

El problema de Christoffel en el espacio hiperbólico

Jeison Benavides L.

Octubre, 2019

Universidad del Valle



Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas

Trabajo presentado para optar al título de Matemático

El problema de Christoffel en el espacio hiperbólico

Jeison Benavides L.

Evaluador **Por definir**
Universidad del valle

Director **Héber Mesa P.**
Universidad del Valle

Octubre, 2019

Jeison Benavides L.

El problema de Christoffel en el espacio hiperbólico

Trabajo presentado para optar al título de Matemático, Octubre, 2019

Evaluador: Por definir

Director: Héber Mesa P.

Universidad del Valle

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Calle 13 # 100-00, Edificio 320, Ciudadela Universitaria Meléndez

76001 - Cali

Resumen

El objetivo principal de este documento es presentar una formulación del problema de Christoffel en el espacio hiperbólico, $\mathbb{H}^{n+1}$. Éste problema es bien conocido en el espacio euclidiano, $\mathbb{R}^3$, y consiste en determinar una superficie convexa una vez se ha predeterminado su aplicación de Gauss y el promedio de los radios de curvatura en cada uno de sus puntos. Para hacer un planteamiento similar se presentan dos modelos del espacio hiperbólico, a saber, el modelo de la bola de Poincaré y el modelo Lorentziano, y una noción de convexidad basada en horoesferas; además, se define la aplicación hiperbólica de Gauss, la cual tendrá un papel similar a la aplicación de Gauss para hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$. Como resultado de la formulación del problema de Christoffel se obtiene una relación con el problema de Nirenberg sobre $\mathbb{S}^n$. El presente trabajo se presenta como una descripción de los resultados obtenidos por J. Espinar, J. Galvez y P. Mira en el artículo «Hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}$ and conformally invariant equations: the generalized Christoffel and Nirenberg problems».

Abstract

The aim of this work is to present a formulation of the Christoffel problem in the hyperbolic space, $\mathbb{H}^{n+1}$. This problem is well known in the Euclidean space, $\mathbb{R}^3$, and consists in determining a convex surface predetermining its Gauss map and the average of the radii of curvature at each point. In order to have a similar approaching we present two models of the hyperbolic space, the Poincaré disk model and the Lorentzian model, and a notion of convexity based on horospheres; besides, the hyperbolic Gauss map is defined, which have a role similar to the Gauss map for hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$. As a consequence of the formulation of the Christoffel problem a relation with the Nirenberg problem on $\mathbb{S}^n$ is obtained. This paper is presented as a description of the results obtained by J. Espinar, J. Galvez and P. Mira in the article «Hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}$ and conformally invariant equations: the generalized Christoffel and Nirenberg problems».

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado principalmente a mi madre y a todas aquellas personas que, de alguna forma, son parte de su culminación. Al profesor Heber y maestros a quienes les debo gran parte de mis conocimientos, gracias a su paciencia y enseñanza y finalmente un eterno agradecimiento a esta prestigiosa universidad la cual me abrió sus puertas.

Índice general

Resumen	v
Introducción	1
1 Preliminares	5
1.1 Variedad riemanianna	5
1.2 Curvatura	9
1.3 Inmersiones isométricas	10
1.4 Gradiente, Hessiano y Laplaciano sobre una variedad riemanianna	11
2 Dos modelos del espacio hiperbólico	13
2.1 Modelo Lorentziano	13
2.1.1 Geodesicas en $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle\langle, \rangle\rangle)$	17
2.2 Modelo de la Bola de Poincaré	19
2.2.1 Geodesicas en $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$	22
3 La aplicación hiperbólica de Gauss y una noción de convexidad en $\mathbb{H}^{n+1}$	25
3.1 Horoesferas	25
3.2 El mapa hiperbólico de Gauss	28
3.3 Métrica horoesférica	29
3.4 Convexidad horoesférica	35
4 Los problemas de Christoffel y Nirenberg	41
4.1 Radios de curvatura hiperbólica	41
4.2 El problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$	42
4.3 Relación entre el problema de Nirenberg sobre $\mathbb{S}^n$ y el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$	44
A Apéndice	55
A.1 Métricas conformes	55
A.2 Test de la segunda derivada	60
Bibliografía	61
Índice de figuras	63

Introducción

“La geometría existe en todas partes. Pero se necesitan ojos para verlo, inteligencia para comprenderlo y alma para admirarlo.

— Johannes Kepler

El problema de Christoffel en $\mathbb{R}^{n+1}$, bastante conocido en geometría diferencial, consiste en encontrar una hipersuperficie estrictamente convexa $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con aplicación de Gauss preestablecida por un difeomorfismo $G : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ y cuyo promedio de los radios de curvatura en un punto esté dado también por una función preestablecida $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida como,

$$F(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i(p), \quad R_i(p) = \frac{1}{k_i(f(p))},$$

donde $k_1, \dots, k_n$ son las curvaturas principales de la hipersuperficie f .

La existencia y unicidad de la solución a dicho problema en $\mathbb{R}^3$ fue tratada por primera vez por E. Christoffel [Chr65]. Los argumentos de Christoffel reposan dando condiciones necesarias y suficientes para F de tal manera que el problema tenga solución, concluyendo que F debe satisfacer ciertas ecuaciones diferenciales parciales, además Christoffel logra construir la superficie a partir de F . Sin embargo, A. Alexandrov en [Ale37] señala que las condiciones dadas por Christoffel no son suficientes para asegurar que F corresponde con una función que promedia los radios de curvatura para una superficie cerrada y convexa, así la discusión dada por Christoffel queda incompleta. Después de Christoffel el problema fue tratado de nuevo por A. Hurtwiz [Hur02], D. Hilberth [Hil06], T. Kubota [Tad25], entre otros, también de forma incompleta, siendo finalmente resuelto en forma general en 1967 por W. Firey [Fir67; Fir68].

Resulta natural preguntarse por una extensión del problema de Christoffel a otros espacios ambiente, en especial al espacio hiperbólico; en este caso, el problema no se puede plantear de la misma manera, puesto que algunos conceptos pierden su

sentido geométrico, haciendo sutil una posible formulación. La aplicación de Gauss, los radios de curvatura y la convexidad requieren ser sustituidos para tal objetivo. Para el caso de la aplicación de Gauss de una hipersuperficie $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ la dificultad radica en que ésta no tiene codominio identificable con $\mathbb{S}^n$; en consecuencia, se sustituirá la aplicación de Gauss por lo que llamaremos la aplicación hiperbólica de Gauss, denotada como $G : M^n \rightarrow \mathbb{S}_\infty^n$ donde $\mathbb{S}_\infty^n$ es la frontera ideal del espacio hiperbólico $n + 1$ -dimensional. La convexidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ la sustituiremos por una noción de convexidad en $\mathbb{H}^{n+1}$ determinada a través de horoesferas, tratando de emular la convexidad determinada con planos en $\mathbb{R}^{n+1}$. Los radios de curvatura serán sustituidos por los radios de curvatura hiperbólica, resulta natural hacer dicho cambio, pues en el caso de $\mathbb{R}^{n+1}$ los radios de curvatura están relacionados con la aplicación de Gauss, la cual será sustituida. Los elementos anteriores permitirán un enunciado del problema en $\mathbb{H}^{n+1}$ análogo a su versión de $\mathbb{R}^{n+1}$, donde tiene sentido preestablecer a través de un difeomorfismo la aplicación hiperbólica de Gauss como sería de esperarse.

Una vez planteado el problema de Christoffel para hipersuperficies hiperbólicas, se puede demostrar, que éste se relaciona con el también conocido problema de Nirenberg, el cual consiste en determinar para la n -esfera $\mathbb{S}^n$ una métrica, g , conforme a la euclídea, g_0 . Específicamente, determinar $\rho : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que la curvatura escalar de la variedad riemanianna $(\mathbb{S}^n, e^{2\rho}g_0)$ es una aplicación preestablecida S , lo que resulta siendo equivalente a la existencia de una solución ρ sobre $\mathbb{S}^n$ para la siguiente ecuación diferencial parcial elíptica no lineal

$$\begin{cases} -\Delta^{g_0} \rho + 1 = \frac{e^{2\rho}}{2} S(x) & \text{si } n = 2, \\ -\Delta^{g_0} u + \frac{n(n-2)}{4} u = \frac{n-2}{4(n-1)} S(x) u^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{si } n > 2, \text{ donde } u^{\frac{4}{n-2}} := e^{2\rho}. \end{cases} \quad (0.1)$$

El problema de Nirenberg ha sido uno de los principales temas en ecuaciones diferenciales parciales elípticas, para solucionar la ecuación anterior necesariamente $S(x) > 0$, sin embargo J. Kazdan y F. Warner [KW75] dan ejemplos de funciones positivas $S(x)$ tal que (0.1) no tiene solución, mostrando que el problema anterior rara vez es soluble. La determinación del conjunto de todas las funciones S de modo que el problema (0.1) tenga una solución aún está abierta, aunque se han dedicado estudios intensivos a este problema tratando de entender bajo qué condiciones este problema tiene solución, ver [AM01; Bia96; BC91].

El presente documento se encuentra organizado en la siguiente manera, en el capítulo 1 se presentan algunas definiciones y resultados básicos de la geometría riemanianna, específicamente introduciremos los conceptos de variedad riemanianna, conexión Levi-Civita, tensor de curvatura, curvatura de Ricci, ecuación de Gauss y gradiente, hessiano y laplaciano de una función de valor real sobre una variedad

riemanianna, los cuales usaremos a lo largo del trabajo. En el capítulo 2, introduciremos el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ y definiremos el modelo Lorentziano del espacio hiperbólico en el cual describiremos elementos como conexión riemanianna y geodésicas. A partir de dicho modelo construiremos el modelo de la bola de Poincaré. En el capítulo 3, se definirán las horoesferas, las cuales caracterizaremos en el modelo Lorentziano con el fin de definir la aplicación hiperbólica de Gauss; también estudiaremos el espacio de horoesferas dotandolo de una estructura de variedad semirriemanianna. Por último daremos una noción de convexidad en $\mathbb{H}^{n+1}$ basada en horoesferas en lugar de planos como se hace $\mathbb{R}^{n+1}$. En el capítulo 4 se realiza un planteamiento del problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ y se muestra que este planteamiento está relacionado con el problema de Nirenberg en $\mathbb{S}^n$, todo esto gracias a una fórmula de representación para hipersuperficies hiperbólicas, en términos de la aplicación de Gauss hiperbólica y la función de soporte horoesférico.

Preliminares

” La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal.

— Henri Poincaré.

En este capítulo fijaremos la notación que vamos a seguir a lo largo del documento y recogemos algunos resultados y conceptos básicos de la geometría riemanianna.

1.1 Variedad riemanianna

El objetivo de esta sección es presentar la definición de variedad riemanianna y algunos resultados concernientes a dicho concepto.

Definición 1.1 (Variedad diferenciable) Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones inyectivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tales que

- $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.
- Para cualquier pareja α, β , con $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ y $x_\beta^{-1}(W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ son diferenciables.
- La familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es maximal respecto a las dos condiciones anteriores.

El par (U_α, x_α) (o la aplicación x_α) con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ es llamado parametrización, carta o sistema de coordenadas de M en p y el conjunto $x_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una vecindad coordenada en p . Cualquier familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfaga las dos primeras condiciones de la definición anterior es llamada una estructura diferenciable para la variedad diferenciable M .

Observación 1.2 Una estructura diferenciable sobre M induce una topología natural sobre M . Es suficiente con definir $A \subset M$ abierto en M si y solo si $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ para toda α .

Dadas M^n y N^m variedades diferenciables consideremos una aplicación $\phi : M^n \rightarrow N^m$, decimos ϕ que es diferenciable en $p \in M$ si dada una parametrización $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$ en $\phi(p)$, existe una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ en p tal que $\phi(x(U)) \subset y(V)$ y la aplicación

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$; cuando ϕ es diferenciable en todo punto de su dominio diremos solamente que la función es diferenciable sin discriminar el punto.

Sea $\epsilon > 0$, una aplicación diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ será llamada curva sobre M . Suponga que $\alpha(0) = p \in M$ y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de funciones diferenciables sobre M , el vector tangente a la curva α en $t = 0$ es la aplicación $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) |_{t=0}.$$

El conjunto de todos los vectores tangentes a M en $p \in M$ será indicado por $T_p M$; un resultado conocido acerca de este conjunto es que tiene estructura de espacio vectorial (ver [DC92, pág 8]). Si $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ es una parametrización alrededor de $p \in M$ para la variedad M^n , definimos los elementos $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ como $\partial_i = \phi(te_i + \phi^{-1}(p))'(0)$, donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ representa la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Note que para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño $\phi(te_i + \phi^{-1}(p)) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es una curva sobre M que en el instante $t = 0$ pasa por p , por tanto $\partial_i \in T_p M$. No es difícil ver que $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ es base del espacio vectorial $T_p M$.

Definimos la diferencial en $p \in M$ de la aplicación $\phi : M^n \rightarrow N^m$ como la aplicación $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ tal que para $v \in T_p M$, $d\phi_p(v) = \phi' \circ \beta(0)$, donde β es una curva sobre M tal que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = v$. La aplicación ϕ se dice inmersión si $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ es inyectiva para todo $p \in M$. Si además ϕ es un homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$ con la topología inducida por N , decimos que es un encaje. Cuando $M \subset N$ y la inclusión $i : M \subset N$ es un encaje, decimos que M es subvariedad de N . El número $n - m$ es llamado codimensión de la inmersión.

Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada $p \in M$ un vector $X(p) \in T_p M$, esto es una aplicación diferenciable $X : M \rightarrow TM$ donde $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$ es la variedad diferenciable conocida como fibrado tangente (ver [DC92, pág 15]). Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ sobre M . Considerando el conjunto $\mathcal{D}$ como el conjunto de las funciones de valor real diferenciables definidas en M , un campo vectorial también puede ser pensado como una aplicación $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, ya que si tomamos una carta $(\phi = (x_1, \dots, x_n), U)$ alrededor de $p \in M$, entonces dado que $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ es base de $T_p M$ podemos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \partial_i,$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en U , así puede pensarse $X : \mathcal{D} \rightarrow TM$, definida en la siguiente manera

$$X(f) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \partial_i f.$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos el campo vectorial $[X, Y] : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

El campo anterior es conocido como bracket de X, Y .

Definición 1.3 (Variedad riemanianna) Una variedad riemanianna es un par (M, g) , donde M es una variedad diferenciable y g es una asignación suave diferenciable de formas bilineales simétricas definidas positivas en los espacios tangentes de M . Así,

$$g : p \rightarrow g(,)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

donde suave significa que todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación $g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p \rightarrow g(X(p), Y(p))_p$ es diferenciable. En adelante llamaremos a g métrica riemanianna.

Ejemplo 1.4 $(\mathbb{R}^n, g_0)$ es una variedad riemanniana, donde la métrica g_0 asigna en cada espacio tangente el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Sea $c : I \rightarrow M$ una curva sobre una variedad riemanianna (M, g) , se define el vector velocidad en $t \in I$ de la curva c como $\dot{c}(t) \in T_{c(t)} M$, tal que para $f \in \mathcal{D}$,

$$\dot{c}(t)(f) = \frac{d}{dt} (f \circ c(t)).$$

La restricción de la curva $c(t)$ a un intervalo $[a, b] \subset I$ es llamado un segmento. Si M es una variedad riemanianna, definimos la longitud de un segmento por

$$l(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))_{c(t)}} dt.$$

La definición de longitud nos permite concebir una variedad riemanianna M conexa como un espacio métrico, en forma natural definimos la distancia $d(p, q)$ entre dos puntos $p, q \in M$ como

$$d(p, q) = \{\inf(l(c)) : c \text{ es un segmento que une a } p \text{ y } q\}.$$

Sea $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo (esto es, f es una biyección diferenciable con inversa diferenciable) entre dos variedades riemanniannas (M^n, g) y $(N^m, \bar{g})$, entonces f es llamada isometría si para todo $u, v \in T_p M$ tenemos

$$\bar{g}(u, v)_p = g(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}.$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define la conexión riemannianna $\nabla_X Y$ de una variedad riemannianna (M, g) como el único campo que satisface la igualdad de Koszul (ver [DC92, pág 55]),

$$\begin{aligned} 2g(Z, \nabla_X Y) &= Yg(X, Z) + X(Z, Y) - Zg(X, Y) - g([Y, Z], X) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, X], Z). \end{aligned}$$

La conexión riemannianna ∇ , se caracteriza por tener las siguientes propiedades propiedades:

- Compatibilidad con la métrica, es decir para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.
- Simetría, es decir para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

En una variedad riemannianna (M, g) existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de α , llamado derivada covariante de V a lo largo de α tal que

- $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- $\frac{DfV}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$.
- Si $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)} Y$,

donde W es un campo diferenciable a lo largo de α y f es una función diferenciable sobre I (ver [DC92, pág 50]). Por sus propiedades la derivada covariante puede ser pensada como una generalización de la derivada direccional del cálculo vectorial.

Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica si $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ para cada $t \in I$. En el caso de $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, la derivada covariante coincide con la derivada direccional, por ende las geodésicas son las líneas rectas, pues el hecho que $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$,

equivale a que $\gamma(t)$ tenga aceleración nula. La idea de geodésica es generalizar el concepto de recta a variedades diferenciables. Una geodésica $\alpha : I \rightarrow M$ se dice maximal si no puede ser extendida a una geodésica sobre un intervalo mas largo, es decir si no existe una geodésica $\bar{\alpha} : \bar{I} \rightarrow M$, donde $I \subset \bar{I}$ satisfaciendo $\bar{\alpha}|_I = \alpha$. Una variedad riemanianna (M, g) se dice geodesicamente completa si cada geodésica maximal es definida sobre todo $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5 (Hopf-Rinow) *Una variedad riemanianna (M, g) conexa es geodesicamente completa si y solamente si es completa.*

La demostración del anterior teorema puede consultarse en [Lee97, pág 108].

Las geodésicas quedan caracterizadas por un punto por donde pasen y su vector velocidad en dicho punto, tal y como puede verse en la siguiente proposición cuya prueba puede consultarse en [Lee97, pág 58].

Proposición 1.6 *Sea (M, g) una variedad riemanianna para cada $p \in M$, $v \in T_p M$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ existe un abierto $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y una geodésica $\alpha : I \rightarrow M$, satisfaciendo $\alpha(t_0) = p$ y $\dot{\alpha}(t_0) = v$. Cualquier otra geodésica β satisfaciendo $\beta(t_0) = p$ y $\dot{\beta}(t_0) = v$ coincide con α en su dominio común.*

1.2 Curvatura

A continuación introduciremos el tensor de curvatura, los conceptos de curvatura seccional y curvatura escalar.

La curvatura R de una variedad riemanianna (M, g) es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ una aplicación $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

definimos el tensor de curvatura como el 4-tensor

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T).$$

Los coeficientes del tensor de curvatura en un sistema de coordenadas locales $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ son definidos como

$$R_{ijkl} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l).$$

Dado un subespacio $\sigma_p \subset T_p M$ de dimensión 2 y una base $\{X, Y\}$ de σ_p se define la curvatura seccional de σ_p como

$$K(\sigma_p) = \frac{(X, Y, X, Y)}{\sqrt{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2}}.$$

Observación 1.7 El valor de $K(\sigma_p)$ no depende de la escogencia de la base de σ_p (ver [DC92, pág 94]).

