

“Caminando plano sobre un mundo tridimensional”

Un acercamiento desde la Matematización a la representación bidimensional del espacio tridimensional en estudiantes de grado cuarto.

Presentado por:

Deicy Yaneth Valencia Morales código: 1605920

Aura María Sánchez Gaviria código: 1605895

Tutor

Mg. Deisy Zemanate Cuellar

Proyecto de grado para obtener el título de Magister énfasis en Educación Matemáticas y Ciencias Experimentales

Universidad del Valle

Sede - Tuluá

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática y Ciencias Experimentales

Modalidad Profundización

2019

“Caminando plano sobre un mundo tridimensional”

Un acercamiento desde la matematización a la representación bidimensional del espacio tridimensional en estudiantes de grado cuarto.

Nota de aceptación

Firma del Evaluador 1

Firma del Evaluador 2

Firma del Director del Trabajo de
Investigación

AGRADECIMIENTOS

Deicy Yaneth Valencia: Agradezco a Dios por habernos dado la oportunidad de pertenecer a un grupo de maestrantes tan heterogéneo y alegre como al que pertenecemos, del cual pudimos enriquecer nuestro conocimiento.

A mi familia por todo el apoyo que me han brindado y por estar ahí en todo momento, por ser mi pilar cuando estuve sin fuerzas de seguir, por animarme a ser cada día mejor con esfuerzo y sacrificio.

A todos aquellos que de una u otra manera me ayudaron en este proceso que logre llevar a término gracias a su apoyo y horas interminables de lectura.

Aura María Sánchez: Primero doy gracias al hacedor de la vida, Dios, por todos los favores recibidos, por iluminarme cada día, seguidamente aquellos que siempre han estado a mi lado contribuyendo en mis logros aportando su granito de arena; madre, esposo e hijos que con su apoyo moral e incondicional me permitieron refugiarme en sentimientos de seguridad, optimismo y perseverancia, la Universidad del Valle por brindarme esta oportunidad y por su gran compromiso con la educación, y a mi compañera de tesis.



Ponte los zapatos...

y sal a observar las maravillosas formas que existen a tu alrededor.

Fuente: creación propia.

RESUMEN

La presente investigación hace referencia a la pregunta ¿En qué medida, desde la matematización, los estudiantes de grado cuarto de la institución educativa Julio Cesar Zuluaga logran representar bidimensionalmente el espacio tridimensional? para dar respuesta a este interrogante relacionado con la dificultad que tienen los niños de representar bidimensionalmente el espacio físico, se inicia con un proceso de documentación y análisis en aspectos curriculares, disciplinares y didácticos relacionados con el conocimiento geométrico, y se toma en consideración la Educación Matemática Realista propuesta por Hans Freudenthal para analizar la producción que realizan los estudiantes al desarrollar una propuesta de aula que involucra la representación bidimensional. En concordancia con el referente conceptual, se establece como punto de partida la representación gráfica de figuras geométricas desde la visualización del entorno y la manipulación de material concreto. Finalmente, los resultados obtenidos muestran avances que dan cuenta de la apropiación, en contexto, de los conceptos geométricos acordes al nivel educativo y por ende al cumplimiento de los objetivos propuestos en la investigación.

Palabras clave: Matematización, visualización, perspectiva, bidimensionalidad, tridimensionalidad.

ABSTRACT

The present investigation makes reference to the question: To what extent from the mathematization the students of fourth degree of the educative institution Julio Cesar Zuluaga manage to represent two-dimensional the three-dimensional space? To answer this question related to the difficulty that children have to represent the physical space bidimensionally, it begins with a process of documentation and analysis in curricular, disciplinary and didactic aspects related to geometric knowledge, and Education is taken into consideration Realistic Mathematics proposed by Freudenthal to analyze the

production made by students when developing a classroom proposal that involves two-dimensional representation. In accordance with the conceptual referent, the graphic representation of geometric figures from the visualization of the environment and the manipulation of concrete material is established as a starting point. Finally, the results obtained show favorable percentages that account for the appropriation in context of the geometric concepts according to the educational level and therefore to the fulfillment of the objectives proposed in the research.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I	3
1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	3
1.1 OBJETIVOS.....	8
1.1.1. Objetivo general.....	8
1.1.2 Objetivos específicos	8
1.2 JUSTIFICACIÓN	8
1.3. ANTECEDENTES	10
CAPÍTULO II	14
2. MARCO CONCEPTUAL	14
2.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)	15
2.2 REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES	19
2.2.1 Perspectiva geométrica euclidiana	21
2.3 PERSPECTIVA DIDÁCTICA	35
2.3.1 Visualización.....	35
2.3.2 Dificultades, errores y obstáculos.....	40
CAPÍTULO III	41
3. MARCO METODOLÓGICO	41
3.1 Tipo De Investigación.....	41
3.2 Aproximación Contextual.....	42
3.3 Fases De La Investigación.....	43
3.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información.....	51
CAPÍTULO IV	52
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS.....	52
4.1 ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS.....	52
4.2 CONCLUSIONES.....	88
4.4 REFLEXIÓN.....	92
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	95
ANEXOS	100

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Comparativo pruebas saber 2015 – 2017	4
Tabla 2 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas concernientes al Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	44
Tabla 3 Derechos Básicos de Aprendizaje y Evidencias concernientes al Pensamiento Espacial para el grado cuarto y grado quinto	45
Tabla 4 Rejilla 1. Representación bidimensional desde los componentes curriculares	46
Tabla 5 Rejilla 2. Relación elementos curriculares, disciplinarios y didácticos	49
Tabla 6 Rejilla 3. Relación elementos curriculares, disciplinarios y principios de matematización	50
Tabla 7 Resultados de la aplicación Situación 1. Actividad 1	53
Tabla 8 Resultados de la aplicación Situación 1. Actividad 2	61
Tabla 9 Resultados de la aplicación situación 2. Actividad 1	68
Tabla 10 Resultados de la aplicación Situación 2. Actividad 2	77
Tabla 11 Resultados de la aplicación Situación 2 Actividad 3	85

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Representación gráfica de los estudiantes - Puente Papayal	4
Figura 2 Principio de niveles	18
Figura 3. Recta A - B	22
Figura 4. Semirrecta A- B.....	23
Figura 5. Segmento A - B.....	23
Figura 6 Semirrectas $(OA) \rightarrow$ y $(OB) \rightarrow$	24
Figura 7. Ángulos adyacentes.....	25
Figura 8. Rectas perpendiculares	25
Figura 9. Rectas paralelas.....	26
Figura 10. Recta secante	26
Figura 11. Polígono.....	27
Figura 12. Polígonos según el número de lados	27
Figura 13. Polígonos según sus lados y sus ángulos.....	28
Figura 14. Polígono convexo	28
Figura 15. Polígono cóncavo	29
Figura 16. Triángulo A, B, C.....	29
Figura 17. Triángulo rectángulo	30
Figura 18. Paralelogramo	30
Figura 19. Trapecio.....	30
Figura 20. Trapezoide.....	30
Figura 21 Circunferencia	31
Figura 22 Círculo	31
Figura 23 Sólidos platónicos	33
Figura 24 Proyección ortogonal	39
Figura 25 Perspectiva Isométrica	38
Figura 26 Perspectiva cónica.....	38
Figura 27 Tanques de abastecimiento ASDAL.....	53
Figura 28 Actividad resuelta por los estudiantes.....	63
Figura 29 Tanque de abastecimiento de agua (Pequeño)	66
Figura 30 Tanque de abastecimiento de agua (Grande).....	67
Figura 31 Actividad resuelta por los estudiantes.....	68
Figura 32 Actividad resuelta por los estudiantes.....	74
Figura 33 Torta prismas, hexagonal y triangular.....	77
Figura 34 Actividad resuelta por los estudiantes.....	84
Figura 35 Actividad resuelta por los estudiantes.....	84
Figura 36 Actividad resuelta por los estudiantes.....	87

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1 Formato secuencia didáctica - Situación 1 - Actividad 1.....	100
Anexo 2 Formato secuencia didáctica - Situación 1 - Actividad 2.....	102
Anexo 3 Formato secuencia didáctica - Situación 2 - Actividad 1.....	103
Anexo 4 Formato secuencia didáctica - Situación 2 - Actividad 2.....	105
Anexo 5 Formato secuencia didáctica - Situación 2 - Actividad 3.....	107
Anexo 6 Respuestas de estudiantes en la actividad de exploración.....	109

INTRODUCCIÓN

“Caminando plano sobre un mundo tridimensional” es una propuesta que adscribe a la línea de investigación “Didáctica de las matemáticas” planteada por docentes investigadoras de básica primaria, que permite conocer desde una propuesta de aula enfocada en la Educación Matemática Realista (EMR), específicamente desde la matematización, la que según Freudenthal (1968), contempla como una actividad matemática, que debe ser organizada a partir de la realidad misma, lo cual se toma como referencia para ser aplicada en estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga de tal manera que logren apropiarse conceptos geométricos mediante la representación bidimensional del espacio tridimensional.

La representación gráfica de objetos suele convertirse dentro del contexto educativo en una dificultad para los estudiantes, si estos no logran apropiarse y darle sentido a conceptos básicos que pueden ser visualizados e interiorizados desde el mundo real y que contribuyen en el desarrollo del pensamiento espacial. Es desde allí que se plantea este trabajo de investigación, por medio del cual se espera identificar las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional que logran construir los educandos.

El primer capítulo describe y formula el problema visto desde las dificultades encontradas en la Institución partiendo del desempeño de los estudiantes, específicamente en la apropiación de conceptos básicos de la geometría, necesarios en la representación bidimensional del espacio tridimensional. Además, se presentan los objetivos, la justificación y los antecedentes que permiten a su vez delimitar el problema, construir la propuesta de aula y determinar algunos posibles errores o dificultades que puedan presentarse en los niños durante su implementación.

El segundo capítulo presenta las bases conceptuales que dan forma a esta investigación desde la Educación Matemática Realista (EMR) y las perspectivas curriculares, disciplinar y didáctica de las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional, el cual se documenta desde la propuesta curricular del Ministerio de Educación Nacional (MEN); la geometría Euclidiana y los aportes de diversas

investigaciones que hacen referencia a las dificultades, errores y obstáculos presentados en el aprendizaje de la geometría.

El tercer capítulo correspondiente al marco metodológico da cuenta desde un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo de la problemática en particular presentada en la Institución Educativa, el cual se desarrolla en tres fases; que a partir de instrumentos utilizados como rejillas construidas desde referentes conceptuales y curriculares, grabaciones de audio y video, cuestionarios y fotografías, permiten dar cuenta de los objetivos desde los procesos que se desarrollan en cada una. La primera fase toma como referencia la documentación curricular, articulando en una rejilla los documentos ministeriales y el PEI. La segunda fase integra la EMR, los elementos curriculares y disciplinares de la representación bidimensional del espacio tridimensional con la relación didáctica que permite identificar y considerar las dificultades, errores u obstáculos según lo plantea Socas (1997), que presentan los estudiantes cuando se acercan a la matematización con dichos conocimientos geométricos. La tercera fase, presenta la relación entre los elementos curriculares y disciplinarios con los principios de la EMR, que facilitaron la descripción e interpretación de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta, dando respuesta al objetivo general y al tercer objetivo específico.

Por último, el cuarto capítulo presenta las conclusiones obtenidas con base en el análisis de los resultados de la implementación en la propuesta de aula, evidenciándose la apropiación y significación de las respectivas situaciones planteadas, con base en la observación de características puntuales en la secuencia didáctica y la obtención de variables tales como el número de caras, lados, aristas, vértices, paralelismo, perpendicularidad y secantes, las cuales forman parte del proceso de caracterización que facilita la representación del espacio tridimensional de manera bidimensional, desde un contexto cercano al estudiante, que en este caso parte de la observación de los tanques de agua que abastecen a la comunidad, seguido de la manipulación de material concreto presente en artículos que a diario llevan en sus loncheras. Dichas situaciones se plantean desde los principios de la EMR pretendiendo desarrollar con los estudiantes tres de estos tal como se describe a continuación: el principio de actividad; como una forma de aprender haciendo, lo cual se evidencia mediante la visualización y manipulación de objetos por

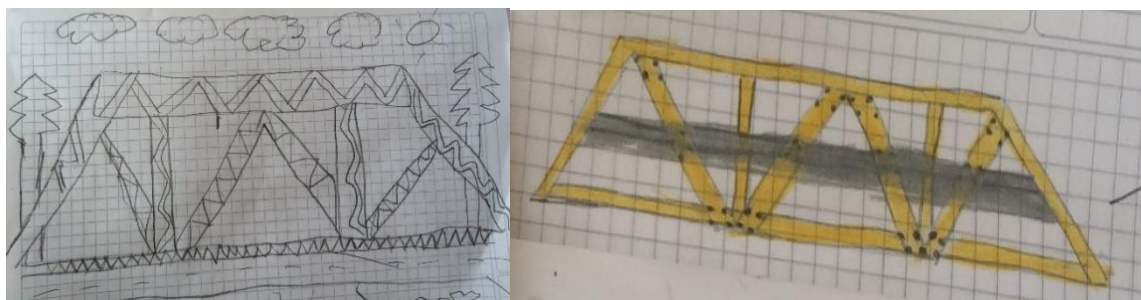
medio de prismas (caja de jugo y torta) y cilindros (termos de agua y enlatados), que permite la apropiación de conceptos básicos en geometría. Seguido del principio de realidad; presentando situaciones en contextos de la vida diaria, en este caso relacionadas con actividades propias del entorno escolar. Y, finalmente, el principio de niveles (situacional, referencial, general y formal) determinando que en este grado de escolaridad fue posible alcanzar el nivel general, ya que los estudiantes lograron reconocer propiedades y características de los sólidos; ligados al uso de estrategias que le permitirán representar bidimensionalmente el espacio tridimensional, a través del lenguaje natural. Se inició con la visualización del entorno, seguido de la entrega del cuestionario, el cual tenía como propósito conocer los saberes previos de los estudiantes, sin descartar la posibilidad de dar solución de manera grupal; posteriormente con base en las orientaciones dadas se logra el reconocimiento de características y propiedades geométricas que les permite a los estudiantes finalmente representar de manera gráfica objetos tridimensionales.

CAPÍTULO I

1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Los sistemas educativos a nivel mundial apuntan a que todos los estudiantes reciban una educación de alta calidad sin importar el contexto económico, político o cultural en el que estén inmersos, contribuyendo al mejoramiento de la calidad de vida de las personas y permitiéndoles a su vez que cada individuo pueda ser productivo a lo largo de su vida.

En la búsqueda de esta calidad, resulta fundamental la comprensión de las matemáticas en diferentes ámbitos, al ser considerada primordial no solo para la resolución de problemas en el campo científico, sino también de situaciones propias de la vida cotidiana. La geometría por su parte, surge como una necesidad del hombre para medir; y en tal sentido se puede afirmar que se trata de una de las áreas de las matemáticas más



familiares y reales para los niños, en la medida que facilita el aprendizaje a partir de la visualización del entorno físico, favoreciendo la ubicación espacial y el reconocimiento de propiedades en un contexto real.

Considerando lo anterior y con base en la experiencia de las autoras, se hace referencia a las dificultades presentadas por los estudiantes, relacionadas con la falta de apropiación de conceptos geométricos tales como paralelismo y perpendicularidad indispensables al momento de plasmar objetos tridimensionales en el papel. De igual manera, se evidencian dificultades en cuanto al manejo inadecuado de instrumentos requeridos en representaciones gráficas, toda vez que ello permite ampliar la mirada del mundo real, además de influir en aquellas actividades que requieren de medición y realización de trazos, tal como se puede evidenciar en los resultados obtenidos en la actividad exploratoria llevada a cabo con los estudiantes de la Institución, consistente en la representaciones gráficas del puente papayal, paso obligatorio durante el recorrido a la institución (ver figura 1).

Dicha problemática reflejada en el aula, trasciende en los resultados obtenidos de las pruebas saber, como se presenta en el comparativo de las mismas, según los resultados obtenidos en el periodo 2015- 2017, en el grado tercero y grado quinto de la Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga (ver tabla 1).

Tabla 1 Comparativo pruebas saber 2015 – 2017

GRADO TERCERO		
<i>Figura 1 Representación gráfica de los estudiantes – Puente Papayal</i>		
Año 2015	Año 2016	Año 2017
El 46% de los estudiantes no establece conjeturas que se aproximen a las nociones de paralelismo y perpendicularidad en figuras planas.	El 84% de los estudiantes no establece conjeturas que se aproximen a las nociones de paralelismo y perpendicularidad en figuras planas.	El 65% de los estudiantes no usa propiedades geométricas para solucionar problemas relativos al diseño y construcción de figuras planas.
	El 69% de los estudiantes no ordena objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo	

con atributos medibles.

GRADO QUINTO

Año 2015	Año 2016	Año 2017
El 53% de los estudiantes no conjetura y verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano	El 56% de los estudiantes no conjetura ni verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano. El 52% de los estudiantes no describe ni argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija.	El 47% de los estudiantes no compara y clasifica objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades.

Tomado: Análisis histórico y comparativo 2018. Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga. Caja siempre día e.

Tomando como referencia los resultados expuestos en la tabla anterior, se puede observar cómo los estudiantes de grado tercero presentan falencias al reconocer y aplicar características y propiedades de formas y figuras, las cuales se incrementan en el año 2016 alcanzando un 84% de estudiantes que no estructuran dichos aprendizajes. En el grado quinto por su parte, realizando un promedio del periodo analizado se registra un 52% de estudiantes con dificultades en la realización de transformaciones en plano, obtención de áreas y clasificación de sólidos de acuerdo al número de lados. Considerando dichos resultados, se toma la determinación de iniciar el trabajo de investigación con los estudiantes de grado cuarto, aplicando secuencias didácticas diseñadas con el propósito de fortalecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes, el cual permitirá detectar posibles dificultades.

Sin duda, el ejercicio comparativo permite inferir que mientras los estudiantes no logren concebir la geometría como tal, ni darle un sentido que pueda relacionar con su entorno a partir de las transformaciones tridimensionales y bidimensionales, presentará

serias dificultades en el desarrollo del componente espacial métrico¹. Adicionalmente, mostrará dificultades con el reconocimiento de las características físicas de los objetos que le permitan la adjudicación de propiedades, relaciones y aplicaciones en el plano; habilidades necesarias para la ubicación y el desarrollo del pensamiento espacial.

De otra parte, vale la pena hacer referencia a una situación, que, sin ser el tema principal de la presente investigación, sí logra incidir de manera directa en la problemática expuesta en los párrafos anteriores. Al respecto y con base en el conocimiento por parte de las investigadoras a lo largo del trasegar en el contexto educativo del sector público, resulta preocupante ser testigo de cómo algunos docentes en su práctica de aula no logran aplicar estrategias didácticas de enseñanza adecuadas y ante todo motivadoras para el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de básica primaria, debido en muchos casos al haber sido asignados para la orientación del área en la cual no se cuenta con la formación profesional requerida y en consecuencia dicha asignatura termina perdiendo su verdadera importancia en el plan de estudio, situación que termina siendo determinante para los estudiantes en la presentación de las diferentes pruebas aplicadas desde el MEN.

Lo anterior, soporta la realización de esta investigación al estar enfocada a la aplicación de una propuesta de aula en la que toma como referencia la EMR desde los principios de actividad, realidad y niveles, demostrando la importancia de manejar conceptos y representaciones gráficas del espacio tridimensional, tomando como referente el entorno de los estudiantes.

A continuación, se presentan referentes teóricos que dan soporte a esta investigación desde la caracterización de figuras, procesos de aprendizaje y visualización, y dificultades presentadas en representaciones gráficas, no sin antes considerar que dicha problemática ha sido abordada desde un contexto internacional por los siguientes autores entre otros.

De acuerdo con Godino, J. (2002) “en la naturaleza existen objetos con formas poliédricas”, desde esta afirmación se puede inferir, que los estudiantes a través de la observación de su espacio identifican algunos objetos tridimensionales. En efecto,

¹Componente espacial métrico: tomado de Matriz de Referencia/ Caja de Materiales Siempre Día E. (2016) Componente; son las categorías conceptuales sobre las cuales se realiza los desempeños de cada área a través de situaciones problematizadoras y acciones que se relacionan con el contexto de los estudiantes.

partiendo de la realidad del entorno educativo y en particular de los estudiantes de la zona rural resulta fundamental el aprovechamiento del paisaje natural en el desarrollo de actividades educativas relacionadas con la exploración y representación de objetos tridimensionales.

Desde los aportes hechos por Guillén, G. (2010) en referencia a las líneas de investigación propuestas. La primera desde la observación de métodos en procesos tales como describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar y probar; la segunda, la cual establece la representación de los sólidos y otras formas tridimensionales desde la visualización. Dichas líneas permiten fortalecer el componente espacial métrico en los estudiantes al determinar la importancia que tienen la observación y la representación de objetos.

Por su parte, Gutiérrez, A. (1998) estudia algunos aspectos específicos relacionados con la dificultad que presentan los estudiantes al realizar representaciones gráficas de cuerpos tridimensionales como parte importante en el aprendizaje de la geometría. Según investigaciones realizadas por el mismo autor, logra demostrar como el aprendizaje de las matemáticas resulta efectiva cuando se evita el desarrollo de actividades con base en representaciones abstractas y se apoya en representaciones o modelizaciones que los estudiantes puedan observar, construir, manipular y transformar.

En concordancia con la descripción y formulación del problema expuesto, se considera pertinente plantear la siguiente pregunta:

¿En qué medida desde la matematización los estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga logran representar bidimensionalmente el espacio tridimensional?

1.1 OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo general

Determinar en qué medida, desde la matematización, los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga logran representar bidimensionalmente el espacio tridimensional

1.1.2 Objetivos específicos

1. Documentar desde la propuesta curricular del MEN, las matemáticas y su didáctica, algunas representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales en el espacio.
2. Articular en una propuesta de aula y desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) los elementos curriculares, matemáticos y didácticos que favorezcan la construcción de representaciones bidimensionales del espacio tridimensional.
3. Identificar en los resultados obtenidos producto de la implementación, algunos elementos característicos de las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Al conocer el grado de importancia que representa la geometría, se pretende lograr una total apropiación de conceptos en los estudiantes que apunten a representar bidimensional el mundo real, sabiendo que en su mayoría las labores y profesiones tanto científicas como técnicas requieren del desarrollo del componente espacial métrico; el cual es fundamental en el proceso de aprendizaje. Al respecto, la serie lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional establece que:

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos, mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales (MEN. 1998, p. 56).

Es importante, destacar la necesidad de despertar en los estudiantes la curiosidad por entender y dar sentido a su entorno, de igual forma dar respuesta a fenómenos naturales y

culturales, observando la geometría como algo más que ubicaciones y transformaciones en el plano, lateralidad, construcción de figuras planas, concepciones de áreas y perímetros, hallar medidas de lados desconocidos, construir sólidos, aplicar conceptos en artística y otras asignaturas. Es preciso que los estudiantes se apropien de conceptos y aplicaciones necesarios en la ubicación espacial dando sentido a lo que le rodea, apoyados en la visualización y manipulación de objetos.

Partiendo de la visualización, se desarrolla la habilidad para plasmar sólidos (poliedros) en el papel como una tarea ardua, más no imposible, a pesar de lo complejo que puedan llegar a ser sus vistas. De allí la importancia de que este proceso esté bien guiado por el docente, para hacer que los conceptos se vuelvan aplicables y cobren relevancia en los estudiantes. Adicionalmente, mediante la manipulación de material concreto se logra representar gráficamente el espacio tridimensional, evidenciándose la apropiación de características y propiedades necesarias en el análisis y desarrollo del pensamiento geométrico.

