

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Superficies cuárticas suaves invariantes por
subgrupos primitivos finitos de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$**

TRABAJO DE GRADO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

Matemático

Autor:

JOSE DAVID AVILA CAÑON

Director:

DR. GUILLERMO ORTIZ RICO

Co-director:

DR. SERGIO TRONCOSO IGUA

29 de marzo de 2023



RESUMEN

En el Capítulo 1 estudiamos los anillos polinomiales y mostramos algunas de sus propiedades. En particular presentamos algunas propiedades de los polinomios e ideales homogéneos, y hacemos especial énfasis, por su posterior importancia, en el Teorema de los ceros de David Hilbert.

Como las superficies cuárticas suaves que consideraremos en este trabajo son hipersuperficies suaves del espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^3$, entonces una estrategia para describir estas superficies es describir las hipersuperficies suaves en espacios proyectivos, esto es lo que hacemos en el Capítulo 2.

En el Capítulo 3 se presentan algunas herramientas practicas para determinar cuando una forma homogénea es singular. El objeto que determina la singularidad de una forma homogénea es su discriminante. Aquí describimos detalladamente la construcción de resultantes hecha por Macaulay, en particular nosotros usamos esta construcción para describir los discriminantes. Más particularmente, cuando el discriminante esta expresado bajo dos parámetros, es posible describirlo mediante eliminación con bases de Gröbner. En el [anexo](#) compartimos los algoritmos mencionados, junto a un par de ejemplos ilustrativos, implementados en `Mathematica`.

En el Capítulo 4 se presentan todos los grupos de primitivos finitos de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$, salvo conjugación, como están presentados en [Bli17, Chapter VII]. Para poder describirlos efectivamente damos una breve introducción a las presentaciones y representaciones de grupos finitos. Entre estos grupos resaltan el grupo alternante $\mathfrak{A}_5$ y el grupo lineal especial proyectivo $\mathrm{PSL}(2, 7)$, los cuales están caracterizados como el primer y el segundo grupos simples no abelianos, respectivamente. También presentamos todas las representaciones fieles en $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$ de los grupos $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$ y $\mathrm{PSL}(2, 7)$.

En el Capítulo 5 estudiamos la invarianza de las hipersuperficies suaves de $\mathbb{P}_k^n$ bajo la acción de colineaciones en $\mathrm{PGL}(n+1, k)$. Mostramos algunos resultados generales sobre sus grupos de automorfismos proyectivos. Por último, hacemos un estudio de los subespacios lineales de formas homogéneas de grado d invariantes por un subgrupo finito G de $\mathrm{PGL}(n+1, k)$, damos una descripción de todos los subespacios maximales G -invariantes en Teorema 5.29 e implementamos un algoritmo en `Mathematica` que se encuentra en el [anexo](#), el cual determina una base para cada subespacio lineal maximal de formas homogéneas de grado d invariantes por G , a partir de un conjunto generador de G . La importancia de tales subespacios invariantes es que clasifican las hipersuperficies suaves invariantes por G . El Capítulo 5 finaliza aplicando toda la teoría desarrollada previamente para encontrar todos los subespacios maximales de cuárticas en $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ para cada uno de los subgrupos de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$ descritos en el Capítulo 4, y mostramos cuales formas en cada uno de estos subespacios es singular.

Finalmente, en el Capítulo 6 hacemos algunas conclusiones a partir de la clasificación de las superficies cuárticas suaves de $\mathbb{P}^3$ hecha en el capítulo anterior. A partir del Teorema 6.6 y el corolario que le sigue caracterizamos a la superficie cuártica suave $\{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 12x_0x_1x_2x_3 = 0\}$ como aquella superficie cuártica con el mayor grupo primitivo de automorfismos proyectivos entre las superficies cuárticas suaves de $\mathbb{P}^3$, salvo equivalencia proyectiva.

Esto último es un avance en la conjetura de W. Burnside [Bur11, Sect. 272, Ex. 6], donde el autor conjetura que $\{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 12x_0x_1x_2x_3 = 0\}$ es la superficie cuártica suave que tiene el mayor grupo de automorfismos proyectivos, salvo equivalencia proyectiva, entre las superficies cuárticas suaves de $\mathbb{P}^3$; propiedad similar a la que tiene la superficie cúbica de Fermat $\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$ entre las superficies cúbicas suaves de $\mathbb{P}^3$. Esta conjetura es verdadera, véase los artículos [Nik79, Muk88, Kon99, BS21, CD22]. La prueba de esta conjetura se deduce de estos trabajos, pero esto está fuera del alcance del trabajo de tesis. Sin embargo, nosotros comentamos otra estrategia para demostrarla basada en nuestros resultados y algo de fuerza bruta, véase Observación 6.8.

Hacemos notar que algunos de los resultados en este texto son nuestros, por lo cual haremos la debida observación cuando sea necesario. Nosotros recopilamos algunos de estos resultados en el artículo [AOT22], que de momento está sometido a revisión de pares en la revista académica *Algebraic Geometry*.

PALABRAS CLAVES: Superficies algebraicas, Hipersuperficies de los espacios proyectivos, Teoría de eliminación, Grupos primitivos, Automorfismos proyectivos, Algoritmos en geometría algebraica.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar tengo que agradecer al Dr. Sergio Troncoso, quien a pesar de no conocerme aceptó asesorarme en este proyecto. Sin su inestimable ayuda este trabajo no hubiese sido posible. También expreso mi más profunda gratitud al profesor Guillermo Ortiz, por motivarme a dar lo mejor de mí durante toda mi formación como matemático en Univalle, y por recomendarme al Dr. Sergio Troncoso en este proyecto. A ambos les estoy sinceramente agradecido por su amabilidad y paciencia; por sus oportunos consejos, sugerencias y observaciones; y por las innumerables correcciones hechas a este trabajo. De igual forma, les agradezco por la oportunidad y acompañamiento en escribir mi primer artículo académico.

Agradezco a la profesora Paola Comparin y el profesor Pedro Montero, ambos colegas del Dr. Sergio Troncoso, por sus amables comentarios, sugerencias y correcciones durante este trabajo. También doy las gracias al centro de cómputo Jürgen Tischer del departamento de matemáticas de la Universidad del Valle por su amabilidad y buena disposición.

Muchas gracias Julian, por compartir el interés mutuo al álgebra a lo largo de toda la carrera, y por estar pendiente al progreso y culminación de este trabajo.

Finalmente, a mi padre y madre les estoy eternamente agradecido por su apoyo incondicional. Muchas gracias a ambos por siempre estar a mi lado.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Agradecimientos	III
Introducción	VI
1. Álgebra Conmutativa	1
1.1. Anillos graduados	1
1.2. Anillos de polinomios	3
1.3. Nullstellensatz	5
2. Variedades proyectivas	9
2.1. Espacios proyectivos	9
2.2. Espacios biproyectivos	11
2.3. Morfismos regulares	12
2.4. Subvariedades irreducibles de $\mathbb{P}_k^n$	14
2.5. Hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^n$	17
3. Teoría de eliminación	21
3.1. Resultantes y discriminantes	21
3.2. Construcción de Macaulay	23
3.3. Eliminación con bases de Gröbner	26
3.4. Condiciones suficientes de singularidad	28
4. Grupos	30
4.1. Presentación de grupos	30
4.2. Representación de grupos	33
4.3. Subgrupos primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$	35
4.3.1. Diagrama: $1^\circ - 12^\circ$	39
4.3.2. Diagrama: $13^\circ - 21^\circ$	39
4.3.3. Diagrama: (A), (C) - (F), (G) y (K)	40
4.3.4. Diagrama: (B) y (H)	40
4.4. Algunos subgrupos no primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$	41

5. Hipersuperficies invariantes en $\mathbb{P}_k^n$	43
5.1. Automorfismos proyectivos	43
5.2. Subespacios invariantes de $k[x_0, \dots, x_n]$	48
5.3. Subespacios invariantes de cuárticas en $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$	50
5.3.1. Subespacios de cuárticas invariantes por 1°	50
5.3.2. Subespacios de cuárticas invariantes por 13°	51
5.3.3. Subespacios de cuárticas invariantes por 14°	52
5.3.4. Subespacios de cuárticas invariantes por 15°	52
5.3.5. Subespacios de cuárticas invariantes por 16°	52
5.3.6. Subespacios de cuárticas invariantes por 17°	52
5.3.7. Subespacios de cuárticas invariantes por 19°	52
5.3.8. Subespacios de cuárticas invariantes por (A)	52
5.3.9. Subespacios de cuárticas invariantes por (G)	53
5.3.10. Subespacios de cuárticas invariantes por (C)	53
5.3.11. Subespacios de cuárticas invariantes por (E)	53
5.3.12. Subespacios de cuárticas invariantes por (B)	53
5.3.13. Subespacios de cuárticas invariantes por (H)	54
5.3.14. Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_1)	54
5.3.15. Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_4)	54
5.3.16. Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_5)	54
5.3.17. Subespacios de cuárticas invariantes por (R_3)	54
5.3.18. Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_7)	54
5.3.19. Subespacios de cuárticas invariantes por (P)	54
6. Resultados	55
Bibliografía	59

INTRODUCCIÓN

La clasificación de curvas y superficies es uno de temas centrales de la geometría algebraica, y una forma de clasificarlas es encontrar invariantes que se preserven mediante morfismos entre tales variedades, para curvas el *género* es un buen invariante [Mir95], pero en superficies este dato no las caracteriza adecuadamente [Die72, Kon20]. Otros invariantes que aparecen sobre las superficies son el *plurigénero*, la *dimensión de Kodaria* y la *irregularidad*. Con estos datos se puede determinar más concretamente las superficies, por ejemplo, las superficies K3, llamadas así por André Weil en 1958 en honor a Kummer, Kähler y Kodaira, son aquellas superficies minimales suaves X con *dimensión de Kodaria* $\kappa(X) = 0$, *género geométrico* $\rho_g := \dim H^{2,0}(X) = 1$ e *irregularidad* $q := \dim H^{1,0}(X) = 0$ [Com14]. Sobre la clasificación de superficies es bien reconocido en la comunidad matemática los aportes e innovaciones de la escuela italiana de geometría entre 1866 y 1920 [Die72].

En este texto estamos interesados en estudiar algunas superficies cuárticas suaves en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^3$, las cuales son un tipo de superficies K3 [Kon20]. Una observación fundamental, la cual tendremos presente durante todo este texto es que el espacio ambiente $\mathbb{P}^3$ en el que están las superficies cuárticas suaves de nuestro interés, tiene dimensión 3, esto implica que toda superficie en $\mathbb{P}^3$ es una hipersuperficie en $\mathbb{P}^3$, y el recíproco también es válido. Las hipersuperficies en espacios proyectivos son llamadas hipersuperficies proyectivas. Las hipersuperficies suaves proyectivas en $\mathbb{P}_k^n$, con k cuerpo algebraicamente cerrado, son el ejemplo más simple variedades algebraicas, ellas están determinadas como el conjunto de ceros en $\mathbb{P}_k^n$ de un polinomio homogéneo no constante $f \in k[x_0, \dots, x_n]$, las cuales denotaremos por $\{f = 0\}$.

A pesar de su simplicidad, las hipersuperficies son un buen lugar en el que probar y encontrar ejemplos en teorías más generales. En lo que respecta a geometría algebraica, ha habido mucho estudio sobre las hipersuperficies a lo largo de la historia, desde los clásicos trabajos de Cayley en el siglo XIX, hasta los más recientes resultados sobre rigidez presentados por J. Kollar [Kol19], donde el autor sintetiza un siglo de esfuerzo matemático el cual comienza con G. Fano, y muestra que cualquier hipersuperficie suave de dimensión n y grado $n + 1$, es súper rígida. En particular, las superficies cúbicas en $\mathbb{P}^3$ son súper rígidas, véase en [Kol19, Definition 1] una definición de variedades súper rígidas. Respecto a los automorfismos de hipersuperficies suaves hay un notable resultado debido a Matsumura y Monsky, véase [MM63, Theorem 2], el cual muestra que el grupo de automorfismos proyectivo de una hipersuperficie suave X de grado d y dimensión n , denotado por $\mathrm{PAut}(X)$, y el grupo de automorfismos regulares de X , denotado por $\mathrm{Aut}(X)$, son iguales excepto cuando $n = 2$ y $d = 4$, por ejemplo, cuando X es una superficie cuártica suave en $\mathbb{P}^3$. Más recientemente, V. González-Aguilera, A. Liendo y P. Montero mostraron para $d \geq 3$, $n \geq 1$

y $(n, d) \neq (1, 3), (2, 4)$, que el grupo de automorfismos de cualquier hipersuperficie suave X de dimensión n y grado d , es *levantable*, esto es, existe un subgrupo de $\mathrm{GL}(n+2, \mathbb{C})$ el cual se proyecta isomórficamente sobre $\mathrm{Aut}(X)$, si d y $n+2$ son primos relativos, véase [GALM20]. Por otra parte, incluso para las más simples superficies K3, las superficies cuárticas suaves en $\mathbb{P}^3$, los grupos $\mathrm{PAut}(X)$ y $\mathrm{Aut}(X)$ son diferentes, véase [MM63, GALM20]. Todos los posibles grupos de automorfismos de superficies cúbicas suaves en $\mathbb{P}^3$ han sido determinados, véase [Dol12, Chapter 9, Section 9.5, Theorem 9.5.8]. Se concluye por esta clasificación que el orden del grupo de automorfismos G de una superficie cúbica suave X está acotado por 648, con igualdad, si y solo si, X es proyectivamente equivalente a la *superficie cúbica de Fermat* $\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$. Por otro lado, en [Bur11, Sect. 272, Ex. 6] W. Burnside conjeturo que la superficie cuártica suave $\{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 12x_0x_1x_2x_3 = 0\}$ es la que tiene el mayor grupo de automorfismos proyectivos entre las superficies cuárticas suaves de $\mathbb{P}^3$, salvo equivalencia proyectiva. Esta conjetura es verdadera, su demostración puede encontrarse a partir de los estudios sobre superficies K3 desarrollado posteriormente, véase los artículos [Nik79, Muk88, Kon99, BS21, CD22]. Nosotros demostramos parcialmente esta conjetura restringiéndonos a los subgrupos primitivos finitos de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$, véase Teorema 6.6 y el corolario que le sigue.

El grupo de automorfismos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n)$ es igual al grupo lineal proyectivo $\mathrm{PGL}(n+1, k)$, véase [Har97, Chapter II, Section 7, Example 7.1.1]. A los automorfismos en $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ los llamamos *colineaciones*, las cuales denotamos por $[A]$, con $A \in \mathrm{GL}(n+1, k)$. Las colineaciones en $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ mapean hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}_k^n$ de grado d en hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}_k^n$ de grado d , por tanto $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ actúa como grupo sobre las hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}_k^n$ de grado d . Si G es un subgrupo finito de $\mathrm{PGL}(n+1, k)$, entonces una hipersuperficie suave X en $\mathbb{P}_k^n$ se dice G -invariante si $G \subset \mathrm{PAut}(X)$. Si G es un grupo finito abstracto, entonces G puede actuar de diversas formas en las hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}_k^n$ de grado d , según sea la representación fiel de G en $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ en consideración. Afortunadamente, hay finitas representaciones fieles de G en $\mathrm{PGL}(n+1, k)$, salvo conjugación. En su importante obra *Finite Collineations Groups* [Bli17], H. F. Blichfeldt clasificó todos los subgrupos primitivos finitos de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$, salvo conjugación. Por otro lado, en [Mas98] el autor encuentra todas las representaciones fieles de los grupos de permutaciones $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{S}_5$ y $\mathfrak{A}_6$ en $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$, salvo conjugación. En [CS19, Corollary 5.2] el autor mostró que el grupo 13° descrito por H. F. en [Bli17, Chaptre VII] es la única representación fiel de $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$ en $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$. Nosotros en Corolario 4.15 deducimos a partir de este resultado de I. Cheltsov y C. Shramov, que cada representación fiel de algún grupo en Diagrama 4.8 es conjugado a algunos de los grupos en Diagrama 4.2, descritos en [Bli17, Chapter VII]. Con todo esto quedan determinadas todas las representaciones fieles de los grupos $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$ y $\mathrm{PSL}(2, 7)$ en $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$. En particular, las representaciones primitivas de estos grupos son aquellos subgrupos finitos G de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$ para los cuales $\mathbb{P}^3$ no es G -birracionalmente súper rígido, véase [CS19, Theorem 1.3].

Por definición, una hipersuperficie proyectiva $\{f = 0\} \subset \mathbb{P}_k^n$ es suave si las derivadas parciales de f tienen un cero en común no trivial en $\{f = 0\}$, esto es, $\{f = f_{x_0} = \cdots = f_{x_n} = 0\} \neq \emptyset$, donde f_{x_i} es la derivada formal de f respecto a la variable x_i . Como f es una forma homogénea, entonces por el Teorema de Euler 1.19 vemos que f pertenece al ideal generado por sus derivadas parciales, por tanto $\{f = 0\}$ es suave, si y solo si, $\{f_{x_0} = \cdots = f_{x_n} = 0\} \neq \emptyset$. El problema de determinar cuando un conjunto $f_0, \dots, f_n$ de $n+1$ formas homogéneas en $k[x_0, \dots, x_n]$ tiene un cero no trivial en $\mathbb{P}_k^n$ se puede resolver por medios algebraicos considerando el resultante de $f_0, \dots, f_n$, el cual denotamos por $\mathrm{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$, donde d_i es el grado homogéneo de f_i .

El resultante $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$ es una forma homogénea en los coeficientes de los f_i , con la propiedad que $\{f_0 = \dots = f_n = 0\} \neq \emptyset$, si y solo si, $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n) = 0$. En particular, para cada forma homogénea $f \in k[x_0, \dots, x_n]$, definimos su discriminante $\text{Disc}_d(f)$ como el resultante $\text{Res}_{d-1, \dots, d-1}(f_{x_0}, \dots, f_{x_n})$. Por tanto $\{f = 0\}$ es suave, si y solo si, f no es singular, si y solo si, $\text{Disc}_d(f) \neq 0$. Lo importante ahora es describir $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$. La más conocida descripción de $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$ es debida a Macaulay [Mac02] en el cual el autor expresa a $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$ como el cociente de dos determinantes de matrices cuadradas de dimensiones determinadas por n y los d_i , y cuyas entradas están determinadas por los coeficientes de los f_j . Como es bien sabido el cálculo de determinantes no es eficiente computacionalmente, afortunadamente en algunos casos es posible encontrar el discriminante de f de forma independiente a la construcción de Macaulay, nosotros describimos uno de tales particulares en Sección 3.3 considerando bases de Gröbner. Vale aclarar que las estrategias recién mencionadas son computables, de hecho las hemos implementado en *Mathematica*, véase el [anexo](#).

Si $X = \{f = 0\}$ es una hipersuperficie suave en $\mathbb{P}_k^n$ y G es un subgrupo finito de colineaciones en $\text{PGL}(n+1, k)$, entonces queremos determinar a partir de f cuando X es G -invariante. Resulta que X es G -invariante, si y solo si, $f \sim Af$, para toda $[A] \in G$, véase Sección 5.1 donde definimos la relación de equivalencia $\sim$ y el polinomio Af . En principio la relación $\sim$ y el polinomio Af están definidos para todos los polinomios en $k[x_0, \dots, x_n]$, en particular para todas las formas homogéneas de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$. Una estrategia para encontrar todas las formas homogéneas G -invariantes de grado d es clasificarlas convenientemente. Nosotros en este texto consideramos los subespacios lineales de formas de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$ invariantes por G . Resulta que hay un número finito de subespacios lineales maximales de formas homogéneas de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$ invariantes por G , y cada forma homogénea no nula de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$ pertenece a solo uno de tales subespacios. Estos subespacios aparecen como el kernel de ciertas transformaciones lineales definidas en el espacio vectorial de formas homogéneas de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$. La descripción de estas transformaciones lineales es directa a partir de un conjunto de generadores de G , y con esta descripción encontrar su correspondiente kernel es lo mismo que encontrar el espacio nulo de la matriz que representa a la transformación lineal en cuestión. Como el espacio lineal de formas de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$ tiene dimensión finita $\binom{n+d}{d}$, entonces tal espacio nulo está dado por una base de a lo más $\binom{n+d}{d}$ formas homogéneas de grado d linealmente independientes. Si $\{p_1, \dots, p_r\}$ es una de estas bases, entonces queda por determinar cuales combinaciones lineales $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$ no son singulares, esto lo decidimos aplicando los métodos descritos en Capítulo 3. Así descrito el problema, la determinación de los subespacios lineales maximales invariantes es computable, la estrategia considerada la hemos implementado en un algoritmo en *Mathematica*, véase el [anexo](#). Este algoritmo y las consideraciones teóricas ya comentadas son aplicadas a todos los subgrupos primitivos finitos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ descritos en Capítulo 4.

Como conclusión, el problema de determinar las hipersuperficies suaves en $\mathbb{P}_k^n$ invariantes por un subgrupo finito G de $\text{PGL}(n+1, k)$ está resuelto y es computable, dado un conjunto de generadores de G , aunque su complejidad computacional es considerable, por lo menos los algoritmos descritos e implementados en este trabajo.

En este capítulo todo anillo y monoide en consideración sera conmutativo.

1.1 ANILLOS GRADUADOS

Esta sección esta basada parcialmente en [ZS60, Chapter VII, Section §2].

Definición 1.1. Un **monoide** es una estructura algebraica $(M, +, 0)$, donde $+$ es una operación binaria sobre M , 0 es una constante en M , la operación $+$ es asociativa y conmutativa, y tiene a 0 como identidad.

Definición 1.2. Un **monoide ordenado**, es un monoide M , junto una relación de orden parcial $\leq$ con las siguientes propiedades:

- I) La relación $\leq$ es un buen orden sobre M .
- II) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ para todo $c \in M$.

Ejemplo 1.3. Los números naturales $\mathbb{N}$ son un monoide ordenado bajo el orden usual. Para cada $d \geq 2$ tenemos el monoide ordenado $\mathbb{N}^d$ por el orden lexicográfico, esto es, para $p, q \in \mathbb{N}^d$ escribimos $p \geq q$, si y solo si, existe $1 \leq r \leq d$ tal que $p_i \geq q_i$ para $1 \leq i \leq r$ y $p_{r+1} > q_{r+1}$.

Definición 1.4. Sean R un anillo y M un monoide ordenado. Decimos que R es un **anillo graduado** por $\{R_\alpha\}_{\alpha \in M}$ si

- I) Cada R_α es un subgrupo abeliano de R (bajo la suma de este último).
- II) R es suma directa de los R_α .
- III) Si $f \in R_\gamma$ y $g \in R_\delta$, entonces $fg \in R_{\gamma+\delta}$.

En lo que resta de esta sección sea R un anillo graduado por $\{R_\alpha\}_{\alpha \in M}$.

Definición 1.5. Decimos que $f \in R$ es **homogéneo** si $f \in R_\gamma$ para algún $\gamma \in M$. A tal γ lo llamamos el **grado** de f . Llamamos a R_α el conjunto de todos los elementos homogéneos de R de grado α , y denotamos por $R_h := \bigcup_{\gamma \in M} R_\gamma$ al conjunto de todos los elementos homogéneos de R .

Observación 1.6. Hacemos notar que el grado de 0 no está bien definido. Esto no nos causara problemas.

Proposición 1.7. Los siguientes enunciados se satisfacen:

- I) R_0 es un subanillo de R .

- II) R es un R_0 -módulo y cada R_γ es un R_0 -submódulo de R .
- III) $R_+ = \bigoplus_{\gamma>0} R_\gamma$ es un ideal de R .
- IV) Para cada $\gamma \in M$ tenemos un R_0 -morfismo lineal de R en R_γ , que denotamos por $f \mapsto f_\gamma$, con las siguientes propiedades:
 - a) Hay finitos $\gamma \in M$ tales que $f_\gamma \neq 0$.
 - b) $f = \sum_{\gamma \in M} f_\gamma$.

Observación 1.8. Notemos que $f \in R$ es homogéneo, si y solo si, existe a lo más un $\gamma \in M$ tal que $f_\gamma \neq 0$.

Definición 1.9. Un **ideal homogéneo** de R es un ideal $\mathfrak{a}$ de R generado por algún subconjunto de R_h .

Proposición 1.10. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales homogéneos de R y $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ una colección de ideales homogéneos de R . Entonces $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ y $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ son ideales homogéneos de R .

Demostración. Si $\mathfrak{a}$ está generado por $A \subset R_h$ y $\mathfrak{b}$ está generado por $B \subset R_h$, entonces $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ está generado por $\{fg \mid f \in A, g \in B\} \subset R_h$. Si $\mathfrak{a}_i$ está generado por $A_i \subset R_h$, entonces $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ está generado por $\bigcup_{i \in I} A_i \subset R_h$. $\square$

Ahora caracterizaremos los ideales primos homogéneos de R .

Lema 1.11. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de R . Entonces $f \in \mathfrak{a}$, si y solo si, $f_\gamma \in \mathfrak{a}$ para todo $\gamma \in M$.

Demostración.

($\Leftarrow$) Es claro ya que $f = \sum_{\gamma \in M} f_\gamma$.

($\Rightarrow$) Sea $f \in \mathfrak{a}$, como $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo encontramos $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathfrak{a} \cap R_h$ y $h_1, h_2, \dots, h_m \in R$ tales que $f = \sum_{i \leq m} h_i g_i$ y tenemos $f_\gamma = \sum_{i \leq m} (h_i g_i)_\gamma$ para cada $\gamma \in M$. Por tanto es suficiente con mostrar que si $h \in R$, $\gamma \in M$ y $g \in \mathfrak{a} \cap R_\gamma$, entonces $(hg)_\gamma \in \mathfrak{a}$. Como $(hg)_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} h_\alpha g_\beta$, entonces se reduce a mostrar que si $g \in \mathfrak{a} \cap R_\gamma$ y $\gamma \in M$, entonces $g_\gamma \in \mathfrak{a}$. Como g es una forma homogénea, entonces $g_\gamma \neq 0$ implica que $g_\gamma = g$, así $g_\gamma = 0 \in \mathfrak{a}$ o $g_\gamma = g \in \mathfrak{a}$, en cualquier caso $g_\gamma \in \mathfrak{a}$. $\square$

Proposición 1.12. Un ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de R es primo, si y solo si, para f, g formas homogéneas de R , entonces $fg \in \mathfrak{a}$ implica que $f \in \mathfrak{a}$ o $g \in \mathfrak{a}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Es evidente.

($\Leftarrow$) Procedamos por contradicción, por tanto existen $f, g \in R$ tales que $f, g \notin \mathfrak{a}$ y $fg \in \mathfrak{a}$. Por Lema 1.11 encontramos mínimos $\gamma, \delta \in M$ tales que $f_\gamma, g_\delta \notin \mathfrak{a}$. Sea $\epsilon = \gamma + \delta$, entonces $(fg)_\epsilon = \sum_{\alpha+\beta=\epsilon} f_\alpha g_\beta$. Consideremos la expresión

$$f_\gamma g_\delta = (fg)_\epsilon - \left(\sum_{\substack{\alpha+\beta=\epsilon \\ \alpha < \gamma}} f_\alpha g_\beta + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\epsilon \\ \beta < \delta}} f_\alpha g_\beta \right).$$

Por elección de γ y δ vemos que ambos sumatorios están en $\mathfrak{a}$. Como $fg \in \mathfrak{a}$, entonces $(fg)_\epsilon \in \mathfrak{a}$ por Lema 1.11. Por tanto encontramos que $f_\gamma g_\delta \in \mathfrak{a}$, por hipótesis esto implica que $f_\gamma \in \mathfrak{a}$ o $g_\delta \in \mathfrak{a}$, contradicción con la elección de γ y δ . $\square$

1.2 ANILLOS DE POLINOMIOS

El único ejemplo de anillos graduados que consideraremos son los *anillos de polinomios*. Los anillos polinomiales pueden caracterizarse por medio de propiedades universales en la categoría de los anillos. En lo que sigue sea R un anillo.