El tensor de Ricci es definido como

$$Ricc(X, Y) = tr(Z \rightarrow R(X, Z)Y),$$

y sus coeficientes en coordenadas locales están dados por

$$R_{ik} = \sum_{jl} R_{ijkl} g^{ls},$$

donde g^{ls} son los coeficientes de la matriz $(g_{ls})^{-1}$. La curvatura escalar $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ evaluada en $p \in M$ se define como el producto de $n(n-1)$ con el promedio de las curvaturas seccionales de M calculadas en p (fijada una base ortonormal), puede probarse que

$$S(p) = \sum_{ik} R_{ik} g^{ik}.$$

1.3 Inmersiones isométricas

Consideremos la siguiente situación, sea $f : M \rightarrow \bar{M}$ una inmersión de la variedad M de dimension n en una variedad riemanianna $\bar{M}$ de dimensión $n+k$. La métrica riemanianna de $\bar{M}$ induce de manera natural una métrica riemanianna sobre M de la siguiente manera, si $v_1, v_2 \in T_p M$, se define $g(v_1, v_2)_p = g(df_p(v_1), df_p(v_2))_{f(p)}$. En esta situación f se convierte en una inmersión isométrica de M en $\bar{M}$, identificaremos $p \in M$ con $f(p) \in \bar{M}$ y $v \in T_p M$ con $df_p(v) \in T_{f(p)} \bar{M}$ para cada $p \in M$, el producto interno sobre $T_p \bar{M}$ descompone $T_p \bar{M}$ en la suma directa

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

donde $(T_p M)^\perp$ es el complemento ortogonal de $T_p M$ en $T_p \bar{M}$. Así todo vector $v \in T_p \bar{M}$, se descompone como $v = v^T + v^\perp$, donde $v^T \in T_p M$ y $v^\perp \in (T_p M)^\perp$. La conexión riemanianna de $\bar{M}$ induce una conexión riemanianna en M determinada como $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T$, y se puede verificar que esta es la conexión riemanianna relativa a la métrica inducida por f .

Dados campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos

$$\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Dado que $(\bar{\nabla})^T = \nabla$, la anterior igualdad se reescribe como

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y), \quad (1.1)$$

la cual se conoce como fórmula de Gauss, donde se ha definido la aplicación $B : TM \times TM \rightarrow (TM)^\perp$ llamada segunda forma fundamental. Usando esta fórmula se determina una relación entre las curvaturas seccionales K y $\bar{K}$ de M y $\bar{M}$ respectivamente que se conoce como ecuación de Gauss (ver [DC92, pág 130])

$$K(X, Y) - \bar{K}(X, Y) = g(B(X, X), B(Y, Y)) + \|B(X, Y)\|^2. \quad (1.2)$$

En el caso de una inmersión de codimensión de dimensión 1, i.e, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, la ecuación de Gauss tiene una forma más simple. Sean $p \in M$, $\eta \in (T_p M)^\perp$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $T_p M$ en la que el operador de forma asociado a η , verifica $A_\eta(e_i) = -(\bar{\nabla}_{e_i} \eta)^T = \lambda_i e_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la ecuación de Gauss puede ser escrita como

$$\bar{K}(e_i, e_j) - K(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \quad (1.3)$$

1.4 Gradiente, Hessiano y Laplaciano sobre una variedad riemanianna

Consideremos (M, g) una variedad riemanianna y sean $f \in \mathcal{D}$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$, y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $T_p M$ se define el gradiente de f en p como el único vector $\nabla f(p) \in T_p M$ que satisface $g_p(X, \nabla f) = X(f)$, para todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$.

El hessiano de f , $Hessf(X, Y)$, se define como $Hessf(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$ y el laplaciano de f calculado en $p \in M$, $\Delta f(p)$, como

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n Hessf(e_i, e_i).$$

Si $f = (f_1, \dots, f_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una función suave, definimos

$$\Delta f = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_k).$$

Proposición 1.8 Sea (M, g) una variedad riemanianna, $p \in M$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortogonal de $T_p M$, entonces

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i} e_i. \quad (1.4)$$

Observación 1.9 Para cada $p \in M$ existe una carta $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ tal que $g(\partial_i, \partial_i)_p = \delta_{ij}$ y $\nabla_{\partial_i} \partial_i = 0$, en este caso llamaremos a $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ referencial geodésico en p , en este sistema de coordenadas note que $\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i(\partial_i(f))$. A veces la parametrización ϕ suele ser llamada vecindad normal de p , (ver [Lee97, pág 78]).

Proposición 1.10 Sea (M, g) una variedad riemanianna, ∇ su conexión riemanianna y $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una inmersión isométrica, entonces

$$\Delta \psi = nH.$$

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ un referencial geodésico en p . Para cada $a \in \mathbb{R}^m$ considere $f_a : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_a(p) = g_0(\psi(p), a)$.

$$\begin{aligned} \Delta f_a &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f_a)) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(g_0(\psi(p), a))) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(g_0((d\psi)(e_i), a)) \\ &= \sum_{i=1}^n g_0(\nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^m} e_i, a) + g_0(e_i, \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^m} a). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Gauss (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta f_a &= \sum_{i=1}^n g_0(\nabla_{e_i} e_i + B(e_i, e_i), a) \\ &= \sum_{i=1}^n g_0(B(e_i, e_i), a) \\ &= g_0(nH, a). \end{aligned}$$

Por último, si observamos que $\Delta f_a = \Delta g_0(\psi, a) = g_0(\Delta \psi, a)$, concluimos

$$g_0(\Delta \psi - nH, a) = 0 \text{ para todo } a \in \mathbb{R}^m,$$

tomando $a = e_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que $\Delta \psi = nH$.

□

Dos modelos del espacio hiperbólico

” *La Geometría existía antes de la Creación. Es co-eterna con la mente de Dios... La Geometría ofreció a Dios un modelo para la Creación... La Geometría es Dios mismo.*

— Johannes Kepler.

En este capítulo estudiaremos el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, para ello usaremos dos modelos del espacio hiperbólico, a saber, el modelo Lorentziano y el modelo de la bola de Poincaré.

Consideraremos la siguiente definición del espacio hiperbólico y a partir de esta definición mostraremos la existencia de dos modelos mencionados para este espacio.

Definición 2.1 *El espacio hiperbólico de dimensión $n + 1$ es la variedad riemanniana $n + 1$ -dimensional, simplemente conexa y completa de curvatura seccional constante $k = -1$.*

Observación 2.2 *Es importante destacar que solo existe un espacio con las anteriores propiedades (ver [DC92, pág 163]).*

2.1 Modelo Lorentziano

El objetivo de esta sección es presentar un modelo del espacio hiperbólico, dicho modelo será construido como una subvariedad de una variedad semiriemanniana conocida como espacio de Lorentz. A lo largo de este documento usaremos las siguientes notaciones, $x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ lo denotaremos como $x = (x_0, \bar{x})$, donde tomaremos $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y la métrica euclídea será denotada por g_0 ó $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El espacio de Lorentz se define como $\mathbb{L}^{n+2} = (\mathbb{R}^{n+2}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ donde la forma bilineal $\langle \langle, \rangle \rangle$ se define para $x = (x_0, \bar{x}), y = (y_0, \bar{y}) \in \mathbb{L}^{n+2}$ como $\langle \langle x, y \rangle \rangle = -x_0 y_0 + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$.

En este espacio definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^{n+1} &= \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle\langle x, x \rangle\rangle = -1, x_0 > 0 \right\}, \\ \mathbb{N}_+^{n+1} &= \left\{ a \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle\langle a, a \rangle\rangle = 0, a_0 > 0 \right\}, \\ \mathbb{S}_1^{n+1} &= \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Los elementos de $\mathbb{N}_+^{n+1}$, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ y $\mathbb{H}^{n+1}$ serán llamados vectores de luz, vectores de tiempo y vectores de espacio, respectivamente.

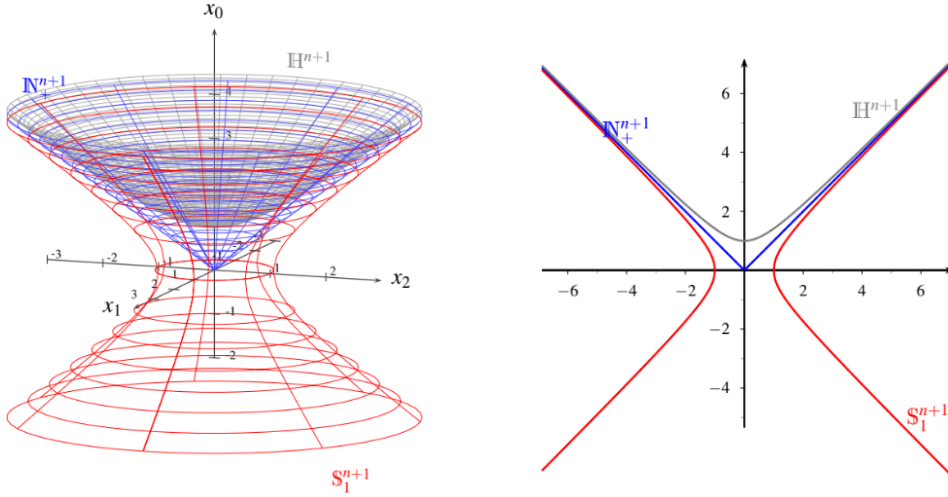


Fig. 2.1.: Representación de los conjuntos $\mathbb{N}_+^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ y $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Note que $\mathbb{H}^{n+1}$ es una hipersuperficie, si consideramos la hipersuperficie dada por el valor regular -1 de la función $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x_0, \bar{x}) = -x_0^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$, vemos que $\mathbb{H}^{n+1}$ es una componente conexa de tal hipersuperficie. A continuación probaremos que la subvariedad $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle\langle, \rangle\rangle)$ del espacio de Lorentz es el espacio hiperbólico $n + 1$ -dimensional y describiremos en este espacio elementos tales como la conexión riemanianna y las geodésicas.

Proposición 2.3 $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle\langle, \rangle\rangle)$ es una variedad riemanianna simplemente conexa.

Demostración. Los siguientes lemas nos permitirán concluir el resultado.

Lema 2.4 Sea $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ entonces $\langle\langle v, p \rangle\rangle = 0$.

Demostración. Sea $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ y una curva $\alpha(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces debe satisfacerse $\langle\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle\rangle = -1$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ pues $\alpha(t) \in \mathbb{H}^{n+1}$, luego $\frac{d}{dt} (\langle\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle\rangle) = 0$. La última igualdad equivale a $2\langle\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle\rangle = 0$, evaluando en $t = 0$ tenemos $\langle\langle v, p \rangle\rangle = 0$.

□

Lema 2.5 Sea $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ entonces $\langle \langle v, v \rangle \rangle \geq 0$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ y $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$. Si denotamos $p = (p_0, \bar{p})$ y $v = (v_0, \bar{v})$ observese que $\langle \langle p, v \rangle \rangle = -v_0 p_0 + \langle \bar{p}, \bar{v} \rangle$. Ahora, por el lema anterior $\langle \langle p, v \rangle \rangle = 0$, de lo cual se deduce $\langle \bar{p}, \bar{v} \rangle = p_0 v_0$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene $\langle \bar{p}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, así ha de tenerse $p_0^2 v_0^2 \leq \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, pero $\langle \bar{p}, \bar{p} \rangle = -1 + p_0^2$ de donde:

$$p_0^2 v_0^2 \leq (-1 + p_0^2) \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle,$$

la desigualdad anterior implica $p_0^2 (\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - v_0^2) \geq 0$, es decir,

$$-v_0^2 + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle \langle v, v \rangle \rangle \geq 0.$$

□

Lema 2.6 Sea $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ tal que $\langle \langle v, v \rangle \rangle = 0$, entonces $v = 0$.

Demostración. Supongamos $\langle \langle v, v \rangle \rangle = 0$.

Caso 1 ($v_0 = 0$).

Si $v_0 = 0$, entonces $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, lo que implica $\bar{v} = 0$ pues $\langle, \rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ que es definido positivamente, así v es el vector nulo.

Caso 2 ($v_0 \neq 0$).

Si $v_0 \neq 0$, entonces $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = v_0^2$, pero por las desigualdades anteriores sabemos que $p_0^2 v_0^2 \leq (-1 + p_0^2) \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$. Así, deducimos $p_0^2 v_0^2 \leq (-1 + p_0^2) v_0^2$ lo cual es una evidente contradicción. Luego $v_0 = 0$ y por el argumento del caso 1 el vector v es nulo.

□

De los últimos dos lemas se deduce que $\langle \langle, \rangle \rangle$ está definido positivamente en $T_p \mathbb{H}^{n+1}$ para todo $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ y como $\mathbb{H}^{n+1}$ es una variedad, se concluye que $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ es una variedad riemanianna. Veamos que $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ es simplemente conexa. Consideremos la aplicación

$$\phi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ definida por } \phi(x_0, \bar{x}) = \bar{x},$$

la aplicación anterior es la proyección del hiperboloide $\mathbb{H}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, es suficiente con probar que ϕ es un difeomorfismo ya que ser simplemente conexo es un invariante bajo difeomorfismos y $\mathbb{R}^{n+1}$ es simplemente conexo. Veamos que ϕ es inyectiva, considere

$$\phi(x_0, \bar{x}) = \phi(y_0, \bar{y}), \tag{2.1}$$

de donde $\bar{x} = \bar{y}$. Sabemos que necesariamente se tiene

$$x_0^2 - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = -1 \text{ y } y_0^2 - \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = -1, \quad (2.2)$$

de donde $x_0^2 = y_0^2$, como x_0 y y_0 son cantidades positivas se garantiza

$$(x_0, \bar{x}) = (y_0, \bar{y}).$$

Por lo tanto ϕ inyectiva. La sobreyectividad de ϕ es inmediata, en conclusión $\mathbb{H}^{n+1}$ y $\mathbb{R}^{n+1}$ son difeomorfos. Por lo tanto $\mathbb{H}^{n+1}$ es simplemente conexo.

□

Observación 2.7 Denotando por $e_i, i = 0, 1, \dots, n+1$ el $i+1$ -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+2}$, note que $\langle \langle e_0 + e_1, e_0 + e_1 \rangle \rangle = 0$. Por lo tanto $(\mathbb{L}^{n+2}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ no es variedad riemanianna. No es difícil ver que $\langle \langle, \rangle \rangle$ es una forma bilineal simétrica de índice 1.

Calculemos la conexión riemanianna del espacio de Lorentz. Tomando $X : U = \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ como la función identidad, obtenemos una parametrización de todo $\mathbb{R}^{n+2}$ usando una sola carta (X, U) , así la conexión de Levi-Civita quedará definida sobre toda la variedad, y no es difícil ver que $\partial_i = e_{i-1}$ para $i = 1, \dots, n+1$ donde e_{i-1} es el i -ésimo vector de la base canónica. Calculando la matriz g

$$g = \begin{pmatrix} \langle \langle e_0, e_0 \rangle \rangle & \langle \langle e_0, e_1 \rangle \rangle & \cdots & \langle \langle e_0, e_{n+1} \rangle \rangle \\ \langle \langle e_1, e_0 \rangle \rangle & \langle \langle e_1, e_1 \rangle \rangle & \cdots & \langle \langle e_1, e_{n+1} \rangle \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \langle e_{n+1}, e_0 \rangle \rangle & \langle \langle e_{n+1}, e_1 \rangle \rangle & \cdots & \langle \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \rangle \end{pmatrix},$$

con un simple calculo $g_{11} = -1$ y $g_{ij} = \delta_{ij}$ para $i, j > 1$, es decir :

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego las funciones g_{ij} son todas constantes, así reemplazando en la siguiente fórmula para hallar los símbolos de Christoffel (ver [DC92, pág 56])

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}, \quad (2.3)$$

donde $g_{ij} = \langle \langle \partial_i, \partial_j \rangle \rangle$ y (g^{km}) es la matriz inversa de (g_{km}) , tenemos que $\Gamma_{ij}^m = 0$. Esto permite concluir que la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}$ es la misma que la de

$\mathbb{L}^{n+2}$, la cual denotaremos simplemente por $\nabla^{\mathbb{R}^{n+2}}$. Note que para todo $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ se tiene

$$T_p \mathbb{L}^{n+2} = T_p \mathbb{H}^{n+1} \oplus \text{Gen}\{p\},$$

así todo $v \in T_p \mathbb{L}^{n+2}$, se descompone como $v = v^T + v^\perp$, donde $v^T \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ y $v^\perp \in \text{Gen}\{p\}$.

Proposición 2.8 Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ entonces

$$\nabla_X^{\mathbb{H}^{n+1}} Y = \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+2}} Y^T$$

donde $\nabla^{\mathbb{H}^{n+1}}$ es la conexión Levi-Civita de $\mathbb{H}^{n+1}$.

Ahora denotemos por K la curvatura seccional de $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$, veamos que K es constante e igual a -1 . Considere $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ y $\eta : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow T\mathbb{H}^{n+1}$, $\eta(p) = p$, partiendo de

$$X \langle \langle \eta, Y \rangle \rangle = 0,$$

por la compatibilidad de la métrica en la igualdad anterior obtenemos

$$\langle \langle \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+2}} Y, \eta \rangle \rangle = -\langle \langle Y, \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+2}} \eta \rangle \rangle = -\langle \langle X, Y \rangle \rangle.$$

Por lo tanto si consideramos $\mathbb{H}^{n+1}$ como subvariedad de $\mathbb{L}^{n+2}$, la segunda forma fundamental B de esta inmersión esta dada por

$$B(X, Y) = \langle \langle X, Y \rangle \rangle \eta.$$

Por la ecuación de Gauss, si tomamos $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ una base ortonormal de $T_p \mathbb{H}^{n+1}$

$$K(e_i, e_j) = -1.$$

Lo que prueba que la curvatura seccional es constante igual a -1 .

2.1.1 Geodesicas en $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$

Dados $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ y $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$, determinaremos la parametrización de la geodésica en $\mathbb{H}^{n+1}$ que pasa por p con velocidad $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$. Sea $\gamma(t)$ tal geodésica entonces, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ y $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

$$\gamma(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)).$$

De la definición de geodésica tenemos

$$0 = \frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = (\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{\mathbb{R}^{n+2}} \dot{\gamma}(t))^T,$$

donde $\frac{D}{dt}$ es la derivada covariante. Usando un sistema local de coordenadas (U, X) se satisface

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{\mathbb{R}^{n+2}} \dot{\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \partial_k. \quad (2.4)$$

Tomando $U = \mathbb{R}^{n+2}$ y X como la identidad en $\mathbb{R}^{n+2}$, queda definida la expresión anterior sobre todo $\mathbb{R}^{n+2}$, dado que $\Gamma_{ij}^k = 0$ y $\partial_k = e_k$ tenemos

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{\mathbb{R}^{n+2}} \dot{\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{d^2 x_k}{dt^2} e_k = \ddot{\gamma}(t).$$

Deseamos que $(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^{\mathbb{R}^{n+2}} \dot{\gamma}(t))^T = 0$ lo que equivale a $\ddot{\gamma}(t) \in \text{Gen}\{\gamma(t)\}$ para todo $t \in I$, un candidato para $\gamma(t)$ es

$$\gamma(t) = p \cosh(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|} \sinh(\|v\|t). \quad (2.5)$$

Las condiciones $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ y $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ son satisfechas por (2.5), no es difícil ver que $\ddot{\gamma}(t) \in \text{Gen}\{\gamma(t)\}$ ya que $\ddot{\gamma}(t) = \|v\|^2 \gamma(t)$. Por lo tanto $0 = \frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt}$ y así hemos resuelto el problema, pues la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (2.4) tiene solución única dados los valores iniciales $\gamma(0)$ y $\dot{\gamma}(0)$.

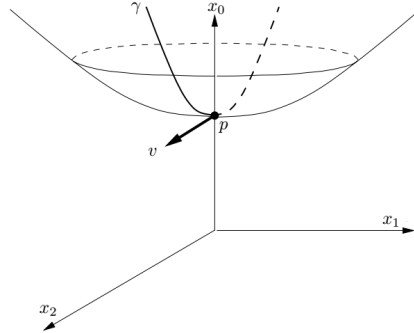


Fig. 2.2.: Representación de una geodésica en $\mathbb{H}^2$.

Observación 2.9 La representación de una geodésica como se ha obtenido en la proposición anterior, básicamente puede verse el trazo de las geodésicas como intersecciones de planos en $\mathbb{L}^{n+2}$ que pasan por el origen con $\mathbb{H}^{n+1}$.

Proposición 2.10 La variedad riemanianna $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ es completa.

Demostración Consideremos una geodésica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tomemos $t_0 \in I$, luego $\alpha(t_0) = q \in \mathbb{H}^{n+1}$ y $\dot{\alpha}(t_0) = w \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$. Defina $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, como

$$\gamma(t) = q \cosh(|w|(t - t_0)) + \frac{w}{|w|} \sinh(|w|(t - t_0)),$$

observe que $\gamma''(t) = |w|^2 \gamma(t) \in \text{Gen}\{\gamma\}$ lo que implica que esta última curva es geodésica, además $\gamma(t_0) = q$ y $\dot{\gamma}(t_0) = w$, así por proposición 1.6 se tiene $\gamma|_I = \alpha$. En conclusión toda geodésica se puede extender a una geodésica definida sobre $\mathbb{R}$, por lo tanto toda geodésica maximal es definida sobre $\mathbb{R}$. Lo anterior demuestra que $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ es geodesicamente completo y por teorema 1.5 tenemos que es completa.

