



**UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL DESDE EL
ENFOQUE DE LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN EN LA
EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA**

Presentado por:

LEYDI VIVIANA GONGORA SINISTERRA

Código: 1352514

BETSY ROCIO VALENCIA PORTOCARRERO

Código: 1352661

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
BUENAVENTURA VALLE DEL CAUCA**

2018



**UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL DESDE EL
ENFOQUE DE LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN EN LA
EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA**

Presentado por:

**LEYDI VIVIANA GONGORA SINISTERRA
BETSY ROCIO VALENCIA PORTOCARRERO**

**Proyecto de grado para optar por el título de Licenciadas En Educación Básica Con
Énfasis en Matemática**

Asesor:

JOHNNY VANEGAS DÍAZ

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
BUENAVENTURA VALLE DEL CAUCA**

2018

TABLA DE CONTENIDO

Resumen	7
Introducción	8
CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	11
1. Contextualización y formulación del problema.....	12
1.1 Objetivos.....	17
1.1.1 General.....	17
1.1.2 Específicos.....	17
1.2 Justificación	18
1.3 Antecedentes	21
CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	28
2.1 El enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EpC).....	29
2.1.1 Elementos de la EpC	31
2.1.2 Dimensiones de la EpC	34
2.1.3 Niveles de Comprensión	37
2.2 Referentes en el estudio de la función lineal	41
2.2.1. Referente didáctico.....	41
2.2.2. Referente curricular.....	46
2.2.3. Referente matemático.....	50
CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN	57
3.1 Marco metodológico de la investigación.....	58
3.2 Diseño de la investigación.....	59
3.2.1. Contexto de estudio.....	59
3.2.2. Sujetos participantes.....	60
3.2.3. Instrumentos de recolección de datos.....	61
3.3 Categorías de análisis	64
3.4 Fundamentación teórica de las situaciones.....	67
3.5 Diseño de las situaciones y tareas.....	73
3.5.1. Situación 1: Aprendiendo a preparar un buen café	74
3.5.2. Situación 2: El aeropuerto	77
3.6. Análisis a priori de las situaciones	81

3.6.1. Aprendiendo a preparar un buen café: fase de exploración.....	82
3.6.2. El aeropuerto: fase de investigación guiada	89
CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	97
4.1 Introducción.....	98
4.2 Análisis posteriori de las situaciones.....	100
4.2.1. Análisis a posteriori de la situación 1: Aprendiendo a preparar un buen café	100
4.2.2. Análisis a posteriori de la situación 2: El aeropuerto	124
4.3 Consideraciones finales del análisis posteriori	153
4.4 Conclusiones con respecto al cumplimiento de los objetivos	155
4.5 Recomendaciones	160
Referencias bibliográficas	163
Anexos.....	166

TABLA DE IMÁGENES

Ilustración 1 Representación gráfica de una función lineal.....	51
Ilustración 2 Red Conceptual	52
Ilustración 3 Institución Educativa Teófilo Roberto Potes.....	60
Ilustración 4 Ubicación de los recursos tecnológicos en el salón de clases	62
Ilustración 5 Inicio de la situación "Aprendiendo a preparar un buen café"	101
Ilustración 6 Análisis de tarea 1.	102
Ilustración 7 Análisis de la Tarea, momento dos.....	104
Ilustración 8 Análisis de la Tarea 1, momento 3.	105
Ilustración 9 Análisis de la tarea 2.....	106
Ilustración 10 Análisis de la tarea2, momento 2	108
Ilustración 11Análisis de la tarea 2, momento 3.	108
Ilustración 12 Análisis de la tarea 2, momento 4	109
Ilustración 13Análisis de la tarea 2, momento 5	109
Ilustración 14 Análisis de la tarea 2, Ítem a	111
Ilustración 15Análisis de la tarea 2, ítem a momento2	111
Ilustración 16 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 3.....	112
Ilustración 17Ilustración 17 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 4	113
Ilustración 18 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 5.....	113
Ilustración 19 Análisis de la tarea 2, ítem b	115
Ilustración 20 Análisis de la tarea 2, ítem b momento 2	115
Ilustración 21Análisis de la tarea 2, ítem b momento 3	116
Ilustración 22 Análisis de la tarea 3.....	117
Ilustración 23 Análisis de la tarea 3, momento 2	117
Ilustración 24 Análisis de la tarea 3, momento 3	119
Ilustración 25 Análisis de la tarea 3, momento 4	120
Ilustración 26 Análisis de la tarea 3, momento 5.	121
Ilustración 27 Análisis de la tarea3, momento 6	122
Ilustración 28 Tarea 1 ítem a	124
Ilustración 29 Tarea 1 ítem a momento 1	125
Ilustración 30 Tarea 1ítem a, momento 2	125
Ilustración 31Tarea 1 ítem a, momento 3	126
Ilustración 32Tarea 1 ítem a, momento 4.....	126
Ilustración 33Tarea 1ítem a, momento 5.....	126
Ilustración 34 Tarea 1 ítem b.....	127
Ilustración 35Tarea 1 ítem b momento 2.....	127
Ilustración 36 Tarea 1 ítem b momento 3.....	128
Ilustración 37Tarea 1 ítem b momento 4.....	128
Ilustración 38 Tarea 1 ítem b momento 5.....	129
Ilustración 39Tarea 1 ítem c	129
Ilustración 40 Tarea 1 ítem c momento 2	130

Ilustración 41Tarea 1 ítem c momento 3.....	130
Ilustración 42Tarea 1 ítem c momento 4.....	131
Ilustración 43Tarea 1 ítem c momento 5.....	132
Ilustración 44Tarea 2 ítem a	133
Ilustración 45 Tarea 2 ítem a momento 2	134
Ilustración 46 Tarea 2 ítem a momento 3.....	135
Ilustración 47 Tarea 2 ítem b.....	136
Ilustración 48 Tarea 2 ítem b momento 2.....	137
Ilustración 49 Tarea 2 ítem b momento 3.....	138
Ilustración 50 Tarea 3 ítem a	140
Ilustración 51Tarea 3 ítem a momento 1	141
Ilustración 52 Tarea 3 ítem b.....	142
Ilustración 53 Tarea 3 ítem b momento 2.....	143
Ilustración 54 Tarea 3 ítem c	144
Ilustración 55 Tarea 3 ítem c momento 1	145
Ilustración 56 Tarea 4 ítem a	146
Ilustración 57 Tarea 4 ítem a momento 1	147
Ilustración 58 Tarea 4 ítem a momento 2	147
Ilustración 59 Tarea 4 ítem a momento 3.....	148
Ilustración 60Tarea 4 ítem b.....	149
Ilustración 61Tarea 4 ítem b momento 1.....	149
Ilustración 62 Tarea 4 ítem b momento 2.....	150
Ilustración 63Tarea 4 ítem c	150
Ilustración 64 Tarea 4 ítem c momento 1	151
Ilustración 65 Tarea 4 ítem c momento 2	152



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO
DE GRADO

Programa Académico Lic. Educación Básica con Enfoque M.

Fecha

Código del programa: 3469

Resolución del programa: _____

Día	Mes	Año
10	04	2018

Título del Trabajo o Proyecto de Grado:
Una aproximación al concepto de función lineal desde el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión en la Educación Básica Secundaria

Se trata de:

Proyecto ☐

Informe Final ☒

Director

Johnny Alfredo Vanegas Díaz

Nombre del Primer Evaluador

Ligia Amparo Torres Rengifo

Nombre del Segundo Evaluador

Hernán Andrés Pelacios Angulo

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
<u>Leidy V. Góngora</u>	<u>1352514</u>	<u>3469</u>	<u>marcesy0117@gmail.com</u>	<u>3173579707</u>
<u>Betsy R. Valencia</u>	<u>1352661</u>	<u>3469</u>	<u>betsyrocio14@gmail.com</u>	<u>3153235805</u>

Evaluación

Aprobado



Meritorio



Laureado



Aprobado con recomendaciones



No Aprobado



Incompleto



En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado



Primer Evaluador



Segundo Evaluador



En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Agradecimientos

Primero que todo darle infinitas gracias a Dios por permitirnos haber llegado hasta este momento de nuestras vidas, a nuestros padres por su apoyo constante e incondicional.

A los profesores y compañeros del Área de Educación Matemática de la Universidad. Nuestros más sinceros agradecimientos al profesor Johnny Vanegas Díaz, quien a pesar de sus múltiples ocupaciones decidió compartir su tiempo, conocimiento y paciencia para acompañarnos y orientarnos en la consolidación de este trabajo.

A los profesores Ligia Amparo Torres Rengifo y Hernán Andrés Palacios Angulo, quienes aceptaron evaluar el trabajo de grado, quienes con sus comentarios y sugerencias nos permitieron enriquecer nuestro conocimiento. Y a la Universidad del valle por habernos brindado la oportunidad de creer profesionalmente.

Resumen

La presente indagación surge como resultado de una aproximación al concepto de función lineal desde el enfoque teórico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). Particularmente, esta indagación emerge a partir de la reflexión sobre los procesos de enseñanza de este concepto, en un marco contextual definido –la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes del Distrito de Buenaventura Valle del Cauca – en el que se han identificado ciertas dificultades de orden matemático, didáctico y curricular que no favorecen, por parte de los estudiantes, la *comprensión* de la función lineal. Para abordar esta problemática, se propone un conjunto de tareas asociadas al desarrollo del pensamiento variacional (MEN, 2006) que se enriquecen desde las directrices de la EpC, favoreciendo la caracterización de la variación y el cambio en diversos contextos, y creando así un puente de comprensión significativa para atender algunos aspectos centrales relacionados con el concepto matemático de interés, en un grupo de estudiantes de noveno grado, pertenecientes a la citada Institución Educativa.

Dentro de los resultados obtenidos se pudo constatar la riqueza del estudio de conceptos asociados con la función lineal, desde el enfoque de la EpC, a través de situaciones dinamizadoras, sin necesidad de acudir directamente al uso de fórmulas o definiciones que muy poco aportan a la comprensión del concepto en todo su esplendor.

Palabras claves: Función lineal, Enseñanza para la comprensión, dimensiones y niveles de comprensión.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la *Línea de formación Didáctica de las Matemáticas* del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Esta propuesta surge como resultado de algunas preocupaciones y problemáticas recurrentes en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal. Se enfoca en la búsqueda, diseño e implementación de nuevas propuestas para enriquecer el conocimiento del estudiante bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) y así proporcionar en ellos la interpretación y resolución de problemas en diversos contextos (escolares y extraescolares).

Diversas investigaciones¹ en Educación Matemática muestran dificultades recurrentes en la comprensión del concepto de función lineal, muchas de ellas relacionadas con: a) algunas formas de su representación y aplicación, b) las múltiples conexiones que ésta sostiene con otros conceptos como el álgebra y el cálculo, c) la complejidad formal de su definición. En el marco de este panorama se propone, principalmente, caracterizar elementos que evidencien la comprensión del concepto de función lineal cuando se trabaja con tareas enmarcadas en el enfoque de la EpC.

Esta propuesta didáctica pretendió desarrollar competencias matemáticas (la comunicación, razonamiento y resolución de problemas) en relación con el concepto de función lineal, dado que la forma de enseñarse generalmente se hace de manera mecánica, enfocada en la memorización y aplicación de fórmulas, las cuales no cobran sentido para los estudiantes. Como afirma García (2014), comúnmente en clases de matemáticas los

¹ Investigaciones como la de: Roldan (2013), Grueso y Gonzáles (2016), Mosquera (2015), Sánchez (2016).

estudiantes no aprenden a realizar operaciones sin comprender realmente lo que están haciendo, solo siguen unas instrucciones guiadas por el docente o libros de textos, con el propósito de aprobar un examen, una prueba o cumplir con tareas o trabajos.

En relación con lo anterior, se presenta el concepto de función lineal a partir del desarrollo del pensamiento variacional, teniendo en cuenta lo estipulado por los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 1998, 2006) y diferentes investigaciones (e.g., Rivera y Sánchez, 2012), destacando este conocimiento como componente principal para el reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos registros de representación.

De esta manera, se propone un conjunto de tareas apoyadas en el enfoque de la EpC, que les permitan a los estudiantes adquirir una comprensión significativa, que implique el desarrollo de herramientas conceptuales y procedimentales para potenciar las formas de representar, comunicar y argumentar sobre la base del concepto matemático.

Frente a lo expuesto anteriormente, en la presente investigación se esperó que los estudiantes fortalecieran y dinamizaran nuevos conocimientos y que desarrollen diversos desempeños de comprensión en relación al concepto de función lineal. Igualmente, se buscó que mediante la implementación del enfoque de la EpC se desarrolle el surgimiento de nuevos elementos metodológicos y teóricos que mejoren y optimicen la formación profesional de los docentes, así como las dificultades de la comprensión del concepto de función lineal, por parte de los estudiantes.

Para efectos de organización, este trabajo de grado se ha estructurado en cuatro capítulos. **En el primer capítulo**, se discuten los aspectos generales de la investigación, los cuales abordan la descripción del problema, su justificación, los objetivos y algunos antecedentes. En este sentido, se describen algunas problemáticas y preocupaciones que subyacen al concepto de función lineal en el marco escolar y se revisan múltiples investigaciones relacionadas con el problema y su posible tratamiento.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes conceptuales de la investigación, los cuales incluyen la presentación de la EpC como el enfoque teórico de base y los referentes: matemático, curricular y didáctico que sirven de sustento para el diseño de la propuesta de aula.

En el tercer capítulo, se expone la parte metodológica de la investigación, enfocada en los elementos de un estudio de casos de tipo descriptivo, debido a las posibilidades para describir características de cada momento particular, como el contexto y las variables que definen la situación. Adicionalmente, se presenta el procedimiento de la investigación, los instrumentos de recolección de datos, el contexto del caso, los sujetos participantes, las tareas diseñadas y las perspectivas esperadas en el desarrollo de las mismas.

Finalmente, **en el cuarto capítulo**, se muestra el análisis de los resultados obtenidos durante la puesta en escena de las tareas implementadas y la producción del conocimiento expuesto por los estudiantes a través del enfoque de la EpC. Adicionalmente, se mencionan algunas consideraciones y recomendaciones finales, así como las conclusiones que se derivan de las evidencias del análisis y de lo aprendido en la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1. Contextualización y formulación del problema

En la actualidad existe una amplia gama de investigaciones que documentan diversas problemáticas asociadas con la *comprensión* del concepto de función, por parte de los estudiantes (Díaz, 2013; Bacallao y Boulet, 2011). Al respecto, Díaz (2013) menciona que tales dificultades se ven acreditadas por la complejidad misma del concepto y por sus diversas representaciones y conexiones con otros conceptos. En palabras de Díaz (2013, p.13):

El concepto de función es uno de los conceptos fundamentales en la matemática, pero también es uno para el cual los estudiantes tienen problemas para desarrollar una comprensión satisfactoria. Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto parecen centrarse en su complejidad y generalidad. Ya que presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones, además de una variedad de conceptos asociados que se manifiestan con diferentes niveles de abstracción.

Por su parte, Bacallao y Boulet (2011), hacen mayor énfasis en las dificultades que presentan los estudiantes para poner en uso el concepto en ejercicios de aplicación práctica. Textualmente señalan que:

...el estudiante ha demostrado en diferentes instrumentos evaluativos aplicados que es capaz de reproducir este contenido, pero no de resolver ejercicios de aplicación referentes al tema, como tampoco es capaz en su gran mayoría de resolver ejercicios creativos.

De esta manera se puede entrever que pese a ser un concepto fundamental en la educación matemática secundaria, el aprendizaje de la función es una tarea compleja para los estudiantes. Sin embargo, la situación actual de enseñanza, en muchos casos, no ayuda a aliviar el problema al privilegiar un trabajo de intervención en el aula centrado en una perspectiva estática conjuntista, en lugar de una visión dinámica, enmarcada en las relaciones de dependencia y cambio (Grueso y Gonzáles, 2016).

La situación mencionada anteriormente se corresponde ampliamente con el contexto actual de enseñanza desarrollado en la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes, según experiencias previas como docentes en dicha institución. Particularmente a lo que concierne al estudio de la función lineal.

