



ACTOS DE COMPRENSIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS EN ESTUDIANTES DE
GRADO SEGUNDO



LIC. JULIÁN GUTIÉRREZ MESA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS
EXPERIMENTALES
MODALIDAD PROFUNDIZACIÓN
TULUÁ – VALLE DEL CAUCA
2019



ACTOS DE COMPRENSIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS VERBALES ADITIVOS EN ESTUDIANTES DE
GRADO SEGUNDO



LIC. JULIÁN GUTIÉRREZ MESA

CÓDIGO: 1605906

TESIS DE MAESTRÍA PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGISTER ÉNFASIS EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICAS Y CIENCIAS EXPERIMENTALES

TUTOR

MG. DEISY ZEMANATE

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS
EXPERIMENTALES
MODALIDAD PROFUNDIZACIÓN
TULUÁ – VALLE DEL CAUCA

2019

**Actos de comprensión en la resolución de problemas verbales aditivos en estudiantes de
grado segundo**

Nota de aceptación

Firma del Evaluador 1

Firma del Evaluador 2

Tutor

DEISY ZEMANATE CUELLAR

Tuluá, 2019

Agradecimientos

Han sido dos años de muchos aprendizajes y dificultades, pero sobre todo de enormes satisfacciones.

Agradezco a DIOS por permitirme conquistar un peldaño más en mi vida profesional, llenándome de fuerza, voluntad y sabiduría cada día, para enfrentar cada reto.

A mis PADRES que siempre han estado ahí para ser el motor fundamental día tras día. A ellos que con su amor, su paciencia, sus consejos y su voz de aliento me impulsaron a dar todo de mí con el fin de alcanzar mis sueños.

A mis amigos y todas las personas que han sido testigos de este proceso desde un principio, lleno de pruebas, de cambios, pero sobre todo de bendiciones. A ellos que de alguna manera me apoyaron siempre a seguir adelante, a nunca desfallecer; depositando siempre su confianza en mí.

A mi tutora DEISY ZEMANATE, quien ha sido a lo largo del proceso la persona que me ha orientado por el camino del saber, quien con su pasión y conocimiento me guio por el camino de la excelencia y mejora constante.

Resumen

El presente trabajo de maestría, está basado en la pregunta de investigación ¿Qué acto de comprensión en la resolución de problemas verbales aditivos alcanzan los estudiantes del grado segundo cuando desarrollan una propuesta didáctica desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)? Todo a la luz de algunos conocimientos de tipo curricular, conceptual y didáctico, los cuales resultan fundamentales para el profesor al momento de llevar a cabo los procesos de enseñanza de los conocimientos matemáticos; como del contexto propio de los estudiantes en la escuela y comunidad. Bajo una investigación con enfoque cualitativo de tipo descriptivo, se aplica una propuesta de aula basada en la obra matemática y didáctica local, construidas a partir de la TAD, por la cual se puede determinar los actos de comprensión (como acto) que alcanzan los estudiantes al desarrollar una propuesta de aula que moviliza problemas verbales aditivos bajo la intervención propia del investigador.

Palabras clave: actos de comprensión, obra matemática, obra didáctica, resolución de problemas verbales aditivos

Abstract

The present master's degree work is based on the research question. What act of comprehension in the resolution of additive verbal problems do the second grade students reach when they develop a didactic proposal from the Anthropological Theory of the Didactic (ATD)? All in light of the relevant curricular, conceptual and didactic knowledge, which are fundamental for the teacher when carrying out their teaching processes of any mathematical object; as of the students' own context in the school and community. Under a qualitative research of a descriptive type, a classroom proposal based on the local mathematical and didactic work constructed from the ATD is applied, by which the levels of comprehension (as an act) reached by the students can be determined. This mathematical object under the intervention of the researcher.

Keywords: comprehension levels, mathematical work, didactic work, resolution of additive verbal problem

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1.....	1
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1 Planteamiento del problema.....	1
1.2 Antecedentes.....	5
1.3 Justificación	10
1.4 Objetivos.....	13
1.4.1 Objetivo general.....	13
1.4.2 Objetivos específicos	13
CAPÍTULO 2.....	14
2. MARCO CONCEPTUAL	14
2.1 La comprensión.....	14
2.2 Problemas verbales aditivos.....	17
2.2.1 Categorías de los problemas verbales aditivos	19
2.2.2 Algunos elementos de la estructura aditiva en el conjunto de los Naturales.	23
2.3 Teoría Antropológica de lo Didáctico.....	33
Praxeología matemática.	36
Praxeología didáctica.	36
CAPÍTULO 3.....	37
3 METODOLOGÍA E INSTRUMENTOS	37
3.1 Enfoque metodológico	37
3.2 Marco contextual	38
3.3 DESARROLLO METODOLÓGICO	39
Fase 1: Documental.....	39
Fase 2: Diseño de la propuesta de aula e implementación.....	50
Fase 3: Análisis y conclusiones	53
CAPÍTULO 4.....	55
4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	55

4.1	Análisis: situación 1, actividad 1	55
4.2	Análisis: situación 1 actividad 2	73
4.3	Análisis: situación 2, actividad 1	87
4.4	Conclusiones.....	106
4.4.1	Respecto al objetivo específico N° 1	106
4.4.2	Respecto al objetivo específico N° 2	107
4.4.3	Respecto al objetivo específico N° 3	108
4.4.4	Respecto al objetivo general	109
5.	Reflexiones	110
6.	Referencias	111
7.	Anexos	115

Lista de tablas

Tabla 1	Estructura problemas verbales para suma y resta	19
Tabla 2.	Rejilla de aspectos curriculares.....	45
Tabla 3.	PM. Tarea problemas de adición para la situación 1	46
Tabla 4	PM. Tarea problemas de sustracción para la situación 1	47
Tabla 5.	PM. Tarea problemas de adición para la situación 2	48
Tabla 6.	PM. Tarea problemas de sustracción para la situación 2	48
Tabla 7.	PD. Tarea problemas de adición y sustracción	49
Tabla 8.	Diseño situación 1 "La tienda escolar". Actividad 1 y 2	51
Tabla 9.	Diseño situación 2 "Cultivo de café". Actividad 1	52
Tabla 10.	Rejilla fase de análisis.....	53
Tabla 11.	Resultados aplicación situación 1, actividad 1	55
Tabla 12.	Resultados aplicación situación 1, actividad 2	73
Tabla 13.	Resultados aplicación situación 2, actividad 1	87

Lista de figuras

Figura 1. Resultados Prueba Saber Grado 3ro 2016.

Fuente:<http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>..... 2

Figura 2. Resultados Prueba Saber Grado 5to, 2016. Fuente:

<http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>.... 4

Figura 3: Ejemplo de función biyectiva de dos conjuntos finitos. Fuente: Godino (2004)..... 26

Figura 4. Estructura praxeológica. Fuente: propia..... 35

Figura 5. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 63

Figura 6. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 64

Figura 7. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 65

Figura 8. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 65

Figura 9. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 66

Figura 10. Cuestionario estudiante. Fuente: Estudiantes..... 67

Figura 11. Cuestionario estudiante. Fuente: Estudiantes..... 67

Figura 12. Cuestionario estudiante. Fuente: Estudiantes..... 68

Figura 13. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 70

Figura 14. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 71

Figura 15. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 72

Figura 16. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 81

Figura 17. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 81

Figura 18. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 82

Figura 19. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 82

Figura 20. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 84

Figura 21. Cuestionario estudiantes. Fuente: estudiantes..... 96

Figura 22. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 97

Figura 23. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 98

Figura 24. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes..... 100

Figura 25. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes.....	103
Figura 26. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes.....	103
Figura 27. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes.....	105

Lista de anexos

Anexo 1. Diseño situación 1, actividad 1.....	115
Anexo 2. Diseño situación 1, actividad 2.....	129
Anexo 3. Diseño situación 2, actividad 1.....	141

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, inscrito en la línea de investigación Didáctica de las matemáticas de la Universidad del Valle, Colombia, está relacionado con los conocimientos de tipo curricular, conceptual y didáctico en torno a una propuesta de aula que permite determinar los actos de comprensión que alcanzan los estudiantes al enfrentarse a problemas verbales aditivos (Castro, Rico, Castro, 1995).

El aprendizaje de las matemáticas en la escuela, más precisamente de la aritmética; es el aspecto que más preocupa no solo a profesores sino también a los padres de familia. En la medida que resulta ser fundamental en la formación de los seres humanos, respecto a todos sus ámbitos de la vida (social, cultural, económico, etc.). Esto, en primera instancia debido a que es la base primordial para el desarrollo del pensamiento no solo de tipo matemático, sino también de las ciencias en general; además de ser base fundamental para el desarrollo de competencias matemáticas en el transcurso del proceso de formación académica ya que de ello depende el éxito y desempeño que se pueda tener.

En diversas investigaciones realizadas por autores como Obando, Muñera (2003), NCTM (1980, 1991, 2003), Quintero (2015), Castro, Rico, Castro, (1995), se destaca la resolución de problemas como un pilar fundamental a la hora del trabajo con cualesquiera objeto matemático, entendiendo que se debe trabajar desde el contexto propio de los estudiantes y su relación con el objeto en mención. También, autores como Lagos (2015), Pineda (2015), Castro, Rico, Castro (1995), han determinado la importancia y forma por la cual la resolución de problemas verbales aditivos deben ser trabajados desde el aula; además, tomando en consideración al momento de pensar en las prácticas de aula y lo necesario para proponerlas y diseñarlas, las situaciones que favorezcan los aprendizaje de los estudiantes (Chevallard, 1999).

El corpus del trabajo se organizó en la primera parte con los aspectos generales y propios de la investigación. En esta, se encuentra todo lo referente al planteamiento del problema de investigación, con la respectiva justificación que sustenta la pertinencia de la misma. Además, de mostrar los antecedentes que permiten la delimitación de la propuesta con base a los aportes hechos

por otras investigaciones, teniendo en cuenta las unidades de análisis; y los objetivos que guían las etapas necesarias para alcanzar lo planteado a través de la propuesta.

En la segunda parte del trabajo se encuentra lo concerniente al marco conceptual en el cual se sustenta la investigación. De esta manera, se presentan los actos de comprensión los cuales se pretenden determinar a través de la aplicación de una propuesta de aula, además de lo relacionado con los problemas verbales aditivos y la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

La siguiente parte del trabajo, contiene aspectos de la metodología utilizada bajo un enfoque cualitativo de tipo descriptivo, el cual logra dar cuenta de los procesos que efectúan los estudiantes en el aula al momento de la aplicación de una propuesta. Además, donde se emplean instrumentos como lo es el cuestionario el cual contiene los diseños planteados y fundamentalmente los videos tomados de la aplicación. El diseño metodológico se da en tres fases respondiendo a cada uno de los objetivos planteados, en la primera fase se identifican los aspectos de tipo curricular por parte del MEN, conceptual y didáctico; en la segunda fase se construye una propuesta de aula que logre determinar los actos de comprensión que alcanzan los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas verbales; y como tercer y última fase se da aplicación y respectivos análisis.

La fase de análisis, se da partiendo del trabajo de observación y el trabajo en el aula. Instrumentos como el cuestionario, evidencia fotográfica y videos fueron suministro para llevar a cabo la recolección de datos. Todo lo anterior, tomando en consideración diferentes lentes de tipo curricular, conceptual y didáctico, sin dejar a un lado los actos de comprensión pensados tanto para la fase del diseño como para los análisis. Partiendo de dichos análisis como insumo, se escriben las conclusiones a las cuales se llega a través del desarrollo de toda la propuesta, tomando en consideración lo planteado en cada uno de los objetivos, entre las principales conclusiones se puede determinar que los estudiantes logran realizar procesos de identificación con problemas de cambio en la medida que se trabajan con cifras pequeñas hasta de dos cifras, pero solo logran identificar las cantidades planteadas mientras que la incógnita no es tomada como cantidad del problema, respecto al acto de discriminación, los estudiantes logran identificar el significado de la operación en la medida que sean problemas de cambio cuando la incógnita se encuentra en c . Por último, se escriben las referencias bibliográficas.

CAPÍTULO 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema

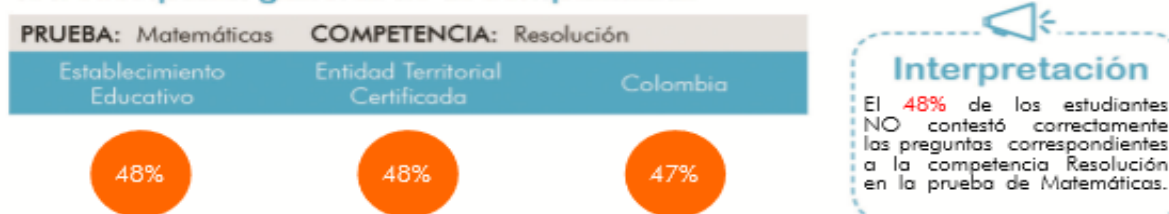
La enseñanza de las matemáticas en la escuela es fundamental en la formación de los niños y niñas en todos los aspectos de su vida. En esta perspectiva, el pensamiento numérico desarrolla en ellos las bases fundamentales para otros tipos de pensamientos y conocimientos no solo de tipo matemático, sino también de las ciencias y la cotidianidad. A pesar de esta importancia sigue siendo una de las ciencias que ha generado mayor dificultad en los educandos, ya sea por la complejidad que subyace en los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicha ciencia, o por los prejuicios que se ponen de antemano por parte de la familia y el medio social (Rondero, Font, 2015). Ante esta situación, el docente del área de matemáticas debe buscar, crear y diseñar diferentes propuestas que respondan a los diversos intereses y formas de aprendizaje de sus estudiantes, a través de la búsqueda de nuevos conocimientos y propuestas de tipo didáctico que se llevan a cabo como por ejemplo el desarrollo de proyectos de aula, PPP (Proyectos Pedagógicos Productivos), comités, entre otros.

En la institución educativa Técnica la Marina sede Antonio Nariño se lleva a cabo el proyecto de la Tienda Escolar, donde los mismos estudiantes se encargan de desarrollarlo día a día. Allí, los estudiantes deben hacer los roles de comprador y vendedor, con productos que no superan los miles, pero además los precios de dichos productos se manejan por cifras redondeadas, todos estos procesos que realizan los estudiantes lo hacen desde el tipo de cálculo mental. No obstante, los estudiantes realizan muy bien este tipo de cálculo tanto al momento de pagar como de entregar devueltas, donde tienen que hacer cuentas de uno, dos o tres productos aplicando cálculos aritméticos de manera estupenda. Sin embargo, a pesar del buen manejo que tienen los estudiantes durante la práctica de la tienda escolar no ocurre lo mismo cuando se enfrentan a situaciones de otros contextos específicamente a pruebas estandarizadas, como es el caso de la Prueba Saber 3°, en tanto que los resultados arrojan que el 28 % de los estudiantes no resuelve problemas aditivos

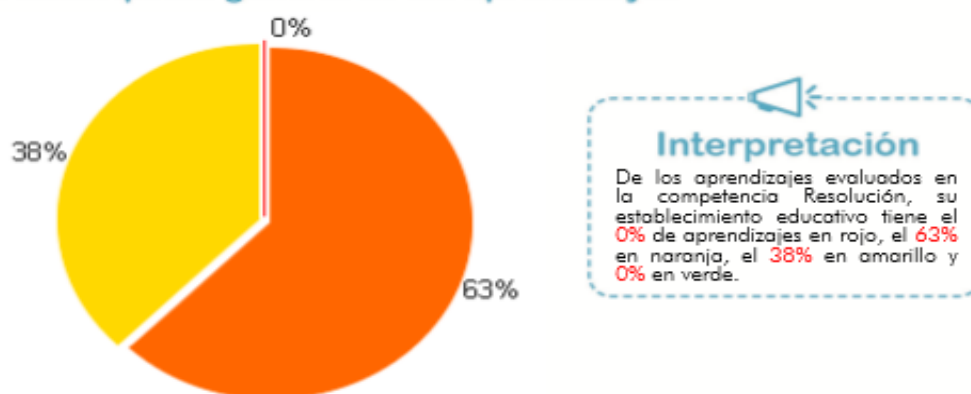
rutinarios de composición y transformación ni interpreta condiciones necesarias para su solución, lo que nos indica que los estudiantes no realizan los adecuados procesos de análisis para la solución de situaciones contextualizadas. Además, también se puede observar que el 63% de los estudiantes no usa operaciones ni propiedades de los números naturales para establecer relaciones entre ellos en situaciones específicas, lo cual es muy preocupante ya que es un porcentaje bastante amplio y por ende, debería conducir al docente a pensar en estrategias que aporten al desarrollo de habilidades en los estudiantes para responder a la resolución de situaciones del contexto de las ciencias y de las matemáticas.

Con base en lo expresado anteriormente, respecto a la dificultad planteada con los estudiantes de la I. E. La Marina, se presentan a continuación los resultados de la Prueba Saber grado 3° del año 2016.

1. Descripción general de la competencia



2. Descripción general de los aprendizajes



3. Aprendizajes

- El 53% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas multiplicativos rutinarios de adición repetida.
- El 28% de los estudiantes no resuelve problemas aditivos rutinarios de composición y transformación ni interpreta condiciones necesarias para su solución.

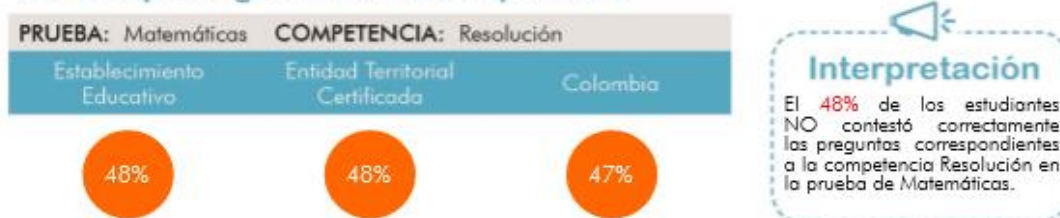
Figura 1. Resultados Prueba Saber Grado 3ro 2016.

Fuente: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>

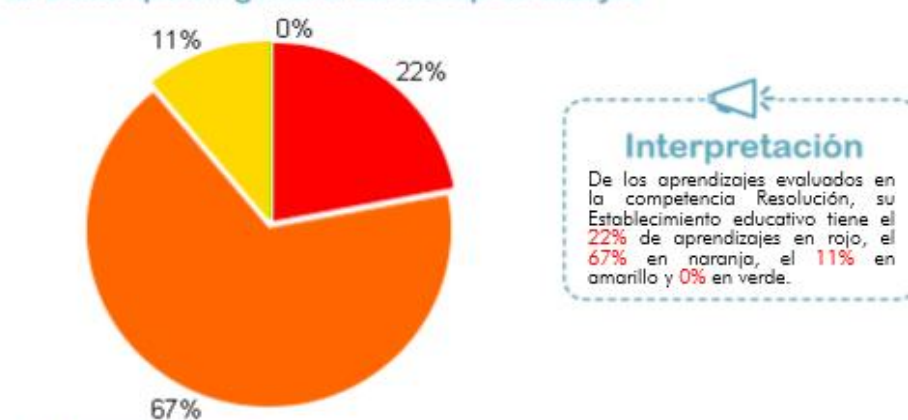
Así como los resultados son bajos en el grado tercero, las posibilidades de que suceda lo mismo en el caso del grado quinto mediante la Prueba Saber es bastante probable, ya que el problema viene presentandose desde grados anteriores; especialmente desde segundo, donde se trabajan las bases fundamentales en lo correspondiente a estructura aditiva. Tomando en consideración el resultado de la Prueba Saber grado 5to del año 2016, se puede evidenciar que el 46% de los estudiantes no resuelve problemas con estructura aditiva rutinarios y no rutinarios, lo cual lleva a pensar que la problemática respecto al adecuado análisis de situaciones problema sigue siendo una constante en los educandos; en el caso específico de la estructura aditiva. Además, según los resultados de las pruebas saber, los estudiantes no cuentan con la capacidad de hacer procesos de interpretación que les permita encontrar la solución correspondiente a una situación dada.

A continuación se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la Prueba Saber de quinto grado en el año 2016

1. Descripción general de la competencia



2. Descripción general de los aprendizajes



3. Aprendizajes

- El 72% de los estudiantes no resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones.
- El 46% de los estudiantes no resuelve problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación e igualación e interpretar condiciones necesarias para su solución.

Figura 2. Resultados Prueba Saber Grado 5to, 2016. Fuente:

<http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>.

Esta situación es un problema ya que no va a permitir que los estudiantes avancen en procesos más complejos, pues es cierto que el hecho de efectuar cálculos y operaciones de tipo mental es fundamental, pero más aún, hacer uso de estos conocimientos en otros contextos distintos al de la tienda escolar. Esto, dado que la vida social lo amerita y aún más la vida profesional lo requiere, si pensamos en la formación de seres humanos con la capacidad de adaptación en cualquier contexto y ámbito social, que pueda desempeñarse competentemente en el medio que lo rodea; teniendo en cuenta que el aprendizaje de las matemáticas está presente en las distintas disciplinas y desarrolla capacidades como el razonamiento, la resolución de problemas la modelación de fenómenos, el pensamiento crítico; fundamentales para el desarrollo integral del individuo.

Es así como se refleja en diferentes investigaciones, donde los estudiantes no logran resolver problemas aditivos en situaciones contextualizadas. Esto, debido principalmente a que los estudiantes no realizan procesos de análisis e interpretación, lo cual conduce a que no logren identificar el significado de la operación, sea suma o resta para resolver un problema (Lagos, 2015). En este mismo sentido Quintero (2015), plantea la dificultad que presentan los estudiantes para la resolución de problemas relacionada con el conteo, ya que solo cuentan números uno a uno en determinada colección, más no las cantidades sobre las cuales se debe operar. De esta manera, y tomando en consideración los problemas que presentan los estudiantes al enfrentarse a problemas verbales aditivos, surge esta preocupación de desarrollar en los niños habilidades en la resolución de problemas que involucren la estructura aditiva, la cual se pretende abordar a partir de la siguiente pregunta:

¿Qué acto de comprensión en la resolución de problemas verbales aditivos alcanzan los estudiantes del grado segundo de la Institución Educativa Técnica La Marina Sede Antonio Nariño cuando desarrollan una propuesta didáctica desde la TAD?

1.2 Antecedentes

En este apartado aborda distintas investigaciones que se han trabajado en torno a la resolución de problemas verbales aditivos y en lo concerniente a la comprensión en este mismo campo. A continuación, se presentan algunas investigaciones que serán insumo importante para el desarrollo del trabajo:

En la investigación desarrollada por Quintero Tobón Alba Lucia (2015) titulada *diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica desde el marco de la EPC¹, para potenciar estrategias de conteo, utilizadas en la solución de problemas de tipo aditivo*, se busca dar solución a un problema presente en estudiantes de grado primero, donde no tienen un adecuado razonamiento al momento de analizar situaciones problema contextualizadas, especialmente cuando se enfrentan a problemas verbales aditivos. Esto, debido a que asocian los conteos al simple hecho de contar números, sin tener en cuenta la magnitud de las cantidades. Principalmente, causado por las prácticas que han podido llegar a tener los estudiantes en su medio familiar y/o social. Bajo esta misma mirada, el Ministerio de Educación Nacional (2010) plantea que “tradicionalmente los estudiantes aprenden matemáticas formales y abstractas descontextualizadas” (p. 24).

Es así como para el desarrollo de la investigación en mención, a manera de proceso metodológico se llevó a cabo el diseño de una Unidad Didáctica desde el marco de la EPC (Enseñanza Para la Comprensión) a partir de juegos contextualizados, dejando de lado prácticas mecánicas que son de poco interés para los educandos. Además, respecto al marco conceptual que respalda dicha investigación, se plantea que la comprensión es un proceso de construcción continuo, dado que cuando se comprende un concepto, no solo se ha adquirido información, sino que también

¹ EPC: (Enseñanza Para la Comprensión) donde se plantea la comprensión formada por un contenido o conocimiento (el qué), es decir qué tanto se sabe, unos métodos (el cómo) o los procesos como se construyen o se validan los conocimientos, unos propósitos (el por qué y para qué) para definir el significado disciplinar y personal de los conocimientos.

está en la capacidad de emplearla en la realización de diversas actividades en las cuales tenga aplicación. (Perkins, 1995) citado por (Flore, 2007).

Posterior a la aplicación de la Unidad Didáctica, se obtuvieron como principales conclusiones que los estudiantes responden de mejor manera a estrategias de conteo por medio del uso de material concreto, ya que pueden realizarlo uno a uno y de esta manera efectuar las operaciones ya sea quitando o agregando elementos de cierta colección. Además, es de resaltar que a la hora de ejecutar la propuesta con los estudiantes se le permite a cada uno realizar los procesos de manera individual, ya que si las preguntas siempre son a todo el grupo, la gran mayoría se limitara a copiar lo que respondió el primero (este bien o mal). También, como gran insumo para el desarrollo de la presente investigación, se destaca en el trabajo mencionado que si bien es importante el uso del material concreto, se debe proponer otras actividades en las cuales el estudiante deba hacer uso de registros simbólicos (figuras, dibujos).

De esta manera, se potencian los resultados en la resolución de problemas verbales aditivos, ya que hacen uso del conteo uno a uno, por medio de mecanismos como señalar o tocar los materiales involucrados para dar respuesta a situaciones contextualizadas, esto en primera instancia, donde posteriormente el uso de sistemas simbólicos desarrolla en los estudiantes las capacidades de análisis e interpretación. Además, la implementación de juegos para la resolución de problemas fue de gran relevancia ya que llevó a los niños y niñas a mostrar gran interés y desempeño en los procesos cognitivos.

Ahora bien, en la investigación desarrollada por Lagos Pérez Sandra Milena (2015) titulada *propuesta de intervención de aula para favorecer el desarrollo del pensamiento numérico, a partir de situaciones de estructura aditiva en estudiantes de ciclo I*, se plantea dar solución a un problema presentado en los estudiantes del grado segundo, donde no establecen relaciones del algoritmo de la suma y la resta ya aprendido, con la resolución de problemas, además los estudiantes no realizan procesos de análisis e interpretación en situaciones contextualizadas. Entre sus distintas causas, cabe resaltar el énfasis que se hizo acerca de la formación disciplinar del docente, la cual no es propiamente del área específica de las matemáticas y donde además se observa en las prácticas pedagógicas estrategias de carácter tradicional.