Proposición 1.13. El anillo de polinomios $R[x_0, \dots, x_n]$ está caracterizado, salvo isomorfismo, en la categoría de los anillos, por la siguiente propiedad universal: Para cada anillo S , cada morfismo de anillos $R \xrightarrow{\varphi} S$ y elementos $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, existe un único morfismo de anillos $R[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\psi} S$ tal que $\psi(x_i) = a_i$ para $0 \leq i \leq n$ y $\psi(r) = \varphi(r)$ para todo $r \in R$. Esto último se resume en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R[x_0, \dots, x_n] & \xleftarrow{\quad} & R \\ & \searrow \psi! & \downarrow \varphi \\ \{x_0, \dots, x_n\} & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

Definición 1.14. Los **monomios** en $R[x_0, \dots, x_n]$ son todos aquellos polinomios que son producto de los x_i . Un **exponente** del anillo polinomial $R[x_0, \dots, x_n]$ es una $(n+1)$ -tupla de números naturales $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Escribamos $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. El **grado** del exponente α lo denotamos por $|\alpha| := \sum_{i=0}^n \alpha_i$ y el monomio en $R[x_0, \dots, x_n]$ determinado por α lo denotamos por $x^\alpha := x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$. El grado de x^α es el grado de α .

En caso de considerar dos conjuntos de variables diferentes, por ejemplo en el anillo polinomial $R[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$, tendremos los monomios $x^\alpha = x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$ en las variables x_i y los monomios $y^\beta = y_0^{\beta_0} \cdots y_m^{\beta_m}$, para $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ y $\beta \in \mathbb{N}^{m+1}$. Para hacer notar la diferencia entre ambos conjuntos de variables escribimos $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ en lugar de $R[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$. Podemos considerar una notación similar para referirnos a más de conjuntos de variables.

Definición 1.15. Para cada $d \geq 0$ denotamos por $R[x_0, \dots, x_n]_d$ al R -submódulo de $R[x_0, \dots, x_n]$ generado por todos los monomios x^α de grado d . A los polinomios en $R[x_0, \dots, x_n]_d$ los llamamos **formas homogéneas** de grado d . Para cada par $r, s \geq 0$ denotamos por $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]_{r,s}$ al R -submódulo de $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ generado por los monomios $x^\alpha y^\beta$, con $|\alpha| = r$ y $|\beta| = s$. A los polinomios en $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]_{r,s}$ los llamamos **formas bihomogéneas** de grado r en x y grado s en y .

Observación 1.16. Hacemos notar que grado del polinomio 0 no está bien definido. Esto no nos causara problemas.

Proposición 1.17. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

- I) $R[x_0, \dots, x_n]$ es un anillo graduado por $\{R[x_0, \dots, x_n]_d\}_{d \in \mathbb{N}}$.
- II) $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ es un anillo graduado por $\{R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]_{r,s}\}_{(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.
- III) Para cada $d \geq 0$, los monomios x^α , con $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ y $|\alpha| = d$, constituyen una R -base de $R[x_0, \dots, x_n]_d$ de tamaño $\binom{n+d}{n}$.

IV) Para cada pareja $r, s \geq 0$, los monomios $x^\alpha y^\beta$, con $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\beta \in \mathbb{N}^{m+1}$, $|\alpha| = r$ y $|\beta| = s$, constituyen una R -base de $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ de tamaño $\binom{n+r}{n} \cdot \binom{m+s}{m}$.

Demostración. El único hecho no inmediato es el ítem III) respecto al número de monomios de grado d , y de este ítem se sigue el ítem IV). Como $x^\alpha = x^\beta$, si y solo si, $\alpha = \beta$, entonces queremos mostrar que $\{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |\alpha| = d\}$ tiene $\binom{n+d}{n}$ elementos. Observemos que $\{p \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |p| = d\}$ representa el número de formas en como podemos *repartir d objetos entre $n+1$ cajas*. Con esta intuición encontramos que $|\{p \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |p| = d\}| = \binom{n+d}{n}$ procediendo por inducción sobre n , para d fijo. $\square$

Definición 1.18. Para cada $f \in R[x_0, \dots, x_n]$ denotamos por $\partial f / \partial x_i$, o bien por f_{x_i} , a la derivada formal de f respecto a x_i . El mapeo $f \mapsto \partial f / \partial x_i$ es un R -morfismo lineal sobre $R[x_0, \dots, x_n]$ caracterizado por las siguientes propiedades:

- I) $\partial(x_i) / \partial x_i = 1$.
- II) $\partial(x_i) / \partial x_j = 0$ si $j \neq i$.
- III) (Regla de Leibniz) Para todo $f, g \in R[x_0, \dots, x_n]$, $\partial(fg) / \partial x_i = g \cdot \partial(f) / \partial x_i + f \cdot \partial(g) / \partial x_i$.

Se deduce por la regla de Leibniz para $d \geq 1$ y $f \in R[x_0, \dots, x_n]_d$ que $\partial(f) / \partial x_i$ pertenece a $R[x_0, \dots, x_n]_{d-1}$. Un hecho muy útil cuya demostración no es difícil es la *identidad de Euler* para formas homogéneas.

Teorema 1.19 (Identidad de Euler). *Si $f \in R[x_0, \dots, x_n]$ es una forma homogénea, entonces*

$$df = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial(f)}{\partial x_i},$$

donde d es el grado de f .

Demostración. Es claro que si la identidad de Euler se satisface para una R -base de $R[x_0, \dots, x_n]_d$, entonces se satisface en todo $R[x_0, \dots, x_n]_d$. Por tanto es suficiente con probar la identidad para los monomios x^α , con $|\alpha| = d$. Procedamos por inducción sobre $d \geq 0$. Evidentemente la identidad se satisface para $d = 0$ y $d = 1$. Si x^γ es de grado $|\gamma| = d+1 \geq 2$, entonces encontramos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ tales que $\gamma = \alpha + \beta$ y $|\alpha|, |\beta| < |\gamma|$. Con el uso de la hipótesis inductiva deducimos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial(x^\gamma)}{\partial x_i} &= \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial(x^{\alpha+\beta})}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial(x^\alpha x^\beta)}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^n x \left(x^\alpha \frac{\partial(x^\beta)}{\partial x_i} + x^\beta \frac{\partial(x^\alpha)}{\partial x_i} \right) \\ &= x^\alpha \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial(x^\beta)}{\partial x_i} + x^\beta \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial(x^\alpha)}{\partial x_i} = x^\alpha (|\beta| x^\beta) + x^\beta (|\alpha| x^\alpha) \\ &= (|\alpha| + |\beta|) x^\alpha x^\beta = |\alpha + \beta| x^{\alpha+\beta} = |\gamma| x^\gamma = (d+1) x^\gamma. \end{aligned}$$

verificando que la identidad se satisface para x^γ , con $|\gamma| = d+1$, concluyendo la inducción. $\square$

Definición 1.20. Una **valuación** de $R[x_0, \dots, x_n]$ sobre R es un morfismo de anillos $R[X] \rightarrow R$ que deja fijo a R . Toda valuación de $R[x_0, \dots, x_n]$ en R está determinada por los valores de $x_0, \dots, x_n$, esto es, por una $(n+1)$ -tupla $p \in R^{n+1}$. Para cada $p \in R^{n+1}$ y cada $f \in R[x_0, \dots, x_n]$ denotamos por $f(p) \in R$ a la imagen de f por el morfismo de anillos $R[x_0, \dots, x_n] \rightarrow R$ determinado por p .

Ejemplo 1.21. Si $f = x_0^3 + x_0x_1 - x_1^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ y $p = (i, 3) \in \mathbb{C}^2$, entonces $f(p) = f(i, 3) = i^3 + i \cdot 3 - 3^2 = 2i - 9$.

Definición 1.22. Con un poco mas de generalidad, una **valuación** de $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ en $R[y_0, \dots, y_m]$ es un morfismo de anillos $R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m] \rightarrow R[y_0, \dots, y_m]$ que deja fijo a R y los y_i . Toda valuación de este tipo está determinada por $(n+1)$ -tupla $p \in R[y_0, \dots, y_m]^{n+1}$.

Ejemplo 1.23. Para $f = x_0x_1 + x_1^2y_0 + 4x_0y_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1; y_0, y_1]$ y $p = (i, -y_0)$, tenemos que $f(p) = f(i, -y_0) = i \cdot (-y_0) + (-y_0)^2y_0 + 4 \cdot i \cdot y_1 = y_0^3 + 4iy_1 - iy_0$.

Podemos evaluar dos veces polinomios en dos conjuntos de variables $x_0, \dots, x_n$ y $y_0, \dots, y_m$, primero en las x_i y luego en las y_j . Si $f \in R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$, $p \in R[y_0, \dots, y_m]^{n+1}$ y $q \in R^{m+1}$, entonces $f(p, q) := f(p)(q) \in R$.

Proposición 1.24. Si $f \in R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]_{r,s}$ y $p \in R[y_0, \dots, y_m]_u^{n+1}$, entonces $f(p)$ es una forma homogénea en $R[y_0, \dots, y_m]$ de grado $ru + s$. En palabras, evaluar formas bihomogéneas en formas homogéneas resulta en formas homogéneas.

Observación 1.25. Como notación, para cada $p \in R^{n+1}$ denotamos por $\nu_p : R[x_0, \dots, x_n] \rightarrow R$ al morfismo de anillos tal que $\nu_p(f) := f(p)$. Similarmente, para cada par de tuplas $p \in R^{n+1}$ y $q \in R^{m+1}$ denotamos por $\nu_{p,q} : R[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m] \rightarrow R$ al morfismo de anillos definido como $\nu_{p,q}(f) := f(p, q)$.

1.3 NULLSTELLENSATZ

Concluimos este capítulo abordando dos importantes teoremas sobre ideales atribuidos a David Hilbert, el *Teorema de la base* y el *Teorema de los Ceros*. La relevancia de estos resultados es bien reconocida pues describen muy bien los ideales de los anillos polinomiales con coeficientes en cuerpos algebraicamente cerrados. Primero introducimos los ideales radicales y algunas de sus propiedades. En lo que sigue R denota un anillo.

Definición 1.26. Para cada $\mathfrak{a}$ ideal de R , denotamos por $\sqrt{\mathfrak{a}}$ al **radical** de $\mathfrak{a}$, el cual esta definido como

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid f^t \in \mathfrak{a} \text{ para algún } t \geq 1\}.$$

Un ideal $\mathfrak{a}$ de R es **radical** si $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Proposición 1.27. $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal radical de R .

Demostración. Veamos en primer lugar que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal de R . Es claro que si $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ y $g \in R$, entonces $fg \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Veamos ahora que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es cerrado bajo la suma. Si $f, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, entonces existen $n, m \geq 1$ tales que $f^n, g^m \in \mathfrak{a}$. Observemos que $(f + g)^{n+m} \in \mathfrak{a}$ ya que

$$(f + g)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} f^k g^{n+m-k},$$

si $k \geq n$, entonces $f^k g^{n+m-k} = f^n f^{k-n} g^{n+m-k} \in \mathfrak{a}$. En caso de $k < n$ tenemos que $f^k g^{n+m-k} = f^k g^{n-k} g^m \in \mathfrak{a}$. En cualquier caso el producto $f^k g^{n+m-k} \in \mathfrak{a}$, de donde $(f + g)^{n+m} \in \mathfrak{a}$ y $f + g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por tanto $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal de R .

Veamos ahora que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es radical. Si $f^t \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ y $t \geq 1$, entonces existe $u \geq 1$ tal que $(f^t)^u \in \mathfrak{a}$, así $f^{ut} \in \mathfrak{a}$ y $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. $\square$

Proposición 1.28. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de R y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Entonces $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$.

Demostración. Si $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ encontramos $n \geq 1$ tal que $f^n \in \mathfrak{a}$, así $f^n \in \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es primo, entonces $f \in \mathfrak{p}$. $\square$

Corolario 1.29. Todo ideal primo o maximal es radical.

Demostración. Es inmediato de la proposición anterior y el hecho que todo ideal maximal es primo. $\square$

Proposición 1.30. Todo ideal radical de R es intersección de ideales primos de R .

Demostración. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de R . Vamos a mostrar que

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } R \text{ y } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \}. \quad (1.1)$$

Denotemos por $\mathfrak{b}$ a esta intersección. Por la proposición anterior es claro que $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{b}$. Ahora vamos a mostrar que $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Tomemos $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$ y definamos

$$\Omega = \{ \mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \text{ ideal de } R, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{c} \text{ y } x \notin \sqrt{\mathfrak{c}} \}.$$

Así $\sqrt{\mathfrak{a}} \in \Omega$. Hacemos de Ω un conjunto parcialmente ordenado por inclusión, como toda cadena en Ω es acotada, entonces por el lema de Zorn encontramos un elemento maximal de Ω , denotemos a este ideal por $\mathfrak{p}$. Veamos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R . Tomemos $a, b \in R$ tal que $a, b \notin \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es maximal en Ω , entonces $\mathfrak{p} + \langle a \rangle$ y $\mathfrak{p} + \langle b \rangle$ no están en Ω , por tanto $x \in \sqrt{\mathfrak{p} + \langle a \rangle} \cap \sqrt{\mathfrak{p} + \langle b \rangle}$. Así encontramos $n, m \geq 1$, $u, v \in \mathfrak{p}$, $r \in \langle a \rangle$ y $s \in \langle b \rangle$ tales que $x^n = u + r$ y $x^m = v + s$, luego $x^{n+m} = (uv + us + vr) + rs \in \mathfrak{p} + \langle ab \rangle$, $x \in \sqrt{\mathfrak{p} + \langle ab \rangle}$, y por tanto $ab \notin \mathfrak{p}$ pues $\mathfrak{p} \in \Omega$. Esto muestra que $\mathfrak{p}$ es primo, y como $\mathfrak{p} \in \Omega$, entonces $x \notin \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, por tanto $x \notin \mathfrak{b}$. En resumen, hemos mostrado que si $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, entonces $x \notin \mathfrak{b}$, por contrarrecíproco tenemos $x \in \mathfrak{b}$ implica $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, esto es, $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ y se concluye la igualdad $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. $\square$

Definición 1.31. Un anillo R es **Noetheriano** si todo ideal de R es finitamente generado.

Definición 1.32. Un anillo R es **Jacobson** si todo ideal primo de R es intersección de ideales maximales de R .

Ejemplo 1.33. Todo cuerpo es un anillo Noetheriano y de Jacobson.

Teorema 1.34. Si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[x_0, \dots, x_n]$ es un anillo Noetheriano.

Demostración. Véase [Ati18, Theorem 7.5] y [Ati18, Corollary 7.6]. $\square$

Teorema 1.35. Si R es un anillo de Jacobson, entonces $R[x_0, \dots, x_n]$ es un anillo de Jacobson.

Demostración. Véase [Gol51, Theorem 3]. $\square$

Al Teorema 1.34 se le conoce como el *Teorema de la Base de Hilbert*, mientras que Teorema 1.35 es en esencia el *Teorema de los Ceros de Hilbert*. Los recíprocos de estos teoremas son ciertos, basta con notar que toda imagen homomorfa de un anillo Noetheriano (de Jacobson) es un anillo Noetheriano (de Jacobson). Veamos como se deduce *Nullstellensatz* a partir del Teorema 1.35. Los siguientes lemas son importantes caracterizaciones de los anillos de Jacobson.

Lema 1.36. R es un anillo de Jacobson, si y solo si, todo ideal maximal de $R[x_0, \dots, x_n]$ se contrae a un ideal maximal de R .

Demostración. Véase [Gol51, Theorem 5]. □

Lema 1.37. R es un anillo de Jacobson, si y solo si, todo ideal radical de R es intersección de ideales maximales de R .

Demostración.

($\Leftarrow$) Esto es claro ya que todo ideal primo es radical.

($\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de R . Vamos a mostrar que

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap \{ \mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \text{ ideal maximal de } R \text{ y } \mathfrak{m} \supset \mathfrak{a} \}. \quad (1.2)$$

Denotemos por $\mathfrak{b}$ a esta intersección. Es clara la inclusión $\mathfrak{b} \supset \sqrt{\mathfrak{a}}$ por Proposición 1.28 y el hecho que todo ideal maximal es primo. Supongamos que $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por la expresión (1.1) de la Proposición 1.30 encontramos un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R tal que $x \notin \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. Como R es un anillo de Jacobson, $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R y $x \notin \mathfrak{p}$, entonces encontramos un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R tal que $x \notin \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$. Por tanto encontramos un ideal maximal de R que contiene a $\mathfrak{a}$ y no contiene a x , así $x \notin \mathfrak{b}$. Por contrarrecíproco tenemos $x \in \mathfrak{b}$ implica $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ y se concluye la igualdad $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Teorema 1.38 (Nullstellensatz débil). *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_0, \dots, x_n]$, si y solo si, $\mathfrak{m}$ es el kernel de alguna valuación $k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k$.*

Demostración. Sea $k[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} k$ una valuación. Entonces π es sobreyectiva y por el primer teorema de isomorfismo tenemos $k[x_0, \dots, x_n]/\ker(\pi) \cong k$. Como k es cuerpo, entonces $k[x_0, \dots, x_n]/\ker(\pi)$ también es cuerpo, luego $\ker(\pi)$ es un ideal maximal de $k[x_0, \dots, x_n]$. Por tanto el kernel de toda valuación $k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k$ es un ideal maximal de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Veamos ahora que todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$ es el kernel de alguna valuación $k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k$, para esto sera suficiente con mostrar $k[x_0, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \cong k$. Procedamos por inducción sobre $n \geq 0$. Supongamos que $n = 0$ y tenemos una sola variable x_0 . Como $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_0]$, entonces $k[x_0]/\mathfrak{m}$ es un cuerpo y tenemos el morfismo canónico $k[x_0] \xrightarrow{\pi} k[x_0]/\mathfrak{m}$. Observemos que $k \hookrightarrow k[x_0] \xrightarrow{\pi} k[x_0]/\mathfrak{m}$ es un monomorfismo, sea K la imagen de este monomorfismo, $K \hookrightarrow k[x_0]/\mathfrak{m}$. Por tanto K es isomorfo a k , así K es un cuerpo algebraicamente cerrado. Como $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_0]$, entonces encontramos algún $f \in \mathfrak{m}$ polinomio no constante. Escribamos $f = \sum_{j=0}^m c_j x_0^j$, con los $c_j \in k$ y $c_m \neq 0$. Así $0 = \pi(f) = \sum_{j=0}^m \pi(c_j)(\pi(x_0))^j$, donde los $\pi(c_j) \in K$ y $\pi(c_m) \neq 0$, por tanto $\pi(x_0)$ es algebraico sobre K y $\pi(x_0) \in K$. Como $k[x_0]$ está generado por k y x_0 , entonces $k[x_0]/\mathfrak{m}$ está generado por $\pi(k)$ y $\pi(x_0)$, y por tanto $k[x_0]/\mathfrak{m} = K \cong k$, verificando el caso $n = 0$.

Supongamos que $n > 0$. Como $k[x_0, \dots, x_{n-1}] \hookrightarrow k[x_0, \dots, x_{n-1}][x_n] = k[x_0, \dots, x_n]$ y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces por Lema 1.36, $k[x_0, \dots, x_{n-1}] \cap \mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_0, \dots, x_{n-1}]$, por inducción encontramos una valuación $k[x_0, \dots, x_{n-1}] \xrightarrow{\varphi} k$ tal que $\ker(\varphi) = k[x_0, \dots, x_{n-1}] \cap \mathfrak{m}$. Sea $k[x_0, \dots, x_{n-1}][x_n] \xrightarrow{\psi} k[x_n]$ el morfismo de anillos deter-

minado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 k[x_0, \dots, x_{n-1}][x_n] & \xleftarrow{\quad} & k[x_0, \dots, x_{n-1}] \\
 \uparrow & \searrow \psi & \downarrow \varphi \\
 \{x_n\} & \xrightarrow{\quad} & k[x_n]
 \end{array}$$

Veamos que $\ker(\psi) \subset \mathfrak{m}$. Si $f \in \ker(\psi)$ y $f = \sum_{j=0}^m c_j x_n^j$, donde $c_j \in k[x_0, \dots, x_{n-1}]$, entonces $0 = \psi(f) = \sum_{j=0}^m \psi(c_j)(\psi(x_n))^j = \sum_{j=0}^m \varphi(c_j)x_n^j$, luego $\varphi(c_j) = 0$, $c_j \in \ker(\psi) \subset \mathfrak{m}$ y por tanto $f \in \mathfrak{m}$.

Sea $\mathfrak{b}$ la imagen de $\mathfrak{m}$ por ψ . Como ψ es sobreyectivo y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_0, \dots, x_n]$ que contiene a $\ker(\psi)$, entonces $\mathfrak{b}$ es un ideal maximal de $k[x_n]$ y $\mathfrak{m}$ es la preimagen de $\mathfrak{b}$ por ψ . Por hipótesis inductiva encontramos una valuación $k[x_n] \xrightarrow{\rho} k$ tal que $\ker(\rho) = \mathfrak{b}$. Consideremos el morfismo $k[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\mu} k$ determinado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & k[x_n] & \\
 \psi \nearrow & & \searrow \rho \\
 k[x_0, \dots, x_n] & \xrightarrow{\mu} & k
 \end{array}$$

Como ψ y ρ dejan fijo a k , entonces μ también deja fijo a k , así μ es una valuación de $k[x_0, \dots, x_n]$ sobre k . Como $\mathfrak{b}$ es la preimagen de $\langle 0 \rangle$ por ρ y $\mathfrak{m}$ es la preimagen de $\mathfrak{b}$ por ψ , entonces $\mathfrak{m}$ es la preimagen de $\langle 0 \rangle$ por $\mu = \rho\psi$, por tanto $\ker(\mu) = \mathfrak{m}$, concluyendo la inducción. $\square$

Teorema 1.39 (Nullstellensatz fuerte). *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{a}$ un ideal de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap \{ \ker(\pi) \mid k[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} k \text{ es una valuación y } \ker(\pi) \supset \mathfrak{a} \}. \quad (1.3)$$

Demostración. Como k es un cuerpo, entonces k es un anillo de Jacobson y por Teorema 1.35 vemos que $k[x_0, \dots, x_n]$ también es un anillo de Jacobson. Por la expresión (1.2) del Lema 1.37 y por Nullstellensatz débil se concluye (1.3). $\square$

Teniendo presente el teorema de la base de Hilbert, podemos dar un enunciado equivalente más descriptivo del Nullstellensatz fuerte.

Teorema 1.40 (Nullstellensatz clásico). *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $f, f_1, \dots, f_m$ polinomios en $k[x_0, \dots, x_n]$ tal que $f(p) = 0$ siempre que $f_1(p) = f_2(p) = \dots = f_m(p) = 0$, para $p \in k^{n+1}$, entonces existe $r \geq 1$ y $g_1, g_2, \dots, g_m \in k[x_0, \dots, x_n]$ tal que $f^r = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m$.*

VARIETADES PROYECTIVAS

En este capítulo k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado. El contenido de este capítulo está basado parcialmente en [Har97] y [Gat], la intención es dar una breve introducción a espacios proyectivos y sus hipersuperficies. Los resultados y sus demostraciones no tienen originalidad alguna, más allá de la forma en como están presentados.

2.1 ESPACIOS PROYECTIVOS

Definición 2.1. Para cada $n \geq 1$ definimos el **espacio proyectivo** $\mathbb{P}_k^n$ como el conjunto de todos los subespacios de dimensión 1 de k^{n+1} . Si $p \in k^{n+1}$ no es cero, denotamos por $[p]$ al subespacio de k^{n+1} generado por p , de esta forma $\mathbb{P}_k^n = \{[p] \mid p \in k^{n+1}, p \neq 0\}$. Observemos que $[p] = [q]$, si y solo si, $p = \lambda q$ para algún $\lambda \in k^\times$. En otros términos, $\mathbb{P}_k^n$ es el cociente $(k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, donde $\sim$ es la equivalencia sobre $k^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que si $p, q \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, entonces $p \sim q$, si y solo si, p y q determinan la misma recta que pasa a través del origen, si y solo si, $p = \lambda q$ para algún $\lambda \in k^\times$, si y solo si, $[p] = [q]$.

Definición 2.2. Si P es un punto en $\mathbb{P}_k^n$, entonces un conjunto de **coordenadas homogéneas** de P es una $(n+1)$ -tupla $(p_0, \dots, p_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que $P = [p]$. Como notación escribimos $[p] := [p_0 : \dots : p_n]$.

Ejemplo 2.3. Cada punto $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ está en correspondencia con una recta en el plano $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen.

Observación 2.4. Denotamos al espacio proyectivo complejo por $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

Si $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$, entonces $f(\lambda p) = \lambda^d f(p)$ para todo $p \in k^{n+1}$ y todo $\lambda \in k^\times$. Por tanto, para $p \in k^{n+1}$ y $\lambda \in k^\times$ tenemos para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ que $f(\lambda p) = 0$, si y solo si, $f(p) = 0$. Notemos que si $[p] = [q] \in \mathbb{P}_k^n$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$, entonces $f(p) = 0$, si y solo si, $f(q) = 0$.

Definición 2.5. Para cada ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$ definimos el **conjunto algebraico**

$$\{\mathfrak{a} = 0\} := \{[p] \in \mathbb{P}_k^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{a} \cap k[x_0, \dots, x_n]_h\}.$$

Si $f_1, f_2, \dots, f_m \in k[x_0, \dots, x_n]$ son homogéneos, escribimos

$$\{f_1 = \dots = f_m = 0\} := \{\langle f_1, \dots, f_m \rangle = 0\}.$$

Proposición 2.6. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$ y $p \in k^{n+1}$ no nulo. Entonces $[p]$ pertenece a $\{\mathfrak{a} = 0\}$, si y solo si, $\ker(\nu_p) \supset \mathfrak{a}$ (respecto a la notación véase Observación 1.25).

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\{g_1, g_2, \dots, g_m\} \subset k[x_0, \dots, x_n]_h$ un conjunto generador de $\mathfrak{a}$. Supongamos que $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$. Si $f \in \mathfrak{a}$, encontramos $h_1, h_2, \dots, h_m$ tal que $f = h_1 g_1 + h_2 g_2 + \dots + h_m g_m$. Como $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$ y $g_i \in \mathfrak{a} \cap k[x_0, \dots, x_n]_h$, entonces $g_i(p) = 0$ y $f(p) = 0$. Por tanto $f \in \ker(\nu_p)$ y $\mathfrak{a} \subset \ker(\nu_p)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\ker(\nu_p) \supset \mathfrak{a}$. Así $f \in \ker(\nu_p)$ para todo $f \in \mathfrak{a}$, equivalentemente, $f(p) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{a}$, en particular $f(p) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{a} \cap k[x_0, \dots, x_n]_h$, por tanto $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$. $\square$

Por esta caracterización encontramos para cada ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$

$$\{\mathfrak{a} = 0\} = \{[p] \in \mathbb{P}_k^n \mid \ker(\nu_p) \supset \mathfrak{a}\}. \quad (2.1)$$

Proposición 2.7. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales homogéneos de $k[x_0, \dots, x_n]$ y $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ una colección de ideales homogéneos de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces

$$\{\mathfrak{a} = 0\} \cup \{\mathfrak{b} = 0\} = \{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0\} \quad \text{y} \quad \bigcap_{i \in I} \{\mathfrak{a}_i = 0\} = \left\{ \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = 0 \right\}.$$

Demostración. Se deduce fácilmente a partir de la expresión (2.1). $\square$

Definición 2.8. Vemos a $\mathbb{P}_k^n$ como un espacio topológico bajo la topología **Zariski** la cual tiene como cerrados los subconjuntos $\{\mathfrak{a} = 0\}$, con $\mathfrak{a}$ ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Definición 2.9. El **espacio afín** $\mathbb{A}_k^n$, es el espacio topológico sobre k^n , cuyos cerrados son los conjuntos

$$Z(\mathfrak{a}) := \{p \in k^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Observación 2.10. Para cada $0 \leq i \leq n$ definimos el *hiperplano* $H_i = \{x_i = 0\} \subset \mathbb{P}_k^n$ y sea U_i su complemento en $\mathbb{P}_k^n$, esto es, $U_i = \mathbb{P}_k^n \setminus H_i$. Cada U_i es homeomorfo a $\mathbb{A}_k^n$. Explícitamente, sea $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ la función definida como

$$\varphi_i[p_0 : \dots : p_n] = \left(\frac{p_0}{p_i}, \dots, \frac{p_{i-1}}{p_i}, 1, \frac{p_{i+1}}{p_i}, \dots, \frac{p_n}{p_i} \right).$$

Es claro que φ_i es una biyección, y no es difícil ver que φ_i es un homeomorfismo. Notemos que los U_i cubren a $\mathbb{P}_k^n$, esto es, $\mathbb{P}_k^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$, donde los U_i son espacios afines $\mathbb{A}_k^n$. En conclusión, el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ tiene una cubierta abierta de $n + 1$ espacios afines $\mathbb{A}_k^n$.