En primer lugar, los docentes encargados de enseñar este concepto, proponen un trabajo que se limita a actividades de correspondencia a partir del uso de tres registros de representación: a) el simbólico, b) el tabular (el llenado de tablas de doble entrada) y c) el gráfico (en el plano cartesiano). El problema de esto, además de la visión estática que plantea para el tratamiento de la función lineal, es que los docentes hacen énfasis en el registro algebraico, creando mayores dificultades para que los estudiantes logren establecer algún vínculo entre los registros de representación enseñados (Hitt, 2003). Como consecuencia, el conjunto de *tareas* que proponen estos docentes para la enseñanza de la función lineal, se limita al trabajo algebraico y algorítmico (Roldan, 2013), marginando aquellas *tareas* relativas a contextos de interpretación y análisis, que posibilitan la construcción significativa del concepto (Azcárate, 1990; Bacallao y Boulet, 2011).

En segundo lugar, la mayoría de los docentes de la institución, utiliza como fuente principal para sus clases, un libro de texto que privilegia una mirada estática de la función lineal. Esto no quiere decir ausencia de tareas de aplicación. Sin embargo, el énfasis de las mismas, remite al uso de estrategias estandarizadas que nada o poco tienen que ver con la necesidad de introducir el concepto para identificar comportamientos de variación entre magnitudes (Grueso y Gonzáles, 2016).

Finalmente, se hace evidente la ausencia de trabajo con contextos de otras áreas disciplinares, tales como: biología y química. Básicamente hay ausencia de contextos reales

para los estudiantes, que puedan diversificar o generalizar aspectos matemáticos y prácticos en la resolución de situaciones problema. De hecho, la función lineal suele enseñarse desligada de la “realidad” y del entorno de los estudiantes, lo que lleva trágicamente al desinterés y apatía por el proceso de aprendizaje de este concepto. Lo ideal es que en este proceso, el estudiante relacione el contexto con lo que aprende y lo que ya ha aprendido (conocimientos previos) y así, fomentar un aprendizaje significativo, posibilitando una mejor comprensión (Rioseco y Romero, 2007).

Además, las tareas propuestas por los docentes poco o nada tienden a considerar el papel que juegan los conocimientos previos de los estudiantes en la transformación de sus creencias y en la comprensión de conceptos y procedimientos asociados con lo lineal (Villegas y Pereira, 2015). Esto se corresponde con las directrices del MEN (1998, p.87) al señalar que los “indicadores de ejercitación y aplicación, y orientaciones para observarlos, se refieren a las posibilidades para realizar actividades que exijan aplicar las concepciones o los conceptos que poseen los alumnos. Se incluyen aquí la ejercitación de algoritmos de operaciones y relaciones y la solución de problemas de rutina y de problemas prototipo”.

De acuerdo a las problemáticas establecidas, es pertinente indagar alrededor de los aspectos fundamentales que inciden en la comprensión del concepto de función lineal y buscar nuevas alternativas que den solución a las dificultades que presentan los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. Por eso, es necesario que las formas de intervención en el aula para abordar el concepto de función lineal incluyan: diferentes alternativas de representar y comunicar el conocimiento, trabajo con múltiples situaciones que den lugar al desarrollo de habilidades para usar el conocimiento y, mayor importancia a los conocimientos previos de los estudiantes; puesto que a partir de estos aspectos,

eventualmente se pueden mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal.

Al margen de las consideraciones anteriores, este trabajo de investigación, reconoce las posibilidades que ofrece el enfoque de la *Enseñanza para la Comprensión* (EpC), dado que permite “estructurar la investigación para ayudar a los docentes a analizar, diseñar, poner en práctica y evaluar prácticas centradas en la comprensión de los estudiantes” (Mejía, 2011, p. 5). No se trata de un marco explicativo, sino de uno de reflexión que ofrece una guía para los docentes en el desarrollo de buenas intervenciones. Así pues, por medio de la EpC el papel del docente pasa de ser un simple transmisor de conocimientos para convertirse en un facilitador y orientador del mismo, siendo participe del proceso de aprendizaje junto con el estudiante. Del mismo modo el papel del estudiante se transforma al pasar de un mero receptor a un constructor de conocimientos matemáticos y de procesos propios de la matemática (Socarras, 2008).

De esta manera, una hipótesis de trabajo de esta investigación considera que para que el concepto de función lineal sea comprendido de una forma amplia durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, se deben tener en cuenta las diferentes dimensiones que proponen la EpC: *contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación*. Dimensiones que son útiles para evidenciar la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes (Stone, 1999).

Estas cuatro dimensiones se pueden articular a partir de tareas que abordan formas de representar el conocimiento al darle relevancia a los conocimientos previos de los estudiantes y al proponer trabajo en diferentes situaciones, al tiempo que ayuda a los estudiantes a validar lo que están aprendiendo. Todo esto puede conducir a nuevas formas

de intervención en el aula para enseñar la función lineal, que permita caracterizar, dinamizar y potenciar la *comprensión* del concepto de función lineal.

Con base en los elementos descritos anteriormente, la presente investigación se centra en responder la siguiente pregunta:

¿Cómo construir una experiencia de aula desde la (EpC) que permita evidenciar la comprensión del concepto de función lineal en estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes?

1.1 Objetivos

1.1.1 General

- Caracterizar elementos que evidencien la comprensión del concepto de *función lineal* cuando se trabaja con la resolución de tareas enmarcadas en la EpC con estudiantes de grado noveno (9°) de la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes.

1.1.2 Específicos

- Determinar elementos teóricos y metodológicos del enfoque de la EpC que puedan ser empleados para la construcción de una experiencia de aula que favorezca la comprensión del concepto de función lineal.
- Articular diferentes referentes conceptuales en la configuración de un diseño desde la EpC que permita estudiar los *niveles de comprensión* de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes, en torno al concepto de función lineal.
- Identificar los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes de grado noveno de Institución Educativa Teófilo Roberto Potes, a través de la implementación y análisis del diseño de una propuesta en torno a la función lineal.

1.2 Justificación

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) afirma que los procesos de variación se deben dar desde diversos contextos, tales como: la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias, a partir de actividades como: la exploración, manipulación, generalización de patrones numéricos, geométricos, de leyes, reglas y otros, que potencien el *pensamiento variacional*. Entendiendo que, el pensamiento variacional es un conglomerado de conceptos matemáticos como: variables, razones de cambio, *funciones* y otros. Este trabajo centra la atención en la enseñanza de la función, especialmente, *función lineal* puesto que este es un concepto fundamental en la enseñanza de la educación secundaria, al servir de base para comprender otros conceptos matemáticos; el cálculo numérico, el álgebra y el cálculo diferencial e integral, entre otros.

Es importante también tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y sociales y de las matemáticas mismas. (MEN, 2006. p,68)

De esta manera, los elementos que respaldan la importancia de este trabajo, se relacionan en primera instancia, con el estudio de la *función lineal*. Partiendo de una perspectiva dinámica que incluya diversos fenómenos y contextos, dado que el pensamiento variacional posibilita su aproximación desde esta perspectiva, lo cual según, Vasco (2003) dinamiza el concepto abstracto, ya que resalta la importancia de los procesos de variación en contextos curriculares y extracurriculares, permitiendo analizar los cambios de ciertas magnitudes implicadas.

Así mismo, se ha contemplado en numerosas investigaciones (Sánchez, 2016; Fernández, 2014; Roldán, 2013) la persistencia de ciertas dificultades asociadas con la

comprensión que presentan los estudiantes ante este concepto matemático, por ende, se hace necesario profundizar en aquello que está obstaculizando la comprensión del concepto de función, con la finalidad de hacer nuevas propuesta de intervención en el aula que incluyan su diseño y aplicación. Al respecto, Sánchez (2016) menciona la necesidad de darle mayor atención al trabajo con tareas que involucren diversos registros de representación para el concepto matemático de interés. Aunque Carvajal y Vega (2014) mencionan que la comprensión del concepto no depende únicamente del reconocimiento de diversas representaciones del mismo objeto matemático por parte de los estudiantes, sino que también es importante que los estudiantes vinculen esas representaciones.

Podría decirse con Raymond Duval que, si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido. (MEN, 2006. p, 54)

Con base en las investigaciones anteriormente mencionadas, especialmente la de Roldán (2013) y a la experiencia como docentes; es válido afirmar que en las escuelas el concepto de función es enseñado como una correspondencia, bien sea entre números, variables o magnitudes, presentado por la idea de relacionar dos de estos elementos de acuerdo con un determinado criterio, donde no se contemplan las relaciones entre representaciones. Sin embargo, queda claro que se necesita una posición diferente. Es así, que se piensa en una propuesta para favorecer la *comprensión* del concepto de *función lineal* en la educación secundaria, desde una perspectiva dinámica.

En segunda instancia otro aspecto, que resalta la importancia de este trabajo, es el *enfoque de la Enseñanza para la Comprensión*, puesto que este articula elementos curriculares y didácticos, centrándose en *comprender* un concepto de manera más cómoda, pues permite la reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así mismo que el estudiante se apropie del concepto matemático no como obligación sino como exploración,

de manera que se le facilite poner en práctica lo comprendido asociándolo a su contexto cotidiano. Tal como lo expresa el MEN (1998. p, 81) *“el aprendizaje de procedimientos o “modos de saber hacer” es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana”*.

Igualmente, Stone (1999. p, 14), afirma que el enfoque de la enseñanza para la comprensión es *“una herramienta cuyo propósito es diseñar y dirigir las prácticas de aula que promuevan la comprensión y reflexionar sobre ella”*. De acuerdo con esto, este enfoque nos permite proponer tareas que se puedan aplicar en la clase con el propósito de que los estudiantes comprendan el tema que se le expone, pero para el diseño de esta se debe tener en cuenta cuatro dimensiones (Contenido, método, propósito, formas de comunicación) y otros factores estructurales y curriculares del enfoque que se detallarán más adelante, de modo que permitan la reflexión de la definición, propiedades, gráficos, axiomas, representaciones, aplicaciones y otros factores que esperamos relacionarlos con los quehaceres cotidianos que este permita, para conllevar al estudiante a una *comprensión* más significativa del concepto matemático.

En este sentido, este trabajo pretende contribuir al diseño, gestión y evaluación de tareas que mejoren la comprensión del concepto de función lineal, ya que el marco teórico de la *EpC*, permite despertar el interés frente al concepto matemático, dado que se parte de los conocimientos previos, experiencias e intereses de los estudiantes, de manera que el conocimiento se relacione, se transforme y se construya significativamente.

En concordancia con las ideas señaladas, la justificación de la presente propuesta se interesa en diseñar tareas asociadas al concepto de función lineal desde el enfoque de la *EpC*, de tal forma que se evidencia que la implementación de este enfoque permita plantear

en las aulas de clases actividades dinámicas que favorezcan la comprensión del concepto de función lineal.

1.3 Antecedentes

En este apartado se describe un conjunto de antecedentes que se relacionan con la presente propuesta. Para ello, se toma como referencia principal, aquellas investigaciones que se enmarcan en el enfoque de la EpC y como fuente secundaria, algunos trabajos cuyo objeto de estudio involucra las funciones, particularmente la función lineal.

Se revisa una Tesis de maestría publicada por la Universidad Nacional de Colombia, trabajo elaborado por Mosquera (2015), titulado: *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real, en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito*. Propuesta que nace de la necesidad de reflexionar sobre las prácticas pedagógicas en el área de las matemáticas, donde se reflejan las dificultades de la *comprensión* del concepto de función cuadrática, conllevando a los estudiantes a la apatía, reprobación y bajos resultados en las pruebas de la disciplina matemática.

Por ello, Mosquera (2015), se planteó el siguiente interrogante; *¿Cuáles estrategias permiten diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas de variable real, en el marco de la EpC que contribuya a mejorar el pensamiento variacional?* Pensando así en una propuesta didáctica que le facilitarán a los estudiantes desarrollar mayores habilidades cognitivas para enfrentarse a nuevas situaciones de aprendizaje, permitiéndoles *comprender* ejes temáticos de la función de segundo grado, a partir de variables reales que cobrarán sentido dentro de fenomenologías de la vida

cotidiana tales como: el movimiento de cuerpos, optimación de recursos, etc., Por ello se adoptó la metodología de la EpC, dado que posibilita ampliar el conocimiento matemático desde una conjugación de elementos, tales como: partir de los conocimientos previos, exploraciones, investigaciones guiadas, elementos curriculares, etc., factores que apuntan a consolidar el saber matemático desde un aspecto familiarizado hasta las concepciones científicamente aceptadas. Esta propuesta hizo énfasis en la modelación, resolución y el planteamiento de problemas e igualmente en la ejercitación de procedimientos analíticos, dado que este proceso permite vincular la actividad matemática con situaciones reales del estudiante, componentes que permiten la *comprensión* de los conceptos matemáticos. En la conclusión se afirma que, después de estudiar los aspectos fundamentales del marco de EpC y observar las falencias presentadas por los estudiantes, este enfoque sirve como factor importante, ya que permite un uso metodológico de enseñanzas alternativas, para el fortalecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la función de segundo grado, la aplicación de esta propuesta mostró resultados que favorables en las pruebas, permitiendo desarrollar en los estudiantes habilidades que mejoraron sus competencias frente a este concepto matemático.

Esta investigación se torna importante para nuestro trabajo dado que presenta una propuesta para mejorar el concepto de la función de segundo grado, desde el enfoque de la *Enseñanza para la Comprensión*, permitiendo así enriquecer nuestro campo teórico y metodológico en la propuesta a diseñar, pues este trabajo recoge desde aspectos esenciales de nuestro marco teórico e igualmente resalta la importancia de los aspectos curriculares que se deben tener en cuenta al momento de impartir un conocimiento matemático.

A su vez, se considera la investigación elaborado por Roldan (2013), *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grado de educación básica*. Esta investigación se centró en aspectos que inciden en la consolidación del concepto de función desde lo histórico, disciplinar, pedagógico y didáctico, señalando la importancia que poseen cada uno de estos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dado que se propone una intervención didáctica que le permite a los estudiantes una aprehensión el concepto de función lineal a partir de un análisis de situaciones con contextos matemáticos y cotidianos, esto con la finalidad de potenciar el desarrollo del concepto de función lineal en básica secundaria. Investigación que enfatizó la propuesta en una visión ajustable y útil del conocimiento matemático para desarrollar algunos elementos del pensamiento variacional, creando situaciones de experimentación caracterizadas por medición, estimación, el conteo y las diferentes formas de representación del concepto matemático. Finalmente, Roldan (2013), concluye que para que exista una aprehensión del concepto de función lineal el estudiante debe alejarse de la definición formal y partir de creaciones de modelos que le permitan relacionar los datos obtenidos con las teorías propias que subyacen del proceso, en otros términos, se refiere a que los estudiantes no deben aprender de forma memorística sino más bien, deben plantearseles diferentes situaciones que generen modelos de función lineal y den cabida a los elementos teóricos del concepto.

Se examina este trabajo puesto que permite evidenciar los aspectos curriculares que indiquen en el concepto de función lineal, elementos que son relevantes para-el desarrollo de la propuesta. Igualmente, con esta investigación se permite contrastar lo curricular con

situaciones del contexto, ya que se brinda la posibilidad de pensar en la *comprensión* del concepto a partir de la construcción de modelos asociados con la vida real.

Igualmente, se estudió una Tesis de maestría, publicada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, documentada por Sánchez (2016), *Conceptualización de función lineal y afín: una experiencia de aula*. Investigación que manifiesta las dificultades que poseen los estudiantes en cuanto a la *comprensión* de este tipo de funciones. Al señalar que en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, se hace evidente la complejidad de interpretación, dificultad para reconocer y articular las diferentes representaciones, así como para modelar situaciones o fenómenos.

Por ello el propósito general de la investigación, se centró en posibilitar en los estudiantes los objetos mentales de variación y dependencia, factores fundamentales en la *comprensión* del concepto de función lineal y afín, esto a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, con el fin de orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje desde una intervención en el aula, y a su vez identificando y caracterizando la evolución progresiva de la *comprensión* de los estudiantes durante la implementación de las tareas ajustadas, describiendo logros y dificultades durante dicha intervención.