Dicho trabajo se desarrolló bajo la Investigación Acción Participativa (IAP) donde se tuvo constante relación con la población, en el caso preciso estudiantes del grado segundo. Constó de dos fases; en la primera de ellas se desarrolló un diagnóstico para conocer las condiciones y competencias que tenían los estudiantes respecto a la resolución de problemas de estructura aditiva, partiendo de dicho proceso se continuó en la segunda fase donde se diseñó e implementó una estrategia metodológica que respondiera a las condiciones de los estudiantes. En ambas fases, se realizó un Análisis Didáctico planteado por (Gómez 2007) el cual está basado en: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

Como conclusiones se obtuvo que la implementación del diseño metodológico permitió identificar las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas de estructura aditiva, conduciendo al reconocimiento de los conocimientos previos por parte de los educandos para emplearlos en situaciones problemas contextualizados, siendo importante el contexto enmarcado en las situaciones ya que al momento de leer y solucionar los problemas, les era familiar. Además, favoreció a la ampliación de los niveles de comprensión por parte de los estudiantes puesto que lograron identificar si era una suma o resta lo necesario para solucionar cierto problema, a través de los argumentos que sustentaban sus respuestas.

En este mismo sentido, Brown (1978) llevó a cabo una serie de estudios en lo que se refiere a las dificultades que encuentran los niños al resolver un problema de tipo aditivo. En un estudio realizado a 58 niños de 11 y 12 años, solicitó que prepararan cuentos con las sumas, esto con el fin de analizar los significados que tienen los estudiantes acerca de la operación de adición. El resultado de este estudio da cuenta que los estudiantes pueden atribuir diversidad de significados a una suma, por medio de historias y cuentos desde su imaginación. Además, al proponer un problema de tipo adición complementaria con numeración mayor a 100, a niños entre 11 y 13 años, concluye que los estudiantes emplean diferentes estrategias de tipo aditivo donde en su gran mayoría no reconocieron que el problema podría resolverse a través de una resta.

Por otro lado, Rodríguez P. (2008), en su estudio “El desarrollo de las estrategias infantiles: Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo”, aplicado a los niños en sus primeros

años de escolaridad en la resolución de problemas aditivos; argumenta que los niños más pequeños poseen grandes habilidades matemáticas las cuales les permiten tener éxito al enfrentarse a problemas con estructura aditiva. El estudio se llevó a cabo con un mismo grupo de niños el cual fue evaluado en dos ocasiones, una cuando tenían entre cuatro y cinco años, y la segunda cuando tenían entre cinco y seis años de edad. Se les presentaron a ellos problemas de cambio, empleando objetos para facilitar la representación de cantidades teniendo en cuenta la edad de los estudiantes. Como resultado del estudio se obtuvo en general un nivel de desempeño óptimo en todos los problemas independientemente del momento en el cual se realizó la intervención, resaltando las habilidades cognitivas con que llegan los estudiantes a la escuela lo cual debe ser de gran aprovechamiento por parte de la escuela. Por otro lado, para tener en cuenta, se observó un cierto retroceso en lo que tiene que ver con problemas de sustracción, lo cual ha sido cierta constante en las dificultades respecto a la estructura aditiva.

En los estudios realizados por Castro, Rico y Castro (1995) en su libro *Estructuras Aritméticas Mentales y su Modelización*, un problema matemático es toda situación que propicie una meta a alcanzar para la cual debe ocurrir la superación de uno o más obstáculos. De esta manera, se requieren técnicas específicas para su respectiva solución, en este caso preciso para la resolución de problemas con estructura aditiva. El planteamiento de estos problemas se ha dado tradicionalmente posterior al estudio del objeto matemático; para lo cual se propone actualmente que se lleve a cabo tanto las situaciones problema como la estructura aditiva, con el fin de que los estudiantes adquieran el significado de las operaciones y su uso en la vida cotidiana, tal y como lo propone Kamii (citado por Castro, Rico, Castro, 1995) bajo estas dos razones:

- a) los niños construyen su conocimiento aritmético a partir de la realidad. b) La investigación ha demostrado que los niños pequeños son capaces de resolver problemas, a veces, mejor que los que ya han sido sometidos a un aprendizaje para tal efecto. (p.36)

Ahora, respecto a los problemas de tipo verbal son más fáciles para los estudiantes si se tiene en cuenta la inclusión de su propio contexto, en situaciones que respondan a las condiciones y necesidades de su comunidad, así como lo propone Kamii (citado por Castro, Rico, Castro, 1995)

(...) Si uno de los fines de la enseñanza de la aritmética es capacitar a los niños para la resolución de problemas de la vida real hemos de animarles a tratar con problemas desde el primer día de entrar en clase. (p.36)

Por otro lado, en lo concerniente a la comprensión, Romero (2012) por medio de su investigación titulada *comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de segundo grado*, busca dar solución a una problemática identificada en la presentación de pruebas estandarizadas, especialmente en el aspecto de la comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos. Esto condujo a la implementación de estrategias que favorecieran la comprensión lectora, dado que es un aspecto fundamental al momento de la resolución de problemas matemáticos, tal y como lo plantea Polya (1980), “para resolver un problema matemático primero se tiene que comprender el problema, desarrollar un plan, ejecutar un plan y revisar” (p. 23).

En el diseño metodológico de dicha investigación se basa en el trabajo de dos variables, como lo son la comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos de suma y resta. Es en este sentido donde el diseño se basa en la concepción de alfabetidad literaria de PISA y centra su trabajo en tres niveles de comprensión lectora: literal, es en el cual se obtiene información explícita del texto; inferencial, donde se hace inferencias a partir de la lectura; y en el nivel crítico, se reflexiona en torno al texto. Tras la aplicación del diseño y el análisis de la relación entre las dos variables (comprensión lectora y resolución de problema), se obtiene como conclusiones que existe una correlación significativa entre la comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos, entendiéndose que la primera variable resulta fundamental para que los estudiantes comprendan el enunciado planteado en un problema matemático. También, cabe resaltar que inclusive en los problemas que contienen interpretación de gráficos, mientras más nivel en la comprensión lectora se tenga, mejor es la resolución de problemas matemáticos.

1.3 Justificación

Algunas de las dificultades relacionadas con la comprensión y resolución de problemas verbales aditivos, que presentan la gran mayoría de los estudiantes al enfrentarse a este tipo de procesos son un común denominador en los procesos de enseñanza y aprendizaje generalmente en grado segundo de básica primaria. A pesar de que ya vienen con ciertas bases en parte desde la casa y también del grado anterior de escolaridad, se hacen complejos los procesos de análisis e interpretación de situaciones problema en lo que tiene relación con estructuras aditivas como lo muestran los resultados de pruebas saber. Cabe resaltar, que estos procesos anteriormente señalados son fundamentales para el proceso cognitivo de los estudiantes ya que son base esencial para la conceptualización de la estructura multiplicativa y de conceptos posteriores primordiales en el desarrollo de competencias matemáticas, como lo es la comprensión de los números, de las operaciones y la aplicación de las mismas.

Tomando en consideración el resultado obtenido de la prueba saber 2016, en donde el 28% de los estudiantes no realiza procesos de análisis en situación matemáticas contextualizadas que implican problemas de composición y transformación propios de la estructura aditiva, se hace necesario abordar esta situación. Dado que contribuir a dichos procesos favorece la construcción y apropiación de conocimientos fundamentales en la aritmética escolar y por ende aportará al desarrollo de competencias matemáticas en lo concerniente al pensamiento numérico en la educación básica, tomando en consideración que la aritmética se hace esencial en la vida del ser humano desde sus prácticas sociales como lo son las compras, el juego, el transporte, entre otras. Además, su uso no se limita exclusivamente al campo matemático debido a que bajo la estructura aditiva se fundamentan procesos en áreas como la física al momento de efectuar ecuaciones; las ciencias sociales desde el campo de la economía; la química para llevar a cabo formulas y procedimientos; entre otras.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje, el contexto socio cultural juega un papel determinante tanto para el docente como para los estudiantes, en término de exigencias, condiciones y restricciones que impone la escuela. En el caso del educador, es la manera en cómo involucra el medio social en su práctica pedagógica y cómo por medio de ella busca una

transformación social, generando cambios importantes. Por otro lado, en el caso de los educandos es tomar la realidad social desde un punto de vista crítico, donde los aprendizajes aporten la transformación de la misma, provocando cambios positivos que inician desde su propia formación.

Desde esta mirada, el proyecto de la Tienda Escolar es fundamental en el proceso, pues siendo esta un espacio meramente social en su comunidad brinda la oportunidad al docente de vincular al educando en procesos cotidianos con intencionalidad formativa, donde este tipo de procesos son vitales ya que fortalece y entrelaza el ámbito social con el formativo. Tal y como lo plantean los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998)

“El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan en el mundo actual” (pag.14)

Por el contrario, no preocuparse por este tipo de investigación, conduce a una educación basada en la simple transmisión de conocimientos y de poca calidad, dado que no permite reconocer la importancia, pertinencia y utilidad, lo cual no genera desinterés en los estudiantes. Asimismo, se obstaculiza la resolución de problemas verbales aditivos, sin una comprensión no solo de su estructura sino también de su planteamiento; lo cual en los estudiantes resulta fundamental puesto que es una herramienta necesaria para el estudiante enfrentarse a situaciones de tipo matemático, de todas las áreas del conocimiento en lo concerniente a la resolución de problemas y más importante aún, de su vida cotidiana.

En conclusión, se intentara mostrar que una organización matemática y didáctica bien estructuradas, enmarcadas desde los lineamientos y parámetros oficiales, bajo un marco teórico estructurado podrá impactar los procesos de aprendizaje en los estudiantes del grado segundo de la Institución Educativa Técnica La Marina en la resolución de problemas verbales; al involucrar el ámbito socio cultural a la práctica pedagógica, con la pretensión de una transformación social desde la escuela mejorando aspectos tanto del ámbito social como profesional entendiendo que toda profesión u oficio requiere necesariamente de la aritmética.

Los resultados de esta investigación aportaran en evidencia empírica a la formación continua por parte de los docentes, la cual servirá como apoyo para la reflexión pedagógica y profesional, con el fin de conducir a una mejora en las prácticas de aula. Por consiguiente, un impacto en las aulas de clase, contribuyendo así a la educación matemática al aportar elementos necesarios para tomar en consideración en la construcción de la obra matemática y didáctica respecto de la resolución de problemas verbales aditivos en función de la comprensión.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Determinar los actos de comprensión en la resolución de problemas verbales aditivos que alcanzan los estudiantes del grado segundo de la Institución Educativa Técnica La Marina Sede Antonio Nariño cuando se desarrolla una propuesta didáctica desde la TAD.

1.4.2 Objetivos específicos

- Considerar algunos conocimientos de tipo curricular, conceptual y didáctico que permitan la construcción de la organización matemática y didáctica en torno a la resolución de problemas verbales aditivos.
- Articular las organizaciones matemáticas y didáctica local en el diseño de una propuesta de aula que involucra la resolución de problemas verbales aditivos
- Analizar desde los actos de comprensión propuestos por Sierpinski los resultados obtenidos durante la ejecución de la propuesta de aula que involucra la resolución de problemas verbales aditivos.

CAPÍTULO 2

2. MARCO CONCEPTUAL

A continuación, se presentan los referentes conceptuales que van a dar fundamento a toda la propuesta, los cuales están basados en tres unidades de análisis. La primera está encaminada hacia la comprensión propuesta desde varios autores, aunque se toma en consideración los planteamientos propuestos por Sierpinska (1990b) dado el interés del trabajo. Como segunda unidad de análisis se encuentra la resolución de problemas verbales donde se tiene como referente los planteamientos de la NCTM (1980) y como problemas verbales Castro, Rico y Castro (1995). En tercer lugar, está la teoría antropológica de lo didáctico TAD propuesta por Chevallard (1996), en la que se desarrolla la organización matemática y la organización didáctica local.

2.1 La comprensión

A lo largo de la historia, el concepto de comprensión ha sido complejo a la hora de abordarlo desde el campo matemático a diferencia de su utilización en la literatura. Esto, debido a que ha sido complicado distinguir entre conocimiento y comprensión. A nivel general se ha abordado el campo de la comprensión de los objetos matemáticos, desde los aportes de investigaciones como; Tall (1981); Vinner, 1981, 1991); Dubinsky (1991); Sierpinska, (1990b), donde comparten la idea que la comprensión por parte del sujeto, es una construcción a través de la formación de los objetos mentales y las conexiones que se generan entre sí.

Las investigaciones realizadas por parte de Tall y Vinner (1981), conllevaron a la definición del termino concept image (imagen conceptual) como toda estructura asociada al concepto, la cual contiene todas las imágenes mentales por parte del sujeto, como las propiedades y procesos asociados a la noción matemática. Esto, entra en juego al momento que la persona escucha o ve el nombre de cierto conocimiento y toma una decisión basándose en la imagen del concepto, que son todas las imágenes mentales que tiene en la mente con el nombre de ese conocimiento y que puede tener partes que no estén de acuerdo con la definición formal.

En este mismo sentido, Vinner (1991) plantea que en la estructura cognitiva del sujeto hay espacio para dos lugares totalmente diferentes, uno en lo concerniente al concept definition, el cual se basa simplemente en la definición del concepto por parte de él respecto a sus experiencias; y otro para el de concept image, donde en ciertos casos puede llegar a existir interacción entre ellos, no obstante su formación también puede darse de manera independiente en el sujeto.

Por su parte Dubinsky (1991), bajo la perspectiva constructivista realiza una propuesta teórica llamada APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), basada también como los planteamientos anteriores en las construcciones mentales específicas que un sujeto puede llegar a elaborar con el propósito de desarrollar la comprensión de un concepto. A la luz de esta teoría, considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales que son previamente contruidos para formar acciones, las cuales se interiorizan para establecer procesos que a su vez se encapsulan creando así objetos. Finalmente, una vez son contruidos, procesos y objetos se interconectan de varias formas con el propósito de que los primeros actúen sobre los segundos, lo cual se le otorga el nombre de esquemas.

Resaltando la importancia de todos los planteamientos hasta ahora mencionados, cabe anotar que para el desarrollo del presente trabajo de investigación se tomaran en consideración los planteamientos de Ana Sierpinska (1990b), donde da cuenta que la comprensión de un objeto matemático no es simplemente la lectura de su definición, ni mucho menos de sus procedimientos; esta puede ser vista como proceso o como acto, siendo en el primero de los casos la implicación de la construcción de nuevos conocimientos (esquemas) y vista como acto, implica la modificación de un estado de conocimiento. La comprensión respecto al concepto matemático es algo más complejo, que involucra la definición e identificación del mismo, sus relaciones con otros conceptos, ejemplos y contra-ejemplos para encontrar de esta manera su aplicación en el contexto social.

Además, bajo este mismo planteamiento detalla los llamados “saltos”, al momento de referirse a los procesos de comprensión especialmente en matemáticas. Dichos saltos van desde viejas formas de conocimiento hacia nuevas formas del mismo, hacen referencia a los cambios relevantes de tipo cualitativo que tienen relación con el conocimiento matemático en la mente humana. Tal y

como lo plantea Byres (citado por Sierpinska 1990) “En el aprendizaje matemático los saltos son rasgos prominentes: son ejemplos, el repentino reconocimiento de un patrón en la resolución de un problema, pero también el descubrimiento de ciertos hechos ajustados dentro de un mundo comprensivo” (p. 26).

Dichos saltos en el conocimiento, pueden ser vistos desde diferentes perspectivas, especialmente desde dos. La primera hace referencia al nuevo conocimiento, lo cual desconoce el pasado y se basa en términos de las nuevas formas de conocer, en otras palabras, de la innovación. En la otra mirada, se revisan las viejas formas de conocimiento en relación con el nuevo, lo cual lleva a pensar en los aspectos que impedían el trascender de dicho conocimiento, donde algunos de estos se pueden dar a conocer como obstáculos epistemológicos.

Estos obstáculos, hacen énfasis en el pensamiento, creencias y actitudes del ser humano en comunidad respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento. Como lo plantea Sierpinska (1990) “Si el obstáculo no es sólo nuestro o de un par de personas, sino que es más extendido, o ha sido extendido en algún tiempo o en alguna cultura, entonces es llamado un obstáculo epistemológico” (p, 28). Lo cual conduce a pensar que los obstáculos epistemológicos no son malos o buenos, simplemente importantes en los procesos de formación ya que los pensamientos, creencias y actitudes son innatos en el ser humano y por ende dichos obstáculos deben ser superados.

ACTOS DE COMPRENSIÓN

La autora a su vez propone cuatro categorías fundamentales sobre las cuales se centra el análisis de los actos de comprensión, donde a continuación se presentan y se da cuenta de cada uno de ellos:

- *Identificación:* por medio de ella permite que se distinga un objeto de comprensión en el campo de la conciencia, percibiéndose como algo merecedor de interés y estudio. Usualmente se desea darle un nombre o si ya lo tiene, en la mente toma posición de término científico, lo cual ya no será algo del común de la vida diaria, sino que empieza a tener propiedades.

- *Discriminación*: es el proceso mediante el cual es posible identificar entre dos objetos, las diferencias existentes. Además, en un proceso se inicia notando solo la diferencia con respecto a otro y luego sus propiedades relevantes.
- *Generalización*: es la operación mental, la cual permite pensar el objeto de comprensión como un caso respectivo de otra situación. Es la posibilidad de extender el nivel de las aplicaciones del objeto, para de esta manera abrir la ventana a nuevas posibilidades de interpretación.
- *Síntesis*: es la búsqueda de una conexión común, como percepción de relación entre hechos aislados, que da cuenta de un principio que unifica y generaliza como un todo en cierto sistema.

Las categorías u operaciones mentales descritas anteriormente, permiten descubrir los estadios en los cuales un sujeto puede catalogarse respecto a los procesos de comprensión de ciertos principios de la estructura aditiva en el campo de los números naturales para la resolución de problemas verbales. Para el interés de este trabajo se tomarán en consideración los tres primeros actos: identificación, discriminación y generalización, esto debido al nivel de escolaridad de los estudiantes.

2.2 Problemas verbales aditivos

Muchos son los planteamientos que se han realizado a partir del término “problema”. A manera de definición Polya (1957), afirma que un problema significa no más que buscar de forma consiente una acción para alcanzar un objetivo que está concebido más no alcanzable de manera inmediata. Además, también plantea que resolver un problema es encontrar un camino donde no se conocía uno previo, sorteando un obstáculo para de esta manera conseguir el fin deseado (Polya, 1980). Desde esta perspectiva, introduce el término “heurística” para describir la resolución de problemas como un arte la cual tiende a la generalidad, buscando comprender el método que conduce a la solución de problemas, particularmente las operaciones de tipo mental útiles en dicho proceso (Polya, 1965).

Dicho autor, plantea cuatro pasos para el proceso de resolución de problemas: primero, entender el problema; segundo, configurar un plan; tercero, ejecutar el plan y como cuarto y último paso verificar la solución obtenida (1965). Bajo esta misma línea, Guzmán (2007) sostiene que la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas debe permitir al estudiante la activación de sus capacidades mentales, ejercitar su creatividad y por ultimo reflexionar acerca de su propio aprendizaje, lo cual conduce a la preparación para problemas futuros.

Tomando en consideración los aportes que se han realizado a través de la historia respecto a la resolución de problemas, por su parte la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) desde la década de los 80 piensa en un cambio en las prácticas pedagógicas para las matemáticas que involucre y lleve al estudiante a desarrollar el máximo de sus capacidades. De esta manera surge la propuesta y necesidad desde el ejercicio docente de ver la resolución de problemas como el eje de la enseñanza de la matemática escolar (NCTM, 1980). Bajo esta mirada, uno de los principales objetivos de la resolución de problemas para los docentes, es que los niños tengan la capacidad de aplicar y desarrollar diferentes tipos de estrategias para su resolución. Cabe anotar que dichas estrategias deben ser implementadas por medio del docente, como medio por el cual el estudiante desarrolle habilidades de análisis e interpretación para dar solución a diferentes situaciones. Entre ellas se pueden tomar en consideración el uso de material manipulativo, la elaboración de tablas, listas de chequeo, búsqueda de patrones e inclusive la reconstrucción de un problema. (NCTM, 1991)

Ahora bien, en el tema de la evaluación respecto al enfoque de la resolución de problemas, se debe determinar la capacidad de resolución que el alumno tenga en todos los aspectos en los que se involucra dicho proceso. En primera instancia, respecto al análisis de las situaciones en la medida que puedan dar respuesta a un interrogante y de igual manera puedan formular nuevos problemas y hacerse preguntas a partir de determinada situación. También, se debe tener en cuenta cómo emplean los estudiantes las diferentes estrategias y técnicas de resolución en diferentes situaciones y finalmente la capacidad que tengan los estudiantes para comprobar e interpretar resultados, teniendo en cuenta que dicho proceso de resolución atraviesa la formación matemática sin determinar niveles ni grados en la escuela, simplemente consolidando un marco ideal para la construcción de aprendizaje y gusto por las matemáticas. (NCTM, 1991)

A pesar de los planteamientos anteriormente mencionados, para el desarrollo del presente trabajo se tomarán en consideración los aportes realizados por Castro (1995), al plantear específicamente lo que tiene que ver con la resolución de problemas verbales aditivos como las situaciones en las que se debe resolver con una operación ya sea de suma o de resta.

Como todo proceso educativo, la resolución de problemas es un medio por el cual se puede acercar al medio social con la escuela y de paso al estudiante en este caso preciso con las matemáticas, a partir de situaciones problema involucrando no solo el área de conocimiento sino también aspectos de la vida y cultura propia de la comunidad y de las ciencias. Castro, Rico y Castro (1995). Ahora bien, por lo general en los procesos de enseñanza de las matemáticas, especialmente en básica primaria, se ha priorizado la enseñanza del algoritmo como tal, para de esta manera avanzar en la propuesta de situaciones problema. Este tipo de prácticas tradicionales en la escuela, basadas en abordar primero el algoritmo y luego el aspecto fenomenológico no ha tenido resultados óptimos.

2.2.1 Categorías de los problemas verbales aditivos

A su vez, Castro, Rico y Castro (1995) realizaron una clasificación para el caso de la suma y la resta, dependiendo del tipo de variable, tal y como se muestra a continuación:

Tabla 1 Estructura problemas verbales para suma y resta

SUMA	RESTA
$a+b=?$	$a-b=?$
$a+?=c$	$a-?=c$
$¿+b=c$	$¿-b=c$
$¿=a+b$	$¿=a-b$
$c=?+b$	$c=?-b$

$$c=a+?$$

$$c=a-?$$

Estructura problemas

verbales para suma y resta. Tomado de: Castro E., Rico L. y Castro E. (1995)

Además, al considerar los problemas verbales que implican la estructura aditiva, se tiene en consideración clasificarlos según la estructura semántica desde los aportes de Nesher. Son cuatro las categorías que se presentan a continuación, las cuales sugieren las operaciones de suma y resta. Castro E., Rico L. & Castro E. (1995)

Categoría de cambio

Son los problemas los cuales implican un incremento o disminución de cierta cantidad inicial hasta crear una final. Aquí, intervienen tres cantidades, inicial, otra de cambio y por ultimo una final; donde cualquiera de ellas puede ser la desconocida dando lugar a tres tipos de problemas. Puede ser de aumento (cambio-uni6n) o de disminuci6n (cambio-separaci6n), y donde hay para cada uno de los casos anteriores dos modalidades. Para todos los casos de este tipo, el cambio ocurre en el tiempo, donde la condici6n inicial se da en un tiempo T_1 , en otro tiempo se produce el cambio T_2 y por 6ltimo el resultado se alcanza en otro tiempo T_3 . A continuaci6n se presentan algunos ejemplos:

- *Donde la cantidad inicial y la magnitud del cambio son conocidas*, María tenía 6 canicas y compra 3 canicas más, ¿cuántas canicas tiene ahora? Ana tenía 9 canicas dio 5 a su amiga Carla, ¿cuántas canicas le han quedado?
- *Donde la cantidad inicial y el resultado son conocidos, la inc6gnita es la magnitud que cambia*, Camilo tiene 4 balones y quiere comprar algunos para así tener 9, ¿cuántos balones debe comprar? Andrea tiene 8 balones, le da algunos a su prima y le quedaron 3, ¿cuántos balones le dio Andrea a su prima?
- *Donde la inc6gnita es la magnitud inicial, y se conoce la magnitud de cambio y el resultado*, Susana tenía algunas bananas, su hermano le dio 3 y ahora tiene 9, ¿cuántas

bananas tenía Susana? Andrés tenía algunas bananas, dio 5 a su hermano y le quedaron 2, ¿cuántas bananas tenía Andrés?

Categoría de combinación.

Los problemas que hacen parte de esta categoría son los también llamados parte-parte-todo. Estos son cuando existe una colección y dos subcolecciones disjuntas de la misma. Al tener tres cantidades en juego, da lugar a dos tipos de problemas. Por ejemplo:

- *Cuando se conoce la colección total y una de las subcolecciones y se desconoce la otra subcolección.* Andrés tiene 10 bloques, de ellos 3 son verdes y el resto son rojos, ¿Cuántos bloques rojos tiene Andrés?
- *Cuando se conoce las dos subcolecciones y se desconoce la colección total.* Isabela tiene 3 bloques rojos y 5 amarillos, ¿Cuántos bloques tiene Isabela?

Categoría de comparación.

Son los problemas los cuales implican una comparación entre dos colecciones, empleando los términos “más qué” o “menos qué”. Dichos problemas cuentan con tres cantidades, una de referencia, otra comparativa y la tercera de referencia. Para los problemas de comparación existen 6 tipos, la cantidad desconocida puede ser ya sea la de referencia, la comparativa o la diferencia, donde cada una de estas posibilidades puede darse de dos formas, cuando la cantidad comparada es más grande que la cantidad de referencia y viceversa. Por ejemplo:

- *Cuando el referente y el referido son conocidos, se desconoce la comparación.* Raúl tiene 8 bananas y Juan 3 bananas, ¿Cuántas bananas tiene Raúl más que Juan? o, ¿Cuántas galletas tiene Juan menos que Jaime?
- *Cuando el referente y la comparación son conocidos, se desconoce el referido.* Alejandro tiene 5 juguetes y Sergio tiene 4 juguetes más que él, ¿Cuántos juguetes tiene Sergio? o, Juan tiene 8 juguetes y Camilo tiene 4 juguetes menos que él, ¿Cuántos juguetes tiene Camilo?