□

Definición 2.11 Definimos el modelo Lorentziano del espacio hiperbólico como la variedad riemanniana $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$.

2.2 Modelo de la Bola de Poincaré

En esta sección construiremos el modelo de la Bola de Poincaré del espacio hiperbólico, lo construiremos a partir del modelo Lorentziano. Sea $\mathbb{B}^{n+1}$ la bola unitaria de $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada en el origen, dotemos este conjunto con la métrica

$$g_p = \left(\frac{2}{1 - \|p\|^2} \right)^2 g_0.$$

A continuación se mostrará que esta variedad riemanniana es isométrica al modelo Lorentziano del espacio hiperbólico. Definamos la siguiente aplicación $\Pi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ tal que para $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, $\Pi(x) = \bar{y} \in \mathbb{B}^{n+1}$, de tal manera que el punto $(0, \bar{y})$ se encuentra en la recta de $\mathbb{L}^{n+2}$ que pasa por los puntos x y $(-1, 0, \dots, 0)$, ver Figura 2.3.

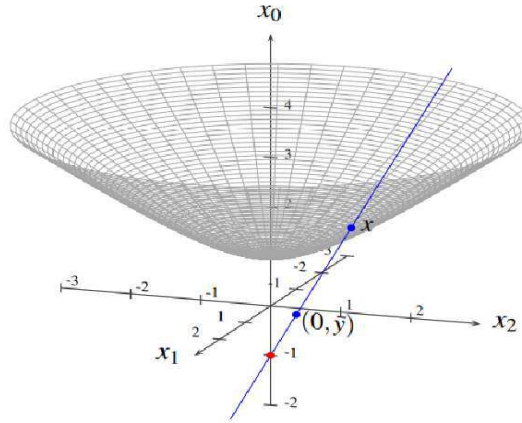


Fig. 2.3.: Proyección del punto x .

Observación 2.12 Note que Π puede considerarse como una proyección estereográfica de $\mathbb{H}^{n+1}$ desde el polo sur, tomando como polo sur el punto $(-1, 0, \dots, 0)$.

Proposición 2.13 $\Pi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ y $\Pi^{-1} : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ están dadas respectivamente por

$$\Pi(x) = \frac{\bar{x}}{1+x_0} \quad \text{y} \quad \Pi^{-1}(\bar{y}) = \frac{1}{1-\|\bar{y}\|^2}(1+\|\bar{y}\|^2, 2\bar{y}).$$

Estos difeomorfismos son isometrías entre el modelo Lorentziano del espacio hiperbólico y la variedad riemanianna $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$.

Demostración. Note que si $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, entonces $\langle x, x \rangle = -1 + x_0^2$, por tanto

$$\langle \Pi(x), \Pi(x) \rangle = \left\langle \frac{\bar{x}}{1+x_0}, \frac{\bar{x}}{1+x_0} \right\rangle = \frac{1}{(1+x_0)^2} \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \frac{x_0^2 - 1}{(1+x_0)^2} = 1 - \frac{2}{1+x_0}.$$

Dado que $x_0 \geq 1$, esto último implica que $\|\Pi(x)\| < 1$ es decir $\Pi(\mathbb{H}^{n+1}) \subset \mathbb{B}^{n+1}$. Ahora veamos que $\Pi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ es un difeomorfismo, mostremos primero que esta función es inyectiva. Sean $x = (x_0, \bar{x}), y = (y_0, \bar{y}) \in \mathbb{H}^{n+1}$ entonces si se verifica $\Pi(x) = \Pi(y)$, se obtiene que

$$\bar{x} = \frac{1+x_0}{1+y_0} \bar{y}.$$

Dado que x, y son elementos en $\mathbb{H}^{n+1}$ observamos que

$$-1 = -x_0^2 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = -x_0^2 + \left(\frac{1+x_0}{1+y_0} \right)^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = -x_0^2 + \left(\frac{1+x_0}{1+y_0} \right)^2 (y_0^2 - 1).$$

Por tanto

$$\frac{x_0^2 - 1}{y_0^2 - 1} = \left(\frac{1+x_0}{1+y_0} \right)^2,$$

determinando $x_0 = y_0$.

La última igualdad nos lleva a $\bar{x} = \bar{y}$, y así, $x = y$. Por lo tanto la función $\Pi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ es inyectiva. Mostremos que Π es sobreyectiva. Sea $\bar{y} \in \mathbb{B}^{n+1}$ entonces considere $x = \frac{1}{1-\|\bar{y}\|^2}(1+\|\bar{y}\|^2, 2\bar{y})$ y note que

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= - \left(\frac{1+\|\bar{y}\|^2}{1-\|\bar{y}\|^2} \right)^2 + \frac{4}{(1-\|\bar{y}\|^2)^2} \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \\ &= - \left(\frac{1+\|\bar{y}\|^2}{1-\|\bar{y}\|^2} \right)^2 + \frac{4}{(1-\|\bar{y}\|^2)^2} \|\bar{y}\|^2 \\ &= \frac{-1-2\|\bar{y}\|^2-\|\bar{y}\|^4}{(1-\|\bar{y}\|^2)^2} + \frac{4}{(1-\|\bar{y}\|^2)^2} \|\bar{y}\|^2 \\ &= - \frac{1-2\|\bar{y}\|^2+\|\bar{y}\|^4}{(1-\|\bar{y}\|^2)^2} \\ &= -1, \end{aligned}$$

es decir $x \in \mathbb{H}^{n+1}$. Además,

$$\Pi(x) = \Pi\left(\frac{1}{1 - \|\bar{y}\|^2} (1 + \|\bar{y}\|^2, 2\bar{y})\right) = \frac{\frac{2\bar{y}}{1 - \|\bar{y}\|^2}}{1 + \frac{1 + \|\bar{y}\|^2}{1 - \|\bar{y}\|^2}} = \bar{y}.$$

Los razonamientos anteriores nos permiten concluir que $\Pi^{-1} : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ esta dada por

$$\Pi^{-1}(\bar{y}) = \frac{1}{1 - \|\bar{y}\|^2} (1 + \|\bar{y}\|^2, 2\bar{y}).$$

Las expresiones halladas para Π^{-1} y Π permiten concluir que ambas son diferenciables, pues cada componente son cocientes de polinomios, por consiguiente $\Pi : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ es un difeomorfismo. Probaremos solamente que Π^{-1} es una isometría, para Π el proceso es análogo, luego es suficiente con probar que

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \langle d\Pi_p^{-1}(e_i), d\Pi_p^{-1}(e_j) \rangle_{\Pi^{-1}(p)},$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ es una base ortonormal de $T_p\mathbb{B}^{n+1}$. Para calcular $d\Pi_p^{-1}(e_i)$ consideremos una curva α tal que para algún $\epsilon > 0$ verifique $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ y $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = e_i$. Podríamos tomar $\alpha(t) = p + e_i t$ que cumple con los requisitos anteriores, entonces

$$\begin{aligned} d\Pi_p^{-1}(e_i) &= \frac{d}{dt} \left(\Pi^{-1} \circ \alpha(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 - \|\alpha(t)\|^2} (1 + \|\alpha(t)\|^2, 2\alpha(t)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 - \|p + e_i t\|^2} (1 + \|p + e_i t\|^2, 2p + 2e_i t) \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{d}{dt} \left(\|p + e_i t\|^2 \right) \Big|_{t=0} = 2 \langle p + e_i t, e_i \rangle \Big|_{t=0} = \langle p, e_i \rangle = 2p_i,$$

así,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 - \|p + e_i t\|^2} \right) \Big|_{t=0} = \frac{2p_i}{(1 - \|p\|^2)^2}.$$

Usando los últimos hechos note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 - \|p + e_i t\|^2} (1 + \|p + e_i t\|^2, 2p + 2e_i t) \right) \Big|_{t=0} \\ = \frac{2}{1 - \|p\|^2} \left(p_i \Pi^{-1}(p) + (p_i, e_i) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle \langle d\Pi_p^{-1}(e_i), d\Pi_p^{-1}(e_j) \rangle \rangle_{\Pi^{-1}(p)} &= \langle \langle \frac{2}{1 - \|p\|^2} (p_i \Pi^{-1}(p) + (p_i, e_i)), \frac{2}{1 - \|p\|^2} (p_j \Pi^{-1}(p) + (p_j, e_j)) \rangle \rangle \\
&= \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} \langle \langle (p_i \Pi^{-1}(p) + (p_i, e_i), p_j \Pi^{-1}(p) + (p_j, e_j)) \rangle \rangle
\end{aligned}$$

lo que equivale a

$$\frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} (p_i p_j \langle \langle \Pi^{-1}(p), \Pi^{-1}(p) \rangle \rangle + 2 \langle \langle (p_i, e_i), p_j \Pi^{-1}(p) \rangle \rangle + \langle \langle (p_i, e_i), (p_j, e_j) \rangle \rangle),$$

pero analizando el segundo factor en la última expresión vemos que

$$\begin{aligned}
&p_i p_j \langle \langle \Pi^{-1}(p), \Pi^{-1}(p) \rangle \rangle + 2 \langle \langle (p_i, e_i), p_j \Pi^{-1}(p) \rangle \rangle + \langle \langle (p_i, e_i), (p_j, e_j) \rangle \rangle \\
&= -p_i p_j + 2 \frac{-(1 + \|p\|^2)p_i p_j + 2p_i p_j}{1 - \|p\|^2} - p_i p_j + \langle e_i, e_j \rangle \\
&= -2p_i p_j + 2 \frac{(1 - \|p\|^2)p_i p_j}{1 - \|p\|^2} + \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos conseguido mostrar que

$$\langle \langle d\Pi_p^{-1}(e_i), d\Pi_p^{-1}(e_j) \rangle \rangle_{\Pi^{-1}(p)} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|p\|^2)^2}.$$

En conclusión

$$\langle \langle d\Pi_p^{-1}(e_i), d\Pi_p^{-1}(e_j) \rangle \rangle_{\Pi^{-1}(p)} = g_{ij}.$$

□

De la proposición anterior se concluye que la variedad riemanianna $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$ tiene curvatura seccional constante $k = -1$. Dado que $\mathbb{B}^{n+1}$ es simplemente conexo se obtiene que esta variedad riemanianna es el espacio hiperbólico $n + 1$ – dimensional. Resumiremos esto en la siguiente definición.

Definición 2.14 Se define el modelo de la bola de Poincaré del espacio hiperbólico como la variedad riemanianna $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$.

En esta variedad riemanianna definimos la frontera ideal, o en infinito, del espacio hiperbólico como la frontera topológica de $\mathbb{B}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ y lo denotaremos como $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$ ó $\mathbb{S}_\infty^n$.

2.2.1 Geodesicas en $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$

Dado que $\Pi : (\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle) \rightarrow (\mathbb{B}^{n+1}, g)$ es una isometría se describirán las geodésicas de $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$ vistas como imágenes de las geodésicas de $(\mathbb{H}^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$ por Π . Sabemos que el

trazo de las geodésicas en el modelo lorentziano, corresponden a intersecciones de planos en $\mathbb{L}^{n+2}$ que pasan por el origen con el hiperbolóide, generando hipérbolas. Un plano en $\mathbb{L}^{n+2}$ está dado por un vector fijo $p = (p_0, \bar{p}) \in \mathbb{L}^{n+2}$ y satisface la relación $p_0 x_0 + \langle \bar{x}, \bar{p} \rangle = 0$. Así, si $\beta(t)$ es geodésica tenemos que se satisface $p_0 \beta_0 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle = 0$ para algún p , eso implicaría que sin pérdida de generalidad podemos suponer $\beta_0 = \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle$ eligiendo un $p = (p_0, \bar{p})$ apropiado, luego

$$\Pi(\beta) = \frac{\bar{\beta}}{1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\bar{\beta}}{1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle} - \bar{p} \right\|^2 &= \frac{1}{(1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle)^2} \langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle - \frac{2}{1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle} \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle)^2} (\langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle - 2\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle(1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle) + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle) \\ &= \frac{1}{(1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle)^2} (\langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle - 2\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle - 2\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle^2) + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + \langle \bar{\beta}, \bar{\alpha} \rangle)^2} (\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle^2 - 1 - 2\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle - 2\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle^2) + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \\ &= \frac{-1}{(1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle)^2} (\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle^2 + 2\langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle + 1) + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \\ &= -1 + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle, \end{aligned}$$

y así hemos obtenido que

$$\left\| \frac{\bar{\beta}}{1 + \langle \bar{\beta}, \bar{p} \rangle} - \bar{p} \right\|^2 = -1 + \langle \bar{p}, \bar{p} \rangle. \quad (2.6)$$

Si $\langle \bar{p}, \bar{p} \rangle \leq 1$ la ecuación (2.6) describe un conjunto vacío o un solo punto, así en este caso no tendríamos geodésica, pero si $\langle \bar{p}, \bar{p} \rangle > 1$ la ecuación (2.6) describe circunferencias de radio $\sqrt{\langle \bar{p}, \bar{p} \rangle - 1}$ con centro en $\bar{p}$. Para un punto u_0 donde la circunferencia interseca la frontera de la bola unitaria, si consideramos el triángulo formado por 0 , u_0 y $\bar{p}$ tiene lados $\|u_0\| = 1$, $\|\bar{p}\|$ y $\|u_0 - \bar{p}\|$, además satisface el teorema de Pítagoras, justo por la ecuación (2.6). Luego tales circunferencias cortan la bola unitaria con un ángulo recto (véase figura 2.4).

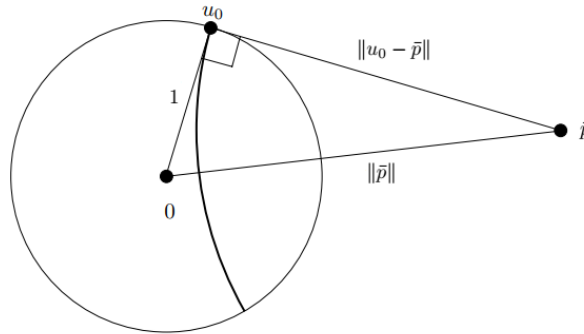


Fig. 2.4.: Las geodésicas son arcos de circunferencia ortogonales a la frontera.

La aplicación hiperbólica de Gauss y una noción de convexidad en $\mathbb{H}^{n+1}$

” Las abejas..., en virtud de una cierta intuición geométrica ..., saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.

— Pappus de Alejandría

En este capítulo introduciremos las horoesferas del espacio hiperbólico, presentaremos algunas de sus propiedades y serán caracterizadas en el modelo Lorentziano. Las horoesferas serán un elemento vital en lo que resta del documento, pues se usaran para definir la aplicación hiperbólica de Gauss y dar una nueva noción de convexidad en $\mathbb{H}^{n+1}$, elementos necesarios para enunciar el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$.

3.1 Horoesferas

En esta sección haremos uso del modelo de la bola de Poincaré para definir las horoesferas, estudiaremos algunas de sus propiedades y las caracterizaremos en el modelo Lorentziano. Una horoesfera (usando el modelo de la bola de Poincaré) se define como cualquier esfera n -dimensional en $\mathbb{H}^{n+1}$ que sea tangente a S_∞^n .

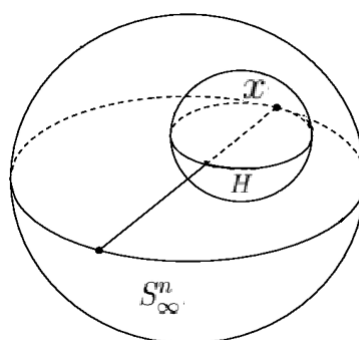


Fig. 3.1.: Representación de una horoesfera H con punto en infinito x .

Definición 3.1 Usando el modelo de la bola de Poincaré, decimos que $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ está en la parte convexa de la horoesfera si la distancia euclídea de x al centro de la esfera es menor al

radio de la horoesfera. Sea H^n una horoesfera, $p \in H^n$, $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$, y $v \perp T_p H$. Decimos que v apunta hacia el interior de H^n si para algún $\epsilon > 0$ la única geodésica $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = p$, y $\dot{\alpha}(0) = v$ verifica que $\alpha(t)$ está en la parte convexa de H^n para todo $t \in (0, \epsilon)$.

La siguiente proposición caracteriza la orientabilidad de una variedad inmersa en el espacio hiperbólico a través de la existencia de un campo normal unitario definido globalmente, para esto consideraremos el modelo lorentziano del espacio hiperbólico.

Proposición 3.2 Sea M^n una variedad riemanniana n -dimensional y $\phi : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica. M es orientable si, y solo si, existe una función diferenciable $\eta : M \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ tal que para todo $p \in M$ se tiene que $\eta(p)$ es un vector tangente a $\mathbb{H}^{n+1}$ y ortogonal a $d\phi_p(T_p M)$.

Proposición 3.3 Las horoesferas en el modelo Lorentziano del espacio hiperbólico son conjuntos de la forma $P_a := \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, a \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, donde a es un vector de luz.

Demostración. Sea $a = (a_0, \bar{a})$ un vector de luz, consideremos $p \in P_a$ entonces existe $y \in \mathbb{B}^{n+1}$ tal que $p = \Pi^{-1}(y)$. Así, $\langle a, p \rangle = -1 = \langle a, \Pi^{-1}(y) \rangle$, lo que implica, usando la Proposición 2.13,

$$-\frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} a_0 + \frac{2}{1 - \|y\|^2} \langle \bar{a}, y \rangle = -1,$$

de donde

$$-(1 + \|y\|^2) a_0 + 2 \langle \bar{a}, y \rangle = 1 - \|y\|^2,$$

concluyendo que

$$\left\| y - \frac{\bar{a}}{a_0 + 1} \right\|^2 = \left(\frac{1}{a_0 + 1} \right)^2.$$

Note que además se satisface que la distancia entre los centros de dichas esferas (la esfera obtenida en la última igualdad y la bola unitaria) corresponde con la diferencia de sus radios, es decir $\left\| \frac{\bar{a}}{a_0 + 1} \right\| = 1 - \frac{1}{a_0 + 1}$ lo que garantiza que la esfera obtenida es tangente a $\mathbb{B}^{n+1}$ y por tanto una horoesfera. Recíprocamente si tenemos una horoesfera $\|y - c\|^2 = R^2$ tomemos $a_0 = \frac{1}{R} - 1$ y $\bar{a} = \frac{1}{R}c$, así por los razonamientos anteriores el conjunto P_a tiene por imagen bajo Π^{-1} tal horoesfera.

□

Observación 3.4 La proposición anterior permite identificar cada horoesfera con un vector de luz a . Así dada una horoesfera H , decimos que tiene asociado el vector de luz a si $P_a = \Pi^{-1}(H)$.

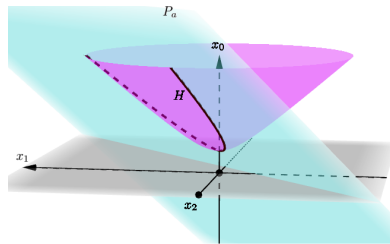


Fig. 3.2.: Representación de una horoesfera H en el modelo Lorentziano.

Proposición 3.5 Las horoesferas son hipersuperficies totalmente umbílicas, planas y orientables.

Demostración. Sea H una horoesfera asociada al vector de luz a . Considere para cada $p \in M$ el vector $\eta(p) = p - a$, es inmediato que η es diferenciable, pues es la restricción a H de $f : \mathbb{L}^{n+2} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada por $f(x) = x - a$. Sabemos que $v \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ equivale a que $\langle p, v \rangle = 0$. Así para probar que $\eta(p) \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ basta con verificar que $\langle p, \eta(p) \rangle = 0$. Sea $p \in H$ entonces

$$\langle p, \eta(p) \rangle = \langle p, p - a \rangle = \langle p, p \rangle - \langle p, a \rangle = -1 + 1 = 0.$$

Note que si $p \in H$, entonces

$$\langle \eta(p), \eta(p) \rangle = \langle p - a, p - a \rangle = \langle p, p \rangle - 2 \langle p, a \rangle + \langle a, a \rangle = -1 + 2 + 0 = 1.$$

Por tanto $\eta(p)$ es un campo unitario.