Esta investigación nos permite reconocer las dificultades, que presentan los estudiantes en la *comprensión* de este tipo de funciones, relacionadas con la interpretación y el reconocimiento de la articulación de las diferentes representaciones. De igual modo, este trabajo permite hacer un contraste entre estas dos concepciones y construir nuestro referente matemático ya que resalta la importancia de señalar la diferencia entre ambos conceptos matemáticos.

Igualmente se examinaron algunos trabajos publicados por la Universidad del Valle, dos de pregrado y uno de maestría, los cuales enfocaron sus investigaciones al aprendizaje del concepto de función.

Fernández (2014), presenta el trabajo: *Análisis de algunas dificultades en la comprensión de la sobrejectividad asociadas a la conversión entre los registros cartesianos y algebraicos*. Esta investigación se enfatizó en un análisis de las dificultades que se presentan en la comprensión de la sobrejectividad como una propiedad de las funciones de variable real, apoyado en los trabajos expuestos por Raymond Duval, el cual aborda la adquisición de conocimientos por medio de los registros semióticos de representación, centrado específicamente en las unidades significantes en dos representaciones de las funciones de variable real: la representación analítica y la representación gráfica. Este trabajo se realizó con estudiantes de sexto y séptimo semestre del programa de licenciatura en Educación Matemática. Fernández (2014), indicó que una de las dificultades frente a esta problemática es que, muchos estudiantes conciben una representación específica de dichos objetos matemáticos, pues bien puede ser por comodidad en el manejo de las unidades que la conforman o porque no están conscientes de la existencia de otro tipo de representaciones, frente a este factor surgió la postura de afirmar que la comprensión de un objeto matemático requiere que se distingan variadas representaciones; más aún, es necesario que se pueda pasar de una representación a otra, operación cognitiva que requiere no solo conocer los sistemas semióticos en los cuales se forma cada representación del objeto en cuestión, sino además poder coordinarlos.

La revisión de este trabajo, permitió poner de manifiesto la importancia de la coordinación de los diferentes registros de representación (Duval, 2004), al tratar un objeto

matemático, dado que este es una de las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan al concepto de función, teniendo en cuenta lo estipulado por el MEN, aspectos que resultan importantes para considerarlos en el diseño de las tareas a proponer, para apuntar a una comprensión significativa en nuestra propuesta.

Finalmente, se examinó el trabajo: *El concepto de función como covariación en la escuela*. Elaborado por Grueso y Gonzáles (2016), investigación que desarrolló una propuesta para el estudio de la función a través de situaciones de covariación dentro de eventos dinámicos, propuesta dirigida a estudiantes de noveno grado, la cual intentó potenciar, el desarrollo del pensamiento variacional. Teniendo en cuenta lo propuesto por el MEN (2006) ya que el pensamiento variacional se caracteriza por el estudio de la variación y el cambio en diferentes contextos, posibilitando en el proceso de enseñanza especialmente en el eje temático de la función una visión de dependencia y cambio sin la necesidad de conocer las fórmulas o definiciones.

Este último antecedente es tomado en consideración especialmente para construir el diseño de las propuestas, dado que nos permite ver la necesidad elaborar una propuesta que adopte una visión dinámica al momento de impartir el concepto de función, sin desligarlo de lo concertado por el MEN.

En síntesis, las investigaciones de Mosquera (2015), Roldan (2013), Sánchez, (2016), Fernández (2014), y de Grueso y Gonzáles (2016), muestran que el concepto de función debería trabajarse de manera dinámica, es decir trabajar el concepto en contextos curriculares y extracurriculares, dado que esto permite facilitar la *comprensión* del concepto matemático, respecto con lo señalado anteriormente, estos antecedentes son importantes para nuestro trabajo porque se enmarcan en la *Propuesta de aula para la*

enseñanza de la Función Lineal desde el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión, principalmente la investigación de Mosquera (2015) y Grueso y Gonzáles (2016), aportando a la metodología pues enriquece la *comprensión* desde un aspecto dinámico ya que a partir de esta se evidencia una mejora aprehensión del concepto de función, mientras que la de Roldan (2013), permiten concebir la función desde un aspecto esencial en el campo educativo, dado que ambas investigaciones se enfocan en elementos curriculares que deben ser tenidos en cuenta ante toda propuesta, y finalmente los trabajos de Sánchez (2016), y Fernández (2014), nos muestran aspectos en los cuales se presentan mayores dificultades, factores que se tiene en cuenta para proporcionar ideas en diseño metodológico, donde se puedan abordar esas falencias.

De acuerdo con todo lo mencionado, es necesario resaltar que la intención de este trabajo de grado, radica en poder trabajar actividades con estudiantes de grado 9° con el propósito de ver la función desde una perspectiva dinámica en el proceso de *comprensión*, es decir, poder caracterizar elementos fundamentales del concepto de función lineal desde el enfoque de la EpC, teniendo en cuenta los aspectos ya trabajos sobre ella. Desde estos aportes se piensa trabajar en tareas que conjuntamente recojan un aspecto significativo de cada antecedente.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

2.1 El enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EpC)

A través de la historia los docentes en las escuelas han intentado compartirles a los estudiantes nuevos conocimientos, que busquen transformar o cambiar la forma de aprender y adquirir un conocimiento por medio de diversos métodos y actividades dinámicas, que no solo ayudan a la parte cognitiva sino también a que el estudiante relacione el objeto matemático con el mundo real. Generalmente esta es una de las rutinas tradicionales que se presentan en el salón de clases; pero ¿qué tan frecuente te preguntas si los estudiantes realmente comprenden lo que se les enseña? ¿Será que los estudiantes comprenden lo que necesitan?, se ha tomado la tarea de averiguar ¿qué cosas comprenden los estudiantes? ¿Qué tan eficientes son cuando comprenden en realidad? y, sobre todo, lo que ellos logran comprender ¿para qué les puede servir en la vida real o en su entorno cotidiano? Aunque suena un poco limitante, la idea no es descentralizar la actitud docente durante la clase, al contrario, es favorecer un nuevo acercamiento del estudiante frente al aprendizaje y lo que conlleva saber comprender algo (lo que ya conoce con lo nuevo a conocer).

Aquí conviene detenerse un momento e indagar principalmente sobre ¿Qué es comprensión? Generalmente la respuesta a esta pregunta apunta a una serie de actividades que los estudiantes son capaces de realizar, explicando y argumentando, esta es una de las concepciones más comunes por docentes, sin embargo, aquella posee su grado de complejidad por tal razón conviene señalar que “la comprensión es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe.” (Perkins, 1999). Partiendo de esta frase se puede expresar que comprender es un proceso mediante el cual el estudiante desarrolla capacidades cognitivas y fisiológicas que le

permite acomodarse rápidamente a un nuevo conocimiento; la flexibilidad conlleva a los estudiantes a una plena integración del mundo real con el objeto matemático, entrelazando una compatible comunicación y adaptación al nuevo conocimiento en el que se emerge.

Así mismo, Mejía (2011) en su trabajo enfocado en la EpC, menciona que comprender no es sólo tener conocimientos. Es sobre todo la habilidad de utilizar ese conocimiento en forma creativa y competente en la vida. Lo que se hace permite ver lo que se comprende. Se comprende realmente cuando se es capaz de producir, representar, actuar o hacer algo.

En el campo escolar se puede indicar que un estudiante alcanza un nivel de comprensión cuando no solo logra producir, resolver, solucionar, argumentar y efectuar, sino que pertinentemente analiza la información construyendo su propio significado sin apartarse de lo académico y lo exhaustivo. Identificar fácil y racionalmente un objeto en la cotidianidad y en la escuela, permite al estudiante construir un sin número de desempeños en la que él aterriza un conocimiento comprensible.

Según, Perkins y Blythe (2006) comprender, “incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analogías, volver a presentar el tópico de una nueva forma”. En resumen, comprender va mucho más allá de aprender y conocer algo, y ese “más” es lo que hace significativa la comprensión.

El modelo de la EpC emerge por un grupo de investigadores graduados de la Universidad de Harvard hacia 1988, donde se realizó una exploración en el marco del

proyecto Zero que se centró en la comprensión como fuente de trabajo, el mayor representante de este modelo fue David Perkins, esta ideología nace por el cuestionamiento: ¿De todo lo que usted ha aprendido qué comprende? A modo general la respuesta a este interrogante es: que poco se comprende.

Esta concepción se comprende un poco mejor desde el marco conceptual de EpC, el cual posee una estructura para la organización y aplicación de las actividades en la que se sigue un proceso de planeación curricular, que incluye elementos, tales como: tópico generativo, metas de comprensión, desempeños de comprensión y la valoración continua. También se incluyen las dimensiones de contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación como fundamentales dentro de la comprensión de los conceptos matemáticos. En esa misma estructura se consideran niveles de comprensión, clasificados en ingenuo, principiante, aprendiz y maestría para refinar y mejorar la enseñanza en el salón de clases.

2.1.1 Elementos de la EpC

- Tópico generativo:

Es aquel donde se cuestiona ¿Qué temas vale la pena enseñar? Plantear contenidos que sea de interés múltiple (docentes y estudiantes), conllevado a los estudiantes a desarrollar la habilidad de comprensión. Este aspecto en efecto debe implementar contenidos interesantes y centrales para un dominio como temas conceptos, teorías. Según, Perkins (1999) *“La capacidad generativa de un tópico depende tanto de la manera en que se lo enseña como de sus características substanciales, por lo tanto, es importante la inversión que realiza el docente en el tópico”* es decir, la forma, la dinámica, la entrega y la pasión con la que el docente

enseña entusiasmo y ayuda a facilitar el aprendizaje del estudiante estimulando su comprensión potencialmente. En el tópico generativo se deben enseñar contenidos en la que el estudiante se relacione con la realidad como: la vida, el átomo, el cero, la narrativa y el tiempo.

- **Metas de comprensión:**

Enfocando la vista en los aspectos del contenido que deben comprenderse mediante un proceso coherente de ideas, argumentos y exploraciones los estudiantes deben enfocarse en los aspectos más importantes que se deben comprender y el docente centralizar los puntos pertinentes que se deben aprender durante el proceso de enseñanza para que el estudiante los identifique al momento de indagar en ellos. Un ejemplo de metas de comprensión puede indicarse así: para una unidad de Geometría cuyo Tópico Generativo es “La clasificación de triángulos” una meta de comprensión es “comprender que para clasificar triángulos es necesario establecer criterios o características que determinen la clasificación”.

- **Desempeños de comprensión:**

Factor que hace mención a ¿Cómo podemos favorecer la comprensión? Aquí es necesario puntualizar actividades con diferentes niveles de complejidad que dirijan la atención a un proceso reflexible, sobre los saberes que ya posee; pues bien, los mecanismos pedagógicos y las diversas actividades lúdicas matemáticas y geométricas tales como: unidades didácticas, videos, afiches, juegos matemáticos, entre otros, ya que promueven el aprendizaje del estudiante permitiendo en ellos un llamado de atención a las actividades dinámicas en la cual hagan uso activamente. En este factor es

muy importante que el docente se asegure de que el estudiante disfrute a la hora de interactuar y aprender a la vez.

Para, Perkins (1999) “el aprendizaje para la comprensión se produce principalmente por medio de un compromiso reflexivo con desempeños de comprensión a los que es posible abordar pero que se presentan como un desafío” (Stone, 1999, p 11.)

- **Valoración continúa:**

Este es aquel donde la evaluación toma puesta en acción dado que, “para aprender y para comprender, los estudiantes necesitan criterios, retroalimentación y oportunidades para reflexionar desde el inicio y a lo largo de cualquier secuencia de instrucción” Perkins y Blythe, (2006) es decir que es aquella que consiste en la realización y superación de una serie de pruebas que le permiten al docente valorar permanentemente el aprendizaje de los estudiantes.

En este factor el docente pone en marcha sus diversos métodos y diseños de instrumentos de evaluación para saber qué evaluar y qué desempeños valorar de los estudiantes al momento de obtener un nuevo aprendizaje o conocimiento.

Estos cuatro aspectos del marco conceptual del EpC son útiles para la planeación del docente debido a que enfoca la vista en el proceso de comprensión de los estudiantes, pues sirve como: *“una guía para mantener el foco centrado en la comprensión, al tiempo que les concede a los docentes un espacio para diseñar unidades y cursos que se adecuen a su estilo de enseñanza y a sus prioridades como profesionales (Blythe, 1998)”* Citado en Cano (2012).

Para llevar a cabo el desarrollo de esta investigación debe destacarse las dimensiones que constituye el marco de la EpC. Dimensiones de contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación.

Generalmente las dimensiones de la EpC son una guía para diseñar las actividades de una asignatura o un tema integral. Estas cuatro dimensiones ofrecen una nueva forma de hacer la comprensión más específica como afirma Cano (2012), dimensiones que se describen a continuación.

2.1.2 Dimensiones de la EpC

- **Contenido:**

Esta dimensión evalúa el nivel hasta el cual los estudiantes han traspasado las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones. Esta dimensión además de ser flexible, describe y valora la calidad y nivel de satisfacción y organización del sistema de conocimiento de un estudiante.

En palabras de Ruíz, Peme, Longhi, y Ferreyra (2012) la dimensión de contenido está directamente relacionada con el currículo. Desde esta dimensión se identifica el grado de superación que los estudiantes revelan en su desempeño respecto de los marcos o concepciones alternativas. De esta manera, responde al cómo los conceptos del dominio enseñados han logrado transformarlas dentro de una red conceptual coherentemente organizada.

La dimensión de contenido presenta unos criterios que lo fundamentan, los cuales son: *creencias intuitivas transformadas*, es decir ¿En qué medida los

desempeños de los estudiantes demuestran que las teorías probadas y los conceptos del dominio han transformado sus creencias intuitivas? y *redes conceptuales coherentes y ricas*, o sea ¿En qué medida pueden razonar los estudiantes dentro de redes conceptuales ricamente organizadas moviéndose con flexibilidad entre detalles y visiones generales, ejemplos y generalizaciones?

- **Métodos:**

Esta dimensión permite valorar la capacidad de los estudiantes buscando en ellos mantener un sano escepticismo hacia sus propias creencias, acerca de lo que conocen, lo que se les informa por medio de libros de textos, mensajes de los medios de comunicación y opiniones de las personas de cierta manera, así como de su uso de métodos confiables.

De esta manera, Ruíz, Peme, Longhi, y Ferreyra (2012) mencionan que la dimensión de métodos se asocia con las formas de construir los conocimientos en una determinada área, con las herramientas que los estudiantes deben elaborar para lograr una comprensión que vaya más allá del sentido común y de la experiencia inmediata.

La dimensión de métodos radica en *la construcción de conocimiento dentro del dominio*, es decir, establece en qué medida usan los estudiantes estrategias, métodos, técnicas y procedimientos para construir un conocimiento confiable similar al usado por los profesionales en el dominio. También radica en *la validación del conocimiento en el dominio* para establecer si dependen la verdad, el bien y la belleza de afirmaciones autorizadas o más bien de criterios públicamente consensuados tales como usar

métodos sistemáticos, ofrecer argumentos racionales, tejer explicaciones coherentes o negociar significados por medio de un diálogo cuidadoso.

Dentro de esta dimensión el estudiante ha de ser capaz de preguntarse ¿Cómo puede llegar al conocimiento? ¿Cómo saber que lo aprendido es verdadero o válido? Es muy importante reconocer que esta dimensión evalúa cómo los estudiantes construyen y validan su conocimiento con respecto a los procedimientos, aspectos epistemológicos y estándares disciplinarios.

- Propósitos:

Esta dimensión evalúa la capacidad de los estudiantes para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad de usar el conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo.

En este caso, Ruíz, Peme, Longhi, y Ferreyra (2012) postulan que la dimensión propósitos se relaciona con la capacidad de los estudiantes para: reconocer las intenciones que orientan un área de conocimiento y su construcción, utilizar este conocimiento en otras situaciones y con las consecuencias de hacerlo.