- *Cuando el referido y la comparación son conocidos, se desconoce el referente.* Ángela tiene 7 bananas, ella tiene 2 más que Andrea, ¿Cuántas bananas tiene Andrea? o, Ángela tiene 5 bananas y Andrea tiene 2 menos que ella, ¿Cuántas bananas tiene Andrea?

Categoría de igualación.

Son problemas que tiene que ver entre el cambio y la comparación, ya que se da cierta relación con la comparación entre dos colecciones. Se debe responder qué hacer con una de las colecciones, de modo que tenga el mismo número de elementos que la otra. Por ejemplo:

- *Cuando la acción se debe realizar sobre la mayor de las colecciones, en este caso se tiene una separación-igualación.* Ana tiene 9 globos y José tiene 5, para tener tantos globos como José, ¿Cuántos globos ha de romper Ana? Carmen tiene 6 globos y Cesar unos cuantos, si Cesar rompe 3 globos tendrá tantos como Carmen, ¿Cuántos globos tiene Cesar? Pedro tiene 8 globos y Carlos tiene unos cuantos, si Pedro rompe 5 globos tendrá el mismo número que Carlos, ¿Cuántos globos tiene Carlos?
- *Cuando la acción se debe realizar sobre la menor de las colecciones, en este caso se tiene una unión-igualación.* Clara tiene 7 bananas y Adriana tiene 4 bananas, ¿Cuántas bananas tiene que comprar Adriana para tener tantos como Clara? Juan tiene 7 bananas y Esteban tiene unas cuantas, si Esteban compra 2 bananas tendrá el mismo número que Juan, ¿Cuántas bananas tiene Esteban? Antonio tiene 6 bananas y Julián tiene unas cuantas, si Antonio compra dos bananas más tendrá tantos como Julián, ¿Cuántas bananas tiene Antonio?

Dadas las cuatro categorías planteadas por Castro (1995), el interés del presente trabajo solo se centra en las categorías de cambio y comparación, debido al nivel de escolaridad de los estudiantes. A continuación, se presentan las perspectivas matemática y didáctica en torno a la resolución de problemas aditivos.

2.2.2 Algunos elementos de la estructura aditiva en el conjunto de los Naturales.

Perspectiva matemática.

En este apartado se presentan los aspectos conceptuales de tipo matemático relacionados con la estructura aditiva, con el propósito de enriquecer las bases teóricas que fundamentan la presente investigación. Se toman en consideración los aportes realizados por Peano a través de los “Postulados de Peano” con relación a los números naturales, tomado del libro “Álgebra Moderna” de Frank Ayres Jr. (2003) y los aportes de Godino (2004); los cuales serán transcritos al pie de la letra, con el fin de no caer en imprecisiones o posibles errores.

POSTULADOS DE PEANO

Sea un conjunto N no vacío, tal que

Postulado I: $1 \in N$

Postulado II: Para cada $n \in N$ existe un único $n^* \in N$, llamado siguiente de n .

Postulado III: Para cada $n \in N$ se tiene $n^* \neq 1$.

Postulado IV: Si $m, n \in N$ y $m^* = n$, entonces $m = n$.

Postulado V: Todo subconjunto K de N que tenga las propiedades

$$(a) \quad 1 \in N$$

$$(b) \quad K^* \in K \text{ siempre que } k \in K \text{ en el mismo } N$$

Estas son propiedades bien conocidas de los números naturales. Los postulados I y II no requieren más explicación; el III establece que hay un primer número natural, el 1; el IV dice que distintos números naturales m y n tienen distintos siguientes $m + 1$ y $n + 1$; el V dice en esencia que cualquier número natural puede alcanzarse comenzando con 1 y contando los siguientes consecutivos.

ADICIÓN SOBRE N

La adición sobre N se define por

$$(i) \quad n + 1 = n^* \text{ para todo } n \in N.$$

$$(ii) \quad n + m^* = (n + m)^* \text{ siempre que } n + m \text{ esté definido.}$$

Se demuestra que la adición está regida por las siguientes leyes:

Para cualesquiera $m, n, p \in N$,

- | | |
|------------------------------|---------------------------------------|
| A1. Ley de clausura | $n + m \in N$ |
| A2. Ley conmutativa | $n + m = m + n$ |
| A3 Ley asociativa | $m + (n + p) = (m + n) + p$ |
| A4 Ley de cancelación | Si $m + p = n + p$, entonces $m = n$ |

En ese mismo sentido Godino (2004) define lo que es la adición de la siguiente manera:

Definición conjuntista para la adición

Dados dos números naturales a, b , se llama suma $a + b$ al cardinal del conjunto $A \cup B$, siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b , respectivamente. (p. 54)

RELACIONES DE ORDEN

Para cualesquiera $m, n \in N$ definimos “ $<$ ” por

(vii) $m < n$ si, y solamente si, existe algún $p \in N$ tal que $m + p = n$

Así se demuestra que la relación $<$ es transitiva, pero no reflexiva ni simétrica, por el **Teorema**

I: Todo elemento $n \neq 1$ de N es el siguiente de algún otro elemento de N .

$$1 < n \quad \text{para todo } n \neq 1$$

Y por **(i)** y **(vii)** $n < n *$ para todo $n \in N$

Para cualesquiera $m, n \in N$ definimos “ $>$ ” por

(viii) $m > n$ si, y solamente si, $n < m$

De aquí sigue

La ley de tricotomía: Para cualesquiera $m, n \in N$ se verifica una y solo una de las siguientes relaciones:

$$(a) \quad m = n \quad (b) \quad m < n \quad (c) \quad m > n$$

Otras consecuencias de las relaciones de orden son los Teoremas II y II’:

Teorema II: Si $m, n \in N$ y $m < n$, entonces para todo $p \in N$

$$(a) \quad m + p < n + p \quad (b) \quad m \cdot p < n \cdot p$$

y recíprocamente, si (a) o (b) son ciertas para algún $p \in N$, entonces $m < n$.

Teorema II': si $m, n \in N$ y $m > n$, entonces para todo $p \in N$

$$(a) \quad m + p > n + p$$

$$(b) \quad m \cdot p > n \cdot p$$

y recíprocamente si (a) y (b) son ciertas para algún $p \in N$, entonces $m > n$.

Como el Teorema II' no es más que el Teorema II con m y n cambiadas, es claro que la demostración de una parte del Teorema II demuestra la parte correspondiente del Teorema II'.

Las relaciones «menor o igual que» ($\leq$) y «mayor o igual que» ($\geq$) se definen como sigue:

$$\begin{array}{llll} \text{Para } m, n \in N, & m \leq n & \text{si} & m < n \quad \text{o si} \quad m = n \\ & m \geq n & \text{si} & m = n \quad \text{o si} \quad m > n \end{array}$$

Sea A un subconjunto cualquiera de N (esto es, $\emptyset$). Un elemento p de A se dice *elemento mínimo* de A si $p \leq a$ para todo $a \in A$. Nótese que en el lenguaje de los conjuntos, p es el primer elemento de A con respecto al orden $\leq$.

Por su parte también Godino (2004) plantea desde el campo de los naturales la ordenación de la siguiente manera:

Definición algebraica de la ordenación de números naturales

Dados dos números naturales a y b , a es menor que b , $a \leq b$, si existe otro número natural d tal que $a + d = b$. Esta relación binaria definida en N cumple las propiedades:

- Es una relación de orden total, es decir que si se toman dos números cualesquiera siempre se puede decir cuál de ellos es mayor.
- Reflexiva, es decir, para todo natural, n , $n \leq n$
- Antisimétrica, es decir, para dos naturales n y p , si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq n$, entonces necesariamente $n = p$
- Transitiva: es decir, para tres naturales n , p y q , si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq q$, entonces necesariamente $n \leq q$. (p.28)

También, desde los aportes de Godino (2004) se conoce en matemáticas la *función biyectiva* entre los números. Se dice que una función es biyectiva si es al mismo tiempo *inyectiva* y *sobreyectiva*; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en

el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.

Formalmente, dada una función f :

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

La función es biyectiva si se cumple la siguiente condición:

Es decir, para todo y de Y se cumple que existe un único x de X , tal que la función evaluada en x es igual a y .

Dados dos conjuntos X e Y finitos, entonces existirá una biyección entre ambos, si y sólo si X e Y tienen el mismo número de elementos y la función es inyectiva o sobreyectiva.

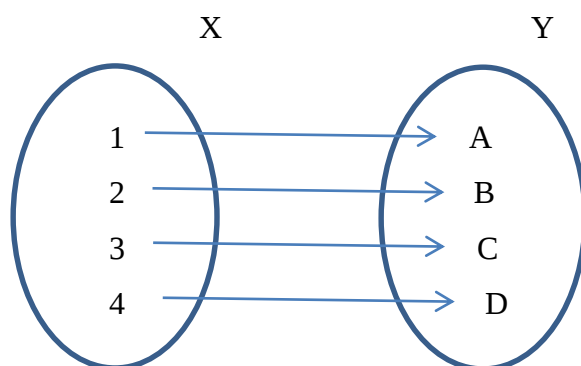


Figura 3: Ejemplo de función biyectiva de dos conjuntos finitos. Fuente: Godino (2004)

Por otro lado, es claro que durante la adición de cantidades pequeñas, los niños hacen uso de los principios de conteo, por ende es importante abordarlos como punto de partida de la adición. A continuación, se presentan las técnicas de contar para obtener cardinales tomados en consideración los planteamientos de Godino en su libro *Matemática para maestros* (2004), los cuales serán transcritos al pie de la letra, con el fin de no caer en imprecisiones o posibles errores.

Principios para el conteo

- *Principio del orden estable.* Las palabras numéricas uno, dos, tres, ... deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.

- *Principio de la correspondencia uno a uno.* A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
- *Principio de irrelevancia del orden.* El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.
- *Principio cardinal.* La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el ordinal de ese elemento, sino también el cardinal del conjunto. (p.21)

Definición conjuntista para la sustracción

Dados $b < a$, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces $a - b = \text{Card}(B')$, donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A. (p. 55)

Definición conjuntista para la sustracción por comparación

Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio A1 de un conjunto B con b elementos, entonces $b - a = \text{Card}(A'1)$. (p. 55)

Perspectiva didáctica.

La perspectiva didáctica aborda los conocimientos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos matemáticos. Así pues, se presentan algunos elementos a considerar para facilitar la comprensión durante el aprendizaje del tema como por ejemplo: técnicas para el conteo, dificultades, errores u obstáculos que pueden presentarse, como también sistemas de representación, recursos, etc.

De esta manera se presentan a continuación las técnicas que pueden ser aplicadas por parte de los estudiantes al momento de resolver problemas aditivos, a partir de los planteamientos de Godino (2004).

Técnicas de cálculo para sumar o restar

En la práctica matemática, en la que intervienen problemas, operaciones y procesos uno tras otro, de manera cultural se crean ciertas tablas de sumar haciendo uso de cálculos mentales, las cuales ayudan a dar respuestas de forma casi inmediata, pero en el caso de los niños los cuales no cuentan con dicha experiencia recurren a estrategias como las siguientes:

- Permutar términos: cuando se pregunta "seis más cinco" y se contesta "cinco más seis, once".
- Buscar los dobles: cuando se pregunta "seis más siete" y se piensa "seis más seis, doce, más uno, trece" o "siete y siete, catorce, menos uno, trece".
- Completar a diez o cinco: cuando se pregunta "ocho y seis" y se piensa "ocho y dos, diez, y cuatro, catorce"; o se pregunta "trece menos siete" y se piensa "trece menos tres, diez, menos cuatro, seis"; o se pregunta "siete menos tres" y se piensa "siete menos dos, cinco, menos uno, cuatro".
- Sumar en vez de restar: cuando se pregunta "trece menos seis" y se piensa "seis y siete, trece, siete" Godino (2004).

Técnicas orales (o mentales) de suma y resta.

El cálculo mental, el cual se hace sin ningún tipo de herramienta tan solo la mente, se recomienda siempre en las orientaciones a docentes en los procesos de enseñanza ya que la historia de la enseñanza de las matemáticas ha demostrado que procesos como las operaciones o el uso del algoritmo se pueden dar en los cálculos mentales potenciando así las capacidades de los estudiantes. Además, sin ánimo de entrar en una competencia con la calculadora, exime al estudiante de errores de tecleo ya sea en números o signos, donde por medio del cálculo mental se puede llegar a una estimación exacta o aproximación. Godino (2004)

Las técnicas orales están basadas principalmente en la retención en memoria de los números que se están operando. Dada la limitación y complejidad de la memoria se exigen técnicas las cuales estén basadas en números sencillos, con tendencia a redondear y conseguir números intermedios. Godino (2004). Algunas de estas técnicas son las siguientes:

- Permutar términos: El cual se basa en intercambiar el orden de sumandos o sustraendos. Por ejemplo, en "veintitrés más treinta y seis menos trece" decimos "veintitrés menos trece, diez, diez más treinta y seis, cuarenta y seis".
- Suprimir o añadir ceros: Se prescinde de los ceros finales, los cuales se vuelven a añadir posteriormente. Por ejemplo, en "ciento cincuenta más ochenta" podemos decir "quince más ocho, veintitrés, doscientos treinta".
- Descomponer términos: en esta técnica, se debe descomponer ya sea uno o varios términos en sumandos o sustraendos. Por ejemplo, en "quinientos ochenta y cinco menos cuatrocientos veintitrés" decimos "quinientos ochenta y cinco menos cuatrocientos, ciento ochenta y cinco, menos veinte, ciento sesenta y cinco, menos tres, ciento sesenta y dos".
- Compensar términos: está determinada por compensar términos de una cantidad a otra, así pues, en una suma, sumar a un sumando lo que se substraerá a otro. En el caso de la resta, sumar o restar la misma cantidad a los dos términos. Por ejemplo, "treinta y ocho más cincuenta y cuatro es lo mismo que cuarenta más cincuenta y dos, noventa y dos".

Otras técnicas orales más particulares, como,

Las técnicas de sumar (o restar) 9: se suma (resta) una unidad a las decenas y se resta (suma) una unidad a las unidades;

La de sumar (o restar) 11: se suma (resta) una unidad a las decenas y otra a las unidades, etc. (Godino, 2004. p.58)

Técnicas escritas de suma y resta.

Los algoritmos, o técnicas escritas de la suma y la resta se construyen partiendo del sistema de numeración escrito. Un algoritmo es un proceso de aplicación de reglas, con determinado orden a cierto número finito de datos para llegar con total certeza en un número finito de etapas al resultado (Godino, 2004). Está compuesto por una sucesión de órdenes inequívocos, siguiendo en orden determinadas reglas; de esta manera se presentan las técnicas de manera escrita en lo concerniente a la suma y la resta, partiendo de los trabajos de Godino (2004).

- *Algoritmo extendido de suma*

El uso de este algoritmo ocupa bastante más espacio a la hora de efectuarlo y si es el caso de sumas de dos o más sumandos puede resultar confuso y desordenado. El beneficio de este algoritmo es que evita problemas con la “llevada”. Cabe anotar que no es de uso común, aunque se propone en ocasiones como iniciación en la escuela.

Este algoritmo evita el problema de las llevadas, pero ocupa bastante más espacio en el papel y en sumas de más de dos sumandos o de números grandes puede resultar farragoso. Godino (2004)

- *Algoritmo de suma o resta con llevada escrita*

En este tipo de algoritmo, el apoyo oral va acompañado del escrito para recordar la “llevada”, escribiendo al comienzo de la columna siguiente para el caso de la suma o como un superíndice en el caso de la resta en la cifra del sustraendo que afecta. Se emplea para proveer un doble esfuerzo oral y escrito en primer momento.

- *Algoritmo de resta sin llevadas*

Este es un algoritmo que poco es usado, puesto que teniendo la ventaja de no producir “llevadas”, extiende las operaciones y por ende se hace compleja su justificación.

Se basa en que a la resta $4832 - 457$ se le puede sumar y restar el número 9999 sin que el resultado de la resta se vea modificado.

Tendremos entonces: $4832 - 457 = 9999 + 4832 - 457 - 9999 = 9999 - 457 + 4832 - 9999$. Pero restar 9999 es lo mismo que restar 10000 y sumar 1 con lo que resulta: $4832 - 457 = 9999 - 457 + 4832 - 10000 + 1$ que es el procedimiento definido en el algoritmo. (Godino, 2004, p.61)

- *Algoritmo de resta de "tomar prestado"*

En este caso, la “llevada” del minuendo se da disminuyendo una cifra al minuendo inmediatamente siguiente (a la izquierda), donde se expresa tachando la cifra del minuendo y escribiendo encima la cifra con una unidad menos. Como ventaja tiene que su justificación es más sencilla que la tradicional anteriormente mencionada, pero se hace un poco más compleja en la situación donde alguna cifra del minuendo sea cero.

Errores y dificultades relacionadas con el aprendizaje

Además de las técnicas mencionadas anteriormente, es de gran importancia tomar en consideración los errores y dificultades relacionadas con el aprendizaje en lo concerniente a la estructura aditiva, desde autores como Godino (2004), Brown (1978) y Bruno (2001), Bruno, A, Martinon y Velásquez (2001).

Respecto al conjunto de los números naturales, lo que se refiere a la técnica de contar es uno de los procesos principales para la iniciación en las matemáticas, donde los errores que se observan en dicho proceso desde los planteamientos de Godino (2004) pueden clasificarse en:

- Errores de recitado: están ligados a un recitado incorrecto de una sucesión numérica, dentro las que pueden destacar: saltarse palabras numéricas, decirlas en otro orden, repetirlas, etc. Estas, pueden deberse a que el niño no tiene apropiado el principio del orden estable o a una memorización incorrecta del suceso numérico que refiere.
- Errores de coordinación: son los que se refieren a la falta de coordinación entre la emisión de la palabra y el señalamiento del objeto. Estos pueden deberse en primera instancia al desconocimiento del principio de la correspondencia uno a uno o a una falla de coordinación entre la que es emisión vocal y la señalización.
- Errores de partición: son los asociados al suceso de no diferenciar correctamente lo ya contado de lo que falta por contar, es otras palabras, de "no llevar la cuenta", volviendo a contar un objeto que ya ha sido contado o dejar objetos sin contar. Son producidos por el desconocimiento del principio de la correspondencia uno a uno.

Ahora en lo concerniente a la escritura de números de varias cifras, los errores más frecuentes que se presentan según las investigaciones de Godino (2004) son los siguientes:

- Invertir el orden de las cifras: Es el que consiste en intercambiar la cifra de las decenas con la de las unidades.
- Incorporar la potencia de la base: el cual se basa en escribir los números tal como se hablan
- Suprimir o añadir ceros: es frecuente que los niños se equivoquen en el número de ceros intermedios que hay que escribir.

Al momento de la ejecución de los algoritmos escritos de suma y resta, los estudiantes pueden llegar a cometer algunos errores que son frecuentes teniendo en cuenta los planteamientos de Godino (2004) y los cuales son presentados a continuación:

- De colocación de los números: cuando no hacen coincidir las columnas de las cifras del primer número con las columnas del segundo.
- De orden de obtención de los hechos numéricos básicos: cuando se inicia a restar o sumar por la columna de la izquierda avanzando hacia la derecha.
- De obtención de los hechos numéricos básicos: cuando se equivocan en los resultados de la tabla de restar o sumar.
- De resta de la cifra menor de la mayor: cuando se resta la cifra menor de la mayor sin tener en cuenta si se trata del minuendo o sustraendo.
- De colocación de un cero: Cuando ponen como resultado el número cero debido a que la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo
- De lugar vacío: cuando hay un lugar vacío, no se completa la operación u olvidan la llevada.
- De olvido de la llevada: cuando no tienen en cuenta la llevada a la columna siguiente.
- De escritura del resultado completo: cuando al operar una columna se obtiene un número de dos cifras el cual es escrito completo en el resultado.

Ahora, al momento de los estudiantes enfrentarse a problemas que implican la resolución de problemas, se debe tener en cuenta que son varios los errores, dificultades y obstáculos según lo reportan las investigaciones. En primería instancia la posición en la cual se encuentra la incógnita es un factor importante a la hora del educando enfrentarse a un problema, en los cuales donde la incógnita es a o b , resulta ser más complejos que los problemas de incógnita c ; debido a que ha sido de esta última manera la forma en la cual se ha enseñado los problemas verbales con estructura aditiva en la escuela. Además, el tipo de números resulta ser una de las principales dificultades de

los estudiantes, ya que cuando se manejan números pequeños se les hace más fácil la resolución de problemas, donde pueden recortar triadas, el simple uso de los dedos o el manejo de material concreto. Por otro lado, dificultades que tiene que ver con el enunciado, en términos de su extensión ya que esto resulta ser más complejo para los procesos de análisis y comprensión por parte de los estudiantes y también el uso de términos desconocidos. (Bruno, 2001).

De igual forma, en estudios realizados por Bruno, A, Martinon y Velásquez (2001), se pudo evidenciar que una de las grandes dificultades que tiene los estudiantes para resolver problemas está relacionada con la forma en la cual se expresa la diferencia, esto en los problemas de comparación e igualación; y la variación, en problemas de cambio y de cambio-comparación. De esta manera, les permitió pensar en que las expresiones empleadas para la diferencia y variación, son de gran relevancia en la comprensión del enunciado, por ende, tiene que ver con el nivel de dificultad en los problemas. De igual manera, el orden de los datos juega un papel importante tanto en el nivel de dificultad como en el análisis y comprensión de los problemas por parte de los estudiantes.

2.3 Teoría Antropológica de lo Didáctico

El marco teórico para la propuesta didáctica se abordará desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico o más conocida como TAD, el cual fue uno de los primeros enfoques que tuvo en cuenta no solo las actividades de enseñanza y aprendizaje como objeto de estudio e investigación, sino que también considero la creación y utilización de todo saber matemático hasta su proceso de incorporación en la escuela como saber enseñado.

La TAD de Chevallard (1999), posiciona la actividad matemática, como el conjunto de toda actividad humana y en sí, de las instituciones sociales las cuales se forman en ella, de esta manera es que se habla de *teoría antropológica*. Desde esta perspectiva se pretende oponerse a la visión general donde se excluyen todo tipo de objetos, conceptos, temas, que se establecen como no convenientes para la matemática ya que culturalmente han sido alejados en cuestiones de la didáctica de las matemáticas.

Desde la TAD (1999) se propone el termino *praxeologías*, para referir a cualquier estructura posible de actividad y conocimiento, la cual es la unión de los términos griegos *logos* y *praxis*. Dado que toda actividad humana parte de la premisa que la practica o saber hacer (*praxis*) debe aparecer siempre acompañada de un saber (*logos*), lo cual se puede describir como activación de *praxeologías*. De esta manera, la ventaja de la noción *praxeologías*, es sin lugar a dudas que interviene en todo el proceso de conocimiento bajo el concepto de “saber”, en relación con la actividad, bajo el concepto de “hacer”.

Bajo este mismo postulado, la estructura *praxeológica* que se propone desde la TAD está definida en dos grandes bloques; en el primero se encuentra la *praxis* o saber hacer donde se refiere a lo práctico-técnico, este se compone de una Tarea que vamos a catalogar como *T*, está a su vez definida por medio de una técnica que vamos a definir como *t*, la cual llevara a cabo las tareas de *T*. Como gran segundo bloque, tenemos el *logos* o saber, donde se refiere a lo tecnológico-teórico, allí parte de una tecnología *q* o cierto discurso razonado a partir de la *t*, y de un componente teórico, el cual definiremos como *Q*, el cual rige la tecnología *q*, aportando elementos descriptivos, justificativos y generativos de los demás componentes *praxeológicos* (Chevallard, 1999).

De moto tal que, se hace fundamental para el desarrollo de la presente investigación en la medida que permite encontrar resultados y justificar los mismos.

Así ocurre tradicionalmente en la aritmética elemental, en la que el mismo pequeño discurso tiene una doble función, técnica y tecnológica, que permite a la vez encontrar el resultado pedido (función técnica) y justificar que es correcto el resultado esperado (función tecnológica), como cuando se dice: “Si 8 caramelos cuestan 10 francos, 24 caramelos, o sea, 3 veces 8 caramelos, costarán 3 veces más, es decir, 3 veces 10 francos”. (Chevallard, 1999, p.224).

Estructura Praxeológica

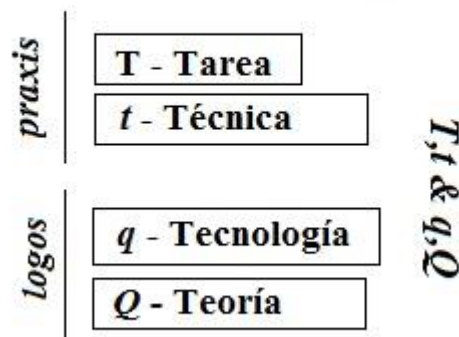


Figura 4. Estructura praxeológica. Fuente: propia

Cabe anotar que dichas praxeologías no son construcciones que se dan de manera individual, sino que están cargadas de una cantidad de elementos que la persona tiene a su disposición, con las cuales interactúa y es su contexto más próximo. Como se estipula en la TAD, estas construcciones praxeológicas están permeadas por un *carácter institucional*, en el sentido que las instituciones son ese dispositivo social en el cual confluyen las personas con sus diferentes praxeologías (formas de hacer y pensar determinadas). De esta manera, los individuos se convierten en sujetos de estas instituciones para las cuales se buscan las condiciones apropiadas para el desarrollo de sus actividades en determinado contexto.

Lo que se espera es que, en dichas instituciones, las actividades humanas que en ella se dan estén regidas por praxeologías, lo cual permita el desarrollo de tareas de manera óptima. Pero, dentro del mundo real es complejo que se cumpla esto, ya que dentro de las instituciones las praxeologías son dinámicas por diversas causas, entre ellas que envejecen debido a sus componentes teóricos, tecnológicos y técnicos donde emergen nuevas técnicas y tecnologías. Además, dentro de las instituciones especialmente en la escuela, fácilmente se pueden generar cambios praxeológicos debido a cambios de agentes en las mismas (maestros), o en ciertos casos premisas y políticas impuestas por organismos políticos.

