = -\frac{1}{3\dot{\alpha}(t)^2} \quad (4.44)$$

Claramente, a partir de este tipo de soluciones LR podemos seleccionar aquellas que satisfacen las restricciones impuestas por los datos de las observaciones astrofísicas. Particularmente, en la época actual, tales modelos pueden presentar un comportamiento cercano al Λ CDM.

La reconstrucción considerada aquí, está basada en la solución particular de la ecuación (4.37) dada por la ecuación (4.38). Así que para una $\alpha(t)$ adecuada, hallamos el campo escalar y los acoples F_1 y F_2 de las ecuaciones (4.42-4.44). Dicha reconstrucción es aplicada a la evolución cosmológica tardía. Consideremos la dependencia tardía del factor de escala:

$$a(t) = e^{\lambda t^n} \quad (4.45)$$

donde λ es un parámetro positivo y $n > 1$. Entonces $\alpha(t) = \lambda t^n$, $H = \dot{\alpha} = n \lambda t^{n-1}$ y $\phi = \sqrt{6} \lambda t^n$. De la ecuación (4.43) y (4.44) se sigue que:

$$\begin{aligned} F_1(\phi) &= \frac{4}{\lambda n(n-2)} t^{2-n} \\ F_2(\phi) &= -\frac{1}{3 \lambda^2 n^2} t^{2-2n} \end{aligned} \quad (4.46)$$

expresados en términos de el campo escalar, los acoples toman la forma:

$$\begin{aligned} F_1(\phi) &= \frac{4}{\lambda n(n-2)} \left(\frac{\phi}{\sqrt{6} \lambda} \right)^{(2-n)/n} \\ F_2(\phi) &= -\frac{1}{3 \lambda^2 n^2} \left(\frac{\phi}{\sqrt{6} \lambda} \right)^{2(1-n)/n} \end{aligned} \quad (4.47)$$

esto completa la reconstrucción.

De la ecuación (4.45) y la expresión para el parámetro de Hubble se sigue que la densidad efectiva se comporta $\rho \propto (\ln a)^{2(1-1/n)}$, el cual para $n > 1$ evita la singularidad BR y satisface la condición para la singularidad LR [159],[158] (i.e. $\dot{\alpha} = \dot{H} > 0$, que produce super aceleración, pero el Universo requiere un tiempo infinito para alcanzar $\rho \rightarrow \infty$). Obsérvese que $n = 1$ produce un Universo de Sitter ($\phi = const$), y cuando $n \gg 1$ el acople se comporta como $F_1 \sim \phi^{-2}$ y $F_2 \sim \phi^{-1}$, como los acoples dados en (4.35)

4.4. Discusión

En el marco del modelo de campo escalar (3.1), se plantean soluciones al problema de la energía oscura que describen un comportamiento tipo quintom, con y sin singularidades tipo BR.

De acuerdo con esta solución, es posible entrar en la fase *phantom* sin llegar a singularidades futuras del tipo BR como en el caso descrito en la (4.1); pero también existe la posibilidad de entrar en una singularidad BR, dependiendo de los valores tomados por los parámetros, como se muestra en la figura (4.2).

La nueva solución (4.16) para el parámetro de Hubble evoluciona a lo largo de tres fases: Expansión desacelerada, expansión acelerada y fase phantom con expansión super acelerada.

Es interesante notar que se encontró una solución donde a pesar de que la ecuación de estado cae en la fase phantom, sin embargo la densidad de energía oscura permanece finita todo el tiempo, evitando la singularidad Big RIP. También se hallaron soluciones donde la ecuación de estado tienen un mínimo por debajo de -1 , como la descrita en la figura (4.2), pero retorna a valores en la fase de aceleración con $w > -1$.

También se ha estudiado otro tipo de solución llamada Little RIP, que causa igualmente las disociaciones de estructuras en el Universo, debido al comportamiento creciente de la densidad de Energía oscura. Este es el mismo efecto causado por las soluciones BR, pero sin singularidades en tiempo finito.

Capítulo 5

Análisis del espacio de fase

Estudiamos el espacio de las fases de un modelo escalar-tensorial de energía oscura con acoplamientos no-mínimos cinético y Gauss-Bonnet (3.1). La forma del potencial escalar y de los términos de acoplamiento es del tipo exponencial, lo cual origina soluciones cosmológicamente interesantes, y en el caso del campo escalar sin acoplamiento da lugar a soluciones tipo scaling. Los puntos críticos describen una variedad de escenarios cosmológicos que van desde un Universo dominado por materia o radiación a un Universo dominado por la energía oscura. Encontramos trayectorias en el espacio de fase saliendo desde puntos fijos inestables o de silla que llegan a punto estables dominados por el campo escalar y que corresponden a expansión acelerada en tiempos tardíos.

5.1. Teoría de estabilidad lineal

La idea básica de la teoría de la estabilidad lineal puede ser entendida a partir de un sistema mecánico unidimensional

$$\ddot{x} = F(x) \tag{5.1}$$

Asumiendo que existe un punto fijo x_0 donde la fuerza se anula $F(x_0) = 0$, se puede analizar el comportamiento de una partícula cerca de este punto. Tomando $x(t) = x_0 + \delta x(t)$ y considerando que $\delta x(t)$ es muy pequeño. Se realizan las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \delta \ddot{x}(t) \\ F(x) &= F(x_0 + \delta x) \approx F(x_0) + F'(x_0)\delta x + \dots = F'(x_0)\delta x + \dots\end{aligned}\tag{5.2}$$

Por lo tanto la ecuación dinámica en las proximidades del punto x_0 es

$$m \ddot{x}(t) = F'(x_0) \delta \ddot{x}(t) \quad \text{Donde } F'(x_0) \text{ es una constante} \tag{5.3}$$

El signo de $F'(x_0)$ determina la estabilidad del punto x_0 . Si $F'(x_0) < 0$, la solución de la ecuación involucra funciones trigonométricas y podemos hablar de un punto estable. Pero si $F'(x_0) > 0$ la solución debe involucrar exponenciales y nos referimos a este como un punto inestable estable.

Esta idea aplica exactamente para el caso de un sistema dinámico multidimensional. Dado un sistema dinámico n -dimensional:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{5.4}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. Si $\mathbf{x}_0$ es un punto fijo (es decir $f(\mathbf{x}_0) = 0$), entonces podemos realizar una expansión en series de Taylor de cada $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en las proximidades del punto $\mathbf{x}_0$

$$f_i(x) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) y_j y_k + \dots \tag{5.5}$$

Donde $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. En adelante sólo estaremos interesados en las primeras derivadas parciales. Particularmente $\partial f_i / \partial x_j$ se interpreta como la matriz Jacobiana de la función f , definida como

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Los autovalores de la matriz Jacobiana J , evaluadaos en el puntos crítico $\mathbf{x}_0$, contienen la información acerca de la estabilidad del sistema dinámico. Puesto que J es una matriz $n \times n$ autovalores complejos (los autovalores iguales deben ser contados de la forma correcta). Del ejemplo (5.3) es claro que la aproximación tiene dificultades si uno o mas autovalores son cero. Un punto fijo $\mathbf{x}_0$ es hiperbólico, si uno de los autovalores de la matriz jacobiana $J(\mathbf{x}_0)$ tiene parte real cero, de otra forma es un punto no hiperbólico.

Se distinguen tres casos: todos los autovalores tienen parte real negativa y por lo tanto podemos establecer que el punto es estable. Si al menos uno de los auto valores tiene parte real positiva, el punto correspondiente no es estable y corresponde a un punto de silla el cual atrae trayectorias en unas direcciones pero las repele a lo largo de otras. Finalmente, todos los autovalores tiene parte real positiva, así que todas las trayectorias son repelidas y el punto es inestable.

Puesto que en más de 3 dimensiones es difícil clasificar todos los posibles puntos críticos a partir de sus auto valores, presentaremos todos los casos posibles para un sistema dinámico bidimensional. Consideremos el sistema autónomo bidimensional,

dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{5.7}$$

Donde son funciones de x y y . Asumimos que existe un punto crítico hiperbólico en (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$. La matriz jacobiana del sistema está dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}\tag{5.8}$$

Los auto valores $\lambda_{1,2}$ están dados por:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[(f_{,x} + g_{,y}) + \sqrt{(f_{,x} - g_{,y})^2 + 4 f_{,y} g_{,x}} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[(f_{,x} + g_{,y}) - \sqrt{(f_{,x} - g_{,y})^2 + 4 f_{,y} g_{,x}} \right]\end{aligned}\tag{5.9}$$

Donde $f_{,x}$ significa derivada con respecto a x . Todas derivadas están evaluadas en el punto (x_0, y_0) . En la tabla (5.1) se especifican las condiciones y el tipo de punto crítico para los diferentes casos de valores propios en un sistema dinámico bidimensional.

Determinar la estabilidad den un punto critico para el cual la parte real de algunos de los autovalores de la matriz Jacobiana es cero y el resto son negativos, requiere el uso de un método como el de la *Variedad Central*. Este método permite simplificar las ecuaciones dinámicas reduciendo la dimensión del sistema cerca del punto fijo y determinar la estabilidad del sistema inicial a partir de la estabilidad del sistema reducido, dado que el sistema reducido contiene la información de la estabilidad del sistema inicial. A continuación se presentaran los elementos básicos del método de variedad central, una presentación completa del método se encuentra [161, 162].

Tabla 5.1: Estabilidad e inestabilidad del punto crítico (x_0, y_0) a partir de los autovalores λ_1 y λ_2 .

Autovalores	Descripción
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Punto crítico asintóticamente estable, las trayectorias que inician cerca del punto se acercan al punto $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Punto crítico asintóticamente inestable, las trayectorias que inician cerca del punto se alejan del punto, son repelidas. Pero $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$, por esto el punto se puede decir que es un atractor de tiempo pasado.
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Punto crítico de silla, la trayectorias cerca del punto en la dirección del auto vector correspondiente al auto valor λ_1 se acercan al punto y las que estan en la dirección del autovector correspondiente a λ_2 se alejand del punto.
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$	El punto es inestable. El autovalor positivo garantiza que existe una dirección inestable.
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$	La teoría de estabilidad lineal falla en la determinación del carácter del punto.El punto es hiperbólico y es necesario usar un método como la variedad central para determinar la estabilidad.
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta$, Si $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$,	el punto es una espiral inestable.
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta$, Si $\alpha < 0$ y $\beta \neq 0$,	el punto es una espiral estable.
$\lambda_{1,2} = \pm i \beta$	Son soluciones oscilatorias. El punto es un centro de rotación.

En el apéndice se presentan los elementos básicos de la teorái de la variedad central....

5.2. Ecuaciones dinámicas

A continuación se estudian las soluciones de la acción (3.1), se asume que el sector de la materia se modela mediante un fluido ideal que cumple la ecuación de estado

(EoS) $p_m = w_m \rho_m$ con parámetro w_m constante (principalmente materia no relativista con $p_m = 0$), cuya densidad de energía satisface la ecuación de continuidad $\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0$.

Considerando los límites efectivos de las teorías fundamentales como la súper gravedad o la teoría de cuerdas, los acoplamientos cinético y GB se proponen como funciones exponenciales del campo escalar (principalmente correcciones α' en el caso de la teoría de cuerdas), pero si se tienen en cuenta las correcciones de orden mayor en la expansión α' en la teoría de cuerdas efectiva, los acoplamientos deben ser modificados.

En general los acoplos $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$ pueden ser funciones arbitrarias del campo escalar, lo que le daría un carácter más general al modelo (3.1) donde los acoplamientos deben ser restringidas por los límites observacionales actuales. Esto permite incrementar el número de soluciones fenomenológicamente viables al problema de la energía oscura, en comparación con los exponenciales simples. En el presente trabajo vamos a adoptar la siguiente forma exponencial para los acoplamientos y el potencial

$$\begin{aligned} F_1(\phi) &= F_{10} e^{\alpha\kappa\phi/\sqrt{2}} \\ F_2(\phi) &= F_{20} e^{\beta\kappa\phi/\sqrt{2}} \\ V(\phi) &= V_0 e^{-\lambda\kappa\phi/\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

En el caso del modelo (3.1) sin potencial, los acoplamientos exponenciales producen una evolución en la siempre interesante ley de potencias como se muestra [109], pero en este caso el comportamiento exponencial apareció de las restricciones razonables en las densidades relativas correspondientes a los acoplamientos cinético y GB.

Con el fin de realizar el análisis del sistema dinámico, vamos a introducir las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{2}H} & y &= \frac{\kappa^2 V}{H^2} & k &= 3\kappa^2 F_1 \dot{\phi}^2 \\ g &= 8\kappa^2 H \dot{\phi} \frac{dF_2}{d\phi} & \Omega_m &= \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} & \epsilon &= \frac{\dot{H}}{H^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

De hecho, estas variables están relacionadas con los parámetros de densidad relativa definidos para los diferentes sectores del modelo

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = \frac{1}{3}(x^2 + y), \\ \Omega_k &= \frac{\kappa^2 \rho_k}{3H^2} = k, \\ \Omega_{GB} &= \frac{\kappa^2 \rho_{GB}}{3H^2} = g \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + V), \\ \rho_k &= 9\kappa^2 H^2 F_1 \dot{\phi}^2, \\ \rho_{GB} &= 24\kappa^2 H^3 \frac{dF_2}{dt} \end{aligned} \quad (5.13)$$

La ecuación (3.9) implica las siguientes restricciones sobre los parámetros de densidad

$$\Omega_\phi + \Omega_k + \Omega_{GB} + \Omega_m = 1 \quad (5.14)$$

De acuerdo a la expresión de ρ_ϕ podemos definir la ecuación de estado de los términos desacoplados del campo escalar (que satisface la ecuación de continuidad en el límite de $F_1, F_2 \rightarrow 0$) como

$$w_\phi = \frac{x^2 - y}{x^2 + y} \quad (5.15)$$

y en general la EoS efectiva se puede escribir como

$$\begin{aligned} w_{eff} &= w_\phi \Omega_\phi + w_k \Omega_k + w_{GB} \Omega_{GB} + w_m \Omega_m \\ &= -1 - \frac{2}{3}\epsilon \end{aligned} \quad (5.16)$$

Haciendo uso de la variable e-folding $N = \log a$, en términos de las variables (5.11) las ecuaciones (3.9)-(3.11) pueden ser transformadas en el siguiente sistema autónomo de primer orden

$$x^2 + y + 3k + 3g + 3\Omega_m - 3 = 0 \quad (5.17)$$

$$2xx' + 2(3 + \epsilon)x^2 + y' + 2\epsilon y + k' + 2(3 + 2\epsilon)k + 3(1 + \epsilon)g = 0 \quad (5.18)$$

$$2\epsilon + 3 + x^2 - y - \frac{2}{3}k' - \frac{1}{3}(3 + 2\epsilon)k - g' - (2 + \epsilon)g + w_m(3 - x^2 - y - 3k - 3g) = 0 \quad (5.19)$$

Pariendo de la definición de las variable dinámica (5.11), usando la relación $\frac{d}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt}$ y la ecuación de continuidad para ρ_m , se hallan las derivadas de las variables dinámicas:

$$y' = -(\lambda x + 2\epsilon)y \quad (5.20)$$

$$k' = (\alpha x + 2\epsilon)k + 2\frac{x'}{x}k \quad (5.21)$$

$$g' = (\beta x + 2\epsilon)g + \frac{x'}{x}g \quad (5.22)$$

$$\Omega' = \Omega_m(-3w_m - 2\epsilon - 3) \quad (5.23)$$

donde $'$ denota la derivada con respecto a N . Las tres primeras ecuaciones dependen de la forma explícita del potencial y de los acoplamientos definidos en (5.10).