En ésta dimensión el estudiante debe preguntarse ¿cómo se utiliza el conocimiento y lo que se aprende? ¿Para qué sirve éste conocimiento en la disciplina? ¿Qué conexiones puede hacer con su vida respecto a los contenidos escolares y el mundo real?, así de esta manera los estudiantes pueden descubrir y vincular el sentido y la importancia de lo que se aprende.

- **Formas de comunicación:**

Según, Ruíz, Peme, Longhi, y Ferreyra (2012) Esta dimensión se relaciona con el lenguaje específico de una determinada área, con los aspectos de la comprensión que se vinculan al proceso mediante el cual los estudiantes comunican a otros el conocimiento. La dimensión de formas de comunicación está directamente relacionada con el buen uso del lenguaje simbólico y las formas de comunicación tales como: visuales, textuales, gestos corporales, verbales, entre otros. De manera que, al momento de comunicarse el estudiante tenga en cuenta, el escenario, el espacio el contexto y las características del público que está en su entorno para utilizar un adecuado léxico y simbolismo.

En ésta investigación, las dimensiones de la EpC es el camino analítico que orienta el conocimiento y el aprendizaje para una alcanzar una mayor comprensión del concepto de Función Lineal, esto a partir de los Elementos propios del enfoque. Las dimensiones sirven y son tomadas como objeto crucial para ver observar, determinar, analizar y caracterizar en qué medida los estudiantes demuestran desempeños de comprensión y qué niveles de comprensión logran alcanzar en la comprensión del concepto de Función Lineal.

2.1.3 Niveles de Comprensión

Anteriormente se describen las cuatro dimensiones de la (EpC), quien a su vez dentro de cada una de éstas se destaca unos niveles propuestos por Howard Gardner y Verónica Voix Mansilla (2003) que, durante sus trabajos en el desarrollo del marco conceptual de la EpC, categorizaron los niveles de comprensión como: Ingenuo, De

Principiante, De Aprendiz y De Maestría, los cuales están definidos en (Stone, 1999). Son descritos a continuación de acuerdo a Ruíz, Peme, Longhi, y Ferreyra (2012).

- **Nivel de Comprensión Ingenua**

Están basados en el conocimiento intuitivo. Describen la construcción del conocimiento como un proceso no problemático que consiste en captar información que está directamente disponible en el mundo. En estos desempeños, los estudiantes no ven la relación entre lo que aprenden en la escuela y su vida de todos los días; no consideran el propósito y los usos de la construcción del conocimiento. En este nivel, los desempeños no muestran señales de dominio de lo que saben por parte de los estudiantes. Desempeños de comprensión ingenua son poco reflexivos acerca de las formas en que el conocimiento es expresado o comunicado a los otros. Los desempeños de los estudiantes en un nivel ingenuo tienden a ser descripciones imaginativas pero incorrectas de un proceso. Las bases y los orígenes de tales descripciones siguen sin ser cuestionados.

- **Nivel de Comprensión Principiante**

Están predominantemente basados en los rituales y mecanismos de prueba y escolarización. Estos desempeños empiezan destacando algunos conceptos o ideas disciplinarios y estableciendo simples conexiones entre ellas, a menudo ensayadas. Describen la naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento, así como sus formas de expresión y comunicación, como procedimientos mecánicos paso por paso. La convalidación de estos procedimientos depende de la autoridad externa más

que de criterios racionalmente consensuados desarrollados dentro de las disciplinas o dominios.

- Nivel de Comprensión Aprendiz

Los desempeños de comprensión de aprendiz se basan en conocimientos y modos de pensar disciplinarios. Demuestran un uso flexible de conceptos o ideas de la disciplina. La construcción del conocimiento se ve como una tarea compleja, que sigue procedimientos y criterios que son prototípicamente usados por expertos en el dominio. Con apoyo, los desempeños en este nivel iluminan la relación entre conocimiento disciplinario y vida cotidiana, examinando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento. Los desempeños en este nivel demuestran una expresión y comunicación de conocimiento flexible y adecuado.

- Nivel de Comprensión Maestría

En este nivel, los estudiantes son capaces de moverse con flexibilidad entre dimensiones, vinculando los criterios por los cuales se construye y se convalida el conocimiento en una disciplina con la naturaleza de su objeto de estudio o los propósitos de la investigación en el dominio. Los estudiantes pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea. El conocimiento es expresado y comunicado a otros de manera creativa. Los desempeños en este nivel a menudo van más allá, demostrando comprensión disciplinaria: pueden reflejar la conciencia crítica de los estudiantes acerca de la construcción del conocimiento en el dominio.

Los estudiantes además de aprender nuevos desempeños de comprensión, logran introducir nuevos y aceptables cambios en formas típicas de desempeñarse en cada género o combinan con éxito géneros de manera aceptable, demostrando dominio del género al manifestar un claro estilo o voz personal al desempeñarse en ese género (Marín, 2015).

Durante la enseñanza y comprensión del concepto de Función Lineal, el docente debe incitar a los estudiantes a moverse en diversos contextos que le facilite afianzar un conocimiento significativo, en la que permita relacionar el mundo real con su vida y los contenidos curriculares a partir del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC); los niveles de comprensión que destaca éste marco permite que el docente verifique y seleccione hasta qué punto el estudiante comprende con perfección.

Por consiguiente, en la presente investigación se entrelaza como una de las bases fuertes la descripción y la determinación de los diferentes niveles de comprensión que logra adquirir un estudiante en la comprensión del concepto de Función Lineal bajo la teoría de la Enseñanza para la Comprensión.

Es importante resaltar que los elementos, dimensiones y niveles de comprensión permiten identificar estructuralmente, los aspectos y características relevantes en la comprensión del concepto de Función Lineal.

2.2 Referentes en el estudio de la función lineal

2.2.1. Referente didáctico

Es posible realizar un análisis didáctico, cuando se puede identificar y caracterizar fenómenos relativos al aprendizaje y enseñanza de un concepto matemático; estos factores se comprenden en términos de los obstáculos, errores y dificultades que presentan los estudiantes ante la comprensión de un saber matemático (García & Zúñiga, 2014).

El MEN sugiere que los docentes hagan uso de recursos didácticos como la implementación de los libros de textos, ya que es considerado como un elemento importante en el proceso de enseñanza, sin embargo, como señala Grueso y Gonzáles (2016,p,107), “... *el profesor debe tener suficientes conocimientos (matemáticos, epistemológicos y didácticos) para poder determinar el uso del texto escolar.*” Por ello se revisa un libro de texto, con la finalidad de contemplar cómo se presenta la definición del concepto de función, resaltando el modelo de enseñanza que este comparta.

Los caminos del saber, matemáticas 9, Armas, Ramírez, Acosta, et a. 2013, Editorial Santillana. Documento que presenta el concepto de función resaltando la importancia que este posee en el mundo real, como fenómenos físicos, económicos, biológicos o demográficos.

Según Armas, Ramírez, Acosta, et a, (2013), Una función lineal es una regla o correspondencia que asigna a cada conjunto A uno y solo un elemento de un conjunto B. Simbólicamente se representan $f:A \rightarrow B$ el cual denota que la función f definida del conjunto de partida A en el conjunto de llegada B. Expresando que si $x \in A$ y $y \in B$, la cual se interpreta que la $f(x)=y$ es decir que x es igual a y.

Estos autores a su vez indican los elementos de la función:

- Dominio: conjunto de partida de la función y se simboliza como $\text{Dom } f$
- Codominio: conjunto de llegada de la función y se simboliza como $\text{Cod } f$
- Rango: es el conjunto formado por los elementos del Codominio, que son la imagen de los elementos del dominio, se simboliza $\text{Ran } f$
- Grafo: conjunto formado por todas las parejas ordenadas (x,y) tales que $x \in \text{Dom } f$ y $y \in \text{Ran } f$.

Este libro escolar presenta el concepto de función desde una vista conjuntista, aspecto que en nuestra propuesta deseamos ver desde una perspectiva más amplia, desde la covariación dándole más significado a los aspectos de cambio, diseñando un lenguaje apropiado y más claro para los estudiantes.

A su vez, se puede afirmar que los docentes deben seleccionar apropiadamente sus recursos didácticos, pues este debe contemplarse como un apoyo y no estrictamente como una guía en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La comunicación como proceso central en la comprensión del concepto de función lineal:

El aprendizaje se produce por adaptación al medio y la situación juega el papel del medio, con el cual el estudiante interactúa, la noción de situación didáctica va más allá de la idea de actividad práctica, (Roldán, 2013). Una de las mejores formas que el estudiante lograr aprender, es por medio de la interacción y la comunicación; la comprensión del concepto de función lineal radica también en el sistema comunicativo de los estudiantes, debido a que este permite asimilar espontáneamente factores que intervienen en el

aprendizaje y además aísla la memorización; esta situación conlleva al estudiante a obtener un conocimiento práctico y óptimo a través de las formas de comunicación.

El aprendizaje activo implica interacción con el medio y las personas que rodean al estudiante, puede hacerse en forma individual o en grupo y supone cooperación o colaboración. (Gordino, J. 2002). Estas interacciones provocan en el estudiante experiencias que modifican su comportamiento presente y futuro, porque las disposiciones conductuales y el ambiente no son entidades separadas, lo que ocurre es que cada una de ellas determina la actuación del ambiente. Las diferentes formas de un estudiante comunicarse en el ambiente escolar, es un factor que juega a favor del mismo, puesto que le permite respirar conocimientos, adquirir nuevos aprendizajes, formando así un conocimiento sólido y significativo; de alguna manera se le puede posibilitar alcanzar un mayor nivel de comprensión del concepto de función lineal.

La resolución de problemas como proceso significativo en la ejecución de las tareas:

Los estudiantes en el transcurso de la ejecución de una determinada actividad, se enfrentan a múltiples complejidades principalmente cuando se les dificulta analizar e interpretar un enunciado matemático; las tareas propuestas en este trabajo de grado presentan un estilo diseñado para afianzar y mejorar la comprensión del concepto de interés; y por ende la (EpC) demanda que un estudiante debe establecer un sin número de habilidades y estrategias, tanto sociales como intelectuales. Por lo anterior es necesario, destacar la resolución de problemas como un proceso para el abordaje del concepto de función lineal.

George Pólya es uno de los autores más importantes dentro del campo de la resolución de problemas, y su trabajo se asocia a la importancia de resolver problemas como el camino por el cual se crea el conocimiento matemático; en su libro cómo plantear y resolver problemas 1945 propone una serie de pasos que ayudarán al estudiante en esta tarea, ellos son, entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y por último mirar hacia atrás (García y Zúñiga, 2014. p, 29).

El desarrollo de la actividad de resolución de problemas promueve en este trabajo la experimentación y exploración como un punto de ayuda para propiciar el acercamiento al concepto de función lineal por parte de los estudiantes mediante la utilización de tareas propias a sus conocimientos. De esta manera se pretende reflejar este proceso, donde el estudiante, además de poner en práctica los recursos con los que cuenta de la (EpC), los conocimientos previos, los conceptos, procedimientos, fórmulas y demás, debe realizar las actividades para su propio trabajo intelectual al enfrentarse a la resolución de un problema.

Importancia de las representaciones de la función lineal para la comprensión

Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas que se presentan en finanzas, estadística, economía, ingeniería, medicina, química, física y de otras áreas sociales en donde se requiera relacionar variables. (Manfredi, 2008) Cuando se va a algún centro comercial o supermercado, comúnmente se relaciona un conjunto de artículos o productos alimenticios con sus respectivos precios, y así saber cuánto dinero gastar o qué cantidad poder comprar; si de manera reiterada se lleva este caso al plano cartesiano, se puede escribir esta correspondencia en una ecuación de función “X” como el precio o costo del producto y “Y” como la cantidad de producto.

De este modo, para un estudiante de grado 9° lograr hacer correspondencia uno a uno de un caso general, es importante identificar y ejercer la función lineal en sus diversas representaciones y posteriormente alcanzar un nivel de comprensión de función lineal.

Las diversas representaciones juegan un rol muy importante en el caso de las funciones, ya que, le permite al estudiante, modelar, sintetizar, manipular, diferir y detectar casos favorables en los que requiera la resolución de problemas. Una función puede tener diversas representaciones, entre ellas se encuentran: diagramas sagitales, conjunto de pares ordenados, tablas, ecuaciones o fórmulas, plano cartesiano. Comúnmente se han privilegiado las últimas tres para actividades en las aulas de clases.

Se reconoce que una actividad cognitiva propia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como lo expresa Duval, (2006) consiste en distinguir y coordinar distintos registros de representación semiótica, en la que permite romper las dificultades al trabajar transformaciones de conversión entre representaciones gráficas, algebraicas y tabulares los cuales deberían constituirse como objetivos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas.

Por consiguiente, el estudiante también realiza procesos de modelación matemática en la que se destaca significativa importancia en este trabajo de acuerdo a las exigencias de la (EpC) para la ejecución y realización de las tareas propuestas. De este modo Marín, (2013. p, 37) menciona que:

“la modelación en Educación Matemática parte del supuesto de interpretar matemáticamente situaciones de la realidad para tomar algún tipo de decisión. Desde ahí, la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje se vale de situaciones que motiven a los estudiantes para que después de ser abordadas desde diferentes etapas didácticas, conduzcan a obtener modelos matemáticos que las validen y solucionen”.

Por tal motivo, en este trabajo se diseña, una serie de tareas didácticas, en la que le permitan al estudiante alcanzar una comprensión significativa del concepto de función lineal, siendo capaz de; representar, explicar, comunicar, contextualizar, justificar, aplicar, comparar y generalizar, el concepto, modelando situaciones matemáticas, en la que él considere pertinente para resolver en su medio; problemas en los que identifique casos de funciones lineales y así ilustrar desempeños de comprensión bajo el enfoque de la (EpC).

2.2.2. Referente curricular

Para el desarrollo del pensamiento variacional los estudiantes deben adquirir y cumplir ciertas competencias, de modo que se reflejen procesos heurísticos que sean visibles a la hora de solucionar un problema o una actividad específica, respondiendo con las metas, desempeños y contenidos escolares establecidos, ya que esto hacen parte del proceso educativo. Elementos que están reglamentados en los documentos curriculares expuestos por MEN, como lo son los Lineamientos Curriculares de Matemática (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (2006). Siendo uno de los propósitos del MEN promover una formación matemática en los estudiantes que contribuya de forma eficaz en los fines y metas trazadas por los procesos educativos según la época y contexto sociocultural en el cual se ubica, así mismo los Estándares Básicos de Competencia (2006) pretende alcanzar una educación de calidad para todos y todas como condición para el desarrollo de las naciones y de los individuos.

Para alcanzar estas metas, se debe considerar al estudiante, involucrándolo en procesos educativos (actividades matemáticas, juegos didácticos, unidades didácticas) que potencialice su aprendizaje y sea un sujeto activo de su propio conocimiento.

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo de grado, pretende mejorar la comprensión del concepto de función lineal para favorecer el desarrollo de las competencias en estudiantes de grado noveno de la educación media, a partir de concepciones del pensamiento variacional, de manera que permita la construcción de nuevos conceptos, especialmente cuando se hace referencia a modelación de conceptos de función lineal, pues de manera general “el pensamiento variacional es el estudio sistemático de la noción de variación en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática. En particular, la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente” (Villa, 2012, p.12; citado en Grueso & Gonzales 2016).

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006, p. 66)

En este sentido, el MEN (1998) pretende proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, donde se espera superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados con el fin de ubicarse en el dominio de un campo conceptual, de modo que involucren conceptos y procedimientos estructurados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

De esta manera se integra las actividades propuestas a las exigencias del MEN para alcanzar las metas propuestas por el país y ayudar a ingerir y penetrar en los estudiantes un

aprendizaje significativo y a su vez contemplar en ellos los niveles de comprensión de acuerdo a la EpC.

Es relevante resaltar que a la mayoría de los estudiantes se les dificulta la asimilación del desarrollo del pensamiento variacional y al mismo tiempo a algunos docentes se les hace complejo introducir en las clases de matemáticas actividades que fortalezcan y potencialicen estas clases de pensamiento.

Por tanto, el MEN (2006. p, 68) menciona que, *“el desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables”*

En esta dirección, el MEN (1998. p, 35) afirma que: “Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista”.