Para describir la actividad matemática y también sus objetos institucionales, se han propuesto instrumentos como lo son la *obra matemática*, *praxeología matemática* y *praxeología didáctica*. A continuación, se describen brevemente:

Obra matemática: surge como un medio para alcanzar soluciones, dando respuesta a cierto conjunto de cuestiones, en la función de cierta institución respecto a tareas o problemas matemáticos. Para ello, Chevallard (1999), ejemplifica en cierta manera la obra por medio de preguntas que para el profesor pueden ser comunes pero poco trabajadas, ¿Cómo conseguir un determinado objeto al menor precio posible? o ¿Cómo lograr el mayor efecto posible con determinado esfuerzo?

Praxeología matemática.

Considerado por parte de una institución como el sistema de prácticas, apropiadas para dar respuesta a un tipo de tarea. De cierta manera, las praxeologías conciernen a los significados de los objetos matemáticos (contenidos, teorías y/u organizaciones matemáticas).

Praxeología didáctica.

Tiene cierta relación con la praxeología de tipo matemático, solo que esta hace referencia al papel del profesor y el alumno, las técnicas de estudio y demás situaciones que se dan en la práctica. Determinada por los tipos de tareas, técnicas y tecnologías que sustenten, que conjuntamente se movilizan para el estudio del objeto en una institución (Chevallard, 1999).

CAPÍTULO 3

3 METODOLOGÍA E INSTRUMENTOS

En este apartado se presentan los aspectos de tipo metodológico que fueron tomados en consideración para el desarrollo del trabajo, como el tipo de investigación, enfoque metodológico, marco contextual y diseño metodológico

3.1 Enfoque metodológico

El enfoque de investigación que se aborda en el presente trabajo es de tipo cualitativo, inscrito en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad del Valle, donde la información se deriva del análisis y la interpretación de discursos, argumentos, desarrollo de tareas, respuesta a preguntas, textos, entre otros, recolectados por medio de diversos instrumentos (cuestionario de trabajo, videos, transcripción de diálogos, rejillas). Dada la complejidad de los procesos educativos, se pretende conocer cómo un grupo de estudiantes desde su contexto y a partir de una propuesta de aula, logra construir y evidenciar actos de comprensión durante la ejecución de tareas dirigidas y diseñadas para tal fin.

A su vez, la presente investigación de desarrolla por medio de un estudio de enfoque descriptivo, el cual se basa como su nombre lo dice en la descripción de fenómenos o situaciones en un contexto particular, siendo este el medio por el cual se fundamenta el proceso. Como lo plantea Sampieri (2014) “(...) los estudios descriptivos son útiles para mostrar con precisión los ángulos o dimensiones de un fenómeno, suceso, comunidad, contexto o situación” (p. 92). De este modo, se pretende que bajo esta investigación se logre dar respuesta y se trabaje sobre el problema de investigación planteado.

Para el desarrollo de la investigación se tienen en cuenta varios instrumentos, en primera instancia están las rejillas, las cuales se realizan partiendo de un marco conceptual planteado desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (1999), potente y elaborado el cual da la validez y confiabilidad necesaria. Por otro lado, se toman en consideración videos y fotografías las cuales

potencian la toma de evidencias y resultados con la población directamente implicada en el desarrollo de la investigación.

El diseño metodológico de la investigación, se lleva a cabo en tres fases: primero una documental, en la cual se toman en consideración los conocimientos de tipo curricular, conceptual y didáctico en torno a la resolución de problemas verbales aditivos; la segunda corresponde al diseño e implementación de una propuesta de aula desarrollada a partir de la construcción de las obras matemática y didáctica local; y por ultimo una fase de análisis y conclusiones. A través de las fases anteriormente mencionadas se espera dar respuesta a cada uno de los objetivos planteados al inicio del trabajo.

3.2 Marco contextual

La Marina es un corregimiento perteneciente al municipio de Tuluá, en el departamento del Valle del Cauca, ubicada aproximadamente a 1200 metros sobre el nivel del mar, a 14 kilómetros del casco urbano. Su temperatura promedio es de 23 grados centígrados teniendo un clima algo templado lo cual hace del lugar un ambiente apropiado para vivir con su población aproximada de 2800 habitantes. Su principal actividad económica es la agricultura, donde sus campos verdes proveen todo tipo de frutas y verduras para la región, pero donde predomina los cultivos de café por ser una zona de “media montaña” especial para la cosecha de un café de calidad, resaltando además la participación de los niños en los procesos relacionados del mismo. Además, considerado un sitio importante de turismo en la región dado su ambiente natural rodeado de montañas y aire fresco, con sitios que motivan a visitar como lo son las fincas turísticas, balnearios y todo lo relacionado en el campo y la agricultura de la región. También, principal ruta de los deportistas extremos como ciclo montañistas y aficionados a parapente.

La presente investigación se desarrolla en la Institución Educativa Técnica La Marina, establecimiento de carácter oficial del municipio de Tuluá, valle del cauca. Enmarcada en el sector rural atendiendo la población de niños, niñas y jóvenes del corregimiento y sus alrededores de diferentes veredas, en el grado transición, básica primaria y secundaria y la media técnica con énfasis agropecuario y ambiental, apoyado y asesorado por el SENA. Es una institución líder del

sector rural del municipio por su proyecto bandera de “agroaventuras” el cual es una granja multipropósito enmarcada en el campo de la recreación campestre y ecológica, además del trabajo destacado de la metodología Escuela Nueva con sus 13 sedes, las cuales cuentan con el proyecto de la tienda escolar liderado y desarrollado por los estudiantes. La propuesta se llevó a cabo en la Sede José Antonio Páez, ubicada en el corregimiento de La Marina, la cual atiende los grados tercero, cuarto y quinto de la básica primaria en la cabecera del corregimiento. El grupo que participa en la investigación son 16 estudiantes del grado Tercero 1, los cuales cuentan con una edad que oscila entre los 7 y 9 años, pertenecientes al corregimiento de la Marina y algunos de veredas aledañas. El nivel de educación de las familias está determinado en la educación media, ya que tan solo un 50% de los padres de familia terminaron el bachillerato, de los cuales un 10% cuenta con una carrera profesional. El resto de ellos, son personas que se dedicaron al trabajo desde la adolescencia debido a las condiciones y necesidades familiares.

A continuación se desarrollan cada una de las fases propuestas en la investigación:

3.3 DESARROLLO METODOLÓGICO

Fase 1: Documental.

Para la primera fase, se establece un primer contacto con el tema de investigación, dado que se intenta dar respuesta al primer objetivo, para de esta manera obtener la documentación necesaria. El instrumento a construir es una rejilla, en la cual se realiza el proceso de recolección de los aspectos de tipo curricular, matemático y didáctico que favorecen la construcción de la praxeología matemática, didáctica y el diseño de una propuesta de aula.

Aspectos curriculares.

A continuación, se presentan los elementos curriculares que son tomados en consideración para el desarrollo de la propuesta a partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, (1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) y el PEI de la Institución Educativa Técnica la Marina. Desde los Lineamientos

Curriculares de Matemáticas (1998), se establece que “el pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p. 26), lo cual indica que el contexto por el cual los estudiantes se acercan a las matemáticas es determinante para el desarrollo del pensamiento numérico, en tanto que se necesita de situaciones propias y significativas de los estudiantes que cautiven en ellos el interés.

Para el desarrollo del pensamiento numérico en los niños y niñas, se proponen tres aspectos que se consideran básicos a través del sistema de los números naturales y orientados al trabajo de aula (MEN, 1998). El primero de ellos es la comprensión de los números y de la numeración, la cual está dada a partir de sus experiencias en la vida cotidiana y se construye teniendo como base actividades de contar, agrupar y el uso del valor posicional. Así mismo, los números toman distintos significados para los niños dependiendo del contexto en el cual se emplean, para ello Rico (1987) citado por el MEN (1998), destaca siete maneras en las cuales se utilizan los números en la vida real: como secuencia verbal, para contar, como cardinal, para medir, como ordinal, como código o símbolo y como tecla para pulsar.

Como segundo aspecto importante para el desarrollo del pensamiento numérico, se tiene la comprensión del concepto de las operaciones, siendo parte fundamental en el currículo de las matemáticas, principalmente en la básica primaria con las operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y división) entre los naturales. Para construir el significado de las diferentes operaciones, diversas investigaciones (NTCM, 1989; Rico, 1987) plantean algunos aspectos básicos como lo son: reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones, comprender las propiedades matemáticas de las operaciones, el efecto de las mismas y las relaciones que se dan entre ellas. (MEN, 1998)

En ese sentido, desde el MEN se proponen diversos tipos de problemas para la adición y sustracción, los cuales son tomados en consideración para el diseño de la propuesta de aula y están mencionados a continuación:

Para la adición

- Unión. Parte - parte – todo
- Añadir o adjunción
- Comparación
- Sustracción complementaria
- Sustracción vectorial

Para la sustracción

- Separación o quitar
- Comparación – Diferencia
- Parte- parte- todo. Unión
- Adjunción – añadir
- Añadir
- Sustracción vectorial

Como tercer y último aspecto para el desarrollo del pensamiento numérico, están los cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones, el cual busca desarrollar en los alumnos otras destrezas de cálculo además de los algoritmos escritos formales, como lo son el cálculo mental, la estimación, la aproximación, entre otros. Esto, con el fin de llevar al estudiante a su mundo real en el cual las respuestas se calculan mentalmente o con una estimación, ya que tradicionalmente el trabajo con operaciones se ha limitado al uso rutinario de lápiz y papel para efectuar algoritmos, antes de saber aplicarlos en la resolución de problemas prácticos. (MEN, 1998).

En este sentido, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) plantean que la resolución de problemas es un “proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica” (p. 52), además de ser el contexto donde todo quehacer matemático cobra sentido en la medida en que las situaciones que se le propongan al estudiante estén ligadas a su vida cotidiana. A través de la formulación y resolución de problemas, los estudiantes pueden desplegar diversas estrategias para resolverlos, encontrar verificar y comprobar resultados, reflexionar y originar otros problemas, lo cual es clave para el

desarrollo del pensamiento matemático en tanto que pueden formular preguntas, inventar y resolver sus propios problemas desde su medio social. (MEN, 2006)

De esta manera, se puede anotar que es el docente quien “plantea, gestiona y propone situaciones de aprendizaje matemático... en particular situaciones problema para sus alumnos” (MEN, 2006, p.72), esto con el fin de lograr la interacción con sus compañeros y el contexto en general, a su vez que desarrolla la actividad matemática. Dichas situaciones, se entienden como el conjunto de proyectos, problemas, construcciones y relatos que se elaboran basados en el contexto cotidiano, en las matemáticas y en las otras ciencias, que apuntan a distintos contenidos y responden a diversas estructuras que deben ser interpretadas por los estudiantes tomando en consideración factores sociales y culturales propios de la clase de matemáticas. (MEN, 2006)

Es así como desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se establece el concepto de ser *matemáticamente competente*, lo cual requiere de ser eficaz, diestro y eficiente en el desarrollo de cada uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática (la formulación, tratamiento y resolución de problemas; la modelación; la comunicación; el razonamiento y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos). Esto, se concreta a través del pensamiento lógico y matemático, el cual a su vez se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos por el MEN (1998), de los cuales se centra el interés en el pensamiento numérico y sistemas numéricos. A su vez, por medio de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se establecen niveles de avance en el desarrollo de competencias por conjunto de grados, de los cuales se toma en consideración del grado primero a tercero, los siguientes estándares:

- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.

Además, teniendo una coherencia en la línea de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), el

Ministerio de Educación Nacional (2015) presenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) como “un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes” (p. 5), esto en cada uno de los grados y en las áreas fundamentales como lo son matemáticas, lenguaje, ciencias sociales y ciencias naturales. Su importancia está dada en que plantean los elementos para lograr construir rutas de enseñanza con el fin de promover la consecución de aprendizajes que se logran año a año para obtener como resultado el alcance de los Estándares Básicos de Competencias.

Para el desarrollo de la presente investigación, se toman en consideración desde los DBA volumen 2 (2016), los siguientes:

- DBA 1: interpreta, propone y resuelve problemas aditivos que involucren la cantidad en una colección, la medida de magnitudes y problemas multiplicativos sencillos.
- DBA 2: utiliza diferentes estrategias para calcular o estimar el resultado de una suma y resta, multiplicación o reparto equitativo.
- DBA 3: utiliza el Sistema de Numeración Decimal para comparar, ordenar y establecer diferentes relaciones entre dos o más secuencias de números con ayuda de diferentes recursos.
- DBA 9: opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.

A manera de simplificación, el Ministerio de Educación Nacional ha diseñado las Mallas de Aprendizaje (2017) de las diferentes áreas fundamentales donde se compacta lo concerniente a los Lineamientos Curriculares (1998), Estándares Básicos de Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) propuestos para cada grado de escolaridad. La malla correspondiente para grado segundo se encuentra articulada por medio del macroproceso de la resolución de problemas, y a su vez con los procesos básicos como lo son la comunicación, razonamiento, procedimientos y modelación.

Ahora, desde el contexto institucional de la Institución Educativa Técnica La Marina y a la luz de su Proyecto Educativo Institucional PEI, se propone a través del plan de área de Matemáticas

para grado segundo, lo estipulado desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) con el objetivo de que los estudiantes en grado segundo resuelvan y formulen problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación, identifiquen si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables y usen diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. Lo cual tiene completa relación con los objetivos generales planteados desde el PEI en lo concerniente a satisfacer las expectativas, intereses y necesidades del educando ofreciendo una educación básica contextualizada hacia la zona rural en especial hacia el sector de economía campesina, donde logre saber - saber, saber hacer, saber ser y estar es decir, que aprenda a aprender, que aplique y valore lo que hace. Esto a su vez, encamina hacia el perfil del estudiante de la I.E. Técnica La Marina el cual buscar formar educandos analíticos e investigadores teniendo en cuenta su realización personal y el contexto social.

Tomando en consideración los planteamientos desde los Lineamientos Curriculares (1998), Estándares Básicos de Competencias (2006), Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) y el PEI de la Institución Educativa Técnica la Marina, se realiza la rejilla curricular la cual permite la construcción de cada uno de los objetivos que se consideraron en el diseño.

Tabla 2. *Rejilla de aspectos curriculares*

LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS	DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE	ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS	PROYECTO EDUCATIVO INSTITUCIONAL	OBJETIVOS DE LAS SITUACIONES PLANTEADAS
Comprensión de los números y de la numeración	DBA 3: utiliza el Sistema de Numeración Decimal para comparar, ordenar y establecer diferentes relaciones entre dos o más secuencias de números con ayuda de diferentes recursos.	-Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. -Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	La Institución Educativa Técnica La Marina busca satisfacer las expectativas, intereses y necesidades del educando ofreciendo una educación básica contextualizada hacia la zona rural en especial hacia el sector de economía campesina, donde logre saber - saber, saber hacer, saber ser y estar, es decir, que aprenda a aprender, que aplique y valore lo que hace.	-Identificar y resolver problemas en situaciones aditivas de cambio y comparación teniendo en cuenta los datos relevantes y técnicas utilizadas por los estudiantes para la resolución
Comprensión del concepto de las operaciones	DBA 9: opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.			
Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones	DBA 1: interpreta, propone y resuelve problemas aditivos que involucren la cantidad en una colección, la medida de magnitudes y problemas multiplicativos sencillos DBA 2: utiliza diferentes estrategias para calcular o estimar el resultado de una suma y resta, multiplicación o reparto equitativo.	-Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.		-Resolver, generalizar y proponer problemas en situaciones aditivas de cambio y comparación

Fuente: creación propia

Teniendo claro lo concerniente a los aspectos curriculares planteados en el apartado anterior, se procede a presentar la construcción de las praxeologías (matemática y didáctica local) que responden al desarrollo del primer objetivo planteado al inicio del presente trabajo.

Praxeología matemática.

Para la construcción de la praxeología matemática, se toman en consideración los objetivos contruidos desde la rejilla curricular, los planteamientos de Castro (1995) dando respuesta a dos de sus categorías planteadas (cambio y comparación), las definiciones planteadas por Godino (2004), además de los aportes de Peano y Frank Ayres Jr. (2003) con relación a los números naturales, tomado del libro “Algebra Moderna”.

A continuación se presentan las praxeologías matemáticas, que desde ahora se reconocen por medio de la sigla PM, las cuales orientan el diseño de la situación 1, tanto para los problemas de adición como de sustracción.

Tabla 3. PM. Tarea problemas de adición para la situación 1

Tarea	Problemas de cambio de tipo $a + b = ?$; $a + ? = c$; $? + b = c$ Problemas de comparación de tipo $a + b = ?$			
Técnica	Uso del cálculo mental	Uso del algoritmo	Uso de la representación gráfica	Uso del conteo con material concreto o con los dedos hacia adelante
Tecnología	Definición conjuntista			Principio de correspondencia uno a uno

Teoría	Dados dos números naturales a, b , se llama suma $a + b$ al cardinal del conjunto $A \cup B$, siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b , respectivamente. <u>Ver apartado perspectiva matemática.</u>	A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una. <u>Ver apartado perspectiva matemática.</u>
---------------	---	---

Fuente: creación propia

Tabla 4 PM. Tarea problemas de sustracción para la situación 1

Tarea	Problemas de cambio de tipo $a - b = ? ; a - ? = c ; ? - b = c$ Problemas de comparación de tipo $a - b = ?$			
Técnica	Uso del cálculo mental	Uso del algoritmo	Uso de la representación gráfica	Uso del conteo con material concreto o con los dedos hacia atrás
Tecnología	Definición conjuntista	Definición conjuntista	Definición conjuntista	Principio de correspondencia uno a uno
Teoría	Dados $b < a$, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces $a - b = Card(B')$, donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A. Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un			A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.

	subconjunto propio $A'1$ de un conjunto B con b elementos, entonces $b - a = \text{Card}(A'1)$ <u>Ver apartado perspectiva matemática.</u>	<u>Ver apartado perspectiva matemática.</u>
--	---	---

Fuente: creación propia

Ahora, son presentadas las praxeologías matemáticas que orientan el diseño de la situación 2, respondiendo a las tareas tanto de adición como de sustracción.

Tabla 5. PM. Tarea problemas de adición para la situación 2

Tarea	Problemas de cambio de tipo $a + b = ?$; $a + ? = c$; $? + b = c$ Problemas de comparación de tipo $a + b = ?$	
Técnica	Uso del cálculo mental	Uso del algoritmo
Tecnología	Definición conjuntista	
Teoría	Dados dos números naturales a, b , se llama suma $a + b$ al cardinal del conjunto $A \cup B$, siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b , respectivamente. <u>Ver apartado perspectiva matemática.</u>	

Fuente: creación propia

Tabla 6. PM. Tarea problemas de sustracción para la situación 2

Tarea	Problemas de cambio de tipo $a - b = ?$; $a - ? = c$; $? - b = c$ Problemas de comparación de tipo $a - b = ?$	
Técnica	Uso del cálculo mental	Uso del algoritmo
Tecnología	Definición conjuntista	
Teoría	Dados $b < a$, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces $a - b = \text{Card}(B')$, donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A .	

	Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio $A'1$ de un conjunto B con b elementos, entonces $b - a = Card(A'1)$ <u>Ver apartado perspectiva matemática.</u>
--	---

Fuente: creación propia

Praxeología didáctica

A continuación se presenta la construcción de la praxeología didáctica, la cual está dada a partir de los planteamientos de Godino (2004), Brown (1978) y Bruno (2001).

Tabla 7. PD. Tarea problemas de adición y sustracción

Tarea 1	Problemas de adición y sustracción	
Técnica		Errores y dificultades
	Uso del cálculo mental	• Errores de recitado <u>Ver apartado perspectiva didáctica</u>
	Uso del algoritmo	• Colocación de los números • Orden de obtención de los hechos numéricos básicos • Obtención de los hechos numéricos básicos • Resta de la cifra menor de la mayor • Colocación de un cero • Lugar vacío • Olvido de la llevada • Escritura del resultado completo <u>Ver apartado perspectiva didáctica</u>

	Uso de la representación gráfica	• Errores de recitado • Errores de coordinación • Errores de partición <u>Ver apartado perspectiva didáctica</u>
	Uso del conteo con el uso de los dedos	• Errores de recitado • Errores de coordinación • Errores de partición <u>Ver apartado perspectiva didáctica</u>

Fuente: *creación propia*

Desarrolladas las rejillas correspondientes a los aspectos curriculares, la praxeología matemática y la praxeología didáctica en el apartado anterior, son tomadas en consideración para el diseño de la propuesta de aula planteada en la siguiente fase.

Fase 2: Diseño de la propuesta de aula e implementación

En la fase dos se intenta dar respuesta al segundo objetivo planteado, donde se procede a la construcción de una propuesta de aula tomando en consideración el marco contextual, además de los aspectos de tipo curricular y las Praxeologías Matemática y Didáctica construidas desde la TAD. El diseño está organizado en dos situaciones de las cuales la primera de ellas tiene que ver con la tienda escolar y contiene dos actividades; y la segunda referente al cultivo de café con una actividad, teniendo en cuenta las categorías de cambio y comparación en la resolución de problemas verbales aditivos planteadas por Castro (1995) con el fin de determinar los actos de comprensión planteados por Sierpinska (1992).

Las rejillas que condensan la información del diseño cuentan con el encabezado del nombre de la situación y una estructura de tres columnas donde la primera de ellas muestra el literal de cada situación problema, la segunda contiene la estructura de cada una de ellas representada por las letras a , b , y c , siendo estas los datos conocidos del problema y donde el signo de pregunta (?) es la incógnita o cantidad desconocida, la cual es obtenida mediante una suma o resta de los datos conocidos dependiendo de la posición que ocupe dentro de la situación; esto según la estructura de problemas verbales para la suma y resta planteadas por Castro, Rico y Castro (1995). La tercera

columna contiene la categoría para cada una de las situaciones problema planteadas, ya sea de cambio o comparación según Castro, Rico y Castro (1995). Cada una de las actividades de ambas situaciones está planteada bajo la misma estructura, iniciando con situaciones problemas de cambio y posteriormente de comparación, tanto de suma como de resta. Esto, con el objetivo de observar el proceso de construcción que realizan los estudiantes acerca de la resolución de problemas y en qué medida se aproximan a efectuar procesos de generalización, mediante la aplicación de la propuesta.

A continuación, se presenta el diseño de la *situación 1* titulada “Nuestra tienda escolar”, la cual tiene por objetivo *identificar y resolver problemas en situaciones aditivas de cambio y comparación teniendo en cuenta los datos relevantes y técnicas utilizadas por los estudiantes para la resolución*. Está comprendida por dos actividades, la primera de ellas cuenta con diez situaciones problema, donde se manejan cantidades pequeñas con números de dos cifras y con representación pictórica, esto con el fin de que los estudiantes logren mejores procesos de interpretación. La segunda actividad contiene una tabla de precios, de la cual se plantean ocho situaciones problema donde se manejan números de tres cifras y cantidades cerradas, entendidas como números que terminan siempre en cero, y por último se plantean unas preguntas con el propósito de conocer más a fondo las razones o los argumentos que dan los estudiantes frente a los procesos desarrollados y al reconocimiento o interpretación de la información.

Tabla 8. Diseño situación 1 "La tienda escolar". Actividad 1 y 2

Situación 1. La tienda escolar				
Literal	Actividad 1			Categoría
A	a	b	?	Cambio de tipo $a - b = ?$
B	a	b	?	Cambio de tipo $a + b = ?$
C	a	?	c	Cambio de tipo $a - ? = c$
D	a	?	c	Cambio de tipo $a + ? = c$
E	?	b	c	Cambio de tipo $? - b = c$
F	?	b	c	Cambio de tipo $? + b = c$
G	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$

H	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$
I	a	b	?	Comparación de tipo $a + b = ?$
J	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$
Actividad 2				
A	a	b	?	Cambio de tipo $a - b = ?$
B	a	b	?	Cambio de tipo $a + b = ?$
C	a	?	c	Cambio de tipo $a - ? = c$
D	a	?	c	Cambio de tipo $a + ? = c$
E	?	b	c	Cambio de tipo $? - b = c$
F	?	b	c	Cambio de tipo $? + b = c$
G	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$
H	a	b	?	Comparación de tipo $a + b = ?$

Diseño situación 1 "La tienda escolar". Actividad 1 y 2. Fuente: creación propia

Ahora, se presenta la tabla correspondiente a la *situación 2* titulada “Cosechando frutos de café” basada en el contexto económico y cultural de los estudiantes, en lo que respecta al cultivo de café, la cual tiene como objetivo *resolver, generalizar y proponer problemas en situaciones aditivas de cambio y comparación*. Comprende una actividad con 10 situaciones problema, donde se manejan números de dos y tres cifras, con un mayor grado de dificultad respecto a la situación anterior.

Tabla 9. Diseño situación 2 "Cultivo de café". Actividad 1

Situación 2. Cultivo de café				
Literal	Actividad 1			Categoría
A	a	b	?	Cambio de tipo $a - b = ?$
B	a	b	?	Cambio de tipo $a + b = ?$
C	a	?	c	Cambio de tipo $a - ? = c$
D	a	?	c	Cambio de tipo $a + ? = c$
E	?	b	c	Cambio de tipo $? - b = c$
F	?	b	c	Cambio de tipo $? + b = c$

G	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$
H	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$
I	a	b	?	Comparación de tipo $a + b = ?$
J	a	b	?	Comparación de tipo $a - b = ?$

Diseño situación 2 "Cultivo de café". Actividad 1. Fuente: creación propia

Diseñadas las situaciones planteadas en el apartado anterior las cuales se encuentran en los anexos (diseño situación 1, actividad 1: Anexo 1; diseño situación 1, actividad 2: Anexo 2; diseño situación 2, actividad 1: Anexo 3), se procede a la aplicación de las mismas en el aula a través de 9 sesiones de clase distribuidas en dos por semana, con una intensidad horaria de dos horas por sesión, las cuales fueron grabadas. De esta manera se continúa con la tercera y última fase de la investigación correspondiente a los análisis y conclusiones de los resultados obtenidos durante la implementación de la propuesta de aula presentadas a continuación:

Fase 3: Análisis y conclusiones

En esta última fase se intenta dar respuesta al tercer objetivo planteado, donde el elemento que se construye es una rejilla para el análisis, diseñada desde los planteamientos de Sierpinska (1992) con el fin de determinar los actos de comprensión en el cual se encuentran los estudiantes y se presenta la tabulación de los resultados obtenidos durante la aplicación de la propuesta.. Posterior a ello, se deja en manifiesto las conclusiones arrojadas tras el desarrollo de la investigación.