Para hallar las ecuaciones del sistema dinámico, partimos de la ecuación (5.17) despejando Ω_m , luego se deriva con respecto a N , con este resultado y haciendo uso de las derivadas (5.20) a(5.23) se determina la x'

$$x' = -\frac{x}{3g+6k+2x^2} \left(3g(3w_m + \alpha x + 4\epsilon + 3) + 3k(3w_m + \beta x + 4\epsilon + 3) + 3x^2w_m + 3yw_m - 9w_m + 3(x^2 + y - 2\epsilon - 3) + 2x^2\epsilon - \lambda xy \right) \quad (5.24)$$

Reemplazando (5.24) en (5.18) se despeja ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{9g^2 - 4x^2(3g + k - 3) + 12gk + 12k(k + 1)} \left(-9g^2 + 3g(k(6w_m + 2\alpha x - \beta x - 6) + x(2x(3w_m + \alpha x - 1) + \lambda y)) + 2(9k^2(w_m - 1) + k(3w_m(4x^2 + y - 3) + 3(y - 3)) + 2x(x(\beta x - 6) + \lambda y) + 3x^2(w_m(x^2 + y - 3) - x^2 + y - 3)) \right) \quad (5.25)$$

Reemplazando de nuevo (5.25) en (5.24) se llega a una expresión para x' en términos de las variables dinámicas (x, y, k, g)

$$x' = \frac{x}{4x^2(3g + k - 3) - 3(3g^2 + 4gk + 4k(k + 1))} \left(9g^2(3w_m + \alpha x - 1) + 3g(k(27w_m + 6\alpha x - \beta x - 9) + 3w_m(3x^2 + y - 3) + 2\alpha x^3 - 17x^2 + 3\lambda xy + 3y - 3) + 2(3k^2(9w_m + \beta x - 3) + k(9w_m(2x^2 + y - 3) + x(2x(\beta x - 12) + 3(\beta + \lambda y)) + 9(y - 1)) + 3x(x(x^2 - 3)(w_m - 1) + xy(w_m + 1) + \lambda(-y))) \right) \quad (5.26)$$

Realizando la misma operación con cada una de las ecuaciones (5.20), (5.21) y (5.22) se obtiene las expresiones para las derivadas de las variables dinámicas

$$y' = \frac{y}{9g^2 - 4x^2(3g + k - 3) + 12gk + 12k(k + 1)} \left(-6(-3g^2 + 2g(k(3w_m + \alpha x - 3) + x^2(3w_m + \alpha x - 1))) + 2(k + x^2)(3k(w_m - 1) + w_m(x^2 + y - 3) - x^2 + y - 3) - \lambda x(9g^2 + 6g(2k - 2x^2 + y) + 4(k(3k - x^2 + 2y + 3) + 3x^2)) + 2\beta kx(3g - 4x^2) \right) \quad (5.27)$$

$$g' = -\frac{g}{9g^2 - 4x^2(3g + k - 3) + 12gk + 12k(k + 1)} \left(9g^2(3w_m + 1) + 3g(k(15w_m - 2\alpha x + \beta x + 3) - 3w_m(x^2 - y + 3) + 2\alpha x^3 - 13x^2 + \lambda xy + 3y - 3) + 2(3k^2(3w_m + x(\beta - 2\alpha) + 3) + k(3w_m(-2x^2 + y - 3) + 2x^3(\alpha - \beta) + 3x(\beta - 2\alpha) + y(3 - \lambda x) + 9) - 3x^2(w_m(x^2 + y - 3) - x^2 + 2\alpha x + y - 9) - 3\lambda xy) \right) \quad (5.28)$$

$$k' = \frac{k}{9g^2 - 4x^2(3g + k - 3) + 12gk + 12k(k + 1)} \left(-6(3g^2(3w_m + \alpha x) + 3g(k(7w_m - 1) + w_m(x^2 + y - 3) - 5x^2 + y - 1) + 4\alpha gkx + 4k(w_m(3k + x^2 + y - 3) - 2x^2 + y) + 12x^2) + \beta x(3g(3g + 4k) - 4x^2(3g + k - 3)) - 4\lambda xy(3g + k - 3) \right) \quad (5.29)$$

El sistema de ecuaciones (5.26)-(5.29), es un sistema autónomo de la forma (5.4) para el cual realizamos el análisis de estabilidad lineal. El resultado de puntos críticos y autovalores se resume en las tablas (5.2) y (5.3). Abajo se muestran las expresiones completas para los puntos J_α y J_β , las cuales resultan extensas para ser presentadas en este punto. La tabla (5.2) contiene información adicional que será discutida en la sección siguiente.

En la tabla (5.2) se observa que algunos puntos **C** e **I** (para valores específicos de los parámetros), tiene autovalores con parte real cero y los restantes autovalores son

positivos. Estos puntos serán sometidos al método de variedad central para determinar su estabilidad. Estos resultados son presentados en el Apéndice.

Tabla 5.2: Resumen de puntos críticos y cantidades fundamentales.

	x	y	k	g	w_{eff}	Ω_m	Ω_ϕ	Ω_k	Ω_g
A	0	0	1	0	0	1	0	1	0
B	0	0	0	1	-1/3	0	0	0	1
C	0	$3(1+k)$	k	$-2k$	-1	0	$1+k$	k	$-2kk$
D_±	$\pm\sqrt{3}$	0	0	0	1	0	1	0	0
E	0	0	-1	2	-1	0	0	-1	2
F	$\frac{3(w_m+1)}{\alpha}$	0	$\frac{9(1-w_m)(w_m+1)^2}{2\alpha^2 w_m}$	0	w_{eff}	$\frac{3(w_m-3)(w_m+1)^2+2\alpha^2 w_m}{2\alpha^2 w_m}$	$\frac{3(w_m+1)^2}{\alpha^2}$	$-\frac{9(w_m-1)(w_m+1)^2}{2\alpha^2 w_m}$	0
G	$\frac{3(1+w_m)}{\beta}$	0	0	$\frac{18(1-w_m)(1+w_m)^2}{\beta^2(1+3w_m)}$	w_m	$\frac{3(3w_m-7)(w_m+1)^2+\beta^2(3w_m+1)}{\beta^2(3w_m+1)}$	$\frac{3(w_m+1)^2}{\beta^2}$	0	$-\frac{18(w_m-1)(w_m+1)^2}{\beta^2(3w_m+1)}$
H	$\frac{3(1+w_m)}{\lambda}$	$\frac{9(1-w^2)}{\lambda^2}$	0	0	w_m	$\frac{\lambda^2-6(w_m+1)}{\lambda^2}$	$\frac{6(w_m+1)}{\lambda^2}$	0	0
I	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{12-\lambda^2}{4}$	0	0	$\frac{\lambda^2-6}{6}$	0	1	0	0
J_α	$\frac{2(\alpha^2-a_2^2)}{\alpha a_2}$	0	$-\frac{a_4}{3\alpha^2 a_2^2}$	0	-	$\frac{3\alpha^2 a_2^2-4(\alpha^2-a_2^2)^2+a_4}{3\alpha^2 a_2^2}$	$\frac{4(\alpha^2-a_2^2)^2}{3\alpha^2 a_2^2}$	$-\frac{a_4}{3\alpha^2 a_2^2}$	0
J_β	$\frac{3(\beta^2-b_2^2)}{\beta b_2}$	0	0	$\frac{b_4}{3\beta^2 b_2^2}$	-	$\frac{3\beta^2 b_2^2-9(\beta^2-b_2^2)^2+b_4}{3\beta^2 b_2^2}$	$\frac{3(\beta^2-b_2^2)^2}{\beta^2 b_2^2}$	0	$-\frac{b_4}{3\beta^2 b_2^2}$

Tabla 5.3: Resumen de autovalores en los puntos críticos

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
A	3	-3/2	3/2	-3 w_m
B	2	2	2	-3(w_m+1)
C	0	0	-3	-3(1+ w_m)
D_k	3(1- w_m)	-6 ± $\sqrt{3}\alpha$	-6 ± $\sqrt{3}\beta$	6 ∓ $\sqrt{3}\lambda$
E	-3	0	0	-3(1+ w_m)
F	$\frac{3(\beta-\alpha)(w_m+1)}{\alpha}$	$\frac{3}{4}(w_m-1+\sqrt{\gamma_3})$	$\frac{3}{4}(w_m-1-\sqrt{\gamma_3})$	$\frac{3(\alpha-\lambda)(w_m+1)}{\alpha}$
G	-3(1+ w_m)	$\frac{3}{4}(w_m-1+\sqrt{\gamma_2})$	$\frac{3}{4}(w_m-1-\sqrt{\gamma_2})$	$\frac{3(\beta-\alpha)(w_m+1)}{\beta}$
H	$\frac{3(\beta-\lambda)(w_m+1)}{\lambda}$	$\frac{3(\alpha-\lambda)(w_m+1)}{\lambda}$	$\frac{3}{4}(w_m-1+\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\lambda})$	$\frac{3}{4}(w_m-1-\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\lambda})$
I	$\frac{\lambda(\alpha-\lambda)}{2}$	$\frac{\lambda(\beta-\lambda)}{2}$	$\frac{\lambda^2}{4}-3$	$\frac{(\lambda^2-6w_m-6)}{2}$

Los puntos fijos $\mathbf{J}$ (J_α , J_β) los cuales tiene expresiones complicadas en α y β , se expresan de la siguiente forma:

$$J_\alpha = \left(\frac{2(\alpha^2 - a_3^2)}{\alpha a_2}, 0, -\frac{a_4}{3\alpha^2 a_2^2}, 0 \right) \quad (5.30)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\alpha^2 (8\alpha^4 - 183\alpha^2 + 1152)} \\ a_2 &= \sqrt[3]{-3\alpha^2 + a_1 + 64} \\ a_3 &= \sqrt{\frac{a_2^2 + 4a_2 + 16}{2}} \\ a_4 &= 4\alpha^4 - (a_2(7a_2 + 19) + 88)\alpha^2 + 96a_3^2 + b_1(a_2 + 8) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$J_\beta = \left(\frac{3(\beta^2 - b_3^2)}{\beta b_2}, 0, 0, \frac{b_4}{3\beta^2 b_2^2} \right) \quad (5.32)$$

donde:

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{\beta^2 (9\beta^4 - 264\beta^2 + 2000)} \\ b_2 &= \sqrt[3]{-54\beta^2 + 9b_1 + 1000} \\ b_3 &= \sqrt{b_2^2 + 10b_2 + 100}/3 \\ b_4 &= \beta^2 (-9\beta^2 + b_2(5b_2 + 26) + 320) - 300b_3^2 - b_1(b_2 + 20) \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3. Puntos críticos

A continuación vamos considerar el modelo con cada uno de los acoplamientos por separado (secciones (5.3.1) y (5.3.2)), con el fin de entender y comparar el papel de los acoplamientos, especialmente en la cosmología de tiempo tardío y luego en la sección (5.3.3) estudiaremos el modelo con todos los acoplamientos. En las tablas (5.2) y (5.3), se resumen las coordenadas de los puntos críticos y los autovalores correspondientes.

5.3.1. Acople de Gauss-Bonnet (límite $k=0$)

Este límite tiene lugar cuando el acoplamiento cinético está ausente, esta situación ya ha sido considerada en [91, 163]. Este caso se obtiene del sistema (5.26)-(5.29) tomando $k = 0$ y $\alpha = 0$. Hay dos puntos fijos correspondientes a *soluciones scaling*, una de ellas correspondiente a una espiral estable. Los puntos críticos son:

GB1: $(x, y, g) = (0, 0, 1)$, con auto valores

$$[2, 2, -(1 + 3w_m)] \quad (5.34)$$

Los parámetros de densidad toman los valores: $\Omega_m = 0$, $\Omega_{GB} = 1$, este punto crítico está dominado por el acople de Gauss-Bonnet $w_{eff} = -1/3$ el cual corresponde a la división entre la desaceleración y expansión acelerada. Este es un punto fijo de silla para $w_m > -1/3$.

GB2: $(x, y, g) = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, con autovalores

$$[3(1 - w_m), -6 \pm \sqrt{3}\beta, 6 \mp \sqrt{3}\lambda] \quad (5.35)$$

Las densidades principales y la EoS son $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 0$, $w_{eff} = 1$. Este punto crítico está dominado por el término cinético y conduce a la ecuación de estado característica de la *Stiff matter*. La solución con $\dot{\phi} > 0$ es punto de silla cuando $w_m < 1$, $\beta < 2\sqrt{3}$, $\lambda > 2\sqrt{3}$ o para $\lambda, \beta < 2\sqrt{3}$ o $\lambda, \beta > 2\sqrt{3}$.

GB3: $(x, y, g) = (0, 3, 0)$, $\Omega_m = 0$, $w_{eff} = -1$. Este punto satisface las condiciones para el punto crítico, de acuerdo con las ecuaciones (5.17)-(5.19). El punto está dominado por el potencial del campo escalar y corresponde a una solución *de Sitter*. De

acuerdo con el análisis numérico, como se muestra en la muestra en la figura (5.1), el punto es un punto de silla que atrae a partir de algunas trayectorias y repele las trayectorias que se aproximan hacia el punto atractor **GB4**. En el apéndice se ilustra el uso del método de variedad central para determinar la estabilidad del punto.