Sea $v \in T_p H$ entonces existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow H$, $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \dots, \alpha_{n+1}(t))$, donde $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$. Si $a = (a_0, \dots, a_{n+1})$ entonces

$$\langle \alpha(t), a \rangle = -a_0 \alpha_0(t) + \dots + a_{n+1} \alpha_{n+1}(t) = -1,$$

de donde derivando y evaluando en $t = 0$ se obtiene $\langle v, a \rangle = 0$. Note que,

$$\langle \eta(p), \eta(p) \rangle = \langle v, p - a \rangle = \langle v, p \rangle - \langle v, a \rangle = -\langle v, a \rangle,$$

y usando la ecuación (3.1) en la última igualdad obtenemos $\langle \eta(p), \eta(p) \rangle = 0$, es decir, $\eta(p) \perp T_p H$.

En resumen, $\eta(p) : H \rightarrow \mathbb{S}_1^n$ es una aplicación diferenciable, $\eta(p) \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ y $\eta(p) \perp T_p H$, y por la Proposición 3.2 se deduce que H es orientable. De otro lado, H esta inmersa en $\mathbb{H}^{n+1}$ con codimensión 1, por los razonamientos en la primera parte de la prueba inferimos que el operador de forma evaluado en $v \in T_p H$ es $A_p(v) = -(\nabla_v^{\mathbb{R}^{n+2}} \eta)^T = (-v)^T = -v$.

Lo anterior implica que si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de direcciones principales de H , las curvaturas principales asociadas son $k_i = -1$, $1 \leq i \leq n$. Entonces por la Ecuación de Gauss para inmersiones de codimensión 1 (1.3), tenemos que la curvatura seccional de H satisface

$$K(e_i, e_j) = -1 + (-1)(-1) = 0.$$

Lo que prueba que las horoesferas son planas y totalmente umbílicas.

□

La proposición anterior dice que las horoesferas tienen ciertas propiedades similares a los hiperplanos en $\mathbb{R}^n$, por ello serán usadas para definir un cierto tipo de convexidad en el espacio hiperbólico, tal y como veremos al final del capítulo.

3.2 El mapa hiperbólico de Gauss

A partir de las horoesferas definiremos la aplicación hiperbólica de Gauss en forma geométrica y daremos una expresión analítica de la misma. Sea M^n una variedad riemanianna n -dimensional, $\phi : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica y $\eta : M \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ un campo normal unitario. Definimos la función $G : M \rightarrow \mathbb{S}_\infty^n$ de la siguiente manera: para cada $p \in M$ consideramos la única horoesfera pasando por $\phi(p)$ y cuyo normal unitario que apunta al interior coincide con $\eta(p)$ (Definición 3.1), definimos $G(p)$ como el punto en infinito de esta horoesfera. La función G es llamada mapa hiperbólico de Gauss, ver Figura 3.3.

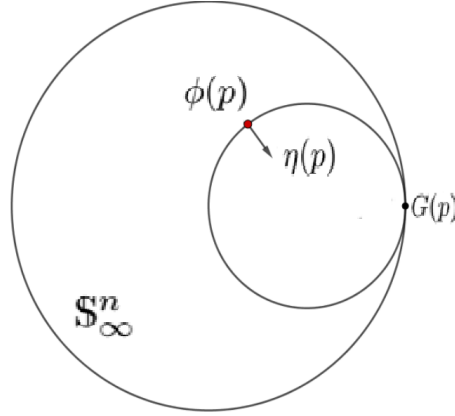


Fig. 3.3.: Definición del mapa hiperbólico de Gauss.

A continuación definiremos el mapa cónico de la inmersión, una aplicación que será útil por su fuerte relación con el mapa hiperbólico de Gauss. Definimos el mapa cónico de la inmersión usando el modelo Lorentziano como la función $\psi : M \rightarrow \mathbb{N}_+^{n+1}$ dada por $\psi = \phi + \eta$.

Proposición 3.6 Si escribimos $\psi = (\psi_0, \bar{\psi})$, entonces para todo $p \in M$ la aplicación hiperbólica de Gauss asociada a la hipersuperficie ϕ , $G : M \rightarrow \mathbb{S}_\infty^n$, está dada por

$$G(p) = \frac{1}{\psi_0(p)} \bar{\psi}(p).$$

Demostración. Sea H_p la horoesfera usada en la definición del mapa hiperbólico de Gauss, denotemos como a al vector de luz asociado a H_p . Aplicando los resultados anteriores tenemos $\eta(p) = a - \phi(p)$, de donde $\psi(p) = a$, por lo tanto

$$\frac{1}{\psi_0(p)} \bar{\psi}(p) = \frac{1}{a_0} \bar{a}.$$

Veamos que $\frac{1}{a_0} \bar{a}$ es justamente el punto en infinito de la horoesfera H_p . Si H_p toca a $\mathbb{S}_\infty^n$ en x , entonces cada $y \in H_p$ satisface

$$\left\| y - \frac{\bar{a}}{1 + a_0} \right\|^2 = \left(\frac{1}{1 + a_0} \right)^2. \quad (3.1)$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\bar{a}}{a_0} - \frac{\bar{a}}{1+a_0} \right\|^2 &= \left\| \frac{\bar{a}}{a_0} \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{\bar{a}}{a_0}, \frac{\bar{a}}{1+a_0} \right\rangle + \left\| \frac{\bar{a}}{1+a_0} \right\|^2 \\
&= 1 - \frac{2a_0}{1+a_0} + \left(\frac{a_0}{a_0+1} \right)^2 \\
&= \left(1 - \frac{a_0}{a_0+1} \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{1+a_0} \right)^2.
\end{aligned}$$

En conclusión, $\frac{\bar{a}}{a_0}$ es un vector unitario que satisface la ecuación (3.1), lo que implica que $x = \frac{\bar{a}}{a_0}$, pues es el único punto en $\mathbb{S}_\infty^n$ con esas propiedades. Por lo tanto

$$G(p) = \frac{1}{\psi_0(p)} \bar{\psi}(p).$$

Definición 3.7 Se define la función soporte de la hipersuperficie $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ como $e^\rho : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $e^\rho = \psi_0$.

La Proposición 3.6 muestra que la aplicación ψ esta fuertemente relacionada con la aplicación hiperbólica de Gauss $G : M^n \rightarrow \mathbb{S}_\infty^n$ de ϕ , en efecto podemos deducir la relación

$$\psi = e^\rho(1, G),$$

y por diferenciación en la ecuación anterior obtenemos

$$\langle \langle d\psi, d\psi \rangle \rangle = e^\rho \langle dG, dG \rangle.$$

En conclusión, ψ es regular si, y solo si, G es regular.

3.3 Métrica horoesférica

Denotemos $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las horoesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$. El objetivo es dar estructura de variedad al conjunto $\mathcal{M}$ y definir una métrica sobre esta variedad, probablemente degenerada.

Proposición 3.8 Sea $x \in \mathbb{S}_\infty^n$. Todas las horoesferas $H^n \in \mathcal{M}$ que tocan a $\mathbb{S}_\infty^n$ en x son paralelas.

Probaremos dos lemas antes de concluir el resultado.

Lema 3.9 Sea H una horoesfera que toca a $\mathbb{S}_\infty^n$ en x , entonces $x = \frac{\bar{a}}{a_0}$, donde $a = (a_0, \bar{a})$ es el vector de luz asociado a H .

Demostración. Si a es el vector de luz asociado a la horoesfera H tangente a $\mathbb{S}_\infty^n$ en x , entonces cada $y \in H$ satisface

$$\left\| y - \frac{\bar{a}}{1 + a_0} \right\|^2 = \left(\frac{1}{1 + a_0} \right)^2. \quad (3.2)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\bar{a}}{a_0} - \frac{\bar{a}}{1 + a_0} \right\|^2 &= \left\| \frac{\bar{a}}{a_0} \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{\bar{a}}{a_0}, \frac{\bar{a}}{1 + a_0} \right\rangle + \left\| \frac{\bar{a}}{1 + a_0} \right\|^2 \\ &= 1 - \frac{2a_0}{1 + a_0} + \left(\frac{a_0}{a_0 + 1} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{a_0}{a_0 + 1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{1 + a_0} \right)^2. \end{aligned}$$

En conclusión, $\frac{\bar{a}}{a_0}$ es un vector que satisface la ecuación (3.2). Teniendo en cuenta que $a \in \mathbb{N}_+^{n+1}$ tenemos que $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = a_0^2$, de donde $\langle \frac{\bar{a}}{a_0}, \frac{\bar{a}}{a_0} \rangle = 1$. Es decir $\frac{\bar{a}}{a_0} \in \mathbb{S}_\infty^n$, lo que implica que $x = \frac{\bar{a}}{a_0}$. $\square$

Observación 3.10 En el modelo Lorentziano una horoesfera H con vector de luz a esta dada por $H = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, a \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1}$, (Proposición 3.3). Traslademos cada elemento del conjunto H en dirección normal una distancia d para obtener un nuevo conjunto H_d paralelo al inicial, es decir para cada $p \in H$ consideremos el elemento $\alpha_d(p) = (p - a) \sinh(d) + p \cosh(d) \in H_d$. Observe que la curva $\alpha(t) = (p - a) \sinh(t) + p \cosh(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es la geodésica que pasa por p con velocidad ortogonal unitaria a H en p . Dicha geodésica hace que la distancia de $\alpha_d(p)$ a H sea justamente d .

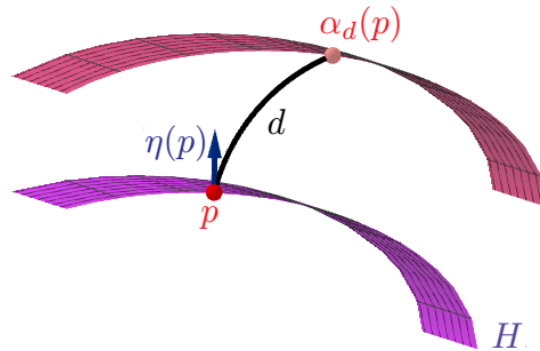


Fig. 3.4.: Traslación de p en $\alpha_d(p)$.

Lema 3.11 La traslación paralela de una horoesfera H es de nuevo una horoesfera. Específicamente, para todo $d \in \mathbb{R}$ se tiene que, $H_d = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, ae^{-d} \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1}$.

Demostración. Tomemos $x \in H_d$, entonces para algún $p \in H$ se tiene $x = (p - a) \sinh(d) + p \cosh(d)$. Claramente $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ pues α es una curva sobre $\mathbb{H}^{n+1}$, por tanto un cálculo directo muestra que,

$$H_d \subseteq \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, e^{-d}a \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1}. \quad (3.3)$$

Sea $x \in \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, ae^{-d} \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1}$ y $p = e^{-d}(x + a \sinh(d))$, entonces $p \in H$ y además,

$$\begin{aligned} \alpha_d(p) &= (e^{-d}(x + a \sinh(d)) - a) \sinh(d) + ((x + a \sinh(d)) e^{-d}) \cosh(d) \\ &= ((x + a \sinh(d)) - a \sinh(d)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Por lo anterior se concluye que $x \in H_d$, es decir,

$$\{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, e^{-d}a \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1} \subseteq H_d. \quad (3.4)$$

Las contenencias dadas en (3.4) y (3.3) deducen

$$H_d = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, e^{-d}a \rangle = -1\} \cap \mathbb{H}^{n+1}.$$

Finalmente se concluye que H_d es una horoesfera, pues $e^{-d}a$ es un vector de luz.

□ *Demostración de la Proposición 3.8* sean H_1 y H_2 dos horoesferas tangentes a $\mathbb{S}_\infty^n$ en x y $a, b \in \mathbb{N}^{n+1}$ los respectivos vectores de luz asociados a estas horoesferas. El Lema 3.9 implica que,

$$\frac{\bar{a}}{a_0} = \frac{\bar{b}}{b_0} = x.$$

Tomemos el único $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{-d} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (3.5)$$

Consideremos ahora la horoesfera cuyo vector de luz es $e^{-d}a = b$, aplicando el Lema 3.11, esta horoesfera H_2 es exactamente $H_{1,d}$ la cual por construcción es paralela a H_1 .

□

Observación 3.12 En esta última situación H_2 es una traslación paralela de H_1 que está a distancia d , y de la ecuación (3.5) se deduce que $d = \ln \left(\frac{a_0}{b_0} \right)$.

Usando los resultados anteriores diferenciaremos todas las horoesferas $H^n \in \mathcal{M}$ que tienen a $x \in \mathbb{S}_\infty^n$ como punto en infinito a partir de su distancia a un punto O . Usando el modelo de la bola de Poincaré tomaremos este punto fijo como el centro de $\mathbb{B}^{n+1}$. Esta distancia la tomaremos con signo usando la siguiente convención : negativo si O esta en el dominio convexo de H , no negativo en caso contrario.

La convención anterior define una identificación $\mathcal{M} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, es decir, cada horoesfera H se identifica con el par (x, t) donde x es el punto en el infinito de H y t la distancia (con signo) de H al centro de $\mathbb{B}^{n+1}$.

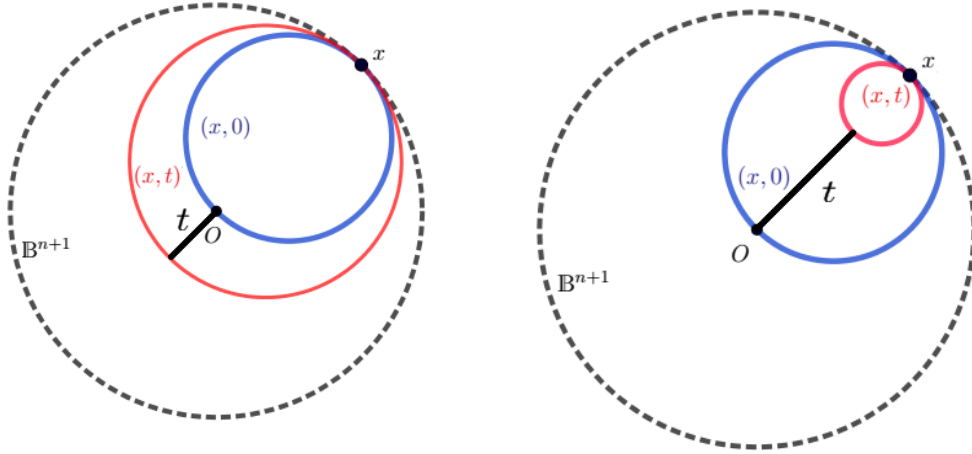


Fig. 3.5.: Representación de (x, t) cuando $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente.

La identificación la podemos ver teniendo en mente que todas las horoesferas paralelas a $H = (x, 0)$ son las que tienen a x como punto en infinito y pueden obtenerse haciendo una traslación de t unidades, así como en la *Observación 3.10*, de estas traslaciones sólo dos cumplen que la distancia de O a la horoesfera sea t , luego solo existen dos horoesferas paralelas a $(x, 0)$ a distancia t , tales horoesferas se obtienen con una traslación de $-t$ unidades y de t unidades. Note que el vector $p - a$ que se uso para generar H_t en la *Observación 3.10* apunta hacia la parte no convexa de H , así para $t < 0$ la traslación de la horoesfera es hacia la parte convexa de la misma, por tanto no puede contener a O . Si $t > 0$ la traslación de la horoesfera es hacia la parte no convexa de la horoesfera en cada punto, luego contiene a O .

En conclusión existe una única horoesfera paralela a distancia t de $(x, 0)$ que contiene a O en su parte convexa y la horoesfera a distancia t de $(x, 0)$ tal que O no esta en su parte convexa también es única, quedando así bien definida la identificación a través de la convención.

A continuación mostraremos la identificación natural $\mathcal{M} \simeq \mathbb{N}_+^{n+1}$. Una horoesfera (x, t) queda totalmente determinada por un vector de luz a del cual depende su centro y radio, recíprocamente un vector de luz induce una única horoesfera, esto está dado justo como el conjunto de puntos en $\mathbb{H}^{n+1}$ que satisfacen la ecuación (3.2). Note que del Lema 3.9 se obtiene que $x = \frac{\bar{a}}{a_0}$, ahora determinemos el valor de t .

Si consideramos $(x, 0)$ con vector de luz b asociado, esta tendrá radio $\frac{1}{2}$, por consiguiente en la ecuación (3.2) ha de satisfacerse, esto es,

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{1 + b_0} \right)^2,$$

concluyendo que $b_0 = 1$. Entonces por *Observación 3.12*, $t = \ln(a_0)$, por todo lo anterior deducimos

$$(x, t) = \left(\frac{\bar{a}}{a_0}, \ln(a_0) \right).$$

Luego tenemos la identificación

$$\Psi : \mathbb{N}_+^{n+1} \rightarrow \mathcal{M} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \text{ definida por } \Psi(a) = \left(\frac{\bar{a}}{a_0}, \ln(a_0) \right).$$

La aplicación Ψ es claramente diferenciable y una biyección, note que

$$\Psi^{-1}(x, t) = (e^t, e^t x),$$

de donde se observa que Ψ^{-1} es diferenciable.

Así, la función Ψ es un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{N}_+^{n+1}$, en particular también es un homeomorfismo. Con todo lo anterior estamos listos para definir una métrica g sobre $\mathcal{M}$.

Definición 3.13 Considere como métrica en $\mathbb{N}_+^{n+1}$ la restricción $\langle \langle, \rangle \rangle$, esto es, para cada $a \in \mathbb{N}_+^{n+1}$ y $u, v \in T_a \mathbb{N}_+^{n+1}$ se define $\bar{g}_a(u, v) = \langle \langle u, v \rangle \rangle$. Definimos la métrica g sobre $\mathcal{M}$, $g := \Psi^{-1*}(\bar{g})$.

Proposición 3.14 Sea $(v, s) \in T_{(x,t)} \mathcal{M}$, donde $v \in T_x \mathbb{S}^n$ y $s \in \mathbb{R}$, entonces

$$g_{(x,t)}((v, s), (v, s)) = e^{2t} g_0(v, v),$$

donde g_0 es la métrica euclídea de $\mathbb{S}^n$.

Demostración. De la definición (3.13) tenemos

$$g_{(x,t)}((v, s), (v, s)) = \left\langle \left\langle d\Psi_{(x,t)}^{-1}(v, s), d\Psi_{(x,t)}^{-1}(v, s) \right\rangle \right\rangle_{\Psi^{-1}(x,t)}, \quad (3.6)$$

recordando que

$$d\Psi_{(x,t)}^{-1}(v, s) = [J\Psi^{-1}(x, t)](v, s),$$

se tiene,

$$J\Psi^{-1}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^t \\ 0 & e^t & 0 & \cdots & 0 & x_1 e^t \\ 0 & 0 & e^t & \cdots & 0 & x_2 e^t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & e^t & x_{n+1} e^t \end{pmatrix},$$

donde $(x_1, \dots, x_{n+1}) = x$. Si $(v, s) = (v_1, \dots, v_{n+1})$ entonces de los respectivos cálculos se sigue

$$d\Psi_{(x,t)}^{-1}(v, s) = (e^t s, s x e^t + e^t v),$$

regresando a la ecuación (3.6) vemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle d\Psi_{(x,t)}^{-1}(v, s), d\Psi_{(x,t)}^{-1}(v, s) \right\rangle \right\rangle_{\Psi^{-1}(x,t)} &= \langle \langle (e^t s, s x e^t + e^t v), (e^t s, s x e^t + e^t v) \rangle \rangle \\ &= -e^{2t} s^2 + \langle (s x e^t + e^t v), (s x e^t + e^t v) \rangle \\ &= -e^{2t} s^2 + e^{2t} \langle v, v \rangle + 2e^{2t} s \langle x, v \rangle + e^{2t} s^2 \langle x, x \rangle. \\ &= -e^{2t} s^2 + e^{2t} \langle v, v \rangle + e^{2t} s^2 \\ &= e^{2t} \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos,

$$g_{(x,t)}((v,s), (v,s)) = e^{2t} g_0(v,v).$$

□

Observación 3.15 La métrica $g_{(x,t)}$ es degenerada pues $g_{(x,t)}((0,s), (0,s)) = 0$.