Proposición 2.11. Todo punto en $\mathbb{P}_k^n$ es cerrado.

Demostración. Sea $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ y supongamos que $p_i \neq 0$. Para cada $j \neq i$ definamos el polinomio $f_j = p_j x_i - p_i x_j \in k[x_0, \dots, x_n]_1$, así $\{[p]\} = \{f_0 = \dots = f_{i-1} = f_{i+1} = \dots = f_n = 0\}$. $\square$

Proposición 2.12. Todo subconjunto cerrado propio de $\mathbb{P}_k^1$ es finito.

Demostración. Sea $\{f_1 = \dots = f_n = 0\}$ un subconjunto cerrado propio de $\mathbb{P}_k^1$, donde los f_i son formas homogéneas en $k[x_0, x_1]$, así $f_i \neq 0$ para algún i , y $\{f_1 = \dots = f_n = 0\} \subset \{f_i = 0\}$. Por tanto es suficiente con mostrar que $\{f = 0\}$ es finito para cada forma homogénea f en $k[x_0, x_1]$ no nula. Supongamos que $[p_0 : p_1] \in \{f = 0\}$ y $p_0, p_1 \neq 0$, así $[p_0 : p_1] = [1, p]$ para algún $p \neq 0$. Escribamos $f = \sum_{i=0}^d c_i x_0^i x_1^{d-i}$, donde d es el grado de f y $c_0, c_1, \dots, c_m \in k$ no son todos cero, por tanto $0 = f(1, p) = \sum_{i=0}^d c_i p^{d-i}$, así p es una raíz del polinomio $g = \sum_{i=0}^d c_i x^{d-i} \in k[x]$ no nulo. Como k es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces g tiene exactamente d raíces, digamos $r_1, \dots, r_d$. Por tanto $p = r_i$ para algún i , concluyendo que $\{f = 0\}$ es finito. $\square$

Por este par de proposiciones vemos que la topología sobre $\mathbb{P}_k^1$ es la cofinita.

Corolario 2.13. $\mathbb{P}_k^1$ no es un espacio Hausdorff.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y que $\mathbb{P}_k^1$ no es finito. $\square$

Definición 2.14. Recordemos que un **subconjunto localmente cerrado** de un espacio topológico X es la intersección de un abierto y un cerrado en X . En particular, los subconjuntos abiertos y los subconjuntos cerrados de X son localmente cerrados.

Definición 2.15. Sea U un subconjunto localmente cerrado de $\mathbb{P}_k^n$. Decimos que $U \xrightarrow{\alpha} k$ es una **función regular** si para cada $x \in U$ existe $U_x \subset U$ abierto en U y $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos del mismo grado tal que $x \in U_x$, $\{g = 0\} \cap U_x = \emptyset$ y $\alpha[p] = f(p)/g(p)$ para todo $[p] \in U_x$.

2.2 ESPACIOS BIPROYECTIVOS

Esta sección es una generalización del anterior, por lo cual nos limitamos a introducir la notación. Las pruebas, argumentos y construcciones son en esencia los mismos, y por tanto omitiremos dichas pruebas.

Definición 2.16. Al producto de los espacios proyectivos $\mathbb{P}_k^n$ y $\mathbb{P}_k^m$ lo llamamos un **espacio biproyectivo**.

Observación 2.17. A las parejas ordenadas en $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ la denotamos por $[p, q]$, donde $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ y $[q] \in \mathbb{P}_k^m$. En particular, si $[p] = [p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}_k^n$ y $[q] = [q_0 : \dots : q_m] \in \mathbb{P}_k^m$, entonces $[p, q] := [p_0 : \dots : p_n; q_0 : \dots : q_m] \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$.

Si $f \in k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ es bihomogéneo de grado r en x y grado s en y , entonces $f(\lambda p, \tau q) = \lambda^r \tau^s f(p, q)$ para todo $p \in k^{n+1}, q \in k^{m+1}$ y todo par $\lambda, \tau \in k^\times$. Por tanto, para cada par de puntos $p \in k^{n+1}, q \in k^{m+1}$ y cada par de constantes no nulas $\lambda, \tau \in k^\times$ tenemos para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ que $f(\lambda p, \tau q) = 0$, si y solo si, $f(p, q) = 0$. Notemos que si $[p, q] = [u, v] \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$, entonces $f(p, q) = 0$, si y solo si, $f(u, v) = 0$.

Definición 2.18. Para cada ideal bihomogéneo $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ definimos el **conjunto algebraico**

$$\{\mathfrak{a} = 0\}_{x,y} = \{[p, q] \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \mid f(p, q) = 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{a} \cap k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]_h\}.$$

Proposición 2.19. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal bihomogéneo de $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ y $p \in k^{n+1}$, $q \in k^{m+1}$ no nulos. Entonces $[p, q] \in \{\mathfrak{a} = 0\}_{x,y}$, si y solo si, $\ker(\nu_{p,q}) \supset \mathfrak{a}$.

Para cada ideal bihomogéneo $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ se satisface

$$\{\mathfrak{a} = 0\}_{x,y} = \{[p, q] \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \mid \ker(\nu_{p,q}) \supset \mathfrak{a}\}. \quad (2.2)$$

Proposición 2.20. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales bihomogéneos de $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ y $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ una colección de ideales bihomogéneos de $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$, entonces

$$\{\mathfrak{a} = 0\}_{x,y} \cup \{\mathfrak{b} = 0\}_{x,y} = \{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0\}_{x,y} \quad \text{y} \quad \bigcap_{i \in I} \{\mathfrak{a}_i = 0\}_{x,y} = \left\{ \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = 0 \right\}_{x,y}.$$

Observación 2.21. Vemos a $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ como un espacio topológico bajo la topología **Zariski** la cual tiene como cerrados los conjuntos algebraicos $\{\mathfrak{a} = 0\}_{x,y}$, con $\mathfrak{a}$ ideal bihomogéneo de $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$. Por lo general esta topología sobre $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ no coincide con la topología producto. En efecto, veamos que la topología Zariski sobre $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ no coincide con la topología producto. Observemos que la diagonal $\Delta \subset \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ es un cerrado Zariski ya que $\Delta = \{x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0\}$. Si Δ fuese cerrado en la topología producto sobre $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$, entonces $\mathbb{P}_k^1$ sería un espacio Hausdorff por [Bou67, Chapter 1, Section §8, Proposition 1], contradicción.

Definición 2.22. Sea U un subconjunto localmente cerrado de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$. Decimos que $U \xrightarrow{\alpha} k$ es una **función regular** si para cada $x \in U$ existe $U_x \subset U$ abierto en U y f, g formas bihomogéneas del mismo grado en $k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$ tal que $x \in U_x$, $\{g = 0\}_{x,y} \cap U_x = \emptyset$ y para todo $[p, q] \in U_x$ se satisface $\alpha[p, q] = f(p, q)/g(p, q)$.

2.3 MORFISMOS REGULARES

Sean X, Y subconjuntos cerrados de espacios proyectivos o biproyectivos.

Definición 2.23. Decimos que $X \xrightarrow{f} Y$ es un **morfismo regular** si f es continua y para cada función regular $V \xrightarrow{\alpha} k$, con V abierto en Y , se tiene que la función $f^{-1}(V) \xrightarrow{f^\# \alpha} k$ definida como $f^\# \alpha(x) = \alpha(f(x))$, es una función regular.

Proposición 2.24. La composición de morfismos regulares es un morfismo regular.

Demostración. Es claro que la continuidad se preserva por composición. Por otro lado, como $(gf)^\# \alpha = f^\#(g^\# \alpha)$ para cualesquiera funciones $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ y $V \xrightarrow{\alpha} k$, con $V \subset Z$, entonces $(gf)^\# \alpha$ es una función regular si α es una función regular y f, g son morfismos regulares. $\square$

La colección de todos los automorfismos regulares sobre X la denotamos por $\text{Aut}(X)$.

Definición 2.25. Decimos que X es una **variedad algebraica** si X es *irreducible*. Recordemos que un espacio topológico X es **irreducible** si $X = X_1 \cup X_2$ para X_1, X_2 subconjuntos cerrados de X , entonces $X = X_1$ o $X = X_2$.

Definición 2.26. Decimos que Y es una **subvariedad** de X si Y es un subconjunto cerrado de X .

Veamos algunos ejemplos de morfismos regulares.

Proposición 2.27. Si Y es una subvariedad de $\mathbb{P}_k^n$, entonces la inclusión $Y \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{P}_k^n$ es un morfismo regular.

Demostración. Es claro que ι es continua. Veamos ahora que $\beta = \iota^\# \alpha$ es una función regular para cada función regular $V \xrightarrow{\alpha} k$, con V abierto en $\mathbb{P}_k^n$. Si $x \in Y \cap V$, entonces $x \in V$ y encontramos $V_x \subset V$ abierto en V y $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos del mismo grado tal que $x \in V$, $\{g = 0\} \cap V_x = \emptyset$ y $\alpha[p] = f(p)/g(p)$ para todo $[p] \in V_x$. Sea $Y_x = Y \cap V_x$, entonces $x \in Y_x$ y Y_x es abierto en Y . Además $Y_x \cap \{g = 0\} = \emptyset$. Para $[p] \in Y_x$ tenemos que $[p] \in V_x$ y $\beta[p] = \alpha(\iota[p]) = \alpha[p] = f(p)/g(p)$. Por tanto $Y \cap V \xrightarrow{\beta} k$ es una función regular. $\square$

Definición 2.28. Una **función polinomial** sobre $\mathbb{P}_k^n$ es una función $\mathbb{P}_k^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_k^k$ tal que existe $d \geq 1$ y $g_i \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ para $0 \leq i \leq n$ de forma que $[p_0 : \dots : p_n] \mapsto [g_0(p) : \dots : g_n(p)]$. Análogamente, una función polinomial de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ en $\mathbb{P}_k^t$ es una función $\varphi : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^t$ tal que existen $r, s \geq 1$ y para cada $0 \leq j \leq t$ existe $g_j \in k[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]_{r,s}$, de modo que $\varphi[p, q] = [u]$ y $u_i = g_i(p, q)$ para todo $0 \leq i \leq t$.

Proposición 2.29. Toda función polinomial sobre $\mathbb{P}_k^n$ es un morfismo regular.

Demostración. Veamos que $\mathbb{P}_k^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_k^k$ es continua. Sea $\{f_1 = \dots = f_m = 0\}$ cerrado en $\mathbb{P}_k^n$. Definamos $\Phi : k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]$ tal que $\Phi(r) = r$ para $r \in k$ y $\Phi(x_i) = g_i$ para $0 \leq i \leq n$. Sean $h_i = \Phi(f_i)$ para $1 \leq i \leq m$. Como los g_i son homogéneos y del mismo grado, entonces $\Phi(f)$ es homogéneo para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo. En particular cada h_i es homogéneo. Para $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ escribamos $[q] = \varphi[p]$, donde $q_i = g_i(p)$. Vamos a probar que $\Phi(f)(p) = f(q)$ para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]$, esto es, $\nu_p \Phi = \nu_q$. Para esto sera suficiente con mostrar que $\nu_p \Phi(x_i) = \nu_q(x_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$. Observemos que

$$\nu_p \Phi(x_i) = \nu_p(g_i) = g_i(p) = q_i = \nu_q(x_i).$$

En particular $h_i(p) = \Phi(f_i)(p) = f_i(q)$ para todo $1 \leq i \leq m$. De esto último encontramos que

$$\{h_1 = \dots = h_m = 0\} = \varphi^{-1}\{f_1 = \dots = f_m = 0\}.$$

Por tanto la preimagen de cerrados de $\mathbb{P}_k^n$ por φ es cerrado en $\mathbb{P}_k^n$, verificando que φ es continua.

Veamos ahora que φ es regular. Si α es una función regular de $\mathbb{P}_k^n$ en V , entonces debemos mostrar que $\beta = \varphi^\# \alpha$ es una función regular de $\mathbb{P}_k^n$ en $\varphi^{-1}(V)$. Si $[p] \in \varphi^{-1}(V)$, entonces $[q] \in V$, con $q_i = g_i(p)$. Como α es regular, encontramos $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos del mismo grado tal que $\alpha[v] = f(v)/g(v)$ para todo $[v] \in V_q$, donde $[q] \in V_q$, V_q es abierto en V y $\{g = 0\} \cap V_q = \emptyset$. Sea $U_p = \varphi^{-1}(V_q)$. Así U_p es abierto en $\varphi^{-1}(V)$ y $[p] \in U_p$. Sea $[u] \in U_p$ y $[v] = \varphi[u]$, donde $v_i = g_i(u)$. Sean $r = \Phi(f)$ y $s = \Phi(g)$. Como f y g tiene el mismo grado, y los g_i tienen el mismo grado, entonces r y s tienen el mismo grado. Observemos que $\{s = 0\}$ es igual a $\varphi^{-1}\{g = 0\}$, por tanto $\{s = 0\} \cap U_p = \emptyset$. Como $\beta[u] = \varphi[v] = f(v)/g(v) = r(u)/s(u)$. Por tanto β es una función regular de $\mathbb{P}_k^n$ en $\varphi^{-1}(V)$ y φ es un morfismo regular. $\square$

Similarmente se muestra que toda función polinomial de $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ en $\mathbb{P}_k^t$ es un morfismo regular. En particular, las **proyecciones** $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ y $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ definidas como $[p, q] \mapsto [p]$ y $[p, q] \mapsto [q]$, respectivamente, son morfismos regulares ya que son funciones polinomiales. Más importante es lo siguiente:

Proposición 2.30. Las proyecciones $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ y $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ son mapeos cerrados.

Demostración. Véase [Gat, Theorem 3.4.2]. $\square$

Para cada matriz invertible A de tamaño $n + 1$ con entradas en k , definimos $[A] : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ como la función tal que $[A][p] = [Ap]$ para todo $[p] \in \mathbb{P}_k^n$. Es claro que $[A]$ está bien definida y es una biyección sobre $\mathbb{P}_k^n$. Observemos que $[A]^{-1} = [A^{-1}]$.

Proposición 2.31. $[A]$ es un automorfismo regular sobre $\mathbb{P}_k^n$.

Demostración. Por lo último notado sera suficiente con mostrar que $[A]$ es un morfismo regular. Teniendo en cuenta la Proposición 2.29 sera suficiente con mostrar que $[A]$ es una función polinomial sobre $\mathbb{P}_k^n$. Escribamos

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \cdots & A_{0,n} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,0} & A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Para cada $0 \leq i \leq n$ definamos $g_i \in k[x_0, \dots, x_n]_1$ como $g_i = \sum_{j=0}^n A_{i,j}x_j$. Es claro que si $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ y $[q] = [Ap]$, entonces $q_i = g_i(p)$. Por tanto $[A]$ es una función polinómica, y por la Proposición 2.29 vemos $[A]$ es un morfismo regular y en consecuencia automorfismo regular sobre $\mathbb{P}_k^n$. $\square$

2.4 SUBVARIEDADES IRREDUCIBLES DE $\mathbb{P}_k^n$

En esta sección vamos a mostrar que una subvariedad E de $\mathbb{P}_k^n$ es irreducible, si y solo si, $E = \{p = 0\}$ para algún ideal homogéneo irreducible p de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Definición 2.32. Cada subconjunto cerrado E de $\mathbb{P}_k^n$ tiene su correspondiente **ideal homogéneo** de $k[x_0, \dots, x_n]$ el cual está definido como

$$\mathcal{I}(E) = \langle f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \text{ para todo } [p] \in E \rangle.$$

Proposición 2.33. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- I) $\{\mathfrak{a} = 0\} = \emptyset$.
- II) $\mathfrak{a} = k[x_0, \dots, x_n]$ o $\sqrt{\mathfrak{a}} = k[x_0, \dots, x_n]_+$.
- III) $\mathfrak{a} \supset k[x_0, \dots, x_n]_d$ para algún $d > 0$.

Demostración.

II) $\Rightarrow$ III) Es evidente.

III) $\Rightarrow$ II) Para cada $0 \leq i \leq n$ tenemos que $x_i^d \in k[x_0, \dots, x_n]_d \subset \mathfrak{a}$, así $x_i \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ y $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por tanto $k[x_0, \dots, x_n]_+ = \langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Notemos que $k[x_0, \dots, x_n]_+$ es un ideal maximal ya que $k[x_0, \dots, x_n]_+ = \ker(\nu_0)$, por tanto $\sqrt{\mathfrak{a}} = k[x_0, \dots, x_n]_+$, o de lo contrario $\sqrt{\mathfrak{a}} = k[x_0, \dots, x_n]$. En el último caso tenemos que $1 = 1^d \in \mathfrak{a}$ para algún $d \geq 1$, y se sigue $\mathfrak{a} = k[x_0, \dots, x_n]$.

II) $\Rightarrow$ I) Supongamos que $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$, entonces $\mathfrak{a} \subset \ker(\nu_p) \neq k[x_0, \dots, x_n]$. Por tanto $\sqrt{\mathfrak{a}} = k[x_0, \dots, x_n]_+$ y para cada $0 \leq i \leq n$ encontramos un $d_i \geq 1$ tal que $x_i^{d_i} \in \mathfrak{a}$. Así

$x_i^{d_i} \in \ker(\nu_p)$. Como $\ker(\nu_p)$ es un ideal primo, entonces $x_i \in \ker(\nu_p)$, de donde $0 = \nu_p(x_i) = p_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, esto es, $p = 0$, contradicción. Por tanto $\{\mathfrak{a} = 0\} = \emptyset$.

I) $\Rightarrow$ II) Si $\mathfrak{a} = k[x_0, \dots, x_n]$ no hay nada que probar. Supongamos que $\mathfrak{a} \neq k[x_0, \dots, x_n]$, por tanto $\mathfrak{a}$ está contenido en algún ideal máximo de $k[x_0, \dots, x_n]$. Por el Nullstellensatz débil este ideal máximo es igual a $\ker(\nu_p)$ para algún $p \in k^{n+1}$. Así $\ker(\nu_p) \supset \mathfrak{a}$. Si $p \neq 0$, entonces $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\} = \emptyset$, contradicción. Por tanto $p = 0$, en conclusión, el único ideal máximo que contiene a $\mathfrak{a}$ es $\ker(\nu_0) = k[x_0, \dots, x_n]_+$, por tanto el Nullstellensatz fuerte nos dice que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \ker(\nu_0) = k[x_0, \dots, x_n]_+$. $\square$

Proposición 2.34. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$ tal que $\{\mathfrak{a} = 0\} \neq \emptyset$. Entonces

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\}).$$

Demostración. Supongamos que $\ker(\nu_p) \supset \mathfrak{a}$. Si $p \neq 0$, entonces $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$. Si f es una forma homogénea en $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$, entonces $f(p) = 0$ y $f \in \ker(\nu_p)$. Por tanto $\ker(\nu_p) \supset \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ ya que este último es un ideal homogéneo. Como $\{\mathfrak{a} = 0\} \neq \emptyset$ entonces existe $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$. Si $b \in \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\}) \cap k$, entonces $0 = b(p) = b$, por tanto todo polinomio homogéneo no nulo en $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ es de grado positivo, esto implica que $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\}) \subset k[x_0, \dots, x_n]_+ = \ker(\nu_0)$. En conclusión, todo ideal máximo que contiene a $\mathfrak{a}$ también contiene a $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$, por tanto se sigue del Nullstellensatz fuerte que $\sqrt{\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Claramente $\mathfrak{a} \subset \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$, luego $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \sqrt{\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})}$ y $\sqrt{\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por tanto es suficiente con mostrar que $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ es un ideal radical. Razonemos por contradicción, por tanto encontramos $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ y $d \geq 1$ tal que $f^d \in \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ y $f \notin \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$. Como $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ es un ideal homogéneo y $f \notin \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$, entonces hay un mínimo $r \geq 0$ tal que $f_r \notin \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$. Como $f^d \in \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ y este ideal es homogéneo, entonces $(f^d)_{dr} \in \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$. Observemos que

$$(f^d)_{dr} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{N}^d \\ |\sigma| = dr}} f_{\sigma(1)} f_{\sigma(2)} \cdots f_{\sigma(d)},$$

de modo que si $\tau \in \mathbb{N}^d$ es la sucesión constante r y $J = \{\sigma \in \mathbb{N}^d \mid |\sigma| = dr \text{ y } \sigma \neq \tau\}$, entonces

$$(f_r)^d = (f^d)_{dr} - \sum_{\sigma \in J} f_{\sigma(1)} f_{\sigma(2)} \cdots f_{\sigma(d)}.$$

Si $\sigma \in J$, entonces algún $\sigma(i) < r$, así $f_{\sigma(i)} \in \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ por elección de r , y $f_{\sigma(1)} f_{\sigma(2)} \cdots f_{\sigma(d)}$ pertenecen a $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$. También $(f^d)_{dr} \in \{\mathfrak{a} = 0\}$, y por tanto $(f_r)^d \in \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$. Como $f_r \notin \mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ y f_r es homogéneo, entonces existe algún $[p] \in \{\mathfrak{a} = 0\}$ tal que $f_r(p) \neq 0$, pero $(f_r)^d(p) = 0$ implica $f_r(p) = 0$, contradicción. Esto prueba que $\mathcal{I}(\{\mathfrak{a} = 0\})$ es un ideal radical. $\square$

Se sigue un corolario para nada trivial.

Corolario 2.35. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Proposición 2.36.

i) Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales homogéneos de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ implica $\{\mathfrak{b} = 0\} \subset \{\mathfrak{a} = 0\}$.

- II) Sean E, F subconjuntos cerrados de $\mathbb{P}_k^n$, entonces $E \subset F$ implica $\mathcal{I}(F) \subset \mathcal{I}(E)$.
 III) Si E es un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}_k^n$, entonces $E = \{\mathfrak{a} = 0\}$ para algún ideal homogéneo radical $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demostración. Los primeros dos ítems son evidentes. Veamos el tercero. Si $E = \emptyset$, entonces $E = \{k[x_0, \dots, x_n] = 0\}$. Supongamos que $E \neq \emptyset$ y $E = \{\mathfrak{a} = 0\}$ con $\mathfrak{a}$ ideal homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$. Sea $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, así $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ y $\{\mathfrak{b} = 0\} \subset E$. Si $[p] \in E$ y $f \in \mathfrak{b}$, entonces $f^d \in \mathfrak{a}$ para algún $d \geq 1$ y $(f^n)(p) = 0$, $f(p) = 0$, por tanto $[p] \in \{\mathfrak{b} = 0\}$ y se sigue la igualdad $E = \{\mathfrak{b} = 0\}$. $\square$

Teorema 2.37. Hay una correspondencia biyectiva entre

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Ideales radicales homogéneos } \neq k[x_0, \dots, x_n]_+\} & \Longleftrightarrow & \{\text{Subconjuntos cerrados de } \mathbb{P}_k^n\} \\ \mathfrak{a} & \mapsto & \{\mathfrak{a} = 0\} \\ \mathcal{I}(E) & \longleftarrow & E \end{array}$$

donde los mapeos aquí indicados son uno al otro su inversa.

Demostración. Veamos que el mapeo $\mathfrak{a} \mapsto \{\mathfrak{a} = 0\}$ es una biyección. Por la proposición anterior este mapeo es sobreyectivo. Si $\{\mathfrak{a} = 0\} = \{\mathfrak{b} = 0\} \neq \emptyset$, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Por otro lado, el único ideal radical homogéneo $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$ diferente de $k[x_0, \dots, x_n]_+$ tal que $\{\mathfrak{a} = 0\} = \emptyset$ es el mismo $k[x_0, \dots, x_n]$, esto por la Proposición 2.33. Por tanto el mapeo en cuestión es una biyección. Por la Proposición 2.34 se sigue que $E \mapsto \mathcal{I}(E)$ es la inversa del previo mapeo. $\square$

Teorema 2.38. Un subconjunto cerrado E de $\mathbb{P}_k^n$ es irreducible, si y solo si, $\mathcal{I}(E)$ es un ideal primo de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demostración. Escribamos $E = \{\mathfrak{a} = 0\}$, con $\mathfrak{a}$ ideal radical homogéneo de $k[x_0, \dots, x_n]$ diferente de $k[x_0, \dots, x_n]_+$. Por el teorema anterior $\mathcal{I}(E) = \mathfrak{a}$. Por tanto queremos mostrar que $\{\mathfrak{a} = 0\}$ es irreducible, si y solo si, $\mathfrak{a}$ es primo. Supongamos que $\mathfrak{a}$ es primo y escribamos $\{\mathfrak{a} = 0\} = \{\mathfrak{b} = 0\} \cup \{\mathfrak{c} = 0\}$, con $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ideales radicales homogéneos de $k[x_0, \dots, x_n]$ diferentes de $k[x_0, \dots, x_n]_+$. Así $\{\mathfrak{a} = 0\} = \{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} = 0\}$. Si este último es vacío, entonces es irreducible, supongamos ahora que no es vacío, por tanto $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}$. Veamos que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ o $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. Razonemos por contradicción, por tanto tenemos $f \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{a}$ y $g \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{a}$, así $fg \in \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} \subset \sqrt{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}} = \mathfrak{a}$, como $\mathfrak{a}$ es primo, entonces $f \in \mathfrak{a}$ o $g \in \mathfrak{a}$, contradicción. Por tanto $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ o $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, luego $\{\mathfrak{a} = 0\} = \{\mathfrak{b} = 0\}$ o $\{\mathfrak{a} = 0\} = \{\mathfrak{c} = 0\}$, lo cual concluye que $\{\mathfrak{a} = 0\}$ es irreducible.

Supongamos ahora que $\{\mathfrak{a} = 0\}$ es irreducible y $\mathfrak{a}$ no es primo. Se deduce en primer lugar que $\{\mathfrak{a} = 0\} \neq \emptyset$ puesto que $\mathfrak{a} \neq k[x_0, \dots, x_n]$. Como $\mathfrak{a}$ es homogéneo y no primo, entonces existen $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos tales que $fg \in \mathfrak{a}$ pero $f, g \notin \mathfrak{a}$. Observemos que

$$\{\mathfrak{a} = 0\} = (\{\mathfrak{a} = 0\} \cap \{f = 0\}) \cup (\{\mathfrak{a} = 0\} \cap \{g = 0\}).$$

Como $\mathfrak{a}$ es irreducible, podemos suponer sin pérdida en generalidad que

$$\{\mathfrak{a} = 0\} = \{\mathfrak{a} = 0\} \cap \{f = 0\},$$

luego $\emptyset \neq \{\mathfrak{a} = 0\} \subset \{f = 0\}$ y $\sqrt{\langle f \rangle} \subset \mathfrak{a}$, de donde $f \in \mathfrak{a}$, contradicción. Por tanto $\mathfrak{a}$ es primo. $\square$

Corolario 2.39. Un subconjunto cerrado E de $\mathbb{P}_k^n$ es irreducible, si y solo si, $E = \{\mathfrak{a} = 0\}$ para algún ideal homogéneo primo $\mathfrak{a}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demostración. Es inmediato por Teorema 2.37 y Teorema 2.38. $\square$

2.5 HIPERSUPERFICES DE $\mathbb{P}_k^n$

En esta sección vamos a mostrar que una subvariedad E de $\mathbb{P}_k^n$ es una *hipersuperficie* de $\mathbb{P}_k^n$, si y solo si, $E = \{f = 0\}$ para algún polinomio homogéneo no constante $f \in k[x_0, \dots, x_n]$.

Precisemos la expresión "...hipersuperficie de ...".

Definición 2.40. La **dimensión (de Krull)** de un espacio topológico X es el supremo de todos los $n \geq -1$ para los cuales existe una cadena $X_{-1} \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n$ de subconjuntos cerrados irreducibles de X . Denotamos este n por $\dim(X)$.

Definición 2.41. Un espacio topológico X de dimensión finita n es una **curva** si $n = 1$ y es una **superficie** si $n = 2$.

Es claro que si X es un espacio de dimensión finita, entonces todo subespacio cerrado de X tiene dimensión finita.

Definición 2.42. Una **hipersuperficie** de un espacio topológico X de dimensión finita es un subespacio cerrado Y de X tal que $\dim(X) = \dim(Y) + 1$.