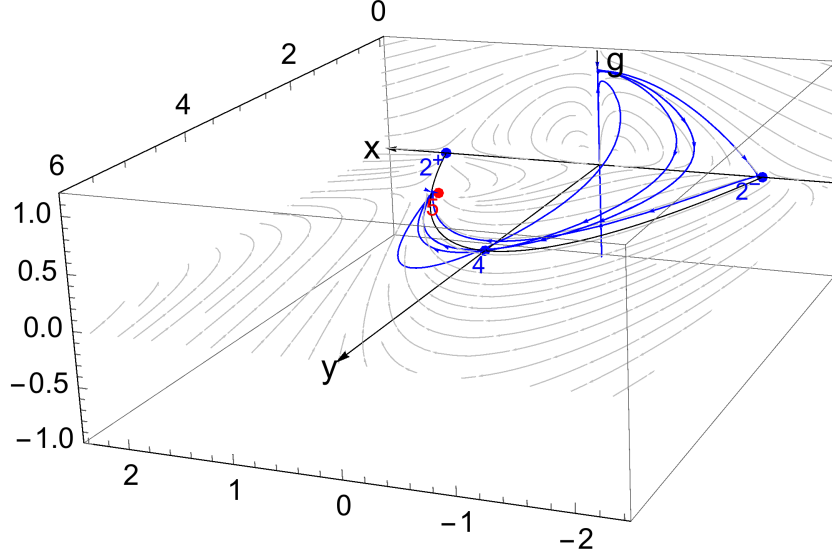


Figura 5.1: Retrato de fase del modelo para los valores de los parámetros ($\beta = \frac{1}{16}$, $\lambda = \frac{1}{8}$, $w_m = 0$) que muestra el comportamiento del punto crítico **GB3**. Este punto de silla corresponde a una solución *de Sitter*.

GB4: $(x, y, g) = (\frac{\lambda}{2}, 3 - \frac{\lambda^2}{4}, 0)$, con autovalores

$$\left[\frac{1}{2}(\beta - \lambda) \lambda, \frac{1}{4}(\lambda^2 - 12), \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6w_m - 6) \right] \quad (5.36)$$

Los parámetros de densidad y la EoS son $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 1$, $w_{eff} = -1 + \frac{\lambda^2}{6}$. Este punto crítico se caracteriza por la dominancia del campo escalar. El punto presenta las siguientes características:

- El potencial es positivo cuando $\lambda < 2\sqrt{3}$, lo que permite que $-1 < w_{eff} < 1$
- Es estable para $\lambda > \beta$ y $\lambda < \sqrt{6(1 + w_m)}$ (cuando $0 < w_m < 1$).
- Es de silla si $\lambda < \beta, \sqrt{6(1 + w_m)}$ o $\lambda > \beta$ y $\sqrt{6(1 + w_m)} < \lambda < 2\sqrt{3}$

En la gráfica (5.2) se muestra el retrato de fase del sistema con un conjunto de parámetros para los que este punto fijo es un atractor estable y todas las trayectorias divergen de los otros puntos críticos. En el lado derecho de la figura (5.2) se muestra

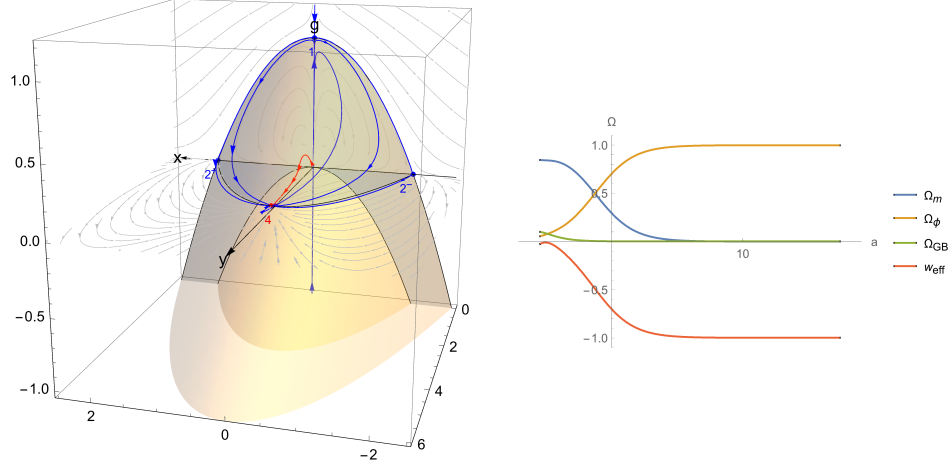


Figura 5.2: Retrato de fase del modelo para los parámetros ($\beta = \frac{1}{16}$, $\lambda = \frac{1}{8}$, $w_m = 0$). La gráfica muestra las trayectorias procedentes de diferentes puntos críticos que evolucionan hacia el atractor **GB4**. La región sombreada corresponde a la región entre las superficies $\Omega_m = 0$ y $\Omega_m = 1$, i.e. delimita la región permitida físicamente que satisface la restricción $0 \leq \Omega_m \leq 1$. En el lado derecho aparecen las gráficas de la evolución de los parámetros de densidad Ω_m , Ω_ϕ , Ω_g y la EoS w_{eff} a lo largo de la trayectoria (en color rojo) que va desde el punto dominado por la materia $(0,0,0)$ hasta el punto fijo dominado por el campo escalar **GB4**.

la evolución de Ω_m , Ω_ϕ , Ω_g y w_{eff} para $\lambda = 1/8$, $\beta = 1/16$, $w_m = 0$, donde se han ajustado las condiciones iniciales para satisfacer $\Omega_{m0} \approx 0.3$ y $w_{eff0} \approx -0.7$. La solución se aproxima al punto fijo **GB4** dominada por el del campo escalar.

GB5: $(x, y, g) = (\frac{3(1+w_m)}{\lambda}, \frac{9(1-w_m^2)}{\lambda^2}, 0)$, con autovalores

$$\left[\frac{3(1+w_m)(\beta-\lambda)}{\lambda}, \frac{3(-1+w_m)}{4} - \frac{3\sqrt{\gamma_1}}{4\lambda}, \frac{3(-1+w_m)}{4} + \frac{3\sqrt{\gamma_1}}{4\lambda} \right] \quad (5.37)$$

donde

$$\gamma_1 = (w_m - 1) \left(\lambda^2 (9w_m + 7) - 48(w_m + 1)^2 \right)$$

Los parámetros principales $\Omega_\phi = \frac{6(1+w_m)}{\lambda^2}$, $\Omega_m = 1 - \frac{6(1+w_m)}{\lambda^2}$, $w_{eff} = w_m$. El comportamiento del punto tiene las siguientes características

- Para $0 \leq \Omega_m \leq 1$, el punto crítico tiene significado físico sólo en el caso $\lambda \geq \sqrt{6(1+w_m)}$.
- Corresponde a una *solución scaling* y es un punto fijo estable para $\beta < \lambda$ y $\sqrt{6(1+w_m)} < \lambda \leq \sqrt{\frac{48}{7+9w_m}}(1+w_m)$ (siempre que $0 \leq w_m < 1$).
- Es una espiral estable para $0 < w_m < 1$, $\beta < \lambda$ y $\lambda > \sqrt{\frac{48}{7+9w_m}}(1+w_m)$.
- Es un punto de silla cuando $\beta > \lambda$.

En la figura (5.3) se muestra el retrato de fase del modelo con un conjunto de parámetros para los que este punto es un atractor estable.

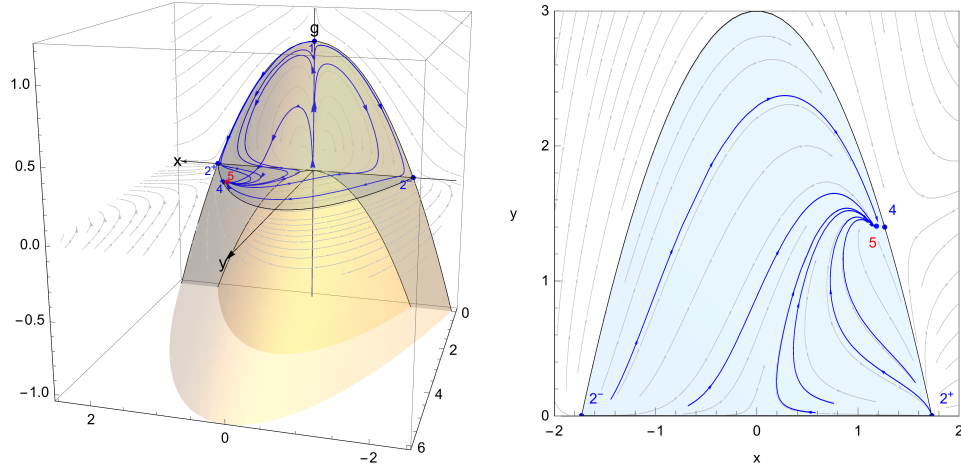


Figura 5.3: Retrato de fase del modelo para el conjunto de parámetros ($\beta = 1$, $\lambda = \frac{81}{32}$, $w_m = 0$) mostrando el carácter atractor del punto **GB5** y el carácter del punto de silla del punto **GB4** ($\sqrt{6} < \lambda < 2\sqrt{3}$). El gráfico muestra la proyección sobre el plano xy en la que todas las trayectorias dentro de la región $0 \leq \Omega_m \leq 1$ tienden al punto **GB5**. La solución se aproxima a la *solución scaling* **GB5** con $\Omega_\phi = 6/\lambda^2$ y $\Omega_m = 1 - 6/\lambda^2$.

GB6: $(x, y, g) = (\frac{3(1+w_m)}{\beta}, 0, \frac{18(1-w_m)(1+w_m)^2}{\beta^2(1+3w_m)})$, con autovalores

$$\left[\frac{3(-1+w_m)}{4} \pm \frac{3\sqrt{\gamma_2}}{4}, \frac{3(1+w_m)(\beta-\lambda)}{\beta} \right] \quad (5.38)$$

Donde

$$\gamma_2 = \frac{(1-w_m)(3(1+w_m)^2(-53+w_m(-233+15w_m(-1+3w_m)))) + (9+7w_m)(\beta+3w_m\beta)^2}{9(-1+w_m)(1+w_m)^2(-1+9w_m) + (\beta+3w_m\beta)^2}$$

Los parámetros principales son $\Omega_\phi = \frac{3(1+w_m)^2}{\beta^2}$, $\Omega_m = 1 - \frac{3(1+w_m)^2(7-3w_m)}{(1+3w_m)\beta^2}$, $w_{eff} = w_m$.

El punto presenta el siguiente comportamiento:

- Esta es una *solución scaling* sin potencial, de las coordenadas de este punto se deduce que existe cuando $\beta^2 > \frac{3(1+w_m)^2(3w_m-7)}{1+3w_m}$ (asumiendo $0 \leq w_m \leq 1$).
- A partir de las expresiones de los valores propios hemos encontrado que no es posible satisfacer las condiciones de estabilidad con $0 \leq \Omega_m \leq 1$.
- Es un unto de silla para $\lambda \geq \sqrt{21}$ y $\sqrt{\frac{3(7+11w_m+w_m^2-3w_m^3)}{1+3w_m}} < \beta < \lambda$, o $\lambda \geq \sqrt{21}$ y $\beta > \lambda$.

Los puntos **GB5** y **GB6** tienen en común que la materia y del campo escalar contribuyen con un fracción no nula a la densidad de energía total.

GB7. Este punto está dominado por el campo escalar (el término cinético y el aco-
plamiento GB), dado que $\Omega_m = 0$. La expresión de este punto es demasiado compleja
y está dada por la ecuación (5.30) que aparece junto a la tabla (5.2), ver sección
(5.3.3). Consideremos dos casos especiales

- Para $\beta = 10\sqrt{5/27}$ este punto crítico toma la forma $(x, y, g) = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$, la cual
nos lleva a $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 1/5$ y $w_{eff} = 1/9$, que es estable cuando $w_m > 1/9$ y
 $\lambda > 10\sqrt{5/27}$, y para $w_m = 0$ es un punto de silla.

- En el límite de β grande ($\beta \rightarrow \infty$) se obtiene que $\Omega_\phi \rightarrow 0$ y la solución es dominada por el acoplamiento GB, $\Omega_g \rightarrow 1$. Para valores grandes de β , el punto crítico toma el valor $(0, 0, 1)$ con autovalores $[2, 2, -1 - 3w_m]$, y la EoS efectiva tiende a $w_{eff} \rightarrow -1/3$. Por tanto, el punto se convierte en un punto de silla que describe el límite entre la aceleración y la expansión acelerada.

5.3.2. Acople cinético (Límite $g=0$)

Este límite corresponde a un acoplamiento puramente cinético que ha sido considerado en [93] y [104]. Haciendo $g = 0$ y $\beta = 0$ en el sistema (5.26)-(5.29) y resolviendo el sistema resultante para $x' = 0, y' = 0, k' = 0$, encontramos con los siguientes puntos críticos:

K1: $(x, y, k) = (0, 0, 1)$, con autovalores

$$[3, 3/2, -3w_m] \quad (5.39)$$

Los parámetros principales toman los valores: $\Omega_\phi = \Omega_m = 0$, $\Omega_k = 1$ y $w_{eff} = 0$. Este es un punto fijo inestable y corresponde a una evolución dominado por el término de acoplamiento cinético. Se espera que esta solución con dominancia cinética resulte relevante en las etapas tempranas.

K2: $(x, y, k) = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, con autovalores

$$[-3(-1 + w_m), -(6 \mp \sqrt{3}\alpha), 6 \mp \sqrt{3}\lambda] \quad (5.40)$$

Los parámetros de densidad toman los valores $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 1$, y la EoS $w_{eff} = 1$ corresponde a *Stiff matter*, la evolución es gobernada por el término cinético. La solución con $\dot{\phi} > 0$ es un punto de silla siempre que $w_m < 1$, $\alpha < 2\sqrt{3}$, $\lambda > 2\sqrt{3}$ o para

$\lambda, \alpha < 2\sqrt{3}$ o $\lambda, \alpha > 2\sqrt{3}$.

K3: $(x, y, k) = (\frac{3(1+w_m)}{\alpha}, 0, \frac{9(1+w_m-w_m^2-w_m^3)}{2w_m\alpha^2})$, con autovalores

$$\left[\frac{3(-1+w_m)}{4} - \frac{3\sqrt{\gamma_3}}{4}, \frac{3(-1+w_m)}{4} + \frac{3\sqrt{\gamma_3}}{4}, \frac{3(1+w_m)(\alpha-\lambda)}{\alpha} \right] \quad (5.41)$$

Donde

$$\gamma_3 = \frac{(1-w_m)(9-24w_m^3+33w_m^4+2w_m(\alpha^2-84)+6w_m^2(5\alpha^2-39))}{(9-9w_m^2+15w_m^3+w_m(2\alpha^2-15))}$$

Este punto crítico es una nueva *solución scaling* dominada por el campo escalar con el acoplamiento cinético, y es un punto fijo finito para $w_m \neq 0$. La ecuación de estado es efectiva es $w_{eff} = w_m$, $=$, $=$.