Con base en lo anterior, es necesario dar cuenta que la implementación de la EMR durante el desarrollo de la investigación permite a los estudiantes el desarrollo de habilidades y destrezas, desplegando la creatividad y despertando curiosidad por los fenómenos físicos que en este caso dan respuestas desde la geometría a lo que es el entorno. Cada uno de los procesos de aprendizaje se refleja en el desarrollo y la apropiación de conocimientos con su aplicabilidad.

De allí la importancia de abordar estas problemáticas que nos permitan destacar que los aprendizajes no están vinculados solo al uso de una herramienta, sino, a la relación que se establece con la experiencia vivida por los estudiantes, resultando fundamental el correcto diseño e intencionalidad de las actividades propuestas en el aula.

Al respecto, la presente investigación permite contribuir al mejoramiento de los procesos de aprendizaje requeridos en la educación matemática y de manera puntual a la exploración del espacio y la representación de objetos como temas fundamentales para el desarrollo del pensamiento espacial pretendiendo de tal manera, impactar en primera medida el grupo de estudiantes en los cuales se aplicó la secuencia didáctica, así mismo, se sienta un nuevo precedente en relación con las implicaciones que trae consigo la

implementación de estrategias pedagógicas y didácticas acordes con las particularidades del área en mención tal como se propone desde la normatividad establecida por el MEN, a partir del cual se puedan llevar a cabo nuevas investigaciones que profundicen en la problemática que fue objeto de estudio o afines a la misma.

Tanto los documentos ministeriales como los aportes realizados por Freudenthal se basan en el modelo de los Van Hiele, fundamentado en una teoría de enseñanza - aprendizaje de la geometría desde diferentes niveles de apropiación por los que transita cada individuo en la adquisición del conocimiento. Es desde esta que principalmente se articulan los documentos referidos en esta investigación.

1.3. ANTECEDENTES

Se estructuran los antecedentes considerando los principales aportes que brindan otras investigaciones para este trabajo, desde dos intereses en particular: por un lado, trabajos que presentan algunos elementos conceptuales relacionados con las representaciones gráficas indispensables para la elaboración de este estudio y la visualización. Por el otro, se pretende analizar cómo de forma más asertiva se puede lograr la mediación del conocimiento respecto al pensamiento espacial, desde las problemáticas afines abordadas por otros investigadores en contextos similares.

Godino, J. (2002) plantea que: “en la naturaleza existen objetos con formas poliédricas”, desde esta concepción se puede afirmar que los estudiantes a través del estudio y observación de su espacio, podrían con mayor facilidad identificar objetos tridimensionales. De esta manera, se desarrollan habilidades de coordinación ojo-motora y de percepción figura fondo, como una habilidad cognitiva compleja, que guía los movimientos de la mano de acuerdo a los estímulos visuales y de retroalimentación. El desarrollo de la coordinación óculo-manual es especialmente importante para un adecuado desarrollo del niño y para el aprendizaje escolar. Al respecto se plantean una serie de pruebas tales como dibujar líneas rectas o curvas con precisión de acuerdo con límites visuales, igualar dos figuras de acuerdo con rasgos comunes, reconocer los rasgos de un diseño y trazar a partir de un modelo, ver figuras específicas cuando están ocultas por un fondo confuso y complejo.

Leandro, C. (2009) en su proyecto investigativo “La geometría a través del arte” plantea que la geometría forma parte esencial del mundo, por lo que no se debe trabajar de forma aislada como generalmente se hace en las aulas, teniendo en cuenta que la misma hace parte de la vida del niño, se encuentra en su entorno, en su vida cotidiana, en objetos con los que interactúa diariamente, en sus juegos, en el lenguaje que habitualmente utiliza y especialmente, aparece en diversas obras plásticas que conforman el bagaje artístico que le rodea. Para tal propósito se elabora un plan de actuación formado por actividades tales como el análisis de obras de arte y construcciones plásticas relacionadas con el estudio de objetos cotidianos, pretendiendo familiarizar a los niños con contenidos tanto de formas planas como del espacio, a través de actividades de interés como la elaboración de un museo, hasta la construcción de juguetes, utilizando como base cuerpos geométricos. Concluye el autor, que es posible acercar la geometría a los niños, con una gran motivación, haciéndoles vivir experiencias nuevas, en este caso desde expresiones artísticas teniendo como base un proyecto común e innovador.

Guillén, G. (2010) referencia dos líneas importantes de investigación, la primera desde la observación de métodos de enseñanza/aprendizaje en procesos matemáticos (describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar y probar), la segunda, estableciendo la representación de los sólidos y otras formas tridimensionales por medio de la visualización. Desde estas dos líneas plantea que; la geometría en la escuela debe verse no como una recopilación de datos que se tienen que aprender, ceñida solo a libros de texto, o el desarrollo informal de la geometría euclidiana, sino como el medio para organizar las experiencias espaciales del estudiante o para modelar su realidad. Desde allí argumenta que los educandos necesitan básicamente una comprensión geométrica del espacio, concebida como ciencia del entorno físico, ese en el que el niño vive, se desenvuelve y le sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico. Dicha concepción conlleva a ser abordada inicialmente desde el espacio, así como fuera considerado por Freudenthal (1983):

El espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras; en el espacio hay multitud de relaciones; en el plano el camino hacia el análisis lógico es más corto; el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas.

Vollrath (1976) citado por Guillen (2010, pág. 28), supone la geometría desde dos puntos de vista que llamó inventarios, los cuales se precisan a continuación:

- El inventario de formas; toma la geometría desde las artes plásticas y admite una secuencia de actividades centradas en la observación y análisis de formas que se presentan en la naturaleza, en la arquitectura, en el arte, entre otras.
- El inventario del espacio; destaca la importancia de actividades que llevan a la descripción, análisis y generación de formas y figuras; sin dejar de lado discusiones históricas acerca de la sección áurea y el dibujo en perspectiva.

A manera de conclusión, Guillén contempla la geometría de los sólidos como una posible línea de investigación en educación matemática, relativa a la enseñanza/aprendizaje de los procesos de describir, clasificar y conjeturar, ya que los sólidos ofrecen una gran variedad de posibilidades que pueden emplearse como soporte para el desarrollo de actividades; diferenciando maneras de generar representaciones que pueden usarse desde el contexto centrando la atención en diferentes procesos matemáticos.

Gutiérrez, Á. (1998) estudia algunos aspectos específicos relacionados con la dificultad que presentan los estudiantes al realizar representaciones gráficas de cuerpos tridimensionales como parte importante en su aprendizaje desde la geometría. El autor menciona que el problema tiene que ver con la capacidad de visión espacial y con su habilidad para dibujar representaciones planas o para interpretar correctamente las realizadas por otras personas. Desde allí, el autor plantea que el aprendizaje es más eficiente y profundo si en lugar de trabajar con abstracciones se hace con representaciones o mediante la construcción modelos con diferentes materiales, a partir de los cuales, los estudiantes puedan observar, construir, manipular y realizar transformaciones, que faciliten la comprensión de conceptos matemáticos. Dichas dificultades, pueden ser clasificadas en conceptuales, que tienen que ver con la comprensión de las características de la representación o técnicas, cuando se relacionan con las estrategias de dibujo o construcción. En conclusión, se percibe la necesidad de que los estudiantes aprendan mediante instrucciones específicas a dibujar y leer representaciones planas de cuerpos geométricos

tridimensionales, como medio para mejorar su capacidad y para comprender la geometría espacial facilitándoles el aprendizaje de la misma.

Por su parte Gómez y Cedeño (2012), en su “Propuesta de enseñanza para el paso de lo tridimensional a lo bidimensional” presentada en el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, exponen la necesidad de implementar diversos materiales didácticos para potenciar la relación entre los espacios bidimensional y tridimensional, desde el reconocimiento de características y propiedades presentes en sólidos geométricos, específicamente en los poliedros. De acuerdo a lo planteado por los autores se puede resaltar que tanto la visualización como la manipulación de objetos permiten desarrollar en el estudiante habilidades en el reconocimiento de características, como en la representación de estos. Entre las conclusiones obtenidas se observa que los estudiantes comprenden que los objetos a su alrededor están compuestos por formas planas, encontrando aspectos relevantes y significativos, justificando y refutando diferentes ideas en torno a las relaciones entre formas y figuras.

Urchegui, P. (2015) en su tesis doctoral aborda el constructo del pensamiento visual haciendo énfasis en la perspectiva que Arnheim (1969), posee sobre esta, resaltando la importancia que tiene la información gráfica no solo de disciplinas artísticas, sino también científicas, abordando el análisis de la percepción visual y el razonamiento espacial a partir de los campos sociocultural, psicológico y pedagógico. En esta tesis se enfatiza en que la representación mental del mundo, responde a las formas y la luz cambiante, se manifiesta en expresiones gráficas exteriorizando cualidades visuales como distancias, tamaño, inclinación, formas, colores y texturas. De allí dice Urchegui, la necesidad de recurrir al dibujo como medio de expresión, teniendo en cuenta que resulta difícil estudiar el pensamiento sin considerar el análisis de la percepción visual. Destaca el déficit existente en las referencias visuales en la comprensión del campo visual de los estudiantes y en la lectura de imagen, plantea la relación de estos con las dificultades de representación gráfica considerando los diferentes sistemas de representación en el plano, destacando la importancia de la información gráfica y el modelo en la educación, tanto de disciplinas artísticas como científicas. En conclusión, plantea que los estudiantes no establecen una relación clara entre las referencias espaciales y la formación de imágenes mentales, debido

a que las nociones de orientación espacial responden a un planteamiento teórico básico, y que su carácter experimental está poco desarrollado.

Cardona, G. (2018). En su trabajo de investigación titulado *“Orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros”* parte de diversas posturas teóricas enfocadas en el aprendizaje, la visualización, el razonamiento, las representaciones semióticas y situaciones didácticas, desarrolladas a partir de tareas, una que hace uso exclusivo de lápiz y papel, y la otra, integra un software de geometría dinámica. La investigación permite concluir que la escasez de representaciones semióticas espaciales conlleva a la persistencia de representaciones bidimensionales para percibir y nombrar correctamente objetos espaciales y la dificultad para realizar cambios entre los registros de representación tridimensional y bidimensional. Sin embargo, también demuestra que a través de la mediación de un SGD es posible incrementar el número de representaciones espaciales de los estudiantes; comprendiendo que las competencias de representaciones de objetos matemáticos y de uso de herramientas para la actividad involucran un cambio entre los registros de representación. Es importante resaltar las ventajas de utilizar un software especializado para el aprendizaje de la geometría, considerando las múltiples posibilidades que ofrecen los entornos virtuales, sin embargo, la presente investigación tiene como propósito fundamental desarrollarse en un contexto real.

El común denominador, de las investigaciones antes referidas tienen que ver de manera implícita con la teoría de la EMR, toda vez que coinciden con la apropiación de conceptos geométricos partiendo de la observación del entorno y el aprovechamiento de la manipulación de material concreto.

CAPÍTULO II

2. MARCO CONCEPTUAL

A continuación, se presentan las bases conceptuales de esta investigación: La Educación Matemática Realista (EMR) propuesta por Hans Freudenthal, que apoya los niveles de comprensión desde la propuesta de los Van Hiele y sus niveles de razonamiento

geométrico. La perspectiva matemática desde las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional partiendo de la geometría Euclidiana, con las diferentes representaciones gráficas. Y por último la perspectiva didáctica haciendo referencia a las concepciones que se toman desde documentos de investigación, teniendo en cuenta las dificultades, errores y obstáculos presentados en la representación gráfica de figuras geométricas.

2.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)

La Educación Matemática Realista es una corriente que se conoce internacionalmente como EMR, fue creada por Hans Freudenthal, matemático y educador alemán, en los años 60. Su idea central parte de que las matemáticas deben estar conectadas con la realidad, permanecer cercanas a los estudiantes y ser relevantes para la sociedad. Esta corriente pretende matematizar el mundo, es decir, organizar la realidad con medios matemáticos.

Para Freudenthal, las matemáticas deben presentarse no como un producto terminado sino como una construcción constante de conocimiento en la cual el estudiante se apropia del saber llevándolo a la práctica, obteniendo resultados significativos.

Freudenthal. (1971) citado por Van den Heuvel. (2009) propone la importancia de tomar las matemáticas desde un contexto realista, manteniéndose presente en los niños y siendo relevante en su aprendizaje. Las matemáticas no son un grupo de datos inequívocos, sino que nacen de la realidad misma y se difunden constantemente en procesos de aprendizaje individual y grupal. La EMR se basa principalmente en la importancia que tienen el contexto y situaciones sociales para crear los problemas de aprendizaje siendo reales para quien aprende, generando así una mayor comprensión al usar modelos (material concreto, dibujos y símbolos) como instrumentos para representar y organizar contextos en diversas situaciones, permitiéndoles construir un proceso de aprendizaje. Para el autor, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas en situaciones que tengan sentido para ellos. Se les debe ofrecer un ambiente escolar en el que puedan construir conocimientos matemáticos teniendo la posibilidad de alcanzar niveles más altos, esto implica que se deben crear escenarios capaces de promover una mejor comprensión.

Freudenthal (1968), contempla la matematización como una actividad matemática, la cual debe ser organizada a partir de la realidad misma. En sus palabras, explicó: “No hay matemáticas sin matematización”. A partir de esta idea, plantea dos formas de matematización: la primera denominada matematización horizontal, que consiste en pasar del mundo real al mundo de los números, transfiriendo problemas contextuales a problemas matemáticos; y la segunda, matematización vertical que implica conocer la naturaleza de los símbolos refiriéndose a la reorganización y operaciones en el sistema matemático mismo. Implicando, por ejemplo, crear atajos y descubrir relaciones entre conceptos y estrategias, haciendo uso de estos hallazgos.

Aceptando que para llegar a comprender las matemáticas se debe pasar por niveles desde diversos contextos que son importantes para alcanzar cada uno, sin olvidar que dicho proceso se lleva a cabo desde la reinención guiada, es decir, el acompañamiento del docente, pretendiendo ordenar matemáticamente situaciones cotidianas.

La enseñanza de las matemáticas tradicionalmente se ha concebido como una estrategia mecanicista en el aula de clase, es decir, simplemente transmitir conocimientos a los estudiantes sin tener en cuenta su aplicabilidad. Freudenthal, retoma los niveles de matematización planteados desde la propuesta de los esposos Pierre y Dina Van Hiele, en función del desarrollo del pensamiento geométrico y su didáctica. De esta manera, Bressan, A. (2016) menciona que para Freudenthal la EMR busca humanizar las matemáticas, a lo que él llama “la matematización”, una matemática para todos.

Las matemáticas como actividad humana deben buscar y encontrar respuestas a problemas reales, cotidianos, que se encuentren y hagan parte de quien aprende; teniendo en cuenta unos niveles de comprensión que se dan gracias al proceso de matematización. Así mismo, la heterogeneidad cognitiva hace parte de la comprensión matemática. Todo aprendiz pasa por diferentes niveles de comprensión en los que puede tener lugar la matematización: desde idear soluciones informales conectadas con el contexto, alcanzar cierto nivel de esquematización, hasta discernir los principios generales que están tras un problema y ser capaz de solucionarlo. Es fundamental para esta teoría de niveles de aprendizaje, retomar las observaciones e ideas de los Van Hiele, definiendo entonces unos principios para la Educación Matemática Realista.

1. **Principio de actividad:** Expresa la importancia de incluir la habilidad de los estudiantes para aplicar matemáticas en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Lo que realmente se pretende es enseñar una actividad, más no el resultado en sí de la misma, partiendo de la comprensión del entorno social. La matemática por su parte, ayudará a resolver problemas de la cotidianidad, generando en el estudiante realmente la necesidad de utilizar las herramientas matemáticas en la solución de problemas, ofreciendo oportunidades para agregar significados matemáticos en el momento de solucionarlos. En conclusión, la enseñanza empieza con la solución de problemas en contexto que requieren una organización matemática y que llevan a los estudiantes a crear estrategias informales de solución.
2. **Principio de realidad:** El aprendizaje matemático debe originarse también en la realidad, basado en escenarios contextualizados. Bressan, A. (2016) desde los aportes hechos por Freudenthal. (1971) menciona que *“el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo”* (p.3). Llegar a relacionar el contexto y las matemáticas permitirán que el estudiante pueda avanzar a niveles mayores de formalización.
3. **Principio de reinención:** considera las matemáticas como una forma de sentido común, sistematizada y más organizada que debe ser guiada por el docente y de una manera reinventada de acuerdo al contexto mismo de quien aprende. Es el equilibrio entre la libertad de imaginar y la fuerza de ordenar. Los docentes deben tener capacidad de anticipación, observación y reflexión para comprender las habilidades de los alumnos, desde allí se hace necesario entonces reconocer la importancia del docente como guía y organizador de la intercomunicación en el aula, sabiendo que la enseñanza de las matemáticas debe tomar en la EMR la forma de reinención guiada.

Este principio denota un papel bien definido entre educador y educando; el docente posee un rol como mediador entre los estudiantes y las situaciones problemáticas en juego y los alumnos entre sí, realizan producciones informales entre ellos y las herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática como disciplina.

4. Principio de niveles: Según Bressan (2016) la enseñanza de las matemáticas desde la EMR pretende establecer unos niveles de comprensión (Ver figura 2), abarcados de la siguiente manera:

- En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto mismo apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
- En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.
- El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.
- En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones

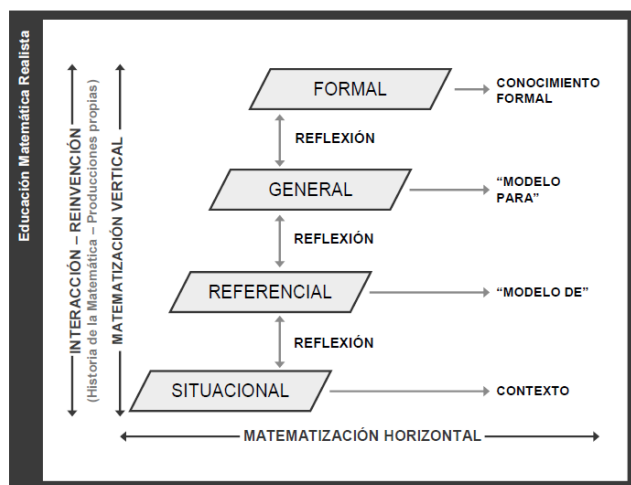


Figura 2 Principio de niveles

convencionales.

Fuente: Ana Bressan (2016), referenciado de (Freudenthal, 1971, p. 417).

5. Principio de interacción: La didáctica para Freudenthal no lleva solo a la transmisión del conocimiento sino también al desarrollo de conocimientos, normas y valores

asociados con ser un “buen ciudadano”, lo que lo aleja de una mirada netamente vocacional, instrumental o profesional de la educación, donde la didáctica prioritariamente atiende a teorías de propósitos y contenidos de instrucción.

- 6. Principio de interconexión:** Para él, el término currículo significa *proceso*, no una norma preestablecida, y su expresión la constituyen los desarrollos educativos (no los denomina curriculares), que no son elaboraciones de “académicos” y no se restringen a diseños curriculares, sino que son diseños estratégicos fundados que incluyen una filosofía educativa explícita e incorporan toda clase de materiales, a partir de la práctica en las escuelas, buscando “*fomentar un cambio en la marcha de la enseñanza actual de la clase*” (Gravemeijer & Terwel, 2000).

2.2 REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES

La geometría es el campo del conocimiento dedicado a las relaciones espaciales, se encarga del estudio de propiedades de formas planas y figuras en el espacio, que va desde conceptos considerados como básicos, como punto, recta, plano y espacio (aunque estas no se puedan definir, sino representar gráficamente), que unidos forman otros conceptos como: ángulos, paralelismo, perpendicularidad, secantes, polígonos, poliedros, entre muchos otros. El calificativo bidimensional se utiliza para considerar a aquello que tiene dos dimensiones (2D), es decir, que puede ser representado en un plano conformado por la intersección de dos rectas de forma perpendicular, proyectando el largo y el ancho de un gráfico, en cambio, un objeto con tres dimensiones (3D) que recibe el nombre de tridimensional, además tiene profundidad.

Por lo general las dimensiones se definen a partir de la cantidad mínima de coordenadas que se necesitan para la especificación de un punto cualquiera en el objeto a estudiar. De este modo, podemos afirmar que una línea es unidimensional: alcanza una sola coordenada para ubicar un punto. En el caso de los elementos bidimensionales, se requieren dos coordenadas para lograr la especificación de un punto, por ejemplo: los polígonos, como los cuadrados o los triángulos, son bidimensionales debido a que, para situar un punto, es necesario establecer la longitud y la latitud. Siguiendo con esta lógica, la

localización de un punto en un cuerpo tridimensional (como un cubo) exige conocer tres coordenadas.

Es habitual que se indique que el mundo tiene cuatro dimensiones: tres espaciales y una temporal. Los movimientos que se realizan son hacia la izquierda o la derecha, hacia adelante o hacia atrás y hacia abajo o hacia arriba, pudiendo establecerse distintas combinaciones. En el caso de la dimensión temporal, se considera una única dirección.

Al respecto autores como Lappan y Winter (1984) afirman: “A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales” (p. 39). En efecto, es necesario que los estudiantes perciban la geometría, no solo como formas planas, sino también como objetos tridimensionales que al ser plasmados en el papel representan diversas características y propiedades del mundo real, permitiendo de manera bidimensional comunicar y expresar información relevante percibida al visualizar diversas figuras.

Cabe destacar que, aún en una superficie bidimensional, es posible simular un efecto tridimensional. Lo que se representa en una hoja de papel es bidimensional, sin embargo, apelando a la perspectiva es posible dibujar un cubo dando una sensación de tridimensionalidad. Por ello existen diferentes tipos de representación de objetos como lo son los dibujos de vista única y los dibujos de vista múltiples. Sobre el tema, Bartolomé (2015) expresa lo siguiente:

- ✓ Los dibujos de vista única son aquellos en los que se ilustran las tres dimensiones del objeto en una sola vista y pueden representarse mediante axonometrías o perspectivas cónicas.
- ✓ Los dibujos de vistas múltiples representan los objetos a través de una serie fragmentada de vistas relacionadas.

Por consiguiente, el dibujo en perspectiva puede ser de gran utilidad tanto para la educación estética como para el ejercicio de proyecciones de figuras tridimensionales en el papel y viceversa. Para el MEN, se hace necesario desarrollar y completar la percepción del espacio, a través de la representación en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad mediante dibujos de vista única o múltiple.

Para lograr interpretar geoméricamente el espacio es necesario que el estudiante se confronte con el mundo por medio de la contemplación de figuras y símbolos, operaciones sobre relaciones y elementos de los sistemas, y reconozca la importancia de las transformaciones en la comprensión de conceptos. Así mismo, es necesario que llegue a dibujar, construir y producir para llegar a conceptualizar, realice representaciones y finalmente, proponga y evalúe posibles definiciones y simbolismos formales.

En efecto, entendiendo el pensamiento espacial y los sistemas geoméricos como la agrupación de procesos epistémicos por medio de los cuales se construyen y manejan representaciones mentales del espacio, relaciones, transformaciones y diferentes traducciones o representaciones, se vislumbra las acciones del individuo en cada una de sus dimensiones y relaciones espaciales con objetos del entorno. Al respecto, desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se establece:

El requerimiento del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos (MEN, 1998, p. 61).