Definición 2.43. Sea X un espacio Noetheriano y Y un subespacio cerrado irreducible de X . Decimos que Y es un **componente irreducible** de X si no existe subespacio cerrado irreducible Z de X tal que $Y \subsetneq Z \subset X$.

Lema 2.44. Sea X un espacio topológico y $X_1, X_2, \dots, X_n$ cerrados irreducibles de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$. Si Z es un componente irreducible de X , entonces $Z = X_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.

Demostración. En efecto, ya que $Z = \bigcup_{i=1}^n (Z \cap X_i)$, entonces $Z = Z \cap X_i$ para algún i puesto que Z es irreducible, así $Z \subset X_i$, y se sigue la igualdad $Z = X_i$ puesto que Z es un componente irreducible de X . $\square$

Lema 2.45. Todo subconjunto cerrado irreducible de un espacio topológico X esta contenido en un componente irreducible de X .

Demostración. Tomemos Y subconjunto cerrado irreducible de X y definamos Λ como la colección de todos los cerrados irreducibles de X que contienen a Y . Por tanto Λ no es vacío ya que $Y \in \Lambda$. Vemos a Λ como un conjunto parcialmente ordenado por inclusión. Apliquemos el Lema de Zorn para mostrar que Λ tiene elementos maximales. Tomemos $\mathcal{C}$ una cadena no vacía en Λ . Veamos que $Z = \overline{\bigcup \mathcal{C}}$ es un subconjunto irreducible de X . Supongamos que $Z = Z_1 \cup Z_2$, con Z_1, Z_2 cerrados en Z . Si $\bigcup \mathcal{C} \subset Z_1$, entonces $Z \subset Z_1$. De lo contrario hay algún $Y_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $Y_\alpha \subsetneq Z_1$. Veamos que $\bigcup \mathcal{C} \subset Z_2$. Tomemos $x \in \bigcup \mathcal{C}$, como $\mathcal{C}$ es una cadena por inclusión y $Y_\alpha \in \mathcal{C}$, entonces existe $Y_\beta \in \mathcal{C}$ tal que $x \in Y_\beta$ y $Y_\alpha \subset Y_\beta$. Como $Y_\beta \subset Z = Z_1 \cap Z_2$, entonces $Y_\beta = (Y_\beta \cap Z_1) \cup (Y_\beta \cap Z_2)$, como Y_β es irreducible se sigue que $Y_\beta = Y_\beta \cap Z_1$ o $Y_\beta = Y_\beta \cap Z_2$, equivalentemente, $Y_\beta \subset Z_1$ o $Y_\beta \subset Z_2$, así $Y_\beta \subset Z_2$ ya que de lo contrario $Y_\alpha \subset Y_\beta \subset Z_1$, contradicción. Por tanto $x \in Z_2$, $\bigcup \mathcal{C} \subset Z_2$, $Z \subset Z_2$ y tenemos la igualdad $Z = Z_2$, verificando que Z es irreducible. Por tanto $Z \in \Lambda$ es una cota superior de $\mathcal{C}$, por tanto se satisface el Lema de Zorn en Λ y existe un elemento maximal en Λ , digamos W . Por definición de componente irreducible y la maximalidad de W en Λ vemos que W es un componente irreducible que contiene a Y . $\square$

Lema 2.46. Todo espacio topológico es unión de sus componentes irreducibles.

Demostración. Sea X un espacio topológico. Si $X = \emptyset$, entonces la única componente irreducible de X es el mismo $\emptyset = X$ y se verifica el lema. Supongamos ahora que X no es vacío, entonces $\overline{\{x\}}$ es un subconjunto cerrado e irreducible de X para todo $x \in X$, y $\overline{\{x\}}$ está contenido en algún componente irreducible de X por Lema 2.45. $\square$

Teorema 2.47. *Todo espacio Noetheriano tiene un número finito de componentes irreducibles.*

Demostración. Razonemos por contradicción, esto es, tenemos un espacio Noetheriano X el cual no tiene finitos componentes irreducibles. Por tanto $X \neq \emptyset$, definamos Γ como la colección de todos los cerrados no vacíos de X que no tienen componentes irreducibles. Así $X \in \Gamma$ y Γ no es vacío. Vemos Γ como un conjunto parcialmente ordenado por inclusión. Como X es un espacio Noetheriano, entonces existe $Y \in \Gamma$ minimal. En particular Y no es irreducible, y encontramos Y_1, Y_2 subconjuntos cerrados propios de Y tal que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Por minimalidad de Y en Γ vemos que Y_1, Y_2 no están en Γ , por tanto Y_1, Y_2 tienen finitas componentes irreducibles y son unión de estos por Lema 2.46, escribamos $Y_1 = \bigcup_{i=1}^n Y_{1i}$ y $Y_2 = \bigcup_{j=1}^m Y_{2j}$ donde los Y_{1i} son los componentes irreducibles de Y_1 y los Y_{2j} son los componentes irreducibles de Y_2 . Así $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^m Y_{2j}$ y se sigue por Lema 2.44 que los componentes irreducibles de Y están entre los Y_{1i} o los Y_{2j} , así Y tiene finitos componentes irreducibles, contradicción ya que $Y \in \Gamma$. $\square$

Corolario 2.48. La dimensión de un espacio Noetheriano es el supremo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

Demostración. Es claro que cada componente irreducible de un espacio Noetheriano X tiene dimensión no mayor que la de X . Si alguno de estos componentes irreducibles tiene dimensión no finita, entonces X también tiene dimensión no finita. Supongamos que cada componente irreducible de X tiene dimensión finita. Por Teorema 2.47 podemos tomar Z componente irreducible de X de máxima dimensión. Sea $X_{-1} \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$ una cadena de subconjuntos cerrados irreducibles de X . Por Lema 2.45 encontramos Y componente irreducible tal que $X_n \subset Y$, de esto que $\dim(Z) \geq \dim(Y) \geq n$, por definición de $\dim(X)$ se sigue que $\dim(X) \leq \dim(Z)$ y tenemos la igualdad $\dim(X) = \dim(Z)$. $\square$

Proposición 2.49. La dimensión de $\mathbb{P}_k^n$ es n .

Demostración. Véase [Gat, Corollary 4.1.8]. $\square$

Esto nos dice que $\mathbb{P}_k^n$ tiene dimensión finita y podemos hablar de hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^n$.

Corolario 2.50. Toda curva en $\mathbb{P}_k^2$ es una hipersuperficie, y viceversa.

Corolario 2.51. Toda superficie en $\mathbb{P}_k^3$ es una hipersuperficie, y viceversa.

Teorema 2.52. *Si E es una hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^n$, entonces E es igual a $\{f = 0\}$ para algún $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomio homogéneo no constante.*

Demostración. Por Corolario 2.48 podemos suponer que E es irreducible. Por Corolario 2.39 tenemos que $E = \{\mathfrak{p} = 0\}$ para algún ideal homogéneo primo $\mathfrak{p}$ de $k[x_0, \dots, x_n]$. Si $\mathfrak{p} = 0$, entonces $E = \mathbb{P}_k^n$, contradicción. Por tanto $\mathfrak{p} \neq 0$ y encontramos $f \in \mathfrak{p}$ polinomio homogéneo no constante. Como f es homogéneo, entonces todo factor de f es homogéneo. Por otro lado, como $\mathfrak{p}$ es primo y $f \in \mathfrak{p}$ no es constante, entonces encontramos algún g factor irreducible homogéneo

no constante de f tal que $g \in \mathfrak{p}$. Por tanto $E = \{\mathfrak{p} = 0\} \subset \{g = 0\}$. Por Corolario 2.39 vemos que $\{g = 0\}$ es irreducible y es claro que $\{g = 0\} \neq \mathbb{P}_k^n$. Recordemos que $\mathbb{P}_k^n$ es irreducible por Corolario 2.39 ya que $\mathbb{P}_k^n = \{0 = 0\}$ y 0 es un ideal irreducible de $k[x_0, \dots, x_n]$. Por tanto $\mathbb{P}_k^n$ es el único componente irreducible de si mismo y al ser $\{g = 0\}$ un subconjunto cerrado irreducible propio de $\mathbb{P}_k^n$ se sigue que $\dim\{g = 0\} < \dim(\mathbb{P}_k^n)$. Observemos que $\dim(E) \leq \dim\{g = 0\}$ con igualdad, si y solo si, $E = \{g = 0\}$ ya que este último es irreducible. Si $E \subsetneq \{g = 0\}$, entonces $\dim(\mathbb{P}_k^n) - 1 = \dim(E) < \dim\{g = 0\} < \dim(\mathbb{P}_k^n)$, contradicción. Por tanto $E = \{g = 0\}$, con g polinomio homogéneo no constante en $\mathbb{P}_k^n$. $\square$

Proposición 2.53. Si E es una subvariedad irreducible de $\mathbb{P}_k^n$ y f es un polinomio homogéneo no constante en $k[x_0, \dots, x_n]$ que no se anula en todo E , esto es, $E \not\subset \{f = 0\}$, entonces

$$\dim(E \cap \{f = 0\}) = \dim(E) - 1.$$

Demostración. Véase [Gat, Proposition 4.1.9]. $\square$

Corolario 2.54. Si f es un polinomio homogéneo no constante en $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces $\{f = 0\}$ es una hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^n$.

Demostración. Como $\mathbb{P}_k^n$ es irreducible y $\{f = 0\} \neq \mathbb{P}_k^n$, entonces $\{f = 0\}$ tiene dimensión $\dim(\mathbb{P}_k^n) - 1$ por Proposición 2.53. Por tanto $\{f = 0\}$ es una hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^n$. $\square$

Teorema 2.55. Una subvariedad E de $\mathbb{P}_k^n$ es una hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^n$, si y solo si, $E = \{f = 0\}$ para algún polinomio homogéneo no constante $f \in k[x_0, \dots, x_n]$.

Demostración. Es inmediato por Teorema 2.52 y Corolario 2.54. $\square$

Definición 2.56. Una hipersuperficie $\{f = 0\}$ de $\mathbb{P}_k^n$ (con f no constante) es **suave** si

$$\{f = f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} = \emptyset.$$

Por el Teorema de Euler 1.19 vemos que

$$\{f = f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} = \{f_{x_0} \dots = f_{x_n} = 0\}.$$

Por tanto $\{f = 0\}$ es suave, si y solo si, $\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} = \emptyset$.

Definición 2.57. A los puntos en la subvariedad $\{f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n} = 0\}$ los llamamos **puntos singulares de f** . Un polinomio homogéneo no constante f en $k[x_0, \dots, x_n]$ es **singular** si

$$\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} \neq \emptyset.$$

Así establecidas estas equivalencias tenemos otra caracterización de hipersuperficies suaves.

Definición 2.58. Una hipersuperficie $\{f = 0\}$ de $\mathbb{P}_k^n$ es suave, si y solo si, f es no singular.

Lema 2.59. Si $f_1, f_2, \dots, f_m$ son polinomios homogéneos no constantes en $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces

$$\dim\{f_1 = \dots = f_m = 0\} \geq n - m.$$

Demostración. Se sigue por inducción a partir de la Proposición 2.53. $\square$

Lema 2.60. Si $n \geq 2$ y g, h son polinomios homogéneos no constantes en $k[x_0, \dots, x_n]$. Entonces $\{g, h = 0\} \neq \emptyset$.

Demostración. Por Lema 2.59 y Proposición 2.49 tenemos que $\dim\{g, h = 0\} \geq 2 - 2 \geq 0$. Por tanto $\{g, h = 0\} \neq \emptyset$ ya que la dimensión de $\emptyset$ es -1 . $\square$

Proposición 2.61. Si $n \geq 2$ y f es un polinomio no homogéneo no constante en $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces f es irreducible si $\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $f = gh$, con g, h polinomios homogéneos no constantes en $k[x_0, \dots, x_n]$. Como $f_{x_i} = gh_{x_i} + hg_{x_i}$, entonces $f_{x_i} \in \langle g, h \rangle$, luego $\{g = h = 0\}$ está contenido en $\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\}$. Por Lema 2.60 tenemos que $\{g = h = 0\} \neq \emptyset$. Por tanto $\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2.62. Si $n \geq 2$, entonces las hipersuperficies irreducibles suaves de $\mathbb{P}_k^n$ son precisamente las subvariedades $\{f = 0\}$ de $\mathbb{P}_k^n$, con f polinomio homogéneo no constante no singular en $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior, Teorema 2.55 y la definición de hipersuperficie suave. $\square$

Definición 2.63. Si $X = \{f = 0\}$ es una hipersuperficie irreducible de $\mathbb{P}_k^n$, con $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ forma homogénea no constante e irreducible, entonces definimos el **grado** de X como el grado de f . Es claro que el grado de X está bien definido.

Observación 2.64. Como corolario de todo lo visto en este capítulo tenemos que las superficies cuárticas suaves en $\mathbb{P}^3$ son los conjuntos algebraicos $\{f = 0\}$, con $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ forma homogénea no singular de grado 4.

En este capítulo k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado, y $n, m, d_0, \dots, d_n, t_0, \dots, t_m$ denotarán enteros positivos, con $d \geq 2$.

3.1 RESULTANTES Y DISCRIMINANTES

Definición 3.1. Un **sistema resultante** de un conjunto $f_1, \dots, f_u$ de formas bihomogéneas en $k[a_0, \dots, a_m; x_0, \dots, x_n]$ es un conjunto $g_1, \dots, g_v$ de formas homogéneas en $k[a_0, \dots, a_m]$ con la siguiente propiedad: para cada $[p] \in \mathbb{P}_k^m$ tenemos que $[p] \in \{g_1 = \dots = g_v = 0\}$, si y solo si,

$$\{f_1(p) = \dots = f_u(p) = 0\} \neq \emptyset.$$

En otros términos, $g_1, \dots, g_v$ es un sistema de resultante de $f_1, \dots, f_u$ si $\{g_1 = \dots = g_v = 0\}$ es la imagen de $\{f_1 = \dots = f_u = 0\}_{a,x}$ por la proyección $\mathbb{P}_k^m \times \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^m$. Si el conjunto algebraico $\{f_1 = \dots = f_u = 0\}_{a,x}$ no es vacío, entonces el ideal homogéneo $\langle g_1, \dots, g_v \rangle$ de $k[a_0, \dots, a_m]$, está bien definido salvo radical. Lo que queremos decir es que si $h_1, \dots, h_w$ es otro sistema resultante de $f_1, \dots, f_u$, entonces $\sqrt{\langle g_1, \dots, g_v \rangle} = \sqrt{\langle h_1, \dots, h_w \rangle}$. Esta última caracterización garantiza la existencia de estos sistemas resultantes.

Describamos algunos sistemas resultantes. Para cada $0 \leq i \leq n$ sea $N_i := \binom{n+d_i}{n}$ y escribamos $N := N_0 + \dots + N_n - 1$. Definamos $M := \binom{n+d}{n} - 1$. Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_{N_0-1} \in \mathbb{N}^{n+1}$ todos los exponentes de grado d_0 , también consideremos $\alpha_{N_0}, \dots, \alpha_{N_0+N_1-1} \in \mathbb{N}^{n+1}$ todos los exponentes de grado d_1 , y así sucesivamente enumeremos todos los exponentes de grados $d_2, \dots, d_n$. Similarmemente, sean $\beta_0, \dots, \beta_M \in \mathbb{N}^{n+1}$ todos los exponentes de grado d . Consideremos las formas bihomogéneas en $k[a_0, \dots, a_N; x_0, \dots, x_n]$

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \dots + a_{N_0-1} x^{\alpha_{N_0-1}} \\ F_1 &= a_{N_0} x^{\alpha_{N_0}} + a_{N_0+1} x^{\alpha_{N_0+1}} + \dots + a_{N_0+N_1-1} x^{\alpha_{N_0+N_1-1}} \\ &\vdots \\ F_n &= a_{N_0+\dots+N_{n-1}} x^{\alpha_{N_0+\dots+N_{n-1}}} + a_{N_0+\dots+N_{n-1}+1} x^{\alpha_{N_0+\dots+N_{n-1}+1}} + \dots + a_N x^{\alpha_N}. \end{aligned}$$

Pensemos en F_i como la forma homogénea general de grado d_i con variables $x_0, \dots, x_n$ parametrizada por $a_0, \dots, a_N$. Observemos que si $f_0, \dots, f_n \in k[x_0, \dots, x_n]$ son formas homogéneas tal que f_i es de grado d_i , entonces hay un único $p \in k^{N+1}$ tal que $f_i = F_i(p)$ para todo $0 \leq i \leq n$. En otras palabras, la sucesión $F_1, \dots, F_n \in k[a_0, \dots, a_N; x_0, \dots, x_n]$ es en este sentido la expresión general de sucesiones $f_0, \dots, f_n \in k[x_0, \dots, x_n]_h$ tal que f_i es de grado d_i .

Para $F_0, F_1, \dots, F_n$ existe un sistema resultante conformado por una sola forma homogénea $D \in k[a_0, \dots, a_n]$, la cual es irreducible y multihomogénea en los los coeficientes de los F_i separadamente, con grado homogéneo $\prod_{j \neq i} d_j$ en los coeficientes de F_i , y grado homogéneo total

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \prod_{j \neq i} d_j \geq 1.$$

Denotamos este D por $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)$, el cual está bien definido salvo múltiplo escalar en $k^\times$. Véase [vdW50, Chapter XI, Section 82] y [Hur13] para más detalles de este resultante.

Observemos que si $f_0, \dots, f_n \in k[x_0, \dots, x_n]$ no son todos cero y f_i es de grado d_i para todo $0 \leq i \leq n$, entonces $f_0, \dots, f_n$ tiene un cero en común no trivial, si y solo si,

$$\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)(p) = 0,$$

donde $p \in k^{n+1}$ satisface $F_i(p) = f_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Con mayor claridad, denotando $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n) := \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)(p)$, entonces $f_0, \dots, f_n$ tiene un cero en común no trivial, si y solo si, $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n) = 0$.

A partir del resultante $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)$ podemos encontrar todos los demás resultantes de $n + 1$ formas homogéneas en $k[a_0, \dots, a_m; x_0, \dots, x_n]$. En efecto, sean $f_0, \dots, f_n$ formas homogéneas en $k[a_0, \dots, a_m; x_0, \dots, x_n]$ tales que $f_i \in k[a_0, \dots, a_m; x_0, \dots, x_n]_{t_i, d_i}$, escribamos

$$\begin{aligned} f_0 &= q_0 x^{\alpha_0} + q_1 x^{\alpha_1} + \dots + q_{N_0-1} x^{\alpha_{N_0-1}} \\ f_1 &= q_{N_0} x^{\alpha_{N_0}} + q_{N_0+1} x^{\alpha_{N_0+1}} + \dots + q_{N_0+N_1-1} x^{\alpha_{N_0+N_1-1}} \\ &\vdots \\ f_n &= q_{N_0+\dots+N_{n-1}} x^{\alpha_{N_0+\dots+N_{n-1}}} + q_{N_0+\dots+N_{n-1}+1} x^{\alpha_{N_0+\dots+N_{n-1}+1}} + \dots + q_N x^{\alpha_N}, \end{aligned}$$

donde $q_0, \dots, q_{N_0-1}$ son formas homogéneas en $k[a_0, \dots, a_m]$ de grado t_0 , y similarmente con los demás polinomios q_j . Definamos el morfismo de anillos $k[a_0, \dots, a_N] \xrightarrow{\varphi} k[a_0, \dots, a_m]$ tal que $\varphi(r) = r$ para $r \in k$ y $\varphi(a_i) = q_i$ para $0 \leq i \leq N$. Es facil ver que $\varphi(\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n))$ es un sistema resultante de $f_0, \dots, f_n$, el cual denotamos por $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$, cuyo grado homogéneo es

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \left(t_i \prod_{j \neq i} d_j \right) \geq 1. \quad (3.1)$$

Por otro lado, consideremos la forma bihomogénea en $k[b_0, \dots, b_M; x_0, \dots, x_n]$,

$$F = b_0 x^{\beta_0} + b_1 x^{\beta_1} + \dots + b_M x^{\beta_M}.$$

y sus derivadas parciales $F_{x_0}, \dots, F_{x_1}$.

Definición 3.2. Para estas derivadas parciales definidas anteriormente existe un sistema resultante conformado por una sola forma homogénea $D \in k[b_0, \dots, b_M]$ de grado $(n+1)(d-1)^n$. A este D lo denotamos por $\text{Disc}_d(F)$ y lo llamamos el **discriminante** de F .

Notemos que hay una correspondencia canónica entre puntos en $\mathbb{P}_k^M$ y formas homogéneas no nulas en $k[x_0, \dots, x_n]_d$. Explícitamente, si $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ no es cero, entonces existen $p_0, p_1, p_2, \dots, p_M \in k$ no todos cero tal que $f = p_0 x^{\beta_0} + p_1 x^{\beta_1} + \dots + p_M x^{\beta_M}$, así el punto en $\mathbb{P}_k^M$

correspondiente a f es $[p_0 : \cdots : p_M]$. Observemos que f es singular, si y solo si, su discriminante $\text{Disc}_d(f) := \text{Disc}_d(F)(p) = 0$.

El discriminante $\text{Disc}_d(F)$ expresado partir del resultante de los $F_0, \dots, F_n$, según como hemos descrito previamente, esta dado por $\text{Disc}_d(F) = \text{Res}_{d-1, \dots, d-1}(F_{x_0}, \dots, F_{x_n})$.

Definición 3.3. Si R es un dominio de factorización única, entonces el **radical** de un elemento $r \in R$, el cual denotamos por $\text{Rad}(r)$, está definido como $\text{Rad}(r) = 0$ si $r = 0$ y si $r \neq 0$, entonces $\text{Rad}(r)$ es el producto de todos los factores irreducibles de r . Por tanto $\text{Rad}(r)$ está bien definido salvo múltiplo en $R^\times$. En particular, si r es irreducible, entonces $\text{Rad}(r) = r$. En términos de ideales tenemos que $\text{Rad}(r)$ está caracterizado por $\sqrt{\langle r \rangle} = \langle \text{Rad}(r) \rangle$.

Sean $f_0, f_1, \dots, f_n \in k[a_0, \dots, a_m; x_0, \dots, x_n]$ tales que $f_i \in k[a_0, \dots, a_m; x_0, \dots, x_n]_{t_i, d_i}$.

Definición 3.4. Una **forma inercial** para los $f_0, \dots, f_n$ es una forma homogénea no constante $g \in k[a_0, \dots, a_m]$ tal que $x_i \cdot g \in \sqrt{\langle f_0, \dots, f_n \rangle}$ para todo $0 \leq i \leq n$. El ideal homogéneo de $k[a_0, \dots, a_m]$ generado por estas formas inerciales lo denotamos por $\text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$.

Aclarado esto tenemos la siguiente caracterización la cual sera fundamental en lo que resta de este capítulo.

Proposición 3.5. El ideal homogéneo $\text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$ es principal, el cual está generado por $\text{Rad}(D)$, donde $D = \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$.

Demostración. Como la imagen de $\{f_0 = \cdots = f_n = 0\}_{a, x}$ por la proyección $\mathbb{P}_k^m \times \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ está contenida en $\{g = 0\}$ para toda $g \in \text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$ forma homogénea, entonces $\{D = 0\}$ es un subconjunto de $\{g = 0\}$, así $\langle g \rangle \subset \langle \text{Rad}(g) \rangle \subset \langle \text{Rad}(D) \rangle$, por tanto $\text{Rad}(D)$ divide a g . $\square$

3.2 CONSTRUCCIÓN DE MACAULAY

Aquí describiremos la construcción del resultante $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)$ siguiendo parcialmente [CLO05, Chapter 3, §4]. Véase en [Mac02, Jou91] las demostraciones que verifican estas construcciones.

Sean $\delta := 1 + \sum_{i=0}^n (d_i - 1)$ y $S := \{\gamma \in \mathbb{N}^{n+1} \mid |\gamma| = \delta\}$. Para cada $\gamma \in S$ definamos

$$\tau_\gamma := \min\{j \mid \gamma_j \geq d_j\} = \min\{j \mid x_j^{d_j} \text{ divide a } x^\gamma\}.$$

Ciertamente τ_γ está bien definido, esto es, para cada $\gamma \in S$ existe algún i tal que $\gamma_i \geq d_i$.

Decimos que $\gamma \in S$ es *reducido* si existe un único i tal que $\gamma_i \geq d_i$, el cual debe ser precisamente τ_γ por definición de este último. Observemos que S tiene $L := \binom{\delta+n}{n}$ elementos, enumerémoslos como $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_L$. Para cada $1 \leq i \leq L$, sea $\varepsilon_i \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $|\varepsilon_i| = d_{\tau(\gamma_i)}$ y $\varepsilon_{i, \tau(\gamma_i)} := d_{\tau(\gamma_i)}$. Por tanto $\varepsilon_{i, j} \neq 0$ a lo más para un único j , el cual debe ser precisamente $\tau(\gamma_i)$. Observemos que $(\gamma_i - \varepsilon_i)_j \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq L$ y todo $0 \leq j \leq n$. Para cada $1 \leq j \leq L$ sea

$$G_i := x^{\gamma_i - \beta_i} \cdot F_{\tau(\gamma_i)} = \sum_{j=1}^L b_{i, j} x^{\gamma_j}.$$

Observemos que $b_{i,j} = 0$ o $b_{i,j} = a_u$ para algún u , y si $b_{i,r} = b_{i,s} \neq 0$, entonces $r = s$. En particular, $b_{i,i}$ es el coeficiente del monomio x^{ε_i} del polinomio $F_{\tau(\alpha_i)}$. Consideremos la igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,L} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{L,1} & b_{L,2} & \cdots & b_{L,L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\gamma_1} \\ x^{\gamma_2} \\ \vdots \\ x^{\gamma_L} \end{pmatrix}.$$

Denotemos esta matriz cuadrada con entradas en $k[a_0, \dots, a_N]$ por M . Recordemos que la matriz *adjunta* de M , definida como la transpuesta de la matriz de cofactores de M , denotada por $\text{Adj}(M)$, satisface que $\det(M)E_L = \text{Adj}(M) \cdot M$, $\det(M) \in k[a_0, \dots, a_N]$, donde E_L es matriz identidad de tamaño L . Además las entradas en $\text{Adj}(M)$ son polinomios de las entradas de M . Por tanto cada entrada en $\text{Adj}(M)$ pertenece a $k[a_0, \dots, a_N]$ y

$$\begin{pmatrix} \det(M)x^{\gamma_1} \\ \det(M)x^{\gamma_2} \\ \vdots \\ \det(M)x^{\gamma_L} \end{pmatrix} = \text{Adj}(M) \cdot \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_L \end{pmatrix}.$$

Como los G_i son múltiplos de los F_j y las entradas de $\text{Adj}(M)$ están en $k[a_0, \dots, a_N]$, entonces cada $\det(M)x^{\gamma_i}$ pertenece al ideal $\langle F_0, F_1, \dots, F_n \rangle$ de $k[a_0, \dots, a_N; x_0, \dots, x_n]$. Observemos que $\det(M)$ es un polinomio homogéneo en $k[a_0, \dots, a_N]$ ya que sus entradas son polinomios lineales en los a_u . Por Proposición 3.5 se sigue que $\det(M)$ es un múltiplo de $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)$, digamos

$$\det(M) = \Delta(M) \cdot \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)$$

para algún $\Delta(M) \in k[a_0, \dots, a_N]$.