Definición 3.16 (Métrica horoeférica.) Sea M^n una variedad orientable y $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica. definamos la función

$$\mathcal{H}_\phi : M^n \rightarrow \mathcal{M},$$

definida para cada $p \in M$ como $\mathcal{H}_\phi(p) = H_p$, donde H_p es la horoesfera utilizada en la definición del mapa hiperbólico de Gauss. Definimos la métrica horoesférica $g_\infty = \mathcal{H}_\phi^*(g)$, donde $g = e^{2t} g_0$ es la métrica definida en $\mathcal{M}$ (Definición 3.13).

Proposición 3.17 La métrica horoesférica es regular si y solo si el mapa hiperbólico de Gauss es un difeomorfismo local.

Demostración. Consideremos la horoesfera H_p que pasa por $\phi(p)$ y tiene vector normal unitario interior $\eta(p)$. Si a es el vector de luz de H_p , entonces $\eta(p) = a - \phi(p)$ corresponde con el vector normal unitario interior. Así, $a = \psi(p)$, donde ψ es el mapa cónico de la inmersión. Dado que

$$G = \frac{1}{\psi_0}(\psi_1, \dots, \psi_{n+1}) = \frac{\bar{a}}{a_0}, \quad \psi = \psi_0(1, G),$$

y teniendo en cuenta la identificación Ψ^{-1} se tiene que,

$$\mathcal{H}_\phi(p) = (G, \ln(\psi_0)),$$

luego,

$$d\mathcal{H}_\phi = (dG, d\ln(\psi_0)).$$

Por lo tanto podemos concluir,

$$g_\infty(d\mathcal{H}_\phi, d\mathcal{H}_\phi) = e^{2t} \langle dG, dG \rangle. \quad (3.7)$$

Si g_∞ es regular entonces por la ecuación (3.7), $\langle dG(v), dG(v) \rangle \neq 0$, siempre que $v \neq 0$, así dG es un isomorfismo y por el teorema de la función inversa, G es un difeomorfismo local. Recíprocamente si G es difeomorfismo local $\langle dG(v), dG(v) \rangle \neq 0$, siempre que $v \neq 0$, luego se deduce que g_∞ es regular directamente por la ecuación (3.7).

□

3.4 Convexidad horoesférica

El objetivo de esta sección es introducir un tipo de convexidad local para hipersuperficies en el espacio hiperbólico, para ello recordemos la noción de convexidad en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientada con aplicación de Gauss N . Para cada punto $p \in \Sigma$, consideremos Π_p el plano tangente afín que pasa por p , es decir

$$\Pi_p = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, N(p) \rangle\},$$

dicho plano divide al espacio $\mathbb{R}^3$ en dos componentes conexas $\Pi_p^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, N(p) \rangle \geq 0\}$ y $\Pi_p^- = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - p, N(p) \rangle \leq 0\}$.

Definición 3.18 Una superficie regular y orientada $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es localmente convexa en un punto $p \in \Sigma$ si existe un entorno V de p en Σ que está enteramente contenido en uno de los dos semi-espacios Π_p^+ o Π_p^- , es decir $V \subset \Pi_p^+$ o $V \subset \Pi_p^-$. Además, si p es el único punto de $V \cap \Pi_p$, diremos que Σ es estrictamente localmente convexa en p .

Anteriormente se mencionó que las horoesferas son planas y totalmente umbílicas, podemos agregar que tienen aplicación hiperbólica de Gauss constante y separan el espacio hiperbólico (tal como se puede ver en el modelo de la Bola Poincaré) en dos componentes conexas, justo como lo hace el plano Π_p en $\mathbb{R}^3$. El hecho de que p es el único punto de $V \cap \Pi_p$ equivale a que la función distancia de V a Π_p solo se anula en p , por lo tanto en el caso del espacio hiperbólico resulta natural reemplazar el plano Π_p por una horoesfera de tal manera que se capture la idea de ser estrictamente convexo.

A continuación haremos una noción de convexidad en el espacio hiperbólico tomando como inspiración la presentada para $\mathbb{R}^3$. Consideremos M^n una variedad orientable y $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica. Para cada $p \in M^n$, consideremos la horoesfera $\mathcal{H}_\phi(p)$. Dicho conjunto divide al espacio hiperbólico en dos componentes conexas $\mathcal{H}_\phi(p)^+$ y $\mathcal{H}_\phi(p)^-$, donde $\mathcal{H}_\phi(p)^-$ es la parte no convexa de $\mathcal{H}_\phi(p)$ y $\mathcal{H}_\phi(p)^+ = (\mathbb{B}^{n+1} \setminus \mathcal{H}_\phi(p)^-) \cup \mathcal{H}_\phi(p)$.

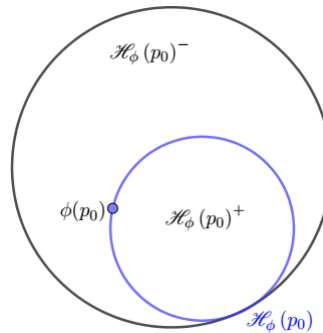


Fig. 3.6.: $\mathcal{H}_\phi(p_0)^-$ y $\mathcal{H}_\phi(p_0)^+$ en el modelo de la bola de Poincaré.

En forma análoga a la Definición 3.18 consideramos la siguiente definición para capturar la noción convexidad en el espacio hiperbólico.

Definición 3.19 Sea M^n una variedad orientable y $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica, decimos M que es horoesféricamente convexa en $p_0 \in M^n$ si existe un entorno V de $\phi(p_0)$ en $\phi(M)$ que está enteramente contenido en uno de los dos conjuntos $\mathcal{H}_\phi(p_0)^+$ o $\mathcal{H}_\phi(p_0)^-$ y $\phi(p_0)$ es el único punto de $V \cap \mathcal{H}_\phi(p_0)$.

Observación 3.20 Si consideramos la función distancia de V a $\mathcal{H}_\phi(p_0)$ tenemos que se anula en todos los puntos de $V \cap \mathcal{H}_\phi(p_0)$ (en particular es estrictamente positiva si $p \in \text{int}(\mathcal{H}_\phi(p_0)^+) \cap V$ y estrictamente negativa si $p \in \text{int}(\mathcal{H}_\phi(p_0)^-) \cap V$). Entonces, está claro que M horoesféricamente convexa en p_0 si, y sólo si, la función distancia alcanza un extremo local (estricto) en p_0 , esto se debe a que p_0 es el único elemento en $V \cap \mathcal{H}_\phi(p_0)$.

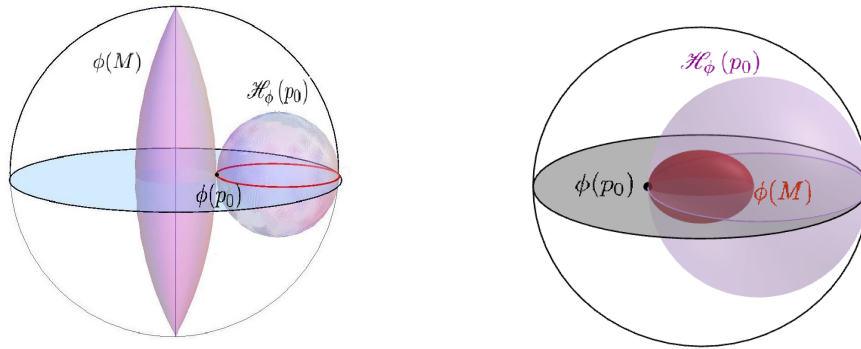


Fig. 3.7.: Superficies horoesféricamente convexas en p_0 .

Si denotamos por $\mathcal{D} : V \rightarrow \mathbb{R}$ la función distancia de V a $\mathcal{H}_\phi(p_0)$, entonces el hecho que la función $\mathcal{D}$ alcance un extremo local en p_0 permite concluir, por el Test de segunda derivada, que $\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{D}(\alpha(t))|_{t=t_0}$ no puede ser nulo para cualquier $v \in T_{p_0}M$ y para cualquier curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow V$ con $\alpha(t_0) = p_0$ y $\dot{\alpha}(t_0) = v$. Por lo tanto la función $\mathcal{D} : V \rightarrow \mathbb{R}$ no se anula hasta segundo orden en p_0 en cualquier dirección.

El siguiente lema explica geoméricamente como se alcanza la distancia entre dos variedades. Su prueba requiere usar cálculo variación para realizar variaciones de energía de una geodésica, ver [DC92, pág 207].

Lema 3.21 Sea M una variedad riemanianna completa y sea $N \subset M$ una subvariedad cerrada de M . Considere $p_0 \in M, p_0 \notin N$ y sea $d(p_0, N)$ la distancia de p_0 a N , entonces existe un punto $q_0 \in N$ tal que $d(p_0, q_0) = d(p_0, N)$ y una geodésica que minimiza la distancia es la que une p_0 y q_0 y es ortogonal a N en q_0 .

Proposición 3.22 Sea M^n una variedad orientable y $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica, entonces M es horoesféricamente convexa en p_0 si, y sólo si todas las curvaturas en p_0 satisfacen $k_i(p_0) > 1$ o $k_i(p_0) < 1$.

Demostración. Sea $V \subset M$ una vecindad de p_0 , iniciamos encontrando la aplicación distancia de V a $\mathcal{H}_\phi(p_0)$, $\mathcal{D} : V \rightarrow \mathbb{R}$. Para $p \in V$ considere la geodésica que pasa por p y $q \in \mathcal{H}_\phi(p_0)$, donde q es el punto cuya existencia es garantizado por lema 3.21, es decir $d(p, q) = d(p, \mathcal{H}_\phi(p_0))$, entonces la geodésica minimizante es

$$\alpha(t) = q \cosh(t) + (q - a) \sinh(t),$$

donde a es el vector de luz asociado a $\mathcal{H}_\phi(p_0)$, esto se debe a que $q - a$ es el vector normal de $\mathcal{H}_\phi(p_0)$ en q . Note que

$$p = q \cosh(\mathcal{D}(p)) + (q - a) \sinh(\mathcal{D}(p)),$$

y usando las propiedades de las horoesferas al calcular $\langle\langle p, a \rangle\rangle$ tenemos

$$\langle\langle p, a \rangle\rangle = -e^{\mathcal{D}(p)},$$

es decir,

$$\mathcal{D}(p) = \ln(-\langle\langle p, a \rangle\rangle).$$

Partiendo del hecho que $\nabla \mathcal{D}(p) = \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} (a + \langle\langle p, a \rangle\rangle p - \langle\langle a, \eta(p) \rangle\rangle \eta(p))$. Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de direcciones principales unitarias de $T_{p_0}M$. Calcularemos la expresión $\langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{H}^{n+1}} \nabla \mathcal{D}, e_i \rangle\rangle$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{H}^{n+1}} \nabla \mathcal{D}, e_i \rangle\rangle &= \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{H}^{n+1}} \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} (a + \langle\langle p, a \rangle\rangle p - \langle\langle a, \eta(p) \rangle\rangle \eta(p)), e_i \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} (a + \langle\langle p, a \rangle\rangle p - \langle\langle a, \eta(p) \rangle\rangle \eta(p)) \\ &\quad + \left\langle \left\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} (a + \langle\langle p, a \rangle\rangle p - \langle\langle a, \eta(p) \rangle\rangle \eta(p)), p \right\rangle \right\rangle p, e_i \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} (a + \langle\langle p, a \rangle\rangle p) \right) - \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \eta, e_i \rangle\rangle, \\ &= \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{a}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} - \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} p - \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \eta, e_i \rangle\rangle \\ &= \langle\langle e_i \left(\frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} \right) a + \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} p - \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \eta, e_i \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} p, e_i \rangle\rangle - \frac{1}{\langle\langle p, a \rangle\rangle} \langle\langle \nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \eta, e_i \rangle\rangle \\ &= 1 - k_i(p). \end{aligned}$$

En conclusión,

$$Hess_{p_0} \mathcal{D}(e_i, e_i) = 1 - k_i(p_0),$$

y dado que la función distancia alcanza un extremo en p_0 , por A.5 tenemos,

$$Hess_{p_0} \mathcal{D}(e_i, e_i) > 0 \text{ o } Hess_{p_0} \mathcal{D}(e_i, e_i) < 0.$$

De donde se obtiene,

$$k_i(p_0) > 1 \text{ o } k_i(p_0) < 1.$$

□

Lema 3.23 Sea M^n una variedad orientable, $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica y $p \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El mapa hiperbólico de Gauss es un difeomorfismo local.
2. El mapa cónico de la inmersión es regular.
3. Todas las curvaturas principales $k_i(p)$ son diferentes de 1.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Como G es un difeomorfismo local entonces G es regular, luego para todo $v \in T_p M$, $dG(v) \neq 0$. En particular sabemos que

$$\langle d\psi(v), d\psi(v) \rangle = e^{2\rho} \langle dG(v), dG(v) \rangle \neq 0.$$

Por lo tanto ψ es regular.

$[2 \Rightarrow 3]$ Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de direcciones principales de M en p , con curvaturas principales $k_1(p), \dots, k_n(p)$. Observe que

$$(d\psi)_p(e_i) = (d\phi)_p(e_i) + (d\eta)_p(e_i) = e_i - k_i(p)e_i = (1 - k_i)e_i, \quad (3.8)$$

dado que ψ es regular, para todo $d\psi(e_i) \neq 0$. Por lo tanto de la ecuación anterior $k_i(p) \neq 1$.

$[3 \Rightarrow 1]$ Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de direcciones principales de M en p , con curvaturas principales $k_1(p), \dots, k_n(p)$. Aplicando el hecho que $k_i(p) \neq 1$ en la ecuación (3.8), tenemos

$$e^{2\rho} \langle dG(e_i), dG(e_i) \rangle = \langle d\psi(e_i), d\psi(e_i) \rangle = (1 - k_i)^2 e_i \neq 0.$$

Así, dG es un isomorfismo lineal, luego aplicando el teorema de la función inversa, G es un difeomorfismo local.

□

Definición 3.24 Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica de una variedad compacta orientable y $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica. Decimos que M es un ovaloide horoesférico de $\mathbb{H}^{n+1}$ si se puede orientar tal que M es horoesféricamente convexa en todos sus puntos.

A continuación probaremos un teorema tipo Hadamard que caracteriza a los ovaloides horoesféricos en términos de la aplicación hiperbólica de Gauss.

Teorema 3.25 Sea M una variedad compacta y orientable, entonces M es un ovaloide horoesférico si, y sólo si, la aplicación de Gauss hiperbólica es un difeomorfismo global.

Demostración. Por el Lema 3.23 y la Proposición 3.22, concluimos que la aplicación hiperbólica de Gauss G para M es un difeomorfismo local. Dado que M es compacto, su imagen

$G(M)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{S}^n$ y en particular es cerrado. De otro lado G es un difeomorfismo local por tanto es una aplicación abierta, de manera que $G(M)$ también es un subconjunto abierto de $\mathbb{S}^n$. En definitiva $G(M) \subset \mathbb{S}^n$ es abierto y cerrado en la n -esfera $\mathbb{S}^n$ (conexa), así $G(M) = \mathbb{S}^n$ y por tanto G es sobreyectiva.

Para probar que G es inyectiva, razonamos de la siguiente manera. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y sobreyectiva entre dos espacios topológicos X e Y . Se dice que f es una *aplicación recubridora* si verifica la siguiente propiedad: cada punto $q \in Y$ admite un entorno V de q en Y tal que la anti-imagen de V por f es la unión disjunta

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

donde cada $U_i \subset X$ es un subconjunto abierto de X y para cada $i \in I$ la restricción $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ es un homeomorfismo. En particular, f es homeomorfismo local. Si Y es conexo el cardinal del conjunto I es constante y se llama *número de hojas* de la aplicación recubridora. En este contexto, un homeomorfismo (global) entre X e Y no es mas que una aplicación recubridora de 1 hoja, y se dice que el espacio topológico Y es simplemente conexo si no admite aplicaciones recubridoras que no sean homeomorfismos (es decir no admite recubridores no triviales). Afirmamos que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo (para mas detalles sobre estos preliminares topológicos consultar [Mas82]). Por tanto, como ya sabemos G es sobreyectiva, una forma de ver que es biyectiva es probar que es una aplicación recubridora. Veamos que entonces $G : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es recubridora. Para cada $p \in \mathbb{S}^n$, el subconjunto $G^{-1}(p)$ es necesariamente finito. En efecto, si no fuera así, como M es compacta tendríamos una sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G^{-1}(p)$ formada por puntos distintos dos a dos y con $\lim p_n = p_0 \in G^{-1}(p)$. Esto es contradictorio con el hecho que G es difeomorfismo local en p_0 , ya que cualquier entorno $U(p_0)$ contendrá infinitos puntos p_n de la sucesión, con $G(p_n) = p$ y la restricción de G a $U(p_0)$ nunca podrá ser inyectiva. Como consecuencia $G^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_k\}$ es finito.

Como G es un difeomorfismo local y $\{p_1, \dots, p_k\}$ es una cantidad finita de puntos, podemos encontrar para cada $i = 1, 2, \dots, k$ un entorno $\bar{U}_i$ de p_i en M de manera que $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$, y tal que para cada i , la restricción $G|_{\bar{U}_i}$ es un homeomorfismo entre $\bar{U}_i$ y $\bar{V}_i = G(\bar{U}_i)$, entorno de $p \in \mathbb{S}^n$. Tomando entonces

$$V = \bigcap_{i=1}^k \bar{V}_i, \quad (3.9)$$

se tiene que V es un entorno de $p \in \mathbb{S}^n$ cuya pre-imagen por G es la unión disjunta

$$G^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^k U_i,$$

con $U_i = (G|_{\bar{U}_i})^{-1}(V) \subset \bar{U}_i$ y cada restricción $G|_{\bar{U}_i}$ es un difeomorfismo entre U_i y V . En definitiva, G es una aplicación recubridora.

□

Note que el anterior resultado es análogo al siguiente resultado en $\mathbb{R}^3$, sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un ovaloide, entonces la aplicación de Gauss $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo, el anterior resultado es conocido como el Teorema de Hadamard (ver [Mon09, pág 178]).

Proposición 3.26 *En un ovaloide horoesférico M las curvaturas principales son todas menores a 1 o mayores a 1, dependiendo de la orientación del ovaloide.*

Demostración. En el modelo de la bola de Poincaré, si consideramos la orientación exterior a M , en cualquier punto $p \in M$ la función distancia alcanza un máximo estricto, lo que implica por A.5 que $Hess_p(D)(e_i, e_i) < 0$ de donde $k_i(p) < 1$, para cada $p \in M$. Si consideramos la orientación interior la función distancia alcanza un mínimo estricto, lo que implica por el test de la segunda derivada que $Hess_p(D)(e_i, e_i) > 0$ de donde $k_i(p) > 1$, para cada $p \in M$. $\square$

Definición 3.27 *Un ovaloide horoesférico está canónicamente orientado si su orientación es tal que $k_i < 1$, en todo punto, donde k_i son sus curvaturas principales, con $i = 1, 2, \dots, n$.*

Los problemas de Christoffel y Nirenberg

” *Estoy cada vez mas convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada por el intelecto humano.*

— C.F. Gauss

En este capítulo enunciaremos el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ y probaremos una fórmula de representación local para una hipersuperficie localmente horoesféricamente convexa de $\mathbb{H}^{n+1}$, la cual será de ayuda para relacionar el problema de Nirenberg sobre $\mathbb{S}^n$ y el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$. Primero introduciremos los radios de curvatura hiperbólica luego, daremos una breve discusión con el objetivo de presentar en forma natural un enunciado del problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$.