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{3(1+w_m)^2}{\alpha^2} \\ \Omega_m &= \frac{3w_m^3+2\alpha^2w_m-3w_m^2-15w_m-9}{2w_m\alpha^2} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Este punto existe siempre que $0 \leq \Omega_m \leq 1$, lo que lleva a la restricción

$$\alpha^2 > \frac{9+15w_m+3w_m^2-3w_m^3}{2w_m} \quad \text{siempre que } (0 < w_m < 1)$$

Sin embargo, en este caso, no es posible satisfacer simultáneamente las condiciones de estabilidad para el punto crítico y la restricción de Ω_m . El punto es de silla para

$$\lambda^2 < 12 \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{9+15w_m+3w_m^2-3w_m^3}{2w_m}} < \alpha$$

K4: $(x, y, k) = (\frac{3(1+w_m)}{\lambda}, \frac{9(1-w_m^2)}{\lambda^2}, 0)$, con autovalores

$$\left[\frac{3(1+w_m)(\alpha-\lambda)}{\lambda}, \frac{3(-1+w_m)}{4} \pm \frac{3\sqrt{\gamma_4}}{4\lambda}, \frac{3(-1+w_m)}{4} + \frac{3\sqrt{\gamma_4}}{4\lambda} \right] \quad (5.43)$$

Donde

$$\gamma_4 = (-1 + w_m) \left((7 + 9w_m)\lambda^2 - 48(1 + w_m)^2 \right)$$

Este punto crítico es una *solución scaling* dado que el campo escalar tiene un potencial exponencial. Los parámetros principales son: $w_{eff} = w_m$, $\Omega_\phi = \frac{6(1+w)}{\lambda^2}$, $\Omega_m = 1 - \Omega_\phi$. Este punto es físico ($0 \leq \Omega_m \leq 1$) siempre que $\lambda > \sqrt{6(1 + w_m)}$. El punto es una espiral estable para

$$\lambda > \frac{4\sqrt{3}(1 + w_m)}{\sqrt{7 + 9w_m}} \quad \text{y} \quad \alpha < \lambda \quad 0 < w_m < 1$$

Es punto fijo estable cuando

$$\sqrt{6(1 + w_m)} < \lambda \leq \frac{4\sqrt{3}(1 + w_m)}{\sqrt{7 + 9w_m}} \quad \text{y} \quad \alpha < \lambda$$

Cuando $\alpha > \lambda$ tenemos un punto crítico de silla. Tenga en cuenta que para los puntos **K3** y **K4**, la materia y el campo escalar contribuyen a la vez con una fracción no nula a la densidad de energía total.

K5: $(x, y, k) = (\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{4}(12 - \lambda^2), 0)$, con autovalores

$$\left[-3 + \frac{\lambda^2}{4}, -3(1 + w_m) + \frac{\lambda^2}{2}, \frac{1}{2}\lambda(\alpha - \lambda) \right] \quad (5.44)$$

Este punto fijo corresponde a la dominancia del campo escalar, con $w_{eff} = -1 + \frac{\lambda^2}{6}$, $\Omega_\phi = 1$, $\Omega_m = 0$. Es un atractor estable para $\lambda < \sqrt{6(1 + w_m)}$, siempre que $0 \leq w_m \leq 1$, y $\alpha < \lambda$. Es un punto de silla si $\lambda > \sqrt{12}$ y $\alpha < \lambda$ o $\lambda < \sqrt{6(1 + w_m)}$ y $\alpha > \lambda$. El retrato de fase del modelo, que muestra el carácter atractor del punto **K5** se muestra en la figura (5.4).

Las condiciones iniciales para los parámetros de densidad y la EOS(w_{eff}) en la figura (5.4) se han elegido de tal manera que en el presente $\omega_{m0} \approx 0,3$ y $w_{eff0} \approx -0,7$. Tenga en cuenta que la solución tracking de la quintaesencia estándar tiene lugar

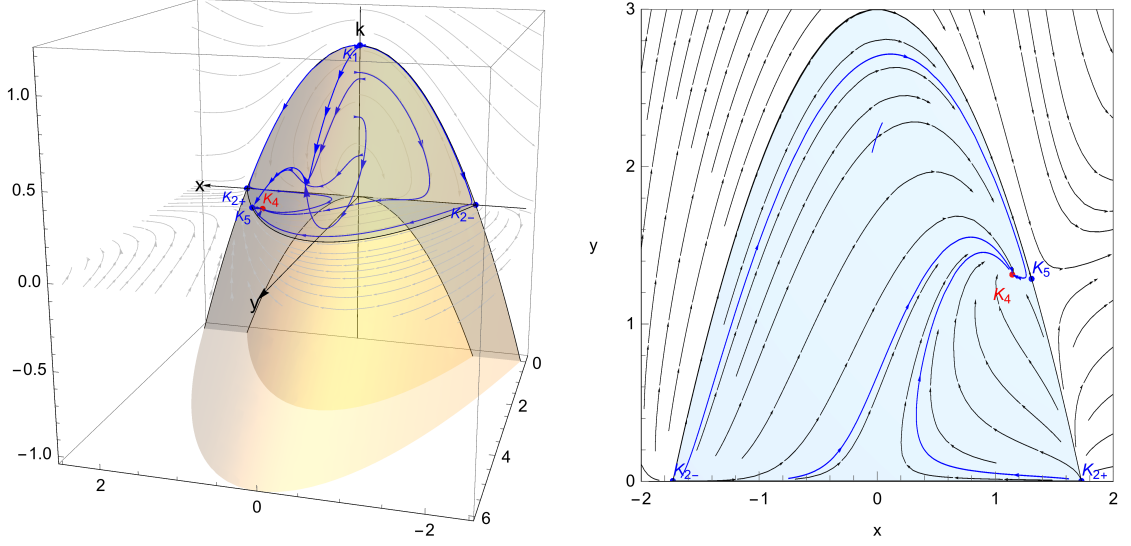


Figura 5.4: Retrato de fase del modelo para los parámetros $(\alpha = 2, \lambda = 4\sqrt{\frac{3}{7}}, w_m = 0)$ que muestra la *solución scaling* atractora **K4**. El gráfico muestra las trayectorias que salen desde el punto **K1** y los puntos de silla **K2+**, **K2-** para finalmente terminar en el punto fijo **K4**. El comportamiento a lo largo del eje k refleja el hecho de que cuando $x = y = 0$ (siempre que $w_m = 0$), la ecuación de $k' = 0$ se cumple automáticamente para cualquier k .

cuando el acoplamiento cinético desaparece.

K6: este punto está dominado por el campo escalar (el término cinético y el acoplamiento cinético). La expresión de este punto es demasiado compleja y está dada por la ecuación (5.30), pero podemos considerar un caso especial fijando el parámetro α .

- Si $\alpha = 8/\sqrt{3}$ este punto fijo toma el valor $(x, y, k) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{4})$, dando $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 1/4$, $w_{eff} = 1/3$, y es estable siempre que $w_m > 1/3$ y $\lambda > 8\sqrt{3}$. Para $w_m = 0$ es un punto de silla. Por lo tanto, este punto es un atractor estable para el universo dominado por un campo escalar imitando la radiación.
- Para el límite α grande, el punto crítico toma el valor $(0, 0, 1)$ con autovalores $[3, 3/2, -3w_m]$. En este límite la solución es dominada por el acoplamiento

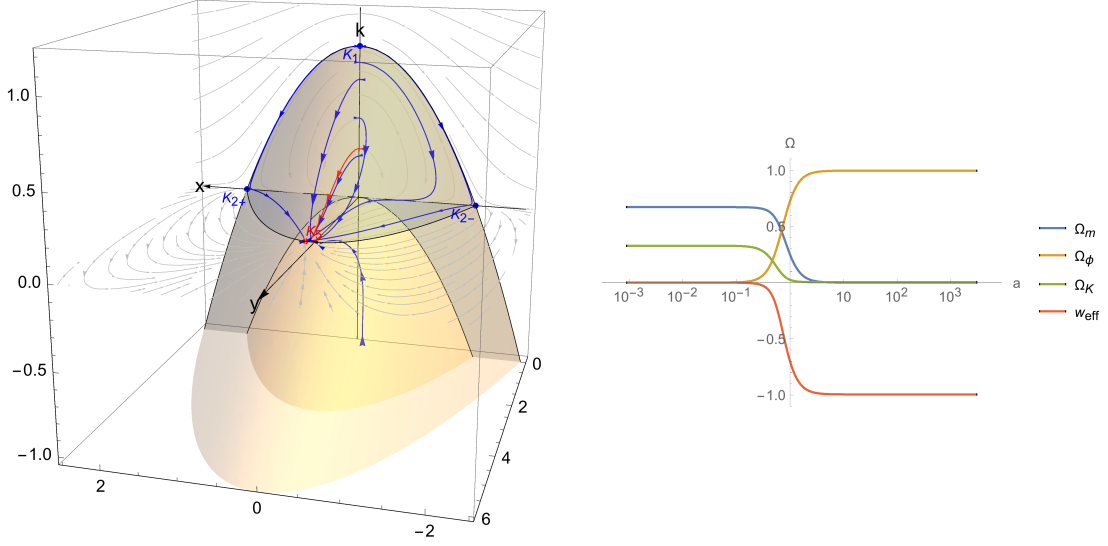


Figura 5.5: Retrato fase del modelo para el conjunto $(\alpha = \frac{1}{8}, \lambda = \frac{1}{4}, w_m = 0)$ que muestra las trayectorias que convergen para punto fijo $K5$ bf con dominancia de campo escalar que es una solución atractor de tiempo tardío correspondientes a expansión acelerada. El gráfico de la derecha muestra la evolución de los parámetros de densidad Ω_m , Ω_ϕ , Ω_K y la EoS w_{eff} a lo largo de la trayectoria (en color rojo) que comienza en un punto que repele desde el eje k y termina en el punto fijo con dominancia del campo escalar **K5**.

cinético y el punto es de silla. La EoS efectiva tiende a $w_{eff} \rightarrow 0$, lo que indica que el campo escalar imita un Universo dominado por materia sin presión.

5.3.3. Acoples de Gauss-Bonnet y Cinético

El modelo presenta 11 puntos críticos, dos de ellos están ubicados en el plano xy , dos en el plano xk , dos en el plano xg , uno en el plano kg , dos en el eje z , uno a lo largo del eje j y uno a lo largo de el eje g . Hay tres puntos fijos, en los planos xy , xk y xg , que presentan comportamiento de escala y son atractores estables o se comportan como puntos de silla, dependiendo de las regiones en las que se encuentren los parámetros α , β , λ . También hay un punto en el plano xy que es una solución quintaesencia con propiedades de estabilidad en función de la correlación entre los

parámetros α , β , λ .

A: $(x, y, k, g) = (0, 0, 1, 0)$ con autovalores

$$[3, -3/2, 3/2, -3w_m] \quad (5.45)$$

Las densidades principales $\Omega_\phi = \Omega_m = 0$, $\Omega_k = 1$ y $w_{eff} = 0$. Este es un punto fijo inestable y corresponde a una evolución dominada por el término de acoplamiento cinético. Se espera que esta solución cinética sea relevante en etapas tempranas.

B: $(x, y, k, g) = (0, 0, 0, 1)$ con autovalores

$$[2, 2, 2, -1 - 3w_m] \quad (5.46)$$

Los valores de las densidades $\Omega_m = 0$, $\Omega_{GB} = 1$ y la EoS $w_{eff} = -1/3$, en este caso, la evolución está dominado por el término de Gauss-Bonnet, y w_{eff} corresponde a la división entre la desaceleración y expansión acelerada. Este punto fijo es inestable de silla $w_m > -1/3$.

C: $(x, y, k, g) = (0, 3(1+k), k, -2k)$ con autovalores

$$[0, 0, -3, -3(1+w_m)] \quad (5.47)$$

Este punto crítico está dominado por el potencial escalar y los término de acoplamiento, pero k es arbitrario, lo que indica que cualquier punto sobre el eje k es un punto crítico. El hecho de que los valores propios no dependen de k sugiere que todos los puntos sobre el eje k tienen las mismas propiedades de estabilidad, pero la presencia de dos valores propios cero indica que con el fin de evaluar la estabilidad

de estos puntos, se debe usar un método como el de variedad central.

Los parámetros de densidad toman los valores $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 1 + k$, $\Omega_g = -2k$, $\Omega_k = k$, en el que el hecho de que $\Omega_\phi > 1$ se compensa con el signo opuesto de la componente de acoplamiento Ω_g . La EoS de este punto fijo corresponde a una solución *de Sitter* $w_{eff} = -1$, que es marginalmente estable, ya que tiene dos autovalores negativos y dos autovalores cero. En el apéndice se presenta el análisis de estabilidad de este punto.

D: $(x, y, k, g) = (\pm\sqrt{3}, 0, 0, 0)$, con autovalores

$$[3(1 - w_m), -6 \pm \sqrt{3}\alpha, -6 \pm \sqrt{3}\beta, 6 \mp \sqrt{3}\lambda] \quad (5.48)$$

Los parámetros principales toman los valores $\Omega_m = 0$, $\Omega_\phi = 1$, $w_{eff} = 1$, la evolución es del tipo *Stiff matter*, gobernada por el término cinético. La solución con $\dot{\phi} > 0$ es un punto fijo inestable cuando $w_m < 1$, $\alpha, \beta > 2\sqrt{3}$ y $\lambda < \sqrt{2}$, es un punto de silla siempre que $w_m < 1 < y$ si al menos una de las desigualdades anteriores no se satisface.

E: $(x, y, k, g) = (0, 0, -1, 2)$, con autovalores

$$[-3, 0, 0, -3(1 + w_m)] \quad (5.49)$$

Con densidad $\Omega_m = \Omega_\phi = 0$ y EoS $w_{eff} = -1$. En este punto crítico la evolución está dominada por los acoplamientos cinético y Gauss-Bonnet, y corresponde a una solución *de Sitter*. Debido a los valores propios cero es complicado el análisis de la estabilidad de este punto (para $w_m > -1$, el punto es marginalmente estable), y exige un análisis más detallado utilizando técnicas de variedad central. Las propiedades de estabilidad de este punto se muestran en la figura (5.6).