De ahí que, se considera la comunicación como elemento de gran importancia en las clases de matemáticas, especialmente para la comprensión del concepto de función lineal en el desarrollo del pensamiento variacional, por ello, el MEN (2006) plantea que:

“Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y

comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Podría decirse con Raymond Duval que, si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido”. (MEN, 2006. p,54).

Por lo anterior, en el proceso de enseñanza y comprensión del concepto de función relacionado con el proceso del pensamiento variacional, el MEN en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas declara como un propósito, *“cultivar el pensamiento variacional, es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico”* (MEN, 2006. p,66). En este sentido se desea que los estudiantes al finalizar el ciclo de Educación Básica los estudiantes sean capaces de identificar la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de funciones e igualmente los cambios en las representaciones gráficas. Lo que indica que, con la enseñanza de las funciones, puede ser enseñada mediante la articulación de elementos curriculares con actividades contextualizadas de modo que los estudiantes logren relacionar aspectos cotidianos con los contenidos y relacionar las distintas clases de representaciones que posee el concepto de la función.

“Los Lineamientos Curriculares pueden ser considerados como el punto de partida para analizar el nivel de desempeño y aprehensión que presentan los estudiantes en su proceso de aprendizaje, teniendo como indicador las actuaciones o desempeños de los estudiantes que evidencian hasta qué grado, éstos han integrado los conocimientos y

procedimientos matemáticos propios del pensamiento variacional. (Valoyes, L. y Malagón, M. 2006, p. 121)” citado en (Noreña, 2013).

El estudio de las funciones, aterrizan fuertemente en el proceso del desarrollo del pensamiento variacional del estudiante, debido a que la naturaleza de las funciones se enmarca en procesos y situaciones de variación con respecto a la dependencia y/o relación de variables, siguiendo así la línea conceptual propuesta en los Estándares Básicos de Competencias planteados por el MEN (2006).

Finalmente, los Estándares Básicos de Competencia (2006) presentaron potentes elementos para la formación del pensamiento variacional para el desarrollo de las actividades propuestas en este trabajo de grado y una caracterización general de cómo intervienen los procesos de la EpC en la comprensión del concepto de la función lineal en estudiantes de grado noveno. Por otro lado, el MEN colocó un punto de referencia para diseñar las actividades y para establecer cambios en la manera como se puede diseñar el estudio de las funciones lineales, pues el aprendizaje de las funciones posibilita, la modelación de situaciones de la cotidianidad y en el contexto de las matemáticas.

2.2.3. Referente matemático

Es necesario precisar en la definición del concepto de función lineal, por ello se consideran la definición que presenta Swokowski (1983), partiendo de una presentación teórica del concepto de función lineal, mostrando las diversas representaciones que aluden este concepto, entre otros factores relevantes que se deben tener en cuenta para manejar a cabalidad este concepto matemático.

Función lineal:

f es una Función Lineal si $f(x) = mx + b$, donde m es un número real y $m \neq 0$. A m se le denomina pendiente de la función y a b como el punto de intercepto en el eje y .

Donde m , determina el cambio de la función a medida que x también cambia. Si m es menor que 0, la variable x aumenta, la función disminuye (decreciente), si m es mayor que 0, la función aumenta (creciente), pero si la m es igual a 0, la gráfica que le corresponda a la función es paralela al eje x , y cualquier valor que se le asigne a la variable x , la función siempre será constante.

Representación²

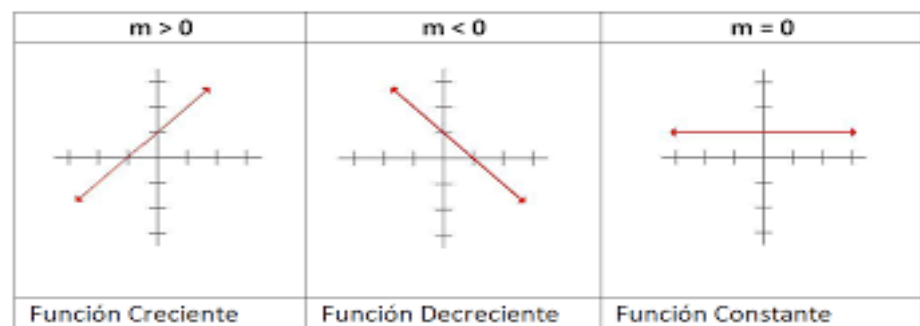


Ilustración 1 Representación gráfica de una función lineal

Para determinar o hallar la pendiente es necesario conocer dos puntos de la línea recta, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para aplicar su expresión matemática: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

En caso, de hacer comparaciones entre funciones, se puede determinar fácilmente si las rectas que determina la expresión son paralelas o perpendiculares. Pues si las pendientes son iguales estas son paralelas $m_1 = m_2$, pero si al realizar el producto de las pendientes da como resultado menos uno, serán rectas perpendiculares $m_1 * m_2 = -1$.

²Imagen recuperada de:

<https://www.google.com.co/search?q=graficas+de+funcion+lineal+creciente+decreciente+y+constante&source>

De este modo, se puede contemplar que el concepto de Función lineal es un conocimiento matemático rico en representaciones, dado que se puede hacer referencia a este, en términos algebraicos, cartesianos, en diagramas sagitales e incluso en lengua natural, de tal forma que se describan comportamientos de una determinada situación.

“... el concepto de Función Lineal es un subconjunto de lo que se entiende por función y que su naturaleza está estrechamente ligada con cantidades directamente proporcionales y cantidades covariacionales”. (Angulo. J, Mina. S y Valencia, J, 2011, p. 23)

En este sentido se muestra una red conceptual que nos permite comprender mejor la estructura matemática de la función lineal.

Red conceptual³

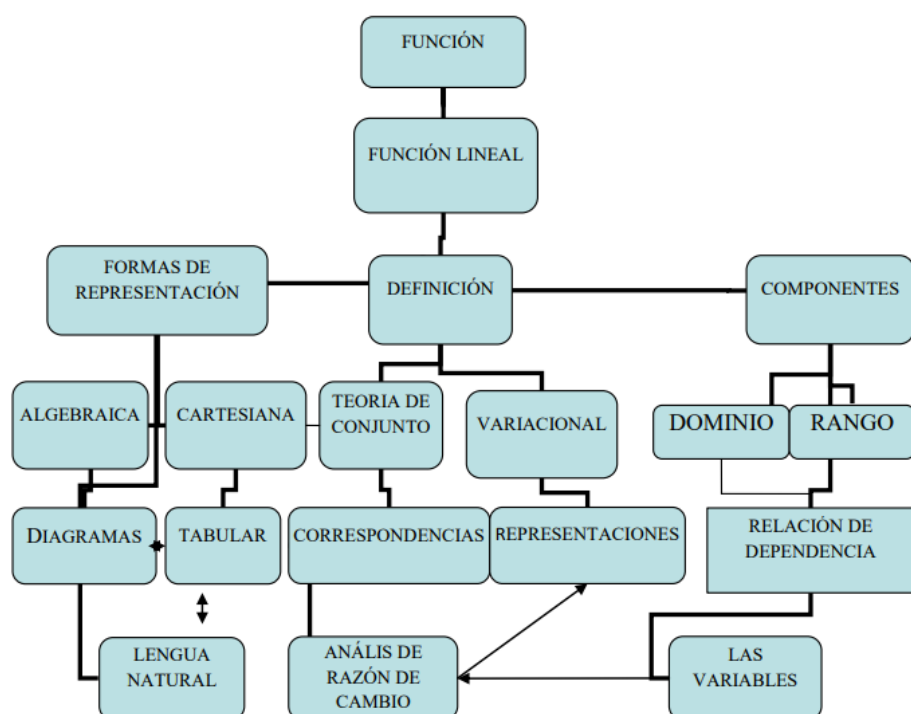


Ilustración 2 Red Conceptual

³Imagen recuperada del documento de Angulo, Mina y Valencia (2011)

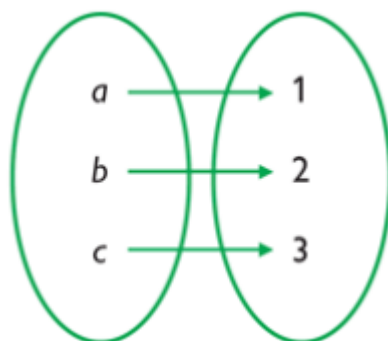
Esta red muestra unos elementos que conforman la función, de los cuales nos enfocamos en Función lineal, específicamente en sus formas de representación, la cual aborda las expresiones algebraicas, las descripciones gráficas, los aspectos tabulares y las expresiones relacionadas con el concepto en el lenguaje natural, línea optada, dado que al involucrar la coordinación de los registros de representación, los estudiantes desarrollan destrezas para reconocer la relación entre las representaciones adquiriendo una comprensión significativa del concepto matemático.

Como señala, Duval que si los estudiantes logran relacionar diferentes formas de representar un contenido matemático se puede hablar que este ha aprendido y comprendido el concepto matemático. (MEN, 2006. P54). Por esta razón se ha seleccionado las formas de representar el concepto, dado que en las tareas propuestas el objetivo fue articular las diferentes modalidades que aluden al concepto de función lineal de manera cómoda donde el estudiante logre identificarlo sin importar su representación, movilizándose así por los diferentes niveles de comprensión señalados en el enfoque de la EpC.

A continuación, se presentan diversas formas de representación en torno al concepto de función lineal, según lo expuesto por Roldán (2013).

Diagrama sagital: para representar funciones en diagramas sagitales se necesita de la determinación de dos conjuntos A y B, donde los elementos del conjunto A como punto de partida, tienen una única correspondencia con los elementos del conjunto B como punto de llegada. Particularmente, el primer conjunto A es llamado Dominio, debido a que es el conjunto de salida y, el segundo conjunto B es llamado Codominio, ya que es el conjunto de llegada. Cada elemento del conjunto A se relaciona mediante una flecha con un único

elemento del conjunto B. De esta forma se puede apreciar las dependencias y correspondencias de los elementos.



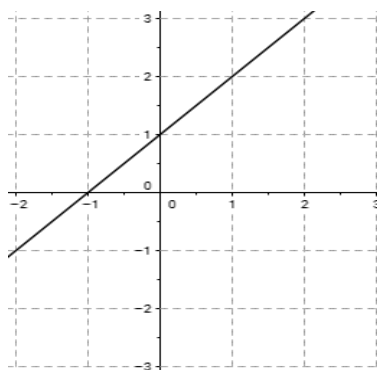
Conjunto de pares ordenados: Esta clase de representación es de la forma (x, y) en la que se hace explícita una a una de cada pareja ordenada de la función. El primer componente de la pareja ordenada corresponde a los elementos del conjunto de salida o Dominio (A), mientras que el segundo componente de la pareja ordenada corresponde a los elementos del conjunto de llegada o Codominio (B). Esta es una forma de representar una función como conjunto de parejas ordenadas por extensión.

$$(a, b)(c, d)$$

Tablas: es una de las formas más tradicionales que se utiliza en la escolaridad para ubicar u organizar datos y pares ordenados. En la representación de función, en ellas se ordena la información en un par de columnas o filas, cuya primera hilera corresponde a los elementos del conjunto de partida y la segunda hilera corresponde al conjunto de llegada. Las correspondencias entre estas cantidades tienen las mismas reglas de los diagramas sagitales y las tablas, en donde solo se vincula un único elemento entre el conjunto de salida con el de llegada. La diferencia en ésta es que permite una estructuración gráfica de manera sistemática o secuencial.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 3$	-1	1	3	5	7

Plano cartesiano: Se forma al construir dos líneas perpendiculares o rectas numéricas reales de manera vertical y horizontal formando así cuatro ángulos rectos en los que obtienen el nombre de ejes, el punto de corte de los dos ejes es llamado origen y se representa con el número cero (0) la cual no es positivo, ni negativo, es neutro. El eje horizontal corresponde a los elementos del conjunto de salida (x) Dominio, mientras que al eje vertical se le asigna los elementos del conjunto de llegada (y) Codominio.



Ecuaciones o fórmulas: comúnmente es la forma de representar una función algebraicamente en la que se describe la relación entre las variables de la función. Esta representación es cuya expresión analítica un polinomio de primer grado, en la que es reemplazada las parejas ordenadas, para encontrar una solución en el grafico o plano cartesiano. En las ecuaciones es muy fácil evidenciar algunas características generales de la función; puesto que permite observar minuciosamente si la función es creciente, decreciente, lineal o afín, de cierto modo, esta representación relaciona las correspondencias o dependencias entre magnitudes o cantidades.

- ✓ $Ax + By + c = 0$
- ✓ $y = mx + b$
- ✓ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Forma Verbal: las funciones también pueden ser expresadas verbalmente, ésta representación utiliza el lenguaje natural o común, en la que presenta un estilo de texto para hacer una descripción de la función en palabras de forma detallada. Ésta forma describe la relación explícitas e implícitas de las variables, en la que se pueda identificar fácilmente su correspondencia y dependencia; por ejemplo: “el número de pacientes que atiende un doctor varía de acuerdo a la hora, si en 2 horas atiende a 68 pacientes, entonces:

- ✓ Expresa en forma algebraica la situación.
- ✓ ¿cada cuánto aumentan los pacientes?
- ✓ Si el doctor trabaja 7 horas, 5 días a la semana ¿Cuántos pacientes atiende?

En la enseñanza y aprendizaje de las funciones lineales es importante tener en cuenta que, aunque existan diversas formas de representar una función, nunca debe alterarse su resultado por mucho que se exprese de manera distinta, es decir, un estudiante puede representar la misma función de múltiples maneras, pero su resultado o solución debe ser la misma.

CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Marco metodológico de la investigación

En este capítulo se presentan aspectos correspondientes al diseño metodológico implementado para el desarrollo del trabajo, buscando alternativas que permitan mejorar los procesos de *comprensión* de un grupo de estudiantes de noveno grado de educación media cuando se enfrentan a tareas asociadas al concepto de función lineal. Con base a esta finalidad es necesario cuestionarse: ¿Cuál debe ser el método empleado en el campo educativo que permita caracterizar elementos en el proceso de comprensión del concepto de función lineal cuando se adopta el *enfoque de la EpC*?

La repuesta a dicha incógnita conlleva a buscar métodos alternativos que permitan desarrollar un acercamiento al escenario de investigación. Por ello, esta investigación adapta el enfoque cualitativo, dado que: “*el enfoque cualitativo evalúa el desarrollo natural de los sucesos, es decir, no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad. Corbetta, (2003)*” citado en Hernández, Fernández, & Baptista (2006. p,17). Así, el enfoque cualitativo se relaciona con las descripciones de los estudiantes, sus intereses, expresiones, comportamientos, aptitudes, especulaciones y avances con relación al concepto; permitiendo que los participantes busquen, reconocer e interpretar comportamientos en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del concepto.

La investigación se apoya en el campo didáctico mediante el enfoque de la EpC, cuyo objetivo es analizar cómo los estudiantes comprenden, a partir de algunas formas particulares de enseñanza y estrategias implementadas en el desarrollo de una situación o tarea. En este sentido se decide implementar el *estudio de casos*, partiendo del rastreo de procesos, el cual permita realizar un análisis detallado de cada situación propuesta, aspectos que respondan a la pregunta de investigación.

En este mismo sentido, se extraen componentes metodológicos del *enfoque de la EpC*, los cuales sirven para obtener mejores desempeños de comprensión, ya que posibilita estudiar el concepto matemático desde una estructura dinámica, e igualmente permite de la explicación detallada de las situaciones a las que los estudiantes se enfrentan. Los componentes son:

- ✓ *Etapas de exploración:* que es donde el docente indaga acerca de lo que el estudiante conoce, partiendo del tópico generativo para reconocer los saberes previos.
- ✓ *Investigación guiada:* donde se busca que los estudiantes desarrollen y potencien habilidades básicas como la observación, el registro de datos, la comparación, entre otras. Esto con la finalidad de desarrollar en los estudiantes desempeños de comprensión cada vez más complejos.

Con esta investigación se realiza un escenario de clases, la cual no pretende desarrollar actividades de ejercitación; sino actividades de carácter exploratorios, permitiendo contemplar cómo los estudiantes organizan, proponen, cuestionan, sistematizan e interpretan una situación, desarrollando así desempeños matemáticos.