4.1 Radios de curvatura hiperbólica

A continuación definiremos los radios de curvatura hiperbólica, para ello tomaremos inspiración de la siguiente observación en la aplicación de Gauss $N : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ de una hipersuperficie estrictamente convexa $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. La aplicación de Gauss N se relaciona de forma muy simple con el radio de curvatura, para ver esto, sea

$$\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n,$$

una curva en $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $\alpha_i(0) = p$ y tal que $\alpha_i'(0) = e_i$, donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de direcciones principales en $T_p M$. Sea $L_0^t(\alpha_i)$ y $L_0^t(N \circ \alpha_i)$ las longitudes de las curvas $\alpha_i([0, t])$ y $N \circ \alpha_i([0, t])$ respectivamente, asumimos que N es un difeomorfismo local, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_0^t(\alpha_i)}{L_0^t(N \circ \alpha_i)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t |\alpha_i'(u)| du}{\int_0^t |(N \circ \alpha_i)'(u)| du} = \frac{|\alpha_i'(0)|}{|(N \circ \alpha_i)'(0)|} = \frac{1}{|k_i(p)|}. \quad (4.1)$$

La construcción anterior puede ser llevada fácilmente a $\mathbb{H}^{n+1}$ sustituyendo la aplicación de Gauss por la aplicación hiperbólica de Gauss. Específicamente, sea una hipersuperficie $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ horoesféricamente convexa en $p \in M$, y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de direcciones principales en $T_p M$. Si tomamos una curva regular $\alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$, podemos

definir en analogía con el caso euclidiano, el radios de curvatura hiperbólica de M^n en p como sigue

$$\mathcal{R}_i(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_0^t(\alpha_i)}{L_0^t(G \circ \alpha_i)},$$

la longitud de la aplicación hiperbólica de Gauss a lo largo de α_i es tomada con la métrica horoesférica g_∞ , además el cociente tiene sentido ya que G es un difeomorfismo local, finalmente con un argumento análogo a (4.1) deducimos $\mathcal{R}_i(p) = \frac{1}{|1 - k_i(p)|}$. De esta forma se propone la siguiente definición como análogo natural en $\mathbb{H}^{n+1}$ del radio de curvatura euclidiano.

Definición 4.1 Sea $M \subset \mathbb{H}^{n+1}$ una hipersuperficie horoesféricamente convexa en $p \in M^n$ definimos los radios de curvatura hiperbólica $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n\}$ de M^n en p como

$$\mathcal{R}_i(p) = \frac{1}{|1 - k_i(p)|}$$

donde $\{k_1, \dots, k_n\}$ son las curvaturas principales de M^n en p .

4.2 El problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$

Con todo lo visto anteriormente en este documento estamos listos para enunciar el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$, empezamos recordando el problema de Christoffel en $\mathbb{R}^3$ que mas explícitamente puede enunciarse así: dado un difeomorfismo $G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ y una aplicación $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una inmersión $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $f(\mathbb{S}^2)$ es una superficie estrictamente convexa, que verifica

- Para cada $f(p) \in f(\mathbb{S}^2)$ se tiene $\eta(f(p)) = G(p)$, donde η es la aplicación de Gauss de la superficie $f(\mathbb{S}^2)$.
- Para cada $f(p) \in f(\mathbb{S}^2)$ se tiene $\rho(f(p)) = F(p)$, donde ρ es el promedio de los radios de curvatura de $f(\mathbb{S}^2)$ calculados en $f(p)$, es decir $F(p) = \frac{1}{2}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})$, donde k_1, k_2 son las curvaturas principales en $f(p)$ de $f(\mathbb{S}^2)$.

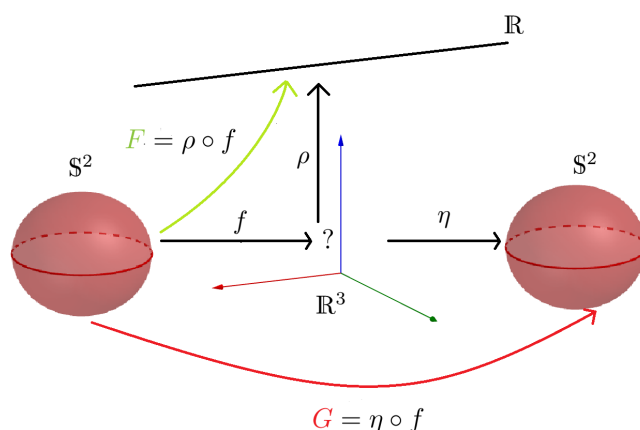


Fig. 4.1.: *Problema de Christoffel en $\mathbb{R}^3$.*

Es importante notar que la condición $f(\mathbb{S}^2)$ estrictamente convexa nos garantiza que las aplicaciones $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow f(\mathbb{S}^2)$ y $\eta : f(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{S}^2$ son difeomorfismos (ver [Mon09, pág 178]). Por lo tanto tiene sentido que $G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ sea difeomorfismo, esto puede pensarse como si geoméricamente no se perdiera ninguna propiedad de $\mathbb{S}^2$ a través de f y luego por η lo cual es deseable para nuestro nuevo enunciado. Sin embargo, si plantemos el problema en forma similar para el caso hiperbólico, la aplicación de Gauss no tiene codominio identificable con la esfera, por ejemplo en el modelo Lorentziano para una hipersuperficie $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ se tiene que $\eta : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^n$, donde $\mathbb{S}_1^n$ es el conjunto definido en la Sección 1.2; éste conjunto no es simplemente conexo, ni compacto como la n -esfera. Así, una transcripción literal del problema de Christoffel para el espacio hiperbólico imposibilita sostener el hecho que la aplicación G sea un difeomorfismo de la n -esfera en la n -esfera. Otra dificultad radica en que el problema de Christoffel para su enunciado usa la convexidad usual de $\mathbb{R}^{n+1}$, se usa convexidad del espacio ambiente donde se inmerso la n -esfera, por ello la necesidad de introducir una noción de convexidad en $\mathbb{H}^{n+1}$. La última dificultad que observamos son los radios de curvatura, pues estos dependen de la aplicación de Gauss la cual pretendemos reemplazar.

A lo largo de este documento hemos introducido tres conceptos, la aplicación hiperbólica de Gauss, radios de curvatura hiperbólica y convexidad horoesférica, con el objetivo de reemplazarlos en el enunciado del problema de Christoffel respectivamente por los conceptos de aplicación de Gauss, radios de curvatura y convexidad. Lo anterior nos permitirá un enunciado del problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ que satisface nuestras expectativas, pues topológicamente un ovaloide horoesférico es una n -esfera y su aplicación hiperbólica de Gauss es un difeomorfismo global (Teorema 3.25).

Dado un difeomorfismo $G : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ y una aplicación $C : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una inmersión $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, donde $\phi(\mathbb{S}^n)$ es un ovaloide horoesférico canónicamente orientado, y se verifica:

- Para cada $\phi(p) \in \phi(\mathbb{S}^n)$ se tiene $\bar{G}(\phi(p)) = G(p)$, donde $\bar{G}$ es la aplicación hiperbólica de Gauss de la hipersuperficie $\phi(\mathbb{S}^n)$.
- Para cada $\phi(p) \in \phi(\mathbb{S}^n)$, $C(p) = \phi(\rho(p))$, donde ρ es el promedio de los radios de curvatura hiperbólicos de $\phi(\mathbb{S}^2)$ calculados en $\phi(p)$, es decir $C(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i}$, donde los k_i son las curvaturas principales en $\phi(p)$ de $\phi(\mathbb{S}^n)$.

Observación 4.2 *Dado que la aplicación hiperbólica de Gauss G de una hipersuperficie localmente convexa es un difeomorfismo local, podríamos usarla para reparametrizar la hipersuperficie localmente, es decir, si tenemos una vecindad $U \subset \mathbb{S}^n$ alrededor de un punto en la cual G es invertible, entonces consideremos $G(U)$ para reparametrizar la hipersuperficie a $\bar{\phi}$, con aplicación de Gauss $\bar{G}$. Lo anterior se consigue simplemente componiendo $\bar{\phi} = \phi \circ G^{-1} : G(U) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, note que ahora la aplicación de Gauss $\bar{G}$ bajo el cambio de coordenadas se transforma en $\bar{G} = G \circ G^{-1} : G(U) \rightarrow \mathbb{S}^n$, teniendo $\bar{G}(x) = x$; para retornar a G y ϕ basta con componer con G las funciones $\bar{\phi}$ y $\bar{G}$ adecuadamente. En conclusión, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi : U \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ y $G(x) = x$. El hecho de tomar el ovaloide horoesférico canónicamente orientado es de suma importancia, ya que si se usa la otra orientación no es necesariamente cierto que la aplicación hiperbólica de Gauss sea un difeomorfismo.*

De la observación anterior se concluye que el enunciado presentado del problema de Christoffel es equivalente al siguiente el cual usaremos en el resto del trabajo.

El problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$

Sea $C : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ una aplicación suave. Se desea encontrar, en caso de que exista, un ovoide horoesférico canónicamente orientado $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tal que su aplicación hiperbólica de Gauss y la media de sus curvaturas de radio hiperbólicas sean para cada $x \in \mathbb{S}^n$, respectivamente

$$G(x) = x \text{ y } C(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - k_i(\phi(x))},$$

donde $k_1, \dots, k_n$ son las curvaturas principales de ϕ .

4.3 Relación entre el problema de Nirenberg sobre $\mathbb{S}^n$ y el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$

El objetivo de esta sección es mostrar la relación entre el problema de Nirenberg sobre $\mathbb{S}^n$ y el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ para ello nos apoyaremos en el siguiente teorema que básicamente dice que una superficie localmente horoesféricamente convexa queda determinada por su aplicación hiperbólica de Gauss y su función soporte.

Dada una inmersión isométrica $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ donde M es una variedad riemanianna orientable, se determina de manera natural la inmersión isométrica $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ dada por el mapa conico asociado a ϕ . Los siguientes lemas describen la geometría de esta inmersión.

Lema 4.3 Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica, si consideramos la inmersión $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ de co-dimension 2 en $\mathbb{L}^{n+2}$, tenemos que $(T_p M)^\perp = \text{Gen}\{\phi(p), \eta(p)\}$.

Demostración. Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de direcciones principales en p , con curvaturas principales $k_1, \dots, k_n$ y tomemos los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ donde $v_i = \frac{e_i}{1-k_i}$. Observe que

$$\begin{aligned} (d\psi)_p(v_i) &= (d\phi)_p(v_i) + (d\eta)_p(v_i) \\ &= (d\phi)_p\left(\frac{e_i}{1-k_i}\right) + (d\eta)_p\left(\frac{e_i}{1-k_i}\right) \\ &= \frac{1}{1-k_i}(d\phi)_p(e_i) + \frac{1}{1-k_i}(d\eta)_p(e_i) \\ &= \frac{1}{1-k_i}(d\phi)_p(e_i) - \frac{k_i}{1-k_i}(d\phi)_p(e_i) \\ &= \left(\frac{1}{1-k_i} - \frac{k_i}{1-k_i}\right)(d\phi)_p(e_i) \\ &= (d\phi)_p(e_i). \end{aligned}$$

De esto se sigue que los espacios $d\phi(T_p M)$ y $d\psi(T_p M)$ son esencialmente el mismo y $\langle\langle (d\psi)_p(v_i), (d\psi)_p(v_j) \rangle\rangle = \delta_{ij}$. Por lo tanto es suficiente con probar que $\{e_1, \dots, e_n, \phi(p), \eta(p)\}$ es base de $\mathbb{L}^{n+2}$. Sean $\alpha_i, 1 \leq i \leq n+2$, números reales que verifican

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} \phi(p) + \alpha_{n+2} \eta(p) = 0. \quad (4.2)$$

El Lema 2.4 dice que $\langle\langle \phi(p), e_i \rangle\rangle = 0$; por otra parte,

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} \phi(p) + \alpha_{n+2} \eta(p), e_j \right\rangle \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle \\ &+ \alpha_{n+1} \langle\langle \phi(p), e_j \rangle\rangle + \alpha_{n+2} \langle\langle \eta(p), e_j \rangle\rangle \\ &= \alpha_j \end{aligned} \quad (4.3)$$

En consecuencia por (4.2) y (4.3) tenemos $\alpha_j = 0$, para $1 \leq j \leq n$. Reduciendo la ecuación (4.2) a

$$\alpha_{n+1} \phi(p) + \alpha_{n+2} \eta(p) = 0. \quad (4.4)$$

Si suponemos $\alpha_{n+1} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \langle\langle \phi(p), \phi(p) \rangle\rangle &= \left\langle \left\langle \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \eta(p), \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \eta(p) \right\rangle \right\rangle = \left(\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \right)^2 \langle\langle \eta(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= \left(\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \right)^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\left(\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \right)^2 = -1,$$

lo cual es una contradicción, así $\alpha_{n+1} = 0$; aplicando este último hecho a la ecuación (4.4), tenemos $\alpha_{n+2} = 0$. En conclusión, los vectores $\{e_1, \dots, e_n, \phi(p), \eta(p)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{L}^{n+2}$ y deben formar una base de este espacio. Dado que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n, \phi(p), \eta(p)\}$ es ortogonal (usando la forma bilineal definida en $\mathbb{L}^{n+2}$), se tiene que $(T_p M)^\perp = \text{Gen}\{\phi(p), \eta(p)\}$.

□

Lema 4.4 Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una inmersión isométrica, si consideramos la inmersión $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ de co-dimension 2 en $\mathbb{L}^{n+2}$, entonces la segunda forma fundamental asociada a esta última inmersión $B : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ verifica

$$B(v_i, v_j) = \left(\frac{1}{1 - k_i} \phi + \frac{k_i}{1 - k_i} \eta \right) \delta_{ij}, \quad (4.5)$$

donde $v_i = \frac{e_i}{1 - k_i}$, siendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de direcciones principales con curvaturas principales asociadas $\{k_i\}_{i=1}^n$ para la inmersión ϕ .

Demostración. Sea $B : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ la segunda forma fundamental de la inmersión ψ , entonces $B(v_i, v_j) = \beta_1 \phi + \beta_2 \eta$, y denotando por A_η el operador de forma de la inmersión ϕ asociado a η tenemos

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\langle B(v_i, v_j), \phi \rangle = \langle -A_\phi(v_i), v_j \rangle, \\
&= \langle \nabla_{v_i}^{\mathbb{R}^{n+2}} \phi, d\psi(v_j) \rangle = \langle d\phi(v_i), d\psi(v_j) \rangle, \\
&= \langle d\psi(v_i) - d\eta(v_i), d\psi(v_j) \rangle = \langle d\psi(v_i), d\psi(v_j) \rangle - \langle d\eta(v_i), d\psi(v_j) \rangle, \\
&= \delta_{ij} - \langle d\eta(v_i), d\phi(v_j) + d\eta(v_j) \rangle, \\
&= \delta_{ij} + \langle A_\eta(v_i), v_j \rangle + \langle A_\eta(v_i), A_\eta(v_j) \rangle, \\
&= \delta_{ij} + \frac{\delta_{ij} k_i}{(1 - k_i)^2} - \frac{\delta_{ij} k_i^2}{(1 - k_i)^2} = \frac{1}{1 - k_i} \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \langle B(v_i, v_j), \eta \rangle, \\
&= \langle A_\eta(v_i), v_j \rangle, \\
&= \langle -d\eta(v_i), d\phi(v_j) + d\eta(v_j) \rangle, \\
&= \langle -d\eta(v_i), d\phi(v_j) \rangle + \langle -d\eta(v_i), d\eta(v_j) \rangle, \\
&= -\langle A_\eta(v_i), A_\eta(v_j) \rangle + \langle A_\eta(v_i), v_j \rangle, \\
&= -\frac{k_i^2}{(1 - k_i)^2} \delta_{ij} + \frac{k_i}{(1 - k_i)^2} \delta_{ij}, \\
&= \frac{k_i}{1 - k_i} \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Así, por las ecuaciones anteriores inferimos

$$B(v_i, v_j) = \left(\frac{1}{1 - k_i} \phi + \frac{k_i}{1 - k_i} \eta \right) \delta_{ij}. \quad (4.6)$$

□

Teorema 4.5 (Galvez et. al., [Esp+09]) Sea $\phi : U \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una hipersuperficie localmente horoesféricamente convexa con aplicación hiperbólica de Gauss $G(x) = x$ y función soporte $e^\rho : U \rightarrow (0, \infty)$ entonces

$$\phi = \frac{e^\rho}{2} (1 + e^{-2\rho} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2)) (1, x) + e^{-\rho} (0, -x + \nabla^{g_0} \rho). \quad (4.7)$$

Demostración. Daremos una prueba constructiva para explicar el origen de la expresión. Sea $g = e^{2\rho} g_0$, entonces tenemos $\langle d\psi, d\psi \rangle = e^{2\rho} g_0 = g$, recordemos que $\psi = \phi + \eta$. Nuestro primer objetivo es probar la igualdad

$$\phi = \frac{1}{n} \Delta^g \psi + \frac{S(g) + n(n-1)}{2n(n-1)} \psi, \quad (4.8)$$

donde $S(g)$ es la curvatura escalar de g , y $\Delta^g \psi$ es el laplaciano de ψ con respecto a g . Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de direcciones principales en p , con curvaturas principales $k_1, \dots, k_n$ y tomemos los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ donde $v_i = \frac{e_i}{1-k_i}$. Por la ecuación de Gauss (ver ecuación (1.2)) y el Lema 4.4

$$K(v_i, v_j) = \langle B(v_i, v_i), B(v_j, v_j) \rangle - \|B(v_i, v_j)\|^2 = 1 - \frac{1}{1-k_i} - \frac{1}{1-k_j},$$

calculando la suma de las $\frac{n(n-1)}{2}$ curvaturas seccionales tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{1-k_i} - \frac{1}{1-k_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^n 1 - \frac{2}{1-k_j} \right) \right).$$

Así la curvatura escalar de la inmersión ψ , $S(g)$ que es $n(n-1)$ veces el promedio de las curvaturas seccionales, se determina por

$$\begin{aligned} S(g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{1-k_i} - \frac{1}{1-k_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^n 1 - \frac{2}{1-k_j} \right) \\ &= n^2 - 2n \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-k_i} - n + \sum_{j=1}^n \frac{2}{1-k_j} \\ &= n(n-1) - 2(n-1) \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-k_i}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando el Lema 4.4 determinamos el vector curvatura media de la inmersión $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(v_i, v_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1-k_i} \phi + \frac{k_i}{1-k_i} \eta \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1-k_i} \phi + \frac{k_i}{1-k_i} (\psi - \phi) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-k_i}{1-k_i} \phi + \frac{k_i}{1-k_i} \psi \right) = \phi + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{1-k_i} \right) \psi \\ &= \phi + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i} - 1 \right) \psi = \phi \left(-1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i} \right) \psi \end{aligned}$$

Ahora, si recordamos la relación $\Delta^g \psi = nH$ (Proposición 1.10) concluimos que,

$$\Delta^g \psi = n \left(\phi \left(-1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i} \right) \psi \right) = n\phi + \left(-1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i} \right) n\psi.$$

Despejando ϕ ,

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{n} \Delta^g \psi + \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i} \right) \psi, \\ &= \frac{1}{n} \Delta^g \psi + \frac{1}{n} \left(n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i} \right) \frac{2(n-1)}{2(n-1)} \psi, \\ &= \frac{1}{n} \Delta^g \psi + \frac{2n(n-1) - 2(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-k_i}}{2n(n-1)} \psi \\ &= \phi = \frac{1}{n} \Delta^g \psi + \frac{n(n-1) - S(g)}{2n(n-1)} \psi. \end{aligned}$$

Para calcular $\Delta^g \psi$ consideremos sobre un punto fijo $x \in U \subset \mathbb{S}^n$ un referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ de $(\mathbb{S}^n, g_0)$ alrededor de x . Sea $\{v_i\}_{i=0}^{n+1}$ la base canónica de $\mathbb{L}^{n+2}$ y escribamos $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_{n+1})$ en coordenadas canónicas. Recordando que $\psi = e^\rho(1, x)$ y después expresando el punto $x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \equiv \{v \in \mathbb{L}^{n+2} : v_0 = 0\}$, como $x = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ calculamos

$$\Delta^{g_0} \psi = \Delta^{g_0}(e^\rho(1, x)) = \Delta^{g_0}(e^\rho, e^\rho x) = (\Delta^{g_0} e^\rho, \Delta^{g_0}(e^\rho x_1), \dots, \Delta^{g_0}(e^\rho x_n)).$$

Dado que $\Delta^{g_0}(e^\rho x_i) = x_i \Delta^{g_0} e^\rho + e^\rho \Delta^{g_0} x_i + 2g_0(\nabla^{g_0} e^\rho, \nabla^{g_0} x_i)$, llegamos a,

$$\Delta^{g_0} \psi = \Delta^{g_0}(e^\rho(1, x)) = (\Delta^{g_0} e^\rho, x \Delta^{g_0} e^\rho + e^\rho \Delta^{g_0} x + 2 \sum_{k=1}^{n+1} g_0(\nabla^{g_0} e^\rho, \nabla^{g_0} x_k) v_k). \quad (4.10)$$

Reemplazando (A.24) en (4.10) tenemos,

$$\begin{aligned} \Delta^{g_0} \psi &= (\Delta^{g_0} e^\rho, x \Delta^{g_0} e^\rho + e^\rho \Delta^{g_0} x + 2e^\rho \sum_{k=1}^{n+1} g_0(\nabla^{g_0} \rho, \nabla x_k) v_k) \\ &= (\Delta^{g_0} e^\rho, x \Delta^{g_0} e^\rho + e^\rho \Delta^{g_0} x + 2e^\rho \nabla^{g_0} \rho) \\ &= (\Delta^{g_0} e^\rho)(1, x) + (0, e^\rho \Delta^{g_0} x + 2e^\rho \nabla^{g_0} \rho) \\ &= e^{-\rho}(\Delta^{g_0} e^\rho) e^\rho(1, x) + (0, e^\rho \Delta^{g_0} x + 2e^\rho \nabla^{g_0} \rho) \\ &= e^{-\rho}(\Delta^{g_0} e^\rho) \psi + (0, e^\rho \Delta^{g_0} x + 2e^\rho \nabla^{g_0} \rho). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ahora calcularemos $\Delta^{g_0} e^\rho$ y $\Delta^{g_0} x$ para reemplazarlos en la ecuación anterior. Usando la inmersión x , sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de direcciones principales

$$\begin{aligned} \Delta^{g_0} e^\rho &= tr(v \rightarrow \nabla_v \nabla^{g_0} e^\rho) \\ &= tr(v \rightarrow \nabla_v e^\rho \nabla^{g_0} \rho) \\ &= tr(v \rightarrow e^\rho d\rho(v) \nabla^g \rho + e^\rho \nabla_v \nabla^{g_0} \rho) \\ &= \sum_{i=1}^n e^\rho g_0(d\rho(e_i) \nabla^{g_0} \rho, e_i) + e^\rho g_0(\nabla_{e_i} \nabla^g \rho, e_i) \\ &= e^\rho \sum_{i=1}^n g_0(\nabla^g \rho, e_i)^2 + e^\rho \Delta^{g_0} \rho \\ &= e^\rho (\|\Delta \rho\|_{g_0}^2 + \Delta^{g_0} \rho). \end{aligned} \quad (4.12)$$

De otro lado la Proposición 1.10 indica que $\Delta^{g_0} x = nH$, donde H es la curvatura media de la inmersión x .