Desde la serie de lineamientos curriculares se hace referencia al trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales, destacando a su vez como sus movimientos y transformaciones permiten integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida, así:

La geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio. MEN (1998, p 57).

2.2.1 Perspectiva geométrica euclidiana

A continuación, se presentan los aspectos de tipo matemático necesarios en esta propuesta desde la geometría EUCLIDIANA, tomada de los siguientes referentes: Barnett - Uribe (1988), Cardona, A (1974).

- **Rectas y segmentos**

No intentaremos definir los conceptos punto, recta y plano. En lugar de ello axiomatizaremos sus propiedades fundamentales y a partir de estos axiomas construiremos la teoría.

- **Axioma 1**

Dos puntos distintos determinan una única recta.

- **Axioma 2**

Una recta contiene un número infinito de puntos.

- **Axioma 3**

Tres puntos distintos que no estén sobre una misma recta, determinan un único plano

Notación. Los puntos se denotarán con letras mayúsculas A, B, C , Las rectas se denotan con letras minúsculas $l, m, n, \dots$ También denotaremos las rectas así: $\overleftrightarrow{AB}$ donde A y B son puntos en ella (Ver figura 3).



Figura 3. Recta A - B

Veamos dos teoremas que se deducen de estos axiomas

Teorema 1. *Dos rectas que tienen dos puntos en común coinciden.*

Demostración N1: Sean A y B dos puntos comunes a las rectas l y m . Por el axioma 1, $\overleftrightarrow{AB}$ es la única recta que contiene a A y a B . Por lo tanto $\overleftrightarrow{AB} = l$ y $\overleftrightarrow{AB} = m$, lo que implica que $l = m$.

Teorema 2 *Dos rectas distintas no pueden tener más de un punto en común.*

Demostración N2: Si tuvieran más de un punto en común contradeciría el teorema 1.

Un punto en una recta la divide en dos partes opuestas llamadas semirrectas. Dicho punto es el origen de cada semirrecta. Las semirrectas las denotaremos $\overrightarrow{AB}$, donde A es el origen y B es un punto en ella (Ver figura 4).



Figura 4. Semirrecta A- B

Una recta divide el plano en dos partes opuestas llamadas semiplanos.

- **Axioma 4**

A cada par de puntos A y B en una recta, le corresponde un único número real positivo denominado distancia de A a B denotado $d(A, B)$. Además, dado un número real positivo r , siempre es posible encontrar dos puntos A y B tal que $d(A, B) = r$. El número $d(A, B)$ no depende del orden en que se tomen los puntos, esto es $d(A, B) = d(B, A)$. En caso de que $A = B$, entonces $d(A, B) = 0$.

Sean A, B y C , tres puntos en una recta. Diremos que B esta entre A y C si

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Dados A y B dos puntos en una recta, el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos A , B y todos los puntos que están entre A y B (Ver figura 5). Los puntos A y B se llaman extremos del segmento. El número $d(A, B)$ se denomina medida del segmento y se denota $m(\overline{AB})$



Figura 5. Segmento A - B

Nota. En la notación para segmento, no importa cuál de los dos extremos se coloca primero: así, $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ indican el mismo segmento.

Por la definición, es claro que un punto C pertenece al segmento $\overline{AB}$ si y solo si $m(\overline{AB}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CB})$.

- **Ángulos**

Llamamos ángulo a la figura formada por dos semirrectas con el mismo origen.

Las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los lados del ángulo y el punto común O es el vértice del ángulo (Ver figura 6). Dicho ángulo se denotará $\sphericalangle AOB$.

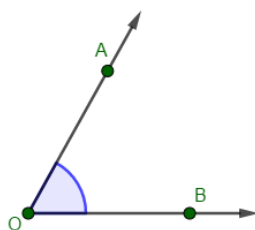


Figura 6 Semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

Teniendo en cuenta su abertura, los ángulos se denominan de la siguiente manera

- **Ángulo recto**, es el que mide 90 grados.
- **Ángulo agudo** es el que mide menos de 90 grados.
- **Ángulo obtuso** es el que mide más de 90 y menos de 180.
- **Ángulo llano** es el que mide 180 grados.

Además, dos ángulos congruentes α y β se consideran como tal si y solo si tienen la misma medida, es decir: $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ si y solo si $m\hat{\alpha} = m\hat{\beta}$

Por último, dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos y los lados no comunes forman una línea recta (Ver figura 7).

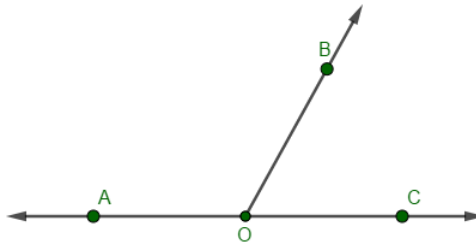


Figura 7. Ángulos adyacentes

- **Rectas Perpendiculares**

Dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman ángulos adyacentes congruentes (Ver figura 7).

Notación. Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son perpendiculares, escribimos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Teorema. Dos rectas son perpendiculares si y solo si al cortarse forman cuatro ángulos rectos

Demostración N3: Supongamos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y O el punto de intersección. Puesto que $\overleftrightarrow{AB}$ es una recta, $m(\angle AOB) = 180$ de tal manera que $m(\angle BOC) + m(\angle AOC) = 180$ pero por hipótesis $m(\angle AOC) = m(\angle BOC)$ así que $2m(\angle BOC) = 180$ lo que implica que $m(\angle BOC) = 90$. Pruebas análogas para los otros ángulos $\angle COA$, $\angle AOD$, $\angle BOD$.

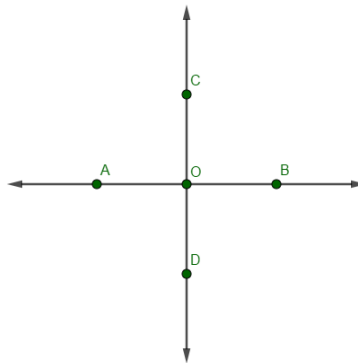


Figura 8. Rectas perpendiculares

Teorema. Por un punto cualquiera de una recta pasa una única perpendicular.

- **Rectas paralelas**

Dos rectas que estando en un mismo plano no se intersectan, se denominan rectas paralelas (Ver figura 9).

Notación: si l y m son rectas paralelas, escribimos $l \parallel m$.

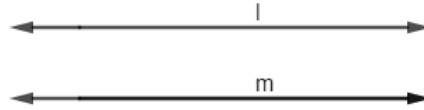


Figura 9. Rectas paralelas

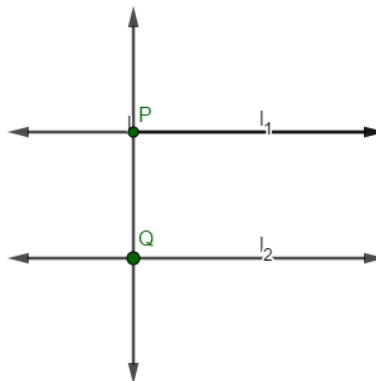
Postulado de Euclides: por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a dicha recta

Paralelismo y perpendicularidad

Teorema: Dos rectas perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.

Demostración N4: Sean l, l_1 y l_2 rectas tales que $l_1 \perp l$ y $l_2 \perp l$. Siendo P y Q los cortes de la recta l con las rectas l_1 y l_2 respectivamente.

Una secante es una recta que corta a dos o más rectas coplanarias en



una recta que corta a dos o más puntos distintos (Ver figura 10).

Figura 10. Recta secante

Axioma 5. Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a la recta dada.

- **Polígonos**

Un polígono es un conjunto de infinitos puntos limitado por la intersección de varios semiplanos en un mismo plano (Ver figura 11).

En esta misma figura se trazan los segmentos AB, BC, CD, DE, EA.

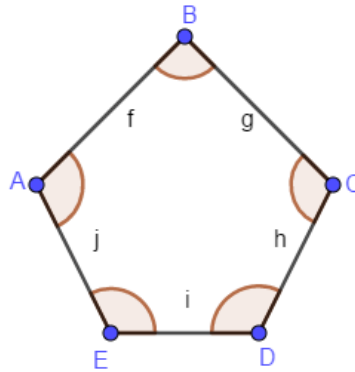


Figura 11. Polígono

En todo polígono podemos identificar los siguientes elementos: **vértices**, **lados**, **ángulos**, **diagonales** y **perímetro**.

- **Vértices:** son los puntos A, B, C, D, E.
- **Lados:** son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ o f, g, h, i, j.
- **Ángulos:** son los formados por dos lados consecutivos $\sphericalangle EAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEA$ o $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$
- **Diagonal:** segmento que une dos vértices no consecutivos. Ej. $\overline{AC}$.
- **Perímetro:** el perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

• Clases de polígonos

Los polígonos se clasifican según el número de lados y según su forma, tal como se describe a continuación:

- **Según el número de lados pueden ser:** triángulo (3), cuadrilátero (4), pentágono (5), hexágono (6), heptágono (7), octágono (8), eneágono (9), decágono (10), dodecágono (12), pentadecágono (15), polígono de n lados (Ver figura 12).

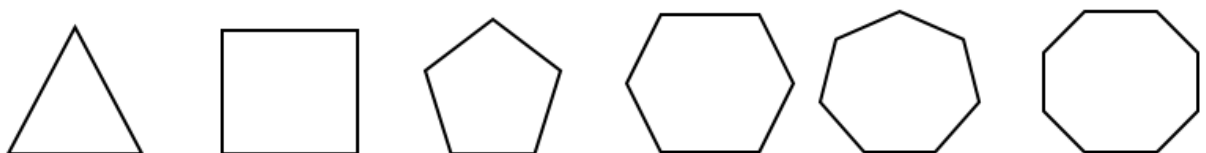


Figura 12. Polígonos según el número de lados

- **Según la medida de sus lados y sus ángulos pueden ser:** equilátero, equiángulo, regular e irregular (Ver figura 13).

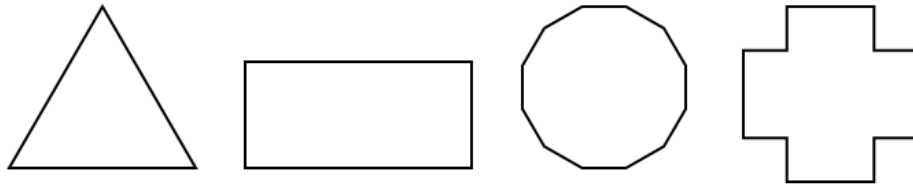


Figura 13. Polígonos según sus lados y sus ángulos

- **Según la medida de sus ángulos interiores pueden ser:** convexo y cóncavo.
 - ✓ **Polígono convexo:** es aquel cuyo contorno es una línea poligonal convexa y por consiguiente cada uno de los ángulos interiores es menor que 180° (Ver figura 14)

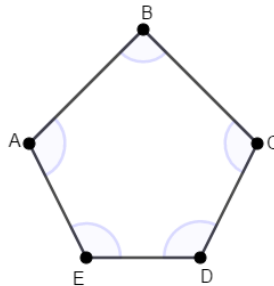


Figura 14. Polígono convexo

- ✓ **Polígono cóncavo:** es aquel cuyo contorno es una línea poligonal Cóncava y uno o varios ángulos interiores son mayores que 180° . ° (Ver figura 15)

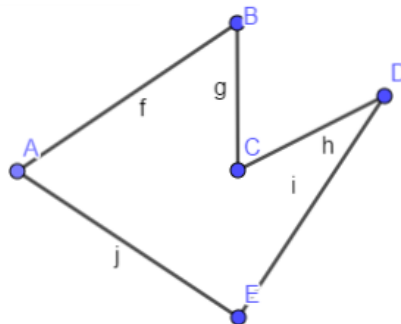


Figura 15. Polígono cóncavo

- **Triángulos**

Dados tres puntos A, B, C, no colineales, llamamos triángulos a la figura formada por los tres segmentos cuyos extremos son los puntos dados (Ver figura 16).

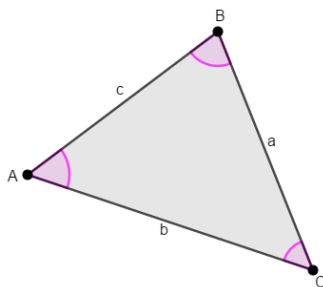


Figura 16. Triángulo A, B, C

Los puntos A, B, C, se llaman vértices; los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, que a veces denotaremos c, a y b respectivamente, se llaman lados (Ver figura 16). Los triángulos se denotarán $\triangle ABC$.

Todo triángulo determina 3 ángulos: $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle ACB$, que se denotan simplemente como $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ cuando no haya confusión.

Es preciso mencionar la clasificación de los triángulos de acuerdo a los siguientes criterios:

A. Según sus lados

- **Equilátero:** Si tiene sus tres lados iguales.
- **Isósceles:** Si tiene dos lados iguales.
- **Escaleno:** Si tiene sus tres lados desiguales.

B. Según sus ángulos

- **Acutángulo:** Si tiene sus tres ángulos agudos.
- **Rectángulo:** Si tiene un ángulo recto.
- **Obtusángulo:** Si tiene un ángulo obtuso.

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a este ángulo se llama hipotenusa (Ver figura 17).

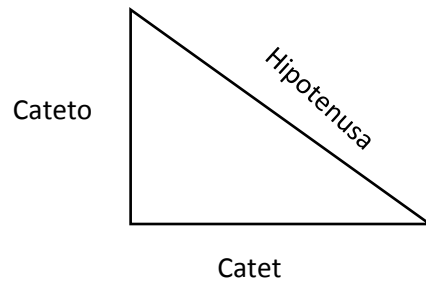


Figura 17. Triángulo rectángulo

- **Cuadriláteros**

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados, que se clasifican en: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

- **Paralelogramo:** cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (rectángulo, rombo, cuadrado, romboide), (Ver figura 18).



Figura 18. Paralelogramo

- **Trapecio:** cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos (trapecio rectángulo, trapecio isósceles, trapecio escaleno), (Ver figura 19).



Figura 19. Trapecio

- **Trapezoide:** cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos. (Ver figura 20)

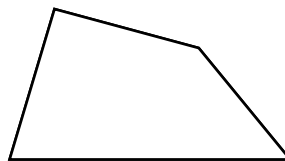


Figura 20. Trapezoide

Teorema 1. *En todo paralelogramo sus lados opuestos son iguales.*

Teorema 2. *En todo paralelogramo sus ángulos opuestos son iguales*

Teorema 3. *Todo cuadrilátero que tiene dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.*

Teorema 4. *Diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.*

Teorema 5. *La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a su semisuma.*

- **Circunferencia y círculo**

Se llama circunferencia al lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto del mismo plano, o al conjunto de todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro (Ver figura. 21).

La circunferencia divide al plano que la contiene en dos regiones o porciones: una interior y otra exterior. Como el conjunto de todos los puntos de una circunferencia y sus puntos determinan una superficie circular se puede definir que: círculo es el conjunto de una circunferencia y sus puntos interiores (Ver figura 22). (Cardona, 1974, p.63)

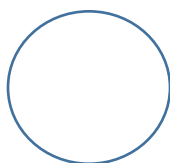


Figura 21 Circunferencia



Figura 22 Círculo

- **Áreas**

Se llama área de una figura la medida de su superficie. Su unidad principal es el metro cuadrado.

Teorema 1. El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura

$$A = b \times h$$

Corolario: el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.

$$A = l \times l \therefore A = l^2$$

Teorema 2. El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

$$A = b \times h$$

Corolario: dos paralelogramos de igual base y altura son equivalentes.

Teorema 3. El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Teorema 4. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Corolario: dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.

Teorema 5. El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.

$$A = h \left(\frac{B + b}{2} \right)$$

Teorema 6. El área de un polígono regular es igual al semiproducto del perímetro por su apotema.

$$A = \frac{p \times a}{2}$$

Siendo “p” el perímetro y “a” la apotema.

- **Poliedros**

Se llama poliedro un cuerpo o sólido geométrico, limitado por superficies planas.

Las superficies que limitan el sólido se llaman caras del poliedro. Los lados de las caras se llaman aristas y las intersecciones de las aristas se llaman vértices.

Ángulo poliedro de un sólido es el formado por las caras que concurren en un mismo vértice.

Un poliedro es convexo cuando la prolongación de cualquiera de sus caras deja todo el poliedro a un mismo lado de ella.

Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares y sus ángulos poliedros son iguales

Existe únicamente cinco poliedros regulares que están limitados por triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

Con los triángulos equiláteros se puede obtener el tetraedro regular, el octaedro regular y el icosaedro regular.

Con el cuadrado solo se puede obtener un poliedro regular, el hexaedro o cubo.

Con el pentágono regular se puede obtener únicamente el dodecaedro.

Teniendo en cuenta lo anterior, los poliedros regulares se nombran a continuación.
(Ver figura 23).

- **Tetraedro:** tiene 4 caras, 6 aristas y 4 vértices
- **Hexaedro:** tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices
- **Octaedro:** tiene 8 caras, 12 aristas y 6 vértices
- **Dodecaedro:** tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices
- **Icosaedro:** tiene 20 caras, 30 aristas y vértices

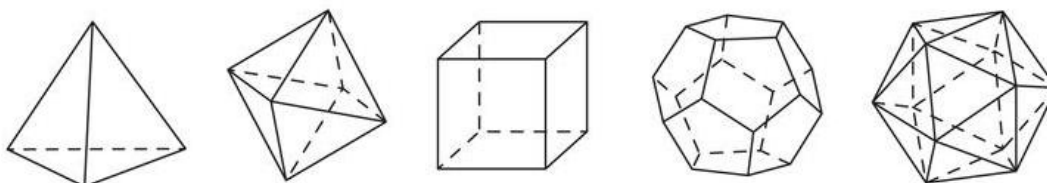


Figura 23 Sólidos platónicos

- **Prisma**

Se llama prisma o poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas y las otras caras son paralelogramos.

- Las caras iguales y paralelas son las bases del prisma y las otras son las caras laterales.
- Las aristas laterales de un prisma son iguales y paralelas.
- La altura del prisma es la distancia entre las dos bases.
- Los prismas pueden ser; triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

Según la forma de sus bases

Todo prisma cuyas caras son paralelogramos es un paralelepípedo, donde las caras opuestas son iguales y paralelas.

- En todo paralelepípedo se pueden tomar por base dos caras opuestas cualesquiera.
- Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en un punto medio.
- El punto común a las cuatro diagonales de un paralelepípedo es el centro del poliedro.

El hexágono regular o cubo es un paralelepípedo rectángulo limitado por seis cuadrados.

- **Cilindro**

Con base en el libro 11 de Euclides en sus definiciones 21, 22 y 23 se observa:

Definición 21. Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un cilindro.

Definición 22. Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.

Definición 23. Y las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giren.

2.3 PERSPECTIVA DIDÁCTICA

A continuación, se presenta de manera general diferentes posturas respecto a la visualización y otros componentes de tipo geométrico, se hará énfasis en la postura de Gonzato y Godino (2011) quienes la consideran como un conjunto de habilidades inherentes al razonamiento espacial y Berthelot y Salin. (1992) enfatizan en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, Lorenzato, S. (2015) plantea que antes de manejar algoritmos o fórmulas se hace necesario manipular, tocar o palpar objetos que representen el espacio, siendo expresando matemáticamente, simbolizando la realidad externa que las personas ven a diario y que pareciera ser diferente a conocimientos matemáticos. Desde esta concepción es importante que el estudiante interprete o construya en su mente una geometría real y vivencial. Para ello, se recomienda usar como principal herramienta el cuerpo, seguido de objetos manipulables a través del tacto y la visión, finalmente, pasar de tres a dos dimensiones por medio de dibujos. Para llevar a cabo estos tres momentos (cuerpo, objetos, imágenes) se hace necesario el lenguaje oral como facilitador de lo que visualizó, hizo e interpretó el estudiante a partir de su entorno, además de los saberes previos, su vivencia desde el entorno familiar con relación a conceptos geométricos.

2.3.1 Visualización

La visualización es el proceso que permite la creación de imágenes mentales, para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas. Opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático.

En lo que se refiere a la visualización, Gutiérrez, A. (1991) describe la percepción visual como un elemento muy importante en diversas actividades cotidianas, no solo en la escuela o la geometría. Se conoce como percepción espacial, imaginación espacial, visión espacial o “visualización”. Y hace referencia desde la didáctica de las matemáticas a centrar el estudio de la geometría tridimensional, formando imágenes o representaciones mentales que hace cada individuo de objetos físicos, relaciones o conceptos.

Por su parte Gonzato y Godino (2011), consideran la visualización y la orientación espacial como un conjunto de habilidades inherentes al razonamiento espacial. En consecuencia, visualizar y orientar un objeto en el espacio, incluye la habilidad de “ver” los objetos en un entorno, así mismo la destreza de analizar sobre cada uno de ellos, las posibles representaciones y relaciones entre sus piezas y estructuras, reconociendo las posibles alternativas que se puedan presentar. Se observa la interpretación y la comunicación de la información de manera que se describan gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales.

Para algunos autores, los cuales serán mencionados a continuación, el contexto tridimensional puede ser categorizado de acuerdo a unas determinadas acciones, definidas en tres familias de actividades, según el tópico específico a tratar, tal como se detallan a continuación:

A. Orientación estática del sujeto y de los objetos. Es una ampliación de la categoría de acciones, que según Berthelot y Salin (1994), consiste en “desplazar, encontrar y comunicar la posición de objetos”. En otras palabras, combinar la visualización con la topología y la orientación, realizando labores que implican una posición estática que requiere ser comprendida desde el esquema corporal como referente: arriba-abajo, izquierda-derecha, adelante-atrás, respecto al sujeto, y las posiciones de objetos con respecto a otros objetos

B. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Está relacionada con la categoría de acciones identificada por Berthelot y Salin (1994) como “reconocer, describir, fabricar o transformar objetos”, en las cuales se encuentran también las tareas de representación de objetos tridimensionales (materiales o representados en el plano).

C. Orientación del sujeto en espacios reales. Existen las actividades de reconocimiento, descripción, construcción, transformación, interpretación y representación de espacios reales o de desplazamientos.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, Gómez y Cedeño (2012) plantean que el aprendizaje de la geometría debe hacerse por medio de la relación de figuras tridimensionales y formas bidimensionales, empleando materiales concretos, tales como el

geoplano, el tangram y otros recursos didácticos que ayuden a los estudiantes a realizar transformaciones y ganar habilidad en la obtención de resultados.

En ese mismo sentido, Barrantes. (1998) considera necesario detenerse más en el mundo de las figuras realizando actividades de interdisciplinariedad con otras materias como el arte, aumentar el número de actividades de laboratorio en las que los conceptos y propiedades de las figuras geométricas se manipulen o realizar investigaciones y proyectos de estudios de las figuras geométricas.

En este orden de ideas se puede citar a Castillo y Morales (2015) quienes toman como referencia los lineamientos curriculares de matemáticas, considerando que las primeras experiencias que tienen los alumnos con el entorno se dan por medio de la manipulación de objetos tridimensionales.

Por su parte, Freudenthal, H. (1977) afirma que existen argumentos convincentes a favor de comenzar el estudio de la geometría por el espacio, construyendo modelos con cuerpos sólidos, ya que “el niño está inmerso en una realidad tridimensional y es por esto que sus experiencias geométricas naturales nacen del contacto directo con objetos de tres dimensiones”.