F: $(x, y, k, g) = (\frac{3(1+w_m)}{\alpha}, 0, \frac{9(1+w_m-w^2-w^3)}{2\alpha^2 w_m}, 0)$, con autovalores

$$\left[\frac{3(-1+w_m)}{4} \pm \frac{3\sqrt{\gamma_3}}{4}, -\frac{3(1+w_m)(\alpha-\beta)}{\alpha}, \frac{3(1+w_m)(\alpha-\lambda)}{\alpha} \right] \quad (5.50)$$

Los parámetros de densidad y la EoS son

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{3(1+w_m)^2}{\alpha^2} \\ \Omega_m &= \frac{3w_m^3 - 3w_m^2 + 2\alpha^2 w_m - 15w_m - 9}{2\alpha^2 w_m} \\ w_{eff} &= w_m \end{aligned}$$

Este punto crítico es una *solución scaling* dominada por el término cinético y es finito para $w_m \neq 0$. De $0 \leq \Omega_m \leq 1$ sigue la restricción $\alpha^2 > \frac{9+15w_m+3w_m^2-3w_m^3}{2w_m}$ (siempre que $0 < w_m < 1$). En este caso no es posible satisfacer las condiciones de estabilidad para $0 \leq \Omega_m \leq 1$. Este punto es siempre de silla para

$$\alpha > \sqrt{\frac{9+15w_m+3w_m^2-3w_m^3}{2w_m}} \quad \text{y} \quad \beta < \alpha \text{ o } \lambda > \alpha$$

G: $(x, y, k, g) = (\frac{3(1+w_m)}{\beta}, 0, 0, \frac{18(1-w_m)(1+w_m)^2}{\beta^2(1+3w_m)})$, con autovalores

$$\left[\frac{3(1+w_m)(\alpha-\beta)}{\beta}, \frac{3(-1+w_m)}{4} \pm \frac{3\sqrt{\gamma_2}}{4}, \frac{3(1+w_m)(\beta-\lambda)}{\beta} \right] \quad (5.51)$$

Los parámetros de densidad y la EoS toman los valores

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{3(1+w_m)^2}{\beta^2} \\ \Omega_m &= \frac{\beta^2(1+3w_m) - 33w_m - 3w_m^2 + 9w_m^3 - 21}{\beta^2(1+3w_m)} \\ w_{eff} &= w_m \end{aligned}$$

La condición $0 \leq \Omega_m \leq 1$ para $0 \leq w_m < 1$ se satisface si

$$\beta^2 > \frac{21 + 33w_m + 3w_m^2 - 9w_m^3}{1 + 3w_m}$$

como en el punto **GB6**, en este caso el punto es inestable bajo la condición $0 \leq \Omega_m \leq 1$.

Esta *solución scaling* es un punto fijo de silla para

$$\beta > \sqrt{\frac{21 + 33w_m + 3w_m^2 - 9w_m^3}{1 + 3w_m}} \quad \text{y} \quad \alpha < \beta \text{ o } \beta < \lambda$$

H: $(x, y, k, g) = (\frac{3(1+w_m)}{\lambda}, \frac{9(1-w^2)}{\lambda^2}, 0, 0)$, con auto valores

$$\left[\frac{3(1+w_m)(\alpha - \lambda)}{\lambda}, \frac{3(1+w_m)(\beta - \lambda)}{\lambda}, \frac{3(-1+w_m)}{4} \pm \frac{3\sqrt{\gamma_4}}{4\lambda} \right] \quad (5.52)$$

Los parámetros de densidad y la EoS vienen dados por

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \frac{6(1+w_m)}{\lambda^2} \\ \Omega_m &= \frac{\lambda^2 - 6(1+w_m)}{\lambda^2} \\ w_{eff} &= w_m \end{aligned}$$

El punto presenta las siguientes características:

- Esta es una *solución scaling* con $\Omega_m \neq 0$, definida por $\lambda \geq \sqrt{6(1+w_m)}$, y se comporta completamente dominada por el campo escalar cuando $\lambda = \sqrt{6(1+w_m)}$.
- Es un atractor estable cuando

$$\alpha, \beta < \lambda \quad \text{y} \quad \sqrt{6(1+w_m)} < \lambda \leq \sqrt{\frac{48}{7+9w_m}}(1+w_m)$$

para $0 \leq w_m < 1$.

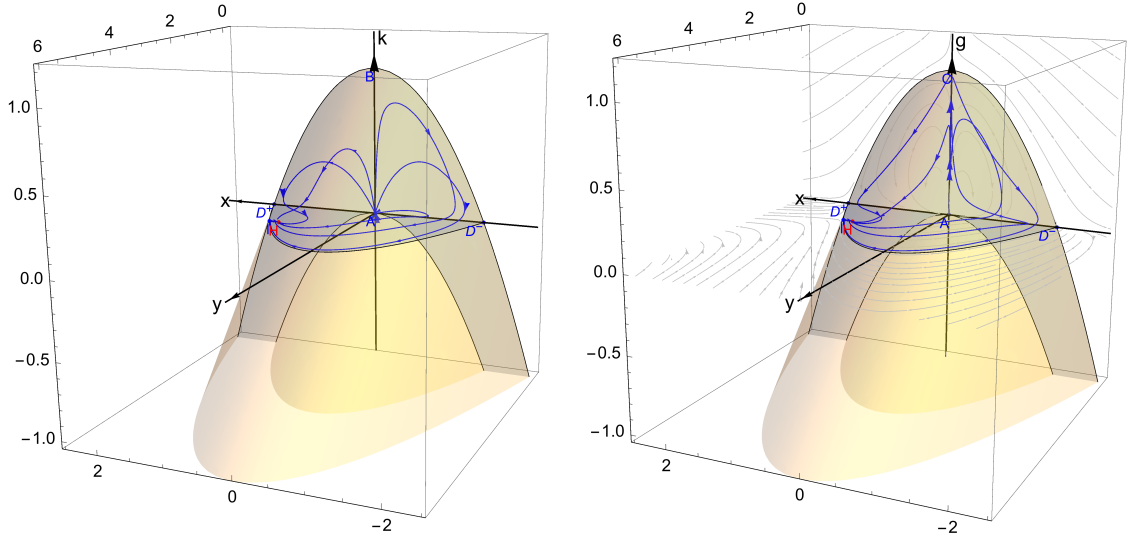


Figura 5.6: Retrato de fase del modelo para el conjunto $(\alpha = 68/39, \lambda = 4\sqrt{3/7}, \beta = 2, w_m = 0)$ que muestra las trayectorias que convergen al campo dominado punto escalar atractor **H** en el sistema de coordenada (x, y, k) . El gráfico de la derecha muestra los retrato de fase en el sistema de coordenadas (x, y, g) .

- Es una espiral estable para $\lambda > \sqrt{\frac{48}{7+9w_m}}(1+w_m)$ y es un punto de silla estable para $\alpha > \lambda$ o $\beta > \lambda$.

El retrato de fase del sistema que muestra el punto **G** como un atractor se ilustra en la Figura (5.5).

I: $(x, y, k, g) = (\frac{\lambda}{2}, 3 - \frac{\lambda^2}{4}, 0, 0)$, con autovalores

$$\left[\frac{1}{2}(\beta - \lambda)\lambda, -3 + \frac{1}{4}\lambda^2, -3(1 + w_m) + \frac{1}{2}\lambda^2, \frac{1}{2}(\alpha - \lambda)\lambda \right] \quad (5.53)$$

Los parámetros principales son $\Omega_\phi = 1$, $\Omega_m = 0$ y $w_{eff} = -1 + \frac{\lambda^2}{6}$. El carácter positivo del potencial requiere $\lambda < 2\sqrt{3}$.

Este punto crítico dominado por la parte desacoplada del campo escalar conduce a una solución de energía oscura estable cuando $\beta < \lambda$, $\alpha < \lambda$ y $\lambda < \sqrt{6(1 + w_m)}$ (para

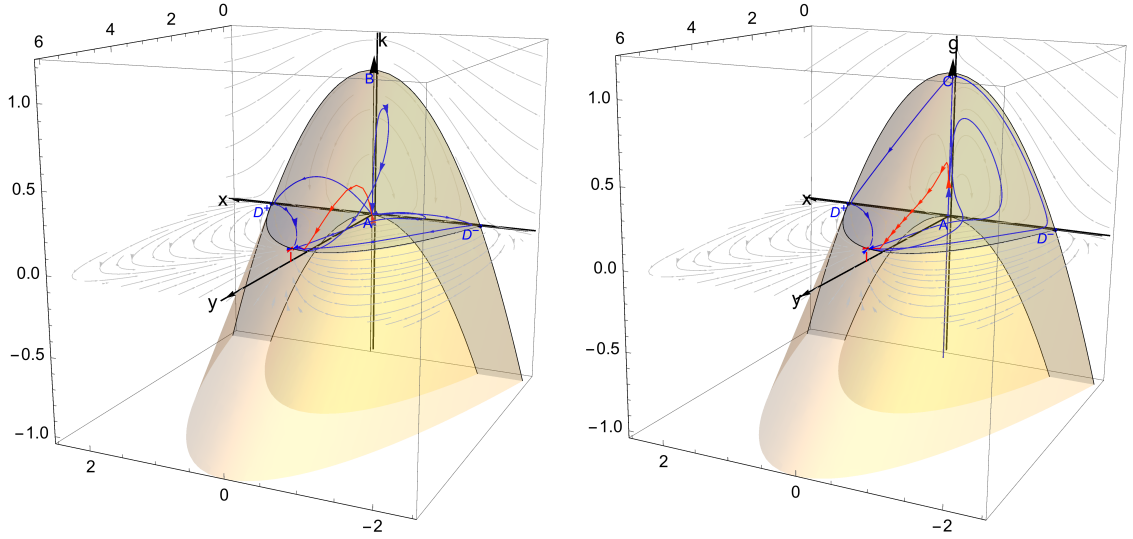


Figura 5.7: Retrato de fase del modelo para el conjunto de parámetros ($\alpha = 1/8$, $\lambda = 1/2$, $\beta = 1/4$, $w_m = 0$) que muestra las trayectorias que convergen a un punto fijo con dominancia del campo escalar **I** que es una solución atractor de tiempo tardío correspondiente a expansión acelerada. El gráfico de la derecha muestra los retrato de fase en el sistema de coordenada (x, y, g) .

$$0 \leq w_m \leq 1).$$

Es un punto de silla cuando $\alpha > \lambda$ o $\beta > \lambda$. Observe que cuando $\lambda^2 = 6(1 + w_m)$, la $w_{eff} = w_m$ y la solución se convierte en *solución scaling*, pero uno de los valores propios se convierte en cero. Esto significa que el punto es marginalmente estable en este caso.

En la Figura (5.8) se muestra la evolución de los parámetros de densidad $\Omega_m, \Omega_\phi, \Omega_k, \Omega_g$ y la EoS efectiva w_{eff} . Las condiciones iniciales para los parámetros de densidad y w_{eff} han sido elegidos de tal manera que en el presente $\Omega_{m0} \approx 0.3$ y $w_{eff0} \approx -0.7$.

J: Hay dos puntos fijos adicionales que tienen una dependencia complicada con α (**J_α**), donde sólo el término cinético permanece y β (**J_β**), donde sólo el término de GB permanece, dado por las ecuaciones (5.30) y (5.32) respectivamente, pero no

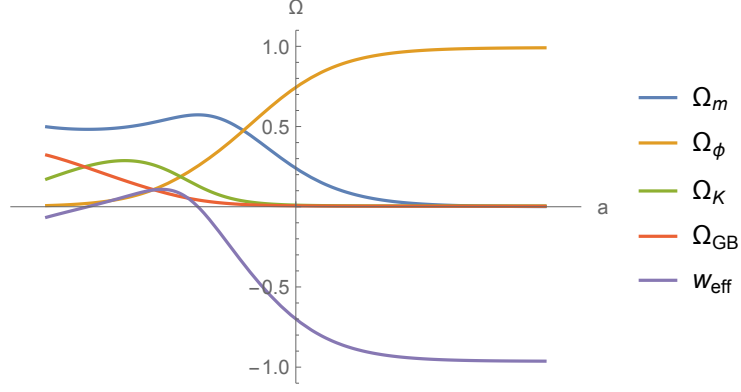


Figura 5.8: Evolución de los parámetros de densidad Ω_m , Ω_ϕ , Ω_k , Ω_g y la EoS w_{eff} a lo largo de la trayectoria que pasan cerca del origen (la curva roja en la figura 5.7) y termina en el del campo escalar dominada punto fijo **I**.

conducen a escenarios de evolución de tiempo tardío interesantes. Sin embargo, las expresiones de estos puntos críticos se simplifican sustancialmente para $\alpha = 8/\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}/2, 0, 3/4, 0)$ y $\beta = 10\sqrt{5/27}$, $(\sqrt{3/5}, 0, 0, 4/5)$, como se mostró en los casos **GB7** y **K6**.

Para la *solución scaling* **K4** (o **GB5**) podemos analizar cualitativamente el comportamiento del término cinético no acoplado mínimamente en comparación con la de los otros términos en el modelo. En general, para la *solución scaling* tenemos

$$H^2 \sim a^{-3(1+w_m)}$$

y de la ecuación para el punto crítico

$$x = 3(1 + w_m)/\lambda$$

se sigue que (usando la ecuación (5.11) para x)

$$\phi \sim (1 + w_m) \ln a$$

La densidad de energía asociada a la componente de acoplamiento cinético, se convierte en

$$\begin{aligned}
\rho_k &= 9 \kappa^2 H^2 F_1 \dot{\phi}^2 \\
&= 9 \kappa^2 H^4 \phi'^2 F_1 \\
&\sim a^{-6(1+w_m)} e^{\frac{3\alpha}{\lambda}(1+w_m) \ln a} \\
&\sim a^{-3(1+w_m)(2-\frac{\alpha}{\lambda})}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

A partir de esta expresión es claro que la contribución a la densidad de energía procedente del acoplamiento cinético se diluye más rápido que la densidad de energía de materia, siempre que $\alpha < \lambda$, y también es una condición necesaria para la estabilidad de la *solución scaling* **K4**.

La contribución GB a la densidad energía para la misma *solución scaling* se comporta de manera similar a

$$\rho_{GB} \sim a^{-3(1+w_m)(2-\frac{\beta}{\lambda})}$$

y también diluye más rápido que la densidad de energía de la materia, en el caso $\beta < \lambda$, que es una condición necesaria para la estabilidad para **GB5**. Esta *solución scaling* también tiene lugar cuando los dos acoplamientos están presentes y corresponden al punto **G** (para los acoplamientos exponencial y el potencial como se indica en la ecuación(5.23)). En este caso, bajo las condiciones $\alpha < \lambda$ y $\beta < \lambda$, los acoplamientos cinético y GB se convierten en subdominantes con respecto a la parte desacoplada del campo escalar en la época actual.

5.4. Discussion

Se estudió el sistema autónomo para el modelo dado por la eq. (3.1), donde se ha considerado el potencial y los acoplamientos dados por funciones exponenciales del campo escalar. El acoplamiento GB que ya ha sido considerado en[91] contiene dos

soluciones scaling: la primera dada por **GB5** que es un punto fijo estable para $\beta < \lambda$ y $\sqrt{6(1+w_m)} < \lambda \leq \sqrt{\frac{48}{7+9w_m}}(1+w_m)$. El punto **GB6** es una solución scaling asociada con el acople de GB, pero no se puede alcanzar físicamente para w_m en la región $0 \leq w_m \leq 1$.