3.2 Diseño de la investigación

3.2.1. Contexto de estudio

Este trabajo se lleva a cabo en la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes (Icoterpo) de carácter Público, la cual se encuentra ubicada en el municipio de Buenaventura, Institución que le ofrece a la comunidad los servicios educativos atendiendo

a pre adolescentes y adolescentes en los niveles de preescolar, Básica primaria, Básica secundaria, y Media Técnica Comercial.

Se encuentra ubicada en la ciudad de Buenaventura-Valle del Cauca Colombia.

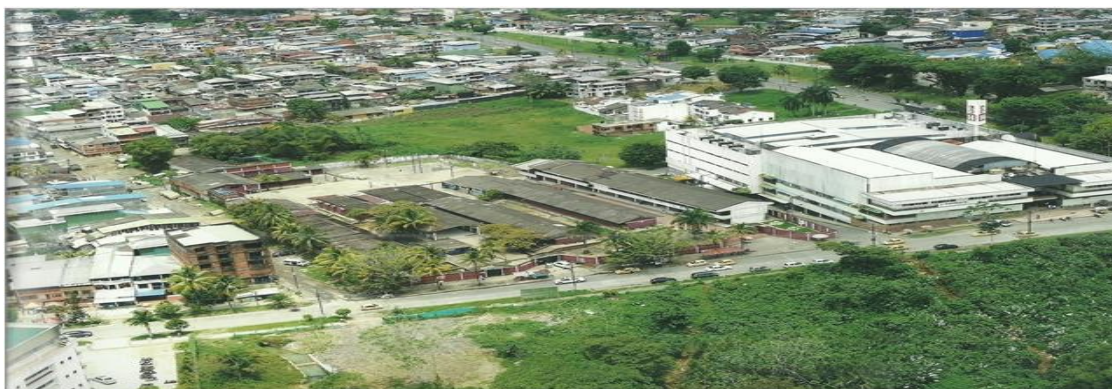


Ilustración 3 Institución Educativa Teófilo Roberto Potes

Dirección: Cr 47 5-17 Barrio Bellavista.

Imagen recuperada de (<http://www.icoterpo.edu.co/ineterpo/>)

3.2.2. Sujetos participantes

En la aplicación de las tareas diseñadas, participan 46 estudiantes del grado noveno tres (9°-3) de la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes, institución que contaba con seis cursos de noveno. Para el proceso de selección de los cursos, se hizo una indagación sobre los procesos académicos que llevan cada curso, se seleccionó el curso noveno tres por los comentarios expuestos por el docente de matemáticas, pues este notificó que en el salón de clases se obtenía uno de los resultados más bajos respecto a la comprensión de nociones matemáticas, resaltando la dificultad por el gran número de estudiantes.

Se favorecieron los estudiantes del curso debido que; se buscaba realizar una experiencia de aula, la cual nos permitiera confrontar a los estudiantes ante las etapas de

exploración e investigación guiada, estipuladas por el enfoque de la EpC, de tal forma que conllevaran a los estudiantes a construir y relacionar los conocimientos matemáticos concerniente al concepto de función lineal, desde una perspectiva dinámica, posibilitando la visualización de diversos *niveles de comprensión* desarrollados en cada una de las tareas propuestas.

Los elementos centrales para esta investigación, se basaron en las producciones de los estudiantes, las cuales se trabajó con todo el grupo correspondiente a los 46 estudiantes, dentro de la puesta en escena de la situación estos se organizaron en parejas, conformando en total veintitrés grupos de trabajo. Sin embargo, el caso a analizar como tal, fue constituido por sólo siete grupos.

Es importante señalar que este trabajo tenía la finalidad de identificar cómo los estudiantes se aproximaban al concepto de función lineal, trabajando desde el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión, motivando así a los estudiantes a un proceso de reflexión ante el concepto matemático que se construye mediante la exploración y la investigación guiada.

3.2.3. Instrumentos de recolección de datos

En este apartado se presentan los instrumentos que apoyaron la recolección de la información de la presente investigación. Se incluyen entre estos: las producciones escritas de los estudiantes, cámaras fotográficas, una grabadora de voz. En este mismo sentido se resaltó la investigación guiada, factor importante del enfoque de la EpC.

Las producciones escritas

Las producciones escritas de los estudiantes representan la fuente principal de recolección de la información, dado que a partir de la actividad matemática consignada en la resolución de las situaciones es posible caracterizar los *niveles de comprensión* alcanzados por los estudiantes cuando trabajan con tareas asociadas al enfoque de la EpC.

Recursos tecnológicos

Los instrumentos tecnológicos implementados para la recolección y análisis de información, fueron dos cámaras las cuales sirvieron como soporte y evidencia de la realización y aplicación de pruebas con los estudiantes de la Institución Educativa Teófilo Roberto Potes, e igualmente una grabadora de voz para realizar un contraste entre los interrogantes y posibles soluciones que manifestaban con las producciones escritas que entregaron. Cada 20 minutos se realizaba una rotación de la grabadora por grupo. En la ilustración 4, se muestra la ubicación de los recursos tecnológicos en el salón de clases, en el proceso de solución de las tareas.

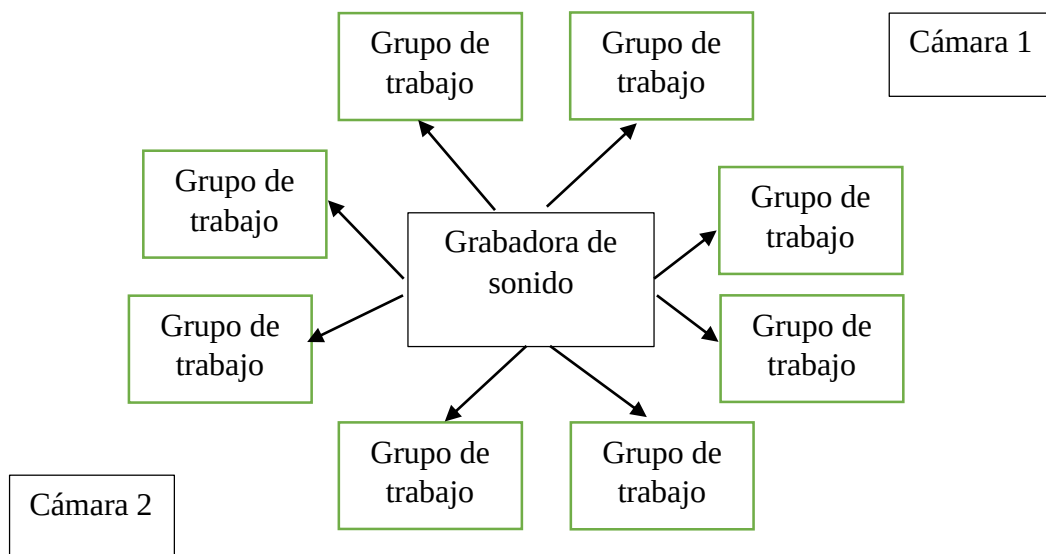


Ilustración 4 Ubicación de los recursos tecnológicos en el salón de clases

La investigación guiada

La investigación guiada cumple el papel central en el desarrollo de esta investigación, específicamente en relación con la organización y caracterización de los diferentes *niveles de comprensión* por los cuales transita y se sitúan los estudiantes. Dado que en este aspecto se resaltan afirmaciones e interrogantes que surgen en el momento de exploración: ¿cómo?, ¿por qué?, ¿para qué?, ¿dónde?, ¿cuándo?, ¿de qué manera?, pero sí y no por qué.

La investigación guiada fue realizada durante y después de la puesta en escena de las tareas. Esta se desprendió de los elementos metodológicos del enfoque de la EpC, la cual permitió momentos de interacción y previsión en la construcción del conocimiento, de tal forma que los estudiantes se cuestionaran sobre su proceso de comprensión.

3.3 Categorías de análisis

El análisis ilustra las interpretaciones de los resultados expuestos por los estudiantes, aspectos que se detallaron dentro de los elementos teóricos y metodológicos del *enfoque de la Enseñanza para la Comprensión*. Ya que, el análisis de la información no radica en hacer una simple descripción de lo observado y producciones escritas, lo esencial es darle significado y encontrar relaciones a lo que piensan, dicen, hacen y construyen los estudiantes (Henaó y Vanegas, 2012). Por lo tanto, las *dimensiones y niveles de comprensión*, que presenta el enfoque de la EpC, son factores relevantes en el análisis de las tareas diseñadas, ya que estos permiten seguir los procesos de *comprensión* que desarrollan los estudiantes.

Por tanto, este trabajo partió de un análisis *a priori* donde se presentan los posibles resultados y conocimientos que manifiestan los estudiantes ante el conjunto de tareas enmarcadas en situaciones dinámicas del concepto de función lineal, las cuales sirven como base para identificar en qué nivel de comprensión se sitúan y como este por medio de la fase de exploración del enfoque de la EpC y sus elementos desarrolla desempeños matemáticos que lo conlleven a una comprensión.

Con la realización del análisis *a priori*, se implementó la propuesta didáctica, la cual fue elaborada con los ítems estipulados del *enfoque de la EpC*, enmarcados especialmente en las dimensiones y niveles de comprensión, aspectos que se resaltan en la rejilla de análisis.

Posterior a eso, con la puesta en escena de las tareas diseñadas y las producciones obtenidas por los estudiantes ante este conjunto de tareas, se examinarán los resultados,

construyendo así un análisis *posteriori* detallado, que dé cuenta como los estudiantes transforman sus conocimientos empíricos y busquen validar el concepto en el campo curricular, es decir entender como los estudiantes buscan alternativas para la *comprensión* del concepto matemático teniendo en cuenta contextos tanto curriculares como extracurriculares.

Una vez realizado ambos análisis tanto *a priori* como *a posteriori*, se realizará un análisis final el cual contrasta lo esperado con lo encontrado, para así identificar si la adaptación del enfoque de la EpC, posee elementos importantes para enriquecer la comprensión del concepto de función lineal.

Rejilla de análisis

Dimensiones Niveles	Contenido	Método	Propósito	Formas de comunicación
Ingenuo	El estudiante maneja el conocimiento del contenido basado exclusivamente en experiencias previas, usualmente incorrectas.	El estudiante aplica modelos que no son suficientes para el desarrollo de una situación.	El estudiante no es consciente de las razones que lo conllevan a la investigación de un conocimiento matemático.	El estudiante expresa sus ideas teniendo en cuenta los desempeños de comprensión, pero sus argumentos muestran la falta de propiedades del conocimiento.
Principiante	El estudiante posee un conocimiento entre lo intuitivo y lo formal.	El estudiante implementa un modelo de solución mecánicamente basado en ejemplificaciones.	El estudiante toma consciencia de ciertos criterios que aluden a la investigación de conocimiento.	El estudiante argumenta sus ideas teniendo en cuenta los desempeños de comprensión con base a las instrucciones y pautas.
Aprendiz	El estudiante es capaz de identificar las teorías y los conocimientos disciplinares. (definiciones, relaciones)	El estudiante comprende la lógica de los métodos de solución de una situación desde una perspectiva matemática.	El estudiante identifica la intencionalidad del conocimiento, a partir de la reflexión de situaciones prácticas.	El estudiante muestra un dominio flexible y comunicativo frente al eje temático, a partir de las reflexiones emergentes de los desempeños de comprensión.
Maestría	El estudiante comprende la importancia del contenido matemático.	El estudiante apropia diversos métodos de conocimiento de manera sofisticada, movilizándose flexiblemente en el conocimiento matemático.	El estudiante comprende la importancia del conocimiento matemático en su cotidianidad.	El estudiante enuncia su conocimiento mediante la exploración, teniendo en cuenta las reglas disciplinares del concepto matemático.

3.4 Fundamentación teórica de las situaciones

El enfoque de la EpC, juega un papel importante en el diseño, gestión y evaluación de la propuesta, ya que esta ayuda a la construcción de un conocimiento más significativo. Pues dentro de este diseño se tiene en cuenta el concepto de función lineal desde una mirada *dinámica*, que permita abstraer las propiedades estructurales del concepto, es decir, tener en cuenta el contexto curricular como extracurricular, donde el estudiante se enfrenta a situaciones que requieran de una reflexión sobre su proceso de solución, relacionándolo los conocimientos matemáticos. Pues como señala Henao y Vanegas (2012. p,74), “*crear situaciones asociadas a la realidad permiten que las matemáticas cobren sentido para los estudiantes*”. De este modo se evalúa como el estudiante es capaz de transformar sus concepciones previas hasta llegar a la validación del conocimiento matemático que es científicamente aceptado.

Estos procesos por los cuales el estudiante se enfrenta, parten principalmente de una situación, que conduce a una serie de dimensiones donde el estudiante desarrolla un conjunto de habilidades, permitiendo destacar la *comprensión* del concepto, pues las dimensiones del este enfoque teórico, dan cabida a una serie de inquietudes que el estudiante construye como mecanismo de reflexión sobre el proceso de comprensión, siendo esto el puente que nos permite determinar qué tan reflexivo se convierte el sujeto ante la apropiación del concepto matemático, pues reconoce el concepto de función lineal en situaciones aplicables. Así mismo este enfoque nos permite subrayar los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes, los cuales se evidencia mediante los procesos cognitivos y actitudinales que muestran en la solución de las tareas.

Situación N° 1: Aprendiendo a preparar un buen café

Esta prueba se construyó en busca de la aproximación de contextos significativos, a través de situaciones contextualizadas que conllevan a los estudiantes a relacionar las situaciones con los conceptos de función lineal, partiendo de situaciones que requieran de nociones previas como: cantidades, equivalencia, y representaciones cartesianas. De esta manera las tareas propuestas se enmarcan en la fase de **exploración**, dando especial énfasis en contextos de variación, el cual permite posibilitar el desarrollo de la comprensión del concepto de función lineal partiendo de la aproximación de la noción de proporcionalidad, pues a partir de esto se detalla como los estudiantes comunican sus interpretaciones, destacando así los métodos que implementan o intuyen para dar respuesta a las tareas. Estas tareas serán medidas por diversos *niveles de comprensión*.

Finalidad: caracterizar los procesos de comprensión a partir del enfoque de la EpC, que permitan identificar elementos para la adquisición del concepto de función lineal.

Procesos implícitos: entre ellos se incluye la razón de cambio, la proporcionalidad, y la relación entre magnitudes, en la etapa de exploración propuesta desde el enfoque de la EpC, desde este aspecto se detalla cómo los estudiantes relacionan los conceptos matemáticos en su entorno.

Tarea 1

Esta situación se diseña con la perspectiva de que los estudiantes realicen comparaciones entre magnitudes, de tal forma que enuncien cuál de las dos cafeterías prepara el café con mayor intensidad, partiendo de la dimensión método y formas de

comunicación del enfoque de la EpC, dado que, se espera ver que método implementan y de qué manera este justifica su decisión.

Por tanto, la estrategia de comparación entre las magnitudes no es suficiente para el objetivo matemático que se trabaja, ya que en las siguientes tareas se pone de manifiesto la necesidad de la equivalencia entre magnitudes, es decir se quiere llevar al estudiante ante la noción de la proporcionalidad.

Tarea 2

La tarea 2, se elabora enfocada en la noción de proporcionalidad, de tal forma que los estudiantes se enfrenten a una situación que le cuestiona si agregar la misma cantidad de café y agua a un preparado inicial este conservara su sabor o cambiaria, en este sentido estas actividades se centran en la dimensión método, contenido y formas de comunicación, ya que se espera; contemplar la estrategia que implementa para tomar una decisión, identificar el concepto matemático de la proporcionalidad y examinar los argumentos expresados ante la actividad.

Por tanto, desde el marco teórico de la EpC en la tarea #2 se contempla un bagaje entre tres dimensiones, dado que se lleva al estudiante a identificar un *contenido* matemático, a partir de una exploración que da espacio a la *forma de comunicación* de sus decisiones, e igualmente evidenciando cuales fueron los *métodos* empleados para justificar sus argumentos.