Tabla 10. *Rejilla fase de análisis*

Técnica	Argumento	Acto de comprensión
Identificación de datos	Identifica los datos presentes en el planteamiento del problema, destacando no solo las cantidades numéricas conocidas, sino también la que se pretende encontrar a partir de la solución. Además, tiene	I. Identificación

	presente las unidades que acompañan las cantidades.	
Resolución del problema	Comprende el significado de las operaciones al momento de solucionar problemas planteados, discriminando entre una suma o resta tomando en consideración los datos proporcionados en el planteamiento.	II. Discriminación
Establecer relaciones entre dos o más problemas	Sostiene que dos o más problemas tienen relación debido a: • Sus planteamientos • Cantidades involucradas • El contexto de la situación problema • Procedimientos para hallar la solución al problema. • Términos como: más, menos, agregar, quitar, entre otros.	III. Generalización

Rejilla fase de análisis. Fuente: creación propia

CAPÍTULO 4

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este apartado se presentan los análisis de los resultados obtenidos durante la aplicación de las dos situaciones con los estudiantes. Para ello, se consolida la información en tablas por cada situación y actividad considerando el objetivo propuesto en cada una de ellas y las características comunes en las respuestas de los estudiantes, discriminando los problemas de cada situación. En el caso de los diferentes tipos de respuestas por parte de los estudiantes, se representará de la siguiente manera: T1 (tipo 1), T2 (tipo 2), T3 (tipo 3), etc. Cabe resaltar que la numeración está sujeta a la cantidad de preguntas dispuestas en las diferentes situaciones y las respuestas dadas por los estudiantes.

Para tabular la información se indicará en la tabla la Frecuencia Absoluta representada como FA, la cual indica el total de estudiantes; la Frecuencia Relativa representada como FR la cual muestra la razón entre una parte y el total del grupo y el símbolo de porcentaje (%) para indicar el cociente de FR en términos de porcentaje. Además, al momento de transcribir los diálogos de los videos se emplea la letra P para referirse a la intervención del profesor mientras que cuando intervienen los estudiantes se hacen con la letra E con numerales 1, 2, 3... por ejemplo E1, dependiendo la cantidad.

4.1 Análisis: situación 1, actividad 1

A continuación, se presenta la tabla correspondiente a los resultados obtenidos de la aplicación de la Situación 1 – actividad 1:

Tabla 11. Resultados aplicación situación 1, actividad 1

SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1			
PROBLEMA A			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
	FA	FR	%

T1: Estudiantes que identifican la cantidad desconocida del problema con su unidad respectiva	15	15/16	93,75
T2: Estudiantes que identifican la cantidad desconocida pero no hacen referencia a la unidad que la acompaña	1	1/16	6,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	10	9/16	62,5
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo con los dedos	4	4/16	25
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica (palitos)	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que responden correctamente pero no hacen referencia al proceso por el cual llegaron al resultado.	1	1/16	6,25
PROBLEMA B			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades del problema con su unidad respectiva	12	12/16	75
T2: Estudiantes que identifican las dos cantidades conocidas del problema con su unidad respectiva	2	2/16	12,5
T3: Estudiantes que solo identifican una cantidad conocida del problema con su unidad respectiva	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que identifican las tres cantidades del problema pero no hacen referencia a la unidad que las acompaña	1	1/16	6,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			

T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	4	4/16	25
T3: Estudiantes que no responden correctamente debido al mal planteamiento en el uso del algoritmo	4	4/16	25
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo de los dedos	3	3/16	18,75
PROBLEMA C			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	15	15/16	93,75
T2: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema con su unidad respectiva	1	1/16	6,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica por medio de palos	4	4/16	25
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	3	3/16	18,75
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de los dedos para contar	2	2/16	12,5
T5: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	2	2/16	12,5
PROBLEMA D			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			

T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades del problema	16	16/16	100
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica por medio de palos	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo de los dedos o material concreto	5	5/16	31.25
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	4	4/16	25
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	2	2/16	12,5
T5: Estudiantes que no responden correctamente	2	2/16	12,5
PROBLEMA E			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema con su respectiva unidad	12	12/16	75
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	2	2/16	12,5
T3: Estudiantes que identifican tan solo una cantidad conocida en el problema con su respectiva unidad	2	2/16	12,5
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	7	7/16	43,75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo con los dedos	2	2/16	12,5

T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica	1	1/16	6,25
T5: Estudiantes que no responden correctamente	2	2/16	12,5
PROBLEMA F			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	14	14/16	87,5
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidos en el problema	1	1/16	6,25
T3: Estudiantes que identifican una de las cantidades conocidas en el problema	1	1/16	6,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del material concreto	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	4	4/16	25
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica de palos	1	1/16	6,25
T5: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	1	1/16	6,25
T6: Estudiantes que no responden correctamente sin registro de procedimiento	3	3/16	18,75
PROBLEMA G			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	7	7/16	43,75

T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	6	6/16	37,5
T2: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	2	2/16	12,5
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T2: Estudiantes que no responden correctamente	8	4/16	50
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del material concreto	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	4	4/16	25
T5: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso conteo uno a uno	2	2/16	12,5
PROBLEMA H			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	4	4/16	25
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	6	6/16	37,5
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que no responden correctamente	12	12/16	75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	3	3/16	18,75

T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica con palitos	1	1/16	6,25
PROBLEMA I			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	7	7/16	43,75
T3: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	4	4/16	25
T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	2	2/16	12,5
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	8	8/16	50
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del material concreto o conteo con los dedos	2	2/16	12,55
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica con palitos	1	1/16	6,25
T5: Estudiantes que no responden correctamente	2	2/16	12,5
PROBLEMA J			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	9	9/16	56,25

T2: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	3	3/16	18,75
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de material concreto o conteo con los dedos	3	23/16	18,75
T5: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso de la representación gráfica con palitos	1	1/16	6,25
T6: Estudiantes que no responden correctamente	4	4/16	25

Resultados aplicación situación 1, actividad 1. Fuente: creación propia

Según los resultados obtenidos, es claro anotar que los estudiantes en el problema A identifican con gran facilidad la cantidad desconocida puesto que ya el problema mostraba las cantidad conocidas por medio de una tabla, tan solo el 6,25% de los estudiantes no logró hacerlo. Tal y como se muestra en la siguiente imagen donde estaba el espacio para completar la cantidad desconocida.

¿Cuántos barriletes quedaran en la tienda?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3
CANTIDAD DE BARRILETES QUE HABÍAN 10	CANTIDAD DE BARRILETES VENDIDOS 2	Cantidad de barriletes quedan 8

Figura 5. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Además, siendo el primer acercamiento con los estudiantes y la primera vez que se manejaba el tema de la identificación de cantidades, se les brindó a ellos el acompañamiento para identificar cada uno de las cantidades y así lograr completar la tabla. Así como se refleja en el siguiente dialogo presentado en la sesión 1, minuto 18:

P: ¿qué datos hay en el problema?

E1: cantidad de barriletes que habían

P: dice dato que...

E1: dato 1

P: ¿cuál será entonces el primer dato? Cantidad de barriletes que...

E1: habían

E2: cantidad de barriletes que habían

E3: cantidad de barriletes que trajeron primero y eran diez

P: ¿Cuál será el segundo dato que me dice el problema?

E1: cantidad de barriletes vendidos

P: ¿cuál será el tercer dato que me pide el problema?

E1: Profe creo que es cantidad de barriletes que quedan

P: ¿qué piensan del tercer dato?

E1: si es cantidad de barriletes que quedaron

E2: es cantidad de barriletes que quedan

Al momento de solucionar el problema, el 100% de los estudiantes lo hacen correctamente reconociendo el significado de la operación, en este caso preciso la sustracción, teniendo en cuenta además que se contaba con la representación gráfica de los barriletes lo cual facilitaba la interpretación y análisis por parte de los estudiantes, también es importante tener en cuenta que la estructura bajo la cual estaba planteado el problema ($a + b = ?$) hacia más fácil la resolución por parte de los estudiantes como también las cantidades que se manejaron, entendiendo que cuando se manejan cantidades pequeñas se les hace más fácil la resolución de problemas por medio del uso de los dedos o el manejo de material concreto (Bruno, 2001). De hecho, así se manifestó al momento de los diálogos con los estudiantes, presentado en la primera sesión, minuto 37:

P: ¿Cuántos barriletes quedarán en la tienda?

E1: 8

P: ¿Qué hace para saber que son 8?

E1: restando, hice una esta

E2: uno pone diez dedos y le quita dos

Además, el uso de cantidades pequeñas le facilitó al estudiante hacer uso de la representación gráfica tal y como se muestra en la siguiente imagen.

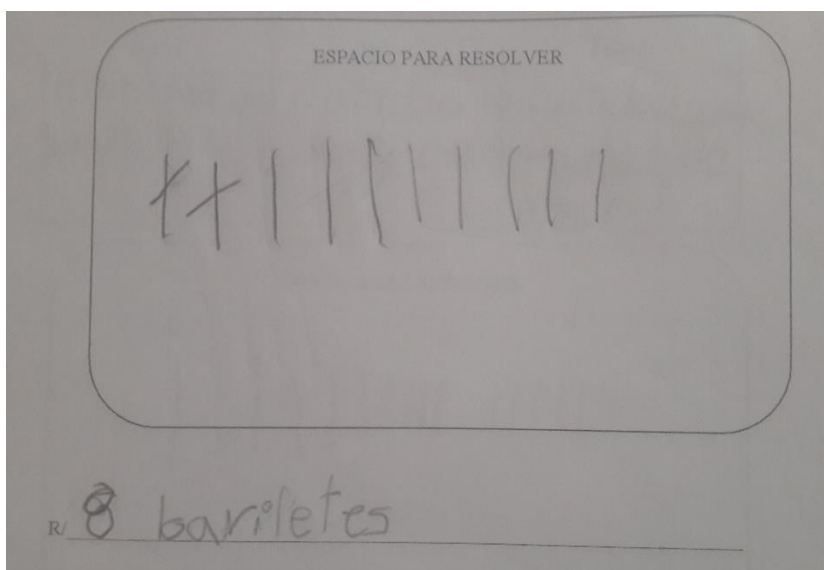


Figura 6. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

En el problema B con estructura $a - b = ?$, el 75% de los estudiantes logran identificar las tres cantidades, señalando que en este problema los estudiantes contaban con una tabla para ingresarlas, como se muestra en la siguiente imagen, a medida que los estudiantes leían, identificaban cuáles eran las cantidades planteadas en el problema.

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3
cantidad de Barriletes que quedaron	cantidad de Barriletes que agregaron	cantidad de Barriles que hay en la tienda

Figura 7. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Resulta importante señalar lo ocurrido con un estudiante ya que no solo identificó las tres cantidades en el problema, sino que relacionó las cantidades con números incluyendo la cantidad desconocida, tal y como se muestra en la siguiente imagen.

B. De los barriletes que quedaron en la tienda, el profesor decide agregar 5 barriletes al surtido.

Nuevo surtido

¿Cuántos barriletes hay en la tienda?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3
Cantidad de barriles que abian	Cantidad de barriletes vendidos	Cantidad de Barriletes que quedan
10	2	13

Figura 8. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Respecto a la resolución del problema, en este caso el 75% de los estudiantes lograron resolver el problema a través de diferentes estrategias como el cálculo mental, el algoritmo de la suma y el conteo con los dedos, lo cual indica que el trabajo con cantidades pequeñas en este caso con números inferiores a 20 se facilita para los estudiantes reconocer el significado de la operación. En el caso del 25% de los estudiantes que no lograron responder correctamente se puede resaltar

que en este problema la cantidad que representaba a no estaba mencionada, sino que venía directamente relacionado con el problema anterior (A) de la cantidad de barriletes que habían quedado en la tienda, lo cual lleva a crear algo de confusión en los estudiantes, tomado como una dificultad no reportada por las investigaciones.

Para los problemas C y D la estructura cambia debido a que la incógnita se encuentra en b , lo cual tiene un mayor grado de dificultad a la hora de su resolución (Bruno, 2001). En la identificación de las cantidades los estudiantes lograron muy buenos resultados ya que un 97% de ellos logró identificar las tres cantidades teniendo en cuenta las unidades respectivas, y el resto de estudiantes identificaron solo las cantidades conocidas. De igual manera como en el problema anterior, uno de los estudiantes relaciona las cantidades escribiendo los datos numéricos de cada una de ellas incluyendo la cantidad desconocida, así como se muestra en la siguiente imagen:



Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encuentraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3
Cantidad de Bombones que habian	cantidad de bombones que quedaron	cantidad de bombones vendidos
12	9	8

Figura 9. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

En el caso de la resolución del problema C, el 100% los estudiantes logró responder correctamente, reconociendo el significado de la operación necesaria para hallar la respuesta, donde el 25% de ellos lo hace por medio de la representación gráfica de palitos lo cual quiere decir que los estudiantes requieren ver las cantidades con las cuales se debe operar.

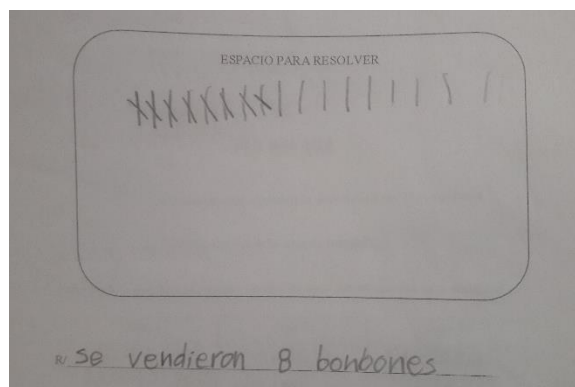


Figura 10. Cuestionario estudiante. Fuente: Estudiantes

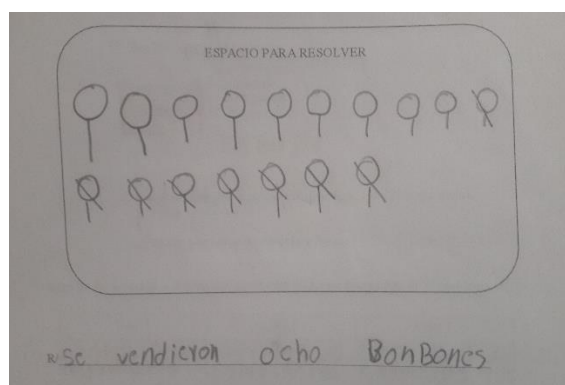


Figura 11. Cuestionario estudiante. Fuente: Estudiantes

Por otro lado, un 12,5% de los estudiantes emplea sus dedos para realizar conteos de las cantidades involucradas, mientras se evidencia en el siguiente dialogo, presentado en la sesión 2, minuto 9:

P: ¿Cuántos bombones se vendieron?

E1: ocho

P: Juan Felipe ¿por qué dice que ocho?

E1: Porque le tengo que restar

P: Tiene que restar ¿qué?

E1: A 17 bombones le tengo que restar 9

P: ¿Por qué le tengo que restar 9?

E1: Porque los nueve quedaron

E2: Porque hice una resta, tengo diecisiete dedos, estos diez y otros siete y le voy quitando nueve.

P: ¿Le va quitando qué?

E2: Dedos, nueve dedos

Como bien se manifestó en el planteamiento del problema los estudiantes realizan buen cálculo mental en los procesos que de tienda escolar se refieren y aunque en este caso no se trabajó con cifras cerradas, pero si con cantidades pequeñas con tendencia a redondear y conseguir números intermedios (Godino, 2004), un 18,75% de los estudiantes lo emplearon para dar solución al problema. Aunque es cierto que la estructura del problema C está dada por $a - ? = c$ y un 31,25% de los estudiantes resolvió haciendo uso del algoritmo de la resta, cabe resaltar que un 12,5% lo hicieron a partir del algoritmo de la suma, lo cual lleva a pensar que los dos estudiantes emplean diferentes estrategias de tipo aditivo donde en su gran mayoría no reconocen que el problema podría resolverse a través de una resta. Brown (1978)

Para la resolución del problema D, un 87,5% de los estudiantes logro responder correctamente a través de diferentes estrategias entre las cuales se destaca el uso del algoritmo de la suma para hallar la respuesta por parte de dos estudiantes, teniendo en cuenta que aunque la estructura del problema estaba bajo esta operación ($a + ? = c$), con los datos suministrados del problema, emplear el algoritmo de la resta era la solución más práctica y común en los estudiantes, como se puede observar en la siguiente imagen del cuadernillo de un estudiante:

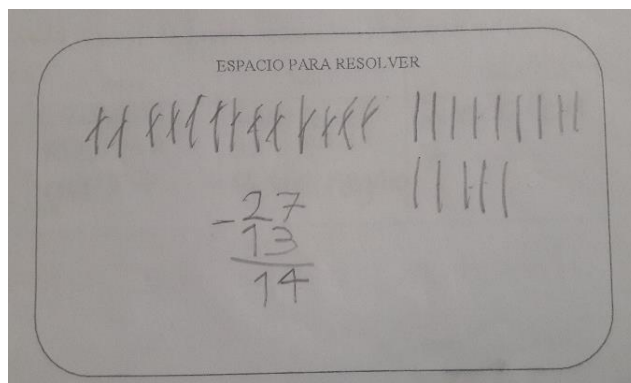


Figura 12. Cuestionario estudiante. Fuente: Estudiantes

Aunque hasta el momento todos los problemas planteados cuentan con representación pictórica de las cantidades en consideración (masmelos, barriletes, bombones), se nota como el 50% de los estudiantes necesita otra representación más clara o concreta para ellos, ya sea el conteo por medio

de los dedos, la representación gráfica con palitos o el uso del propio material concreto. Respecto al cálculo mental, tan solo dos estudiantes lo emplearon teniendo en cuenta que las cantidades en este problema estaban consideradas con números hasta el 30, así se deja en manifiesto en el siguiente dialogo, presentado en la sesión 2 minuto 23:

P: ¿Cuántos masmelos debe comprar Juanita?

E1: Tiene que comprar catorce

P: ¿Cómo hiciste para saber eso?

E1: Hice una suma

P: ¿Qué sumó?

E1: Trece más catorce

P: ¿Por qué sumo trece más catorce? ... ¿Cómo hizo para saber que debía sumar catorce a los trece que ya tenía?

E1: Porque esa era la cantidad que tenía que comprar

P: ¿Cómo hizo para saber que esa era la cantidad que tenía que comprar

E1: Contando en la mente

P: ¿Cómo conto?

E1: Desde trece

Los problemas E y F cuentan con otro tipo de estructura la cual se puede tener aún más dificultad para los estudiantes según la posición de la incógnita, en este caso estando en *a*. Al momento de la identificación, un 93,75% de los estudiantes logran identificar las tres cantidades en el problema, teniendo en cuenta que en la parte inicial de los planteamientos se nombra la incógnita. En general en los procesos de identificación respecto a los problemas de la categoría de cambio se obtuvo buenos resultados ya que los estudiantes son conscientes de que para una mejor resolución es importante tener en cuenta las cantidades que brinda el problema, destacando que no venían acostumbrados en sus prácticas al trabajo de esta manera.

En la resolución del problema E un 87,5% de los estudiantes responde correctamente, empleando la mitad de ellos el algoritmo de la suma lo cual llama la atención debido a que la estructura para este problema es de $a - b = c$, pero debido al planteamiento y la complejidad de

dicha estructura para los estudiantes emplean la operación contraria. En el problema F el 81,25% de los estudiantes dieron solución al problema planteado, donde la mayoría de ellos emplearon el uso del material concreto para tal fin. En este caso la estructura es igual al problema anterior, pero con adición, para lo cual un 18,75% hizo uso de esta operación para dar solución; pero al igual que en el anterior caso hubo estudiantes que utilizaron la operación contraria para resolver.

Los estudiantes que no lograron resolver correctamente en la categoría de cambio, al efectuar el algoritmo, un 50% de ellos no coloca adecuadamente los numeros tomando en consideración su valor posicional lo cual es un error reportado dentro de las investigaciones (Godino, 2004). Tambien, en los problemas de sustraccion, un 75% de los estudiantes restaba la cifra menor de la mayor lo cual es un error que suelen cometer los estudiantes según las investigaciones (Godino, 2004), ya que solo se fijan en las cantidades numericas.

Ahora, en los problemas G y H que responden a la categoría de comparación, en este caso cuando el referente y el referido son conocidos y se desconoce la comparación; en la identificación de las cantidades se ve reflejado que los estudiantes les cuesta tomar la diferencia que se debe hallar como el dato desconocido en el problema, sustentado en que en el problema G solo el 43,75% de los estudiantes identificaron las tres cantidades. Mientras que el 37,5% lo hizo con las dos cantidades conocidas. Esto, debido a que los estudiantes no manejan problemas que tengan este tipo de estructura. Así se muestra en la siguiente imagen, donde el estudiante solo hace referencia a cantidades conocidas.

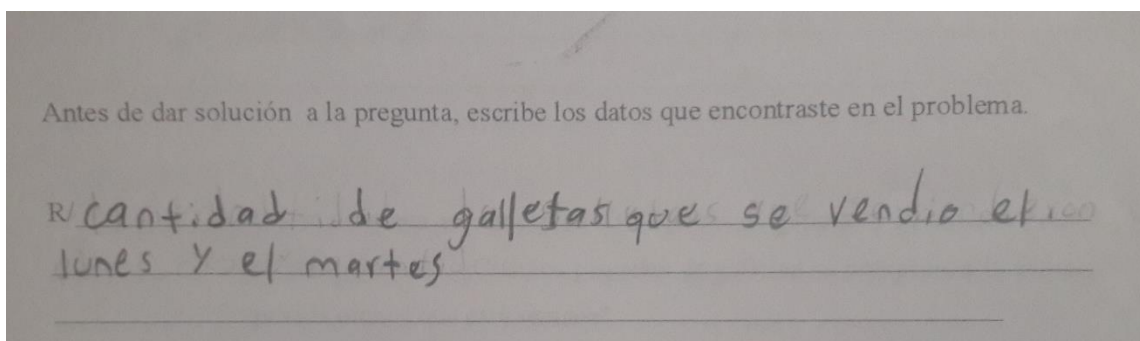
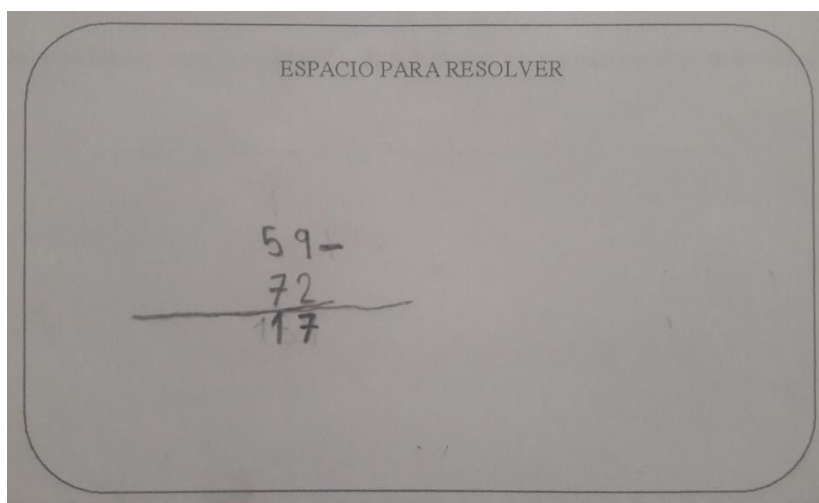


Figura 13. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Aproximadamente un 25% de los estudiantes no identifica ninguna cantidad en los problemas de comparación antes mencionados, resaltando que estos problemas no se encuentran dentro de los lineamientos curriculares de matemáticas para los estudiantes en este grado de escolaridad, siendo tan solo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. MEN (1998)

Al momento de dar solución al problema G, tan solo un 50% de los estudiantes logra resolver correctamente reconociendo el significado de la operación. Ahora, de los estudiantes que respondieron acertadamente, la mitad de ellos emplearon el algoritmo de la resta para llevar a cabo el proceso, lo cual indica que realizaron el proceso de discriminación para saber que se debía hallar la diferencia entre las dos cantidades mencionadas en el planteamiento, mientras que un 12,5% de todos los estudiantes, realizaron conteo uno a uno hacia adelante desde la cantidad menor a la mayor por medio del cálculo mental, resaltando además que en este caso se trabajó con cantidades un poco más grandes pero que aun así no pasan de las dos cifras. Por otro lado, el 50% de los estudiantes no logra responder correctamente, esto debido a que resta la cifra menor de la mayor lo cual lleva a un error.



ESPACIO PARA RESOLVER

$$\begin{array}{r} 59 - \\ 72 \\ \hline 17 \end{array}$$

Figura 14. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

En el caso del problema H, se puede notar el desconocimiento por parte de los estudiantes en problemas con este tipo de estructura, ya que un 75% de ellos no logró responder correctamente el problema, resaltando que en el planteamiento se encontraba el término “menos”, el cual debe

indicar al estudiante que se debe quitar o sustraer a cierta cantidad. Tan solo un 18,75% hizo uso del algoritmo de la resta para dar solución al problema, teniendo en cuenta que este problema estaba comprendido por una diferencia entre dos cantidades y el 6,25% restante empleó la representación gráfica a través de palitos realizando conteo una a uno para resolver el problema, teniendo en cuenta que las cantidades que aunque no son grandes, toman tiempo al momento de representarlo gráficamente. Por otro lado, en los estudiantes que no logran resolver correctamente, se evidencia el error en el procedimiento del algoritmo debido a que restan la cifra menor de la mayor, tal y como se muestra en la siguiente imagen, resaltando además que hace uso del signo contrario.

$$\begin{array}{r} 43 \\ - 25 \\ \hline 22 \end{array} +$$

R/me dio 22

Figura 15. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Los problemas I e J, son problemas de la categoría de comparación en el caso que el referente y la comparación son conocidos, pero se desconoce el referido. En este sentido, la estructura del planteamiento facilita en cierta medida la resolución para los estudiantes, respecto a las anteriores, ya que cuentan con términos claves como *más que* o *menos que*. En la identificación de cantidades de estos dos problemas, tan solo un 18,75% de los estudiantes logra hacerlo con las tres cantidades (de referencia, comparativa y de referencia). Ahora, la identificación de los datos conocidos fue alcanzada por el 50% de los estudiantes, donde tenían en cuenta la cantidad de referencia y la de comparación a través de los términos antes mencionados (menos que y más que), desconociendo la otra cantidad de referencia que en este caso resulta ser la desconocida en los problemas con este tipo de estructura.