Para el caso de acoplamiento cinético hemos encontrado dos soluciones scaling: la dada por el punto **K4**, que tiene las mismas características que el punto **GB5** (ver **K4**) y la nueva solución scaling asociada con el acoplamiento cinético dada por el punto **K3**. Pero como en el caso del punto **GB6**, en el escenario cosmológico descrito por este punto no es posible satisfacer las condiciones de estabilidad para la región física $0 \leq \Omega_m \leq 1$. Sin embargo, para **K3** las condiciones físicas son satisfechas para $\lambda^2 < 12$, dando lugar a un punto de silla. También hay un punto crítico con dominancia de campo escalar **K5**, que conduce a una solución de energía oscura con las mismas propiedades del punto **GB4**.

Un punto adicional conectado con el acoplamiento GB está dado por **GB7**, el cual es difícil de analizar dada la compleja dependencia del parámetro β . Analizándolo en el límite de grandes β este punto se convierte en un punto de silla $(0,0,1)$ (que reproduce el punto **GB1**), dado que $w_{eff} = -1/3$ que es el límite entre la desaceleración y la expansión acelerada.

Igualmente hay otro punto crítico conectado con el acoplamiento cinético dado por **K6** con dependencia complicada de α , pero puede ser analizada para valores específicos. Así que si tomamos, $\alpha = 8/\sqrt{3}$, produce $w_{eff} = 1/3$ y es atractor estable, imitando un Universo dominado por radiación. En el límite de α grande, el punto crítico toma el valor $(0,0,1)$ con autovalores $[3, 3/2, -3w_m]$, que coinciden con el punto **K1**. La EoS efectiva tiende a $w_{eff} \rightarrow 0$, lo que indica que el campo escalar en

este límite imita un Universo con dominancia de la materia sin presión.

Cuando consideramos el efecto de ambos acoplamientos, se obtienen dos nuevos puntos críticos dados por los puntos **C** y **E**. Cabe resaltar que el punto **E** coincide con el punto **C** para $k = -1$, y los dos puntos tienen las mismas propiedades de estabilidad, y además conducen a un universo de Sitter. De acuerdo con los valores propios, los puntos son marginalmente estables, pero el análisis de variedad central muestra que los puntos son de silla.

En el presente trabajo hemos considerado una EoS para el componente de materia sólo en el rango de $0 \leq w_m \leq 1$, ya que nos interesa en el papel de los acoplamientos cinético y GB en el modelado de la energía oscura. Sin embargo, el mismo análisis podría extenderse a densidades de energía más exóticos con valores negativos de w_m .

Capítulo 6

Conclusiones

Los modelos de campos escalares con acoplamientos a la curvatura han sido ampliamente estudiados en diferentes aspectos de la cosmología que abarcan desde inflación hasta el Universo tardío. Acoplamientos como el del termino cinético a la curvatura y el del campo escalar al invariante de GB encuentran su justificación tanto en el contexto de cuantización de campos sobre espacios curvos como en límites efectivos de teorías de supergravitación y supercuerdas.

En el presente trabajo se considera un modelo de campo escalar con acoplamientos cinético y de GB con el fin de hacer un estudio de soluciones cosmológicas de tiempo tardío para explicar el fenómeno de la expansión acelerada del Universo. El estudio de estos modelos podría demostrar que es muy plausible que los acoplamientos escalar-tensoriales predichos por teorías fundamentales pueden ser importantes en el actual universo de curvatura pequeña.

En la primera parte del trabajo se estudiaron soluciones cosmológicas de tiempo tardío para un modelo escalar-tensorial inspirado en la teoría de cuerdas que incluye el acoplamiento del invariante Gauss-Bonnet y un acoplamiento cinético a la

curvatura. Hemos presentado varias soluciones cosmológicas exactas que muestran las fases de desaceleración, aceleración e incluso la fase fantasma. Estas fases son necesarias para la explicación satisfactoria de la inflación temprana, así como la fase actualmente observada de la aceleración (super-aceleración) en el universo de tardío.

En el caso de la dominancia del campo escalar, encontramos una solución cosmológica (3.32) capaz de explicar en tiempo tardío la expansión acelerada e incluso una transición a la fase fantasma. Se consideró el sistema autónomo para el modelo en ausencia de materia y hemos encontrado las condiciones para la estabilidad de las soluciones (3.24) y (3.32).

También hemos estudiado las propiedades de estabilidad de las soluciones (3.24) y (3.32) bajo perturbaciones tensoriales y escalares de la métrica. Para la solución de ley de potencia hemos encontrado las restricciones en los parámetros con el fin de evitar las inestabilidades fantasma y de gradiente en los siguientes casos: en tiempos grandes, en el límite *de Sitter* y en ausencia del acoplamiento cinético, para la solución (3.32)

Consideramos un escenario Energía Oscura muy cerca (con una alta precisión) a la solución *de Sitter* y se demostró que la solución está libre de inestabilidades fantasmas y de gradiente bajo perturbaciones tensoriales y escalares, desde los tiempos tempranos hasta la actualidad y en el futuro $z \sim -0.99$.

En el modelo con contenido de materia se puede encontrar una variedad de soluciones exactas en función de la correlación entre los parámetros de la ecuación (3.101). De hecho, la solución general de la ecuación cosmológica (3.101) se da a través de una función hiper-geométrica, pero usando los límites cuando esta función se

simplifica a exponenciales elementales, encontramos relaciones entre los parámetros. Para una elección particular de los parámetros, encontramos la solución (3.102), que reúne dominancia de materia en etapas tempranas con expansión acelerada en etapas tardías, incluyendo la transición a la fase fantasma. Esta solución también presenta una singularidad futura de tipo III, siempre que σ_1 en (3.102) satisfaga $0 < (6/\sigma_1)^{1/\lambda} < 1$.

Una característica específica de la singularidad que aparece en la solución (3.102) es que la densidad se vuelve negativa para los tiempos $t > t_s$ haciendo imposible que el universo evolucione más allá de esta singularidad. Citamos un ejemplo, pero hay otras relaciones entre los parámetros de la ecuación. (3.101) que podrían darnos cuenta de escenarios cosmológicos fenomenológicamente aceptables.

En todas las soluciones consideradas en el capítulo 3, el comportamiento de escala de la energía cinética es el mismo que el de la densidad total de energía, i.e. $\dot{\phi}^2 \propto H^2$, que en ausencia de interacciones corresponde a un límite conforme del modelo (un modelo escalar cinético puramente libre es conforme invariante).

Dado que los datos observacionales no descartan una ecuación de estado por debajo de la barrera de la constante cosmológica ($w < -1$), en el capítulo 4 se estudian soluciones que contienen una fase phantom o de super aceleración. Las soluciones tipo phantom tienen como particularidad que la densidad de la energía oscura se incrementa con el incremento del factor de escala, y ambos se pueden hacer infinitos en un tiempo finito, dando lugar a lo que se conoce como una singularidad tipo Big RIP.

También se consideraron soluciones que producen el mismo efecto físico que las de Big RIP, pero que no tienen singularidad futura, conocidas como Little Rip.

Se encontró una nueva solución dada por la ecuación (4.16) donde el parámetro de Hubble evoluciona a lo largo de las fases de desaceleración, expansión acelerada y de super aceleración (phantom). El tiempo de las transiciones puede ser establecido ajustando los parámetros de la solución. Particularmente en los ejemplos considerados, en la época presente del Universo está ocurriendo la transición a la fase phantom. El resultado presentado en las figuras (4.1) y (4.2) indica que el conocimiento del comportamiento asintótico de $w(t)$ (cuando $t \rightarrow \infty$) es insuficiente para distinguir modelos con Big RIP de modelos asintóticamente de Sitter.

Un aspecto notable del presente modelo es que en virtud de la elección del acoplamiento GB, $F_2 = g/H$ con $g = -3/4$, la ecuación de movimiento automáticamente se satisface para la forma particular de término cinético $\psi = 6H^2$. Para esta solución particular, la ecuación de Friedmann da lugar a un acoplamiento cinético de la forma $F_1 = -1/(3H^2)$. Lo anterior permite reconstruir una clase de escenarios cosmológicos viables que explican la energía oscura en el marco del presente modelo.

El tiempo de las transiciones puede ser establecido ajustando los parámetros de la solución. Particularmente en los ejemplos considerados, en la época presente del Universo está ocurriendo la transición a la fase phantom. El resultado presentado en las figuras (4.1) y (4.2) indica que el conocimiento del comportamiento asintótico de $w(t)$ (cuando $t \rightarrow \infty$) es insuficiente para distinguir modelos con Big RIP de modelos asintóticamente de Sitter.

Un aspecto notable del presente modelo es que en virtud de la elección del acoplamiento GB $F_2 = g/H$ con $g = -3/4$, la ecuación de movimiento automáticamente se satisface para la forma particular de término cinético $\psi = 6H^2$. Para esta solución particular, la ecuación de Friedmann produce un acoplamiento cinético de la forma $F_1 = -1/(3H^2)$. Lo anterior permite reconstruir una clase de escenarios cosmológicos que explican la energía oscura en el marco del presente modelo.

En la tercera parte del trabajo se hizo un estudio del sistema autónomo para el modelo (3.1) con potencial y acoplamientos de forma exponencial, donde se hizo un análisis de los puntos críticos y sus características. El acoplamiento GB contiene las dos soluciones conocidas tipo scaling [91] : la primera dada por **GB5** que es un punto fijo estable para $\beta < \lambda$ y $\sqrt{6(1+w_m)} < \lambda \leq \sqrt{\frac{48}{7+9w_m}}(1+w_m)$, y la segunda dada por el punto **GB6**, para la cual se encontró que no se puede alcanzar físicamente para w_m en la región $0 \leq w_m \leq 1$.

Para el caso de acoplamiento cinético hemos encontrado dos nuevas soluciones scaling: la dada por el punto **K4**, que tiene las mismas características que el punto **GB5** (ver **K4**) y la nueva solución scaling asociada con el acoplamiento cinético dada por el punto **K3**. Pero como en el caso del punto **GB6**, en el escenario cosmológico descrito por este punto no es posible satisfacer las condiciones de estabilidad para la región física $0 \leq \Omega_m \leq 1$. Sin embargo, las condiciones físicas son satisfechas, y el punto es punto de silla para $\lambda^2 < 12$.

También hay un punto crítico con dominancia de campo escalar **K5**, que conduce a una solución de energía oscura con las mismas propiedades del punto **GB4**. El análisis muestra que no es posible satisfacer simultáneamente la condición $0 \leq \Omega_m \leq 1$ y las condiciones de estabilidad para éste punto fijo. Sin embargo, si relajamos las

condiciones de estabilidad, el punto puede ser físico y de silla, para algunas regiones de los parámetros como se muestra para **GB6**. Para ambos puntos físicos **GB5** y **GB6**, la densidad de la materia contribuye con una fracción no nula a la densidad de energía total.

El sistema también contiene el punto fijo con dominancia de campo escalar **GB4** que conduce a la solución de energía oscura, que es estable para $\beta < \lambda$ y $\lambda < \sqrt{6(1+w_m)}$.

Un punto adicional conectado con el acoplamiento GB está dado por **GB7**, el cual es difícil de analizar dada la compleja dependencia del parámetro β . Analizándolo en el límite de grandes β este punto se convierte en un punto de silla $(0, 0, 1)$ (que reproduce el punto **GB1**), dado que $w_{eff} = -1/3$ que es el límite entre la desaceleración y la expansión acelerada.

También hay un punto crítico con dominancia de campo escalar **K5**, que conduce a una solución de energía oscura con las mismas propiedades del punto **GB4**. Es importante notar que cuando $\lambda = \sqrt{6(1+w_m)}$, la EoS efectiva toma la forma $w_{eff} = w_m$, que conduce de esta manera a una solución scaling. Sin embargo, para $\lambda = \sqrt{6(1+w_m)}$ uno de los valores propios se hace cero, y el análisis utilizando técnicas variedad central (en el caso $w_m = 0$) muestra que el punto fijo es inestable. En cualquier caso, el punto es de silla, ya que dos valores propios se convierte en negativos (siempre que $0 < w_m < 1$). Tenga en cuenta también que el valor $\lambda = 0$ en **GB4** y **K5** reproduce el punto crítico al punto $(0, 3, 0)$ y lleva a una solución tipo *de Sitter*. Los valores propios correspondientes toman los valores $[0, -3, -3(1+w_m)]$, lo que indica que el punto crítico es de silla, y el valor propio cero requiere un análisis adicional para estudiar la estabilidad. El análisis posterior de variedad central muestra que el punto es inestable.

El punto crítico dado por **K6** tiene una dependencia complicada en α , pero puede ser analizado para valores específicos. Así que si tomamos, $\alpha = 8/\sqrt{3}$, produce $w_{eff} = 1/3$ y es atractor estable, imitando un Universo dominado por radiación. En el límite de α grande, el punto crítico toma el valor $(0, 0, 1)$ con autovalores $[3, 3/2, -3w_m]$, que coinciden con el punto **K1**. La EoS efectiva tiende a $w_{eff} \rightarrow 0$, lo que indica que el campo escalar en este límite imita un Universo con dominancia de la materia sin presión.

En el caso del modelo completo cuando se tienen ambos acoplamientos, además de los puntos críticos anteriores se obtienen los dos nuevos puntos críticos **C** y **E**. Es de notar que el punto **E** coincide con el punto **C** para $k = -1$, y los dos puntos tienen las mismas propiedades de estabilidad y conducen a un universo de Sitter. De acuerdo con los valores propios, los puntos son marginalmente estables, pero el análisis de variedad central muestra que los puntos son de silla.

En el estudio de este sistema autónomo hemos considerado una EoS para la componente de materia sólo en el rango de $0 \leq w_m \leq 1$, ya que nos interesa el papel de los acoplamientos cinético y GB en el modelado de la energía oscura. Sin embargo, el mismo análisis podría extenderse a densidades de energía más exóticas con valores negativos de w_m . También se recurrió a una representación exponencial para los acoplamientos cinético y de Gauss-Bonnet, los cuales muestran una estructura de fase muy interesante. Sin embargo este estudio se podría ampliar a potenciales y acoplamientos diferentes, que como se ha mostrado en otros capítulos dan lugar a escenarios cosmológicos viables.

Hemos mostrado que el efecto combinado del acoplamiento cinético no-mínimo a la curvatura y del acoplamiento del campo escalar al invariante de Gauss-Bonnet, podría

constituir una fuente importante de energía oscura y jugaría un papel importante en el estado actual de expansión del universo.