Veamos que $\det(M) \neq 0$. Observemos que $\det(M)(p) = \det(M(p))$ para todo $p \in k^{N+1}$. En particular, podemos tomar p de forma que $F_i(p) = x_i^{d_i}$ para todo $0 \leq i \leq n$, para este p tenemos que $M(p)$ es la matriz identidad y $\det(M)(p) = \det(M(p)) = 1$, por tanto $\det(M) \neq 0$. Así encontramos la expresión

$$\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n) = \det(M) / \Delta(M).$$

El aporte clave Macaulay en [Mac02] que también lo ha demostrado posteriormente Jouanolou en [Jou91] fue describir explícitamente el factor extra $\Delta(M)$, el cual es el determinante de la matriz que resulta de eliminar todas las filas y columnas de M correspondientes a los exponentes reducidos. Denotemos tal matriz por M' . Por tanto

$$\det(M) = \det(M') \cdot \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n) \quad (3.2)$$

y

$$\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n) = \det(M) / \det(M'). \quad (3.3)$$

Se conocen a ambas expresiones como las *formulas de Macaulay*. En la practica no hallaremos explícitamente el resultante $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0, \dots, F_n)$ sino que usaremos las formulas de Macaulay

para determinar si un conjunto de polinomios homogéneos tiene un cero en común no trivial. Observemos que para todo $p \in k^{N+1}$ la expresión

$$\det(M(p)) = \det(M'(p)) \cdot \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0(p), \dots, F_n(p))$$

es válida, y si $\det(M'(p)) \neq 0$, entonces la igualdad

$$\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(F_0(p), \dots, F_n(p)) = \det(M(p)) / \det(M'(p)).$$

también es válida. Como los puntos $p \in k^{N+1}$ está en correspondencia biyectiva con la secuencia de polinomios $F_0(p), \dots, F_n(p)$, entonces nos permitimos escribir $M(F_0(p), \dots, F_n(p)) = M(p)$. De modo que para $f_0, f_1, \dots, f_n \in k[x_0, \dots, x_n]$ tales que $f_i \in k[x_0, \dots, x_n]_{d_i}$ tenemos que

$$\det(M(f_0, \dots, f_n)) = \det(M'(f_0, \dots, f_n)) \cdot \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$$

y si $\det(M'(f_0, \dots, f_n)) \neq 0$, entonces

$$\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n) = \frac{\det(M(f_0, \dots, f_n))}{\det(M'(f_0, \dots, f_n))}.$$

En particular, para $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ tenemos que

$$\det(M(f_{x_0}, \dots, f_{x_n})) = \det(M'(f_{x_0}, \dots, f_{x_n})) \cdot \text{Disc}_d(f)$$

y si $\det(M'(f_{x_0}, \dots, f_{x_n})) \neq 0$, entonces

$$\text{Disc}_d(f) = \frac{\det(M(f_{x_0}, \dots, f_{x_n}))}{\det(M'(f_{x_0}, \dots, f_{x_n}))}.$$

Denotemos las matrices $Q(f) := M(f_{x_0}, \dots, f_{x_n})$ y $Q'(f) := M'(f_{x_0}, \dots, f_{x_n})$. Por tanto

$$\det(Q(f)) = \det(Q'(f)) \cdot \text{Disc}_d(f)$$

y si $\det(Q'(f)) \neq 0$, entonces

$$\text{Disc}_d(f) = \frac{\det(Q(f))}{\det(Q'(f))}. \quad (3.4)$$

Para superar la dificultad de la anulación de $\det(Q'(f))$ tomemos $\varphi \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ de modo que $\det(Q'(\varphi)) \neq 0$, por ejemplo, $\varphi = d^{-1}(x_0^d + x_1^d + \dots + x_n^d)$. Notemos que $\det(Q'(\varphi)) \neq 0$ ya que $Q(\varphi)$ y $Q'(\varphi)$ son matrices identidad. Tomemos λ, μ indeterminadas y consideremos los polinomios $\text{Disc}_d(\lambda f + \mu \varphi)$, $\det(Q(\lambda f + \mu \varphi))$ y $\det(Q'(\lambda f + \mu \varphi))$ en $k[\lambda, \mu]$. Es claro que,

$$\det(Q(\lambda f + \mu \varphi)) = \text{Disc}_d(\lambda f + \mu \varphi) \cdot \det(Q'(\lambda f + \mu \varphi)).$$

Notemos que, $\det(Q'(\lambda f + \mu \varphi)) \neq 0$ ya que $\det(Q'(0 \cdot f + 1 \cdot \varphi)) = \det(Q'(\varphi)) \neq 0$. Por tanto $\det(Q'(\lambda f + \mu \varphi))$ divide a $\det(Q(\lambda f + \mu \varphi))$ como polinomios en las variables λ, μ , y tenemos la expresión

$$\text{Disc}_d(f) = \frac{\det(Q(\lambda f + \mu \varphi))}{\det(Q'(\lambda f + \mu \varphi))} \Big|_{(\lambda, \mu)=(1,0)} \quad (3.5)$$

del discriminante de f , la cual es válida en general. En el [anexo](#) se encuentra el archivo *Discriminante à la Macaulay.nb* en el cual implementamos las formulas (3.4) y (3.2) junto a un par de ejemplos ilustrativos.

3.3 ELIMINACIÓN CON BASES DE GRÖBNER

Aquí mostraremos como usar las bases de Gröbner para encontrar resultantes muy particulares, esto es, cuando el número de parámetros son a lo más 2. Respecto a las bases de Gröbner nos referimos a [CLO15, Chapter 2] donde hacen una muy buena introducción a este tema.

Definición 3.6. Un **orden monomial** $\geq$ sobre $k[z_0, \dots, z_n]$ es una relación de orden parcial sobre los monomios en $k[z_0, \dots, z_n]$ tal que

- I) $\geq$ es un buen orden.
- II) Si $z^\alpha > z^\beta$, entonces $z^{\alpha+\gamma} > z^{\beta+\gamma}$ para todo monomio z^γ .

Ejemplo 3.7. El **orden lexicográfico** sobre $k[z_0, \dots, z_n]$ está definido tal que $z^\alpha > z^\beta$ si existe $0 \leq r \leq n$ tal que $\alpha_r > \beta_r$ y $\alpha_i \geq \beta_i$ para $r < i \leq n$. Por ejemplo, en $k[z_0, z_1, z_2]$ tenemos que $z_1^3 z_2^4 > z_0 z_1^2$ ya que si $z^\alpha = z_1^3 z_2^4$ y $z^\beta = z_0 z_1^2$, entonces $\alpha = (0, 3, 4)$, $\beta = (1, 2, 0)$ y $\alpha_2 = 4 > 0 = \beta_2$.

Fijemos un orden monomial sobre $k[z_0, \dots, z_n]$, de preferencia el que acabamos de mostrar.

Definición 3.8. Cada polinomio $f \in k[z_0, \dots, z_n]$ no nulo se puede escribir de una única forma como $f = \sum_{i=0}^r c_i x^{\alpha_i}$, donde $\alpha_i \in \mathbb{N}^{n+1}$ y $x^{\alpha_0} < x^{\alpha_1} < \dots < x^{\alpha_r}$, $c_0, c_1, \dots, c_r \in k$ y $c_r \neq 0$. El **término principal** de f está definido como $\text{LT}(f) := c_r x^{\alpha_r}$. Para cada ideal no trivial $\mathfrak{a}$ de $k[z_0, \dots, z_n]$, definimos $\text{LT}(\mathfrak{a}) := \{\text{LT}(f) \mid f \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}\}$.

Definición 3.9. Una **base de Gröbner** de un ideal no trivial $\mathfrak{a}$ de $k[z_0, \dots, z_n]$ es un conjunto de polinomios no nulos $g_0, \dots, g_r$ tal que $\langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_r) \rangle = \langle \text{LT}(\mathfrak{a}) \rangle$.

Proposición 3.10. Si $g_0, \dots, g_r$ es una base de Gröbner de $\mathfrak{a}$, entonces $g_0, \dots, g_r$ es una base de $\mathfrak{a}$, esto es, $\mathfrak{a} = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$.

Demostración. Véase [CLO15, Chapter 2, Section §5, Corollary 6]. □

Teorema 3.11. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de $k[z_0, \dots, z_n]$ generado por un conjunto de formas homogéneas $p_0, p_1, \dots, p_t \in k[z_0, \dots, z_n]$, entonces existe un algoritmo para construir una base de Gröbner homogénea de $\mathfrak{a}$ a partir de los p_i .

Boceto de demostración. Aplíquese el algoritmo de Buchberger descrito en [CLO15, Chapter 2, Section §7, Theorem 2] bajo el algoritmo de la división descrito en [CLO15, Chapter 2, Section §3, Theorem 3] sobre el conjunto de polinomios homogéneos $p_0, p_1, \dots, p_t$. Invitamos al lector leer atentamente los algoritmos referidos para que verifique por sí mismo esta afirmación. □

Observación 3.12. Si bien este algoritmo no lo derivamos nosotros, la observación que la base de Gröbner de formas homogéneas es homogénea, siguiendo este algoritmo, es un resultado original nuestro.

Teorema 3.13. Para cada ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de $k[z_0, \dots, z_n]$ y cada $0 \leq i \leq n$ tenemos que $\mathfrak{a} \cap k[z_0, \dots, z_i]$ es un ideal homogéneo de $k[z_0, \dots, z_i]$ y existe un algoritmo para determinar una base de Gröbner homogénea de $\mathfrak{a} \cap [z_0, \dots, z_i]$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{a}$ está generado por las formas homogéneas $p_0, p_1, \dots, p_t$ en $k[z_0, \dots, z_n]$. Por el teorema anterior construimos una base de Gröbner G de $\mathfrak{a}$ conformada por formas homogéneas en $k[z_0, \dots, z_n]$ a partir de los p_i . Por el Teorema de Eliminación [CLO15, Chapter 3, Section §1, Theorem 2] tenemos que $G \cap k[z_0, \dots, z_i]$ es una base de Gröbner del ideal $\mathfrak{a} \cap k[z_0, \dots, z_i]$ de $k[z_0, \dots, z_i]$. $\square$

El método o algoritmo indicado en este teorema lo llamaremos en este texto como **eliminación**. Describamos como aplicar este algoritmo. Si $f_0, \dots, f_n \in k[x_0, \dots, x_n]$ son tales que f_i es una forma homogénea de grado d_i , entonces $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n) \neq 0$, si y solo si, $\{f_0 = \dots = f_n = 0\}$ es vacío, si y solo si, $x_i \in \sqrt{\langle f_0, \dots, f_n \rangle}$ para $0 \leq i \leq n$. Por tanto $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n) \neq 0$, si y solo si, al aplicar eliminación al ideal $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ encontramos para cada $0 \leq i \leq n$ una base de Gröbner homogénea no vacía del ideal $\langle f_0, \dots, f_n \rangle \cap k[x_i]$ de $k[x_i]$. Esto cubre el caso de resultantes en cero parámetros

Veamos ahora el resultante en dos parámetros. En primer lugar necesitamos conocer las hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^1$. Consideremos el anillo polinomial $k[\lambda_0, \lambda_1]$. Como $\mathbb{P}_k^1$ tiene dimensión 1, entonces toda hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^1$ tiene dimensión 0. Ahora bien, como $\mathbb{P}_k^1$ es un espacio T1, entonces todo punto en $\mathbb{P}_k^1$ es un subconjunto cerrado irreducible de $\mathbb{P}_k^1$ y por tanto una hipersuperficie irreducible de $\mathbb{P}_k^1$. Más aun, todo subconjunto finito de $\mathbb{P}_k^1$ es cerrado y tiene dimensión 0. Por otro lado, toda hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^1$ debe ser finita. Estas consideraciones demuestran la siguiente proposición:

Proposición 3.14. Una subvariedad E de $\mathbb{P}_k^1$ es una hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^1$, si y solo si, E es un subconjunto finito de $\mathbb{P}_k^1$. Además, E es una hipersuperficie irreducible de $\mathbb{P}_k^1$, si y solo si, E es un punto.

Describamos las hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^1$. En primer lugar, si $[p]$ es un punto en $\mathbb{P}_k^1$, entonces $\{[p]\} = \{p_1\lambda_0 - p_0\lambda_1 = 0\}$. Si E es un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{P}_k^1$, entonces $E = \{h = 0\}$, donde

$$h = \prod_{[p] \in E} (p_1\lambda_0 - p_0\lambda_1) \in k[\lambda_0, \lambda_1].$$

Esta expresión nos muestra que el número de elementos de E es el grado de h . Notemos que toda forma homogénea e irreducible no constante en $k[\lambda_0, \lambda_1]$ es una forma lineal. En efecto, si $h \in k[\lambda_0, \lambda_1]$ es una forma homogénea e irreducible no constante, entonces $\{h = 0\}$ es un punto en $\mathbb{P}_k^1$, luego $\{h = 0\} = \{p_1\lambda_0 - p_0\lambda_1 = 0\}$ para $[p] = [p_0 : p_1]$ el único punto en $\{h = 0\}$. Por tanto h es un múltiplo escalar en k de $p_1\lambda_0 - p_0\lambda_1$. De aquí se sigue que toda forma homogénea no constante en $k[\lambda_0, \lambda_1]$ es producto de formas lineales. Resumimos estas consideraciones en la siguiente proposición:

Proposición 3.15. Toda forma homogénea no constante en $k[\lambda_0, \lambda_1]$ es producto de formas lineales, equivalentemente, toda forma homogénea no constante e irreducible en $k[\lambda_0, \lambda_1]$ es una forma lineal.

Proposición 3.16. Si h es una forma homogénea no constante en $k[\lambda_0, \lambda_1]$, entonces el número de elementos de $\{h = 0\}$ es menor o igual que el grado de h , y la igualdad se da, si y solo si, h es una forma radical, esto es, $h = \text{Rad}(h)$.

Sean $f_i \in k[\lambda_0, \lambda_1; x_0, \dots, x_n]_{r_i, d_i}$ para $0 \leq i \leq n$. Por la Proposición 3.5 lo que importa es encontrar el radical de $D = \text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0, \dots, f_n)$. Sea $l \geq 1$ el grado de D dado por la expresión (3.1). Una forma de determinar $\text{Rad}(D)$ es encontrar todos los puntos de $\{D = 0\}$, digamos numéricamente a partir de $\{f_0 = \dots = f_n = 0\}_{\lambda, x}$ y luego proyectar a $\mathbb{P}_k^1$. Sabemos que $\{D = 0\}$ tiene a lo más l puntos, por lo cual esperamos, en caso de buscarlos numéricamente, el acabar en algún momento, después de todo $\{D = 0\}$ es finito. El problema es acotar el rango de búsqueda ya que por lo general $\{f_0 = \dots = f_n = 0\}_{\lambda, x}$ no es finito.

Para esto tomemos alguna forma homogénea no nula en $\text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$, denotémosla g . De esta forma $\text{Rad}(D)$ divide a g , por tanto los factores lineales de $\text{Rad}(D)$ y D están entre los factores lineales de g , y ciertamente hay un número finito de los factores lineales de g . Ahora tenemos la siguiente pregunta, ¿Cómo determinamos cuáles factores lineales de g son factores lineales de D ? Sea $p_1\lambda_0 - p_0\lambda_1$ un factor lineal de g , es fácil ver que $p_1\lambda_0 - p_0\lambda_1$ es un factor de D , si y solo si, $D(p) = 0$, y esto pasa si y solo si, $\text{Res}_{d_0, \dots, d_n}(f_0(p), \dots, f_n(p)) = 0$. Lo anterior lo podemos determinar aplicando las formulas de Macaulay o bien considerando eliminación en cero parámetros.

Ahora el problema es encontrar al menos un $g \in \text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$ forma homogénea no nula. Observemos que $\text{Rad}(D)$ es un generador de $\text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$. Si no existe tal g , entonces $\text{Rad}(D) = D = 0$ y hemos determinado D . Por tanto podemos suponer que existe tal g , digamos D . Por eliminación sobre $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ encontramos una base de Gröbner homogénea no vacía del ideal $\langle f_0, \dots, f_n \rangle \cap k[\lambda_0, \lambda_1, x_0]$ de $k[\lambda_0, \lambda_1, x_0]$. Sea g_0 no nulo en esta base de Gröbner. Como los f_i tienen grado ≥ 1 en $x_0, \dots, x_n$, entonces g_0 es múltiplo de x_0 y podemos escribir $g_0 = h_0 \cdot x_0^{t_0}$ donde $t_0 \geq 1$ y h_0 es una forma homogénea no nula en $k[\lambda_0, \lambda_1]$. Observemos que $h_0 \cdot x_0 \in \sqrt{\langle f_0, \dots, f_n \rangle}$. Similarmente podemos encontrar $h_i \in k[\lambda_0, \lambda_1]$ forma homogénea no nula tal que $h_i \cdot x_i \in \sqrt{\langle f_0, \dots, f_n \rangle}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por tanto $h = h_0 h_1 \cdots h_n$ es una forma homogénea no nula en $\text{Inertial}\{f_0, \dots, f_n\}$.

Observación 3.17. El método acabado de describir para este tipo de resultantes es un resultado original nuestro.

En el archivo *Eliminación con bases de Gröbner.nb* del [anexo](#) aplicamos este método para encontrar una formula para el discriminante de una combinación lineal en dos parámetros. El algoritmo de eliminación descrito en Teorema 3.11 es básicamente el comando *Elimination* ya implementado en *Mathematica*.

3.4 CONDICIONES SUFICIENTES DE SINGULARIDAD

Ciertamente, en la mayoría de casos seria una exageración calcular el discriminante por medio de los métodos antes presentados. Por tanto mostraremos algunas condiciones suficientes con las cuales determinar si alguna forma homogénea f es singular. Lo conveniente de los siguientes resultados es que son fáciles de aplicar a cualquier forma homogénea.

Proposición 3.18. Si $f_1, \dots, f_m \in k[x_0, \dots, x_n]$ son formas homogéneas no constantes del mismo grado tal que $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ es un punto singular de cada f_i , entonces toda combinación lineal de los f_i tiene a $[p]$ como punto singular.

Demostración. Es inmediato por linealidad de los operadores de derivada parcial. □

Proposición 3.19. Supongamos $n \geq 2$ y $d \geq 3$. Si $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ es una forma homogénea con grado en x_i menor o igual a $d - 2$, esto es, $f = \sum_{j=0}^{d-2} g_j x_i^j$ tal que cada forma homogénea $g_j \in k[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}]$ es de grado $d - j$, entonces f es singular.

Demostración. Bajo estas condiciones tenemos que $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ definido como $p_j = 0$ para $j \neq i$ y $p_i = 1$ es un punto singular de f . $\square$

En realidad esta proposición puede verse como un caso muy particular del resultado [OY15, Section 3, Lemma 3.2, Proposition 3.3].

Las siguientes constantes se tendrán en cuenta en lo que resta de este texto.

ω : 3ra raíz primitiva de la unidad, $\omega^3 = 1$.	$s_{\pm}$: $\zeta^2 \pm \zeta^5$.
i : 4ta raíz primitiva de la unidad, $i^2 = -1$.	$t_{\pm}$: $\zeta^4 \pm \zeta^3$.
μ : 5ta raíz primitiva de la unidad, $\mu^5 = 1$.	$u_{\pm}$: $\zeta \pm \zeta^6$.
ζ : 7ma raíz primitiva de la unidad, $\zeta^7 = 1$.	$\lambda_{\pm}$: $(-1 \pm i\sqrt{15})/4$.
ψ : 8va raíz primitiva de la unidad, $\psi^2 = i$.	$\nu_{\pm}$: $(\sqrt{3} \pm i\sqrt{5})/2\sqrt{2}$.

4.1 PRESENTACIÓN DE GRUPOS

Los grupos se pueden describir con ecuaciones, lo que queremos decir es lo siguiente:

Definición 4.1. Una **presentación** de un grupo G es una pareja $\langle S \mid R \rangle$ tal que S es conjunto no vacío que genera a G y R es un generador del kernel del morfismo de grupos $F(S) \rightarrow G$ el cual deja fijo S , donde $F(S)$ es el **grupo libremente** generado por S . Escribimos $G = \langle S \mid R \rangle$ si $\langle S \mid R \rangle$ es una presentación de G , esta notación está bien definida salvo isomorfismo.

Ejemplo 4.2. El grupo de Klein 4 tiene la presentación $K_4 = \langle a, b \mid a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Es claro que todo grupo finito tiene una presentación finita, esto es, si G es un grupo finito, entonces $G = \langle S \mid R \rangle$ para algún par S, R finitos. Los grupos simétricos y alternantes tienen la siguiente presentación:

$$\mathfrak{S}_n = \left\langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \mid \tau_i^2, (\tau_j \tau_{j+1})^3, (\tau_r \tau_s)^2, \text{ donde } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-2, |r-s| \geq 2 \right\rangle,$$

$$\mathfrak{A}_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-2} \mid \sigma_1^3, \sigma_i^2, (\sigma_{i-1} \sigma_i)^3, (\sigma_r \sigma_s)^2, \text{ donde } 2 \leq i \leq n-2, |r-s| \geq 2 \right\rangle.$$

Fue H. Moore en su paper [Moo96] en 1986 quien encontró estas presentaciones de los grupos de permutaciones $\mathfrak{S}_n$ y $\mathfrak{A}_n$.

Definición 4.3. Sea k un cuerpo y $n \geq 2$. El grupo de matrices invertibles de tamaño n con entradas en k lo denotamos por $\text{GL}(n, k)$. El subgrupo de $\text{GL}(n, k)$ de matrices con determinante 1,

conocido como el grupo especial lineal de tamaño n con entradas en k , lo denotamos por $\text{SL}(n, k)$. El cociente de $\text{GL}(n, k)$ por su centro, conocido como el grupo lineal proyectivo de tamaño n con entradas en k , lo denotamos por $\text{PGL}(n, k)$. El cociente de $\text{SL}(n, k)$ por su centro, conocido como el grupo lineal especial proyectivo de tamaño n con entradas en k , lo denotamos por $\text{PSL}(n, k)$. En caso que $k = \mathbb{F}_q$ sea el cuerpo finito de q elementos, escribimos $\text{GL}(n, q)$ por $\text{GL}(n, \mathbb{F}_q)$. Los elementos del grupo $\text{PGL}(n, k)$ los llamamos **colineaciones** y los denotamos por $[A] \in \text{PGL}(n, k)$, con $A \in \text{GL}(n, k)$.

Ejemplo 4.4. La colineación correspondiente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{C}) \quad \text{es} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \text{PGL}(3, \mathbb{C}).$$

En particular, la familia de los grupos lineales especiales proyectivos $\text{PSL}(2, p)$ tienen la siguiente presentación:

$$\text{PSL}(2, p) = \langle S, T \mid S^p, T^2, (ST)^3, (S^{\frac{1}{2}(p+1)} T S^4 T)^2 \rangle.$$

En efecto, se puede ver que que las colineaciones $S, T \in \text{PSL}(2, p)$ satisfacen estas relaciones

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Todo esto esta demostrado por J. G. Sunday en su paper [Sun72] de 1972.

Un hecho muy notable es que $\mathfrak{A}_5$ y $\text{PSL}(2, 7)$ son el primer y segundo grupos simples no abelianos, respectivamente. Más aun, son únicos salvo isomorfismo. Respecto a la simplicidad y unicidad véase [DF03, Chapter 4, Section 4.5, Corollary 22 and Proposition 23] respecto a $\mathfrak{A}_5$, y [DF03, Chapter 6, Section 6.2, Theorem 15] y [Rot95, Chapter 8, Theorem 8.13] respecto a $\text{PSL}(2, 7)$.

Aquí demostraremos que si un grupo finito simple tiene orden $n \leq 168$, entonces $n = 168$ o $n = 60$. Como herramientas usaremos los muy bien conocidos *Teoremas de Sylow*, en particular su tercer teorema, y el importante $p^\alpha q^\beta$ -*Teorema* de W. Burnside [Bur04]. Se deduce trivialmente a partir del resultado de W. Burnside que todo grupo finito simple no abeliano tiene a lo menos 3 factores primos diferentes. Con este resultado descartamos la mayoría de los números a verificar y nos quedan los siguientes 21 números:

30, 42, 66, 70, 78, 84, 90, 102, 105, 110, 114, 120, 126, 130, 132, 138, 140, 150, 154, 156, 165.

Tengamos bien presente el tercer teorema de Sylow en lo que sigue. Procedamos por contradicción y supongamos que G es simple y tiene orden

- 30) Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, entonces G tiene 6 5-Sylow subgrupos y 10 3-Sylow subgrupos, estos son 24 elementos de orden 5 y 20 elementos de orden 3, que en conjunto suman 44 elementos diferentes, contradicción.
- 42) Como $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, entonces G debe tener exactamente un 7-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.

- 66) Como $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, entonces G debe tener exactamente un 11-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 70) Como $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, entonces G debe tener exactamente 7-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 78) Como $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$, entonces G debe tener exactamente un 13-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 84) Como $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, entonces G debe tener exactamente un 7-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 90) Como $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, entonces G tiene 6 5-Sylow subgrupos y 10 3-Sylow subgrupos. Si todos estos 3-Sylow subgrupos se intersectan trivialmente, entonces tenemos 80 elementos no triviales entre todos estos 3-Sylow subgrupos, y tenemos 24 elementos de orden 5, en conjunto suman 104, contradicción. Por tanto tenemos un par H, K de 3-Sylow subgrupos de G con intersección no trivial. Sea $I = H \cap K$, entonces $|I| = 3$. Como $|H : I| = |K : I| = 3$ es el menor primo que divide a $|H|$ y $|K|$, entonces I es normal en H y en K . Sea N el normalizador de I en G . Por tanto H y K son subgrupos de N , así $HK \subset N$, $|N| \geq 27$ y $|N|$ es múltiplo de 9. Como $|N|$ divide a $|G| = 90$, entonces solo hay dos alternativas, $|N| = 45$ o $|N| = 90$. En el primer caso N sería un grupo normal en G al tener índice 2, en el segundo caso I sería normal en G , en cualquier caso tenemos una contradicción.
- 102) Como $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, entonces G debe tener exactamente un 17-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 105) Como $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, entonces G tiene 21 5-Sylow subgrupos y 15 7-Sylow subgrupos, estos son 84 elementos de orden 5 y 90 elementos de orden 7, que en conjunto suman 174 elementos diferentes, contradicción.
- 110) Como $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$, entonces G debe tener exactamente un 11-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 114) Como $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$, entonces G debe tener exactamente un 19-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 120) Como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, entonces G tiene 6 5-Sylow subgrupos. La acción por conjugación de G sobre estos 5-Sylow subgrupos induce un homomorfismo no trivial $G \xrightarrow{f} \mathfrak{S}_6$ el cual es inyectivo al ser G simple. Como $\mathfrak{A}_6$ es normal en $\mathfrak{S}_6$, entonces $f^{-1}(\mathfrak{A}_6)$ es normal en G , por tanto $f^{-1}(\mathfrak{A}_6) = \langle e \rangle$ o $f^{-1}(\mathfrak{A}_6) = G$. En el primer caso tenemos que $f(G) \cap \mathfrak{A}_6 = \langle e \rangle$. Como $\mathfrak{A}_6$ es normal en $\mathfrak{S}_6$ y $f(G)$ es un subgrupo de $\mathfrak{S}_6$, entonces $\mathfrak{A}_6 f(G)$ es un subgrupo de $\mathfrak{S}_6$ de orden $38400 = 320 \cdot 120$, contradicción. Por tanto $f^{-1}(\mathfrak{A}_6) = G$, $f(G) \subset \mathfrak{A}_6$, así $f(G)$ es un subgrupo de $\mathfrak{A}_6$ de índice 3. La acción por multiplicación a izquierda de $\mathfrak{A}_6$ en las clases laterales de $\mathfrak{A}_6$ determinadas por $f(G)$ induce un homomorfismo no trivial $\mathfrak{A}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ el cual es inyectivo al ser $\mathfrak{A}_6$ simple, contradicción.
- 126) Como $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, entonces G debe tener exactamente un 7-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.

- 130) Como $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$, entonces G debe tener exactamente un 13-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 132) Como $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, entonces G tiene 12 11-Sylow subgrupos y a lo menos 4 3-Sylow subgrupos, esto nos dan 120 elementos de orden 11 y al menos 8 elementos de orden 3, que en conjunto suman 128 elementos diferentes, y los restantes cuatro elementos necesariamente conforman el único 2-Sylow subgrupo de G , contradicción.
- 138) Como $138 = 2 \cdot 3 \cdot 23$, entonces G debe tener exactamente un 23-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 140) Como $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, entonces G debe tener exactamente un 7-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 150) Como $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, entonces G tiene 6 5-Sylow subgrupos. Si todos estos se intersectan trivialmente, entonces tendríamos $144 = 6 \cdot (24)$ elementos no triviales entre los 5-Sylow subgrupos de G . Por otro lado, G tiene a lo menos 10 3-Sylow subgrupos, esto nos dan al menos 20 elementos de orden 3, que sumados con los 144 anteriores nos dan 164, contradicción. Por tanto tenemos un par H, K de 5-sylow subgrupos de G con intersección no trivial. Sea $I = H \cap K$, entonces $|I| = 5$. Como $|H : I| = |K : I| = 5$ es el menor primo que divide a $|H|$ y $|K|$, entonces I es normal en H y en K . Sea N el normalizador de I en G . Por tanto H y K son subgrupos de N , así $HK \subset N$, $|N| \geq 125$ y $|N|$ divide a $|G| = 150$, por tanto $|N| = 150$, $N = G$ e I es normal en G , contradicción.
- 154) Como $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, entonces G debe tener exactamente un 11-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 156) Como $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, entonces G debe tener exactamente un 13-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.
- 165) Como $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, entonces G debe tener exactamente un 11-Sylow subgrupo, el cual es normal en G , contradicción.