Al momento de solucionar los problemas, en el caso del *I* un 87,5% de los estudiantes resolvió correctamente el problema principalmente haciendo uso de la adición, ya sea bien por medio del algoritmo en un 50% o haciendo uso del cálculo mental. En este caso preciso, se hizo mayor la comprensión por parte de los estudiantes ya que lograron discriminar a partir del término “más que” la operación que debían llevar a cabo para la resolución, así pues un 18,75% de los estudiantes, necesitó de la representación y conteo más tangible a través de material concreto, los dedos o simples palitos en el cuaderno para llegar a la respuesta. Por otro lado, tan solo un 12,5% de los estudiantes no logró resolver correctamente dicho problema, debido a que no reconocen el significado de la operación correspondiente.

En el problema *J*, la mitad de los estudiantes resolvió el problema a partir de una sustracción, haciendo uso del algoritmo o a través del cálculo mental, resaltando que el procedimiento del algoritmo se facilitó en la medida que no se requería desagrupar cantidades. Tal y como se manifestaba en el problema anterior, en este caso el término “menos que” facilitó en los estudiantes los procesos de discriminación relacionando estos términos con las operaciones necesarias para resolver el problema. Un 25% de los estudiantes hizo uso de estrategias de conteo como el material concreto, la representación gráfica y los dedos realizando conteo uno a uno. El 25% de los estudiantes restantes, no logró resolver correctamente el problema principalmente porque no logran reconocer el significado de la operación correspondiente para hallar la solución.

4.2 Análisis: situación 1 actividad 2

A continuación, se presenta la tabla correspondiente a los resultados obtenidos de la aplicación de la Situación 1 – actividad 2:

Tabla 12. Resultados aplicación situación 1, actividad 2

SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2			
PROBLEMA A			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
	FA	FR	%
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	11	11/16	93,75

T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que identifican una de las cantidades conocidas en el problema	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	1	1/16	6,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	8	8/16	50
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	2	2/16	12,5
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo con los dedos	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que no responden correctamente	4	4/16	25
RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS			
T1: Estudiantes que relacionan dos problemas por medio de la operación necesaria para resolver	9	9/16	56,25
T2: Estudiantes que hacen relación entre los problemas debido al contexto de los mismos	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que relacionan los problemas debido a que ambos tienen cantidades	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que no establecen relación entre los problemas	1	1/16	6,25
PROBLEMA B			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican una cantidad conocida del problema	16	16/16	100

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	8	8/16	50
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	4	4/16	25
T3: Estudiantes que no responden correctamente sin registro de procedimiento	4	4/16	25
RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS			
T1: Estudiantes que relacionan dos problemas por medio de la operación necesaria para resolver	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que hacen relación entre los problemas debido al contexto del planteamiento	7	7/16	43,75
T3: Estudiantes que relacionan los problemas debido a que tienen cantidades	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que establecen relación debido a que en ambos problemas se debe agregar	1	1/16	6,25
T5: Estudiantes que no establecen relación entre los problemas	3	3/16	18,75
PROBLEMA C			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	7	7/16	43,75
T2: Estudiantes que identifican los datos conocidos en el problema	6	6/16	37,5
T3: Estudiantes que identifican solo un dato conocido en el problema	3	3/16	18,75
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			

T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	7	7/16	43,75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo con los dedos	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que no responden correctamente	4	4/16	25
PROBLEMA D			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	7	7/16	43,75
T2: Estudiantes que identifican los datos conocidos en el problema	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que identifican solo un dato conocido en el problema	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que no identifican datos en el problema	3	3/16	18,75
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	7	7/16	43,75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	1	1 /16	6,25
T4: Estudiantes que no responden correctamente	8	8/16	50
RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS			
T1: Estudiantes que relacionan dos problemas debido a que presentan cantidades	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que hacen relación entre los problemas debido al contexto de sus planteamientos	2	2/16	12,5

T3:Estudiantes que relacionan los problemas por medio de la operación que se emplea para resolver	4	4/16	23,5
T4: Estudiantes que establecen relación ya que se resuelven de igual manera	1	1/16	6,25
T6: Estudiantes que no establecen relación entre los problemas	4	4/16	23,5
PROBLEMA E			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	8	8/16	50
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	6	6/16	37,5
T3: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	1	1/16	6,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	6	6/16	37,5
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo con los dedos	1	1/16	6,35
T4: Estudiantes que no responden correctamente	6	6/16	37,5
RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS			
T1: Estudiantes que relacionan dos problemas debido a que presentan cantidades	4	4/16	25
T2: Estudiantes que hacen relación entre los problemas debido al contexto de sus planteamientos	4	4/16	25

T3:Estudiantes que relacionan los problemas por medio de la manera de resolverlos	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que no establecen relación	6	6/16	37,5
PROBLEMA F			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	4	4/16	25
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	5	5/16	31,25
T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	2	2/16	12,5
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	2	2/16	12,5
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del conteo con sus dedos	1	1/16	6,25
T5: Estudiantes que no responden correctamente	9	9/16	56,25
PROBLEMA G			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	6	6/16	37,5

T2: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	2	2/16	12,5
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	7	7/16	43,75
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	1	1/16	6,25
T3: Estudiantes que no responden correctamente	10	10/16	62,5
RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS			
T1: Estudiantes que relacionan dos problemas debido a ambos presentan cantidades	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que hacen relación entre los problemas debido al contexto de sus planteamientos	8	8/16	50
T3: Estudiantes que relacionan los problemas por medio de la manera de resolverlos	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que no establecen relación	5	5/16	31,25
PROBLEMA H			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	6	6/16	37,5
T2: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	7	7/16	43,75

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que no responden correctamente	9	9/16	56,25
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del cálculo mental	2	2/16	12,5
RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS			
T1: Estudiantes que relacionan dos problemas debido a que ambos presentan cantidades	4	4/16	25
T2: Estudiantes que hacen relación entre los problemas debido al contexto de sus planteamientos	3	3/16	18,75
T4: Estudiantes que establecen relación ya que los resolvieron de la misma manera	2	2/16	12,5
T5: Estudiantes que no establecen relación	7	5/16	43,75

Resultados aplicación situación 1, actividad 2. Fuente: creación propia

En los problemas de cambio con estructura $a + b = ?$ y $a - b = ?$, aproximadamente el 84% de los estudiantes logra identificar las tres cantidades del problema. Cabe señalar que dicha estructura dentro de la categoría de cambio es la que más se facilita a los estudiantes ya que es la que se trabaja comúnmente en los procesos de formación y resolución de problemas en el aula. Como bien se manifestó en el planteamiento del problema, la experiencia que los estudiantes tienen en el manejo de la tienda escolar les permite hacer uso con mayor facilidad del cálculo mental y más aún la actividad 2 de la situación 1, donde las cantidades que se manejan son cifras cerradas relacionando precios de dulces de la tienda escolar. De esta manera, para la resolución de los problemas A el 50% de los estudiantes hizo uso del cálculo mental y el 25% optó por hacer uso del algoritmo de la resta, resaltando que logran reconocer el significado de la operación.

El 25% de estudiantes restantes no dieron solución al problema, presentan el error de restar la cifra menor de la mayor, tal y como se muestra en las siguientes imágenes:

ESPACIO PARA RESOLVER

$$\begin{array}{r} 450 \\ 900 - \\ \hline 550 \end{array}$$

Figura 16. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

ESPACIO PARA RESOLVER

$$\begin{array}{r} 900 \\ 450 - \\ \hline 550 \end{array}$$

Figura 17. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Al momento de relacionar el presente problema con el de la pasada actividad con su misma estructura, el 93,75% de los estudiantes establece algún tipo de relación entre ellos. Se destaca que la gran mayoría de ellos generaliza los problemas debido a la operación que se debe emplear para dar la solución, en este caso la sustracción, siendo este al argumento que se espera que el estudiante alcance en el acto de generalización, además hacen referencia a la cantidad de datos con los cuales cuenta cada problema y muy importante, generalizan por medio del contexto en el cual se desarrollan los problemas, donde se hace importante trabajar con los estudiantes desde su propio medio y vida cotidiana, como lo plantea el MEN desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), “privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas”. De esta manera se muestra en la siguiente imagen:

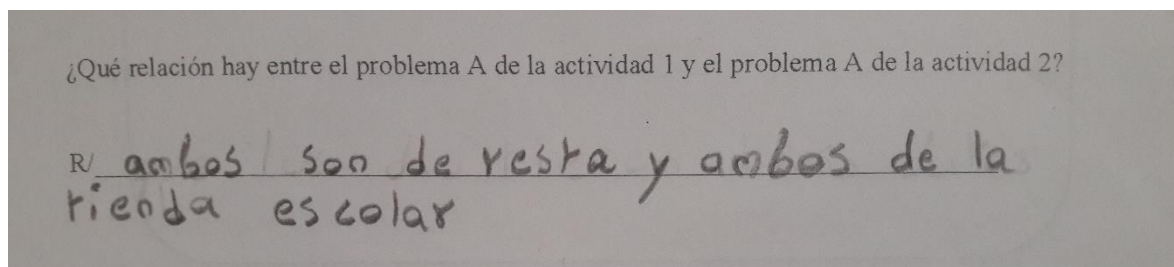


Figura 18. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Ahora bien, en el caso del problema B con la estructura $a + b = ?$, la mitad de los estudiantes reconoce el significado de la operación haciendo uso del algoritmo de la suma para dar solución, lo cual se le facilita a los estudiantes con el manejo de cifras cerradas. La otra mitad de estudiantes hicieron uso del cálculo mental, proceso que hacen frecuentemente en los roles de vendedor y comprador dentro del proyecto de la tienda escolar, pero donde la mitad de ellos se equivocaron en el resultado de la suma que debían realizar para dar solución al problema.

En el caso de la generalización, al relacionar este problema con el de la anterior actividad los estudiantes principalmente se enfocan en el contexto de los problemas (tienda escolar), lo cual es importante pero se espera que determinen como mínimo la operación por la cual llevan a cabo la resolución. Tan solo el 18,75% de los estudiantes realiza este proceso, con manifestaciones como “yo lo hice con una suma y el otro también” o “ambos son una suma”, donde la palabra “ambos” da a entender que tiene una visión general de los problemas que está analizando. Se resalta la respuesta de un estudiante que de igual manera se refiere a la operación por la cual solucionó los problemas, pero empleando la palabra “agregar”.

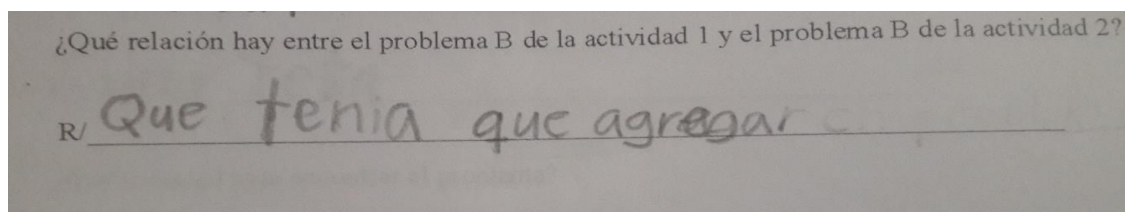


Figura 19. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

En los problemas de cambio donde la cantidad inicial y el resultado son conocidos y la incógnita es la magnitud que cambia (problemas C y D), el 43,75% de los estudiantes identifican las tres cantidades presentes en el problema. De hecho, el 37% de los estudiantes identifican solo

las cantidades conocidas, las cuales están dadas por cantidades numéricas en el problema sin tener en cuenta la unidad que las acompaña. Ahora bien, se pueden anotar algunas de las intervenciones de los estudiantes, donde es posible resaltar que logran identificar de manera más fácil los datos en el problema a manera que se desarrolla la situación, mostrándose así en el siguiente dialogo, presentado en la sesión 4:

P. ¿cuál será el primer dato del problema?

E1: cantidad de dinero que llevó Ana

E2: cantidad de dulces

E3: cantidad de dinero que se gastó con el barrilete

E4: Cantidad de dinero que llevo Ana a la Escuela

P; Empiecen a leer y el problema nos da uno a uno los datos

P: entonces el primer dato ¿Cuál es?

E1: Cantidad de dinero que se gastó con el barrilete

E4: ¿Profe cierto que el segundo es cantidad de dinero que le quedó?

E5: Cantidad de dulces que se compro

P. el primer dato que nos da el problema es la cantidad de dinero que cuesta el barrilete, ¿luego qué nos dice?

E2: Cantidad de dinero que se gastó con los otros dulces

Para resolver el problema C presentado con la estructura $a - ? = c$, los estudiantes por medio del cálculo mental lo efectuaron de manera satisfactoria en un 50% a través de una sustracción, reconociendo el significado de la operación. Ahora bien, dentro de los estudiantes que utilizaron el algoritmo para la solución, tan solo dos realizaron el proceso de la manera adecuada, pero más de la mitad de dichos estudiantes tuvieron el error en la colocación de los números, además de la colocación del cero, tal y como se muestra en la siguiente imagen conllevando a resultados erróneos. (Godino, 2004)

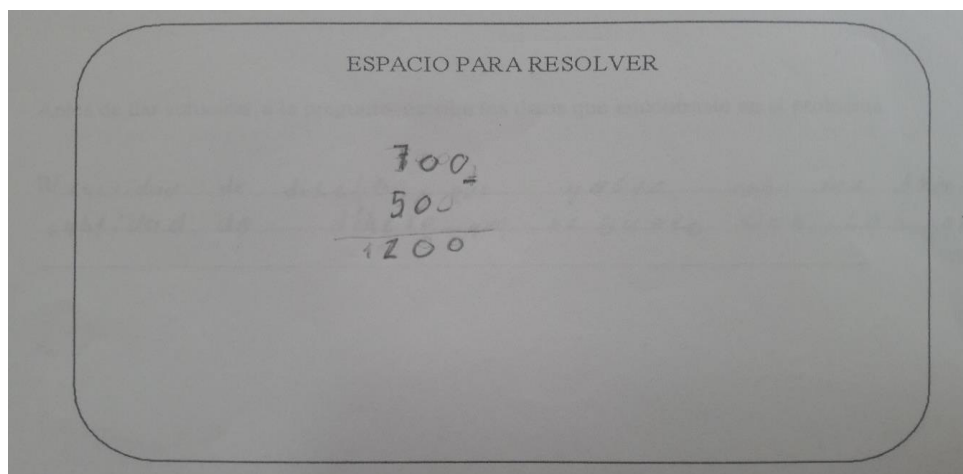


Figura 20. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

En el problema D, el cual presenta una adición en su estructura, solo un 50% de los estudiantes logra resolver correctamente. Esto, en referencia a que los términos empleados y la manera de presentar los datos en el problema, hizo complejos los procesos de análisis y comprensión en los estudiantes (Bruno, 2001), ya que la cantidad inicial no fue dada en números sino solo el nombre del producto para lo cual debían remitirse a tabla de precios, así se manifiesta en el dialogo siguiente:

P: Ana compró un barrilete, luego compró otros dulces y luego se gastó un total de \$900 pesos... entonces, ¿qué debo encontrar?

E1: ya se gastó toda la plata

E2: cuánto se gastó en la tienda

E2: ¿cuánto le costaron los otros dulces?

P: eso es lo que me están preguntado, ¿Cuánto dinero se gastó Ana en los otros dulces?

E2: Setecientos cincuenta

E3: Mil doscientos

E4: profe lo otro le costó ochocientos cincuenta

Aunque con las cantidades dadas en el planteamiento, realizar una sustracción por medio del cálculo mental o haciendo uso del algoritmo resulta más sencillo, la estructura del problema está regida por una adición, lo cual hicieron los estudiantes que no responden correctamente. Al

momento de relacionar el problema con el de la actividad anterior, el 25% restante no realiza procesos de generalización, mientras que un 25% de los estudiantes establece relación partiendo de la operación por la cual llevaron a cabo la resolución al problema por medio de frases como “yo los resolví igual”. Por otro lado, el 50% de los estudiantes crea algún tipo de relación entre ellos, generalizando principalmente por medio del contexto en el cual se presentan los problemas e indicando que ambos cuentan con cantidades, así se refleja en el siguiente dialogo:

P: ¿En qué se relaciona el problema D de esta actividad con el problema D de la anterior actividad?

E1: Porque tienen tres datos

P: cuando me dicen que la relación es porque tienen tres datos... si pero ¿solo en eso se relacionan?

E2: No profe vea, los dos tratan de la tienda escolar

P: Y ya?

E2: si

E3: profe porque tienen datos y en todos hay dulces

El 37,5% de los estudiantes en los problemas de cambio donde la incógnita es la magnitud inicial y se conoce la magnitud de cambio y el resultado ($? + b = c$ y $? - b = c$), logran identificar las cantidades involucradas en el problema; porcentaje más bajo respecto al resto de los de categoría de cambio. Esto, debido a que la incógnita se encuentra en la magnitud inicial, por ende se le dificulta al estudiante identificarla como un dato del problema. Por otro lado, el 50% de los estudiantes solo toma como referencia las cantidades conocidas del problema.

En el problema E, considerado por la estructura $? - b = c$, el 37,5% de los estudiantes hizo uso del algoritmo de la operación contraria a la estructura (suma), la cual era un procedimiento sencillo debido a que se manejaban cantidades de tres cifras, cerradas y sin necesidad de efectuar agrupaciones. El uso del cálculo mental también fue determinante a la hora de solucionar el problema donde para un 25% de los estudiantes, debido a la experiencia de su vida cotidiana con la tienda escolar, su entorno y el manejo de las cifras cerradas. Los estudiantes que no logran responder correctamente, emplean el algoritmo de la resta como está diseñado el planteamiento

del problema, pero no hacen uso de las debidas cantidades de minuendo y sustraendo. Al momento de establecer relaciones del presente problema con el mismo literal de la pasada actividad, un 50% de los estudiantes generaliza haciendo énfasis en que ambos problemas cuentan con cantidades y por el contexto en el cual se presentan. Tan solo 2 de los estudiantes hace generalizaciones partiendo de la operación en la cual se resuelven, en este caso la resta; tal y como está planteada la estructura de los dos problemas, y debido a que los resolvieron de la misma manera. Gran porcentaje de los estudiantes (37,5%) no establece generalizaciones, entendiéndose que este tipo de problemas son más complejos para resolver, por ende se dificulta a los estudiantes establecer relaciones entre ellos.

En la solución al problema F, el cual cuenta con la misma estructura del anterior, pero en este caso por medio de una adición; tan solo un 12,5% de los estudiantes logra solucionar por medio de la operación establecida en la estructura del problema. Cabe resaltar que en este caso uno de los sumandos no se conoce lo cual genera alto nivel de complejidad a la hora de plantear el algoritmo. Por otro lado, tal como sucedió en el problema anterior, un 18,75% hace uso del algoritmo de la resta para solucionar el problema, siendo esta la operación contraria, pero la manera más fácil para los estudiantes, ya que con las cantidades dadas en el problema (minuendo y sustraendo) se puede efectuar la sustracción. Pero, es de señalar como más de la mitad de los estudiantes (56,25%) no logra resolver correctamente el problema, debido principalmente a dos factores: el primero es que emplean la operación con la cual está estructurado el problema (suma), pero usando los datos dados en el problema como sumandos lo cual conlleva a tener un resultado erróneo, esto debido a la estructura $a+b=c$; y segundo, emplean el algoritmo de la resta, pero restando la cantidad menor de la mayor, ya que no reconocen el valor posicional de las cantidades.

En los problemas de comparación, se trabajó con dos tipos: cuando el referente y el referido son conocidos, se desconoce la comparación; y cuando el referente y la comparación son conocidos, pero se desconoce el referido. La identificación por parte de los estudiantes respecto a las tres cantidades del problema fue de tan solo un 3,25%. La principal razón por la cual se dio esta situación, es que los problemas de este tipo no se tienen en cuenta para el grado de escolaridad según el MEN a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1991), por ende no están acostumbrados al trabajo bajo esta estructura, debido principalmente a que siempre se debe buscar

la diferencia mediante la comparación de dos cantidades, mientras que en grado segundo se espera que el estudiante opere con dos cantidades usando ya sea algoritmo de suma o resta.

Ahora, al momento de dar solución al problema donde el referente y el referido son conocidos y se desconoce la comparación, tan solo un 31,25% de los estudiantes hacen uso del algoritmo de la resta para dar solución al problema de manera correcta, teniendo en cuenta que al ser una comparación entre dos cantidades se debe realizar por medio de una diferencia. Se debe hacer hincapié, en los estudiantes que no lograron resolver correctamente el problema ya que es una cifra considerable ante el desarrollo del trabajo realizado, así pues el 62,5% de los estudiantes no reconocen el significado de la operación. Mientras que en el problema H donde el referente y la comparación son conocidos, se desconoce el referido; el 43,75% de los estudiantes logra reconocer el significado de la operación, de los cuales algunos hacen uso del algoritmo de la suma para dar solución al problema y el resto hace uso del cálculo mental, tomando en consideración que dicho problema cuenta con las dos cantidades claramente expuestas además del término “*más que*” usado en el planteamiento. Por otro lado más del 50% de los estudiantes no logra resolver el problema, esto debido a que hacen uso de la operación contraria.

Al momento de generalizar en este tipo de problemas, solo un 43,75% de los estudiantes no establece relación alguna, debido a que, si el estudiante no logra analizar e interpretar el problema, difícilmente podrá generalizar entre dos o más de los mismos. Del resto de estudiantes, algunos se enfocaron en generalizar por medio de que los problemas presentan cantidades mientras que otros lo hacen respecto al contexto en el cual se presentan los problemas, enfatizando que se encontraban bajo la misma situación de la tienda escolar.

4.3 Análisis: situación 2, actividad 1

A continuación, se presenta la tabla correspondiente a los resultados obtenidos de la aplicación de la Situación 2 – actividad 1:

Tabla 13. Resultados aplicación situación 2, actividad 1

SITUACIÓN 2 – ACTIVIDAD 1			
PROBLEMA A			

IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
	FA	FR	%
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	6	6/16	37,5
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	2	2/16	12,5
T3: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	6	6/16	37,5
T4: Estudiantes que no identifican las cantidades en el problema	2	2/16	12,5
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	8	8/16	50
T2: Estudiantes que no responden correctamente	8	8/16	50
PROBLEMA B			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades del problema	7	7/16	43,75
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas del problema	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que no identifican las cantidades del problema	4	4/16	25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	12	12/16	75
T2: Estudiantes que no responden correctamente	4	4/16	25

PROPOSICIÓN DE PROBLEMAS EN SITUACIONES ADITIVAS			
T1: Estudiantes que proponen problemas en situaciones aditivas y lo resuelven correctamente	9	11/16	56,25
T2: Estudiantes que proponen problemas en situaciones aditivas pero no resuelven correctamente	1	1/16	6,25
T3: Estudiantes que no proponen problemas adecuadamente	6	4/16	37,5
PROBLEMA C			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	4	4/16	25
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	6	6/16	37,5
T3: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	4	4/16	25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	2	2/16	12,5
T2: Estudiantes que no responden correctamente	14	14/16	87,5
PROBLEMA D			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	2	2/16	12,5
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	8	8/16	50
T3: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	3	3/16	18,75

T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	3	3/16	18,75
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	2	2/16	12,5
T2: Estudiantes que no responden correctamente	14	14/16	87,5
PROBLEMA E			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	5	5/16	31,25
T2: Estudiantes que identifican los datos en el problema pero no hacen referencia a la unidad correspondiente	6	6/16	37,5
T3: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	5	5/16	31,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	10	10/16	62,5
T2: Estudiantes que no responden correctamente	6	6/16	37,5
PROBLEMA F			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	6	6/16	37,5
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	4	4/16	25
T3: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	4	4/16	25

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que no responden correctamente	15	15/16	93,75
PROBLEMA G			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	9	9/16	56,25
T3: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	4	4/16	25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	6	6/16	37,5
T2: Estudiantes que no responden correctamente	10	10/16	62,5
PROBLEMA H			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	2	2/16	12,5
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	9	9/16	56,25
T2: Estudiantes que identifican solo una cantidad conocida en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	4	4/16	25

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que no responden correctamente	12	12/16	75
T2: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	4	4/16	25
PROBLEMA I			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	9	9/16	56,25
T2: Estudiantes que identifican solo una cantidad en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que no identifican cantidades en el problema	5	5/16	31,25
RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la suma	10	10/16	62,5
T2: Estudiantes que no responden correctamente	6	6/16	37,5
PROBLEMA J			
IDENTIFICACIÓN DE DATOS EN EL PROBLEMA			
T1: Estudiantes que identifican las tres cantidades en el problema	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que identifican las cantidades conocidas en el problema	8	8/16	50
T2: Estudiantes que identifican una cantidad conocida en el problema	2	2/16	12,5
T2: Estudiantes que no identifican las cantidades en el problema	5	5/16	36,25

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y TÉCNICAS UTILIZADAS			
T1: Estudiantes que responden correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta	3	3/16	18,75
T2: Estudiantes que no responden correctamente	13	13/16	81,25
MOMENTO PARA REFLEXIONAR			
1. RELACIÓN DE PROBLEMAS <u>A</u> DE CADA ACTIVIDAD			
T1: Estudiantes que relacionan los problemas debido a la operación que se efectúa al solucionarlos	8	8/16	50
T2: Estudiantes que relacionan los problemas ya que en todos se debe “quitar”	5	5/16	31,25
T3: Estudiantes que relacionan los problemas debido a que cuentan con cantidades	2	2/16	12,5
T4: Estudiantes que establecen relación por el contexto en el planteamiento	1	1/16	6,25
2. LAS PALABRAS AÑADIR, AGREGAR, AUMENTAR, GANAR, RECIBIR, LE REGALAN ¿CON QUÉ OPERACIÓN LAS RELACIONAS?			
T1: Estudiantes que relacionan estas palabras con una suma	16	16/16	100
3. PROPOSICIÓN DE PROBLEMAS EN SITUACIÓN DE ADICIÓN			
T1: Estudiantes que proponen problemas con estructura de adición correctamente empleando las palabras mencionadas con la respectiva formulación de la pregunta	12	12/16	75

T2: Estudiantes que proponen problemas con estructura de adición empleando las palabras mencionadas pero sin formular adecuadamente la pregunta	3	3/16	18,75
T3: Estudiantes que no proponen problemas claros	1	1/16	6,25
4. RELACIÓN DE PROBLEMAS B DE CADA ACTIVIDAD			
T1: Estudiantes que relacionan los problemas debido a la operación que se efectúa para solucionarlos	14	14/16	87,5
T2: Estudiantes que relacionan los problemas debido a que cuentan con cantidades	1	1/16	6,25
T3: Estudiantes que no establecen relación entre los problemas	1	1/16	6,25
5. LAS PALABRAS QUITAR, PERDER, GASTAR, REGALAR, LA DIFERENCIA ¿CON QUÉ OPERACIÓN LAS RELACIONAS?			
T1: Estudiantes que relacionan estas palabras con una resta	16	16/16	100
6. PROPOSICIÓN DE PROBLEMAS EN SITUACIÓN DE SUSTRACCIÓN			
T1: Estudiantes que proponen problemas con estructura de sustracción correctamente empleando las palabras mencionadas con la respectiva formulación de la pregunta	11	11/16	68,75
T2: Estudiantes que proponen problemas con estructura de sustracción empleando las palabras mencionadas pero sin formular adecuadamente la pregunta	1	1/16	6,25
T3: Estudiantes que no proponen problemas claros	4	4/16	25
7. RELACIÓN DE PROBLEMAS G DE CADA ACTIVIDAD			

T1: Estudiantes que relacionan los problemas debido a que se deben hacer comparaciones	1	1/16	6,25
T2: Estudiantes que relacionan los problemas tomando en consideración la operación que se efectúa para solucionarlos	8	8/16	50
T3: Estudiantes que relacionan los problemas ya que todos tienen cantidades	1	1/16	6,25
T4: Estudiantes que relacionan los problemas argumentando que tienen sumas y restas	2	2/16	12,5
T6: Estudiantes que no establecen relaciones entre los problemas	4	4/16	25

Resultados aplicación situación 1, actividad 1. Fuente: creación propia

En esta actividad, el 37,5% de los estudiantes identifica las tres cantidades presentes en los problemas de la categoría de cambio de tipo $a + b = ?$ y $a - b = ?$. Es de resaltar que la estructura de estos problemas, presenta las cantidades de manera más visible en el planteamiento (a y b), puesto que la incógnita es la última cantidad presente en la pregunta, lo cual indica que el bajo porcentaje de estudiantes que lograron identificar puede ser debido a las cantidades empleadas en esta situación, ya que son números con tres cifras con cantidades no cerradas, siendo esto más complejo al momento de realizar procesos de análisis e interpretación.