Apéndice A

Método de la Variedad central

El método de variedad central permite simplificar un sistema dinámico, al reducir la dimensión del sistema cerca de los puntos con autovalores de la matriz Jacobiana con parte real nula y con otros autovalores con parte real negativa. Otro métodos utilizado son el método de las bifurcaciones y el de las formas normales. En este apéndice se presentan los conceptos esenciales del método de variedad central siguiendo lo presentado en [161]. Considerando un sistema dinámico:

$$\dot{\mathbf{z}} = F(\mathbf{z}) \quad (\text{A.1})$$

con $\mathbf{z} \in \Re^n$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ y $f(\mathbf{z}) = (F_1(\mathbf{z}), F_2(\mathbf{z}), \dots, F_n(\mathbf{z}))$. Además se tiene un punto fijo $\mathbf{z}_0$ tal que $F(\mathbf{z}_0) = 0$. Cerca del punto se puede linealizar el sistema usando (5.6). Tomando $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$, la ecuación (A.1) se puede escribir como¹:

$$\dot{\mathbf{x}} = J \mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

Donde J es una matriz de coeficientes constantes de orden $n \times n$. Se deben hacer las siguientes consideraciones: El espacio $\Re^n$ es la suma directa de tres espacios: E^s , E^u

¹Cabe señalar que esta transformación traslada el punto crítico al origen del nuevo sistema de referencia

y E^c . El espacio E^s es el espacio generado por los autovectores de J con parte real negativa. El espacio E^u es el espacio generado por los autovectores de J con parte real positiva. El espacio E^c es el espacio generado por los autovectores de J con parte real cero.

La teoría de estabilidad lineal es suficiente para determinar, las trayectorias en los sub espacios E^s y E^u . El método de variedad central permite determinar la dinámica en el sub espacio E^s , en adelante consideraremos únicamente estos espacios. Reescribiendo el sistema (A.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y)\end{aligned}\tag{A.3}$$

Expresado en componentes tiene la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_{ij} x_j + f_i(x, y) & i, j &= 1, 2, \dots, c \\ \dot{y}_\alpha &= B_{\alpha\beta} y_\beta + g_\alpha(x, y) & \alpha, \beta &= 1, 2, \dots, s\end{aligned}\tag{A.4}$$

Donde A es una matriz $c \times c$ con autovalores de parte real cero y B es una matriz $s \times s$ con autovalores de parte real negativa y $(x, y) \in \mathfrak{R}^c \times \mathfrak{R}^s$. Además se asume que:

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= 0 & \nabla f(0, 0) &= 0 \\ g(0, 0) &= 0 & \nabla g(0, 0) &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

El método de variedad central está soportado en tres teorema principales: El teorema de existencia de la variedad central, las condiciones de estabilidad y el último que permite construir la variedad central. En este apéndice omitimos la presentación de los teoremas o su demostración, en su lugar presentamos la estrategia para usar el

método (ver [161] para detalles y demostraciones).

Para el sistema dinámico (A.1), expresado en la forma (A.3) o (A.4), que cumpla las condiciones (A.5) existe una variedad M , c dimensional tal que:

- Tiene una función $y = h(x)$ en las cercanías del origen.
- La función h cumple: $h(0) = 0$ y $\nabla h(0, 0) = 0$
- M es una superficie invariante de (A.3)

Además, la restricción del sistema (A.3) al espacio M que se representa como una sistema dinámico reducido:

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)) \quad (\text{A.6})$$

contiene toda la información necesaria para determinar las propiedades de estabilidad del origen. Esto significa que si el origen es estable, asintóticamente estable o inestable para el sistema (A.6), el origen es respectivamente estable, asintóticamente estable o inestable para el sistema de (A.3).

El objetivo es obtener una expresión aproximada de la variedad central. Para ello la función $y = h(x)$ se propone como un expansión de las componentes y_α en términos de las coordenadas x_β

$$y_\alpha = h_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_c) = a_{\alpha i_2 \dots i_c} x_1^{2-i_2} x_2^{i_2-i_3} \dots x_c^{i_c} + b_{\alpha i_2 \dots i_c} x_1^{3-i_2} x_2^{i_2-i_3} \dots x_c^{i_c} + \dots \quad (\text{A.7})$$

De aquí se puede obtener la derivada de h_α con respecto a x_i

$$\dot{y}_\alpha = \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo estas derivada en (A.4) en $\dot{y}$, se obtiene

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} \dot{x}_i = B_{\alpha\beta} h_\beta(x) + g_\alpha(x, h(x)) \quad (\text{A.9})$$

Usando de nuevo la condición (A.4) tomando en $\dot{x}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i} (A_{ij} \dot{x}_j + f_i(x, h(x))) = B_{\alpha\beta} h_\beta(x) + g_\alpha(x, h(x)) \quad (\text{A.10})$$

Esta expresión nos permite determinar los coeficientes de la expansión (A.7) y obtener la parametrización de la variedad, la cual contiene la información de la estabilidad del punto con la ventaja de tener una dimensión menor.

Dependiendo de la complejidad del sistema dinámico la implementación del método puede resultar muy extensa, por esto es necesario utilizar un CAS (Computer Algebra System) como Mathematica 10.4 para solucionar el problema. En la referencia [164] se presentan los elementos básicos para la implementación de método de variedad central usando Mathematica.

Para determinar la estabilidad del punto **C**: $\mathbf{x}_0 = (x, y, k, g) = (0, 3(1+k), k, -2k)$, el cual genera una solución de Sitter, es necesario realizar una transformación de coordenadas $\mathbf{y} = (x, u, k, v) = (0, y - 3(1+k), k, g + 2k)$. En este sistema de referencia las coordenadas del punto son $(x, u, v, k) = (0, 0, 0, 0)$.

La estructura de las ecuaciones (5.26)-(5.29), permite hacer una consideración adicional, puesto que la ecuación para k' se anula automáticamente para cualquier valor de k , esta variable puede ser tomada como constante. Realizando el análisis de estabilidad lineal, los nuevos auto valores son: $[0, \frac{3(k+1)}{2k+1}, -3]$. Para que las condiciones de existencia de la variedad se cumpla, es necesario que: $\frac{3(k+1)}{2k+1} \leq 0$. En el caso crítico que

$k = -1$ hay dos auto valores cero y un autovalor negativo. Luego de aplicar el método, la parametrización de la variedad central ($h(x)$ en la ecuación A.5) toma la forma:

$$v = \frac{2\alpha x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} + O(x^4) \quad (\text{A.11})$$

El sistema dinámico reducido en la variedad central tiene la forma:

$$\begin{aligned} x' &= 3x^3 - \frac{ux^3}{2} \\ u' &= u^2 + ux^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

El cual es un punto crítico inestable o más precisamente, un punto de silla.

Otro caso interesante aparece en el punto **I** cuando $\lambda = \sqrt{6}$, esta condición genera un autovalor cero (considerando $w_m = 0$). Realizando la transformación de coordenadas $(u, v, k, g) = (x - \lambda/2, (12 - \lambda^2)/4, k, g)$, la parametrización de la variedad central, toma la forma:

$$\begin{aligned} v &= u^2 \\ k &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Y es sistema reducido,

$$u' = \sqrt{6}u^2 \quad (\text{A.14})$$

Dado el signo del coeficiente, el sistema es inestable. Hay otros casos que no se consideran, puesto que son puntos críticos que están fuera de la región de interés físico o no cumplen la condición de existencia de la variedad.

Bibliografía

- [1] E Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, March 1929.
- [2] Mario Livio. Lost in translation: Mystery of the missing text solved. *Nature*, 479(7372):171–173, November 2011.
- [3] A G Lematre. A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91(5):483–490, March 1931.
- [4] A. G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, 116:1009–1038, September 1998.
- [5] S. Perlmutter et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications. *Nature*, 391:51–54, 1998.
- [6] G Paal, I Horvath, and B Lukacs. Inflation and compactification from Galaxy redshifts? *Astrophysics and space science*, 191(1):107–124, 1992.
- [7] M. Kowalski et al. Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets. *Astrophys. J.*, 686:749–778, 2008.
- [8] Malcolm Hicken, W. Michael Wood-Vasey, Stephane Blondin, Peter Challis, Saurabh Jha, Patrick L. Kelly, Armin Rest, and Robert P. Kirshner. Improved Dark Energy Constraints from 100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves. *Astrophys. J.*, 700:1097–1140, 2009.
- [9] E. Komatsu et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 180:330–376, 2009.
- [10] Will J. Percival et al. Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 401:2148–2168, 2010.
- [11] Mario Livio. *The dark universe: matter, energy and gravity*, volume 15. Cambridge University Press, 2004.

- [12] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al. Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity. *ArXiv e-prints*, February 2015.
- [13] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *ArXiv e-prints*, February 2015.
- [14] A A Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 91(1):99–102, March 1980.
- [15] D Kazanas. Dynamics of the universe and spontaneous symmetry breaking. *The Astrophysical Journal*, 241:L59–5, October 1980.
- [16] Alan H Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347–356, January 1981.
- [17] G. F. Smoot et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal*, 396:L1, September 1992.
- [18] D. N. Spergel et al. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(2):377–408, June 2007.
- [19] D. N. Spergel et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148(1):175–194, February 2003.
- [20] E Komatsu, K M Smith, and J Dunkley. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy 379 Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation arXiv:[astro-ph. CO]/1001.4538, 380 2010.
- [21] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, Y. Akrami, P. K. Aluri, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, and et al. Planck 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB. *ArXiv e-prints*, June 2015.
- [22] B. Flaugher et al. The dark energy camera. *The Astronomical Journal*, 150(5):150, 2015.
- [23] Papadopoulos, A and others. DES13S2cmm: The First Superluminous Supernova from the Dark Energy Survey. *arXiv.org*, January 2015.
- [24] Luca Amendola. Coupled Quintessence. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, astro-ph(4):043511, August 1999.

- [25] Christoph Wetterich. The cosmon model for an asymptotically vanishing time-dependent cosmological “constant”. *arXiv.org*, August 1994.
- [26] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, January 1989.
- [27] Albert Einstein. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1917:142–152, 1917.
- [28] Willem de Sitter. Further remarks on the solutions of the field-equations of the Einstein’s theory of gravitation. *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, pages 1–5, September 2010.
- [29] Alexander Friedmann. On the Curvature of the Space. *Zeitschrift für Physik*, 10:377–386, 1922.
- [30] A S Eddington. On the Instability of Einstein’s Spherical World. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 90(7):668–678, May 1930.
- [31] Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problems (Talk given at Dark Matter 2000, February, 2000). *arXiv.org*, May 2000.
- [32] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. The Cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559–606, 2003.
- [33] Sean M Carroll. The Cosmological Constant. *Living Reviews in Relativity*, 4:1–50, 2001.
- [34] Lawrence M. Krauss and Michael S. Turner. The Cosmological constant is back. *Gen. Rel. Grav.*, 27:1137–1144, 1995.
- [35] Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei D Linde, and Sandip P Trivedi. De Sitter vacua in string theory. *Phys. Rev.*, D68:046005, 2003.
- [36] Yasunori Fujii. Origin of the gravitational constant and particle masses in a scale-invariant scalar-tensor theory. *Phys. Rev. D*, 26:2580–2588, Nov 1982.
- [37] R D Peccei, J Solà, and C Wetterich. Adjusting the cosmological constant dynamically: Cosmons and a new force weaker than gravity. *Physics Letters B*, 195(2):183–190, September 1987.
- [38] L H Ford. Cosmological-constant damping by unstable scalar fields. *Physical Review D*, 35(8):2339–2344, April 1987.
- [39] C Wetterich. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B*, 302(4):668–696, June 1988.
- [40] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys. Rev.*, D37:3406, 1988.

- [41] Yasunori Fujii and Tsuyoshi Nishioka. Model of a decaying cosmological constant. *Physical Review D*, 42(2):361–370, July 1990.
- [42] Takeshi Chiba, Naoshi Sugiyama, and Takashi Nakamura. Cosmology with x-matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 289(2):L5–L9, August 1997.
- [43] Tonatiuh Matos and L. Arturo Ureña López. Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter. *Phys. Rev. D*, 63:063506, Feb 2001.
- [44] Pedro G Ferreira and Michael Joyce. Structure Formation with a Self-Tuning Scalar Field. *Physical Review Letters*, 79(24):4740–4743, December 1997.
- [45] Pedro G Ferreira and Michael Joyce. Cosmology with a primordial scaling field. *Physical Review D*, 58(2):023503–23, June 1998.
- [46] R. R. Caldwell, Rahul Dave, and Paul J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582–1585, 1998.
- [47] Sean M Carroll. Quintessence and the Rest of the World: Suppressing Long-Range Interactions. *Physical Review Letters*, 81(15):3067–3070, October 1998.
- [48] Edmund J Copeland, Andrew R Liddle, and David Wands. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Physical Review D*, 57(8):4686–4690, April 1998.
- [49] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang, and Paul J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896–899, 1999.
- [50] Paul J Steinhardt, Limin Wang, and Ivaylo Zlatev. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, 59(12):123504–13, May 1999.
- [51] A Hebecker and C Wetterich. Quintessential Adjustment of the Cosmological Constant. *Physical Review Letters*, 85(16):3339–3342, October 2000.
- [52] A Hebecker and C Wetterich. Natural quintessence? *Physics Letters B*, 497(3-4):281–288, January 2001.
- [53] Michaël Malquarti, Edmund J Copeland, and Andrew R Liddle. k-essence and the coincidence problem. *Physical Review D*, 68(2):023512–5, July 2003.
- [54] Michaël Malquarti, Edmund J Copeland, Andrew R Liddle, and Mark Trodden. A new view of k-essence. *Physical Review D*, 67(12):123503–7, June 2003.
- [55] C Armendariz-Picon, V Mukhanov, and Paul J Steinhardt. Essentials of k-essence. *Physical Review D*, 63(10):103510–13, April 2001.

- [56] C Armendariz-Picon, V Mukhanov, and Paul J Steinhardt. Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration. *Physical Review Letters*, 85(21):4438–4441, November 2000.
- [57] T. Padmanabhan and T. Roy Choudhury. Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field? *Phys. Rev.*, D66:081301, 2002.
- [58] R. R. Caldwell. A Phantom menace? *Phys. Lett.*, B545:23–29, 2002.
- [59] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006.
- [60] Alexander Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, 511(2-4):265–268, July 2001.
- [61] Vittorio Gorini, Alexander Kamenshchik, and Ugo Moschella. Can the Chaplygin gas be a plausible model for dark energy? *Physical Review D*, 67(6):063509–5, March 2003.
- [62] A A Sen and Robert J Scherrer. Generalizing the generalized Chaplygin gas. *Physical Review D*, 72(6):063511–8, September 2005.
- [63] M C Bento, O Bertolami, and A A Sen. Generalized Chaplygin gas and cosmic microwave background radiation constraints. *Physical Review D*, 67(6):063003–5, March 2003.
- [64] M C Bento, O Bertolami, M J Rebouças, and P T Silva. Generalized Chaplygin gas model, supernovae, and cosmic topology. *Physical Review D*, 73(4):043504–8, February 2006.
- [65] M C Bento, O Bertolami, and A A Sen. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physical Review D*, 66(4):043507–5, August 2002.
- [66] Shin’ichi Nojiri and Sergei D Odintsov. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration. *Physical Review D*, 68(12):123512–10, December 2003.
- [67] A D Dolgov and M Kawasaki. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? *Physics Letters B*, 573:1–4, October 2003.
- [68] Ignacio Navarro and Karel Van Acoleyen. $f(R)$ actions, cosmic acceleration and local tests of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(02):022–022, February 2007.
- [69] Stephen A Appleby and Richard A Battye. Do consistent models mimic general relativity plus Λ ? *Physics Letters B*, 654(1-2):7–12, October 2007.