4.2 REPRESENTACIÓN DE GRUPOS

Definición 4.5. Sean G y K grupos, una **representación** de G en K es un homomorfismo de grupos $G \rightarrow K$. Si φ, ψ son dos representaciones de G en K , decimos que φ es **equivalente** a ψ si $\varphi(G)$ y $\psi(G)$ son subgrupos conjugados de K , esto es, existe un elemento $x \in K$ tal que $x\varphi(G) = \psi(G)x$.

Es claro que esta relación sobre representaciones de G en K es una equivalencia.

Definición 4.6. Una representación es **fiel** si es un monomorfismo de grupos.

En particular, si consideramos un grupo finito G , $n \geq 2$ y k un cuerpo, entonces tenemos la pregunta de cuantas representaciones fieles (salvo conjugación) de G hay en $\text{GL}(n, k)$. Por supuesto, si k es un cuerpo finito, entonces $\text{GL}(n, k)$ es finito y tendríamos finitas representaciones fieles de G en $\text{GL}(n, k)$. A parte de esta trivialidad, se ha demostrado que hay un número finito

de representaciones fieles de G en $\text{GL}(n, k)$, cuando k es un cuerpo algebraicamente cerrado. Esto último se sigue por el teorema de descomposición de H. Maschke [Ste12, Chapter 3, Section 3, Theorem 3.2.8] el cual nos dice que toda representación de G en $\text{GL}(n, k)$ es *suma* de representaciones *irreducibles*, y el resultado [Ste12, Chapter 4, Section 4, Corollary 4.4.8] que nos dice que el número de representaciones irreducibles de G en $\text{GL}(n, k)$ (salvo conjugación) es el número de clases conjugadas de G . Como aclaración, la operación *suma de representaciones* en $\text{GL}(n, k)$ respeta la relación de conjugación. Como hablar de representaciones fieles de G en $\text{GL}(n, k)$ es equivalente a hablar de subgrupos de $\text{GL}(n, k)$ isomorfos a G , entonces por lo anterior citado tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.7. Cada subgrupo finito H de $\text{GL}(n, k)$ tiene un número finito de subgrupos de $\text{GL}(n, k)$ isomorfos a H (salvo conjugación).

Seamos explícitos. Para cada H subgrupo finito de $\text{GL}(n, k)$ definamos H_1, H_2 tal que $K \in H_1$, si y solo si, K es un subgrupo de $\text{GL}(n, k)$ isomorfo a H , y $K \in H_2$, si y solo si, K es un subgrupo de $\text{GL}(n, k)$ conjugado de H . Con esta notación el corolario se resume en que $\{K_2 \mid K \in H_1\}$ es finito para cada H subgrupo finito de $\text{GL}(n, k)$.

Teorema 4.8. Cada subgrupo finito H de $\text{PGL}(n, k)$ tiene un número finito de subgrupos de $\text{PGL}(n, k)$ isomorfos a H (salvo conjugación).

Demostración. Denotemos por Δ a la colección de todos los subgrupos de $\text{PGL}(n, k)$ isomorfos a H . Definamos Ω la colección de todos los subgrupos $\rho^{-1}(K)$ de $\text{SL}(n, k)$, donde $K \in \Delta$ y $\text{SL}(n, k) \xrightarrow{\rho} \text{PGL}(n, k)$ es la proyección canónica. Observemos que si $\rho^{-1}(K_1)$ y $\rho^{-1}(K_2)$ son conjugados en $\text{GL}(n, k)$, entonces K_1 y K_2 son conjugados en $\text{PGL}(n, k)$. Por tanto queremos mostrar que Ω es finito salvo conjugación en $\text{GL}(n, k)$, esto es, $\{K_2 \mid K \in \Omega\}$ es finito.

Veamos en primer lugar que Ω es finito salvo isomorfismos, esto sera evidente una vez encontremos una cota superior a los ordenes de los grupos en Ω . Como todos los grupos en Δ tiene orden finito $|H|$, entonces es suficiente con mostrar que $\{A \in \text{SL}(n, k) \mid \rho(A) = B\}$ es finito para todo $B \in \text{PGL}(n, k)$. Si $A_1, A_2 \in \text{SL}(n, k)$ satisfacen $\rho(A_1) = B = \rho(A_2)$, entonces $A_1 = \lambda A_2$ para algún $\lambda \in k^\times$. Así $1 = \det(A_1) = \lambda^n \det(A_2) = \lambda^n \cdot 1$ y $\lambda^n = 1$. Como estamos en un cuerpo, entonces la ecuación $\lambda^n = 1$ tiene a lo más n soluciones, por tanto $\text{SL}(n, k) \mid \rho(A) = B\}$ es finito, y concluimos que Ω es finito salvo isomorfismos, esto es, $\{K_1 \mid K \in \Omega\}$ es finito.

Consideremos la función

$$\begin{array}{ccc} \{K_2 \mid K \in \Omega\} & \longrightarrow & \{K_1 \mid K \in \Omega\} \\ K_2 & \mapsto & K_1 \end{array} .$$

Para probar que el dominio de esta función es finito debemos mostrar que $\{J_2 \in \Omega \mid J_1 = K_1\}$ es finito para cada $K \in \Omega$. Observemos que $\{J_2 \in \Omega \mid J_1 = K_1\} \subset \{J_2 \mid J \in K_1\}$ y este último es finito por el corolario anterior. $\square$

Si bien este teorema se refiere a representaciones fieles, es fácil ver que sirve también para todo tipo de representación, en virtud de la finitud de grupos finitos hasta cierto orden salvo isomorfismo.

Corolario 4.9. Cada grupo finito G tiene un número finito de representaciones en $\text{PGL}(n, k)$ (salvo conjugación).

4.3 SUBGRUPOS PRIMITIVOS DE $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$

Definición 4.10. Sea G un subgrupo de $\text{PGL}(n, k)$ con $n \geq 2$. Una G -**descomposición** de k^n es un conjunto Γ de subespacios no triviales de k^n tal que

- I) $|\Gamma| \geq 2$.
- II) $k^n = \bigoplus_{V \in \Gamma} V$.
- III) Para cada $[A] \in G$ y $V \in \Gamma$ tenemos $[A]V := A(V) = W$ para algún $W \in \Gamma$.

Por tanto G actúa sobre cada G -descomposición permutando los respectivos subespacios en tal descomposición.

Definición 4.11. Decimos que G es **primitivo** si no existe ninguna G -descomposición de k^n . Los subgrupos no primitivos de $\text{PGL}(n, k)$ se distinguen entre imprimitivos e intransitivos. Decimos que G es **imprimitivo** si G no es primitivo y para cualquier G -descomposición de k^n , digamos Γ , y para cualesquiera $V, W \in \Gamma$, existe $[A] \in G$ tal que $[A]V = W$. En otras palabras, G actúa transitivamente en toda G -descomposición de k^n , y existe al menos una de tales descomposiciones. Decimos que G es **intransitivo** si G no es primitivo ni imprimitivo. Equivalentemente, existe alguna G -descomposición de k^n en la que G no actúa transitivamente.

Por su posterior importancia anexamos algunos hechos elementales sobre grupos primitivos.

Proposición 4.12. Si G, K son subgrupos de $\text{PGL}(n, k)$, entonces los siguientes enunciados son verdaderos:

- I) Si $K \subset G$ y K es primitivo, entonces G es primitivo.
- II) Las propiedades primitivo, imprimitivo e intransitivo se preservan por conjugación.

Ejemplo 4.13.

- I) Todo subgrupo cíclico finito de $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ es intransitivo. En efecto, si G es un subgrupo de $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ generado por $[A]$, entonces podemos tomar A , salvo múltiplo escalar en $\mathbb{C}^\times$, tal que $A \in \text{SL}(n, \mathbb{C})$. Como $[A]$ tiene orden finito y $A \in \text{SL}(n, \mathbb{C})$, entonces A tiene orden finito y por tanto es diagonalizable, esto es, A es conjugada de alguna matriz diagonal D en $\text{SL}(n, \mathbb{C})$. Si H es el subgrupo de $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ generado por $[D]$, entonces G es conjugado a H . Por tanto G es intransitivo si mostramos que H es intransitivo, pero lo último es cierto ya que $\Gamma = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es una H -descomposición de $\mathbb{C}^n$, donde V_j es el subespacio de $\mathbb{C}^n$ generado por e_j , siendo este último la j -ésima columna de la matriz identidad E_n .
- II) Veamos que la representación fiel de $\text{PSL}(2, 7)$ dada en (4.1) es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$. Denotemos por $\overline{G}_{168}$ al grupo generado por estas colineaciones. Razonemos por contradicción y supongamos en primer lugar que $\overline{G}_{168}$ es intransitivo. En este caso $\overline{G}_{168}$ fija algún subespacio de $\mathbb{C}^3$ de dimensión 1, determinado por un vector $v := a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \neq 0$. Sean $[B_1]$ y $[B_2]$ las primeras dos colineaciones en (4.1), por tanto encontramos $\lambda, \kappa \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\lambda v = B_1 v$ y $\kappa v = B_2 v$. De esta segunda igualdad encontramos $\kappa a_1 = a_2$, $\kappa a_2 = a_3$ y $\kappa a_3 = a_1$, como $v \neq 0$ estas igualdades implican que a_1, a_2, a_3 no son cero. Por otro lado, la igualdad $\lambda v = B_1 v$ implica $\lambda a_1 = \zeta^4 a_1$, $\lambda a_2 = \zeta^2 a_2$ y $\lambda a_3 = \zeta a_3$, luego $\lambda = \zeta^4 = \zeta^2 = \zeta$ ya que $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, por tanto $\zeta = \zeta^2$, $\zeta = 1$, contradicción.

Supongamos ahora que $\overline{G}_{168}$ es imprimitivo, por tanto existe una $\overline{G}_{168}$ -descomposición Γ de $\mathbb{C}^3$ sobre la cual $\overline{G}_{168}$ actúa transitivamente. Como la dimensión de cada subespacio en Γ

es preservada por la acción de cada colineación en G , entonces todos los subespacios en Γ deben tener la misma dimensión, al ser $3 \geq |\Gamma| \geq 2$, entonces es necesario que $|\Gamma| = 3$ y cada subespacio en Γ tiene dimensión 1. La acción de $\overline{G}_{168}$ sobre Γ induce un homomorfismo de grupos no trivial $\overline{G}_{168} \rightarrow \mathfrak{S}_3$. Siendo $\overline{G}_{168} \cong \text{PSL}(2, 7)$ vemos que $\overline{G}_{168}$ es un grupo simple, por tanto el kernel de $\overline{G}_{168} \rightarrow \mathfrak{S}_3$ o bien es el grupo trivial, o bien es todo $\overline{G}_{168}$, y no es el último caso ya que este homomorfismo no es trivial. Por tanto $\overline{G}_{168} \rightarrow \mathfrak{S}_3$ es inyectiva, contradicción pues $\mathfrak{S}_3$ tiene menos elementos que $\overline{G}_{168}$, con esto queda demostrado que $\overline{G}_{168}$ es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$.

Un estudio sistemático y con gran detalle de los grupos primitivos, y en general, de los subgrupos finitos de colineaciones en $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ fue hecho por H. F. Blichfeldt en su importante obra [Bli17]. En realidad, H. F. Blichfeldt describe todos los subgrupos finitos primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$, salvo conjugación en [Bli17, Chapter VII]. Los siguientes diagramas en los que se muestran algunas relaciones de inclusión entre todos los subgrupos primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$, son un re-etiquetado de los diagramas en [CS19, Appendix A], siguiendo la notación que usa H. F. Blichfeldt en su texto.

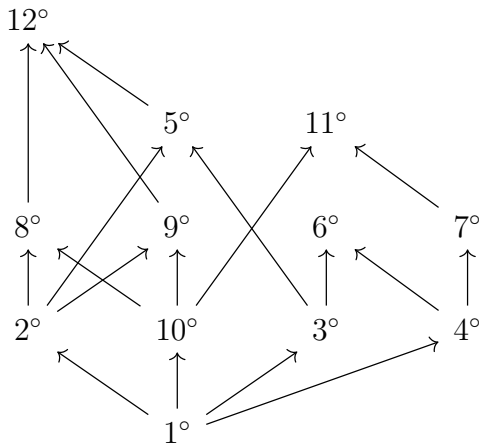


Diagrama. 4.1: 1° - 12°

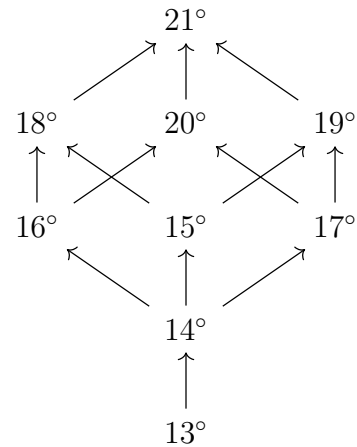


Diagrama. 4.2: 13° - 21°

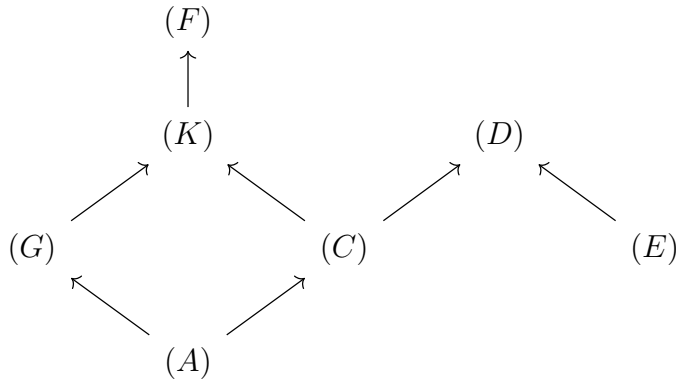


Diagrama. 4.3: (A), (C) - (F), (G) y (K)



Diagrama. 4.4: (B) y (H)

Los siguientes diagramas indican la clase de isomorfa a la cual cada uno de estos grupos pertenece.

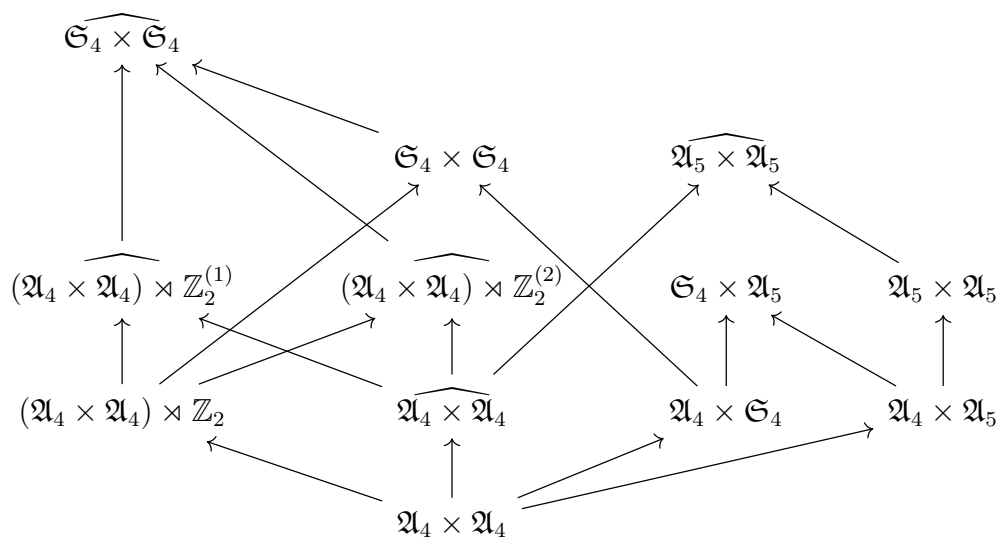


Diagrama. 4.5: 1° - 12°

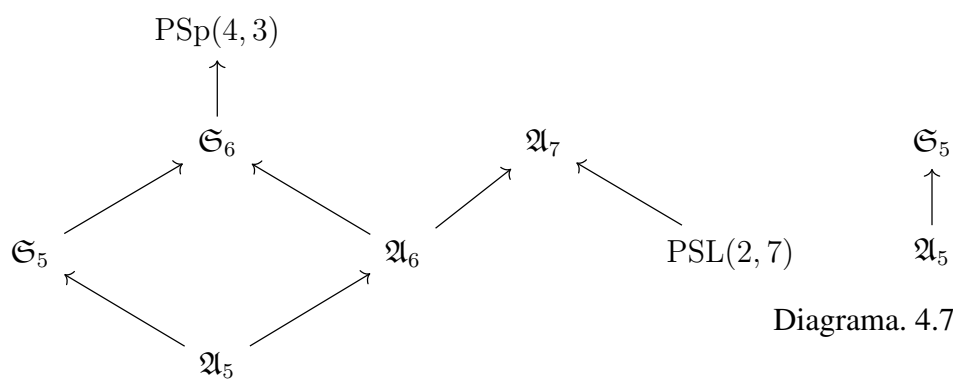
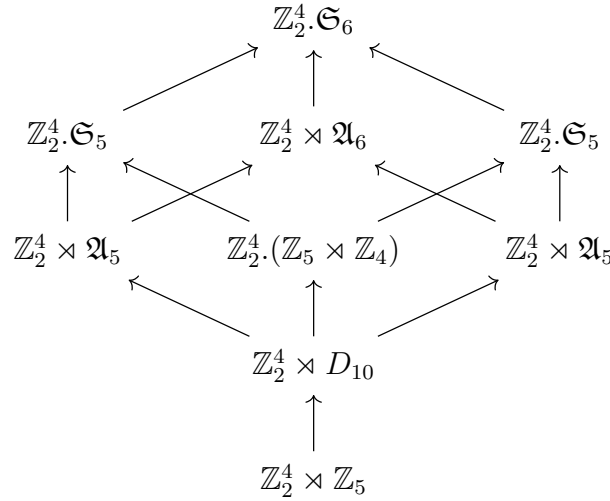


Diagrama. 4.7: (B) y (H)

Diagrama. 4.6: (A), (C) - (F), (G) y (K)

Diagrama. 4.8: $13^\circ - 21^\circ$

Hay varias alternativas para encontrar representaciones fieles de un grupo finito G en $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$. Entre estas alternativas tenemos:

- I) Encontrar representaciones fieles de $G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ y luego proyectar a $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$, es decir, hacer la composición $G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C})$. Es un hecho que encontrar representaciones de grupos finitos en grupos de automorfismos lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita es un problema muy bien estudiado en teoría de representación. Un primer inconveniente es que puede perderse la inyectividad de homomorfismo $G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$, en caso de que la imagen de este contenga algún elemento no trivial del kernel de $\text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C})$, esto es, un múltiplo escalar no trivial de la matriz identidad. La premisa implícita que se tiene al considerar esta estrategia es que toda representación fiel $G \xrightarrow{f} \text{PGL}(n, \mathbb{C})$ se puede *levantar* a alguna representación fiel $G \xrightarrow{g} \text{GL}(n, \mathbb{C})$ de forma que $G \xrightarrow{f} \text{PGL}(n, \mathbb{C})$ sea igual a la composición $G \xrightarrow{g} \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C})$. Esto no siempre sucede, una intuición de porqué esto no es así puede verse en [GALM20].
- II) Considerar presentaciones de G y encontrar colineaciones en $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ que satisfagan tales relaciones.
- III) Con mayor trabajo se pueden clasificar todos los subgrupos finitos de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, y con estos encontrar todos los subgrupos finitos de $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$, y así sucesivamente. Esta ha sido la estrategia usada en [Bli17] por H. F. Blichfeldt para $2 \leq n \leq 4$, más aun, los subgrupos ahí encontrados son únicos salvo conjugación, no salvo isomorfismo (la relación de conjugación es estrictamente más fuerte que la relación de isomorfismo). H. F. Blichfeldt los clasifica a su vez en grupos intransitivos, imprimitivos y primitivos. En particular, los subgrupos finitos de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ se encuentran siguiendo un proceso similar al hecho por F. Klein, en el cual consideran los grupos de simetrías de los 5 *solidos platónicos*.

Ahora presentaremos representaciones fieles de algunos de estos grupos primitivos. Todas estas representaciones están tomadas del texto [Bli17]. En el archivo *Grupos de Colineaciones de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$* .nb del [anexo](#) se encuentra todas estas representaciones.

4.3.1 Diagrama: 1° - 12°. Respecto al Diagrama 4.1 es suficiente con describir el grupo 1°.

$$\begin{aligned} E_2 \star S &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, E_2 \star W_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \\ S \star E_2 &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, W_1 \star E_2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1^\circ)$$

4.3.2 Diagrama: 13° - 21°. Respecto al Diagrama 4.2 es suficiente con describir los grupos 13°-17° y 19°. Más aun, tenemos que 13° es isomorfo a $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$ y 19° es isomorfo a $\mathbb{Z}_2^4 \cdot \mathfrak{S}_5$, véase [CS19].

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ T_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, T = \frac{\psi}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13^\circ)$$

$$13^\circ \quad y \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (14^\circ)$$

$$13^\circ \quad y \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \quad (15^\circ)$$

$$13^\circ \quad y \quad SB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \quad (16^\circ)$$

$$13^\circ \quad y \quad BR = \frac{\psi}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \quad (17^\circ)$$

$$13^\circ \quad y \quad B = \psi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (19^\circ)$$

4.3.3 Diagrama: (A), (C) - (F), (G) y (K). Respecto al Diagrama 4.3 es suficiente con describir los grupos (A), (G), (C) y (E). Como dato adicional, tenemos que (A) es isomorfo a $\mathfrak{A}_5$, (G) es isomorfo a $\mathfrak{S}_5$, (C) es isomorfo a $\mathfrak{A}_6$ y (E) es isomorfo a $\text{PSL}(2, 7)$, véase [Bli17, Chapter VII].

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, F_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (A)$$

$$(A) \quad y \quad F'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (G)$$

$$(A) \quad y \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (C)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^2 \end{bmatrix}, \hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{R} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & s_+ & t_+ & u_+ \\ 2 & t_+ & u_+ & s_+ \\ 2 & u_+ & s_+ & t_+ \end{bmatrix} \quad (E)$$

4.3.4 Diagrama: (B) y (H). Respecto al Diagrama 4.4 es necesario describir ambos grupos, (B) y (H). Igualmente, tenemos que (B) es isomorfo a $\mathfrak{A}_5$ y (H) es isomorfo a $\mathfrak{S}_5$, véase [Bli17, Chapter VII].

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, F'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, F'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (B)$$

$$(B) \quad y \quad F' = \psi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (H)$$

4.4 ALGUNOS SUBGRUPOS NO PRIMITIVOS DE $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$

A parte de las representaciones fieles primitivas de los grupos

$$\mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_5, \mathfrak{A}_6, \mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10} \text{ y } \text{PSL}(2, 7)$$

dadas en la previa sección, presentaremos aquí las restantes representaciones fieles de estos grupos. En particular, tenemos que no hay representaciones fieles no primitivas de los grupos $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$, más aun, este es el caso para todos los grupos en el Diagrama 4.8.

$$Q_{11} = F_1, Q_{12} = F'_2 \quad \text{y} \quad Q_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_+ \\ 0 & 0 & \lambda_- & 0 \end{bmatrix} \quad (Q_1)$$

$$Q_{41} = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, Q_{42} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, Q_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_+ \\ 0 & 0 & \nu_+ & 0 \\ 0 & \nu_- & 0 & 0 \\ \nu_- & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (Q_4)$$

$$Q_{51} = Q_{41}, Q_{52} = Q_{42} \quad \text{y} \quad Q_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_+ \\ 0 & 0 & \nu_- & 0 \\ 0 & \nu_+ & 0 & 0 \\ \nu_- & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (Q_5)$$

$$(Q_5) \quad \text{y} \quad R_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (R_3)$$

$$(Q_5) \quad \text{y} \quad Q_{74} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -i\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (Q_7)$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}, \tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{R} = \frac{i}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -i\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_- & s_- & t_- \\ 0 & s_- & t_- & u_- \\ 0 & t_- & u_- & s_- \end{bmatrix} \quad (P)$$

Aquí (Q_1) , (Q_4) y (Q_5) son representaciones fieles de $\mathfrak{A}_5$, (R_3) y (Q_7) son representaciones fieles de $\mathfrak{S}_5$ y $\mathfrak{A}_6$, respectivamente. Finalmente, (P) es la única representación fiel no primitiva de $\text{PSL}(2, 7)$.

Por el trabajo de H. Maschke en 1898 [Mas98], tenemos que los grupos (A) , (B) , (Q_1) , (Q_4) y (Q_5) son todas las representaciones fieles, salvo conjugados, de $\mathfrak{A}_5$ en $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$. Los grupos

(G) , (H) y (R) son todas las representaciones fieles, salvo conjugados, de $\mathfrak{S}_5$ en $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$. Finalmente, los grupos (C) y (Q_7) son todas las representaciones fieles, salvo conjugados, de $\mathfrak{A}_6$ en $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$.

Por [MPK19, Proposition 4.5, (4)] tenemos que (E) y (P) son todas las representaciones fieles, salvo conjugados, de $\text{PSL}(2, 7)$ en $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$.

Observación 4.14. En [Kle78], F. Klein encontró la única representación fiel de grupo lineal especial proyectivo $\text{PSL}(2, 7)$ en $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$, la cual está generada por las colineaciones

$$\begin{bmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \frac{i}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} u_- & s_- & t_- \\ s_- & t_- & u_- \\ t_- & u_- & s_- \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Notemos que la representación fiel (P) de $\text{PSL}(2, 7)$ es una extensión trivial de esta última representación, encontrada por F. Klein.

Por [CS19, Corollary 5.2] tenemos que 13° es la única representación fiel, salvo conjugados, de $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$ en $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$. La prueba de este corolario muestra que no hay ningún subgrupo no primitivo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$. Ahora estamos en condiciones de mostrar que 14° es la única representación fiel, salvo conjugados, del grupo $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$ en $\text{PGL}_4(\mathbb{C})$. Supongamos que $\overline{G}_{160}$ es un subgrupo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$, como $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes D_{10}$, entonces encontramos un subgrupo $\overline{G}_{80}$ de $\overline{G}_{160}$ y $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$, isomorfo a $\mathbb{Z}_2^4 \rtimes \mathbb{Z}_5$. Por lo dicho al principio tenemos que $\overline{G}_{80}$ es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$, por tanto $\overline{G}_{160}$ también es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$. Por la clasificación de H. F. Blichfeldt de todos los subgrupos primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ encontramos que $\overline{G}_{160}$ es conjugado a 14° , ya que hay un único grupo primitivo en la clasificación de H. F. Blichfeldt de orden 160. Este argumento funciona para todos los grupos en el diagrama 4.8. En conclusión, resumiendo todas estas consideraciones obtenemos el Corolario 4.15

Corolario 4.15. Sea G un subgrupo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ isomorfo a algún grupo del Diagrama 4.8. Entonces G es conjugado a algún grupo del Diagrama 4.2.

Observación 4.16. Este corolario es un resultado original de la tesis.

HIPERSUPERFICIES INVARIANTES EN $\mathbb{P}_k^n$

5.1 AUTOMORFISMOS PROYECTIVOS

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sean $n \geq 2$ y $d \geq 3$. Para cada $[A] \in \text{PGL}(n+1, k)$ y cada $[p] \in \mathbb{P}_k^n$ definimos $[A][p] = [Ap] \in \mathbb{P}_k^n$. De esta forma cada colineación en $\text{PGL}(n+1, k)$ se puede ver como una función sobre $\mathbb{P}_k^n$, la cual es biyectiva con inversa $[A]^{-1} = [A^{-1}]$. En realidad $[A]$ es un automorfismo regular sobre $\mathbb{P}_k^n$, como ya probamos en la Proposición 2.31.