A partir de estos argumentos podría decirse que es necesario implementar los sistemas gráficos de representación espacial conocidas como dibujo técnico, permitiendo plasmar cualquier objeto tridimensional en el papel (estos sistemas se basan en la proyección de las figuras sobre un plano, mediante los denominados rayos proyectantes). Partiendo de la concepción de que todo dibujo es una representación bidimensional, puesto que se encuentra en un plano (llámese hoja de papel, lienzo o pared), que permite intentar percibir las tres dimensiones al darle profundidad con una nueva dirección, para ello se emplean tres ejes llamados x , y , z que permiten representar gráficamente sobre ellos el largo, el ancho y la profundidad de un objeto.

Las representaciones se caracterizan básicamente por tres tipos: proyección ortogonal, perspectiva axonométrica isométrica y perspectiva cónica. Definiendo cada una, podría decirse que:

A. La perspectiva axonométrica Isométrica. Permite semejar la visualización en 3D, por medio de ejes formados por ángulos de igual amplitud uno del otro (120°), con un punto de observación en el infinito.

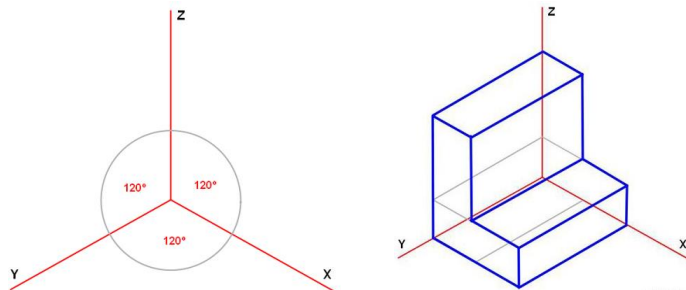


Figura 24 Perspectiva Isométrica

https://www.google.com/search?q=perspectiva+axonom%C3%A9trica+Isom%C3%A9trica.&safe=active&rlz=1C1RLNS_esCO740CO740&source=Inms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi64Y6q6cniAhWtlkKHdmYBoUQ_AUIECgB&biw=1366&bih=657#imgsrc=6E1Dq7qe5KX03M:

B. La perspectiva cónica (Perspectiva real). Este tipo de dibujo permite trazar líneas que en el mundo real son paralelas, y al ser proyectadas se unirán en un punto llamado “punto de fuga”, permitiendo simular la distancia de un objeto. Este tipo de representaciones podría tener uno, dos o más puntos de fuga, dependiendo de la complejidad del objeto representado. En este, el observador, a diferencia de los dos dibujos anteriores, sí está ubicado en un punto calculable del espacio con relación al objeto que observa. Esta sensación de profundidad que no se logra con la Perspectiva Isométrica, es la causante de que se la llame también Perspectiva Real.

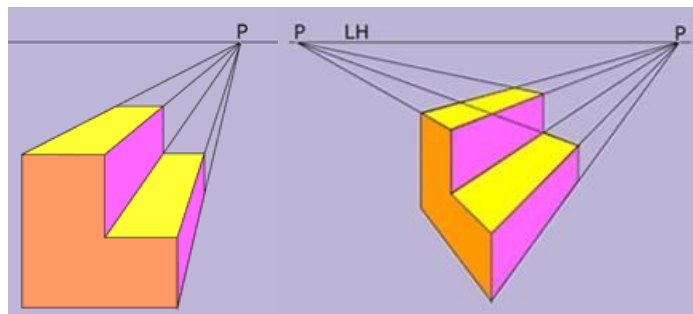


Figura 25 Perspectiva cónica

https://www.google.com/search?q=perspectiva+c%C3%B3nica&safe=active&rlz=1C1RLNS_esCO740CO740&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwig8OuR9MriAhWw11kKHYN4AXYQ_AUIECgB&biw=1366&bih=657#imgsrc=in8ldrK2ol-RQM:

- c. **La proyección ortogonal.** Permite representar los sólidos en diferentes planos (horizontal, vertical, lateral), es decir, permite ver el objeto desde distintas direcciones.

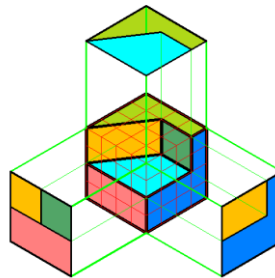


Figura 26 Proyección ortogonal

https://www.google.com/search?q=proyeccion+ortogonal&safe=active&rlz=1C1RLNS_esCO740CO740&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiNprSZuq3iAhVltlkKHauUjCxAQ_AUIDigB&biw=1366&bih=657#imgdii=GbvKc6hgSlwyJM:&imgsrc=on6uoa0wGfW5GM:

Esta última representación será tomada en el trabajo de investigación, debido a las características de representación de vistas (superior, lateral y frontal) y sólido en perspectiva. El dibujo es una representación bidimensional de una realidad que es tridimensional. Según Piaget (1978); el dibujo representa un esfuerzo del niño por acercarse e imitar lo real, la evolución del dibujo es solidaria con la estructuración del espacio. De esta manera se advierte que hay una evolución de la geometría espontánea del niño.

En la representación del espacio Piaget hace referencia a nociones básicas que en dibujo van desde reconocer objetos familiares, figuras abiertas y cerradas, hasta llegar a la perspectiva, esta última conocida como periodo del realismo visual, que aparece entre los 8

y 12 años de edad, en el cual el dibujo ya se ajusta a lo que es visible desde una determinada perspectiva, contemplando ciertas proporciones métricas.

2.3.2 Dificultades, errores y obstáculos

A continuación, se presentan las dificultades, errores y obstáculos que pueden presentar los estudiantes, partiendo de la concepción que de estas tiene Socas y Bachelard, aportando bases fundamentales a esta propuesta de aula que moviliza la representación bidimensional del espacio tridimensional.

De acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando, Socas, M. (1997) afirma que el error es tomado como la presencia inadecuada del esquema cognitivo y no como una falta de conocimiento. Por su parte las dificultades se traducen en errores que cometen los estudiantes, producidos por diversas causas que son abordadas desde diferentes perspectivas; el desarrollo cognitivo, el currículo de matemáticas y los métodos de enseñanza. Es por esto que cuando las dificultades y errores no se pueden superar, se convierte en obstáculos por que impiden avanzar en la construcción de nuevos conocimientos.

Por su parte Bachelard, G. (1971). Plantea que “*Un obstáculo es un apego que impide el avance de la ciencia*” En otras palabras, el desarrollo del conocimiento, errores, prejuicios, opiniones de los docentes son transmitidos al estudiante y estos se convierten en obstáculos epistemológicos traducidos en una mala concepción por parte de quien aprende.

Es por ello que resulta oportuno mencionar los errores y dificultades encontrados en el aprendizaje de las matemáticas estudiados por diferentes autores, quienes han llegado a caracterizarlos de acuerdo a concepciones propias y entre los cuales vale la pena mencionar algunos referentes con sus respectivas conclusiones:

Desde su aporte investigativo Barrantes y Zapata (2008) mencionan que los obstáculos y errores en el aprendizaje de las figuras geométricas, parten de la concepción de esquemas, es decir, de la asociación de los significados de las palabras con imágenes mentales, propiedades, procedimientos y experiencias adquiridas por los estudiantes; seguido de las limitaciones a solo libros de texto; hasta los diferentes distractores tanto de orientación como de estructuración entre los cuales se cuenta con errores de definición y

esquemas, exclusión de elementos y propiedades, incluso errores en la relación de imágenes reales con conceptos que no llegan a tener ningún significado para el estudiante.

En este orden de ideas se puede citar a Andrade. (2011) quien describe que la dificultad presentada por los estudiantes en la representación bidimensional del espacio tridimensional radica en la falta de visualización, es decir, al momento de generar imágenes mentales y representarlas en el plano. Concluye que, en algunos grados, no se profundiza el desarrollo de la visualización espacial, sino que se da prioridad al cálculo de áreas y volúmenes, mediante fórmulas, además de no proponer actividades a fin de evaluar lo tridimensional.

Finalmente, Betancur, J. y Londoño, Y. (2008) encuentran en su trabajo de grado que los estudiantes presentan poco conocimiento y manejo de contenidos geométricos específicos como lo son: el concepto de coordenada y rotaciones en el plano, utilización de las relaciones y operaciones entre ángulos y algunas características de los cuadriláteros. Es así, que se evidencian que las principales dificultades de los estudiantes de grado quinto, con quienes se realizó la investigación, en relación con las competencias para manejar conceptos y procedimientos están relacionados con el espacio (formas y figuras en el plano) y con las magnitudes. Es por ello que se hace imprescindible la combinación de aspectos como la percepción, la visualización, la manipulación y la descripción o comunicación para una mejor comprensión.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 Tipo De Investigación

El enfoque cualitativo se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Punch, 2014)

Para el desarrollo de la presente investigación, se tiene en cuenta un enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo dado que se quiere profundizar y dar cuenta de una problemática en particular.

Con base en lo anterior y haciendo referencia a la propuesta investigativa, esta se centra en detectar las dificultades asociadas a la representación espacial, realizando observaciones de campo desprendidas desde el trabajo realizado en el aula de clases, con la finalidad de identificar si la visualización es utilizada como herramienta en actividades que involucran la representación de figuras tridimensionales.

Esta investigación se desarrolla a partir de tres fases dando respuesta a cada uno de los objetivos planteados, mediante la elaboración de rejillas que se construyen tomando como referencia los distintos documentos consultados y que facilitan la relación entre todos ellos. Se presenta el desarrollo de la primera fase en la que se considera el contexto y los documentos ministeriales, es decir que se explicita el desarrollo del primer objetivo, la segunda se sustenta a partir de los documentos orientadores de la disciplina a partir de la representación bidimensional del espacio tridimensional, abordada desde la EMR y la relación didáctica que enlaza las dificultades, errores y obstáculos, desde la perspectiva de Socas (1997) y Bachelard (1981) como principales referentes. En la tercera fase se evalúan los resultados obtenidos en la propuesta aplicada teniendo en cuenta los niveles de matematización.

A continuación, se presenta el desarrollo de la primera fase en la que se considera el contexto socio-cultural, los documentos ministeriales y la didáctica desde los procesos de representación bidimensional del espacio tridimensional, permitiendo dar cuenta del desarrollo del primer objetivo.

3.2 Aproximación Contextual

La Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga es de carácter oficial, perteneciente al calendario A en la modalidad de jornada única en todos los niveles de la educación preescolar, básica primaria y secundaria. Está ubicada en el corregimiento de Tres Esquinas, zona rural plana en la parte noroccidental del municipio de Tuluá- Valle, a 4 km del casco urbano. Se encuentra aledaña a los callejones Cumchipa, Las viudas, Gato negro, Papayal, La palmera, clasificados en estratos 1, 2 y 3.

Por las características del sector, el sustento de sus habitantes depende en gran parte de la producción y recolección de las cosechas de pan coger, siendo éste el factor principal que incide en el desplazamiento constantemente de las familias por diferentes zonas de la región, afectando en muchos casos la continuidad del proceso educativo de los estudiantes.

Resaltan la importancia del contexto y basados en los principios de la EMR se presenta esta propuesta de aula, toma como referencia para su construcción la infraestructura de los tanques de abastecimiento de agua del sector, resaltando no sólo su vital importancia para el almacenamiento del preciado líquido, sino también por el aporte significativo en cuanto a la ilustración en contexto de las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional, enfocados a los lineamientos curriculares. Sin duda, la construcción referida, aporta variedad de conceptos y aplicaciones geométricas de gran importancia para ser desarrolladas con los estudiantes en diferentes espacios pedagógicos. En palabras de Freudenthal *“la educación matemática de los educandos debe estar conectada a su realidad, ser cercana y relevante”*.

La presente investigación, cuenta con una población mixta que oscila entre los 5 y 13 años, conformada por 124 estudiantes matriculados en toda la básica primaria de la sede Simón Bolívar, pertenecientes a la Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga. La muestra la integran 20 estudiantes de grado cuarto, 10 niños y 10 niñas, entre los 9 y 13 años de edad, los cuales fueron seleccionados teniendo en cuenta que desde los estándares del MEN, la representación bidimensional se aborda en el grado referido.

3.3 Fases De La Investigación

Fase 1: *Documentar desde la propuesta curricular del MEN, las matemáticas y su didáctica algunos elementos implicados en los procesos de representación bidimensional del espacio tridimensional.*

En esta fase se planea dar respuesta al objetivo mencionado, se presenta inicialmente la relación entre los distintos documentos ministeriales a través de una rejilla, la cual facilita la construcción de los objetivos que orientan la construcción de la propuesta, así como los conocimientos disciplinares y didácticos que se movilizan.

En lo que corresponde a las matemáticas y su didáctica, es preciso destacar algunos elementos implicados en los procesos de representación bidimensional del espacio tridimensional planteados desde la serie lineamientos curriculares en los que se indica que la geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación (MEN, 1998, p. 17).

De acuerdo con lo mencionado se hace énfasis en los siguientes enunciados:

- El desarrollo de la interpretación espacial sobre formas y figuras bidimensionales y tridimensionales.
- La comprensión y uso de propiedades de las figuras, su correspondencia y diferentes transformaciones.

Los sistemas geométricos hacen referencia al desarrollo de pensamiento espacial, como grupo de técnicas cognitivas por medio de las cuales se construye y manejan representaciones mentales de figuras, relaciones y transformaciones. Se hace importante explorar formas tridimensionales en la realidad y en la imaginación, al representar figuras ubicadas en el espacio.

En concordancia, la propuesta curricular vigente en el territorio nacional, pretende que la enseñanza de la geometría relacione las representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos. Para ello, se establecen los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas concernientes al pensamiento espacial y sistemas geométricos que hacen referencia a la relación entre representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos, específicamente para el grado cuarto y el grado quinto (Ver tabla 2).

Tabla 2 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas concernientes al Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

Conjunto de grados	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas
	• Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con los

	componentes (caras, lados) y propiedades.
Cuarto	• Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
a	
Quinto	• Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas. • Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas. • Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Fuente: MEN (2003, pp. 80-86)

De manera complementaria, el MEN propone los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (DBA), los cuales constituyen los saberes fundamentales que deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados de la educación, tomando como referencia las representaciones tridimensionales y bidimensionales de los objetos geométricos (Ver tabla 3).

Tabla 3 Derechos Básicos de Aprendizaje y Evidencias concernientes al Pensamiento Espacial para el grado cuarto y grado quinto

Grado	DBA	Evidencia
Cuarto	Identifica, describe y representa figuras bidimensionales y cuerpos tridimensionales y establece relaciones entre ellas.	• Arma, desarma y crea formas bidimensionales y tridimensionales. • Reconoce entre un conjunto de desarrollos planos, los que corresponden a determinados sólidos atendiendo a las relaciones entre la posición de las diferentes caras y aristas.
Quinto	Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la	• Relaciona objetos tridimensionales y sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos. • Reconoce relaciones intra e

bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas.	interfigurales. • Determina las mediciones reales de una figura a partir de un registro gráfico (un plano). • Construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de medidas establecidas. • Utiliza transformaciones a figuras en el plano para describirlas y calcular sus medidas.
---	--

Fuente: MEN (2016, pp. 11-69.)

La siguiente rejilla presenta la relación entre los distintos documentos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional como de la Institución Educativa, a través de los cuales se logra construir los objetivos que orientan la construcción y análisis de las actividades planteadas en la propuesta de aula.

Tabla 4 Rejilla 1. Representación bidimensional desde los componentes curriculares

DOCUMENTACIÓN	DESCRIPCIÓN
LINEAMIENTOS	Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones. Cada una es importante para resaltar un aspecto, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio (MEN, 1998, p. 39).
ESTÁNDAR	El componente geométrico del currículo deberá permitir a los estudiantes examinar y analizar las propiedades de los espacios tridimensionales, así como las formas y figuras geométricas que se hallan en ellos. (p. 83) • Construyo objetos tridimensionales a partir de

	representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura. • Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
PEI	• En grado cuarto los estudiantes de la institución educativa Julio Cesar Zuluaga, deben estar en la capacidad reconocer las características de objetos tridimensionales de acuerdo con elementos tales como caras y lados, e identificar propiedades de los mismos dentro de un contexto geométrico.
OBJETIVOS	• Comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes. • Representar de manera bidimensional el espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno.

Fase 2: *Articular en una propuesta de aula y desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) los elementos curriculares, matemáticos y didácticos que favorezcan la construcción de representaciones bidimensionales del espacio tridimensional.*

Esta segunda fase planea dar respuesta al segundo objetivo, desde la construcción de una rejilla que integra la EMR, los elementos curriculares y disciplinares de la representación bidimensional del espacio tridimensional con la relación didáctica que permite identificar y considerar las dificultades, errores u obstáculos, que pueden presentar los estudiantes cuando se acercan a la matematización con dichos conocimientos geométricos (ver tabla 5. Rejilla 2).

Seguidamente se elabora una propuesta de aula con dos situaciones las cuales se implementan en un tiempo de seis sesiones de clases de sesenta minutos cada una, que

serán abordadas por grupos de trabajo de cuatro estudiantes, resaltando así el trabajo colaborativo, donde cada niño realiza sus aportes en la solución de cada situación.

Durante la aplicación de esta propuesta, cobra relevancia el principio de reinención, donde el docente es quien guía el proceso, es el mediador, quien recoge la información y amplía los saberes dentro del aula, para que los estudiantes lleguen a reflexionar y concluir sobre su propio saber.

La primera situación pretende, por medio de la visualización de objetos lograr que los estudiantes reconozcan formas de una manera relevante, comparando características y propiedades de acuerdo a componentes como ángulos, vértices y segmentos; esta contiene dos actividades relacionadas con el entorno socio-cultural del estudiante en busca de la apropiación de conocimientos geométricos básicos desde la observación, reconocimiento y representación gráfica de los tanques (Ver anexos 1 y 2).

En la primera sesión de clases y marcando el inicio de la propuesta de aula llamada “Caminando Plano Sobre Un Mundo Tridimensional” se realiza una visita a los tanques de abastecimiento de agua del corregimiento, en el cual los niños observan desde diferentes ángulos las estructuras.

Para dar respuesta a la situación 1 se retoma la visita hecha a los tanques, empleando dos sesiones de clase. Una vez expuestas las orientaciones generales para la realización de la actividad, se procede al desarrollo de la misma tomando como referencia figuras tridimensionales y formas planas allí presentes, generando una interacción docente - estudiantes en relación con la resolución de la actividad.

La segunda situación hace referencia a la representación bidimensional del espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno; contiene tres actividades que permiten a los estudiantes manipular objetos concretos como los que a diario llevan en su lonchera, permitiéndoles concientizarse de la aplicación de la geometría desde su entorno (Ver anexos 3,4 y 5).

La aplicación de la segunda situación tiene como propósito facilitar a los estudiantes la apropiación de conceptos básicos de la geometría al tener la posibilidad de observar y manipular los objetos de uso cotidiano. Se lleva a cabo mediante la contextualización de los

estudiantes con material concreto presente en su entorno, razón por la cual, se programan tres actividades guiadas por las docentes investigadoras, resueltas en tres sesiones de clases, tal como se especifica a continuación:

La primera, consiste en la manipulación de un prisma rectangular representado en una caja de jugo.

La segunda, implica la manipulación de un prisma hexagonal representado en una torta, la cual seguidamente se porciona formando seis prismas de base triangular.

La tercera actividad, se lleva a cabo por medio de la manipulación de cilindros representados en termos, botellas y alimentos enlatados.

La siguiente rejilla, da cuenta de los elementos curriculares, disciplinarios y didácticos planteados en la investigación.

Tabla 5 Rejilla 2. Relación elementos curriculares, disciplinarios y didácticos

ESTÁNDARES		OBJETIVOS
CURRICULAR	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. (pág. 82)	• Representar de manera bidimensional el espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno. • Realizar construcciones con base en el reconocimiento de características de formas y figuras geométricas.
	ELEMENTOS GEOMÉTRICOS	
DISCIPLINAR	Lados, aristas, paralelismo y perpendicularidad, segmentos, secantes, vértice, ángulos, caras, base, altura, polígonos, poliedros. Pág. 21- 34.	
ÁCTICO	DIFICULTADES, ERRORES Y OBSTÁCULOS	

-
- Confundir paralelismo con perpendicularidad.
 - Desconocer la definición de perpendicularidad y paralelismo.
 - No maneja adecuadamente herramientas en el trazado de dibujos.
 - Utiliza inadecuadamente concepciones inherentes a formas y figuras geométricos.
 - Con dificultad visualiza objetos que le permiten describir características del entorno.
-

A través de la tercera rejilla construida desde la educación matemática realista (EMR), se pretende validar la confiabilidad con base en los resultados obtenidos durante la aplicación de la propuesta, en la representación bidimensional del espacio tridimensional.

Tabla 6 Rejilla 3. Relación elementos curriculares, disciplinarios y principios de matematización

Principios de la EMR				
PRINCIPIOS				
OBJETIVO	TEMAS	ACTIVIDAD	REALIDAD	NIVELES
		RECONOCIMIENTO DE FORMAS Y FIGURAS	USO DE INSTRUMENTOS	APLICABILIDAD DE CONCEPTOS
Comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes.	• Caras • Cuadrado y rectángulo • Vértices/punto • Aristas /lado • Ángulos • Reconocimiento de paralelismo y perpendicularidad • Secantes • Inclinaciones	Observa la presencia de trazos que le permite diferenciar rectas paralelas de secantes Reconoce los elementos que conforman un prisma	Por medio de material concreto se apropia de conceptos geométricos.	Determina el número de lados, ángulos, vértices y diagonales que existen en un polígono.

Representar de manera bidimensional el espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno.	• Poliedros • Rectas y ángulos • Relaciones entre segmentos.	Reconocimiento del contexto desde su experiencia y el sentido común.	Realiza el trazado de segmentos paralelas, perpendiculares y secantes en la construcción de vistas (superior, lateral y frontal) de figuras geométricas.	Reconoce las características de los poliedros de acuerdo a conceptos como paralelismo y perpendicularidad en representaciones gráficas.
---	--	--	--	---

Fase 3: *Identificar en los resultados obtenidos producto de la implementación, algunos elementos característicos de las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional.*

Se evalúan los resultados obtenidos en la propuesta aplicada desde los principios de matematización, obteniendo los análisis que se presentan a continuación.

Con base en los resultados obtenidos, se percibe que los estudiantes no tienen claro componentes geométricos, debido a que sus respuestas estaban más enfocadas en describir la funcionalidad de los tanques dentro de la comunidad que en sus características físicas. Por otro lado, y según las formas de las caras de los tanques es de considerar que los estudiantes no manejan el concepto de forma cuadrada y rectangular, además de presentar dificultad al momento de plasmar segmentos paralelos y secantes en la representación gráfica de los tanques.

Con el manejo de material concreto se puede identificar con mayor facilidad que con la unión de dos segmentos se forman ángulos, los cuales cumplen con características específicas de acuerdo a su amplitud.

3.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información

Para la recolección de datos, los instrumentos fueron seleccionados en concordancia con los objetivos planteados y el contexto de la investigación. Por consiguiente, al tratarse de una investigación de tipo cualitativo, como se especificó en líneas anteriores, se opta por

la observación y análisis de videos e información adquirida en las actividades aplicadas en cada situación.