- [70] Vinícius Miranda, Sergio E Jorás, Ioav Waga, and Miguel Quartin. Viable Singularity-Free $f(R)$ Gravity without a Cosmological Constant. *Physical Review Letters*, 102(22):221101–4, June 2009.
- [71] Luca Amendola, Radouane Gannouji, David Polarski, and Shinji Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models. *Physical Review D*, 75(8):083504–22, April 2007.
- [72] Éanna É Flanagan. Palatini Form of $1/R$ Gravity. *Physical Review Letters*, 92(7):071101–4, February 2004.
- [73] Dan N Vollick. On the viability of the Palatini form of $1/R$ gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 21(15):3813–3816, July 2004.
- [74] Xin He Meng and Peng Wang. Modified Friedmann equations in R^{-1} -modified gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 20(22):4949–4961, October 2003.
- [75] Stéphane Fay, Reza Tavakol, and Shinji Tsujikawa. $f(R)$ gravity theories in Palatini formalism: Cosmological dynamics and observational constraints. *Physical Review D*, 75(6):063509–16, March 2007.
- [76] Thomas P Sotiriou. Constraining $f(R)$ gravity in the Palatini formalism. *Classical and Quantum Gravity*, 23(4):1253–1267, February 2006.
- [77] M Amarzguoui, Ø Elgarøy, D F Mota, and T Multamäki. Cosmological constraints on $f(R)$ gravity theories within the Palatini approach. *Astronomy and Astrophysics*, 454(3):707–714, August 2006.
- [78] Yasunori Fujii and Kei-ichi Maeda. *The Scalar–Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [79] Gilles Esposito-Farèse and David Polarski. Scalar-tensor gravity in an accelerating universe. *Physical Review D*, 63(6):063504–20, February 2001.
- [80] C Brans and R H Dicke. Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Physical Review*, 124(3):925–935, November 1961.
- [81] Varun Sahni and Yuri Shtanov. Braneworld models of dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2003(11):014–014, November 2003.
- [82] Sean M Carroll, Antonio De Felice, Vikram Duvvuri, Damien A Easson, Mark Trodden, and Michael S Turner. Cosmology of generalized modified gravity models. *Physical Review D*, 71(6):063513–11, March 2005.
- [83] Antonio De Felice, Mark Hindmarsh, and Mark Trodden. Ghosts, instabilities, and superluminal propagation in modified gravity models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2006(08):005–005, August 2006.

- [84] Gianluca Calcagni, Beatriz de Carlos, and Antonio De Felice. Ghost conditions for Gauss–Bonnet cosmologies. *Nuclear Physics B*, 752(3):404–438, September 2006.
- [85] Alvaro Núñez and Slava Solganik. Ghost constraints on modified gravity. *Physics Letters B*, 608(3-4):189–193, February 2005.
- [86] Shin’ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Misao Sasaki. Gauss-Bonnet dark energy. *Phys. Rev.*, D71:123509, 2005.
- [87] Gianluca Calcagni, Shinji Tsujikawa, and M SAMI. Dark energy and cosmological solutions in second-order string gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 22(19):3977–4006, September 2005.
- [88] Benedict M. N. Carter and Ishwaree P. Neupane. Towards inflation and dark energy cosmologies from modified Gauss-Bonnet theory. *JCAP*, 0606:004, 2006.
- [89] M Gasperini and G Veneziano. The pre-big bang scenario in string cosmology. *Physics Reports*, 373(1-2):1–212, January 2003.
- [90] James E Lidsey, David Wands, and E J Copeland. Superstring cosmology. *Physics Reports*, 337(4-5):343–492, October 2000.
- [91] Tomi Koivisto and David F. Mota. Gauss-Bonnet Quintessence: Background Evolution, Large Scale Structure and Cosmological Constraints. *Phys. Rev.*, D75:023518, 2007.
- [92] Luca Amendola, Christos Charmousis, and Stephen C Davis. Solar system constraints on Gauss–Bonnet mediated dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(10):004–004, October 2007.
- [93] L N Granda. Non-minimal Kinetic coupling to gravity and accelerated expansion. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(07):006–006, July 2010.
- [94] Takeshi Chiba. Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Physical Review D*, 60(8):083508–4, September 1999.
- [95] Jean-Philippe Uzan. Cosmological scaling solutions of nonminimally coupled scalar fields. *Physical Review D*, 59(12):123510–10, May 1999.
- [96] Damien J. Holden and David Wands. Selfsimilar cosmological solutions with a nonminimally coupled scalar field. *Phys. Rev.*, D61:043506, 2000.
- [97] Michael B Green, John H Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory, vol. 1, 2, 1987.
- [98] Hong Liu and Arkady A. Tseytlin. $D = 4$ superYang-Mills, $D = 5$ gauged supergravity, and $D = 4$ conformal supergravity. *Nucl. Phys.*, B533:88–108, 1998.

- [99] Shin'ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Conformal anomaly for dilaton coupled theories from AdS / CFT correspondence. *Phys. Lett.*, B444:92–97, 1998.
- [100] Luca Amendola. Cosmology with nonminimal derivative couplings. *Phys. Lett.*, B301:175–182, 1993.
- [101] S. Capozziello, G. Lambiase, and H. J. Schmidt. Nonminimal derivative couplings and inflation in generalized theories of gravity. *Annalen Phys.*, 9:39–48, 2000.
- [102] Cristiano Germani and Alex Kehagias. New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 105:011302, 2010.
- [103] Scott F. Daniel and Robert R. Caldwell. Consequences of a cosmic scalar with kinetic coupling to curvature. *Class. Quant. Grav.*, 24:5573–5580, 2007.
- [104] L N Granda and W Cardona. General non-minimal kinetic coupling to gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(07):021–021, July 2010.
- [105] L N Granda. Non-minimal kinetic coupling and the phenomenology of dark energy. *Classical and Quantum Gravity*, 28(2):025006–18, December 2010.
- [106] L N Granda. Inflation driven by scalar field with non-minimal kinetic coupling with Higgs and quadratic potentials. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(04):016–016, April 2011.
- [107] L N Granda, E Torrente-Lujan, and J J Fernandez-Melgarejo. Non-minimal kinetic coupling and Chaplygin gas cosmology. *The European Physical Journal C*, 71(7):1704–7, July 2011.
- [108] L N Granda. Dark Energy From Scalar Field With Gauss–Bonnet And Non-Minimal Kinetic Coupling. *Modern Physics Letters A*, 27(04):1250018–14, February 2012.
- [109] L N Granda. Late Time Cosmological Scenarios from Scalar Field with Gauss Bonnet and Non-minimal Kinetic Couplings. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(9):2813–2829, April 2012.
- [110] N Granda and E Loaiza. Spontaneous Compactification Induced by Gravitons and Scalar Field. *International Journal of Modern Physics A*, 12(28):5007–5018, November 1997.
- [111] Lisa Randall and Raman Sundrum. An Alternative to Compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690–4, December 1999.
- [112] Lisa Randall and Raman Sundrum. Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370–3373, October 1999.

- [113] Gia Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Physics Letters B*, 485(1-3):208–214, July 2000.
- [114] Adam G Riess et al. Type Ia Supernova Discoveries at $z \leq 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *The Astrophysical Journal*, 607(2):665–687, June 2004.
- [115] P Astier et al. The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from the first year data set. *Astronomy and Astrophysics*, 447(1):31–48, February 2006.
- [116] W M Wood-Vasey et al. Observational Constraints on the Nature of Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey. *The Astrophysical Journal*, 666(2):694–722, September 2007.
- [117] José Luis Prieto, Armin Rest, and Nicholas B Suntzeff. A New Method to Calibrate the Magnitudes of Type Ia Supernovae at Maximum Light. *The Astrophysical Journal*, 647(1):501–512, August 2006.
- [118] Wendy L Freedman et al. The Carnegie Supernova Project: First Near-Infrared Hubble Diagram To $z \leq 0.7$. *The Astrophysical Journal*, 704(2):1036–1058, September 2009.
- [119] Richard Kessler et al. First-Year Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Results: Hubble Diagram And Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 185(1):32–84, October 2009.
- [120] K Bechtol et al. Eight New Milky Way Companions Discovered In First-Year Dark Energy Survey Data. *The Astrophysical Journal*, 807(1):1–16, June 2015.
- [121] N Regnault et al. Photometric calibration of the Supernova Legacy Survey fields. *Astronomy and Astrophysics*, 506(2):999–1042, November 2009.
- [122] J Guy et al. The Supernova Legacy Survey 3-year sample: Type Ia supernovae photometric distances and cosmological constraints. *Astronomy and Astrophysics*, 523:A7–34, November 2010.
- [123] M Sullivan et al. SNLS3: Constraints On Dark Energy Combining The Supernova Legacy Survey Three-Year Data With Other Probes. *The Astrophysical Journal*, 737(2):102–119, August 2011.
- [124] A Conley et al. Supernova Constraints And Systematic Uncertainties From The First Three Years Of The Supernova Legacy Survey. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(1):1–29, December 2010.
- [125] Max Tegmark et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Physical Review D*, 74(12):123507–34, December 2006.

- [126] Uroš Seljak et al. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly α forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy. *Physical Review D*, 71(10):103515–20, May 2005.
- [127] Max Tegmark et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Physical Review D*, 69(10):103501–26, May 2004.
- [128] Daniel J Eisenstein et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560–15, November 2005.
- [129] G J Hill et al. The Hobby-Eberly Telescope Dark Energy Experiment (HETDEX): Description and Early Pilot Survey Results. *arXiv.org*, June 2008.
- [130] L N Granda and E Loaiza. Exact solutions in a scalar-tensor model of dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(09):011–011, September 2012.
- [131] L N Granda and E Loaiza. Big Rip And Little Rip Solutions In Scalar Model With Kinetic And Gauss–Bonnet Couplings . *International Journal of Modern Physics D*, 21(01):1250002–13, January 2012.
- [132] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 1. Wiley New York, 1972.
- [133] C. L. Bennett et al. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *ApJ*, 2012.
- [134] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolte, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, J. L. Weiland, B. Gold, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19, 2013.
- [135] Adam G Riess and Lucas M Macri. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *arXiv.org*, April 2016.
- [136] S. Capozziello and G. Lambiase. Nonminimal derivative coupling and the recovering of cosmological constant. *Gen. Rel. Grav.*, 31:1005–1014, 1999.
- [137] Shin’ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Shinji Tsujikawa. Properties of singularities in (phantom) dark energy universe. *Phys. Rev.*, D71:063004, 2005.
- [138] M. Farhoudi. Lovelock tensor as generalized Einstein tensor. *Gen. Rel. Grav.*, 41:117–129, 2009.

- [139] R. R. Metsaev and Arkady A. Tseytlin. Order alpha-prime (Two Loop) Equivalence of the String Equations of Motion and the Sigma Model Weyl Invariance Conditions: Dependence on the Dilaton and the Antisymmetric Tensor. *Nucl. Phys.*, B293:385–419, 1987.
- [140] C. Cartier, Edmund J. Copeland, and R. Madden. The Graceful exit in string cosmology. *JHEP*, 01:035, 2000.
- [141] Ishwaree P. Neupane. On compatibility of string effective action with an accelerating universe. *Class. Quant. Grav.*, 23:7493–7520, 2006.
- [142] Tsutomu Kobayashi, Masahide Yamaguchi, and Jun’ichi Yokoyama. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. *Prog. Theor. Phys.*, 126:511–529, 2011.
- [143] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Generalized Galileon cosmology. *Phys. Rev.*, D84:124029, 2011.
- [144] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models. *JCAP*, 1202:007, 2012.
- [145] Antonio De Felice, Tsutomu Kobayashi, and Shinji Tsujikawa. Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations. *Phys. Lett.*, B706:123–133, 2011.
- [146] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. The Final state and thermodynamics of dark energy universe. *Phys. Rev.*, D70:103522, 2004.
- [147] Spiros Cotsakis and Ifigeneia Klaoudatou. Future singularities of isotropic cosmologies. *J. Geom. Phys.*, 55:306–315, 2005.
- [148] Mariusz P. Dabrowski and Tomasz Denkiewicz. Exotic-singularity-driven dark energy. *AIP Conf. Proc.*, 1241:561–570, 2010.
- [149] Krzysztof A. Meissner. Symmetries of higher order string gravity actions. *Phys. Lett.*, B392:298–304, 1997.
- [150] J D Barrow, G J Galloway, and F J Tipler. The closed-universe recollapse conjecture. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 223(4):835–844, December 1986.
- [151] John D Barrow. Sudden future singularities. *Classical and Quantum Gravity*, 21(11):L79, 2004.
- [152] H Stefancic. Expansion around the vacuum equation of state: Sudden future singularities and asymptotic behavior. *Physical Review D*, 71(8):084024–9, April 2005.

- [153] I Brevik and O Gorbunova. Dark energy and viscous cosmology. *General Relativity and Gravitation*, 37(12):2039–2045, October 2005.
- [154] Mariusz P Dabrowski. Statefinders, higher-order energy conditions, and sudden future singularities. *Physics Letters B*, 625(3-4):184–188, October 2005.
- [155] Mariam Bouhmadi-López, Pedro F González-Díaz, and Prado Martín-Moruno. Worse than a big rip? *Physics Letters B*, 659(1):1–5, January 2008.
- [156] John D Barrow. Graduated inflationary universes. *Physics Letters B*, 235(1-2):40–43, January 1990.
- [157] Yi-Fu Cai and Jing Wang. Dark Energy Model with Spinor Matter and Its Quintom Scenario. *Class. Quant. Grav.*, 25:165014, 2008.
- [158] I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Viscous Little Rip Cosmology. *Phys. Rev.*, D84:103508, 2011.
- [159] Paul H. Frampton, Kevin J. Ludwick, Shin’ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Robert J. Scherrer. Models for Little Rip Dark Energy. *Phys. Lett.*, B708:204–211, 2012.
- [160] Paul H. Frampton, Kevin J. Ludwick, and Robert J. Scherrer. The Little Rip. *Phys. Rev.*, D84:063003, 2011.
- [161] Jack Carr. *Applications of centre manifold theory*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2012.
- [162] Stephen Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [163] Tomi Koivisto and David F. Mota. Cosmology and Astrophysical Constraints of Gauss-Bonnet Dark Energy. *Phys. Lett.*, B644:104–108, 2007.
- [164] Addolorata Marasco and Antonio Romano. *Scientific Computing with Mathematica®: Mathematical Problems for Ordinary Differential Equations; with a CD-ROM*. Springer Science & Business Media, 2001.