Cada $A \in \text{GL}(n+1, k)$ lo podemos ver como un automorfismo de $k[x_0, \dots, x_n]$ tal que $Ar = r$ para $r \in k$ y si $y_i = Ax_i \in k[x_0, \dots, x_n]$, entonces

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \cdots & A_{0,n} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,0} & A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Observemos que $Af(p) = f(A^{-1}p)$ para todos $A \in \text{GL}(n+1, k)$, $p \in k^{n+1}$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n]$. Esto quedara demostrado si se satisface para cada x_i . Para ello consideremos

$$Ax_i(p) = \left(\sum_{j=0}^n A_{i,j}^{-1} x_j \right) (p) = \sum_{j=0}^n A_{i,j}^{-1} (x_j(p)) = \sum_{j=0}^n A_{i,j}^{-1} p_j = (A^{-1}p)_i = x_i(A^{-1}p).$$

Como estamos en un cuerpo algebraicamente cerrado, tenemos que $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ son iguales, si y solo si, $f(p) = g(p)$ para todo $p \in k^{n+1}$. Por estas últimas consideraciones se sigue que $(AB)f = A(Bf)$ para $A, B \in \text{GL}(n+1, k)$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n]$. Como automorfismo de $k[x_0, \dots, x_n]$ que deja fijo a k , tenemos que A es un isomorfismo lineal sobre $k[x_0, \dots, x_n]$. Como A mapea formas lineales en formas lineales, entonces A mapea formas de grado d en formas de grado d . Por tanto A es un isomorfismo lineal sobre la colección $k[x_0, \dots, x_n]_d$ de todas las formas homogéneas de grado d en $k[x_0, \dots, x_n]$. Más aun, como A es automorfismo sobre $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces A mapea polinomios irreducibles en polinomios irreducibles.

Proposición 5.1. Sean $f_1, f_2, \dots, f_m$ formas homogéneas en $k[x_0, \dots, x_n]$ y $[A] \in \text{PGL}(n+1, k)$, entonces $[A]\{f_1 = \dots = f_m = 0\} = \{Af_1 = \dots = Af_m = 0\}$.

Demostración. Es trivial. □

Proposición 5.2. Sea $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ una forma homogénea y $A \in \text{GL}(n+1, k)$, entonces f no es singular, si y solo si, Af no es singular.

Demostración. Para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ la identidad

$$(Af_{x_0} \quad \dots \quad Af_{x_n}) \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \dots & A_{0,n} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,0} & A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} = ((Af)_{x_0} \quad \dots \quad (Af)_{x_n}) \quad (5.1)$$

se cumple, la mostraremos primero para los monomios y luego aplicaremos linealidad. Escribamos esta igualdad de la forma $A(\nabla f)A^{-1} = \nabla(Af)$. Veamos que esta expresión es válida para los monomios x^α , para mostrar esto procedamos por inducción sobre $|\alpha| \geq 0$. Si $|\alpha| = 0$, entonces $x^\alpha = 1 \in k$ y tenemos $A(\nabla 1)A^{-1} = A(0)A^{-1} = 0A^{-1} = 0 = \nabla 1 = \nabla(A1)$. Si $|\alpha| = 1$, entonces $x^\alpha = x_i$ para algún i . Por un lado tenemos

$$(A(\nabla x_i)A^{-1})_j = \sum_{r=0}^n (A(\nabla x_i))_r A_{r,j}^{-1} = \sum_{r=0}^n A \left(\frac{\partial(x_i)}{\partial x_r} \right) A_{r,j}^{-1} = A_{i,j}^{-1}.$$

Por otro lado,

$$(\nabla(Ax_i))_j = (Ax_i)_{x_j} = \left(\sum_{r=0}^n A_{i,r}^{-1} x_r \right)_{x_j} = \sum_{r=0}^n A_{i,r}^{-1} \frac{\partial x_i}{\partial x_r} = A_{i,j}^{-1},$$

así $A(\nabla x_i)A^{-1} = \nabla(Ax_i)$. Supongamos que $|\alpha| > 1$, por tanto $\alpha = \beta + \gamma$, con $|\beta|, |\gamma| < |\alpha|$, y $x^\alpha = x^\beta x^\gamma$. Ahora

$$\begin{aligned} \nabla(Ax^\alpha) &= \nabla(A(x^\beta x^\gamma)) = \nabla(Ax^\beta Ax^\gamma) = (Ax^\beta) \nabla(Ax^\gamma) + (Ax^\gamma) \nabla(Ax^\beta) \\ &= (Ax^\beta)(A(\nabla x^\gamma)A^{-1}) + (Ax^\gamma)(A(\nabla x^\beta)A^{-1}) = A(x^\beta \nabla(x^\gamma) + x^\gamma \nabla(x^\beta))A^{-1} \\ &= A(\nabla(x^\beta x^\gamma))A^{-1} = A(\nabla x^\alpha)A^{-1}, \end{aligned}$$

concluyendo la inducción sobre los monomios. Como los monomios son una base de $k[x_0, \dots, x_n]$, entonces es suficiente con verificar que la expresión $A(\nabla f)A^{-1} = \nabla(Af)$ respeta linealidad. Si f, g son polinomios en $k[x_0, \dots, x_n]$ y $\lambda \in k$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla(A(f + \lambda g)) &= \nabla(Af + \lambda Ag) = \nabla(Af) + \lambda \nabla(Ag) \\ &= A(\nabla f) + \lambda A(\nabla g) = A(\nabla f + \lambda \nabla g) = A(\nabla(f + \lambda g)) \end{aligned}$$

concluyendo que (5.1) se satisface para todo polinomio en $k[x_0, \dots, x_n]$. En particular, si f es una forma homogénea, entonces (5.1) implica que los ideales homogéneos $\langle (Af)_{x_0}, \dots, (Af)_{x_n} \rangle$ y $\langle Af_{x_0}, \dots, Af_{x_n} \rangle$ son iguales, así

$$[A]\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\} = \{Af_{x_0} = \dots = Af_{x_n} = 0\} = \{(Af)_{x_0} = \dots = (Af)_{x_n} = 0\},$$

por tanto $[A]$ es una biyección entre $\{f_{x_0} = \dots = f_{x_n} = 0\}$ y $\{(Af)_{x_0} = \dots = (Af)_{x_n} = 0\}$. $\square$

De esta forma, A es cerrado como función sobre las formas homogéneas no singulares en $k[x_0, \dots, x_n]_d$. Dados $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ escribimos $f \sim g$ si $f = \lambda g$ para algún $\lambda \in k^\times$. Es claro que $\sim$ es una equivalencia sobre $k[x_0, \dots, x_n]_d$. Notemos que para $A \in \text{GL}(n+1, k)$ tenemos $f \sim g$, si y solo si, $Af \sim Ag$.

Definición 5.3. Si X, Y son hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^n$, estas se dicen **proyectivamente equivalentes** si $[A]X = Y$ para algún $[A] \in \text{PGL}(n+1, k)$.

Es claro que esta relación sobre hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^n$ es una relación equivalencia.

Corolario 5.4. Si X, Y son hipersuperficies de $\mathbb{P}_k^n$ proyectivamente equivalentes, entonces X es suave, si y solo si, Y es suave.

Demostración. Es un enunciado equivalente en términos geométricos de Proposición 5.2. $\square$

Definición 5.5. Para X una hipersuperficie de $\mathbb{P}_k^n$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$, definimos los siguientes subgrupos de $\text{PGL}(n+1, k)$:

$$\begin{aligned} \text{PAut}(X) &= \{[A] \in \text{PGL}(n+1, k) \mid [A]X = X\}, \\ \text{PAut}(f) &= \{[A] \in \text{PGL}(n+1, k) \mid Af \sim f\}, \end{aligned}$$

el primero de estos es llamado el **grupo de automorfismos proyectivos** de X , por ello mismo $\text{PAut}(X) \subset \text{Aut}(X)$. Más aun, como $\text{Aut}(\mathbb{P}_k^n) = \text{PGL}(n+1, k)$ por [Har97, Chapter II, Section 7, Example 7.1.1], entonces $\varphi \in \text{Aut}(X)$ es un automorfoismo proyectivo de X , si y solo si, φ es la restricción de un automorfoismo de $\mathbb{P}_k^n$, equivalentemente, existe $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_k^n)$ que satisface el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_k^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}_k^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Definición 5.6. Sea G un subgrupo de $\text{PGL}(n+1, k)$. Decimos que $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ es G -invariante si $G \subset \text{PAut}(f)$. Similarmente, decimos que una hipersuperficie X de $\mathbb{P}_k^n$ es G -invariante si $G \subset \text{PAut}(X)$.

Proposición 5.7. Sea $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ irreducible y G un subgrupo de $\text{PGL}(n+1, k)$, entonces f es G -invariante, si y solo si, $\{f = 0\}$ es G -invariante.

Demostración.

($\Rightarrow$) Es trivial.

($\Leftarrow$) Si $[A] \in G$, entonces $\{Af = 0\} = [A]\{f = 0\} = \{f = 0\}$, y teniendo en cuenta que f es irreducible se sigue

$$\langle Af \rangle = \langle \text{Rad}(Af) \rangle = \sqrt{\langle Af \rangle} = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle \text{Rad}(f) \rangle = \langle f \rangle,$$

así $Af \sim f$ y $[A] \in \text{PAut}(f)$. $\square$

Como toda forma no singular en $k[x_0, \dots, x_n]$ de grado mayor o igual que 3 es irreducible, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.8. Sea $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ no singular y G un subgrupo de $\mathrm{PGL}(n+1, k)$, entonces f es G -invariante, si y solo si, $\{f = 0\}$ es G -invariante.

Sobre el orden del grupo de automorfismos de hipersuperficies suaves en espacios proyectivos complejos hay algunos resultados generales a tener en cuenta.

Proposición 5.9. Supongamos que $n \geq 2$ y $d \geq 3$. Si X es una hipersuperficie suave de $\mathbb{P}^{n+1}$ grado d , entonces $\mathrm{PAut}(X)$ es finito.

Demostración. Véase [MM63, Theorem 1]. □

Hay algunas condiciones para determinar si un grupo dado es el grupo de automorfismos proyectivos de alguna hipersuperficie suave.

Proposición 5.10. Supongamos que $n \geq 2$, $d \geq 3$ y $(n, d) \neq (2, 4)$. Si G es el grupo de automorfismos proyectivos alguna hipersuperficie suave X de $\mathbb{P}^{n+1}$ de grado d , entonces $p < (d-1)^{n+1}$ para todo p divisor primo de $|G|$.

Demostración. Por hipótesis $G := \mathrm{PAut}(X)$ y X tiene dimensión n . Si p es un divisor primo de $|G|$, entonces G tiene un elemento de orden p (esto es un hecho básico en teoría de grupos). Por [GAL13, Corollary 2.4] tenemos que $p < (d-1)^n$. □

Desafortunadamente, este último resultado no aplica en nuestro caso de interés, cuando $n = 2$ y $d = 4$, esto es, cuando consideramos superficies cuárticas suaves. Por otro lado, hay casos muy particulares donde podemos encontrar alguna cota a los posibles ordenes de grupos de automorfismos proyectivos de hipersuperficies suaves.

Proposición 5.11. Supongamos que $n \geq 2$, $d \geq 3$ y $(n, d) \neq (2, 4)$. Si X es una hipersuperficie suave de $\mathbb{P}^{n+1}$, entonces $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PAut}(X)$.

Demostración. Véase [MM63, Theorem 2]. □

Definición 5.12. Un subgrupo G de $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ es **levantable** si existe un subgrupo H de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ el cual se proyecta isomorficamente sobre G , esto es, existe un isomorfismo $H \rightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \hookrightarrow & \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C}) \end{array}$$

Donde el homomorfismo $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ es la proyección canónica del grupo $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ sobre $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$.

Proposición 5.13. Supongamos que $d \geq 3$, $n \geq 1$ y $(n, d) \neq (1, 3), (2, 4)$. Si G es el grupo de automorfismos de cualquier hipersuperficie suave X de dimensión n y grado d , y d y $n + 2$ son primos relativos, entonces $G = \text{Aut}(X)$ es levantable.

Demostración. Véase [GALM20, Theorem 3.5]. □

Observación 5.14. En realidad el resultado [GALM20, Theorem 3.5] de V. González-Aguilera, A. Liendo y P. Montero se satisface como una equivalencia bajo una hipótesis más fuerte sobre G , que ellos llaman *F-levantable*, donde $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es la forma homogénea de grado d que determina a X , esto es, $X = \{F = 0\}$.

Proposición 5.15. Si G es el grupo de automorfismos proyectivos de alguna superficie cúbica suave X de $\mathbb{P}^3$, entonces $|G| \leq 648$, con igualdad, si y solo si, X es proyectivamente equivalente a la *superficie cúbica de Fermat* $\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$.

Demostración. $G = \text{PAut}(X) = \text{Aut}(X)$. Por [Dol12, Chapter 9, Section 9.5, Theorem 9.5.8] tenemos que $|\text{Aut}(X)| \leq 648$, con igualdad, si y solo si, X es proyectivamente equivalente a la *superficie cúbica de Fermat* $\{x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$. □

Las superficies cuárticas suaves en $\mathbb{P}^3$ son un tipo de *superficies K3*.

Definición 5.16. [Com14, Théorème 1.2.3] Una superficie proyectiva X es una **superficie K3** si es suave, minimal, con dimensión de Kodaria $\kappa(X) = 0$, género geométrico $\rho_g := \dim H^{2,0}(X) = 1$ e irregularidad $q := \dim H^{1,0}(X) = 0$.

Otras propiedades que tienen las superficies K3 es ser *compactas* y *simplemente conexas*. Referimos al lector a [Kon20] y [Com14] para mayor información sobre este tipo de superficies.

Proposición 5.17. Las superficies cuárticas suaves en $\mathbb{P}^3$ son superficies K3.

Demostración. Véase [Kon20, Chapter 4, Example 4.1]. □

Proposición 5.18. Sea X una superficie K3 y G un grupo finito de automorfismos de X . Entonces $|G| \leq 3840$, con igualdad, si y solo si, X es isomorfa a la *superficie cuártica de Kummer* $\text{Km}(E_i \times E_i)$, donde E_i es la curva elíptica dada por $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, con $i^2 = -1$.

Demostración. Véase [Kon99]. □

Observación 5.19. En [Bur11, Sect. 272, Ex. 6], W. Burnside conjeturo que la superficie cuártica suave

$$\{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 12x_0x_1x_2x_3 = 0\}$$

es la que tiene el mayor grupo de automorfismos proyectivos entre las superficies cuárticas suaves de $\mathbb{P}^3$, salvo equivalencia proyectiva. Esta conjetura es verdadera, véase los artículos [Nik79, Muk88, Kon99, BS21, CD22]. La prueba de esta conjetura se deduce de estos trabajos, pero esto está fuera del alcance del trabajo de tesis.

5.2 SUBESPACIOS INVARIANTES DE $k[x_0, \dots, x_n]$

Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{PGL}(n+1, k)$.

Definición 5.20. Un subespacio lineal V de $k[x_0, \dots, x_n]_d$ es llamado **G -invariante** si $Af \sim f$ para todo $f \in V$.

Lema 5.21. Sea V un subespacio G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. Si $[A] \in G$, $f \in V$ no es cero y $\lambda \in k^\times$ son tales que $Af = \lambda f$, entonces $Ag = \lambda g$ para todo $g \in V$.

Demostración. Es claro que $Ag = \lambda g$ si $g = 0$. Supongamos ahora que $g \neq 0$ está en V , entonces $f + g \in V$, y encontramos $a, b \in k^\times$ tales que $Ag = ag$ y $A(f + g) = b(f + g)$. Así $bf + bg = Af + Ag = \lambda f + ag$ y $(b - a)g = (\lambda - b)f$. Si $b - a = 0$, entonces $\lambda - b = 0$ y $a = b = \lambda$. De lo contrario, $b - a \neq 0$ y $g = cf$ para algún $c \in k^\times$, de donde $ag = Ag = A(cf) = c(Af) = c\lambda f = \lambda g$, $a = \lambda$. $\square$

Teorema 5.22. Sean V, W dos subespacios G -invariantes de $k[x_0, \dots, x_n]_d$, entonces $V \cap W \neq 0$ implica que $V + W$ es un subespacio G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$.

Demostración. No hay nada que probar si alguno entre V y W es trivial. Entonces podemos suponer que $V, W \neq 0$ y tomar $p \in V \cap W$. Sea $[A] \in G$ y $\lambda \in k^\times$ tales que $Ap = \lambda p$. Si $f \in V$ y $g \in W$, entonces $Af = \lambda f$ y $Ag = \lambda g$ por Lema 5.21, de esta forma $A(f + g) = Af + Ag = \lambda f + \lambda g = \lambda(f + g)$ y $[A] \in \mathrm{PAut}(f + g)$, por tanto $V + W$ es un subespacio G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. $\square$

Corolario 5.23. Todo subespacio no trivial G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$, está contenido en un único subespacio maximal G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$.

Demostración. Se sigue del teorema anterior teniendo en cuenta que $k[x_0, \dots, x_n]_d$ es un espacio vectorial de dimensión finita. $\square$

Corolario 5.24. Si $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ es un polinomio no nulo G -invariante, entonces existe un único V subespacio maximal G -invariante tal que $f \in V$.

Demostración. Se sigue por el corolario anterior al considerar el subespacio G -invariante de dimensión 1, $\{\lambda f \mid \lambda \in k\}$, de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. $\square$

Teorema 5.25. Hay una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hipersuperficies suaves de } \mathbb{P}_k^n \\ G\text{-invariantes de grado } d \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{formas no singulares en la unión de los} \\ \text{subespacios maximales } G\text{-invariantes de} \\ k[x_0, \dots, x_n]_d \end{array} \right\}$$

Demostración. Es inmediato por Corolario 5.24, la definición de hipersuperficie suave y Corolario 5.8. $\square$

Ahora vamos describir los subespacios maximales G -invariantes de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. Como k es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces cada colineación en $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ puede expresarse de la forma $[A]$, con $A \in \mathrm{SL}(n+1, k)$. En particular, podemos considerar $[A_1], \dots, [A_m] \in G$, con $A_i \in \mathrm{SL}(n+1, k)$, los cuales generan a G como grupo. Sea σ_i el orden de $[A_i]$, y $\kappa \geq 1$ tal que

κd es el mínimo común múltiplo de $n+1$ y d , esto es, $\text{mcm}(n+1, d) = \kappa d$. Así $A_i^{\sigma_i} = \tau_i E_{n+1}$ para algún $\tau_i \in k^\times$. Como $\det(A_i) = 1$, entonces $\tau_i^{n+1} = \det(\tau E_{n+1}) = \det(A_i^{\sigma_i}) = 1$, $\tau_i^{n+1} = 1$. Ahora definamos

$$L = \{\lambda \in k^m \mid \lambda_i^{\kappa \sigma_i} = 1 \text{ para cada } 1 \leq i \leq m\}.$$

Es claro que L es finito y no vacío ya que k es un cuerpo. Para cada $1 \leq j \leq m$ y cada $\lambda \in L$ denotemos por $B_{\lambda,j}$ a la transformación lineal sobre $k[x_0, \dots, x_n]_d$ definida como $B_{\lambda,j}f = A_j f - \lambda_j f$ para todo $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$. Para cada $\lambda \in L$ definamos la transformación lineal

$$k[x_0, \dots, x_n]_d \xrightarrow{T_\lambda} k[x_0, \dots, x_n]_d^m$$

como $(T_\lambda f)_j = B_{\lambda,j}f$ para $1 \leq j \leq m$ y $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$. Por último, sea

$$\Gamma = \{\ker(T_\lambda) \mid \lambda \in L, \ker(T_\lambda) \neq 0\}$$

una colección, posiblemente vacía, de subespacios de $k[x_0, \dots, x_n]_d$.

Lema 5.26. Si $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ es G -invariante, entonces $f \in \ker(T_\lambda)$ para algún $\lambda \in L$.

Demostración. Si $f = 0$, entonces $f \in T_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. En otro caso, si $f \neq 0$, entonces $A_i f = \lambda_i f$ para algún $\lambda_i \in k^\times$. Así $\lambda_i^{\sigma_i} f = A_i^{\sigma_i} f = (\tau_i E_n) f = \tau_i^d f$, $\lambda_i^{\sigma_i} = \tau_i^d$, $\lambda_i^{\kappa \sigma_i} = \tau_i^{\kappa d} = 1$, $\lambda_i^{\kappa \sigma_i} = 1$. Por tanto $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in L$ y $f \in \ker(T_\lambda)$. $\square$

Lema 5.27. Todo subespacio $\ker(T_\lambda)$ de $k[x_0, \dots, x_n]_d$ es G -invariante.

Demostración. Si $f \in \ker(T_\lambda)$, entonces $A_i f = \lambda_i f$ para todo i , así $[A_i] \in \text{PAut}(f)$. Como G es generado por los $[A_i]$, entonces $G \subset \text{PAut}(f)$, por tanto $\ker(T_\lambda)$ es un subespacio G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. $\square$

Lema 5.28. Si $\ker(T_\varepsilon) \cap \ker(T_\lambda) \neq 0$, entonces $\varepsilon = \lambda$ y $\ker(T_\varepsilon) = \ker(T_\lambda)$.

Demostración. Supongamos que $f \in \ker(T_\varepsilon) \cap \ker(T_\lambda)$ no es cero, entonces $T_\varepsilon(f) = 0 = T_\lambda(f)$, así $A_i f - \varepsilon_i f = 0 = A_i f - \lambda_i f$ para todo i , por tanto $\varepsilon_i = \lambda_i$, $\lambda = \varepsilon$ y $\ker(T_\varepsilon) = \ker(T_\lambda)$. $\square$

Teorema 5.29. . Si $\Gamma \neq \emptyset$, entonces Γ es el conjunto de todos los subespacios maximales G -invariantes de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. De otro modo, si $\Gamma = \emptyset$, entonces el espacio trivial es el único subespacio G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$.

Demostración. Supongamos que $\Gamma = \emptyset$, entonces queremos mostrar que no existe ninguna forma $f \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ no nula invariante por G . Razonemos por contradicción, entonces del Lema 5.26 encontramos $f \in \ker(T_\lambda)$ para algún $\lambda \in L$, así $\ker(T_\lambda) \neq 0$ y $\ker(T_\lambda) \in \Gamma$, contradicción.

Supongamos que $\Gamma \neq \emptyset$. Ahora debemos probar que V es un subespacio maximal G -invariante, si y solo si, $V \in \Gamma$. Veamos la implicación directa, sea V un subespacio maximal G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$, como $\Gamma \neq \emptyset$, entonces el espacio trivial no es maximal entre los subespacios G -invariantes de $k[x_0, \dots, x_n]_d$, por tanto V no es trivial y encontramos $f \in V$ no nulo. Por el Lema 5.26 encontramos que $f \in T_\lambda$ para algún $\lambda \in L$, así $A_i f = \lambda_i f$ para todo i . Si $g \in V$, tenemos por Lema 5.21 que $A_i g = \lambda_i g$ para todo i , por tanto $V \subset \ker(T_\lambda)$. Como $\ker(T_\lambda)$ es un subespacio G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]$ por Lema 5.27, entonces se sigue la igualdad $V = \ker(T_\lambda) \in \Gamma$ por maximalidad de V . Veamos ahora que cada $\ker(T_\lambda)$ es un subespacio

G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$, en este caso encontramos por Corolario 5.23 un único subespacio maximal G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$ tal que $\ker(T_\lambda) \subset V$, por la implicación directa tenemos que $V = \ker(T_\varepsilon)$ para algún $\varepsilon \in L$. Como $\ker(T_\lambda) \neq 0$, entonces se sigue la igualdad $\ker(T_\lambda) = \ker(T_\varepsilon)$ por el Lema 5.28, de esto que $\ker(T_\lambda)$ es un subespacio maximal G -invariante de $k[x_0, \dots, x_n]_d$. $\square$

Corolario 5.30. Hay un número finito de subespacios maximales G -invariantes de $k[x_0, \dots, x_n]_d$.

La importancia de Teorema 5.29 es que nos da un algoritmo para encontrar todos los subespacios maximales G -invariantes de formas homogéneas de grado d , a partir de un conjunto de generadores de G . Más precisamente, siendo G finito, el conjunto de generadores es finito y en consecuencia L y el número de transformaciones lineales T_λ también es finito. Encontrar el kernel de cada transformación lineal T_λ es equivalente a encontrar el espacio nulo de la representación matricial de T_λ . Esta representación matricial se halla directamente desde las componentes de las colineaciones que generan a G , y su espacio nulo se encuentra por medio de algún software computacional. Nosotros implementamos esta idea en un algoritmo en el entorno *Mathematica*, véase el archivo *Formas Invariantes.nb* del anexo, en donde se encuentra desarrollado lo que acabamos de explicar, además de un ejemplo ilustrativo sobre la representación (A) de $\mathfrak{A}_5$.

Observación 5.31. Los subespacios de formas invariantes ya habían sido considerados en el artículo [MPK19]. Nosotros en este trabajo hemos estudiado su relación con los subespacios maximales de formas invariantes, su descripción dada por Teorema 5.29 y desarrollado el algoritmo *Formas invariantes.nb*.

5.3 SUBESPACIOS INVARIANTES DE CUÁRTICAS EN $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$

En esta sección aplicaremos todo lo que hemos mostrado sobre hipersuperficies y teoría de eliminación, con lo cual concluimos los objetivos de este trabajo de grado. Aquí encontraremos para cada grupo G de la Sección 4.3 sus correspondientes subespacios (maximales) invariantes de cuárticas en $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ mediante el algoritmo *Formas invariantes.nb*. Ya que todos estos subespacios lineales tienen dimensión finita, será suficiente con mostrar una base finita para cada uno de estos subespacios. Para cada una de tales bases $\{p_1, \dots, p_r\}$ mostraremos un criterio sobre los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ para determinar cuales combinaciones lineales $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$ son no singulares. En particular, si la base consiste de un solo polinomio p , entonces lo marcaremos con $(*)$ para indicar que p es singular, de lo contrario, lo marcaremos con $(\diamond)$. Por ejemplo, el polinomio $x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_3^2 - 2x_0 x_1 x_3 x_2$ $(*)$ en 5.3.1 es singular, pero el polinomio $2x_0^4 + 6x_1 x_2 x_3 x_0 + x_1 x_3^3 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3$ $(\diamond)$ en 5.3.11 no es singular.

5.3.1 Subespacios de cuárticas invariantes por 1° .

Primer subespacio I_1 .

$$x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_3^2 - 2x_0 x_1 x_3 x_2. \quad (*)$$

Segundo subespacio I_2 .

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 8x_0 x_1 x_2 x_3 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_3^2) + 2i\sqrt{3}(x_0^2 x_1^2 + x_3^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2). \quad (*)$$

Tercer subespacio I_3 .

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 8x_0x_1x_2x_3 + 2(x_1^2x_2^2 + x_0^2x_3^2) + 2i\sqrt{3}(x_0^2x_1^2 - x_3^2x_1^2 - x_0^2x_2^2 + x_2^2x_3^2). \quad (*)$$

Cuarto subespacio I_4 .

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 8x_1x_2x_3x_0 + 2(x_1^2x_2^2 + x_0^2x_3^2) - 2i\sqrt{3}(x_0^2x_1^2 - x_3^2x_1^2 - x_0^2x_2^2 + x_2^2x_3^2). \quad (*)$$

Quinto subespacio I_5 .

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 8x_1x_2x_3x_0 - 2(x_1^2x_2^2 + x_0^2x_3^2) - 2i\sqrt{3}(x_0^2x_1^2 + x_3^2x_1^2 + x_0^2x_2^2 + x_2^2x_3^2). \quad (*)$$

En virtud de claridad queremos mencionar que es innecesario calcular las cuárticas invariantes por los restantes grupos del Diagrama 4.1. Cualquier otro grupo en este diagrama contiene a 1° , y todas las cuárticas invariantes por este último son singulares (*). Por tanto, los otros grupos en este diagrama ya están concluidos.