Tarea 3

La tarea 3, se estructura desde la dimensión propósito y formas de comunicación, ya que se enfrenta el estudiante a tomar conciencia de algunos factores del conocimiento

matemático, a partir de reflexiones sobre lo que ya conoce y a su vez articular diversas formas estratégicas en la que evidencie comunicación e interacción en el desarrollo la situación. De este modo, se presenta al estudiante un ítem que exteriorice aspectos del plano cartesiano, para que debidamente argumente qué representa los componentes que se muestran en la ilustración, desde este aspecto el estudiante logre generar una reflexión sobre la relación entre las intensidades de sabor a café representado en un gráfico cartesiano y así relacione los objetos señalados con la situación.

De esta manera esta tarea desafía al estudiante a moderar minuciosamente sus argumentos en términos más teóricos de un concepto matemático, y finalmente se cuestione e identifique los propósitos del saber matemático

Situación N°2: El aeropuerto

El diseño de la prueba final se realizó con el objetivo de mejorar la comprensión del concepto de función lineal, por parte de los estudiantes, en la fase de ***investigación guiada***, dando especial énfasis a la dimensión método. La propuesta se inscribe en un contexto de modelación de situaciones cotidianas y matemáticas, sustentadas en las dimensiones de comprensión de la EpC. En ellas se reconoce el cambio y la variación de cantidades y magnitudes lineales, así como la descripción (argumentos) y representación en diversos registros de representación.

Finalidad: evidenciar en los estudiantes el reconocimiento de magnitudes y la manera en que estas se relacionan, a través de diversos registros de representación como tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

Procesos implícitos: entre ellos se incluye la variación entre cantidades, la relación entre magnitudes y el campo de variación de las cantidades, en la etapa de investigación guiada propuesta desde el enfoque de la EpC, pues desde esto se detalla como los estudiantes comunican, expresan y buscan alternativas para dar solución a las situaciones.

Tarea 1

Esta situación se diseña en vista de los aspectos curriculares de la función lineal, específicamente se parte de las dimensiones formas de comunicación, método y contenidos de comprensión que comparte el enfoque de la EpC, dado que se le presenta a los estudiantes una situación cotidiana la cual requiere de la manipulación conceptual y operatoria, que lo conlleva al acercamiento de la razón del cambio y la variación. Estas actividades pretenden favorecer el desarrollo de las competencias de los estudiantes de grado noveno en la educación media, pues se espera que el estudiante reconozca aspectos particulares que se asocian a los saberes matemáticos.

Tarea 2

La fundamentación de la tarea 2, se centra en la posibilidad de que los estudiantes a partir de unos datos particulares puedan construir una regla de correspondencia que relacione esos datos, ya que se les pide encontrar una expresión matemática que les permita determinar la cantidad de vuelos para un tiempo dado. Esta situación a la que se pretende enfrentar a los estudiantes, parte de la dimensión método, pues el análisis que se desea realizar es contemplar cuáles son las estrategias que el estudiante es capaz de construir, a partir de las concepciones del concepto de relación que ellos tienen, de tal modo que sus

reflexiones les permitan llegar a concluir que se puede hacer referencia a un concepto matemático desde múltiples representaciones.

Tarea 3

La tarea 3, se estructura con base a las tareas anteriores dándole fuerza a la dimensión método, ya que se fundamenta en la construcción gráfica de la situación, aspecto por el cual estudiantes deben reconocer los elementos necesarios que le permitan la representación; de la misma manera este debe identificar las variables, tanto dependientes como independientes.

El ideal es que los estudiantes sean capaces de representar la situación de manera gráfica y a su vez enunciar que está determinada por una línea recta, argumentando así los factores que permiten dicha representación. Contemplando la noción de correspondencia, dado que entre mayor sea el tiempo más aviones aterrizaran en la pista.

Tarea 4

La última tarea se diseña con el objetivo de que los estudiantes sean capaces de asociar todos los datos anteriores en diferentes registros, pues en este sentido se examina como el estudiante ha reflexionado en la construcción del concepto de función lineal, teniendo en cuenta los contextos cotidianos.

3.5 Diseño de las situaciones y tareas

Para el diseño de las situaciones, se parte de lo señalado en los objetivos, identificando elementos didácticos del enfoque de la *Enseñanza para la Comprensión*, para así relacionarlos con el concepto de función lineal. De esta manera se realiza las situaciones teniendo en cuenta los elementos metodológicos de la *EpC*, la etapa de exploración como componente para indagar acerca de lo que conoce el estudiante y la investigación guiada, como componente para que el estudiante desarrolle desempeños de comprensión.

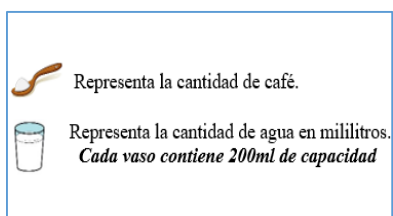
Se han diseñado un conjunto de tareas matemáticas referentes al concepto de función lineal, las cuales buscan identificar elementos que evidencien la *comprensión* a través, de la indagación y acompañamiento. En diseño de las tareas parte de una situación de un contexto que relacione al estudiante, siendo este un puente a través del cual las matemáticas cobren sentido para los estudiantes.

A demás en este diseño se reconoce el valor de las dimensiones que establece el enfoque de la *EpC*, ya que esta permite tener en cuenta, las predicciones erróneas de los estudiantes, para así consolidar un conocimiento significativo, pues en el desarrollo gradual de la *comprensión*, se da cuando el mismo estudiante busca validar el conocimiento matemático. Por ello se reconocen las producciones que se dan en todo el proceso de comprensión.

3.5.1. Situación 1: Aprendiendo a preparar un buen café

Dos cafeterías de la ciudad son famosas por la forma en que preparan sus bebidas para el desayuno. La siguiente tabla ilustra tres casos para un *preparado de café* en ambas cafeterías. Se asume que todos los vasos contienen la misma cantidad de agua y que la intensidad del sabor del café es igual en cada cucharadita.

Casos	Cafetería 1	Cafetería 2	Decisión
1			
2			
3			



Tarea 1. Pedro vive muy cerca de las dos cafeterías y sabemos que él prefiere el *preparado de café* con mayor intensidad. Según el gusto de Pedro, decide para cada uno de los tres casos, ¿qué cafetería ofrece el mejor preparado de café?

Explica detalladamente qué estrategia(s) utilizaste para tomar la decisión más acertada.

Tarea 2. Luis trabaja en la Cafetería 1. El día de hoy, Pedro elogió el *preparado de café*, así que procuró hacer un poco más manteniendo la misma intensidad de sabor. Para ello agregó un vaso de agua y una cucharadita de café.

1. ¿Consideras que la estrategia de Luis es adecuada para mantener la misma intensidad de sabor? Explica.
2. Luis recordó que había utilizado cuatro vasos de agua y diez cucharaditas de café para hacer el *preparado* de la mañana.

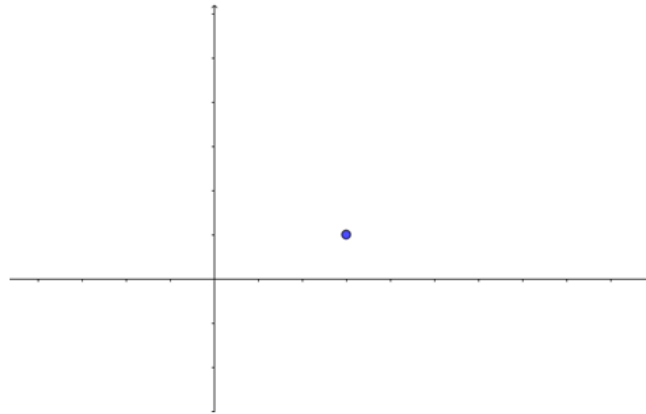


- a. En este caso, si se agregan 2 vasos más de agua, ¿cuántas cucharaditas de café deben emplearse para que la intensidad del sabor no cambie? Argumente su respuesta
- b. Proponga otras 3 preparaciones con distintas cantidades, pero con el mismo sabor.

Propuesta 1		Propuesta 2		Propuesta 3	
Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua

Tarea 3. Un nuevo empleado, llamado Juan, acaba de integrarse al trabajo de la cafetería 2. Sabemos que en esta cafetería un buen *preparado de café* se puede hacer con dos vasos de agua y seis cucharaditas de café.

1. ¿Cómo le explicarías a Juan el proceso que él debe realizar para aumentar la cantidad de *preparado de café* sin cambiar el sabor?
2. Al representar en una gráfica (plano cartesiano) la receta para un buen *preparado de café* se tiene:



- a. ¿Qué considera que representa la abscisa? Argumente su respuesta
- b. ¿Qué que representa la ordenada? Argumente su respuesta
- c. ¿Qué representa el punto en el plano cartesiano? Argumente su respuesta

3.5.2. Situación 2: El aeropuerto

El aeropuerto el Dorado es uno de los más famosos aeropuertos de Colombia, pues es conocido por el buen servicio que les ofrece a los viajeros y por la mayor frecuencia con la que entran y salen aviones, actualmente se ha informado que en este lugar aterrizan 5 aviones cada 45 minutos.

Tarea 1: Un nuevo piloto llamado Juan le ha llamado la atención la frecuencia con la que aterrizan los aviones a la pista, por ello, ha decidido estudiar las cantidades de aviones que llegan a la pista en un lapso de 6 horas.

- Si Juan estudia la cantidad de los aviones en este lapso de tiempo, debe determinar las variables que intervienen en esta situación.

a. ¿Cuáles serían esas variables? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuál es la relación numérica entre el número de minutos y la cantidad de aviones?

Justifica tu respuesta

c. ¿Cuál es la cantidad de aviones que han aterrizado en el lapso de 6 horas?

Tarea 2: Juan desea diseñar una tabla de registros donde se evidencia la frecuencia con la que aterrizan los aviones al aeropuerto el Dorado.

Minutos	0	45	90	135	180	225	270
Aviones		5					

Completa la tabla y enuncia.

a. ¿Cómo encontraste los valores para cada dato?

b. Escribe una forma de encontrar el número de aviones para cualquier tiempo dado

Tarea 3: Con los datos de la tabla anterior



a. Construye un plano cartesiano y responde los siguientes enunciados.

b. ¿Qué figura se forma si unes los puntos en la gráfica?

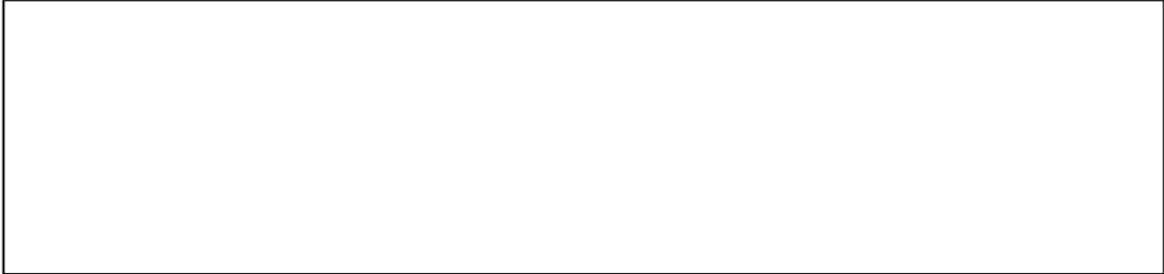


c. ¿Cuál es la variable dependiente e independiente? Justifica tu respuesta



Tarea 4: Juan ha decidido hacer una comparación con el aeropuerto Palo-negro y ha registrado que aterrizan 6 aviones a la pista cada 102 minutos.

- a. Dada la información anterior construye una gráfica.



- b. ¿Si han aterrizado 27 aviones a la pista cuanto tiempo ha transcurrido?



- c. Expresa una forma para determinar, ¿cuántos aviones aterrizan al cabo de 715 minutos?

Explica tu respuesta



3.6. Análisis a priori de las situaciones

En este apartado se discuten posibles resultados que pueden surgir de la actividad matemática que solo represente una relación asociada a cada una de las dimensiones de comprensión y niveles definidos en la EpC.

La antelación de los resultados es transcendental para reorientar las actividades de tal forma que se identifiquen elementos importantes para el proceso de comprensión del estudiante, ya que en este proceso se debe evidenciar el alcance de los niveles de comprensión y el dominio de las múltiples dimensiones del enfoque de la EpC, pues se reconoce que ambos componentes permiten obtener mejores resultados en cuanto a la comprensión del concepto matemático.

La importancia del análisis a priori, es que comparte las posibles respuestas que pueden dar los estudiantes ante la situación planteada, producciones que pueden emerger durante el desarrollo de dichas tareas, dejando percibir las habilidades que se pueden adquirir. Además, las diversas soluciones de las preguntas, permiten suponer las estrategias que implementarán los estudiantes para su desarrollo y ejecución, en la que se promueve momentos de interacción y reflexión entre los participantes, así mismo la forma de cómo estos podrán movilizarse entre diferentes dimensiones de comprensión, las cuales deben dar respuestas a ciertas preguntas y garantizar que las situaciones han sido bien estructuradas y por tanto pueden funcionar.

Con base a lo anterior, se señalarán cuáles son los ejes centrales para el análisis a posteriori de cada tarea, es decir que es lo que realmente se desea contemplar en las producciones de los estudiantes, ya que cada tarea se diseñó con el objetivo de evidenciar

que tanto comprenden, cabe reconocer el papel que juegan las producciones se detallarán de acuerdo a la rejilla de análisis, como instrumento esencial para comprender los procesos de aprendizaje que desarrollarán los estudiantes, en relación con los conceptos matemáticos implicados.

3.6.1. Aprendiendo a preparar un buen café: fase de exploración

En concordancia con el planteamiento anterior, se propone un conjunto de tareas asociadas con los niveles y dimensiones de comprensión que ejemplifican producciones relacionadas con el enfoque de la EpC.

Contenidos matemáticos involucrados en la tarea 1.

La tarea de entrada se enmarca en la comparación de magnitudes, ya que se le pregunta al estudiante sobre la preferencia del preparado de café en dos cafeterías, ilustrándole 3 casos diferentes, teniendo como condición el gusto de Pedro, es decir buscar cual de ella prepara el café con mayor intensidad de sabor, aspectos que debe señalar para cada uno de los casos. Esto se hace con la finalidad de contemplar cómo el estudiante logra hacer comparaciones a través de ilustraciones y con qué concepto matemático este es identificado.

Esta situación pretende que los estudiantes realicen una exploración entre las cantidades de magnitudes, de tal forma que compare y justifique las razones de su elección. Tarea que se enmarca en la dimensión de comunicación de tal forma que este exprese sus ideas teniendo en cuenta los desempeños de comprensión, aunque no muestre propiedad en el conocimiento, ya que está dirigida al accionar intuitivo de los estudiantes entre magnitudes.

En esta tarea los estudiantes pueden contestar de la siguiente forma:

- 1- Principalmente este puede realizar un conteo entre las cantidades implicadas, argumentando que el preparado que posee mayor intensidad de sabor es aquel que tiene menor vaso de agua y más cucharadas de café, aspectos que se pueden evidenciar en el caso uno y dos, mientras que en el caso tres, pueden expresar que tiene la misma intensidad de sabor, ya que los estudiantes pueden imaginar o suponer que al aumentar una cucharada de café y un vaso de agua contempla la misma razón en ambas cafeterías.

Si el estudiante responde esta situación con base a lo anterior se afirmaría que este se encuentra en el nivel ingenuo en la dimensión método y forma de comunicación, ya que este presentaría modelos aditivos, aunque no son suficientes para solucionar la situación a la que se enfrenta, a su vez puede expresar sus ideas y utilizar argumentos que muestre faltas de propiedades del conocimiento matemático, logran justificar de acuerdo a sus conocimientos previamente adquiridos. De este modo si el estudiante descubre en el caso tres lo contrario, es decir; identifica que en la cafetería uno tiene mayor intensidad de sabor que la cafetería dos, se puede ubicar al estudiante es un nivel de maestría, ya que evidencia los contenidos matemáticos explícitamente expuestos en el caso.

- 2- Los estudiantes pueden dar respuestas a los casos mediante sus experiencias, es decir como ellos realizarían un preparado de café de tal forma que le quede con un sabor concentrado, en este caso el estudiante se acercaría a la noción de razón, es decir que

estaría pensando en variables que le permitan realizar el preparado teniendo en cuenta condición.