Sea ∇ la conexión de $\mathbb{R}^{n+1}$, A_η el operador de forma de la inmersión x . En este caso $\beta(e_i, e_i) = g_0(\nabla_{e_i} e_i, x)x$, donde β es la segunda forma fundamental de la inmersión x , así

$$nH = \sum_{j=1}^n g_0(\nabla_{e_j} e_j, x)x = - \sum_{j=1}^n g_0(A_x(e_j), e_j)x = - \sum_{j=1}^n k_j x = -nx.$$

En conclusión,

$$\Delta^{g_0} x = -nx. \quad (4.13)$$

Reemplazando (4.12) y (4.13) en (4.11) obtenemos,

$$\Delta^{g_0} \psi = (\|\Delta \rho\|_{g_0}^2 + \Delta^{g_0} \rho) \psi + e^\rho (0, -nx + 2\nabla^{g_0} \rho). \quad (4.14)$$

Introduzcamos la siguiente notación, para cualquier $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ definimos,

$$g_0(\nabla^{g_0} \psi, Z) := \sum_{k=0}^{n+1} g_0(\nabla^{g_0} \psi_k, Z) v_k = \sum_{k=0}^{n+1} Z(\psi_k) v_k = Z(\psi) \in \mathfrak{X}(\psi) \equiv \mathfrak{X}(\phi).$$

Usando esta notación, podemos escribir,

$$\begin{aligned} g_0(\nabla^{g_0} \psi, \nabla^{g_0} \rho) &= \sum_{k=0}^{n+1} g_0(\nabla^{g_0} \psi_k, \nabla^{g_0} \rho) v_k = \sum_{k=0}^{n+1} \nabla^{g_0} \rho(\psi_k) v_k = \nabla^{g_0} \rho(\psi) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(\rho) e_i(\psi) = (\nabla^{g_0} \rho)(\psi) = \sum_{i=1}^n e_i(\rho) e_i(\psi) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(\rho) e_i(e^\rho(1, x)) = \sum_{i=1}^n e_i(\rho) (e_i(\rho) e^\rho, e_i(\rho) e^\rho x + e^\rho e_i) \\ &= e^\rho \left(\sum_{i=1}^n e_i(\rho)^2 (1, x) + (0, e_i(\rho) e_i) \right) = e^\rho \|\Delta \rho\|_{g_0}^2 (1, x) + e^\rho \left(0, \sum_{i=1}^n e_i(\rho) e_i \right) \\ &= \|\Delta \rho\|_{g_0}^2 \psi + e^\rho (0, \nabla^{g_0} \rho). \end{aligned} \quad (4.15)$$

La relación entre los laplacianos de dos métricas conformes (ver proposición A.3) en las ecuaciones (4.14) y (4.15) permite concluir,

$$\begin{aligned} \Delta^g \psi &= e^{-2\rho} ((\|\Delta \rho\|_{g_0}^2 + \Delta^{g_0} \rho) \psi + e^\rho (0, -nx + 2\nabla^{g_0} \rho) + (n-2) (\|\Delta \rho\|_{g_0}^2 \psi + e^\rho (0, \nabla^{g_0} \rho))) \\ &= e^{-2\rho} (\Delta^{g_0} \rho + (n-1) \|\Delta \rho\|_{g_0}^2) \psi + ne^{-\rho} (0, -x + \nabla^{g_0} \rho). \end{aligned} \quad (4.16)$$

De otro lado por la Proposición A.4 implica que ,

$$\Delta^{g_0} \rho + \frac{n-2}{2} \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2 - \frac{n}{2} + \frac{e^{2\rho}}{2(n-1)} S(g) = 0. \quad (4.17)$$

Así,

$$e^{-2\rho} (\Delta^{g_0} \rho + (n-1) \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2) = -\frac{S(g)}{2(n-1)} + \frac{ne^{-2\rho}}{2} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2). \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.18) en (4.16) obtenemos

$$\Delta^g \psi = \left(\frac{S(g)}{2(n-1)} + \frac{ne^{-2\rho}}{2} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2) \right) \psi + ne^{-\rho} (0, -x + \nabla^{g_0} \rho). \quad (4.19)$$

Reemplazando esta última ecuación en (4.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{n} \left(-\frac{S(g)}{2(n-1)} + \frac{ne^{-2\rho}}{2} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2) \right) \psi + e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0} \rho) \psi + \frac{n(n-1) - S(g)}{2n(n-1)} \psi \\
&= \left(-\frac{S(g)}{2n(n-1)} + \frac{e^{-2\rho}}{2} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2) \right) \psi + e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0} \rho) \psi + \frac{n(n-1) - S(g)}{2n(n-1)} \psi \\
&= \left(\frac{e^{-2\rho}}{2} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2) \right) \psi + e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0} \rho) \psi + \frac{1}{2} \psi \\
&= \frac{1}{2} (1 + e^{-2\rho} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2)) \psi + e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0} \rho) \\
&= \frac{e^\rho}{2} (1 + e^{-2\rho} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2)) (1, x) + e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0} \rho),
\end{aligned}$$

tal y como se deseaba.

□

Teorema 4.6 (Galvez et. al., [Esp+09]) Sea $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una solución del problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ para la aplicación suave $C : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$. Entonces su métrica horoesférica g_∞ es una solución al problema de Nirenberg en $\mathbb{S}^n$ para la función de curvatura escalar $S : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(x) = n(n-1)(1 - 2C(x)). \quad (4.20)$$

Recíprocamente, sea $g = e^{2\rho} g_0$ una solución al problema de Nirenberg para la función de curvatura escalar $S : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces existe $\tau_0 > 0$ tal que para cada $\tau \geq \tau_0$ la aplicación $\phi_\tau : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ dada por

$$\phi_\tau = \frac{\tau}{2} e^\rho \left(1 + \frac{e^{-2\rho}}{\tau^2} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2) \right) (1, x) + \frac{e^{-\rho}}{\tau} (0, -x + \nabla^{g_0} \rho). \quad (4.21)$$

es una solución al problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ para la aplicación suave

$$C_\tau(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S(x)}{\tau^2 n(n-1)} \right),$$

más aún, la métrica horoesférica de ϕ_τ es $g_\infty = \tau^2 g$.

Demostración. Sea $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una solución para el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$. Entonces su aplicación hiperbólica de Gauss es $G(x) = x$, así por la ecuación (3.7) para $v \in T\mathbb{S}^n$ la métrica horoesférica de ϕ satisface

$$g_\infty(v, v) = e^{2\rho} \langle dG(v), dG(v) \rangle = e^{2\rho} \langle v, v \rangle = e^{2\rho} g_0(v, v).$$

Es decir, la métrica horoesférica de ϕ es conforme a la euclídea g_0 . Más aun, sabemos que

$$C(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - k_i(\phi(x))}.$$

Reemplazando (4.3) en (4.9) convenientemente tenemos

$$S(g) = n(n-1) - 2n(n-1)C(x) = n(n-1)(1 - 2C(x)),$$

lo que prueba la implicación directa. Recíprocamente, sea $g = e^{2\rho}g_0$ una métrica conforme sobre $\mathbb{S}^n$ con función de curvatura escalar $S(x)$ y considerando $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en la forma usual. Considere una constante positiva $\tau > 0$ y la métrica conforme $g_\tau := \tau^2 g$. Note que si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $T_p\mathbb{S}^n$ bajo la métrica g , entonces $\{\frac{e_i}{\tau}\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $T_p\mathbb{S}^n$ con la métrica g_τ , además la variedad riemanianna $(\mathbb{S}^n, g_\tau)$ tiene la misma conexión Levi-Civita que $(\mathbb{S}^n, g)$, esto es consecuencia directa de la Proposición A.1. Sea $K_\tau : T_p\mathbb{S}^n \times T_p\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $K : T_p\mathbb{S}^n \times T_p\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ las curvaturas seccionales de $(\mathbb{S}^n, g_\tau)$ y $(\mathbb{S}^n, g)$ respectivamente, entonces

$$K_\tau\left(\frac{e_i}{\tau}, \frac{e_j}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau^2}K(e_i, e_j).$$

Recordando que la curvatura escalar es $n(n-1)$ veces el promedio de las curvaturas seccionales, entonces por la ecuación anterior concluimos que la función de curvatura escalar de g_τ es $S_\tau(x) = \frac{1}{\tau^2}S(x)$. De otro lado, si hacemos una traslación paralela de ϕ en $\mathbb{H}^{n+1}$ de τ unidades tenemos

$$\phi_\tau = \cosh(\tau)\phi + \sinh(\tau)(\psi - \phi) = e^{-\tau}\phi + \sinh(\tau)\psi \quad (4.22)$$

Usando (4.7) en (4.22) tenemos

$$\begin{aligned} \phi_\tau &= e^{-\tau} \frac{e^\rho}{2} (1 + e^{-2\rho})(1 + \|\nabla^{g_0}\rho\|_{g_0})(1, x) + e^{-\tau} e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0}\rho) + \sinh(\tau)\psi \\ &= e^{-\tau} \frac{e^\rho}{2} (1 + e^{-2\rho})(1 + \|\nabla^{g_0}\rho\|_{g_0})(1, x) + e^{-\tau} e^{-\rho}(0, -x + \nabla^{g_0}\rho) + \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} e^\rho(1, x) \\ &= \left(\frac{e^\rho e^\tau}{2} - \frac{e^\rho e^{-\tau}}{2} + \frac{e^\rho e^{-\tau}}{2} + \frac{e^{-\rho} e^{-\tau}}{2} (1 + \|\nabla^{g_0}\rho\|_{g_0}) \right) (1, x) + e^{-\rho} e^{-\tau} (0, -x + \nabla^{g_0}\rho) \\ &= \frac{\tau}{2} e^\rho \left(1 + \frac{e^{-2\rho}}{\tau^2} (1 + \|\nabla^{g_0}\rho\|_{g_0}^2) \right) (1, x) + \frac{e^{-\rho}}{\tau} (0, -x + \nabla^{g_0}\rho), \end{aligned}$$

lo que prueba $\phi_\tau : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$.

Lema 4.7 La función $\psi_\tau = \tau e^\rho(1, x) : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{N}_+^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2} \equiv \mathbb{L} \times \mathbb{R}^{n+1}$, es el cono de luz asociado a la inmersión ϕ_τ . para alguno de los dos posibles campos normales unitarios sobre $\phi_\tau(\mathbb{S}^n)$.

Demostración. Sea η_τ un campo normal unitario sobre $\phi_\tau(\mathbb{S}^n)$, observemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \langle\langle \psi_\tau, \psi_\tau \rangle\rangle &= \langle\langle \tau e^\rho(1, x), \tau e^\rho(1, x) \rangle\rangle \\ &= \tau^2 (-e^{2\rho} + e^{2\rho} \langle x, x \rangle) \\ &= \tau^2 (-e^{2\rho} + e^{2\rho}) = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \phi_\tau, \psi_\tau \rangle\rangle &= \langle\langle \frac{e^{-\rho}}{\tau} (0, -x + \nabla^{g_0}\rho), \Psi_\tau \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \frac{e^{-\rho}}{\tau} (0, -x + \nabla^{g_0}\rho), \tau e^\rho(1, x) \rangle\rangle \\ &= -1 + \tau e^\rho \langle x, \nabla^{g_0}\rho \rangle = -1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\langle \langle d\phi_\tau, \psi_\tau \rangle \rangle &= \langle \langle e^{-\tau} d\phi + \sinh(\tau) d\psi, \psi_\tau \rangle \rangle \\
&= e^{-\tau} \langle \langle d\phi, \psi_\tau \rangle \rangle + \sinh(\tau) \langle \langle d\psi, \psi_\tau \rangle \rangle \\
&= \tau e^{-\tau} \langle \langle d\phi, \psi \rangle \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Las anteriores ecuaciones indican que puede tomarse $\eta_\tau : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ definida como $\eta_\tau = \psi_\tau - \phi_\tau$ dado que, esta función es diferenciable y $\eta_\tau(p)$ es tangente a $\mathbb{H}^{n+1}$ y ortogonal a $T_{\phi_\tau(p)}\phi_\tau(\mathbb{S}^n)$. Esto muestra que $\phi_\tau(\mathbb{S}^n)$ es orientable bajo estas condiciones.

La ecuación (4.25) muestra que ψ_τ es normal a ϕ_τ , por tanto existen escalares α y β tales que $\psi_\tau = \alpha\eta_\tau + \beta\phi_\tau$, pues $(T\phi_\tau(\mathbb{S}^n))^\perp = \text{Gen}\{\phi_\tau, \eta_\tau\}$ en $\mathbb{L}^{n+2}$. De la ecuación (4.24) se concluye que $\alpha = 1$, además se tiene que

$$\langle \langle \psi_\tau, \psi_\tau \rangle \rangle = \langle \langle \phi_\tau, \phi_\tau \rangle \rangle + 2\beta \langle \langle \phi_\tau, \eta_\tau \rangle \rangle + \beta^2 \langle \langle \eta_\tau, \eta_\tau \rangle \rangle = -1 + \beta^2.$$

Así, por (4.23) se infiere $\beta = 1$ ó $\beta = -1$, en caso de tener $\beta = -1$ tomaremos $-\eta_\tau$ como campo normal de $\phi_\tau(\mathbb{S}^n)$. Por lo tanto $\psi_\tau = \phi_\tau + \eta_\tau$, lo que completa la prueba.

□

De lo anterior garantiza que la aplicación hiperbólica de Gauss de ϕ_τ en puntos regulares es $G(x) = x$. Además tenemos que $g_\infty = \langle \langle d\psi_\tau, d\psi_\tau \rangle \rangle = \tau^2 \langle \langle d\psi, d\psi \rangle \rangle = \tau^2 g = g_\tau$, la cual tiene curvatura escalar $S_\tau(x) = \frac{1}{\tau^2} S(x)$. Así, por (4.9) el promedio de los radios de curvatura hiperbólicas es

$$C_\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - k_i^\tau} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S(x)}{\tau^2 n(n-1)} \right).$$

Para finalizar la prueba solo necesitamos garantizar la existencia de algún $\tau_0 > 0$ tal que $\psi_\tau : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{N}_+^{n+1}$ es regular para $\tau \geq \tau_0$. Primero que todo notemos que

$$\phi_\tau = \frac{1}{\tau} \phi + \frac{\tau^2 - 1}{2\tau} \psi. \tag{4.26}$$

Consideremos el siguiente subconjunto del haz tangente de $\mathbb{S}^n$,

$$U\mathbb{S}^n = \{(p, v) \in \mathbb{S}^n \times T_p\mathbb{S}^n, g_0(v, v) = 1\} = \{(p, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n : \langle \langle p, v \rangle \rangle = 0\}. \tag{4.27}$$

El conjunto $U\mathbb{S}^n$ es compacto pues es un subconjunto cerrado del compacto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$, por (4.26) tenemos $d(\phi_\tau)_p(v) = \frac{1}{\tau} d(\phi)_p(v) + \frac{\tau^2 - 1}{2\tau} d(\psi)_p(v)$ para cada $(p, v) \in U\mathbb{S}^n$. Así, ϕ_τ es regular en todo punto si y solo si $d(\phi_\tau)_p(v) \neq 0$ para cada $(p, v) \in U\mathbb{S}^n$, esto es si y solo si

$$d\phi_p(v) \neq \frac{1}{2} (1 - \tau^2) d\psi_p(v) \quad \text{para cada } (p, v) \in U\mathbb{S}^n. \tag{4.28}$$

La compacidad de $U\mathbb{S}^n$ garantiza que los conjuntos

$$\Lambda := \{d\Psi_p(v) \in \mathbb{L}^{n+2} : (p, v) \in U\mathbb{S}^n\} \quad \text{y} \quad \Omega := \{d(\phi)_p(v) \in \mathbb{L}^{n+2} : (p, v) \in U\mathbb{S}^n\}$$

son compactos en $\mathbb{R}^{n+2} \equiv \mathbb{L}^{n+2}$, más aun, dado que $d\psi_p(v) \neq 0$, siempre que $0 \notin \Lambda$, inferimos la existencia de algún $r_0 > 0$ tal que si $r \geq r_0$, entonces $\Omega \cap r\Lambda = \emptyset$, ver Figura 4.2.

En particular, existe algún $\tau_0 > 0$ tal que si $\tau \geq \tau_0$, la condición (4.28) se garantiza. Esto prueba que ϕ_τ es regular si $\tau \geq \tau_0$.

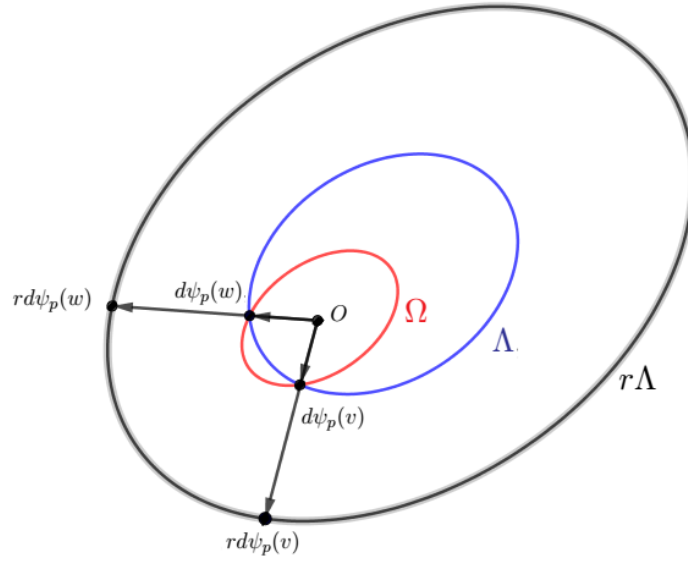


Fig. 4.2.: Representación de $\Omega \cap r\Lambda = \emptyset$.