Con el desarrollo de la situación problemática propuesta se pretende incorporar algunos indicadores relacionados con los estándares básicos de competencias asociados al componente espacial métrico, partiendo del análisis de las propiedades de los espacios en dos y en tres dimensiones, la relación de las formas y figuras presentes en los mismos, entre otros procesos de pensamiento requeridos.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

A continuación, se presentan los análisis de los resultados obtenidos al aplicar la propuesta de aula “Caminando plano sobre un mundo tridimensional” evidenciándose la apropiación y significación de las respectivas situaciones planteadas, con base en la observación de características puntuales de la secuencia didáctica, manifestándose el tipo de razonamiento que tienen los estudiantes frente a componentes tales como el número de caras, lados, aristas, vértices, paralelismo, perpendicularidad y secantes, es decir los diferentes conocimientos geométricos movilizados, las cuales forman parte del proceso de caracterización que facilita la representación del espacio tridimensional de manera bidimensional.

4.1 ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Teniendo en cuenta el planteamiento de Freudenthal en el cual establece que las matemáticas deben ser para todos y cercanas a quien aprende, además de ser significativas y permitir la solución de situaciones problemáticas del contexto, se presenta en concordancia, la propuesta de aula aplicada con el análisis de los resultados obtenidos durante su implementación, tomando como referencia las rejillas construidas desde los aspectos curriculares, didácticos y disciplinares, que pretenden representar bidimensionalmente el espacio tridimensional a partir del reconocimiento y comparación de características y propiedades físicas de objetos presentes en el entorno (Ver figura 27)



Figura 27 Tanques de abastecimiento ASDAL

A continuación, se observan las tablas con los indicadores de frecuencias resultantes y fragmento de transcripción de video, los cuales, suministran información relevante con base en los resultados arrojados en cada situación. Para ello, se utilizan las siguientes convenciones:

P: intervención de la profesora

E₁, E₂, E_n: Estudiantes que intervienen en los videos correspondiendo al listado.

R₁, R₂, R_n: Tipo de respuesta dada por los estudiantes.

El objetivo de las preguntas realizadas en las dos situaciones, apunta a que los estudiantes logren:

- Comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes
- Representar de manera bidimensional el espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno.

Tabla 7 Resultados de la aplicación Situación 1. Actividad 1

SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1			
1. Características de los tanques			
a. ¿Qué representan para ti los tanques?	FA	FR	%
R1: Una forma geométrica	1	1/20	5
R2: El agua y su importancia	19	19/20	95
b. ¿Cuántas caras tienen los tanques?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que responden que cada tanque tiene seis caras.	14	8/20	70
R2: Estudiantes que responden que cada tanque tiene cuatro caras.	4	2/20	20
R3: Estudiantes que responden que cada tanque tiene ocho caras.	2	2/20	10
c. ¿Qué forma tiene cada una de las caras en el tanque pequeño?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que reconocen formas cuadrada y rectangular.	6	6/20	30
R2: Estudiantes que reconocen formas cuadradas.	13	13/20	65
R3: Estudiantes que reconocen formas triangulares.	1	1/20	5
d. ¿Qué forma tiene cada una de las caras en el tanque grande?	FA	FR	%

R1: Estudiantes que reconocen formas cuadrada y rectangular.	8	8/20	40
R2: Estudiantes que reconocen formas cuadradas.	2	2/20	10
R3: Estudiantes que reconocen formas rectangulares.	8	8/20	40
R4: Estudiantes que reconocen formas triangulares.	2	2/20	10

e. ¿Cuántas de las caras del tanque grande, tienen forma cuadrada?

R1: Estudiantes que responden dos caras cuadradas.	5	5/20	25
R2: Estudiantes que responden que todas tienen la misma forma	6	6/20	30
R3: Estudiantes que responden que no tienen la misma forma.	5	5/20	25
R4: Estudiantes que responden dos arriba y dos abajo.	4	4/20	20

f. Escribe las características de las formas de las caras para que estas sean cuadradas.

R1: Estudiantes que reconocen lados y ángulos iguales en un cuadrado.	3	3/20	15
R2: Estudiantes que reconocen lados iguales en un cuadrado.	11	11/20	55
R3: Estudiantes que no reconocen características de un cuadrado.	6	6/20	30

g. ¿Cuántas aristas tiene cada uno de los tanques?

R1: Estudiantes que responden doce aristas	13	13/20	65
R2: Estudiantes que responden ocho aristas	3	3/20	15
R3: Estudiantes que responden diez aristas	3	3/20	15
R4: Estudiantes que responden diecisiete aristas	1	1/20	5

h. ¿Cuántas esquinas o vértices tienen los tanques?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que responden ocho vértices.	13	13/20	65
R2: Estudiantes que responden cinco esquinas.	1	1/20	5
R3: Estudiantes que responden doce esquinas.	1	1/20	5
R4: Estudiantes que responden cuatro.	1	1/20	5
R5: Estudiantes que reconocen los vértices como un cruce de segmentos.	4	4/20	20

2. Estructura de las bases de los tanques

a. Compara la posición de las patas de los dos tanques y describe cada uno de ellos.	FA	FR	%
R1: Estudiantes que identifican que al prolongar las patas del tanque pequeño se cruza y el grande no	13	13/20	65
R2: Estudiantes que identifican distancias iguales	3	3/20	15
R3: Estudiantes que identifican que la posición no es igual	3	3/20	15
R4: Estudiantes que identifican la posición de las patas con otro nombre	1	1/20	5

b. ¿Al prolongar las patas de los soportes de cada uno de los tanques es posible que alguno de ellos se cruce?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	<i>%</i>
R1: Estudiantes que responden sin especificar que si se cruzan	19	19/20	95
R2: Estudiantes que responden que solo el grande	1	1/20	5
c. ¿Cómo es la distancia entre las patas del tanque grande?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	<i>%</i>
R1: Estudiantes que dicen que las patas son derechas	15	15/20	75
R2: Estudiantes que reconocen otras características tales como altura, líneas rectas y que miden lo mismo	5	5/20	25
d. ¿Por qué crees que en el tanque grande las patas no se cruzan?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	<i>%</i>
R1: Estudiantes que describen líneas derechas que no se cruzan	14	14/20	70
R2: Estudiantes que las describen como líneas que se cruzan	6	6/20	30
e. Características encontradas en la posición de las patas en ambos tanques	<i>FA</i>	<i>FR</i>	<i>%</i>
R1: Estudiantes que reconocen rectas secantes y paralelas	14	14/20	70
R2: Estudiantes que reconocen rectas	2	2/20	10
R3: Estudiantes que reconocen solo rectas perpendiculares	4	4/20	20

f. ¿Cómo son los lados del tanque grande con relación a las patas de su soporte?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que identifican a los lados del tanque y a las patas del soporte como líneas rectas.	7	7/20	35
R2: Estudiantes que identifican a los lados del tanque y a las patas del soporte como paralelas	4	4/20	20
R3: Estudiantes que identifican a los lados del tanque y a las patas del soporte como perpendiculares	1	1/20	5
R4: Estudiantes que relacionan igualdad	3	3/20	15
R5: Estudiantes que establecen otro tipo de relación	5	5/20	25
 g. ¿Cómo son los lados del tanque pequeño con relación a las patas de su soporte?	 FA	 FR	 %
R1: Estudiantes que determinan que los lados del tanque pequeño con relación a las patas del soporte son líneas secantes o perpendiculares	7	7/20	35
R2: Estudiantes que determinan que los lados del tanque pequeño con relación a las patas del soporte son rectas inclinadas	9	9/20	45
R3: Estudiantes que determinan que los lados del tanque pequeño con relación a las patas del soporte son triángulos	1	1/20	5
R4: Estudiantes que determinan que los lados del tanque pequeño con relación a las patas del soporte tienen forma cuadrada	2	2/20	10
R5: Estudiantes que determinan que los lados del tanque pequeño con relación a las patas del soporte son rectas paralelas	1	1/20	5

h. ¿Cómo es la base del tanque grande respecto a la posición de sus patas?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que responden que es perpendicular	7	7/20	35
R2: Estudiantes que responden que tiene forma cuadrada	5	5/20	25
R3: Estudiantes que responden que tiene forma rectangular	1	1/20	5
R4: Estudiantes que responden que es recta	6	6/20	30
R5: Estudiantes que responden que tiene forma triangular	1	1/20	5
 i. ¿Cómo es la base del tanque pequeño respecto a la posición de sus patas?	 FA	 FR	 %
R1: Estudiantes que responden que el tanque pequeño respecto a la posición de sus patas forma ángulos obtusos	7	7/20	35
R2: Estudiantes que responden que el tanque pequeño respecto a la posición de sus patas es perpendicular	6	6/20	30
R3: Estudiantes que responden que el tanque pequeño respecto a la posición de sus patas forma triángulos	1	1/20	5
R4: Estudiantes que responden que el tanque pequeño respecto a la posición de sus patas forman cuadrados	3	3/20	15
R5: Estudiantes que responden que el tanque pequeño respecto a la posición de sus patas forman rectángulos	3	3/20	15
 j. ¿Qué tipo de ángulo se forma entre la base del tanque grande y una de sus patas?	 FA	 FR	 %
R1: Estudiantes que identifican ángulos rectos	14	14/20	70
R2: Estudiantes que identifican perpendicularidad	5	5/20	25
R3: Estudiantes que no identifican ángulos	1	1/20	5

k. ¿Qué tipo de ángulo se forma entre la base del tanque pequeño y una de sus patas?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que relacionan el ángulo que se forma con un ángulo obtusos.	11	11/20	55
R2: Estudiantes que relacionan el ángulo que se forma con un ángulo recto.	4	4/20	20
R3: Estudiantes que relacionan el ángulo que se forma con un ángulo agudo	4	4/20	20
R4: Estudiantes que no establecen relación	1	1/20	5
 l. ¿Qué ángulo forman los soportes del tanque grande con relación al suelo?	 FA	 FR	 %
R1: Estudiantes que responden que se forman ángulos rectos	10	10/20	50
R2: Estudiantes que responden que se forman ángulos agudos	4	4/20	20
R3: Estudiantes que no reconocen ángulos en los soportes del tanque grande con relación al suelo	6	6/20	30
 m. ¿Qué ángulo forman los soportes del tanque pequeño con relación al suelo?	 FA	 FR	 %
R1: Estudiantes que responden que se forman ángulos agudos	8	8/20	40
R2: Estudiantes que responden que se forman ángulos obtusos	6	6/20	30
R3: Estudiantes que responden que se forma un ángulo recto	1	1/20	5

R4: Estudiantes que responden que se forman secantes	3	3/20	15
R5: Estudiantes que no reconocen ángulos en los soportes del tanque pequeño con relación al suelo	2	2/20	10

Análisis: Situación 1 - Actividad 1

Terminada la primera actividad y con base en los resultados obtenidos (Ver tabla 7), se percibe que los estudiantes en la observación de los tanques no tienen claro las características geométricas, debido al desconocimiento de términos; evidenciado en las respuestas enfocadas en describir la funcionalidad que estos tienen dentro de la comunidad. En cuanto al número de caras en su mayoría respondieron que seis, los que respondieron cuatro no toman las bases como caras del tanque y aquellos cuya opción fue ocho caras, estaban tomando entre estas los soportes. Por otro lado, y según las formas de las caras de los tanques es de considerar que los estudiantes no tienen claras las características de los cuadrados y rectángulos evidenciándose en la falta de identificación de las formas, como se observa en los literales d y e, donde el 60% de los estudiantes responden que las caras son cuadradas o rectangulares, cuando en realidad tienen las dos formas (no solo una).

El segundo punto de esta actividad retoma la identificación de paralelismo y perpendicularidad en los soportes de los tanques, evidenciando con ello que los estudiantes, en el discurso reconocen y diferencian dichos conceptos, pero estos al momento de graficar no son tenidos en cuenta. En cuanto a la relación entre la base del tanque y su estructura, un gran porcentaje de los estudiantes no tuvieron en cuenta que la pregunta conducía hacia la identificación de segmentos paralelos y secantes; y solo dan respuesta a la forma de la base.

Tabla 8 Resultados de la aplicación Situación 1. Actividad 2

SITUACIÓN 1 - ACTIVIDAD 2			
Representación gráfica de los tanques			
a. Vista frontal	FA	FR	%

R1: Estudiantes que representan la vista frontal de los tanques de acuerdo a características geométricas tales como ángulos, segmentos paralelos y perpendiculares.	8	8/20	40
---	---	------	----

R2: Estudiantes que no representan en la vista frontal de los tanques características geométricas tales como ángulos, segmentos paralelos y perpendiculares.	12	12/20	60
--	----	-------	----

b. Vista lateral

<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
-----------	-----------	---

R1: Estudiantes que representan la vista lateral de los tanques según características geométricas tales como ángulos, segmentos paralelos y perpendiculares.	7	7/20	35
--	---	------	----

R2: Estudiantes que no representan la vista lateral de los tanques según características geométricas tales como ángulos, segmentos paralelos y perpendiculares.	13	13/20	65
---	----	-------	----

c. Vista superior

<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
-----------	-----------	---

R1: Estudiantes que representan la vista superior de los tanques según características geométricas tales como ángulos, segmentos paralelos y perpendiculares.	7	7/20	35
---	---	------	----

R2: Estudiantes que no representan la vista superior de los tanques según características geométricas tales como ángulos, segmentos paralelos y perpendiculares.	13	13/20	65
--	----	-------	----

Análisis: Situación 1 - Actividad 2

Esta actividad pretendía movilizar la representación gráfica, que desde el principio de realidad busca acercar al estudiante con el medio que le rodea, para identificar características geométricas tales como paralelismo y perpendicularidad indispensables al momento de representar gráficamente formas y figuras.

Durante el desarrollo de esta, se evidenció la dificultad que presentan los estudiantes en la representación gráfica y caracterización de figuras (Ver tabla 8), debido en su mayoría

a la falta de visualización o concepción espacial, seguido del mal manejo de herramientas a utilizar tales como regla y transportador, necesarias en el trazado de rectas. Y por último a la falta de apropiación de conceptos, todo esto se evidencia a continuación (Ver figura 28).

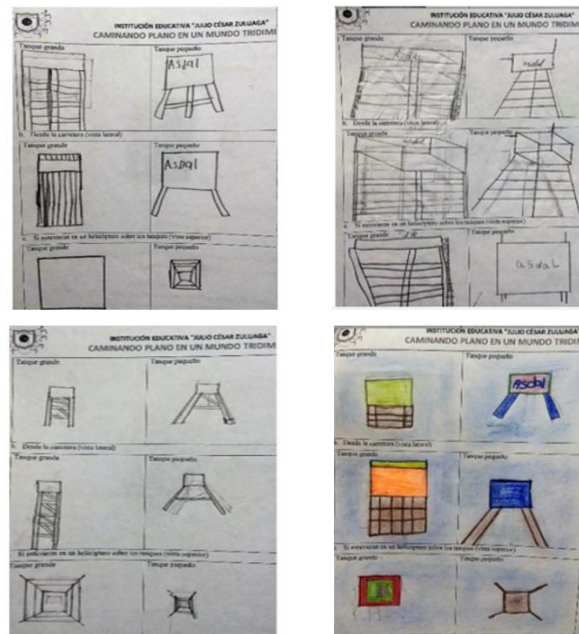


Figura 28 Actividad resuelta por los estudiantes

De acuerdo a los resultados obtenidos en la aplicación de esta situación y en concordancia con los objetivos: Comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes. Y representar de manera bidimensional el espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno; se puede evidenciar en el video 1, entre los minutos 13 y 87, que los estudiantes identificaron características de los tanques al describir cantidades de caras, vértices y aristas.

P: ¿Cuántas caras tienen los tanques? (min 13)

E4: Seis. La de arriba, la de abajo y las de los lados.

P: ¿Qué forma tiene cada una de las caras del tanque pequeño?

E16: Cuadradas

P: ¿Todas son cuadradas?

E4: ¿No? si profe porque todas terminan en esquinas y ahí se juntan.

P: En el grande todos terminan en esquinas y no son cuadrados.

P: ¿Tiene forma de cuadrado alguna de las caras? (Min 15)

E18: La de abajo

P: Y si la de abajo es cuadrada, ¿Qué otra cara es cuadrada?

E18: La de arriba

P: Entonces: ¿cuantas caras cuadradas tiene el tanque?

E8: 2

P: Escribe las características de las formas de las caras para que estas sean cuadrados. ¿Cómo sé qué es un cuadrado? y ¿Qué es un rectángulo? (Min 20)

E13: Un cuadrado se distingue por que tiene los mismos lados, tiene todas las partes iguales, los mismos ángulos.

E8: Que tenga las mismas medidas, por ejemplo, que si un lado mide 29 el otro también tiene que medir 29 (representa con sus manos rectas perpendiculares) (Min 29)

P: ¿Cuántas esquinas o vértices tiene un tanque? (Min 34)

E8: 18

P: ¿Seguro?

E12: 16 profe

La docente toma un parlante a manera de ejemplo y lo pasa a los estudiantes para que identifiquen en él los respectivos vértices.

E8: 16

E18: 16 (responde sin tocar el parlante a lo que la docente insiste que los cuente)

E18: 8 (responde asombrado después de manipular el objeto).

Siguiendo con la estructura del soporte o patas de los tanques, se amplía la concepción de rectas paralelas, perpendiculares y secantes. Dando su definición y demostración con el material concreto.

P: ¿Cómo es la distancia entre las patas del tanque grande?

E14: aaaaa que es igual.

P: ¿Tiene la misma distancia en todos los lados o está cambiando?

E14: No, no está cambiando

Después de dar los conceptos de paralelismo y perpendicularidad los estudiantes logran concluir lo siguiente: (min 34)

E14: Como las patas del tanque grande son paralelas entonces no se cruzan, así como las líneas paralelas no se cruzan

E13: Profe las vértices se cruzan, ya que las vértices van así o así (señala con sus manos secantes y perpendiculares).

Con la explicación nuevamente general y haciendo uso del parlante y el tablero surgen nuevas preguntas y respuestas en los estudiantes

P: ¿Por qué las caras de cada tanque son rectangulares?

E17: Por que las rayas de arriba son más pequeñas que las que van a los lados (min 44)

P: ¿por qué no se puede llamar cubo a los tanques?

E5: Porque no tiene los mismos lados y un cubo es como un cuadrado

P: no es como un cuadrado, todas las caras tienen forma cuadrada.

E13: Porque en esa las líneas que van a los lados son más largas que las que vienen arriba. Unas líneas son más largas y otras más pequeñas.

E14: Profe el cubo es como un dado, entonces ese es como dibujado, el cubo se puede coger y ese no (min 46)

A parte de las características ya mencionadas que se pueden encontrar en las estructuras de los tanques, los estudiantes dan cuenta de otras, como son:

E18: Diagonales.

E13: Tiene forma de triángulo, pero sin la punta (Ver figura 29)



Figura 29 Tanque de abastecimiento de agua (Pequeño)

E14: Las patas están derechitas

E7: Tiene rectángulos

E18: Forman un cubo, se parece a una caja (Ver figura 30)



Figura 30 Tanque de abastecimiento de agua (Grande)

Desde la representación gráfica se evidencia la aprensión de conceptos que se van volviendo relevantes para los estudiantes en el transcurso de la primera situación.

P: ¿Usted qué tuvo en cuenta para realizar estos gráficos? ¿En qué pensó?

E5: En el stand, cuando fuimos al stand.

E14: Tuvimos en cuenta como eran los tanques para hacerlos ahí (señala las hojas).

E5: El tanque pequeño se cruzaba, cuando subían las barras se cruzaban y en el tanque grande que tienen varias líneas paralelas.

P: Que tuvo en cuenta para realizar el dibujo (Ver figura 31).

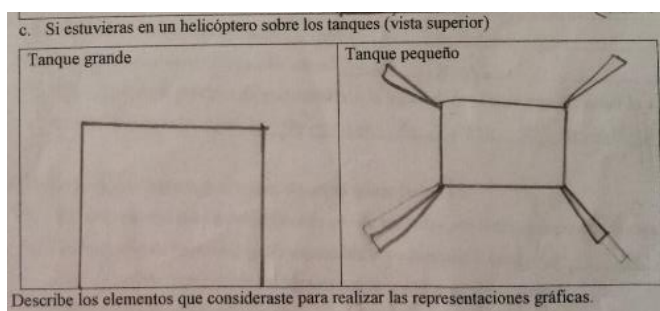


Figura 31 Actividad resuelta por los estudiantes

E20: Las patas. Que son torcidas

P: ¿Este qué tanque es?

E1: Este es el tanque pequeño

P: ¿Y desde dónde lo estarías mirando?

E1: Desde el cielo

P: ¿Y por qué a este se le ven las patas y a este no? (señala la profe los dibujos del estudiante)

E1: Porque están lejos

E6: Porque el grande tiene las patas rectas y el torcido no (min 87).

SITUACIÓN 2

Para el desarrollo de esta actividad se toma como referencia la manipulación de un prisma rectangular representado en una caja de jugo, enfocándose principalmente en las características de la misma.

Tabla 9 Resultados de la aplicación situación 2. Actividad 1

SITUACIÓN 2 – ACTIVIDAD 1

1. Características generales del prisma			
a. ¿Cuántas caras tiene la caja de jugo?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que identifican seis caras en la caja del jugo.	20	20/20	100
b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la caja del jugo?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que responden que tienen forma rectangular	18	18/20	90
R2: Estudiantes que responden que forman ángulos	1	1/20	5
R3: Estudiantes que responden que forman caras	1	1/20	5
c. ¿Cuántas aristas tiene la caja?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que reconocen doce aristas	19	19/20	95
R2: Estudiantes que reconocen ocho aristas	1	1/20	5
d. ¿Cuántos vértices tiene la caja?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que dan cuenta de ocho vértices en la caja	19	19/20	95
R2: Estudiantes que dan cuenta de un que un vértice es plano	1	1/20	5
e. ¿Cómo son las superficies de las caras?	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que identifican que las superficies de las caras son planas	16	16/20	80

R2: Estudiantes que identifican que las superficies de las caras son rectangulares	4	4/20	20
--	---	------	----

f. ¿Qué nombre tiene la figura de la caja de jugo de acuerdo a las características encontradas?

R1: Estudiantes que nombran la figura de la caja de jugo como un prisma rectangular	19	19/20	95
---	----	-------	----

R2: Estudiantes que nombran la figura de la caja de jugo como un prisma	1	1/20	5
---	---	------	---

2. Características de la cara principal

a. ¿Qué elementos geométricos se forman con la unión de dos segmentos?

R1: Estudiantes que identifican los elementos geométricos como ángulos rectos	15	15/20	75
---	----	-------	----

R2: Estudiantes que identifican los elementos geométricos como triángulos	1	1/20	5
---	---	------	---

R3: Estudiantes que identifican los elementos geométricos como ángulos	4	4/20	20
--	---	------	----

b. ¿Qué tipo de ángulo forman los segmentos que se cortan?