5.3.2 Subespacios de cuárticas invariantes por 13° .**Primer subespacio $XIII_1$.**

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 6(x_0^2x_1^2 - x_2^2x_1^2 + x_3^2x_1^2 + x_0^2x_2^2 - x_0^2x_3^2 + x_2^2x_3^2). \quad (\diamond)$$

Segundo subespacio $XIII_2$.

$$\begin{aligned} & - \frac{-1 + 4\mu - \mu^2 - 2\mu^3 + 2\mu^4}{\mu_5^2 - 1}(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 6\frac{\mu^2 - \mu^3 - \mu^4}{1 + \mu}(x_0^2x_2^2 + x_1^2x_3^2) \\ & + 6\frac{1 + \mu^2}{\mu^2 - 1}(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2) - 6\frac{1 - \mu^2 + 2\mu^4}{\mu^2 - 1}(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2) + 24x_0x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (*)$$

Tercer subespacio $XIII_3$.

$$\begin{aligned} & (1 + 2\mu + 4\mu^2 + 2\mu^3 + \mu^4)(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + 6(1 + \mu^4)(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2) \\ & - 6(1 - 2\mu^3 - \mu^4)(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2) + 6(\mu^4 - 2\mu - 1)(x_0^2x_2^2 + x_1^2x_3^2) + 24(\mu^4 - 1)x_0x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (*)$$

Cuarto subespacio $XIII_4$.

$$\begin{aligned} & - (1 + 2\mu + 4\mu^2 + 2\mu^3 + \mu^4)(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 6(1 + \mu^4)(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2) \\ & - 6(1 - 2\mu^3 - \mu^4)(x_0^2x_2^2 + x_1^2x_3^2) - 6(1 + 2\mu - \mu^4)(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2) + 24(-1 + \mu^4)x_0x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (*)$$

Quinto subespacio $XIII_5$.

$$\begin{aligned} & (-1 + 4\mu - \mu^2 - 2\mu^3 + 2\mu^4)(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 6(1 + \mu^2)(x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2) \\ & - 6(1 - \mu^2 + 2\mu^4)(x_0^2x_2^2 + x_1^2x_3^2) - 6(1 - \mu^2 + 2\mu^3)(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2) + 24(-1 + \mu^2)x_0x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (*)$$

5.3.3 Subespacios de cuárticas invariantes por 14° .

Único subespacio XIV. Es el primer subespacio en 5.3.2.

5.3.4 Subespacios de cuárticas invariantes por 15° .

Único subespacio XV. Es el primer subespacio en 5.3.2.

5.3.5 Subespacios de cuárticas invariantes por 16° . No hay ningun subespacio no trivial de cuárticas invariante por este grupo. Este hecho implica que tampoco hay subespacios no triviales invariantes para los grupos 18° , 20° y 21° .

5.3.6 Subespacios de cuárticas invariantes por 17° .

Único subespacio XVII. Es el subespacio primer subespacio en 5.3.2.

5.3.7 Subespacios de cuárticas invariantes por 19° .

Único subespacio XIX. Es el subespacio primer subespacio en 5.3.2.

5.3.8 Subespacios de cuárticas invariantes por (A).

Único subespacio A_1 .

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \frac{x_0^4}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}x_1x_0^3 + x_2x_3x_0^2 + \frac{1}{3}x_1^3x_0 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x_2^3x_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3^3x_0 \\
 &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}}x_1x_2^3 - \frac{1}{3}\sqrt{2}x_1x_3^3 + x_1^2x_2x_3 - \frac{x_1^4}{2\sqrt{3}}, \\
 h_1 &= \frac{x_0^4}{6} + \frac{x_1x_0^3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}x_1^2x_0^2 + \sqrt{3}x_2x_3x_0^2 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x_3^3x_0 + x_1x_2x_3x_0 \\
 &\quad + \frac{2}{3}\sqrt{2}x_1x_2^3 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_1x_3^3 - \frac{1}{2}x_2^2x_3^2 - \frac{x_1^4}{3}.
 \end{aligned}$$

No hemos encontrado un criterio de no singularidad para la combinación lineal $\lambda_0h_0 + \lambda_1h_1$ sobre los parámetros λ_0, λ_1 . Ni calculando el discriminante según las formulas de Macaulay ni por eliminación con bases de Gröbner. Teóricamente ambos métodos funcionan, como hemos mostrado en el Capítulo 3, pero su efectividad esta fundamentada en la capacidad de computo que tenga el software en los cuales apliquemos estos métodos. Desafortunadamente Mathematica no tuvo éxito en concluir estos cálculos. Sin embargo, por lo mencionado en el método de eliminación con bases de Gröbner vemos que hay finitos $[\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$ tales que $\lambda_0h_0 + \lambda_1h_1$ es una forma singular,

de estos puntos hay a lo más $108 = (3+1) \cdot (4-1)^3$, de los cuales hemos encontrado los siguientes 7,

$$\begin{aligned} & \left[-2\sqrt{2} : \sqrt{i\sqrt{15}-1} \right], \left[-2\sqrt{2} : \sqrt{-i\sqrt{15}-1} \right], [1 : -\sqrt{3}], \left[47 : 8(1-4\sqrt{3}) \right] \\ & \left[47 : -8(1+4\sqrt{3}) \right], \left[4 : -\sqrt{3} + i\sqrt{5} \right] \text{ y } \left[4 : -\sqrt{3} - i\sqrt{5} \right]. \end{aligned}$$

5.3.9 Subespacios de cuárticas invariantes por (G).

Primer subespacio G_1 .

$$\begin{aligned} f_0 = & -\frac{x_0^4}{12} + \frac{x_1x_0^3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}x_1^2x_0^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_2x_3x_0^2 + x_1x_2x_3x_0 - \frac{x_3^3x_0}{3\sqrt{2}} - \frac{x_1^3x_0}{2\sqrt{3}} - \frac{x_2^3x_0}{\sqrt{6}} \\ & + \frac{x_1x_2^3}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2}x_2^2x_3^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1^2x_2x_3 - \frac{x_1^4}{12} - \frac{x_1x_3^3}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (\diamond)$$

Segundo subespacio G_2 .

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{x_0^4}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}x_1x_0^3 + x_2x_3x_0^2 + \frac{1}{3}x_1^3x_0 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x_2^3x_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3^3x_0 \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}}x_1x_2^3 - \frac{1}{3}\sqrt{2}x_1x_3^3 + x_1^2x_2x_3 - \frac{x_1^4}{2\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (\diamond)$$

5.3.10 Subespacios de cuárticas invariantes por (C). No hay ningun subespacio no trivial de cuárticas invariante por este grupo.

5.3.11 Subespacios de cuárticas invariantes por (E).

Único subespacio E.

$$2x_0^4 + 6x_1x_2x_3x_0 + x_1x_3^3 + x_1^3x_2 + x_2^3x_3. \quad (\diamond)$$

5.3.12 Subespacios de cuárticas invariantes por (B).

Único subespacio B.

$$\begin{aligned} g_0 = & \frac{x_0^4}{\sqrt{15}} - \frac{x_2x_3x_0^2}{\sqrt{15}} - \frac{x_1^2x_0^2}{2\sqrt{15}} - \frac{1}{3}x_1^3x_0 - \frac{1}{3}x_2^3x_0 - \frac{1}{3}x_3^3x_0 + x_1x_2x_3x_0 \\ & + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}x_1^4 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}x_1x_2^3 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}x_1x_3^3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}x_2^2x_3^2, \\ g_1 = & \frac{x_0^4}{4} + \frac{1}{2}x_1^2x_0^2 + x_2x_3x_0^2 + \frac{x_1^4}{4} + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Aplicando eliminación con bases de gröbner encontramos que la combinación lineal $\lambda_0g_0 + \lambda_1g_1$ es no singular, si y solo si,

$$-20\lambda_1\lambda_0^4 + 107\sqrt{15}\lambda_1^2\lambda_0^3 + 1140\lambda_1^3\lambda_0^2 + 180\sqrt{15}\lambda_1^4\lambda_0 \neq 0$$

5.3.13 Subespacios de cuárticas invariantes por (H).

Único subespacio H_1 . Es el único subespacio en 5.3.12.

5.3.14 Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_1).

Único subespacio Q_1 .

$$x_1^4 + 4x_2x_3x_1^2 + 4x_2^2x_3^2, x_1^2x_0^2 + 2x_2x_3x_0^2, \\ x_0^4.$$

Como estos polinomios tienen grado a lo más 2 en la variable x_2 , entonces toda combinación lineal de estos tiene grado a lo más 2 en la variable x_2 , y son singulares por Proposición 3.19.

5.3.15 Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_4).

Único subespacio Q_4 .

$$-\frac{1}{2}x_0^2x_2^2 + x_0x_1x_3x_2 - \frac{1}{2}x_1^2x_3^2. \quad (*)$$

5.3.16 Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_5). No hay ningún subespacio no trivial de cuárticas invariante por este grupo.

5.3.17 Subespacios de cuárticas invariantes por (R_3). No hay ningún subespacio no trivial de cuárticas invariante por este grupo.

5.3.18 Subespacios de cuárticas invariantes por (Q_7). No hay ningún subespacio no trivial de cuárticas invariante por este grupo.

5.3.19 Subespacios de cuárticas invariantes por (P).

Único subespacio P.

$$p_0 = x_0^4, \\ p_1 = x_2x_1^3 + x_3^3x_1 + x_2^3x_3.$$

La combinación lineal $\lambda_0p_0 + \lambda_1p_1$ es no singular, si y solo si, $\lambda_0\lambda_1 \neq 0$. En efecto, por la Proposición 3.19 es necesario que ambos λ_0 y λ_1 sean diferentes de cero. Si $b \in \mathbb{P}^3$ es un punto singular de $\lambda_0p_0 + \lambda_1p_1$, entonces encontramos un punto singular $\hat{b} \in \mathbb{P}^2$ de p_1 , pero $\{p_1 = 0\}$ es la curva cuártica de Klein, la cual es suave, lo cual es una contradicción. Por tanto, que λ_0 y λ_1 sean diferentes de cero es un criterio de no singularidad de $\lambda_0p_0 + \lambda_1p_1$, este criterio es equivalente a $\lambda_0\lambda_1 \neq 0$.

A partir de la clasificación de las superficies cuárticas suaves invariantes por los subgrupos primitivos de $\mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$ hecha en el capítulo anterior, podemos resolver algunas cuestiones adicionales. En primer lugar recopilamos lo recién hecho en relación con los diagramas del Capítulo 4.

Teorema 6.1 (Diagrama 4.1). *No hay ninguna superficie cuártica suave invariante por algún grupo primitivo del Diagrama 4.1.*

Demostración. Véase Sección 5.3, subsección 5.3.1 del capítulo anterior. $\square$

Teorema 6.2 (Diagrama 4.2). *La única superficie cuártica suave invariante por al menos un grupo primitivo del Diagrama 4.2 es dada por el polinomio*

$$k = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 6(x_0^2x_1^2 - x_2^2x_1^2 + x_3^2x_1^2 + x_0^2x_2^2 - x_0^2x_3^2 + x_2^2x_3^2).$$

Además, tal superficie es invariante por el grupo 19° , el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}_2^4.\mathfrak{S}_5$, y por sus subgrupos 13° , 14° , 15° , 17° . Por otro lado, los grupos primitivos 16° , 18° , 20° y 21° no fijan ninguna superficie cuártica suave. Por otro lado, $\{k = 0\}$ es la superficie cuártica de Kummer $\mathrm{Km}(E_{i\sqrt{10}} \times E_{i\sqrt{10}})$.

Demostración. Por la Sección 5.3 es suficiente con probar que ninguno de los grupos 16° , 18° , 20° y 21° , fijan alguna superficie cuártica suave. Si $X = \{f = 0\}$ es una superficie cuártica suave invariante por alguno de estos grupos, entonces por el Diagrama 4.2 debe ser invariante por 16° , por tanto f es una forma cuártica no singular invariante por 16° , contradicción con 5.3.5. Respecto al último comentario véase [Muk88, Página 190] y [BS21, Proposition 4.3], o bien [CD22, Proposition 1.6] $\square$

Teorema 6.3 (Diagrama 4.3). *Las superficies cuárticas suaves fijas por los grupos primitivos del Diagrama 4.3 son las siguientes:*

(A) *Todas las superficies cuárticas suaves invariantes por (A) están en el pencil de superficies*

cuárticas

$$\left\{ \lambda_0 \left(\frac{x_0^4}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}x_1x_0^3 + x_2x_3x_0^2 + \frac{1}{3}x_1^3x_0 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x_2^3x_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3^3x_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{2}{3}}x_1x_2^3 - \frac{1}{3}\sqrt{2}x_1x_3^3 + x_1^2x_2x_3 - \frac{x_1^4}{2\sqrt{3}} \right) + \right. \\ \left. \lambda_1 \left(\frac{x_0^4}{6} + \frac{x_1x_0^3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}x_1^2x_0^2 + \sqrt{3}x_2x_3x_0^2 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x_3^3x_0 + x_1x_2x_3x_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3}\sqrt{2}x_1x_2^3 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_1x_3^3 - \frac{1}{2}x_2^2x_3^2 - \frac{x_1^4}{3} \right) = 0 \right\}.$$

Los puntos $[\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$

$$\left[-2\sqrt{2} : \sqrt{i\sqrt{15}-1} \right], \left[-2\sqrt{2} : \sqrt{-i\sqrt{15}-1} \right], [1 : -\sqrt{3}], \left[47 : 8(1-4\sqrt{3}) \right] \\ \left[47 : -8(1+4\sqrt{3}) \right], \left[4 : -\sqrt{3} + i\sqrt{5} \right] \text{ y } \left[4 : -\sqrt{3} - i\sqrt{5} \right].$$

corresponden a algunas (no necesariamente todas) de las superficies cuárticas singulares en este pencil. De tales superficies cuárticas singulares hay a lo más 108.

(G) Hay solo dos superficies cuárticas suaves invariantes por (G). Estas son:

$$\left\{ -\frac{x_0^4}{12} + \frac{x_1x_0^3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}x_1^2x_0^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_2x_3x_0^2 + x_1x_2x_3x_0 - \frac{x_3^3x_0}{3\sqrt{2}} - \frac{x_1^3x_0}{2\sqrt{3}} - \frac{x_2^3x_0}{\sqrt{6}} \right. \\ \left. + \frac{x_1x_2^3}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2}x_2^2x_3^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1^2x_2x_3 - \frac{x_1^4}{12} - \frac{x_1x_3^3}{\sqrt{6}} = 0 \right\},$$

y

$$\left\{ \frac{x_0^4}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}x_1x_0^3 + x_2x_3x_0^2 + \frac{1}{3}x_1^3x_0 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x_2^3x_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3^3x_0 \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{3}}x_1x_2^3 - \frac{1}{3}\sqrt{2}x_1x_3^3 + x_1^2x_2x_3 - \frac{x_1^4}{2\sqrt{3}} = 0 \right\}.$$

(E) La única superficie cuártica suave invariante por el grupo (E) es:

$$\{2x_0^4 + 6x_1x_2x_3x_0 + x_1x_3^3 + x_1^3x_2 + x_2^3x_3 = 0\}.$$

Además, los grupos primitivos (C), (D), (K) y (F) no fijan ninguna superficie cuártica suave.

Demostración. Es inmediato por el Diagrama 4.3 y la Sección 5.3. □

Teorema 6.4 (Diagrama 4.4). Las superficies cuárticas suaves invariantes por los grupos primitivos (B) y (H), están dadas por el pencil de superficies cuárticas

$$\left\{ \lambda_0 \left(\frac{x_0^4}{\sqrt{15}} - \frac{x_2 x_3 x_0^2}{\sqrt{15}} - \frac{x_1^2 x_0^2}{2\sqrt{15}} - \frac{1}{3} x_1^3 x_0 - \frac{1}{3} x_2^3 x_0 - \frac{1}{3} x_3^3 x_0 + x_1 x_2 x_3 x_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{3}} x_1^4 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} x_1 x_2^3 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} x_1 x_3^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} x_2^2 x_3^2 \right) + \right. \\ \left. \lambda_1 \left(\frac{x_0^4}{4} + \frac{1}{2} x_1^2 x_0^2 + x_2 x_3 x_0^2 + \frac{x_1^4}{4} + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3 \right) = 0 \right\},$$

tales que $[\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$ son diferentes de los siguientes puntos

$$[0 : 1], [1 : 0], [\sqrt{15} : -4], [2\sqrt{15} : -5] \text{ y } [6\sqrt{15} : 1],$$

ya que en estos casos las correspondientes superficies cuárticas son singulares.

Demostración. Es una consecuencia directa de los resultados encontrados en la Sección 5.3. $\square$

Como aplicación de la clasificación de las superficies cuárticas suaves invariantes por los grupos primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ podemos determinar el grupo de automorfismos proyectivos de la superficie $\{k = 0\}$.

Corolario 6.5. El grupo de automorfismos proyectivos de superficie cuártica $\{k = 0\}$ es el grupo 19° . Más aun, $\text{PAut}\{k = 0\} \cong \mathbb{Z}_2^4 \cdot \mathfrak{S}_5$.

Demostración. Por 5.3.7 tenemos que $\text{PAut}\{k = 0\} = \text{PAut}(k) \supset (19^\circ)$. Esto implica que $\text{PAut}(k)$ es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$. Como $\{k = 0\}$ es una hipersuperficie suave de dimensión 2 y grado 4, entonces $\text{PAut}(k)$ es finito por [MM63, Theorem 1]. Por la clasificación de H. F. Blichfeld de los subgrupos primitivos finitos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ tenemos que $\text{PAut}(k)$ es conjugado a algún único grupo en los diagramas del Capítulo 4, denotémoslo por G . El orden de G es $|\text{PAut}(k)| \geq |19^\circ| = 1920$. Por Sección 5.3 tenemos que 19° es el grupo de mayor orden entre los grupos de los diagramas en el Capítulo 4 que fijan alguna superficie cuártica suave, por tanto $|G| = \text{PAut}(k) = 1920$, como $G \supset 19^\circ$ y ambos tienen el mismo orden, entonces deben ser iguales, $\text{PAut}(k) = G = 19^\circ$. $\square$

Podemos intuir de esta última demostración que la superficie $\{k = 0\}$ puede caracterizarse por su grupo de automorfismos proyectivos. Hacemos esto explícito en el siguiente teorema.

Teorema 6.6. Si G es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ el cual es el grupo de automorfismos proyectivos de alguna superficie cuártica suave X en $\mathbb{P}^3$, entonces $|G| \leq 1920$, con igualdad, si y solo si, G es conjugado a 19° . En este último caso X es proyectivamente equivalente a $\{k = 0\}$.

Demostración. La primera afirmación es básicamente lo hecho en la prueba anterior. Verifiquemos ahora lo último mencionado. En este caso encontramos una colinenación $[A] \in \text{PGL}(4, \mathbb{C})$ tal que $[A]G = \text{PAut}(k)[A]$. Veamos que $[A]X$ es invariante por $\text{PAut}(k)$. Sea $[B] \in \text{PAut}(k)$, así $[B][A] = [A][C]$ para algún $[C] \in G$, luego $[B][A]X = [A][C]X = [A]X$, verificando que $[A]X$ es invariante por G . Por otro lado, como X es una superficie cuártica suave, entonces $[A]X$ también es una superficie cuártica suave, la cual es invariante por $\text{PAut}(k) = 19^\circ$, pero la única superficie cuártica suave invariante por este último es $\{k = 0\}$ (véase 5.3.7), por tanto $[A]X = \{k = 0\}$, concluyendo que X y $\{k = 0\}$ son proyectivamente equivalentes. $\square$

Corolario 6.7. Las superficies cuárticas suaves $\{k = 0\}$ y $\{h_{12} = 0\}$ son proyectivamente equivalentes, donde $h_{12} = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 12x_0x_1x_2x_3$.

Demostración. Por [FMPK16, Section 5] tenemos que el polinomio h_{12} no es singular, el orden de $\text{PAut}\{h_{12} = 0\} = \text{PAut}(h_{12})$ es 1920 y $\text{PAut}(h_{12})$ tiene a un subgrupo conjugado de (A) , denotemos por H a tal subgrupo. Como (A) es primitivo y H es conjugado a (A) , entonces H es primitivo. Como H un subgrupo primitivo de $\text{PAut}(h_{12})$, entonces este último también es primitivo, y se concluye la demostración por el teorema anterior. $\square$

Observación 6.8. Este último corolario junto al previo teorema son un avance en la conjetura de W. Burnside previamente comentada en Observación 5.19

Otra estrategia para verificar la conjetura de W. Burnside a partir de nuestros resultados es mostrar que si X es una superficie cuártica suave de $\mathbb{P}^3$ y $|\text{PAut}(X)| \geq 1920$, entonces $\text{PAut}(X)$ es un subgrupo primitivo de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$. Sabemos que $|\text{PAut}(X)| \leq 3840$ por Corolario 5.18, por tanto, de ser la conjetura de W. Burnside falsa, entonces por Teorema 6.6 debe existir un subgrupo no primitivo finito G de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ tal que $1920 < |G| \leq 3840$ el cual deja invariante a alguna superficie cuártica suave de $\mathbb{P}^3$. Haciendo uso de la clasificación de los subgrupos finitos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ de H. F. Blichfeldt pueden encontrarse los subgrupos con esa cantidad de elementos, y ya encontrados estos podemos aplicar los métodos del capítulo anterior para verificar si alguno de estos subgrupos deja invariante alguna superficie cuártica suave de $\mathbb{P}^3$. Lo último no es inmediato ya que H. F. Blichfeldt no da explícitamente la descripción de los subgrupos no primitivos de $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$, aunque sí explica como obtenerlas en [Bli17, Chapter VII, Section §120]. Por supuesto, esta estrategia es basada en *fuerza bruta*, por decirlo de alguna forma, requiere trabajo y una lectura minuciosa del texto de H. F. Blichfeldt.

Observación 6.9. Todos los resultados de esta sección son nuestros, salvo las siguientes aclaraciones:

1. Respecto al grupo (A) del Teorema 6.3, las superficies cuárticas halladas para (A) son las mismas que aparecen en [FMPK16, Lemma 3.3]. Lo que sucede es que la base que ellos encuentran de este subespacio invariante es diferente a la que nosotros encontramos por medio de nuestro algoritmo. Las 7 superficies cuárticas singulares notadas en Teorema 6.3 sí las hemos hallado nosotros.
2. La superficie cuártica invariante por (E) del Teorema 6.3 es proyectivamente equivalente a la encontrada por Marcugini et al en [MPK19, Proposition 5.9]. Lo que sucede aquí es que nosotros usamos una representación primitiva fiel de $\text{PSL}(2, 7)$ equivalente a la considerada por Marcugini et al en [MPK19].
3. Las superficies cuárticas por (B) y (H) en Teorema 6.4 son las mismas a las que aparecen en [FMPK16, Lemma 3.2], pero expresadas con una base diferente. Las 5 superficies cuárticas singulares notadas en Teorema 6.4 sí las hemos hallado nosotros.

BIBLIOGRAFÍA

- [AOT22] Jose Avila, Guillermo Ortiz, and Sergio Troncoso. Invariant smooth quartic surfaces by all finite primitive groups of $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$. *arXiv preprint arXiv:2211.13273*, 2022.
- [Ati18] Michael Atiyah. *Introduction To Commutative Algebra*. CRC Press, 2018.
- [Bli17] H. F. Blichfeldt. *Finite Collineation Groups*. The University of Chicago Press, 1917.
- [Bou67] Nicolas Bourbaki. *Elements of Mathematics: General Topology, Pt.1*. Addison-Wesley Educational Publishers Inc, 1967.
- [BS21] Cédric Bonnafé and Alessandra Sarti. K3 surfaces with maximal finite automorphism groups containing M_{20} . *Annales de l’Institut Fourier*, 71(2):711–730, 2021.
- [Bur04] W. Burnside. On groups of order $p^\alpha q^\beta$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-1(1):388–392, 1904.
- [Bur11] William Burnside. *Theory of groups of finite order*. The University Press, 1911.
- [CD22] Paola Comparin and Romain Demelle. K3 surfaces with action of the group M_{20} . *arXiv preprint arXiv:2201.02150*, 2022.
- [CLO05] David A. Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Using Algebraic Geometry*. Springer, 2005.
- [CLO15] David A. Cox, John Little, and Donal O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer International Publishing, 2015.
- [Com14] Paola Comparin. *Symétrie miroir et fibrations elliptiques spéciales sur les surfaces K3*. PhD thesis, 2014.
- [CS19] Ivan Cheltsov and Constantin Shramov. Finite collineation groups and birational rigidity. *Selecta Mathematica*, 25(5):1–68, 2019.
- [DF03] D.S. Dummit and R.M. Foote. *Abstract Algebra*. Wiley, 2003.
- [Die72] J. Dieudonné. The historical development of algebraic geometry. *The American Mathematical Monthly*, 79(8):827–866, 1972.

- [Dol12] Igor V. Dolgachev. *Classical Algebraic Geometry: A Modern View*. Cambridge University Press, 2012.
- [FMPK16] Giorgio Faina, Stefano Marcugini, Fernanda Pambianco, and Hitoshi Kaneta. S5-invariant nonsingular quartic surfaces. *arXiv preprint arXiv:1605.08720*, 2016.
- [GAL13] Víctor González-Aguilera and Alvaro Liendo. On the order of an automorphism of a smooth hypersurface. *Israel Journal of Mathematics*, 197(1):29–49, jan 2013.
- [GALM20] Víctor González-Aguilera, Alvaro Liendo, and Pedro Montero. On the liftability of the automorphism group of smooth hypersurfaces of the projective space. *arXiv preprint arXiv:2004.12455*, 2020.
- [Gat] Andreas Gathmann. Algebraic geometry. Disponible en <https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2002/alggeom-2002.pdf> (2022-12-06). Notas para unas clases dadas en la Universidad de Kaiserslautern durante 2002/2003.
- [Gol51] Oscar Goldman. Hilbert rings and the hilbert nullstellensatz. *Mathematische Zeitschrift*, 54(2):136–140, Jun 1951.
- [Har97] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1997.
- [Hur13] A. Hurwitz. Über die trägheitsformen eines algebraischen moduls. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922)*, 20(1):113–151, Dec 1913.
- [Jou91] J.P Jouanolou. Le formalisme du résultant. *Advances in Mathematics*, 90(2):117–263, 1991.
- [Kle78] Felix Klein. Ueber die transformation siebenter ordnung der elliptischen functionen. *Mathematische Annalen*, 14(3):428–471, 1878.
- [Kol19] János Kollár. The rigidity theorem of fano–segre–iskovskikh–manin–pukhlikov–corti–cheltsov–de fernex–ein–mustață–zhuang. In *Birational Geometry of Hypersurfaces*, pages 129–164. Springer, 2019.
- [Kon99] Shigeyuki Kondō. The maximum order of finite groups of automorphisms of k3 surfaces. *American Journal of Mathematics*, 121(6):1245–1252, 1999.
- [Kon20] Shigeyuki Kondo. *K3 Surfaces*. European Mathematical Society, 2020.
- [Mac02] F. S. MacAulay. Some formulæ in elimination. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-35(1):3–27, 1902.
- [Mas98] H. Maschke. Bestimmung aller ternären und quaternären collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind. *Mathematische Annalen*, 51(2):253–298, 1898.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5. American Mathematical Soc., 1995.

- [MM63] Hideyuki Matsumura and Paul Monsky. On the automorphisms of hypersurfaces. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 3(3):347–361, 1963.
- [Moo96] Eliakim Hastings Moore. Concerning the abstract groups of order $k!$ and $\frac{1}{2}k!$ holohedrally isomorphic with the symmetric and the alternating substitution-groups on k letters. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-28(1):357–367, 1896.
- [MPK19] Stefano Marcugini, Fernanda Pambianco, and Hitoshi Kaneta. Projective automorphism groups of nonsingular quartic surfaces. *arXiv preprint arXiv:1611.10101v4*, 2019.
- [Muk88] Shigeru Mukai. Finite groups of automorphisms of k_3 surfaces and the mathieu group. *Inventiones mathematicae*, 94(1):183–221, Feb 1988.
- [Nik79] V. V. Nikulin. Finite groups of automorphisms of kählerian k_3 surfaces. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 38:75–137, 1979.
- [OY15] Keiji Oguiso and Xun Yu. Automorphism groups of smooth quintic threefolds. *arXiv preprint arXiv:1504.05011*, 2015.
- [Rot95] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer New York, 1995.
- [Ste12] Benjamin Steinberg. *Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach*. Springer, 2012.
- [Sun72] J. G. Sunday. Presentations of the groups $sl(2, m)$ and $psl(2, m)$. *Canadian Journal of Mathematics*, 24(6):1129–1131, 1972.
- [vdW50] B.L. van der Waerden. *Modern Algebra Volume II*. Frederick Ungar Publishing, 1950.
- [ZS60] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, 1960.