En la resolución del problema A, con estructura $a - b = ?$, solo un 50% de los estudiantes responde correctamente reconociendo el significado de la operación por la cual deben hallar la solución. Estos, ubican adecuadamente las cantidades y realizan una sustracción, por medio del algoritmo de resta. Mientras tanto, la otra mitad de estudiantes no logra responder correctamente debido a dos factores:

- Unos de los estudiantes emplea la operación contraria, en este caso realizando una suma para resolver el problema
- El resto de estudiantes resta la cantidad menor de la mayor, tal y como se muestra en la siguiente imagen.

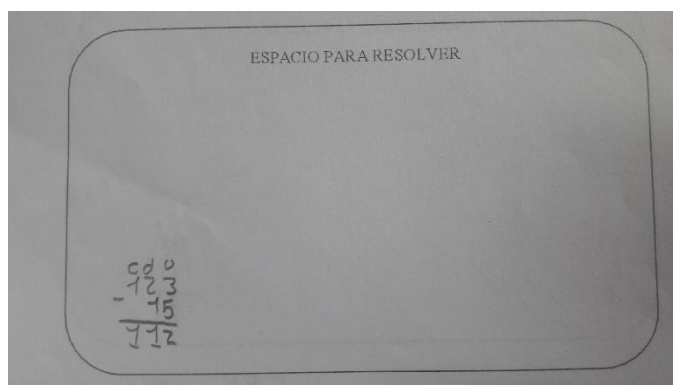


Figura 21. Cuestionario estudiantes. Fuente: estudiantes

Por otro lado, en la resolución del problema B con estructura de adición, el 75% de los estudiantes resuelve correctamente reconociendo el significado de la operación, indicando así que los procedimientos de adición se hacen más fáciles para los estudiantes. Además, la disposición de las cantidades en el problema favoreció para el planteamiento de la suma, dado que ambas cantidades eran de dos cifras y no tenían inconveniente al ubicarlos posicionalmente. También es de resaltar que para los estudiantes es más fácil realizar agrupaciones (en la llevada) que desagrupar (tomando prestado). Por otro lado, en el 25% restante los estudiantes emplean el algoritmo contrario por lo cual no logran dar solución al problema, esto debido a que no logran realizar procesos de interpretación del problema.

Al momento de proponer problemas en situaciones aditivas de cambio, tal y como estaban planteados los problemas A y B; un 56,25% de los estudiantes plantean problemas siguiendo la estructura y modelos planteados anteriormente. La mitad de ellos lo hace en relación a la adición y el resto a la sustracción, con su respectivo procedimiento para resolver por medio del algoritmo. Un ejercicio muy valioso, ya que no solo tomaron en consideración el contexto de la tienda escolar y del cultivo del café, sino de su propio mundo real haciendo uso del contexto como un medio de aprendizaje (MEN, 1998). A continuación se presenta un ejemplo de los planteamientos realizados:

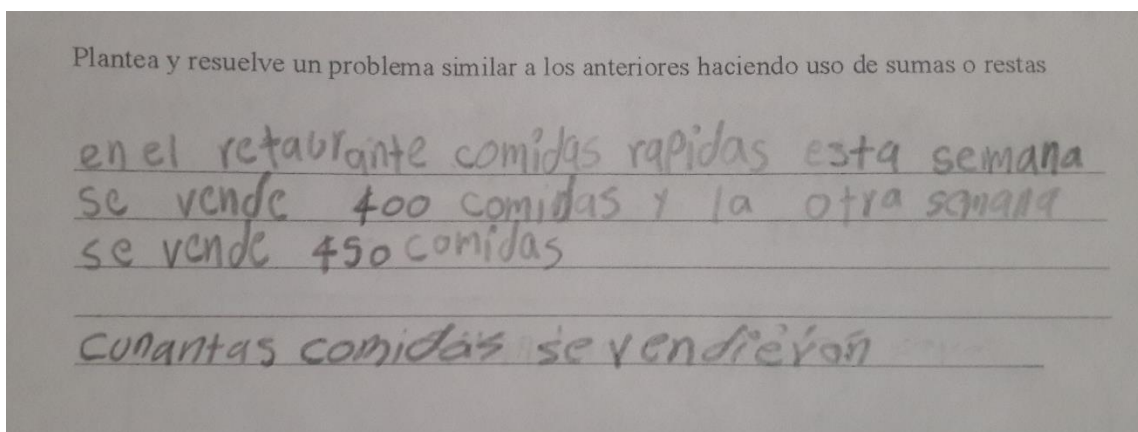


Figura 22. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Los problemas de cambio en donde la cantidad inicial y el resultado son conocidos, la incógnita es la magnitud que cambia; tan solo un 20% de los estudiantes logra hacer procesos de identificación de las tres cantidades, entendiendo que los problemas donde la incógnita no se encuentra en c , se hace más complejos para los estudiantes en este caso identificar la incógnita ubicada en la magnitud que cambia. Es así como aproximadamente el 50% de los estudiantes identifica tan solo las dos cantidades conocidas. Al momento de resolver ambos problemas (C y D) con la estructura de sustracción y adición respectivamente, tan solo un 12,5% de los estudiantes logra resolver los problemas correctamente. En el caso del problema C, los estudiantes que resolvieron correctamente el problema hicieron uso del algoritmo de la resta tomando prestado, teniendo en cuenta la complejidad que este tenía debido a la desagrupación del minuendo con número 111. Por otro lado, de los estudiantes que no lograron resolver el problema, cabe anotar que la mitad de ellos emplearon la operación contraria, lo cual demuestra que no lograron reconocer el significado de la operación; mientras que la otra mitad aunque hizo uso del algoritmo de la resta tomando prestado, cometieron el error al momento de la colocación de los números, tal y como se muestra en la siguiente imagen.

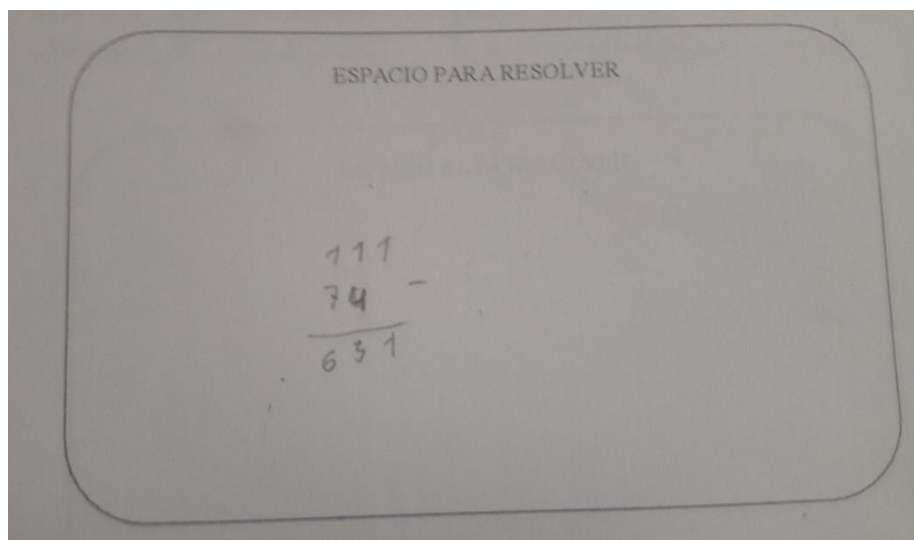


Figura 23. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Respecto al problema D, los dos estudiantes que respondieron correctamente emplearon el algoritmo de la resta teniendo en cuenta que la estructura del problema estaba bajo una adición, pero al tener la incógnita en la magnitud de cambio resulta más práctico efectuar la sustracción. En el caso del resto de los estudiantes, en su gran mayoría emplearon la operación indicada bajo la estructura del planteamiento del problema, es decir, discriminaron la operación indicada, pero emplearon las cantidades conocidas (cantidad inicial y resultado) para llevar a cabo la adición, lo cual conlleva a obtener resultados erróneos. Mientras que alguno de los que no respondieron correctamente, emplearon el algoritmo de la sustracción, pero no efectuar debidamente los procesos de ubicación de las cantidades ni desagrupación de las mismas.

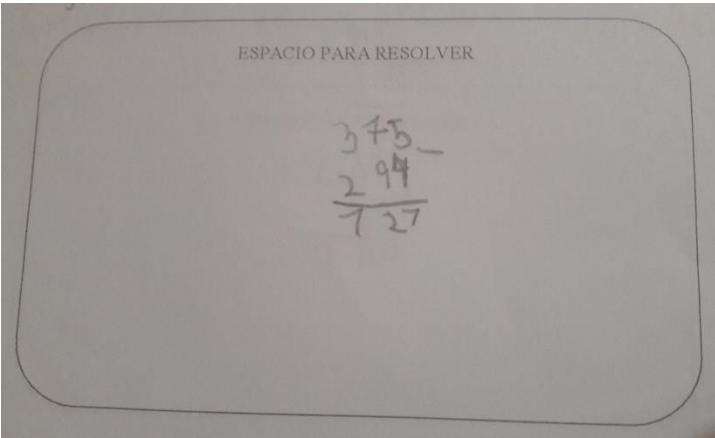
Para los problemas de cambio donde la incógnita es la magnitud inicial, y se conoce la magnitud de cambio y el resultado; tan solo una tercera parte de los estudiantes logró identificar las tres cantidades de los problemas, resaltando que dentro de la categoría de cambio son los más complejos. Además, identifican las unidades que acompañan las cantidades, inclusive en la correspondiente a la incógnita lo cual muestra que han avanzado en este acto de comprensión a medida que se ha llevado a cabo la aplicación de las situaciones. Por otro lado, la mitad de los estudiantes identifica solo las cantidades conocidas en el problema, lo cual resulta ser a simple vista lo más fácil, debido a que los estudiantes generalmente centran la atención en las cantidades numéricas presentes en la situación.

Al momento de dar solución al problema E, cabe anotar que el planteamiento dispuesto no se dio de la manera adecuada puesto que la cantidad en c no está dada, mientras que la cantidad inicial y de cambio sí. De esta manera, un 62,5% de los estudiantes logró resolver el problema correctamente empleando el algoritmo de la suma, ya que las dos cantidades conocidas que presentaba el problema estaban claramente definidas. Ahora bien, al momento de efectuar el algoritmo se ubicaron las cantidades correctamente según su valor posicional debido que ambas contaban con tres cifras, mientras que las estudiantes que no resolvieron correctamente no lograron reconocer el significado de la operación. En el caso del problema F con estructura de $a + b = c$, tan solo un estudiante lo resolvió correctamente haciendo uso del algoritmo de la resta tomando prestado, siendo esta a su vez la operación contraria a la del planteamiento del problema pero de alguna forma la indicada respecto a las cantidades conocidas. El resto de los estudiantes, no resolvió el problema principalmente debido a que emplearon el algoritmo de la suma, que si bien es cierto acorde al planteamiento del problema, no emplea las cantidades apropiadas ya que el problema tan solo brinda la magnitud de cambio y el resultado; donde los estudiantes efectuaron la suma de ambos conllevando a obtener resultados erróneos. Demostrando así, que los problemas donde la incógnita no se encuentra en c , resultan más complejos para los educandos. (Bruno, 2001)

En los problemas G y H con categoría de comparación donde el referente y el referido son conocidos, pero se desconoce la comparación, aproximadamente un 15% de los estudiantes identifican las cantidades involucradas en el problema. Esto indica que los planteamientos bajo esta estructura son complejos para los estudiantes, pues aunque se presentan dos cantidades conocidas, la cantidad que representa la incógnita no se presenta de manera formal en la pregunta debido a que está dada por medio de la diferencia entre a y b . Así pues, al no identificar adecuadamente, los estudiantes difícilmente pueden resolver correctamente los problemas.

Al momento de resolver el problema G, tan solo 6 estudiantes logra resolver correctamente empleando el algoritmo de la resta, discriminando así la operación indicada y teniendo en cuenta que para hallar la diferencia entre dos cantidades es por medio de la resta que se debe hacer. También, cabe resaltar que en el planteamiento se encontraba la palabra “más”, la cual pudo generar algún tipo de confusión a la hora de resolver el problema. En relación con los problemas

de esta misma estructura en las actividades anteriores el porcentaje bajó en cierta medida debido a que las cantidades del presente problemas son más grandes (tres cifras) y no se emplean cifras cerradas. Los estudiantes que no resolvieron adecuadamente el problema, se encuentra que emplearon en su mayoría el algoritmo contrario (suma) por lo cual los resultados obtenidos no permitían hallar la diferencia entre las dos cantidades. Mientras que para el problema H, al igual que en las actividades anteriores con la misma estructura, el índice de estudiantes que respondieron correctamente es bajo, tan solo un 25% de ellos discrimina entre la operación adecuada, empleando así el algoritmo de la resta para hallar la solución. En este problema, dentro de la pregunta se encontraba el término “menos”, lo cual inducía al estudiante a cuál podría ser la operación a llevar a cabo. Aun así, el 75% de los estudiantes no logró resolver correctamente debido principalmente a dos factores, el primero de ellos hace referencia que los estudiantes emplean la operación contraria (suma) lo cual conlleva a obtener resultados erróneos y como segundo factor se encuentra el mal procedimiento a la hora de efectuar el algoritmo de la resta tomando prestado, donde los estudiantes restan la cifra menor de la mayor y/o olvidan la llevada; así como se muestra en la siguiente imagen:



Handwritten student work on a piece of paper with the heading "ESPACIO PARA RESOLVER". The work shows a subtraction problem:

$$\begin{array}{r} 375 \\ - 294 \\ \hline 727 \end{array}$$

The student has incorrectly calculated the result of the subtraction, showing 727 instead of the correct answer, 81.

Figura 24. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

En los dos últimos problemas, correspondientes a los literales I e J, cuando el referente y la comparación son conocidos, pero se desconoce el referido; solo un 6,25% de los estudiantes logra identificar las tres cantidades dadas en el problema. Esto, debido a que la comparación es conocida como dato del problema, pero para el estudiante se hace complejo debido a que está en relación con el referente a través de términos como “más que” o “menos que”. De esta manera, la gran

mayoría de estudiantes identifica tan solo el referido, mientras que la comparación solo la tienen en cuenta como dato numérico dentro del problema para llevar a cabo una operación.

Al solucionar el problema I, se hace un poco más fácil para los estudiantes discriminar la operación para dar respuesta a la pregunta, debido a que cuenta con el término “más que”. Así pues, un 62,5% de los estudiantes reconoce el significado de la operación empleando el algoritmo de la suma llevando, para dar solución de manera satisfactoria. Mientras que el resto de los estudiantes, algunos aunque hacen uso del algoritmo, cometen el error de olvidar la llevada; en tanto que otros de los estudiantes realizan la operación contraria al del planteamiento del problema. Sin embargo desde los planteamientos del MEN, este tipo de problemas no se encuentran dispuestos por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se encontró una respuesta positiva por parte de los estudiantes ya que se asemeja a un problema de cambio de tipo $a + b = ?$.

Para la solución del último problema de la presente actividad, el cual tiene bajo su estructura la sustracción y aunque en su planteamiento cuenta con el término “menos que”, solo un 18,75% de los estudiantes respondió correctamente discriminando la operación por la cual llevarlo a cabo. Cabe analizar cómo los estudiantes logran efectuar mejores los procedimientos del algoritmo de la suma que de la resta. Mientras que, para el restante de estudiantes, aunque en su gran mayoría emplearon el algoritmo indicado, en el proceso olvidan la llevada, por otro lado algunos no ubican las cantidades según su valor posicional, más aún que el presente problema cuenta con una cantidad de dos cifras y la otra de tres, complejizando el procedimiento del algoritmo por parte del estudiante.

Al momento de generalizar, la mitad de los estudiantes logra hacerlo partiendo de la operación por la cual resolvieron dichos problemas, en el caso preciso de los problemas de cambio en situación de sustracción. Manifiestan que tiene relación debido a que todos tienen restas, haciendo énfasis en que hicieron uso del algoritmo en todos los problemas de literal A de las diferentes actividades. También, el 31,25% de los estudiantes establecen relaciones entre los problemas debido a que en todos se debe quitar, lo cual indica que relacionan el término de “quitar” como un común denominador en los literal A y que de alguna u otra manera conlleva a una resta como operación, lo cual tiene que ver con la generalización que se espera de los estudiantes. Así pues,

se destaca la manera cómo todos los estudiantes relacionan los términos “perder”, “gastar”, “regalar”, “diferencia”; con la operación de la resta. Esto indica, que al momento de enfrentarse a un problema bajo el uso de estos términos tendrán bases para realizar procesos de discriminación al momento de elegir la operación por la cual llevar a cabo la solución. Además, haciendo un recorrido a través de las actividades aplicadas, se puede evidenciar la manera en la cual los estudiantes logran mejorar en el reconocimiento del significado de la operación para los problemas que involucran sustracción.

Por otro lado, el resto de los estudiantes establecen relaciones entre los problemas teniendo en cuenta las cantidades con que cuenta cada problema o por medio del contexto en el cual se plantean; resaltando que las tres actividades cuentan con dos situaciones diferentes. Es claro que estos estudiantes logran establecer algún tipo de relaciones entre los problemas, aunque no de la manera y forma como se esperaba en el acto de generalización.

Al momento de los estudiantes enfrentarse a procesos de proposición de problemas en situación de sustracción, se destaca la manera en cómo emplean los términos sugeridos al momento de realizar sus planteamientos. Un 75% de los estudiantes propone problemas en situación de sustracción, resaltando que sus planteamientos están basados en la categoría de cambio con estructura de $a - b = ?$, debido a que esta es la que se plantea generalmente en el aula y a través de los libros de texto. Además, los planteamientos estuvieron determinados principalmente por el contexto de las situaciones trabajadas en la propuesta, observando la manera en que emplean su medio social para efectuar estos procesos. A continuación se muestra en la imagen uno de los planteamientos de los estudiantes:

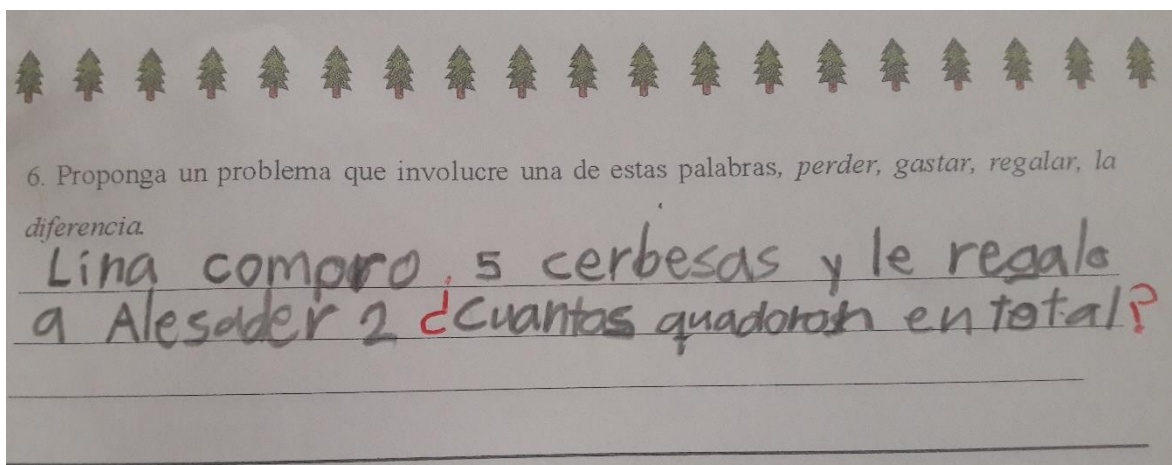


Figura 25. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Es importante tener en cuenta que, aunque las actividades se diseñaron partiendo de las necesidades de los estudiantes en grado segundo, se aplicaron en el grado tercero debido al tiempo en que se desarrolló la investigación. De esta manera, y como se plantea en la malla curricular de matemáticas (MEN 2917) a través de los DBA, los estudiantes deben interpretar, proponer y resolver problemas aditivos. Para lo cual, el 25% restante de los estudiantes no propone problemas claros ni concretos bajo las estructuras solicitadas. Vale la pena destacar un planteamiento, que aunque no se encuentra dentro de las estructuras trabajadas a través de la aplicación de la propuesta, es valioso debido a que desde su contexto plasma el siguiente problema de composición que involucra ambas operaciones (suma y resta).

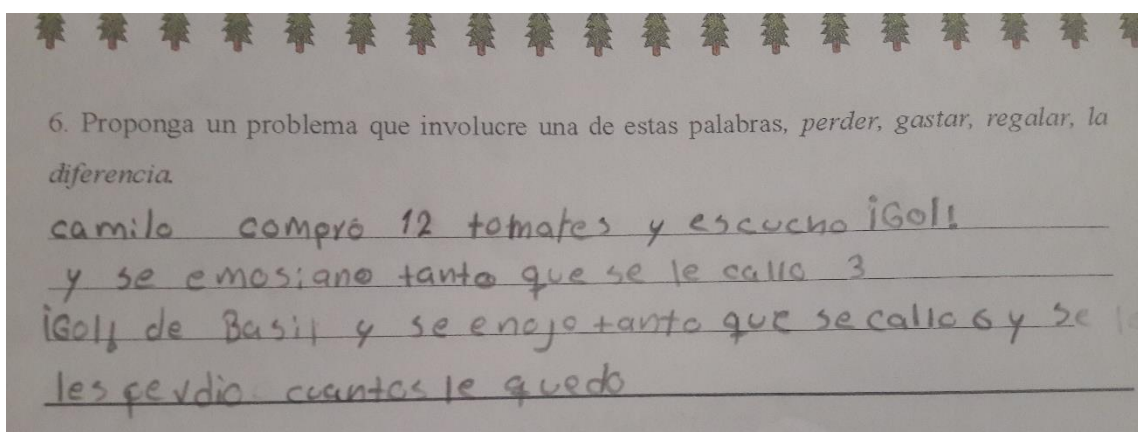


Figura 26. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Respecto al proceso de generalización que realizan los estudiantes con problemas de cambio en situación de adición, cabe anotar que en gran medida lo hacen mejor con relación al caso de sustracción. Precisamente en los problema B de cada actividad (cambio de tipo $a + b = ?$, un 87,5% de los estudiantes establece relaciones partiendo de la operación por la cual resuelven los problemas, en este caso debido a que en todos se realiza una suma. Es de resaltar cómo los estudiantes realizan mejores procesos tanto de discriminación como de generalización en lo concerniente a los problemas en situación de adición respecto a los de sustracción. Es como de esta manera, los estudiantes en su totalidad relacionan las palabras como “añadir”, “agregar”, “ganar”, entre otras, con la operación de la suma. Se hace importante que el estudiante establezca dichas relaciones, puesto que en esta medida se hace más factible que el estudiante reconozca el significado de la operación y logre dar solución a este tipo de problemas.

Al momento de proponer problemas en situaciones de adición, la gran mayoría de estudiantes (93,75%) realiza sus planteamientos a través de un problema de categoría de cambio cuya estructura se puede dar de la siguiente manera: $a + b = ?$, $a + ? = c$, o $? + b = c$. De estos estudiantes, un 18,75%, realiza igualmente el planteamiento de sus problemas, pero no formula debidamente la pregunta que los acompaña; donde en algunos casos la pregunta se vuelve afirmativa dando la propia solución. Los estudiantes que plantean los problemas debidamente con la pregunta indicada, en su gran mayoría eligió el contexto de la tienda escolar al hablar de dulces y demás principalmente por su acercamiento a dicho contexto, pero se destaca como se muestra en la siguiente imagen alguno de los estudiantes que desde su cotidianidad plantea el problema, de tal forma que la actividad matemática debe estar siempre enfocada con los procesos cotidianos de los educandos. MEN (1995).