R1: Estudiantes que reconocen los ángulos como rectos	8	8/20	40
---	---	------	----

R2: Estudiantes que reconocen los ángulos como rectángulos	1	1/20	5
--	---	------	---

R3: Estudiantes que reconocen que hay ángulos cuando los segmentos se cruzan	8	8/20	40
--	---	------	----

R4: Estudiantes que no reconocen ángulos como dos segmentos que se cruzan	3	3/20	15
---	---	------	----

c. ¿Cómo es la distancia entre los segmentos que no se cortan?	FA	FR	%
---	-----------	-----------	----------

R1: Estudiantes que identifican que los segmentos se encuentran a la misma distancia.	6	6/20	30
---	---	------	----

R2: Estudiantes que identifican los segmentos como perpendiculares.	9	9/20	45
---	---	------	----

R3: Estudiantes que no identifican características entre los segmentos	5	5/20	25
--	---	------	----

d. ¿Qué tipo de ángulo forma los segmentos que se cortan?	FA	FR	%
--	-----------	-----------	----------

R1: Estudiantes que reconocen que el tipo de ángulo formado es un ángulo recto	12	12/20	60
--	----	-------	----

R2: Estudiantes que no reconocen el tipo de ángulo formado	8	8/20	40
--	---	------	----

e. ¿Cómo es la distancia entre los segmentos que no se cortan?	FA	FR	%
---	-----------	-----------	----------

R1: Estudiantes que dan cuenta que la distancia entre los segmentos que no se cortan es paralela	17	17/20	85
--	----	-------	----

R2: Estudiantes que dan cuenta que la distancia entre los segmentos que no se cortan es secante	3	3/20	15
---	---	------	----

f. ¿Qué nombre reciben los lados (segmentos) que conservan la misma distancia en todos sus puntos?	FA	FR	%
---	-----------	-----------	----------

R1: Estudiantes que nombran los lados (segmentos) que conservan la misma distancia como paralelos	18	18/20	90
---	----	-------	----

R2: Estudiantes que nombran los lados (segmentos) que conservan la misma distancia como perpendiculares	2	2/20	10
---	---	------	----

g. ¿Qué nombre reciben los lados (segmentos) que se cortan con un ángulo de 90°?	FA	FR	%
---	-----------	-----------	----------

R1: Estudiantes que nombran los lados (segmentos) que se cortan como perpendiculares.	10	10/20	50
---	----	-------	----

R2: Estudiantes que nombran los lados (segmentos) que se cortan como ángulos rectos	4	4/20	20
---	---	------	----

R3: Estudiantes que nombran los lados (segmentos) que se cortan como paralelos	6	6/20	30
--	---	------	----

3. Representación gráfica de las figuras

a. Gráfica de vista frontal	FA	FR	%
------------------------------------	-----------	-----------	----------

R1: Estudiantes que grafican la vista frontal de acuerdo a sus características	20	20/20	100
--	----	-------	-----

b. Gráfica de vista lateral

R1: Estudiantes que grafican la vista lateral de acuerdo a sus características	20	20/20	100
--	----	-------	-----

c. Gráfica de vista superior

R1: Estudiantes que grafican la vista superior de acuerdo a sus características	20	20/20	100
---	----	-------	-----

d. Gráfica en perspectiva

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que grafican adecuadamente el prisma en perspectiva	11	11/20	55
R2: Estudiantes que no grafican de manera adecuada prismas en perspectiva	9	9/20	45

Análisis: Situación 2 – Actividad 1

Mediante esta actividad se movilizaron características y componentes presentes en los prismas tales como segmentos paralelos y perpendiculares, ángulos, vértices y aristas, además de las respectivas representaciones gráficas de sus vistas (isométricos) y proyección ortogonal (perspectiva). Con base en los resultados obtenidos y de acuerdo a lo antes mencionado (Ver tabla 9), es de considerar que la experiencia adquirida durante la primera situación, permitió que los estudiantes relacionaran con mayor facilidad conceptos geométricos, enfocados además en los principios de actividad y realidad que permiten por medio de la manipulación de objetos del entorno inmediato (Ver figura 28), identificar entre otros que con la unión de dos segmentos se forman ángulos, los cuales cumplen con características de ser secantes o perpendiculares según su amplitud. Sin embargo, se sigue evidenciando que en un 20% de los estudiantes, se presentan algunas confusiones relacionadas con el tipo de ángulo que se forma entre segmentos que se cortan y cuál es la distancia entre segmentos que no se cortan.

A continuación, se observan algunas representaciones gráficas realizadas por los estudiantes (ver figura 32).

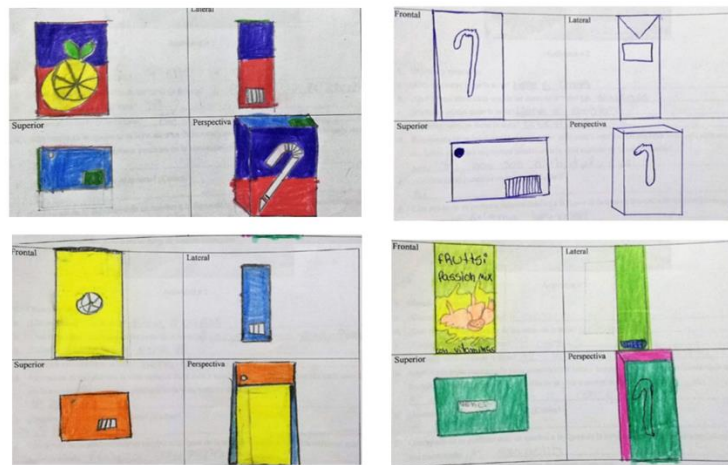


Figura 32 Actividad resuelta por los estudiantes

En el diálogo registrado en esta sesión de clase se puede evidenciar la apropiación y utilización de conceptos sobre los cuales no había claridad al principio.

P: ¿Qué es una figura tridimensional? (Min 3,35).

E14: Una caja

E7: Que tiene dos lados más grandes que otro

P: ¿Entonces un cubo no es una figura tridimensional?

E13: Una figura que se puede coger, no como los dibujos que no se pueden coger. (Min 4,18).

E19: O como algo que no es así planito, planito, sino que tiene algunas orillitas

Se retoman conceptos de la situación 1 para ver si los estudiantes se apropiaron adecuadamente de estos, evidenciándose lo siguiente:

P: ¿Cuántas caras tiene la caja?

E19: Tiene dos

El estudiante señala la parte superior e inferior de la caja, dando a entender que su concepto de cara son las bases de la caja. A lo que los demás compañeros niegan dicha concepción argumentando que son seis, acto seguido cuentan una a una las caras y demuestran lo aprendido.

P: ¿Cuál es la diferencia entre cuadrado y rectángulo?

E13: Que el cuadrado tiene todos los lados iguales y el rectángulo no, el rectángulo tiene dos lados más largos que los otros.

P: Entonces esta caja ¿tiene cuadrados en alguna parte?

Todos: No

E18: Todos son rectángulos

P: ¿Cuántas aristas tiene la caja?

E6: 12

E7: Tiene 16

E9: Para que diera 16 tendría que tener otras cuatro aristas. Profe la respuesta está en las tablas de multiplicar

P: Muy bien, ¿entonces es múltiplo de qué?

E9: De tres. A no de cuatro

P: ¿Cuántos vértices tiene la caja?

E14: 8

E6: 6

Se puede afirmar que algunos de los estudiantes aun confunden caras, con aristas y vértices. A lo cual hay que seguir enfatizando en la importancia de estos para poder caracterizar y posteriormente graficar de manera correcta.

P: Geométricamente hablando ¿cómo creen que se llama esta caja? (Min 16).

E14: ¿Cubo?

P: ¿Cuál es la diferencia entre un cubo y la caja de jugo?

E13: Profe que el cubo tiene todos los lados iguales a cambio el otro no.

E18: Si lo cortaran

E20: La caja es más compuesta

E14: Uno es más grande que el otro

E9: Es casi como un cubo, sino que es un poquito más ancho y un poquito más alto.

P: o sea que si un cubo lo ponemos más ancho y más alto. ¿sigue siendo un cubo?

E18: No

E9: Casi un cubo

E18: Profe es un rectángulo

P: Y que nombre tiene esta caja

E19: Caja rectangular

P: No, pero es rectangular. Esto se llama un prisma.

E19: Prisma rectangular

Para continuar con la caracterización de las formas y las figuras no se puede pasar por alto los ángulos y su importancia a la hora de graficar.

P: ¿Qué elementos geométricos se forman con la unión de dos segmentos?

E13: Puede formarse un ángulo

E18: Una equis

E14: Un ángulo recto

E7: Secantes

E8: Ángulo giro

E18: Vértice

Situación 2 - Actividad 2

Esta actividad se desarrolla en dos momentos. El primero, tomando como referencia la manipulación de un prisma hexagonal representado en una torta completa, y el segundo, identificando prismas triangulares al presentar la torta de manera fraccionada (Ver figura



33)

Tabla 10 Resultados de la aplicación Situación 2. Actividad 2

SITUACION 2 - ACTIVIDAD 2			
1. Prisma hexagonal			
a. ¿Cuántas caras tiene la torta?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que reconocen ocho caras en la torta	15	15/20	75
R2: Estudiantes que reconocen seis caras en la torta	4	4/20	20
R3: Estudiantes que reconocen cinco caras en la torta	1	1/20	5

b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la torta?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que reconocen en las caras formas hexagonales y rectangulares.	6	6/20	30
R2: Estudiantes que reconocen en las caras formas rectangulares	9	9/20	45
R3: Estudiantes que reconocen en las caras formas hexagonales	3	3/20	15
R4: Estudiantes que reconocen en las caras formas triangulares	1	1/20	5
R5: Estudiantes que reconocen en las caras formas como rectángulos y octángulos.	1	1/20	5

c. ¿Cuántas aristas tiene la torta?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que dan cuenta de dieciocho aristas en la torta	18	18/20	90
R2: Estudiantes que dan cuenta de doce aristas en la torta	1	1/20	5
R3: Estudiantes que dan cuenta de dieciséis aristas en la torta	1	1/20	5

d. ¿Cuántos vértices tiene la torta?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que reconocen dieciocho vértices en la torta	18	18/20	90
R2: Estudiantes que reconocen doce vértices en la torta	2	2/20	10

e. ¿Existen segmentos paralelos en la vista superior de la torta? ¿Cuáles?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que encuentran tres pares segmentos paralelos	8	8/20	40
R2: Estudiantes que encuentran cuatro segmentos paralelos	5	5/20	25
R3: Estudiantes que llaman hexágono a los segmentos paralelos	4	4/20	20
R4: Estudiantes que llaman paralelos a los segmentos	3	3/20	15

f. Existen caras paralelas en la torta ¿Cuáles?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que dan cuenta de paralelismo en las caras	19	19/20	95
R2: Estudiantes que no dan cuenta de paralelismo en la torta	1	1/20	5

g. ¿Qué nombre recibe la figura de la torta de acuerdo a las características encontradas?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que nombran la figura de la torta como prisma hexagonal	12	12/20	60
R2: Estudiantes que nombran la figura de la torta como hexágono	3	3/20	15
R3: Estudiantes que nombran la figura de la torta como prisma	3	3/20	15
R4: Estudiantes que nombran la figura de la torta como segmento	2	2/20	10

2. Una vez fraccionada la torta de manera triangular se procede.

a. ¿Qué características geométricas se observan ahora en la vista superior?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que nombran como característica geométrica su similitud con un triángulo	19	19/20	95

R2: Estudiantes que nombran como característica geométrica su similitud con ángulos	1	1/20	5
---	---	------	---

b. ¿Cómo es la amplitud de los ángulos de la nueva forma según la medida de sus lados?

R1: Estudiantes que reconocen ángulos agudos	7	7/20	35
--	---	------	----

R2: Estudiantes que dieron respuesta sobre la medida de los lados mas no de los ángulos	13	13/20	65
---	----	-------	----

c. ¿Cuántas caras tiene la nueva figura?

R1: Estudiantes que reconocen cinco caras	16	16/20	80
---	----	-------	----

R2: Estudiantes que reconocen seis caras	3	3/20	15
--	---	------	----

R3: Estudiantes que reconocen ocho caras	1	1/20	5
--	---	------	---

d. ¿Cuántas aristas tiene la nueva figura?

R1: Estudiantes que reconocen nueve aristas en la figura	19	19/20	95
--	----	-------	----

R2: Estudiantes que reconocen seis aristas en la figura	1	1/20	5
---	---	------	---

e. ¿Cuántos vértices tiene la nueva figura?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que reconocen seis vértices en la figura	17	17/20	85
R2: Estudiantes que reconocen dieciséis vértices en la figura	2	2/20	10
R3: Estudiantes que reconocen un vértice en la figura	1	1/20	5

f. ¿Identificas caras paralelas o perpendiculares en la figura?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que identifican las caras de arriba y abajo como paralelas	11	11/20	55
R2: Estudiantes que no identifican caras paralelas	9	9/20	45

g. ¿Qué nombre recibe esta nueva figura?

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que dan el nombre de prisma triangular	20	20/20	100

3. Representación gráfica de la torta

a. Vista frontal del prisma hexagonal

	<i>FA</i>	<i>FR</i>	%
R1: Estudiantes que representan gráficamente la vista frontal del prisma hexagonal	16	16/20	80
R2: Estudiantes que se les dificulta representar gráficamente la vista frontal del prisma hexagonal	4	4/20	20

b. Vista lateral del prisma hexagonal	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan gráficamente la vista lateral del prisma hexagonal	14	14/20	70
R2: Estudiantes que se les dificulta representar gráficamente la vista lateral del prisma hexagonal	6	6/20	30
c. Prisma hexagonal en perspectiva	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan el prisma hexagonal en perspectiva	9	9/20	45
R2: Estudiantes que se les dificulta representar el prisma hexagonal en perspectiva	11	11/20	55
4. Representación gráfica de la fracción de la torta			
a. Vista superior del prisma triangular	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan gráficamente la vista superior del prisma triangular	16	16/20	80
R2: Estudiantes que se les dificulta representar gráficamente la vista superior del prisma triangular	4	4/20	20
b. Vista frontal del prisma triangular	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan gráficamente la vista frontal del prisma triangular	6	6/20	30
R2: Estudiantes que se les dificulta representar gráficamente la vista frontal del prisma triangular	14	14/20	70
c. Vista lateral del prisma triangular	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan gráficamente la vista lateral del prisma triangular	16	16/20	80
R2: Estudiantes que se les dificulta representar gráficamente	4	4/20	20

la vista lateral del prisma triangular

d. Prisma triangular en perspectiva	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan el prisma triangular en perspectiva	11	11/20	55
R2: Estudiantes que se les dificulta representar el prisma triangular en perspectiva	9	9/20	45

Análisis: situación 2 – Actividad 2

Durante la aplicación de esta actividad se pretendió que los estudiantes estuvieran en la capacidad de reconocer características de formas y figuras geométricas, comprendiendo la diferencia entre lado y arista, plano y volumen, paralelas y secantes, además de poder representar graficamente los diferentes prismas desde tres de vistas. Aunque se obtuvo una gran favorabilidad en estas, se sigue encontrando errores y dificultades, que se han convertido en obstáculos al momento de la caracterizar sólidos.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la tabla se observa que los estudiantes siguen cometiendo el error de confundir la amplitud de los ángulos con la medida de los lados del triángulo. Además, presentaron dificultad en la representación gráfica tanto del prisma hexagonal como del triangular, evidenciado en los siguientes porcentajes:

Prisma hexagonal en perspectiva; el 55% de los estudiantes presenta dificultad al representar la torta entera de forma gráfica.

Vista frontal del prisma triangular; el 70 % de los estudiantes presentan dificultad al representar gráficamente la vista frontal de la torta fraccionada.

Lo anterior se puede evidenciar en las actividades resueltas por los estudiantes (Ver figuras 34 y 35)

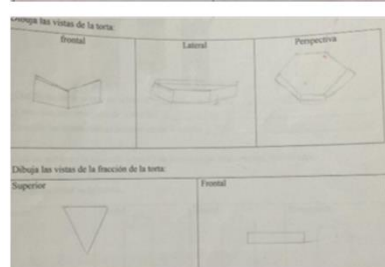
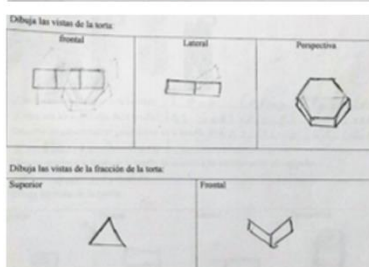
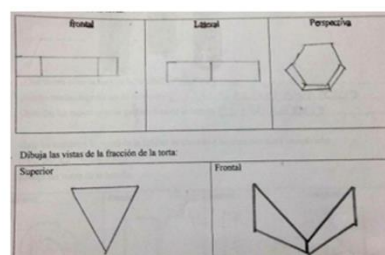
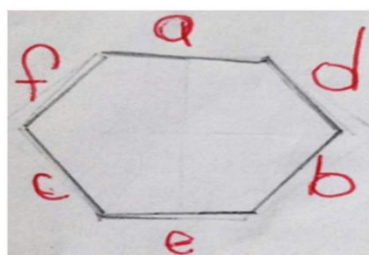


Figura 354 Actividad resuelta por los estudiantes

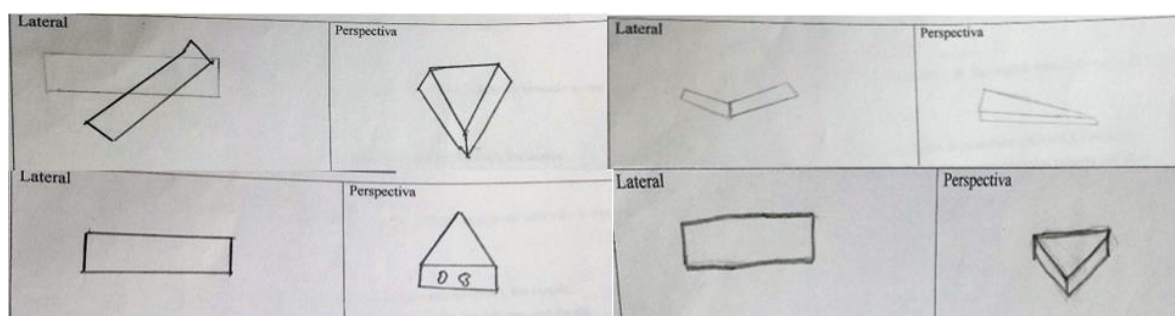


Figura 345 Actividad resuelta por los estudiantes

Continuando con esta actividad y para dar soporte a los resultados obtenidos en la tabla 4 se toman fragmentos del video tres, donde los estudiantes realizan importantes aportes a la investigación.

E7: ¿Existen caras paralelas en la torta? (8.52 min)

E19: Si

Ya sabiendo que una caja representa un prisma los estudiantes sacan la conclusion de que la torta es un prisma hexagonal, determinan que tiene 8 caras, 12 vertices y despues de mucho debatir entre ellos concluyen que hay 18 aristas y que un lado de la torta tambien es una cara.

Al fraccionar la torta en sectores triangulares los estudiantes afirman que:

E18: Parece una piramide. Es como una piramide (24,19 min)

P: No es una piramide.

E18: Uno suele decir que es una piramide

E19: Es un prisma triangular

Situación 2 - Actividad 3

Esta última actividad se realiza en grupos de 4 estudiantes, quienes relacionan por medio de una nueva figura las características y sus propiedades, estableciendo de manera acertada la diferencia entre distintos sólidos o cuerpos geométricos.

Tabla 11 Resultados de la aplicación Situación 2 Actividad 3

SITUACIÓN 2 - ACTIVIDAD 3			
1. Características de los cilindros			
a. ¿Qué forma tiene la base de la botella?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que reconocen la base de la botella como un círculo	15	15/20	75
R2: Estudiantes que reconocen la base de la botella como un cilindro	5	5/20	25
b. ¿Cómo son las superficies de la botella?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que nombran la superficie como curva o redonda	16	14/20	80
R2: Estudiantes que nombran la superficie como círculos.	4	4/20	20

c. ¿Qué características geométricas se encuentran en la botella?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que describen la botella como cilindro con dos bases	9	9/20	45
R2: Estudiantes que describen la botella como cilindro circular	6	6/20	30
R3: Estudiantes que describen la botella como larga y ancha	4	4/20	20
R4: Estudiantes que describen la botella como alargada y paralela	1	1/20	5

d. ¿Qué nombre recibe la figura de la botella de acuerdo a las características identificadas?	FA	FR	%
R1: Estudiantes que nombran la figura como cilindro	13	13/20	65
R2: Estudiantes que nombran la figura cilindro circular	1	1/20	5
R3: Estudiantes que nombran la figura como prisma circular	6	6/20	30

2. Representa gráficamente la figura

a. Vista superior	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan gráficamente la vista superior del cilindro	19	19/20	95
R2: Estudiantes que no representan gráficamente la vista superior del cilindro	1	1/20	5
b. Vista frontal	FA	FR	%
R1: Estudiantes que representan gráfica mente la vista frontal	17	17/20	85

del cilindro

R2: Estudiantes que no representan gráficamente la frontal superior del cilindro 3 3/20 15

Análisis: Situación 2 – Actividad 3

Durante la aplicación de esta actividad se movilizaron conceptos geométricos, que permiten encontrar y reafirmar similitudes y diferencias entre los siguientes conceptos: cuadrado y rectángulo, cara y base, rectas paralelas y secantes, bidimensionalidad y tridimensionalidad. Durante el proceso realizado los estudiantes evidencian progreso en su percepción espacial o visualización tal como se plasma en la solución de esta actividad (Ver figura 36), y el diálogo registrado a continuación.

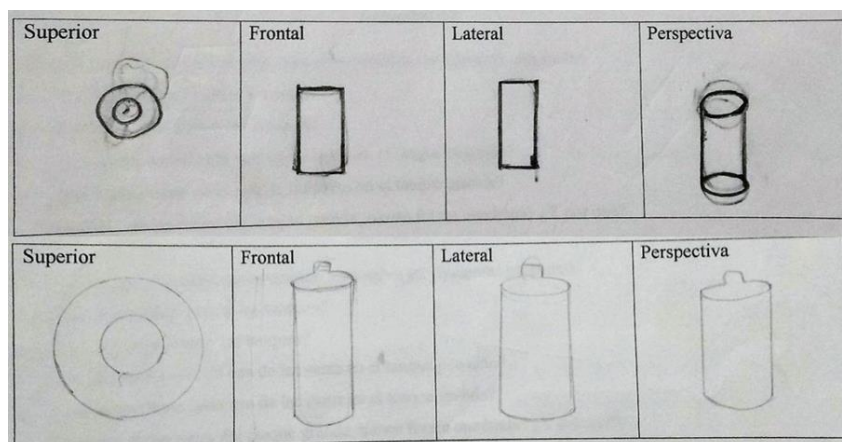


Figura 36 Actividad resuelta por los estudiantes

E14: Describe las características geométricas de la botella. Son que acá es como un cilindro, tiene tres caras esta (señala el cuerpo del cilindro), la de abajo y la superior (min 6,14).

Conciderando este dialogo es posible evidenciar que el niño llama cara a la base plana y a la circular, mostrando que asocia la noción de “cara” con superficie.

El niño continua con la lectura.

E14: profe aquí dice: dale un nombre a la figura de la botella de acuerdo a las características identificadas “tiene volumen entonces podría ser un prisma redondo”(min 10,40).

El niño relaciona el concepto de volumen con el espacio que ocupa el cuerpo. No se hace evidente el objetivo de comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes.

La docente procede a explicar (reinención guiada) en el grupo con un objeto del salón la diferencia entre prisma y cilindro.

En otro grupo surge la misma inquietud acerca del prisma, al mencionar las características que tiene la botella que está en sus manos

E10: Profe, también es un prisma circular (min 13,50)

P: ¿Qué características tienen los prismas?

E10: Los prismas tienen las bases iguales. Este tiene la misma forma la base y la superficie de arriba y así es un prisma.

P: Al retomar la primera activada “la de la caja de jugo” se hace referencia a un prisma y sus características, pero ¿Cuál es la diferencia entre ese prisma y esta botella? (min 14,33)

Los estudiantes analizan la situación y se dan cuenta que los prismas tienen caras planas, mientras que el cilindro no. Toman varios ejemplos con otros objetos que tienen en sus cartucheras como lapices de colores y borradores.

4.2 CONCLUSIONES

Las conclusiones presentadas en el siguiente apartado, se determinan considerando tanto el objetivo general como los objetivos específicos, planteados al inicio de la investigación.