□

El teorema anterior prueba que el problema de Christoffel en $\mathbb{H}^{n+1}$ y el problema de Nirenberg sobre $\mathbb{S}^n$ son esencialmente equivalentes, sin embargo no podemos afirmar la equivalencia total pues de (4.20) se deduce que $S(x) < n(n-1)$ y esta desigualdad no se tiene para todas las funciones de curvatura escalar, por lo anterior se resalta que dicho teorema es un avance en el problema de Nirenberg.

Apéndice

A.1 Métricas conformes

En esta sección probaremos algunas fórmulas bajo un cambio conforme de la métrica. Dadas (M, g) una variedad riemanniana y una función suave $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiendo

$$\bar{g}_p(u, v) = e^{2\rho} g_p(u, v), \forall u, v \in T_p M \text{ y } p \in M,$$

obtenemos una nueva métrica $\bar{g}$ sobre M . Tales métricas son llamadas conformes a g .

A continuación presentamos algunos resultados sobre métricas conformes.

Proposición A.1 Sea (M, g) una variedad riemanniana, ∇ su conexión riemanniana y $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considere la variedad riemanniana (M, g') y ∇' su conexión riemanniana, donde $g' = e^{2\rho} g$. entonces para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + X(\rho)Y + Y(\rho)X - g(X, Y)\nabla\rho.$$

Demostración. Sean X, Y, Z campos diferenciables sobre M , entonces por la identidad de Koszul tenemos

$$\begin{aligned} 2g'(Z, \nabla'_X Y) &= Yg'(X, Z) + Xg'(Z, Y) - Zg'(X, Y) - g'([Y, Z], X) \\ &\quad - g'([X, Z], Y) - g'([Y, X], Z) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} 2g(Z, \nabla_X Y) &= Yg(X, Z) + Xg(Z, Y) - Zg(X, Y) - g([Y, Z], X) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, X], Z). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Recordemos que si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in D(M)$, $X(fg) = X(f)g + fX(g)$, por la ecuación (A.1) obtenemos

$$\begin{aligned} 2g'(Z, \nabla'_X Y) &= Ye^{2\rho}g(X, Z) + Xe^{2\rho}g(Z, Y) - Ze^{2\rho}g(X, Y) - e^{2\rho}g([Y, Z], X) \\ &\quad - e^{2\rho}g([X, Z], Y) - e^{2\rho}g([Y, X], Z) \\ &= Y(e^{2\rho})g(X, Z) + e^{2\rho}Y(g(X, Z)) + X(e^{2\rho})g(Z, Y) + e^{2\rho}X(g(Z, Y)) \\ &\quad - Z(e^{2\rho})g(X, Y) - e^{2\rho}Z(g(X, Y)) - e^{2\rho}g([Y, Z], X) - e^{2\rho}g([X, Z], Y) \\ &\quad - e^{2\rho}g([Y, X], Z), \end{aligned}$$

en conclusión

$$\begin{aligned} 2g'(Z, \nabla'_X Y) &= e^{2\rho}(Y(g(X, Z)) + X(g(Z, Y)) - Z(g(X, Y)) - g([Y, Z], X) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, X], Z)) + Y(e^{2\rho})g(X, Z) + X(e^{2\rho})g(Z, Y) \\ &\quad - Z(e^{2\rho})g(X, Y). \end{aligned}$$

Usando (A.2) en la última igualdad se concluye

$$\begin{aligned} 2g'(Z, \nabla'_X Y) &= 2e^{2\rho}g(Z, \nabla_X Y) + Y(e^{2\rho})g(X, Z) + X(e^{2\rho})g(Z, Y) \\ &\quad - Z(e^{2\rho})g(X, Y). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Observación A.2 Considerando una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}$, así

$$X(e^{2\rho})(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial e^{2\rho}}{\partial x_i} = 2e^{2\rho} \sum_i a_i(p) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2e^{2\rho} X(\rho)(p). \quad (\text{A.4})$$

Usando la Observación anterior en (A.3) obtenemos

$$\begin{aligned} 2g'(Z, \nabla'_X Y) &= 2e^{2\rho}g(Z, \nabla_X Y) + 2e^{2\rho}Y(\rho)g(X, Z) + 2e^{2\rho}X(\rho)g(Z, Y) \\ &\quad - 2e^{2\rho}Z(\rho)g(X, Y). \end{aligned}$$

La anterior igualdad equivale a

$$g(Z, \nabla'_X Y) = g(Z, \nabla_X Y) + Y(\rho)g(X, Z) + X(\rho)g(Z, Y) - Z(\rho)g(X, Y). \quad (\text{A.5})$$

Pero del hecho que $g(\nabla\rho, Z) = Z(\rho)$ y g es simétrica y lineal en cada componente aplicado a la ecuación (A.5) se llega a

$$g(Z, \nabla'_X Y) = g(Z, \nabla_X Y + Y(\rho)X + X(\rho)Y + g(X, Y)\nabla\rho).$$

Por lo tanto de la última ecuación concluimos

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + X(\rho)Y + Y(\rho)X - g(X, Y)\nabla\rho. \quad (\text{A.6})$$

□

Proposición A.3 Sea (M, g) una variedad riemanniana, ∇ su conexión riemanniana y $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considere la variedad riemanniana $(M, \bar{g})$, $\bar{\nabla}$ su conexión riemanniana, donde $\bar{g} = e^{2\rho}g$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación suave, entonces

$$\Delta^{\bar{g}} f = e^{-2\rho} (\Delta^g f + (n-2)g_0(\nabla^g \rho, \nabla^g f))$$

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ un referencial geodésico con la métrica g , entonces $\{e^{-\rho}e_i\}_{i=1}^n$ es un referencial ortonormal con la métrica $\bar{g}$, se tiene

$$\nabla^g f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i \quad (\text{A.7})$$

y

$$\nabla^g \rho = \sum_{i=1}^n e_i(\rho)e_i. \quad (\text{A.8})$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta^{\bar{g}} f &= \sum_{i=1}^n (e^{-\rho}e_i(e^{-\rho}e_i(f)) - \bar{\nabla}_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f)) \\ &= \sum_{i=1}^n (e^{-2\rho}e_i(e_i(f)) + e^{-\rho}e_i(e^{-\rho})e_i(f) - \bar{\nabla}_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f)) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Aplicando la Proposición A.1

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) &= -\nabla_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) - 2e^{-\rho}e_i(\rho)e^{-\rho}e_i(f) + g(e^{-\rho}e_i, e^{-\rho}e_i)\nabla^g \rho(f) \\ &= -\nabla_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) - 2e^{-2\rho}e_i(f) + e^{-2\rho}g(\nabla^g f, \nabla^g \rho), \end{aligned}$$

y usando (A.8) y (A.7) en la ecuación anterior inferimos

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) &= \sum_{i=1}^n -\nabla_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) - 2e^{-2\rho} \sum_{i=1}^n e_i(\rho)e_i(f) + ne^{-2\rho}g(\nabla^g f, \nabla^g \rho) \\ &= \sum_{i=1}^n -\nabla_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) - 2e^{-2\rho}g(\nabla^g f, \nabla^g \rho) - ne^{-2\rho}g(\nabla^g f, \nabla^g \rho) \\ &= \sum_{i=1}^n -\nabla_{e^{-\rho}e_i}e^{-\rho}e_i(f) + e^{-2\rho}(n-2)g(\nabla^g f, \nabla^g \rho) \\ &= \sum_{i=1}^n -e^{-2\rho}\nabla_{e_i}e_i(f) - e^{-\rho}e_i(e^{-\rho})e_i(f) + e^{-2\rho}(n-2)g(\nabla^g f, \nabla^g \rho). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Combinando (A.10) y (A.9) se concluye la prueba

$$\Delta^{\bar{g}} f = e^{-2\rho} (\Delta^g f + (n-2)g_0(\nabla^g \rho, \nabla^g f))$$

□

Proposición A.4 Sea (M, g) una variedad riemanianna, ∇ su conexión riemanianna y $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considere la variedad riemanianna $(M, \bar{g})$, $\bar{\nabla}$ su conexión riemanianna, donde $\bar{g} = e^{2\rho}g$ entonces la curvatura escalar de la métrica $\bar{g}$, $\bar{S}$ se relaciona con ρ por medio de la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\Delta^g \rho + \frac{n-2}{2} \|\nabla^g \rho\|_g^2 - \frac{S(g)}{2(n-1)} + \frac{e^{2\rho}}{2(n-1)} S(\bar{g}) = 0,$$

donde S es la curvatura escalar de la métrica g .

Demostración. La idea de la prueba es simplemente calcular $\bar{S}$, para lo cual es bien conocido que

$$\bar{S} = \sum_{ik} \bar{R}_{ik} g^{ik},$$

donde

$$\bar{R}_{ik} = \sum_{sj} \bar{R}_{ijks} \bar{g}^{sj}.$$

Empezamos calculando $\bar{R}_{ijij}$, para ello sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ un referencial geodésico, inferimos que

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijij} &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) \\ &= e_j \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_{e_j} e_j) - e_i \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, \bar{\nabla}_{e_i} e_j) \\ &= 2e_j(\rho) e^{2\rho} g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) + e^{2\rho} e_i g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) - e^{2\rho} g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_{e_j} e_j) \\ &\quad - 2e^{2\rho} e_i(\rho) g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) - e^{2\rho} e_i g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) + e^{2\rho} g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, \bar{\nabla}_{e_i} e_j). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Por la ecuación (A.11) concluimos

$$\begin{aligned} e^{-2\rho} \bar{R}_{ijij} &= 2e_j(\rho) g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) + e_j g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) - g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_{e_j} e_j) \\ &\quad - 2e_i(\rho) g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) - e_i g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) + g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, \bar{\nabla}_{e_i} e_j). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por otro parte tenemos

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, e_j) &= g(\nabla_{e_i} e_i + 2e_i(\rho) e_i - \nabla \rho, e_j) \\ &= g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) + g(e_j, \nabla \rho) \\ &= g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - e_j(\rho), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, \bar{\nabla}_{e_j} e_j) &= g(\nabla_{e_i} e_i + 2e_i(\rho) e_i - \nabla \rho, \nabla_{e_j} e_j + 2e_j(\rho) e_j - \nabla \rho) \\ &= -2e_i(\rho)^2 - 2e_j(\rho)^2 + \|\nabla \rho\|_g^2, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, e_j) &= g(\nabla_{e_j} e_i + e_j(\rho) e_i + e_i(\rho) e_j, e_j) \\ &= g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) + e_i(\rho) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

y

$$g(\bar{\nabla}_{e_j} e_i, \bar{\nabla}_{e_i} e_j) = e_i(\rho)^2 + e_j(\rho)^2. \quad (\text{A.16})$$

Reemplazando (A.13), (A.14), (A.15), y (A.16) en (A.12)

$$\begin{aligned} e^{-2\rho} \bar{R}_{ijij} &= 2e_j(\rho) g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - 2e_j(\rho)^2 + e_j g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - e_j(e_j(\rho)) + 2e_i(\rho)^2 + 2e_j(\rho)^2 - \|\nabla \rho\|_g^2 \\ &\quad - 2e_i(\rho) g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) - 2e_i^2(\rho) - e_i g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) - e_i(e_i(\rho)) + e_i(\rho)^2 + e_j(\rho)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

simplificando en (A.17)

$$\begin{aligned} e^{-2\rho} \bar{R}_{ijij} &= e_j g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - e_i g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) - e_j(e_j(\rho)) - e_i(e_i(\rho)) \\ &\quad - \|\nabla \rho\|_g^2 + e_j(\rho)^2 + e_i(\rho)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Note que

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= g(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_i, e_j) - g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i, e_j) \\
&= e_j g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - g(\nabla_{e_i} e_i, \nabla_{e_j} e_j) - e_i g(\nabla_{e_j} e_i, e_j) + g(\nabla_{e_i} e_i, \nabla_{e_j} e_j) \\
&= e_j g(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - e_i g(\nabla_{e_j} e_i, e_j),
\end{aligned} \tag{A.19}$$

así tenemos de (A.19) y (A.18)

$$\bar{R}_{ijij} = e^{2\rho} (R_{ijij} - e_j(e_j(\rho)) - e_i(e_i(\rho)) - \|\nabla \rho\|_g^2 + e_j(\rho)^2 + e_i(\rho)^2). \tag{A.20}$$

Por otro lado

$$\bar{R}_{ii} = \sum_{jl} \bar{R}_{ijil} \bar{g}^{jl} = \sum_j \bar{R}_{ijij} \bar{g}^{jj} = \sum_{j \neq i} \bar{R}_{ijij} e^{2\rho}, \tag{A.21}$$

así por las ecuaciones (A.21) y (A.20) concluimos

$$\bar{R}_{ii} = R_{ii} - \Delta^g \rho - (n-2)e_i(e_i(\rho)) - (n-1)\|\nabla \rho\|_g^2 + \|\nabla \rho\|_g^2 + (n-2)e_i(\rho)^2. \tag{A.22}$$

Por otra parte

$$\bar{S} = \sum_{ik} \bar{R}_{ik} g^{ik} = \sum_i \bar{R}_{ii} \bar{g}^{ii} = \sum_i \bar{R}_{ii} e^{-2\rho}. \tag{A.23}$$

Reemplazando (A.22) en (A.23) vemos que

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= e^{-2\rho} (S - n\Delta^g \rho - (n-2)\Delta^g \rho - n(n-1)\|\nabla \rho\|_g^2 + n\|\nabla \rho\|_g^2 + (n-2)\|\nabla \rho\|_g^2) \\
&= e^{-2\rho} (S - 2(n-1)\Delta^g \rho - (n-1)(n-2)\|\nabla \rho\|_g^2),
\end{aligned}$$

de donde

$$\Delta^g \rho + \frac{n-2}{2} \|\nabla^g \rho\|_g^2 - \frac{S}{2(n-1)} + \frac{e^{2\rho}}{2(n-1)} \bar{S} = 0.$$

□

A.2 Test de la segunda derivada

Teorema A.5 Sea (M, g) una variedad riemanianna, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p_0 \in M$ un punto crítico de f , es decir $\nabla f(p_0) = 0$.

- (i) Si f alcanza en p_0 un mínimo local, entonces el hessiano $Hess_{p_0} f$ es semidefinido positivo (es decir, $Hess_{p_0} f(v, v) \geq 0$ para todo $v \in T_{p_0} M$).
- (ii) Si f alcanza en p_0 un máximo local, entonces el hessiano $Hess_{p_0} f$ es semidefinido negativo (es decir, $Hess_{p_0} f(v, v) \leq 0$ para todo $v \in T_{p_0} M$).
- (iii) Si el hessiano $Hess_{p_0} f$ es definido positivo (es decir, $Hess_{p_0} f(v, v) > 0$ para todo $v \in T_{p_0} M$) entonces la función f alcanza un mínimo local estricto en p_0 .
- (iv) Si el hessiano $Hess_{p_0} f$ es definido negativo (es decir, $Hess_{p_0} f(v, v) < 0$ para todo $v \in T_{p_0} M$) entonces la función f alcanza un máximo local estricto en p_0 .

La prueba de este resultado, se basa en el correspondiente resultado de análisis. Para su demostración, resulta esencial observar que si p_0 es un punto crítico de f , entonces para todo vector tangente $T_{p_0} M$ se tiene que

$$Hess_{p_0} f(v, v) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=t_0} f(\alpha(t)),$$

para cualquier curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ con $\alpha(t_0) = p_0$ y $\dot{\alpha}(t_0) = v$.

Observación A.6 Tomemos $v \in T_p \mathbb{S}^n$, entonces vemos que

$$\begin{aligned} g_0(\nabla^{g_0} e^\rho, v) &= d(e^\rho)_p(v) \\ &= d(\rho)_p(v) e^{\rho(p)} = g_0(e^\rho \nabla^{g_0} \rho, v). \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que

$$\nabla^{g_0} e^\rho = e^\rho \nabla^{g_0} \rho. \tag{A.24}$$

Bibliografía

- [Ale37] Aleksandr Danilovich Alexandrov. «Über die Frage nach der Existenz eines konvexen Körpers bei dem die Summe der Hauptkrümmungsradien eine gegebene positive Funktion ist, welche die Bedingungen der Geschlossenheit genügt». En: *Doklady Akad. Nauk.* 1937, págs. 59-60 (citado en la página 1).
- [AM01] Antonio Ambrosetti y Andrea Malchiodi. «On the symmetric scalar curvature problem on S^n ». En: *Journal of Differential Equations* (2001) (citado en la página 2).
- [BC91] Abbas Bahri y Jean-Michel Coron. «The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere». En: *Journal of Functional Analysis* (1991) (citado en la página 2).
- [Bia96] Gabriele Bianchi. «Non-existence and symmetry of solutions to the scalar curvature equation». En: *Communications in Partial Differential Equations* (1996) (citado en la página 2).
- [Chr65] Elwin Christoffel. «Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben.» En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1865) (citado en la página 1).
- [DC16] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [DC92] Manfredo Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992 (citado en la página 6, 8, 10, 11, 13, 16, 36).
- [Esp+09] Jose Espinar, Jose Galvez y Pablo Mira. «Hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}$ and conformally invariant equations: The generalized Christoffel and Nirenberg problems». En: *Journal of The European Mathematical Society - J EUR MATH SOC* (2009) (citado en la página 46, 50).
- [Fir67] William Firey. «The determination of convex bodies from their mean radius of curvature functions». En: *Mathematika* (1967) (citado en la página 1).
- [Fir68] William Firey. «Christoffel's problem for general convex bodies». En: *Mathematika* (1968) (citado en la página 1).
- [Hil06] David Hilbert. «Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen. vierte mitteilung». En: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1906) (citado en la página 1).

- [Hur02] Adolf Hurwitz. «Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier». En: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1902 (citado en la página 1).
- [KW75] Jerry Kazdan y Frank Warner. «Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures». En: *Annals of Mathematics* (1975) (citado en la página 2).
- [Lee97] John Lee. *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature*. Springer, 1997 (citado en la página 9, 12).
- [Mas82] William S Massey. *Introducción a la topología algebraica*. Reverté, 1982 (citado en la página 39).
- [Mon09] Sebastian Montiel. *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society, 2009 (citado en la página 40, 43).
- [Pog53] Aleksei Vasil'evich Pogorelov. «On the question of existence of a convex surface with a given sum of the principal radii of curvature». En: *Uspekhi Mat. Nauk* (1953).
- [Tad25] Kubota Tadahiko. «Über die Eibereiche im w-dimensionalen Raum». En: *Sci. Rep. Tôhoku Univ.* (1925) (citado en la página 1).

Índice de figuras

2.1	Representación de los conjuntos $\mathbb{N}_+^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ y $\mathbb{S}_1^{n+1}$	14
2.2	Representación de una geodésica en $\mathbb{H}^2$	18
2.3	Proyección del punto x	19
2.4	Las geodésicas son arcos de circunferencia ortogonales a la frontera.	23
3.1	Representación de una horoesfera H con punto en infinito x	25
3.2	Representación de una horoesfera H en el modelo Lorentziano.	26
3.3	Definición del mapa hiperbólico de Gauss.	28
3.4	Traslación de p en $\alpha_d(p)$	30
3.5	Representación de (x, t) cuando $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente.	32
3.6	$\mathcal{H}_\phi(p_0)^-$ y $\mathcal{H}_\phi(p_0)^+$ en el modelo de la bola de Poincaré.	35
3.7	Superficies horoesféricamente convexas en p_0	36
4.1	Problema de Christoffel en $\mathbb{R}^3$	42
4.2	Representación de $\Omega \cap r\Lambda = \emptyset$	53

Declaración

Yo, Jeison Benavides Luna confirmo que he realizado este trabajo por mi cuenta de manera íntegra, respetando derechos intelectuales de las personas que han desarrollado conceptos mediante las citas en las cuales indican la autoría.

Cali, Octubre, 2019

Jeison Benavides L.