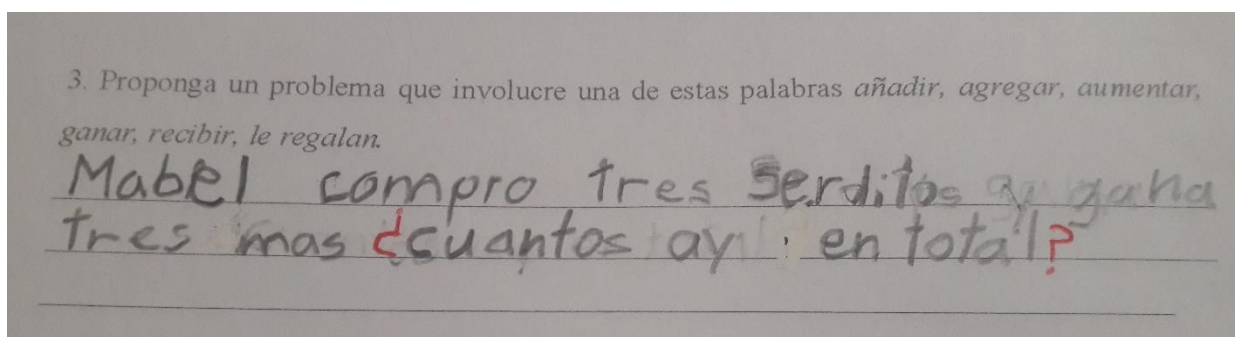


Figura 27. Cuestionario estudiante. Fuente: estudiantes

Al momento de los estudiantes generalizar en problemas de comparación, en este caso preciso cuando el referente y el referido son conocidos, pero se desconoce la comparación, tan solo uno de ellos establece que se relacionan debido a que se debe hacer una comparación. Esto, es lo esperado teniendo en cuenta la categoría de los problemas, y además la estructura del mismo, aunque es claro desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1995) que no son problemas apropiados para el nivel de escolaridad. Partiendo de dicha premisa, aproximadamente el 60% de estudiantes no establece relaciones entre los problemas G de cada situación correspondiente a la categoría mencionada. Tan solo 30% se aproxima en la medida que emplea la resta utilizada en los problemas como forma de generalizar, lo cual es totalmente válido dado que al hablarse de diferencia entre cantidades (comparación), es la operación que se debe llevar a cabo.

4.4 Conclusiones

Las conclusiones que son presentadas en el presente apartado, se determinan partiendo de los objetivos planteados al inicio de la propuesta, tanto el general como los específicos.

4.4.1 Respecto al objetivo específico N° 1

“Considerar algunos conocimientos de tipo curricular, conceptual y didáctico que permitan la construcción de la organización matemática y didáctica en torno a la resolución de problemas verbales aditivos”

Se concluye que:

Para el profesor enfrentarse a determinado objeto de estudio, especialmente en el área de matemáticas en el caso específico de la resolución de problemas verbales aditivos (RPVA), resulta fundamental el conocimiento primero de tipo curricular. Esto, a la luz de los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), bajo los cuales se fundamentan las competencias que deben ser desarrolladas en los estudiantes a través de los Estándares Básicos del MEN (2006). A su vez, y teniendo en cuenta dichos referentes, se toman en consideración los DBA propuestos por el MEN (2017), los cuales guiarán los procesos de enseñanza determinando así, los conocimientos básicos que deben adquirir los estudiantes a través del proceso de formación.

En segundo lugar, y tomando en consideración la presente investigación, resulta imprescindible para el profesor tener en cuenta los conocimientos de tipo conceptual para el caso de los RPVA (Castro, 1995), más aún cuando no se tiene el dominio del mismo. Dicha situación se presenta, como en el presente estudio, en las aulas de primaria donde los docentes enseñan todas las áreas de conocimiento teniendo tan solo un énfasis en alguna de ellas (Pineda, 2015). Esto, en la medida en que mayor conocimiento se tenga del objeto a trabajar, posiblemente, mejor desempeño logra tener el docente en los procesos de enseñanza. Y como tercer y último aspecto importante, la didáctica es esencial puesto que a partir de ella se proyectan las estrategias, técnicas y, sobre todo tener presentes que obstáculos, errores o dificultades podrían tener los estudiantes al momento de

enfrentarse al objeto matemático (Bruno, 2001). Así pues, tomar en consideración los tres aspectos anteriormente mencionados proporciona al docente la propiedad para llevar a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, con el fin de alcanzar objetivos específicos, desarrollando en el estudiante las competencias matemáticas, tecnológicas, científicas, lingüísticas y ciudadanas (MEN 2006).

4.4.2 Respetto al objetivo específico N° 2

“Articular las organizaciones matemáticas y didáctica local en el diseño de una propuesta de aula que involucra la resolución de problemas verbales aditivos”

Se concluye que:

Para la construcción de las praxeologías matemática y didáctica local basada en la resolución de problemas verbales aditivos, resulta primordial tener conocimientos de tipo curricular los cuales permitan al profesor tener una mirada amplia del objeto matemático en relación con lo propuesto por el MEN desde sus diferentes documentos y requerimientos. Además de ello, el conocimiento conceptual debe ser parte fundamental, activa y permanente por parte del profesor, permitiendo así la edificación de la praxeología matemática, la cual oriente al diseño y desarrollo de una propuesta de aula que movilice el conocimiento matemático presente (RPVA). De esta manera, se hace vital para los procesos de enseñanza, la formación disciplinar de los profesores en áreas específicas de conocimiento, donde en el caso de las aulas de básica primaria resulta ser complejo debido a su amplio campo de enseñanza (todas las áreas) y fundamental puesto que es el nivel de formación más importante para el ser humano, especialmente para el área de las matemáticas en el caso específico del trabajo con resolución de problemas verbales aditivos.

Así bien, para el caso de la organización didáctica, tanto la práctica pedagógica del profesor en el aula, la cual este estructurada desde la observación, análisis de situaciones y reflexión; como la teoría expuesta en sentido de los diferentes errores, dificultades u obstáculos que puedan llegar a tener los estudiantes basado en diferentes estudios y trabajos; resulta ser fundamental al momento

de su construcción. De esta manera, el profesor estará en la capacidad de diseñar y propiciar ambientes formativos, que respondan a las necesidades de los educandos.

4.4.3 Respecto al objetivo específico N° 3

“Analizar desde los actos de comprensión propuestos por Sierpinska los resultados obtenidos durante la ejecución de la propuesta de aula que involucra la resolución de problemas verbales aditivos”

Se concluye que:

A través de la ejecución de la propuesta de aula, articulada desde las praxeologías matemática y didáctica, se puede establecer el estado de los estudiantes respecto a los siguientes actos de comprensión propuestos por Sierpinska (1992):

Acto de identificación: dos terceras partes de los estudiantes logra obtener un acto de identificación cuando se presentan problemas de la categoría de cambio con cantidades de dos cifras y representación pictórica. A medida que las cantidades involucradas en los problemas aumentan, el porcentaje de los estudiantes reduce; al punto que, con problemas de tres cifras sin el uso de cantidades cerradas, tan solo una cuarta parte de los estudiantes identifica las cantidades involucradas en los problemas. En general los estudiantes solo identifican las cantidades conocidas del problema, mientras que la incógnita no es vista como una cantidad. Por otro lado en los problemas de la categoría de comparación, cuando se emplean cantidades de dos cifras aproximadamente una cuarta parte de los estudiantes alcanza el nivel, y al igual que con los problemas de cambio, al momento de trabajar con cantidades más grandes tan solo un 6% de los estudiantes logra realizar los procesos de identificación, debido a que no reconocen la diferencia entre los datos dados como una cantidad del problema.

Acto de discriminación: los estudiantes logran discriminar en mayor proporción en la medida que los problemas cuentan con cantidades pequeñas y estructura de cambio donde la incógnita se encuentra en c , los cuales puedan resolverse por medio del conteo uno a uno o haciendo uso del

cálculo mental, donde logran reconocer el significado de la operación. A medida que las cantidades involucradas en los problemas aumentan, creando así la necesidad del uso del algoritmo para solucionar, el acto de discriminación disminuye notablemente, debido a que los estudiantes cometen errores en los procedimientos principalmente los relacionados con la colocación de los números y el hecho de restar la cifra menor de la mayor en los casos de sustracción. Por otro lado respecto a los problemas de comparación, tan solo un 10% de los estudiantes logra discriminar debido a la complejidad de los planteamientos, ya que no logran reconocer el significado de la operación para hallar la diferencia entre dos cantidades dadas.

Acto de generalización: en este acto se encuentra tan solo una cuarta parte de los estudiantes, donde principalmente logran establecer relaciones en lo concerniente a los problemas de la categoría de cambio. Generalizan especialmente tomando en consideración el aspecto contextual de los problemas haciendo de lado el aspecto formal de las estructuras de los problemas.

4.4.4 Respecto al objetivo general

“Determinar el acto de comprensión en la resolución de problemas verbales aditivos que alcanzan los estudiantes del grado segundo de la Institución Educativa Técnica La Marina Sede Guillermo Martínez cuando se desarrolla una propuesta didáctica desde la TAD”

Se concluye que los estudiantes con los cuales se desarrolló la investigación, logran alcanzar los actos de comprensión empleados tanto para el diseño y análisis de la propuesta, en la medida que se trabaje con cifras pequeñas y haciendo uso de la representación gráfica. Sin embargo, es el acto de identificar lo que mejor resultado tuvo en los estudiantes, por su parte al momento de discriminar lo hacen en menor proporción, mientras que el acto de generalizar es más complejo para ellos. Es el cálculo mental, la principal estrategia de solución de problemas tanto de la categoría de cambio como de comparación, debido al ejercicio que realizan desde años anteriores por medio de la tienda escolar; situación que al resolver haciendo uso del algoritmo sea de la suma o resta genera dificultad en ellos. Esto, en la medida que la mayoría de los estudiantes no coloca adecuadamente los números, o emplean el algoritmo contrario.

5. Reflexiones

Esta experiencia de investigación ha sido enriquecedora, satisfaciendo mi necesidad de conocimiento frente a la didáctica de las matemáticas y de las ciencias, especialmente desde el campo de la resolución de problemas estructura aditiva, todo esto afectando de manera positiva las practicas pedagógicas. A lo largo de este camino se ha podido conocer las necesidades de los estudiantes y cómo actuar frente a ello desde una postura científica, basada en las investigaciones y la teoría.

Los cambios que se han dado en el aula son relevantes, desde la manera en la cual se observa las conductas y procedimientos de los estudiantes hasta e planteamiento de problemas y situaciones que favorezcan al desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes. Esto debido a que se toma en consideración el papel que debe tener el docente frente al proceso de formación, apoyado desde la investigación, la reflexión y las necesidades de cada comunidad.

Frente a futuras investigaciones se recomienda el trabajo con la resolución de problemas con estructura aditiva que comprensa todas categorías planteadas por Castro, Rico y Castro (1995), con el fin de analizar comparativos entre ellas. Cabe anotar que debe ser en grados superiores al trabajo en la presente propuesta. Además, se recomienda el trabajo con situaciones planteadas desde el contexto de los estudiantes, pero con el manejo de diferentes tipos de cifras con el propósito de analizar el desempeño de los estudiantes en cada una de ellas.

6. Referencias

- Ayres, F. (2003). Algebra moderna. Departament of Mathematics Dickinson College, México. McGrawHill. Traducción al castellano: Algebra Moderna. Jesús María Castaño. Universidad del Valle, Colombia.
- Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X No. 2, 135–149.
- Brown, J., Burton, R. (1978). *Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills*. Cognitive science, 2, 155-192.
- Bruno, A., Martinón, A., Velázquez, F. (2001). *Algunas dificultades en los problemas aditivos*. Suma, 37, 83-94.
- Chevallard Y. (1999). *Enseignement des mathématiques et besoins professionnels*. Le cas des élèves-instituteurs, XVI colloque inter-IREM des PEN et autres formateurs d'instituteurs en mathématiques, Bordeaux. Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr>.
- Castro, E., Rico L., Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Grupo editorial Iberoamerica. Universidad de los Andes. Bogotá.
- Flore, E. J. (2007). *Didáctica práctica para enseñanza media y superior*. Montevideo: Grupo Magro.
- Flores, P., Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide. Tomado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5254314>
- Godino, J. (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada, España. Los autores. Universidad de Granada

Godino, J. (2004). *Didáctica para maestros*. Granada, España. Los autores. Universidad de Granada

Lagos S. (2015). *Propuesta de intervención de aula para favorecer el desarrollo del pensamiento numérico, a partir de situaciones de estructura aditiva en estudiantes de ciclo I*. (Tesis de Maestría en Pedagogía) Universidad de la Sabana, Bogotá. Recuperado de <http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/19991/Sandra%20Milena%20Lagos%20Perez%20%20%28tesis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Ministerio de Educación Nacional (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Recuperado de <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/w3-article-349446.html>

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Recuperado de http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017). *Mallas de aprendizaje Matemática grado 2*. Recuperado de <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/MATEM%C3%81TICAS-GRADO-2.pdf>

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

NCTM. (1980). *Agenda for action*. Recommendations for school Mathematics of the 1980s. Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla, España: SAEM.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales National Council of Teachers of Mathematics

Obando, G., Muñera, J. (2003). Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática". En: Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35, (enero- abril). pp. 185-199.

Pineda (2015). *Unidad didáctica para la enseñanza de las estructuras aditivas en los grados tercero y quinto de básica primaria*. (Tesis de Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales) Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/12699/1/8412015.2013.pdf>

Polya, G. (1957). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, España: Ed. Tecnos.

Polya, G. (1965): How to solve it. Princenton University Press (Traducción: Cómo plantear y resolver problemas, de Julián Zagazagoitia, Ed. Trillas. México)

Polya, G. (1980). En la resolución de problemas matemáticos en la escuela secundaria. En Krulik, S. y Reys, R. E. (Eds.), La resolución de problemas en las matemáticas escolares, p.1, Virginia.

Quintero, A. (2015). *Diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica desde el marco de la EPC, para potenciar estrategias de conteo, utilizadas en la solución de problemas de tipo aditivo*. (Tesis de Maestría en Pedagogía) Universidad de la Sabana, Bogotá. Recuperado de <http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/19944/Alba%20Lucia%20Quintero%20Tobon%20%28tesis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Rodríguez, P., Lago, M., Caballero, S., Dopico, C., Jiménez, L. Solbes, I. (2008). *El desarrollo de las estrategias infantiles: Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo*. Red

- de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. Tomado de:
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=16711589007>
- Romero, A. (2012). *Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de segundo grado de primaria del distrito Ventanilla – Callao*. (tesis de Maestría en Educación) Universidad San Ignacio de Loyola, Perú. Recuperado de
http://repositorio.usil.edu.pe/bitstream/123456789/1287/1/2012_Romero_Comprensi%C3%B3n%20lectora%20y%20resoluci%C3%B3n%20de%20problemas%20matem%C3%A1ticos%20en%20alumnos%20de%20segundo%20grado%20de%20primaria%20del%20distrito%20de%20Ventanilla%20-%20Callao.pdf
- Rondero, C., Font, V. (2015). *Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética*. Enseñanza de las Ciencias, 33(2), 29-49
- Sampieri, Fernández, Batista, (2014). Metodología de la investigación (Vol. Sexta Edición). México. Tomado de: <http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 10, 3, (Noviembre, 1990, 10(3). 24-36. Traducción al castellano: Algunas observaciones sobre la comprensión en matemáticas. César Delgado, G. Documento de uso académico. Universidad del Valle, 1999. Cali. Colombia.
- Tall D. y Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169.
- Vinner, S. (1991). The role of denitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

7. Anexos

1. Diseño situación 1, actividad 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA LA MARINA

Nombre: _____ Grado: _____

Sede: _____ Edad: _____

Situación 1

Nuestra tienda escolar

Objetivo

Identificar y resolver problemas en situaciones aditivas de cambio y comparación teniendo en cuenta los datos relevantes y técnicas utilizadas por los estudiantes para la resolución.

En el corregimiento de la Marina, los estudiantes de sede Guillermo Martínez Núñez manejan la Tienda Escolar “Antonio” en la que se venden ricos y deliciosos dulces en todos sus descansos. Los más apetecidos por los estudiantes son los bombones, las galletas y las gomas, productos de bajo costo teniendo en cuenta las condiciones económicas de los estudiantes. Con las ganancias de la tienda se obtienen recursos para las celebraciones y fechas importantes en la escuela.

Actividad 1

Lee con atención los problemas propuestos y contesta cada una de las preguntas en el lugar indicado. Has uso de material concreto para los problemas que no tienen representación gráfica.

A. En la tienda se cuenta con 10 barriletes y dos de ellos son vendidos a Gabriel.



¿Cuántos barriletes quedaran en la tienda?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3
CANTIDAD DE BARRILETES QUE HABÍAN	CANTIDAD DE BARRILETES VENDIDOS	

ESPACIO PARA RESOLVER

R/_____

Describe el proceso utilizado para resolver el problema

R/ _____

B. De los barriletes que quedaron en la tienda, el profesor decide agregar 5 barriletes al surtido.



¿Cuántos barriletes hay en la tienda?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

Describe el proceso utilizado para resolver el problema

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

C. En la tienda habían 17 bombones, y al final del descanso del día siguiente quedaron tan solo 9, ¿Cuántos bombones se vendieron?



Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

Describe el proceso utilizado para resolver el problema

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

Comprueba la respuesta que encuentraste

R/ _____

D. Juanita compra 13 masmelos



y necesita comprar algunos más para darle a sus 27 compañeros.

¿Cuántos masmelos debe comprar Juanita?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encuentraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

Describe el proceso utilizado para resolver el problema

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

E. Ana compra muchas gomas y siempre comparte con sus compañeros, así que decide regalarle 12 gomas a Felipe y aún le quedan 7

¿Cuántas gomas compró Ana?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

Describe el proceso utilizado para resolver el problema

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

Comprueba la respuesta que encuentraste

R/ _____

F. En la tienda habían algunos paquetes de galletas y se agrego al surtido 15 paquetes más y ahora hay 23. ¿Cuántos paquetes de galletas habían en la tienda antes del surtido?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

Dato 1	Dato 2	Dato 3

ESPACIO PARA RESOLVER

R/_____

Describe el proceso utilizado para resolver el problema

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

G. El lunes se venden 59 paquetes de galletas y el martes 72. ¿Cuántos paquetes de galletas se venden más el martes que el lunes?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

Comprueba la respuesta que encontraste

R/ _____

H. En esta semana se compraron 43 paquetes de galletas y la semana pasada se compraron 25. ¿Cuántos paquetes de galletas se compraron la semana pasada menos que esta semana?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

- I. Camilo compró 36 gomas y Jaider compró 9 gomas más que Camilo, ¿Cuántas gomas compró Jaider?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

J. Yefrei compró en la tienda 37 masmelos para todos sus compañeros y Sara compró 13 menos que Yefrei. ¿Cuántos masmelos compró Sara?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

Comprueba la respuesta que encontraste

R/ _____

2. Diseño situación 1, actividad 2

Actividad 2

Relaciona y resuelve los siguientes problemas teniendo en cuenta la tabla de precios de la Tienda Escolar Guillermo.

PRODUCTO	PRECIO
GALLETA CAPRI	\$200 
BOMBOMBUN	\$300 
NUCITA	\$450 
MASMELO	\$100 
BARRILETE	\$150 
GOMAS	\$100 

José Luis, lleva para el descanso \$300 pesos.

- ¿Qué productos de la tienda escolar podría comprar José Luis?

R/ _____

- Si desea comprar una nucita ¿Le falta o le sobra dinero? ¿Cuánto dinero le falta o cuánto le sobra?

R/ _____

- Si desea comprar un barrilete ¿Le falta o le sobra dinero? ¿Cuánto dinero le falta o cuánto le sobra?

R/ _____

A. Martín llevó a la escuela \$900 pesos. En el descanso, compró una nucita,



¿Cuánto dinero le quedó a Martín?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encuentres en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué relación hay entre el problema A de la actividad 1 y el problema A de la actividad 2?

R/ _____

B. Camila compró un paquete de galletas y una núcita,



¿Cuánto dinero gasto Camila?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué relación hay entre el problema B de la actividad 1 y el problema B de la actividad 2?

R/ _____

C. Valentina llevó a la escuela \$700 pesos para el descanso y regresó a la casa con \$50 pesos.

¿Cuánto dinero gastó Valentina?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

D. Ana compró un barrilete y otros dulces y se gastó \$900 pesos.



¿Cuánto le costaron los otros dulces a Ana?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué relación hay entre el problema D de la actividad 1 y el problema D de la actividad 2?

R/ _____

E. Andrés compró en la tienda \$650 pesos y le quedaron \$300. ¿Cuánto dinero llevó Andrés a la escuela?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué relación hay entre el problema D de la actividad 1 y el problema D de la actividad 2?

R/ _____

F. La mamá le dio a Gabriela algunas monedas para el descanso y su papá le dio \$350 pesos, para un total de \$800 pesos.



¿Cuánto dinero le dio la mamá a Gabriela?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

G. Jaime compró hoy en la tienda \$950 y ayer \$650. ¿Cuánto dinero gastó más hoy que ayer?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué relación hay entre el problema G de la actividad 1 y el problema G de la actividad 2?

R/ _____

H. José Luis compro en la tienda \$250 y Fredy compro \$650 más que José Luis,
¿Cuánto dinero gasto Fredy en la tienda?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

R/ _____

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? ¿Por qué?

R/ _____

¿Qué relación hay entre el problema D de la actividad 1 y el problema D de la actividad 2?

R/ _____

3. Diseño situación 2, actividad 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA LA MARINA

Nombre: _____ Grado: _____

Sede: _____ Edad: _____

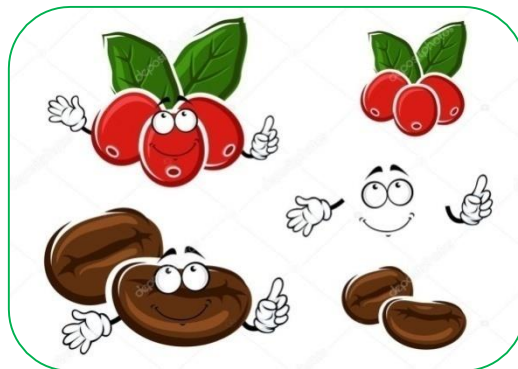
Situación 2

Cosechando frutos de café

Objetivo

Resolver, generalizar y proponer problemas en situaciones aditivas de cambio y comparación

La comunidad del corregimiento de La Marina tiene como principal actividad económica el Café. Las familias conocen y trabajan todos los procesos que tiene que ver con el cultivo y cosecha de café, como lo es la siembra, el abono y mantenimiento del mismo, De esta manera hay un relevo generacional en el campo que es tan importante en la agricultura del país.



Actividad 1

Lee con atención los problemas propuestos y contesta cada una de las preguntas en el lugar indicado.

- A. En la finca Miralindo uno de los trabajadores recolecta el día lunes 123 kilos de café. Si con 15 de esos kilos paga la comida, ¿Cuántos kilos aún le quedan para el pago?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/ _____

B. Carlos recolecta 98 kilos de café el día sábado y el domingo 89. ¿Cuántos kilos de café recolectó en total?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/ _____

Plantea y resuelve un problema similar a los anteriores haciendo uso de sumas o restas

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

C. Cristian recolecta en la semana 111 canastos con café, si algunos de ellos están pintones y 74 canastos están maduros. ¿Cuántos canastos con café pintón recolectó Cristian?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/_____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/_____

D. Juan José recolectó 89 kilos de café, si quiere completar la carga que son 125 kilos. ¿Cuántos kilos le faltan a Juan José para completar una carga?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

- E. Durante la semana se recolecta cierta cantidad entre café maduro y pintón, si de ellos 116 kilos son de café pintón y 297 son de café maduro. ¿Cuántos kilos de café se recogieron en total?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

- F. Felipe trabaja los fines de semana en la recolección de café, el día sábado recolecta algunos kilos de café mientras que el domingo recolecta 108 kilos. Si en total recolectó 194 kilos de café, ¿cuántos kilos recolectó Felipe el día sábado?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/ _____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/ _____

G. En tiempo de cosecha Néstor recolecta al día 94 kilos de café y Andrés 76 kilos.

¿Cuántos kilos más recolecta Néstor que Andrés?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/ _____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/_____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/_____

H. Eduardo en la primera semana recolectó 375 kilos de café mientras que en la segunda solo recolectó 294 kilos. ¿Cuántos kilos menos recolecta en la segunda semana comparados con la primera?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/_____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/_____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/_____

- I. Andrés recolecta 209 kilos de café y Pedro recolecta 77 kilos más que Andrés.
¿Cuántos kilos de café recolecta Pedro?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/_____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/_____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/_____

J. Camilo recolecta en la semana 226 canastos de café y Alvaro recolecta 29 canastos menos que Camilo ¿Cuántos canastos de café recolecta Alvaro?

Antes de dar solución a la pregunta, escribe los datos que encontraste en el problema.

ESPACIO PARA RESOLVER

R/_____

¿Qué proceso u operación hiciste para poder resolver el problema? Explica

R/_____

¿Qué cantidad pide encontrar el problema?

R/_____

MOMENTO PARA REFLEXIONAR

1. Lee nuevamente el problema A de cada situación y observa si tienen algo en común. Describelos

2. Las palabras *añadir, agregar, aumentar, ganar, recibir, le regalan* ¿Con qué operación las relacionas?

3. Proponga un problema que involucre una de estas palabras *añadir, agregar, aumentar, ganar, recibir, le regalan*.

4. Observe el problema B de cada situación y explique qué tienen en común.

5. Las palabras *quitar, perder, gastar, regalar, la diferencia*, ¿Con qué operación las relacionas?

6. Proponga un problema que involucre una de estas palabras, *perder, gastar, regalar, la diferencia*.

7. Observe el problema G de cada situación y explique qué tienen en común.