Respecto al objetivo específico N° 1

“Documentar desde la propuesta curricular del MEN, las matemáticas y su didáctica, el correcto uso de las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional” es de considerar que:

En primer lugar, para el profesor enfrentarse a determinado objeto de estudio, en este caso, el área de matemáticas, específicamente en los sistemas geométricos desde el desarrollo del pensamiento espacial, resulta fundamental el conocimiento primero de tipo curricular, esto a la luz de los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), fundamentan las competencias que deben ser desarrolladas en los estudiantes a través de los Estándares Básicos del MEN (2006). A su vez, y teniendo en cuenta dichos referentes, se toman en consideración los DBA (2017) propuestos por el MEN, los cuales guían los procesos de enseñanza determinando así, los conocimientos básicos que deben adquirir los estudiantes a través del proceso de formación, además del PEI de la Institución.

En segundo lugar, resulta imprescindible para el profesor tener en cuenta aspectos de tipo matemático, desde la geometría EUCLIDIANA, basadas en Barnett - Uribe (1988) y Cardona, A (1974), que permiten un dominio de la misma, en la medida en que mayor apropiación se tenga del objeto a trabajar, muy probablemente se podrá realizar un mejor acompañamiento en los procesos de enseñanza - aprendizaje.

Por último, es necesario destacar la importancia de la didáctica de las matemáticas, que permite a través de métodos y técnicas desarrollar estrategias que proporcionan al estudiante una adecuada construcción de conocimientos, es desde allí que surge esta propuesta de aula que posibilita además conocer los obstáculos, errores o dificultades que se pueden encontrar en el aprendizaje.

Así pues, tomar en consideración los tres aspectos anteriormente mencionados proporciona al docente la propiedad para llevar a cabo procesos de aprendizaje en el aula, con el fin de alcanzar objetivos específicos, logrando desarrollar en el estudiante las competencias matemáticas, tecnológicas, científicas, lingüísticas y ciudadanas (MEN 2006).

Respecto al objetivo específico N° 2

“Articular en una propuesta de aula y desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) los elementos curriculares, matemáticos y didácticos que favorezcan la construcción de representaciones bidimensionales del espacio tridimensional”

Para dar respuesta a este, se tuvo en consideración:

La construcción de rejillas que integran la EMR con elementos curriculares, disciplinares y didáctico, a través de objetivos planteados que permiten la representación bidimensional del espacio tridimensional a partir de la visualización del entorno, esto con el fin de realizar construcciones gráficas que aportan en gran medida el reconocimiento de características de formas y figuras geométricas. Con estas se fundamenta la creación de la propuesta de aula, movilizandolos principios de actividad, realidad y niveles propuestos por Freudenthal, que permiten acercar las matemáticas al estudiante basado en situaciones del contexto.

A partir de las rejillas se realiza la construcción de la propuesta de aula llamada “Caminando plano sobre un mundo tridimensional” que consta de dos situaciones.

Respecto al objetivo específico N° 3

“Identificar en los resultados obtenidos producto de la implementación, algunos elementos característicos de las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional” Se concluye que...

Con los resultados obtenidos en la aplicación de la propuesta de aula que moviliza el desarrollo del pensamiento geométrico, resaltando habilidades y destrezas de tipo cognitivo tales como: rectas paralelas, secantes y perpendiculares, vértice, ángulos, lados, aristas, caras, base, altura, polígonos y poliedros. Se evidenció el reconocimiento de las características de formas y figuras, permitiendo representar bidimensionalmente el espacio tridimensional por medio de los sentidos. Gracias a ello y con base en el desarrollo de prácticas orientadas en la visualización de objetos, empleando diversas estrategias, se potencia la percepción espacial, logrando de esta manera identificar las diferencias entre formas bidimensionales y figuras tridimensionales.

Respecto al objetivo general

“Determinar en qué medida desde la matematización los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Julio Cesar Zuluaga logran representar bidimensionalmente el espacio tridimensional” se puede concluir:

Desde la primera situación planteada en la propuesta de aula y partiendo de tres de los principios de la EMR (actividad, realidad y niveles) resulta evidente que, si bien los tanques de agua de la comunidad de tres esquinas están presentes en el entorno de los estudiantes, siendo fácilmente visibles, éstos no pueden ser manipulados, lo cual presenta dificultades en la apropiación y reconocimiento de características geométricas, además, de generar obstáculos en la representación gráfica de figuras tridimensionales.

Considerando lo anterior, en cuanto a la comparación y clasificación de formas bidimensionales según sus componentes (ángulos, vértices) y sus propiedades (caras y lados), el 60% de los estudiantes identifican en su entorno características de figuras geométricas, relacionando objetos y dando cuenta de elementos matemáticos presentes como la clasificación de cuadriláteros según la medida de sus lados (cuadrado y rectángulo), vértice y arista; identificando en el mundo real aristas y en el plano vértices. El 40% presenta dificultades al identificar características de los ángulos (agudos, rectos y obtusos), presentes en la forma que tienen los soportes de los tanques con relación al suelo, lo cual se ve reflejado en la representación inadecuada de las gráficas.

En la segunda situación, se observa el principio de actividad; como una forma de aprender haciendo, lo cual se evidencia mediante la visualización y manipulación de objetos por medio de prismas (caja de jugo y torta) y cilindros (termos de agua y enlatados), que permitieron la apropiación de conceptos básicos en geometría tales como; caras, segmentos paralelos y perpendiculares, ángulos, vértice y aristas, además de sus respectivas representaciones de vistas isométricas y proyección ortogonal. Seguido del principio de realidad; presentando situaciones en contextos de la vida diaria, en este caso relacionadas con actividades propias del entorno escolar, que relacionan las definiciones de los términos con esquemas mentales establecidos a través de la manipulación de figuras.

Al finalizar la última actividad se determina que el principio de niveles (situacional, referencial, general y formal) en grado cuarto alcanzó el nivel general, ya que los estudiantes lograron reconocer propiedades y características de los sólidos; ligados al uso de estrategias que le permitieron representar bidimensionalmente el espacio tridimensional; después de haber observado las representaciones gráficas, realizadas en el papel por cada estudiante, en la situación dos, se puede concluir que el 74 % grafican de manera correcta objetos tridimensionales, desarrollando destrezas como el buen manejo de instrumentos aptos en representaciones gráficas, identificación de prismas de acuerdo a sus bases e identificación de características de sólidos; además de las habilidades propias del componente espacial métrico, ampliando a su vez la capacidad de visualización y análisis; todo esto desde los principios de matematización. Por otro lado, se observa que el 26% presenta dificultades en la relación de conceptos y gráficas desde la construcción de ángulo y la representación de vistas de nuevos prismas. Es necesario que los estudiantes dibujen, construyan y produzcan, para llegar a interiorizar los conceptos.

Es muy importante destacar el aporte de los referentes teóricos ya que fueron quienes dieron fuerza y soporte a nuestra investigación, en cuanto los estudiantes a través de la observación de su espacio identificaron objetos tridimensionales, partiendo de la realidad del entorno y en particular aprovechándolo para el desarrollo de las actividades de exploración y representación de sólidos. Se evidencia la representación de figuras tridimensionales a partir de la visualización, que permitió desarrollar los procesos de describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar y probar; determinando la importancia que tienen la observación y la representación de objetos. Además, se demostró como el aprendizaje de las matemáticas resulta efectiva cuando se evita el desarrollo de actividades con base en representaciones abstractas y se apoya en representaciones donde los estudiantes puedan observar, construir, manipular y transformar.

4.4 REFLEXIÓN

Sin lugar a dudas, el ejercicio de la práctica docente representa un gran desafío en el contexto educativo y de manera puntual en lo relacionado con el aprendizaje de la

geometría. En consecuencia, vale la pena replantear otras estrategias metodológicas como las planteadas por los teóricos mencionados en la investigación, en aras de potenciar el aprendizaje desde una matemática real.

Cumpliendo lo establecido por la EMR y desde la secuencia didáctica aplicada se observa cómo cada situación conlleva un avance que permite a los estudiantes reflexionar y apropiarse de manera progresiva de conceptos acordes al nivel educativo desde lo que plantea en su normatividad el MEN.

Desde el punto de vista personal el aporte de esta investigación constituye una gran oportunidad para enfrentar nuevos desafíos en el campo profesional, lo cual trasciende en el ejercicio de la práctica docente, toda vez que a partir del ejercicio investigativo se exploran nuevas alternativas y se adquieren nuevos conocimientos.

Desde el punto de vista institucional los niños lograron fortalecer los procesos de aprendizaje de la geometría partiendo del reconocimiento de su entorno y saliéndose de las metodologías tradicionales, evidenciándose la apropiación de conceptos a partir de la realización de actividades cotidianas.

En cuanto a la propuesta de aula y de acuerdo con los resultados obtenidos se sugiere iniciar con objetos que sean fáciles de manipular como las cajas de jugo, que permitan identificar características y propiedades de los poliedros, para seguidamente realizar el trabajo con objetos que si bien se pueden visualizar no se perciben a simple vista todos sus componentes, como lo fue los tanques de abastecimiento de agua. Se hace pertinente construir situaciones que lleven al estudiante a realizar el proceso contrario trabajado en esta investigación, es decir, por medio de representaciones planas construir figuras tridimensionales, teniendo en cuenta las características y propiedades de polígonos y poliedros. Además de trabajar con poliedros y otros sólidos como pirámides, conos y esferas, realizando los respectivos gráficos, no solo desde la representación ortogonal, sino también desde la perspectiva cónica y la isométrica.

Las preguntas si bien deben apuntar a tener diversas respuestas no pueden ser tan abiertas que suelen confundir al niño, como, por ejemplo: ¿Qué significa para ti los tanques?

Se deja en consideración para futuras investigaciones seguir indagando sobre la aplicación de los principios de la EMR, haciendo énfasis especialmente en los niveles de matematización, retomadas en todos los niveles educativos, además de ser realizadas en otros contextos socio-culturales.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Barrantes, M. y Zapata E. Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo Abierto. Revista de educación. Vol 27 Núm. 1 (2008)
- Barnett - Uribe (1988), Cardona, A (1974). Algebra y Geometría 1. Editorial Mc Graw Hill
- Bartolomé (2015). Sistemas de representación en geometría descriptiva. Dibujo Técnico.com.
- Recuperado de: <http://www.dibujotecnico.com/sistemas-de-representacion-en-geometria-descriptiva/>
- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Grand N, 53, pp. 39-56. Grenoble.
- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1994). Un processus d'enseignement des angles au cycle III. Grand N, 56, pp. 69-116. Grenoble
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). Los principios de la educación matemática realista. En Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática. Compilador: Alagia, H. y otros. Editorial Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.
- Recuperado de:
- [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo teoría EMR-Final.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMER-Final.pdf)
- Bressan, A. (2016) Educación Matemática Realista, bases teóricas
- [http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo teoría EMR-Final.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMER-Final.pdf)
- Cardona, G. (2018). Orientaciones didácticas para el desarrollo de la visualización espacial mediante situaciones didácticas enfocadas al cambio entre los registros de

representación tridimensional y bidimensional alrededor de los poliedros (Tesis de Maestría en Educación) Universidad ICESI, Cali, Colombia)

Recuperado de:

https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/83949/1/T01564.pdf

Definiciones Libro XI (1997). D.E.Joyce, Clark University. Primera edición.

Recuperado de:

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/11/definicioneslibro11.htm

Fouz, F. (2006). Test geométrico, aplicando el modelo de Van Hiele.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful, Educational Studies in mathematics.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. Educational Studies in Mathematics, vol. 3 (2/4), pp. 413-435.

Freudenthal, H. (1977). Mathematics as an educational task. D. Reidel. Norwell, Massachusetts

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Galeano, J. (2015). Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento (Tesis de Maestría en educación con énfasis en educación matemática). Universidad del Valle, Cali. Colombia.

Recuperado de:

<http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9457/1/7412-0510747.pdf>

Gómez, D; Cedeño, L (2012). Propuesta de enseñanza para el paso de lo tridimensional a lo

bidimensional. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C.
Recuperado de:
http://funes.uniandes.edu.co/2573/1/Propuesta_de_ense%C3%B1anza_para_el_paso_de_lo_tridimensional_a_lo_bidimensional.pdf

Gonzato, M. (2013). Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial. (Tesis Doctoral) Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.

Recuperado de:
https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Margherita_Gonzato_tesis.pdf

Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En: Marín, M. et al. (Eds.). Investigación en Educación Matemática. Ciudad Real: SEIEM. pp. 383-392.

Gutiérrez, A. (1998), Las representaciones planas de cuerpos 3-Dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. Revista Ema 1998, Vol. 3, N° 3, 193-220

Recuperado de: <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut98a.pdf>

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. Edición original en español publicada por “una empresa docente” y el Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. en México.

ICFES (2018) Comparativo resultados Pruebas Saber 2015- 2017. Caja Siempre día E.

Lappan, G., Phillips, E. D., & Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. Mathematics Teacher , 618-623.

Leandro, C. (2009). La geometría a través del arte. Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales. Universidad de Murcia).

Recuperado de:

<https://www.um.es/documents/299436/550133/LEANDRO+BARQUERO,+CARME+N+M.pdf>

Lorenzato, S. (2015). Para aprender Matemática. Libro electrónico. Formación de profesores. Título, II. Serie.

Recuperado de:

https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=neMwDQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA8&dq=c%C3%B3mo+se+aprende+matematicas&ots=IXNSt555pR&sig=_mFRoKWi9kOjIoL0E224MpNyYBM#v=onepage&q=c%C3%B3mo%20se%20aprende%20matematicas&f=false

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de calidad. En: Área de matemáticas (pp. 61-84). Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). DBA. (2016) siempre día e.

Paniza, M. (s.f). Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas.

Recuperado de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Piaget, J. (1978) La equilibración de las estructuras cognitivas.

Socas, M (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. La educación matemática en la enseñanza secundaria. Editorial Horsori. España. pp. 125-254.

Recuperado de: <https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificultades-errores-y-obstaculos-en-el-aprendizaje-de-la-matematica.pdf>

Sordo, M. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basadas en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría. (Tesis doctoral en educación) Universidad Complutense de Madrid, España.

Recuperado de: <http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28911.pdf>

Torres, I. (2011). Historia de la Geometría y las Matemáticas. Factoria histórica

Recuperado de: <https://factoriahistorica.wordpress.com/2011/02/12/historia-de-la-geometria-y-las-matematicas/>

Van den Heuvel, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Correo del Maestro. 2009. No 160.

ANEXOS

Anexo 1 Formato secuencia didáctica - Situación 1 - Actividad 1



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA" CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 1 – Actividad 1

Pág. 1 de 2

NOMBRE: _____

Objetivo. Comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes.

El corregimiento de Tres esquinas, cuenta con dos tanques principales de acueducto (ASDAL), los cuales abastecen el fluido hídrico a las casas de la región, es de resaltar la importancia de los tanques que desde 1965 almacenan el preciado líquido. A continuación, se muestran los tanques que serán tomados como: tanque pequeño y tanque grande.



Actividad # 1

1. Observa con tus compañeros los tanques y resuelve las siguientes preguntas:
 - a. ¿Qué representan para ti los tanques? _____
 - b. ¿Cuántas caras tienen los tanques? _____
 - c. ¿Qué forma tiene cada una de las caras en el tanque pequeño? _____
 - d. ¿Qué forma tiene cada una de las caras en el tanque grande? _____
 - e. ¿Cuántas de las caras del tanque grande, tienen forma cuadrada? ¿Y por qué?



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL
Situación 1 – Actividad 1

Pág. 2 de 2

f. Escribe las características de las formas de las caras para que estas sean cuadradas.

g. ¿Cuántas aristas tiene cada uno de los tanques? _____

h. ¿Cuántas esquinas o vértices tienen cada tanque? _____

2. Ahora observa la estructura que soporta cada uno de los tanques y resuelve:

a. Compara la posición de las patas de los dos tanques y describe cada uno de ellos.

b. ¿Al prolongar las patas de los soportes de cada uno de los tanques es posible que alguno de ellos se cruce? _____

c. ¿Cómo es la distancia entre las patas del tanque grande? _____

d. ¿Por qué crees que en el tanque grande las patas no se cruzan? _____

e. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a las características encontradas en la posición de las patas en ambos tanques y describe cada una de ellas. _____

f. ¿Cómo son los lados del tanque grande con relación a las patas de su soporte? _____

g. ¿Cómo son los lados del tanque pequeño con relación a las patas de su soporte? _____

h. ¿Cómo es la base del tanque grande respecto a la posición de sus patas? _____

i. ¿Cómo es la base del tanque pequeño respecto a la posición de sus patas? _____

j. ¿Qué tipo de ángulo se forma entre la base del tanque grande y una de sus patas? _____

k. ¿Qué tipo de ángulo se forma entre la base del tanque pequeño y una de sus patas? _____

l. ¿Qué ángulo forman los soportes del tanque grande con relación al suelo? _____

m. ¿Qué ángulo forman los soportes del tanque pequeño con relación al suelo? _____



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 1 – Actividad 2

Pág. 1 de 1

NOMBRE: _____

1. Realiza una representación gráfica de cada uno de los tanques desde las siguientes posiciones:

a. Mirando hacia las oficinas (vista frontal)

Tanque grande	Tanque pequeño

b. Desde la carretera (vista lateral)

Tanque grande	Tanque pequeño

c. Si estuvieras en un helicóptero sobre los tanques (vista superior)

Tanque grande	Tanque pequeño

2. Describe los elementos que consideraste para realizar las representaciones gráficas.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 2 – Actividad 1

Pág. 1 de 2

NOMBRE: _____

Objetivo: Representar de manera bidimensional el espacio tridimensional a partir de la visualización de objetos reales.

1. Observa la figura y responde:

- ¿Cuántas caras tiene la caja de jugo? _____
- ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la caja de jugo? _____
- ¿Cuántas aristas tiene la caja? _____
- ¿Cuántos vértices tiene la caja? _____
- ¿Cómo son las superficies de las caras? _____
- Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la caja de jugo de acuerdo a las características que has encontrado. _____

2. Ubica la caja de manera que la cara principal quede frente a ti.

- Nombre con una letra minúscula cada uno de los lados que forma esa cara de la caja
- Con la ayuda de tu profesor dale un nombre a los lados de la caja. _____
- ¿Qué elementos geométricos se forman con la unión de dos segmentos?

- ¿El segmento a y el b se cortan? Si ☐ No ☐ En caso de que se corten ¿qué tipo de ángulo forma?

- En caso de que no se corten ¿cómo es la distancia entre ellos?

- ¿El segmento a y el c se cortan? Si ☐ No ☐ En caso de que se corten ¿qué tipo de ángulo forma?

- En caso de que no se corten ¿cómo es la distancia entre ellos?

- ¿Qué nombre reciben los lados (segmentos) que conservan la misma distancia en todos sus puntos?

- ¿Qué nombre reciben los lados (segmentos) que se cortan con un ángulo de 90° ?

3. Dibuja las vistas indicadas.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 2 – Actividad 1

Pág. 2 de 2

3. Dibuja las vistas indicadas.

Frontal	Lateral
Superior	Perspectiva



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 2 – Actividad 2

Pág. 1 de 3

NOMBRE: _____

1. Observa y responde:

- a. ¿Cuántas caras tiene la torta?

- b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la torta?

- c. ¿Cuántas aristas tiene la torta? _____ -

- d. ¿Cuántos vértices tiene la torta?

- e. Representa en tu cuaderno la vista superior de la torta y nombra con una letra minúscula cada uno de los lados. ¿Existen segmentos paralelos en la vista superior de la torta? ¿Cuáles?

- f. ¿Existen caras paralelas en la torta? ¿Cuáles?

- g. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la torta de acuerdo a las características que has encontrado.

2. Dibuja las vistas de la torta según corresponda:

Frontal	Lateral	Perspectiva



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 2 – Actividad 2

Pág. 2 de 3

3. Observa y responde:

Si la torta se fracciona de manera triangular

- a. ¿Qué características geométricas se observan ahora en la vista superior?

- b. ¿Cómo es la amplitud de los ángulos de la nueva forma? ¿Cómo es la medida de sus lados?

Observa las características geométricas en cada una de las fracciones de torta obtenidas

- c. ¿Cuántas caras tiene la nueva figura? _____

- d. ¿Cuántas aristas tiene la nueva figura? _____

- e. ¿Cuántos vértices tiene la nueva figura? _____

- f. ¿Identificas caras paralelas o perpendiculares? _____

- g. Con ayuda de tu profesor dale un nombre al corte de las caras de las figuras. Teniendo en cuenta que una cara es un plano.

- h. ¿Qué nombre recibe esta nueva figura? _____



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO SOBRE UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Situación 2 – Actividad 3

Pág. 1 de 1

NOMBRE: _____

1. Observa y responde:

- a. ¿Qué forma tiene la base de objeto? _____
- b. ¿Cómo son las superficies del objeto? _____
- c. Describe las características geométricas del objeto _____
- d. Dale un nombre al sólido seleccionado de acuerdo a las características identificadas.

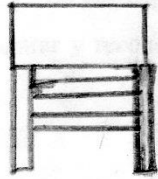
2. Dibuja las vistas de dicho sólido.

Superior	Frontal	Lateral	Perspectiva

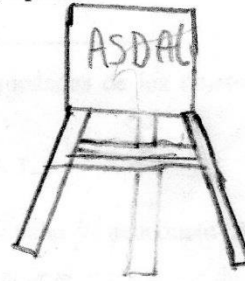


INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

Tanque grande

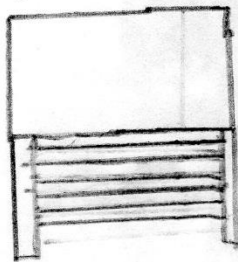


Tanque pequeño

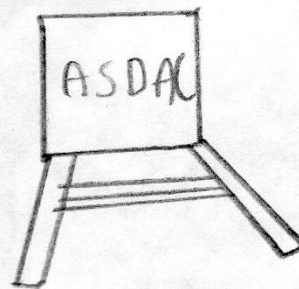


b. Desde la carretera (vista lateral)

Tanque grande

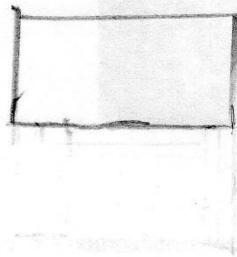


Tanque pequeño

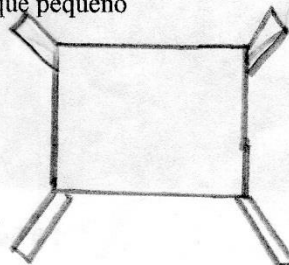


c. Si estuvieras en un helicóptero sobre los tanques (vista superior)

Tanque grande



Tanque pequeño



2. Describe los elementos que consideraste para realizar las representaciones gráficas.

como muchos habites

- 1R= para mí representa una vida de puta.
- 2R= los dos tanques tienen 6 caras.
- 3R= tiene forma cuadrada.
- 4R= tiene forma rectangular.
- 5R= ninguna porque todas tienen forma rectangular.
- 6R= tiene que tener los lados y los ángulos iguales.
- 7R= tienen 12 aristas.
- 8R= tienen 12 esquinas cada uno.
- 9R= el tanque grande tiene las patas que no se cruzan y las que si se cruzan son las del tanque pequeño.
- 10R= sí el del tanque pequeño entonces es una pata que se ha cruzado.
- 11R= la distancia de las patas es igual.
- 12R= porque algunas son paralelas y la otra no y la patada no se cruzan.
- 13R= dos líneas que están en la misma distancia y no se cruzan se llaman paralelas y las que se cruzan se llaman secantes.
- 14R= son rectas. son perpendiculares.
- 15R= son como un triángulo si punto.
- 16R= son líneas rectas.
- 17R= son triángulos.
- 18R= un ángulo recto.
- 19R= un ángulo obtuso.
- 20R= es un recto.
- 21R= un ángulo obtuso.

12



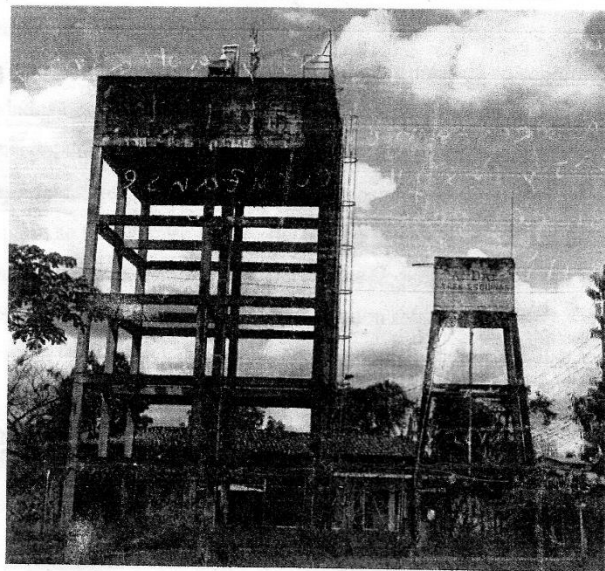
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

NOMBRE: Maria Zoraida Mondragon Marin

Objetivo. Comparar y reconocer las características y propiedades de los objetos físicos de acuerdo a sus componentes.

SITUACIÓN 1.

El municipio de Tres esquinas, cuenta con dos tanques principales de acueducto (ASDAL), los cuales abastecen el fluido hídrico a las casas de la región, es de resaltar la importancia de los tanques que desde 1965 almacenan el preciado líquido. A continuación, se muestran los tanques que serán tomados como: tanque pequeño y tanque grande.



Actividad # 1

1. Observa con tus compañeros los tanques y resuelve las siguientes preguntas:
 - a. ¿Qué representan para ti los tanques?
 - b. ¿Cuántas caras tienen los tanques?
 - c. ¿Qué forma tiene cada una de las caras en el tanque pequeño?
 - d. ¿Qué forma tiene cada una de las caras en el tanque grande?
 - e. ¿Cuántas de las caras del tanque grande, tienen forma cuadrada? ¿Y por qué?
 - f. Escribe las características de las formas de las caras para que estas sean cuadradas.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

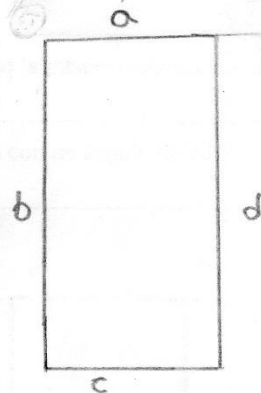
Maria Camila Mondragón Matín

SITUACIÓN 2

A diario los niños manipulan objetos como los que llevan en su lonchera, que con diversas formas hacen que las figuras tridimensionales cobren relevancia, es por eso que esta situación se encargará de ellas.

Actividad # 1

1. Observa la figura y responde:



- a. ¿Cuántas caras tiene la caja de jugo? tiene 6 caras
- b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la caja de jugo? tienen forma de rectángulo
- c. ¿Cuántas aristas tiene la caja? tiene 12 aristas
- d. ¿Cuántos vértices tiene la caja? tiene 8 vértices
- e. ¿Cómo son las superficies de las caras? son planas
- f. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la caja de jugo de acuerdo a las características que has encontrado. se llama prisma rectangular

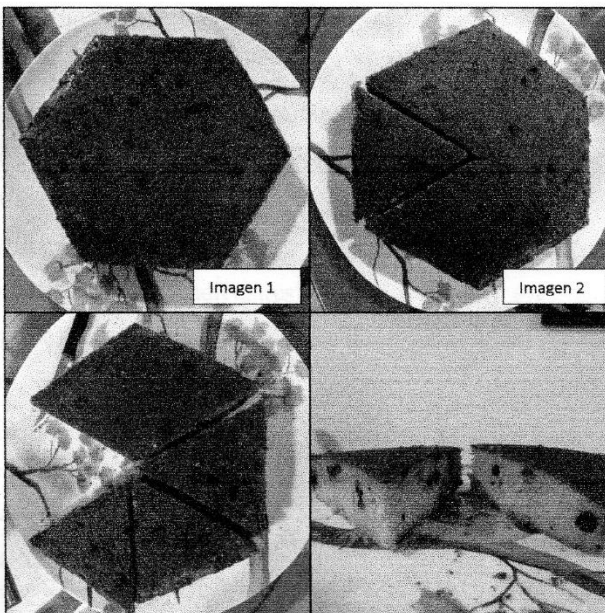
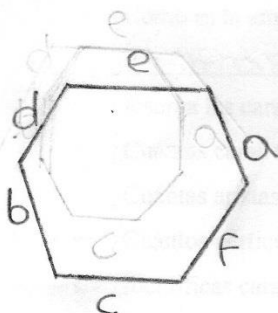
2. Ubica la caja de manera que la cara principal quede frente a ti. 

- a. Nombre con una letra minúscula cada uno de los lados que forma esa cara de la caja.
- b. Con la ayuda de tu profesor dale un nombre a los lados de la caja.
- c. ¿Qué elementos geométricos se forman con la unión de dos segmentos?
se puede formar un ángulo
- d. ¿El segmento a y el b se cortan? Si ☒ No ☐ En caso de que se corten ¿qué tipo de ángulo forma?
un ángulo recto



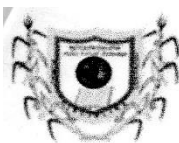
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA



Actividad # 2

1. Observa y responde:
 - a. ¿Cuántas caras tiene la torta? tiene 8 caras
 - b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la torta? tienen formas rectángulo y hexagon.
 - b. ¿Cuántas aristas tiene la torta? tienen 18 aristas
 - c. ¿Cuántos vértices tiene la torta? tiene 12 vértices
 - d. Representa en tu cuaderno la vista superior de la torta y nombra con una letra minúscula cada uno de los lados. ¿Existen segmentos paralelos en la vista superior de la torta? ¿Cuáles?
si e c + o f a b l a b l a d f
 - e. ¿Existen caras paralelas en la torta? ¿Cuáles?
si
 - f. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la torta de acuerdo a las características que has encontrado. prisma hexagonal
2. Observa y responde: Si la torta se parte de manera triangular si
 - a. ¿Qué características geométricas se observan ahora en la vista superior?
se observan triángulos

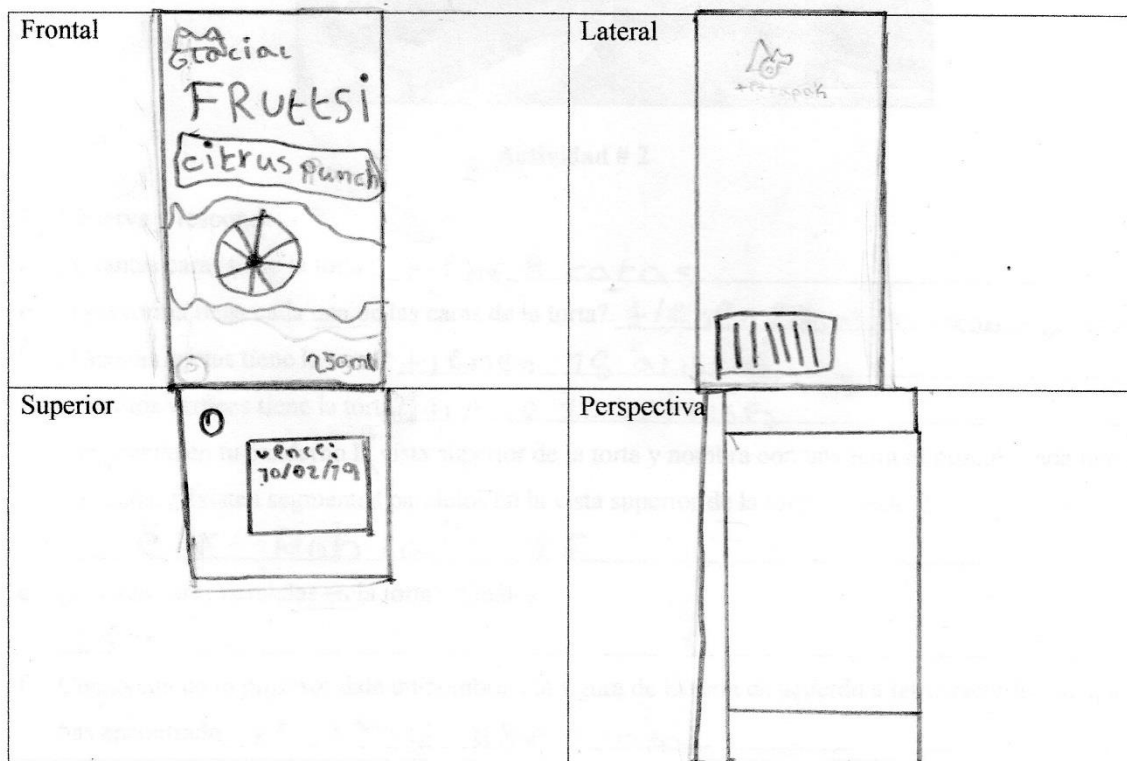


INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

- e. En caso de que no se corten ¿cómo es la distancia entre ellos?
la distancia sería igual.
- f. ¿El segmento a y el c se cortan? Si ☐ No ☒ En caso de que se corten ¿qué tipo de ángulo forma?
un ángulo recto.
- g. En caso de que no se corten ¿cómo es la distancia entre ellos?
la distancia es igual
- h. ¿Qué nombre reciben los lados (segmentos) que conservan la misma distancia en todos sus puntos?
paralelos
- i. ¿Qué nombre reciben los lados (segmentos) que se cortan con un ángulo de 90° ?

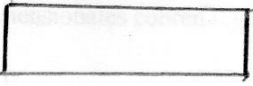
3. Dibuja las vistas:





INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

Lateral 	Perspectiva 
--	--

Actividad # 3

1. Observa y responde:



- ¿Qué forma tiene la base de la botella? _____
- ¿Cómo son las superficies de la botella? _____
- Describe las características geométricas de la botella _____
- Dale un nombre a la figura de la botella de acuerdo a las características identificadas. _____

2 Dibuja las vistas de la botella.

Superior	Frontal	Lateral	Perspectiva



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

- b. ¿Cómo es la amplitud de los ángulos de la nueva forma? ¿Cómo es la medida de sus lados?

es mas pequeña es de 15cm

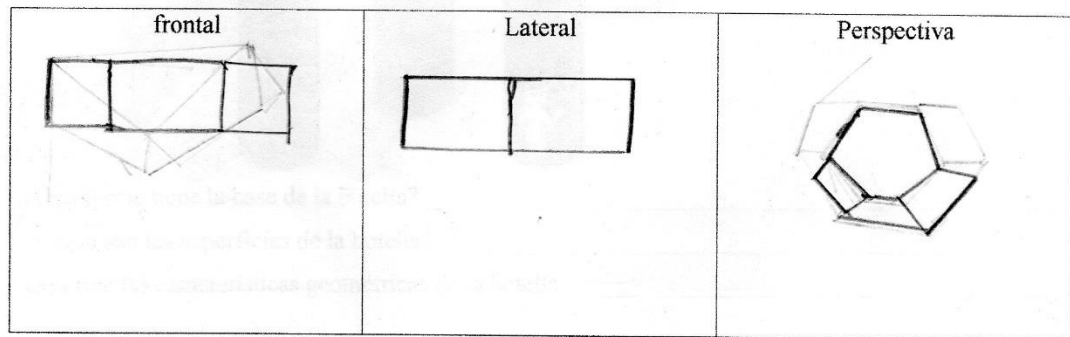
Observa las características geométricas en cada una de las fracciones de torta obtenidas

- c. ¿Cuántas caras tiene la nueva figura? tiene 6 caras
d. ¿Cuántas aristas tiene la nueva figura? tiene 9 aristas
e. ¿Cuántos vértices tiene la nueva figura? tiene 6 vértices
f. ¿Identificas caras paralelas o perpendiculares? si paralelas y perpendiculares
g. Con ayuda de tu profesor dale un nombre al corte de las caras de las figuras. Teniendo en cuenta que una cara es un plano.

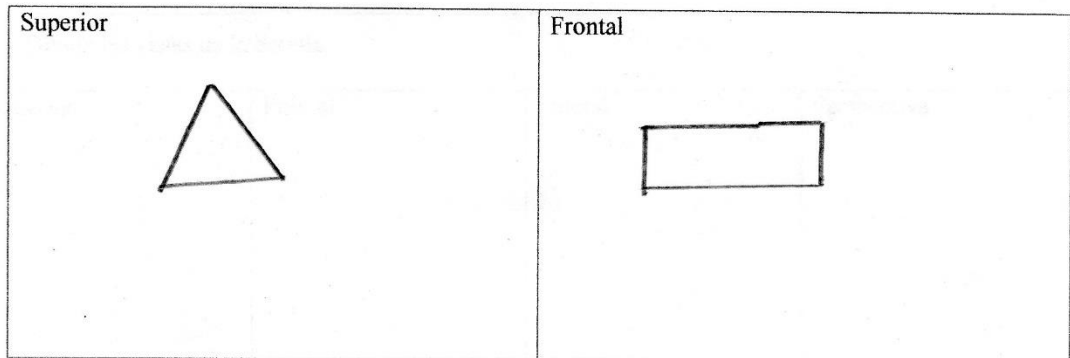
prismatriangular

- h. ¿Qué nombre recibe esta nueva figura? prismatriangular

3. Dibuja las vistas de la torta:



4. Dibuja las vistas de la fracción de la torta:





INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

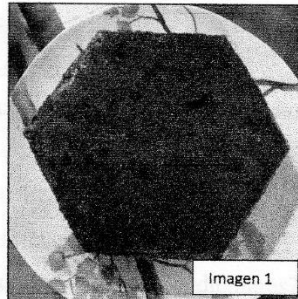
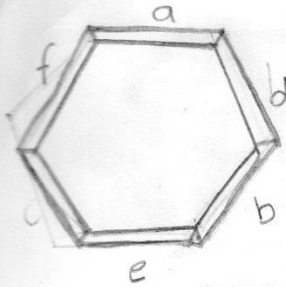


Imagen 1

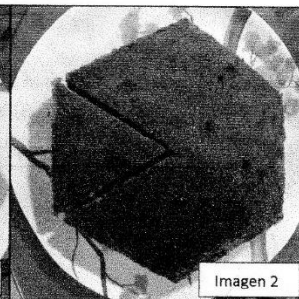
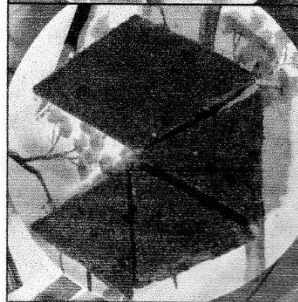


Imagen 2



Actividad # 2

1. Observa y responde:
 - a. ¿Cuántas caras tiene la torta? Tiene 8 caras
 - b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la torta? Tiene forma de rectángulos y octágono
 - c. ¿Cuántas aristas tiene la torta? Tiene 18 aristas
 - d. ¿Cuántos vértices tiene la torta? Tiene 12 vértices
 - d. Representa en tu cuaderno la vista superior de la torta y nombra con una letra minúscula cada uno de los lados. ¿Existen segmentos paralelos en la vista superior de la torta? ¿Cuáles?
Un octágono
 - e. ¿Existen caras paralelas en la torta? ¿Cuáles?
Si hay a y b y a f y son a y b f y c y d
 - f. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la torta de acuerdo a las características que has encontrado. Prisma octogonal
2. Observa y responde: Si la torta se parte de manera triangular
 - a. ¿Qué características geométricas se observan ahora en la vista superior?
Se convirtió en ángulo

Maria José Alvarado Díaz



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

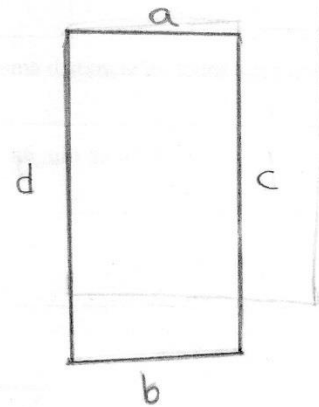
PROPUESTA DE AULA

SITUACIÓN 2

A diario los niños manipulan objetos como los que llevan en su lonchera, que con diversas formas hacen que las figuras tridimensionales cobren relevancia, es por eso que esta situación se encargará de ellas.

Actividad # 1

1. Observa la figura y responde:



- ¿Cuántas caras tiene la caja de jugo? Tiene 6 caras
- ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la caja de jugo? Son rectangulares
- ¿Cuántas aristas tiene la caja? Tiene 12 aristas
- ¿Cuántos vértices tiene la caja? Tiene 8 vértices
- ¿Cómo son las superficies de las caras? Son planas
- Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la caja de jugo de acuerdo a las características que has encontrado. Una prisma de base rectangular

2. Ubica la caja de manera que la cara principal quede frente a ti.

- Nombre con una letra minúscula cada uno de los lados que forma esa cara de la caja
- Con la ayuda de tu profesor dale un nombre a los lados de la caja. es un prisma rectangular
- ¿Qué elementos geométricos se forman con la unión de dos segmentos?
Un ángulo recto
- ¿El segmento a y el b se cortan? Si ☐ No ☒ En caso de que se corten ¿qué tipo de ángulo forma?
Un ángulo diagonal

1.R/ Para mí representan que el tanque grande tiene más agua y el tanque pequeño tiene menos agua.

2.R/ El tanque grande tiene 6 caras y el tanque pequeño tiene 6 caras.

3.R/ El tanque pequeño tiene la forma cuadrada. y el tanque grande tiene la forma rectangular.

4.R/ El tanque grande tiene la forma rectangular.

5.R/ Ninguna porque por los lados (porque) no tienen la misma forma del pequeño.

6.R/ Cada uno de los tanques tienen 12 aristas

7.R/ tienen 8 esquinas y 8 vértices

8.R/ El tanque pequeño si se cruza

9. Preguntas:

1.R/ la distancia es igual entre ellas.

2.R/ Si es posible que algunos de ellos se cruce.

3.R/ De 8 metros

73.R/ las que se cruzan son secantes. y la rectas son paralelas.

74.R/ son triangulares

15.R/ No se cruzan. Porque son derechas.

(1)

aR/ para al masenar los tanque y pongan

bR/son ocho caras

cR/ tiene forma cuadrada

dR/ tiene 205 caras

eR/ tiene 2 caras cuadradas

fR/ que todos los lados tenga la misma medida.

gR/ tiene 10 aristas

hR/son 8 esquinas

2) cR/ que el tanque pequeño se va corriendo y el tanque grande no

d si el tanque pequeño se usa

eR/ + Perpendiculares // Paralelas X secantes

fR/ que los lados estan arriba y son triangulares mientras que las patas son patas

gR/ por que el tanque es reto x las patas son como corusadas

h que el soporte es cuadrado x las patas son retas



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

Lateral	Perspectiva

Actividad # 3

1. Observa y responde:



- ¿Qué forma tiene la base de la botella? Tiene forma circular
- ¿Cómo son las superficies de la botella? Circulares
- Describe las características geométricas de la botella Tiene dos bases tiene forma de cilindro
- Dale un nombre a la figura de la botella de acuerdo a las características identificadas.
Cilindro

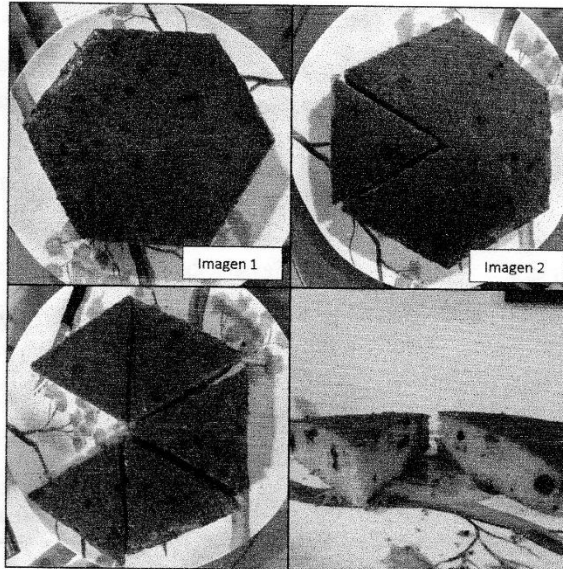
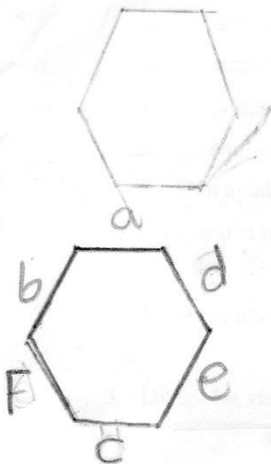
2 Dibuja las vistas de la botella.

Superior	Frontal	Lateral	Perspectiva



INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"
CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA



Actividad # 2

1. Observa y responde:
 - a. ¿Cuántas caras tiene la torta? tiene 8 caras
 - b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la torta? es como rectangular
 - c. ¿Cuántas aristas tiene la torta? 18
 - d. ¿Cuántos vértices tiene la torta? 12
 - e. Representa en tu cuaderno la vista superior de la torta y nombra con una letra minúscula cada uno de los lados. ¿Existen segmentos paralelos en la vista superior de la torta? ¿Cuáles?
3
 - f. ¿Existen caras paralelas en la torta? ¿Cuáles?
8
 - g. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la torta de acuerdo a las características que has encontrado. es un prisma exagonal
2. Observa y responde: Si la torta se parte de manera triangular
 - a. ¿Qué características geométricas se observan ahora en la vista superior?
se convirtió en triángulo

Gerónimo Polanía Rivera

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "JULIO CÉSAR ZULUAGA"

CAMINANDO PLANO EN UN MUNDO TRIDIMENSIONAL

PROPUESTA DE AULA

SITUACIÓN 2

A diario los niños manipulan objetos como los que llevan en su lonchera, que con diversas formas hacen que las figuras tridimensionales cobren relevancia, es por eso que esta situación se encargará de ellas.

Actividad # 1

1. Observa la figura y responde:



- a. ¿Cuántas caras tiene la caja de jugo? tiene 6 caras
- b. ¿Qué forma tiene cada una de las caras de la caja de jugo? es un rectángulo
- c. ¿Cuántas aristas tiene la caja? tiene 12 aristas
- d. ¿Cuántos vértices tiene la caja? son 8
- e. ¿Cómo son las superficies de las caras? es plana
- f. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a la figura de la caja de jugo de acuerdo a las características que has encontrado. es un prisma rectangular

2. Ubica la caja de manera que la cara principal quede frente a ti.

- a. Nombre con una letra minúscula cada uno de los lados que forma esa cara de la caja
- b. Con la ayuda de tu profesor dale un nombre a los lados de la caja. _____
- c. ¿Qué elementos geométricos se forman con la unión de dos segmentos?
se cruza con tijeras
- d. ¿El segmento a y el b se cortan? Si ☒ No ☐ En caso de que se corten ¿qué tipo de ángulo forma?
un ángulo de noventa grado