Si los estudiantes son capaces de demostrar comparaciones con su contexto, se situaría en el nivel principiante con la dimensión contenido y formas de comunicación, pues estaría relacionando el conocimiento informal con el formal, es decir que busca mecanismos que le permitan evidenciar un concepto matemático para dar respuesta a la situación, expresando sus ideas teniendo en cuenta algunas instrucciones o pautas.

- 3- Así mismo los estudiantes podrían basarse en la idea de la proporción, pues mediante sus conversaciones podrían expresar que por x vaso de agua la cafetería y implementa m cantidad de café, aspectos que estos pueden mostrar para todos los casos.

Si los estudiantes realizan estas acciones se afirmaría un salto de nivel, pues relaciona el conocimiento informal con el formal, además este es capaz de identificar las teorías implícitas en la situación. Situando los en el nivel aprendiz con dimensión contenido, método y formas de comunicación, ya que comprende los métodos de solución e igualmente argumentas sus ideas de modo flexible.

Contenidos matemáticos de la tarea 2

Esta tarea se diseñó con la finalidad de llevar al estudiante a la noción de proporcionalidad, desde un accionar intuitivo. Situación construida en dos momentos, en el primer ítem se cuestiona, si al agregar la misma cantidad de agua y de cucharaditas de café a un preparado este conservaría su sabor inicial.

Los estudiantes podrían responder de la siguiente manera:

1- Que los estudiantes consideren que el preparado inicial tenía un sabor y que al añadirle un vaso de agua y una cucharadita este conservaría su sabor.

Si el estudiante es capaz de argumentar de esta manera se situaría en el nivel ingenuo, en la dimensión método y formas de comunicación, dado que principalmente sus respuestas se basan en experiencias previas usualmente incorrectas, segundo los métodos que este contempla para la dar respuestas no son apropiados para desarrollar la situación y finalmente sus argumentaciones muestran la falta de conocimiento.

2- Los estudiantes pueden afirmar que es posible que consideren la razón del preparado inicial, es decir que argumenten que el sabor del preparado cambiará, ya que, existen factores que alteran su sabor.

De este modo se ubicarían a los estudiantes en el nivel de aprendiz y dimensión contenido, y comunicación ya que, los estudiantes identifican elementos de variación, reflexionando frente a la situación.

En el segundo ítem, se divide en dos preguntas el punto *a* y *b*. El punto *a* se centra en el concepto de la proporcionalidad, pues se enfrenta al estudiante ante una situación, donde hay 10 cucharaditas de café y 4 vasos de agua, y se señala que, si se agregan dos vasos de agua, cuantas cucharadas de café se deben agregar para que el preparado final conserve el mismo sabor. Pues bien, aquí se debe plantear una estrategia lógica por parte del estudiante.

En este caso los estudiantes pueden dar respuesta de las siguientes formas:

- 1- Que los estudiantes afirmen que se le debe agregar dos cucharadas de café, dado que se agregan dos vasos de agua.

Si los estudiantes dan respuesta de esta forma, se situarían en el nivel ingenuo y en la dimensión comunicación, pues el solo hecho de que los estudiantes no demuestren reflexión ante la situación y sus respuestas sean tan superficiales, dan cuenta que no comprende o evidencia factores variantes, demostrando así la falta de nociones y que por tanto las experiencias previas que este presenta son incorrectas.

- 2- Que los estudiantes hallen la razón del preparado de café, evidenciando así la noción de la proporcionalidad, así se dará cuenta que por cada n vasos de agua se le agrega m cucharaditas de café, con el fin de encontrar la relación proporcionalmente existente.

Si los estudiantes buscan esta razón se ubicarían en el nivel principiante y dimensión contenido, método y comunicación, ya que, en este sentido los estudiantes son capaces de identificar las teorías implícitas en la situación, buscando así modelos lógicos que le permitan dar solución al interrogante, dándole cabida a la argumentación de las ideas de forma clara, flexibles basada en unas reglas lógicas del conocimiento matemático.

En el punto b se muestra una tabla donde el estudiante debe proponer un preparado de café con diferentes medidas, esta situación se plantea en primera instancia por si el concepto de proporcionalidad no fue identificado en el primer ítem de la pregunta dos, dado que aquí el estudiante debe construir ciertas situaciones, para que así pueda reflexionar sobre la importancia que tiene las cantidades de ingredientes para mantener el mismo sabor del preparado. A su vez con esta tarea se espera que el estudiante se concientice de las diferentes representaciones que se pueden dar en una noción

matemática, analizando especialmente las características que se desprenden en ella, en esta tarea se requiere que el estudiante identifique cuáles son las magnitudes que hacen que la intensidad del preparado del café sea constante.

En esta situación se espera que los estudiantes:

- 1- Que el estudiante elabore la tabla de manera no lógica, es decir que ponga valores alzar sin contemplar alguna noción matemática. En este sentido los estudiantes estarían en el nivel ingenuo dimensión contenido, donde por medio de sus experiencias previas da respuestas inapropiadas que satisfagan la situación.
- 2- Reflexionen sobre las equivalencias entre magnitudes y que de este modo contemplen la razón de la proporcionalidad en el contexto, y así mismo identifiquen el saber matemático implícito con el que se está trabajando.

Si el estudiante es capaz de construir la tabla de tal forma que se evidencie la proporcionalidad entre las magnitudes, este estaría en el nivel principiantes en la dimensión contenido y método pues es capaz de identificar los conceptos matemáticos propios de la situación y así mismo implementar modelos lógicos que le permitan dar respuesta a la pregunta en términos lógicos.

Esta situación fue diseñada con la finalidad que contemplar como el estudiante argumenta y que estrategias implementa para dar una posible respuesta, es decir que se enfoca en las dimensiones de contenido, comunicación, y métodos de la EpC.

Contenidos matemáticos involucrados en la tarea 3

En esta tarea se congrega el contenido matemático de las características de la función lineal, la correspondencia que en ella se estipula y se fomenta al proceso de la

modelación matemática; es decir, se basa en el razonamiento para estimular el desarrollo del pensamiento variacional. Esta tarea permite que el estudiante se pueda movilizar estratégicamente por las dimensiones de propósito y formas de comunicación; no obstante, se obtiene diversas formas de encontrar una estructura para explorar técnicas y estrategias que posibiliten su comunicación.

Dado que se le presenta al estudiante un ítem que exteriorice aspectos del plano cartesiano, donde el estudiante debe interpretar y argumentar que representan los componentes que se muestran en la ilustración, aspectos que genere una reflexión sobre la relación entre la intensidad de sabor y los vasos de agua para formar un preparado de café.

Dado que, se busca que el estudiante obtenga la facilidad para responder a la pregunta; por ello se parte de las posibles consideraciones que el estudiante comprende, así como lo menciona la (EpC). Las preguntas diseñadas buscan que los estudiantes demuestren una expresión de comunicación de conocimientos.

Por consiguiente, también se puede percibir un contenido matemático como los elementos del plano cartesiano, se muestra en esta actividad un bosquejo de una posible representación de un plano, aquí el estudiante puede explorar otras formas de representar el problema, no solo gráficamente, sino que también puede aplicar otras representaciones (tabulares, verbales, gráficas.).

Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante puede lograr dar una explicación a la construcción expuesta, identificando así los elementos que este conoce del sistema cartesiano, al mismo tiempo generar en los estudiantes una situación que le cree

inquietudes, es decir, que reflexione sobre la ubicación de la escala de ejes (x, y) y las variables que están puesta en escena.

Si lo estudiantes son capaces de hacer lo anterior se ubicarían en los niveles de aprendiz pues este maneja y relaciona los contenidos y ciertos modelos para resolver la situación, el cual permite evidenciar los avances de dimensiones y niveles que este ha desarrollado a lo largo de la situación.

3.6.2. El aeropuerto: fase de investigación guiada

El aeropuerto es una situación que parte de un enunciado que debe ser analizado, para sí dar respuesta al conjunto de las cuatro tareas planteadas. Estas se desprenden en relación a los objetivos planteados en esta investigación, tareas enmarcan en el concepto de función lineal, teniendo como soporte el EpC. Pues con este conjunto de tareas se espera evidenciar como los estudiantes dan respuestas para sí identificar en qué dimensión y nivel de comprensión este está situado ante a la comprensión del concepto de función lineal.

Tarea 1.

El conjunto de actividades que se presentan en esta tarea se enmarcan en las dimensiones: método, contenido y formas de comunicación. Ya que se le presentan a los estudiantes una situación que requiere de identificar la razón de cambio y la variación que se presenta en la situación.

Ítem a: En este apartado se le pregunta al estudiante ¿Cuáles son las variables implicadas en la situación? A continuación, se señalan una posible respuesta por parte de los estudiantes:

1. Señalar que las variables implicadas es la cantidad de aviones y el tiempo justificando su afirmación de manera lógica. Si los estudiantes son capaces de enunciar esto, se situará en la dimensión contenido y formas de comunicación, en el nivel aprendiz, pues es capaz de identificar el concepto de variable y a su vez argumentar de manera flexible la temática implicada.
2. Enunciar que las variables es 45 minutos y 5 aviones, sin argumentar su decisión, si los estudiantes hacen esto se situarían en la dimensión contenido nivel ingenuo, ya afirmarían que las variables son el tiempo y la cantidad de aviones sin justificar su asignación, es decir que mostraría que determina las variables según sus experiencias previas y sin tener una ideología clara de lo que se le pregunta.

Ítem b: En este espacio es posible que los estudiantes logren dar las siguientes respuestas:

1. Que enuncien que la relación entre el número de minutos y la cantidad de aviones se da, entre mayor minutos mayor cantidad de aviones es decir que existe una correspondencia entre variables, pues para un tiempo determinado un número de aviones destinado. Si el estudiante responde así se afirmarían entonces que este se encuentra en la dimensión de comunicación y contenido en nivel aprendiz, pues es capaz de identificar las teorías y conocimientos explicando su decisión de forma coherente.
2. Podría expresar que por 45 minutos 5 aviones entonces por 90 minutos 10 aviones. Esta forma de comunicar situaría al estudiante en la dimensión método y formas de comunicación en el nivel principiante, pues este estaría implementando modelos mecánicos para dar solución.

Ítem c: este ítem se centra en la forma como estudiante busca estrategias para dar solución a la actividad. Y estos podrían responder de las siguientes maneras:

1. Que el estudiante primero efectué la equivalencia entre horas y el número de minutos, es decir que sean consiente que en una hora hay 60 minutos. Una vez hecho eso señale que en 6 horas hay 360 minutos, posterior a ello haga la división en grupos de 45 y finalmente a esto multiplique 8 por 5 aviones. Si el estudiante es capaz expresar su respuesta así, se situaría en la dimensión método nivel aprendiz, dado que el estudiante comprende la lógica para dar solución a la actividad.
2. Que el estudiante multiplique 6 horas por 45 minutos y divida en 5 aviones para determinar el número de aviones que aterrizan a la pista. Este proceso situaría al estudiante en la dimensión método nivel ingenuo, ya que opera de manera incorrecta y esto no es suficiente para dar respuesta.

Tarea 2

En esta tarea se enfrenta a los estudiantes a una representación tabular, pidiéndoles que completen una tabla teniendo en cuenta el enunciando de introducción de la situación, es decir que se le presenta un conjunto de actividades que resalta la correspondencia entre variables. Esta tarea da fuerza a la dimensión método.

Completa la tabla: se espera que los estudiantes realicen este proceso sin dificultad alguna. Pues en el enunciando se afirma que por 45 minutos transcurridos aterrizan 5 aviones. La construcción de la tabla se puede dar en términos adictivos. Estudiantes que

resuelva este proceso se situara en la dimensión método nivel aprendiz, pues se implementara unos modelos lógicos para dar solución a los estipulado.

Ítem a: en este ítem se espera contemplar como el estudiante completa la tabla, ya que se relaciona con la tarea anterior, en este sentido, si los estudiantes implementan un método adictivo estarán en el nivel aprendiz, más si estos demuestran otra alternativa más sofisticada para la construcción de la tabla, se situarían a los estudiantes a la dimensión método y nivel maestría.

Ítem b: en esta actividad se espera que el estudiante sea capaz de buscar una forma general que ayude a determinar la cantidad de aviones para cualquier lapso de tiempo.

Posibles respuestas:

1. Que los estudiantes determinen la una expresión algebraica, implementando la fórmula de pendiente y punto-pendiente, los estudiantes que realicen este proceso se situaran en la dimensión formas de comunicación, método y contenido en el nivel aprendiz, pues reconoce las teorías implícitas, muestra dominio y comprende la lógica del proceso que se debe desarrollar.
2. Que los estudiantes no sean capaces de representar una expresión general para tal situación, siendo así este se situaría en la dimensión propósito en el nivel ingenuo, pues estos no reconocerían las razones que lo llevan a la investigación del conocimiento.

Tarea 3

La tarea 3 está estructurada por tres ítems. Ítems que se relacionan con las tareas anteriores, la diferencia es que se les pide a los estudiantes representar la situación de

manera gráfica, reconociendo la estructura y forma de la función lineal identificando las variables dependiente e independiente.

ítem a: aquí se espera que los estudiantes representen la situación en el plano cartesiano, sin altercados algunos, pues esta actividad se realiza con los datos de la tabla ya completada anteriormente o con la expresión o método que el estudiante a estructurado para determinar el número de aviones para cualquier tiempo. Si el estudiante es capaz de realizar la representación correctamente este se encontrará en la dimensión método en el nivel aprendiz pues implementa correctamente los métodos de solución ante la situación.

De igual manera se pueden presentar casos donde el estudiante no represente la situación y haya construido la tabla anterior correctamente, siendo este el caso el estudiante se situaría en la dimensión método nivel ingenuo, ya que primero pueda realizar el grafico, pero no sea capaz de situar los puntos de manera correcta, demostrando así falta de dominio en el contenido matemático.

Ítem b: esta actividad consiste en que los estudiantes unan los puntos representados en el plano cartesiano, y enuncien qué figura se forma, es decir que determine que representa una línea recta y este la relacionen con la función lineal, estudiante que sea capaz de realizar esto y argumenta estaría en la dimensión propósito nivel aprendiz pues se estaría reconociendo la intencionalidad del conocimiento, a partir de una situación práctica.

Se puede dar el caso que los estudiantes no sean capaz de realizar este proceso, siendo así estos se ubicarían en la dimensión propósito nivel ingenuo, ya que no se reconoce las razones que lo conllevan a la investigación.

Ítem c: en este último ítem se espera que los estudiantes sean capaces identificar las variables dependientes e independientes, argumentado porque señala su enunciado.

1. Se puede dar el caso donde se señale que la variable independiente es el tiempo pues la cantidad de aviones incrementa de acuerdo a los minutos transcurrido, y la variable dependiente es la cantidad de aviones pues esta aumenta según el tiempo, siendo esta una respuesta correcta, se ubicaría al estudiante en la dimensión contenido nivel aprendiz pues reconoce los conceptos correctamente e igualmente en la dimensión de comunicación ya que posee dominio y comunica de manera clara y coherente su respuesta.
2. Se puede presentar la situación donde el estudiante afirme que la variable dependiente es el tiempo y la independiente la cantidad de aviones que aterrizan, siendo así el estudiante estaría, según el enfoque de la EpC, en la dimensión comunicación nivel ingenuo, pues expresaría ideas que muestran la falta de propiedad del conocimiento.

Tarea 4.

La tarea 4, recopila las tareas anteriores pues se desea ver que tanto ha comprendido el estudiante y con qué facilidad este es capaz de recorrer las diferentes dimensiones y niveles del enfoque de la EpC.

Ítem a: la tarea 4 presenta un nuevo enunciado similar al anterior, del cual se pide que los estudiantes sean capaces de construir una representación gráfica con los nuevos datos.

Se espera que los estudiantes apliquen correctamente los procesos a seguir, aspectos que esperamos que haya desarrollado en las tareas anteriores, si el estudiante realiza esto con algunos errores se podría situar en la dimensión contenido y método en el nivel principiante, pues este posee un conocimiento entre lo intuitivo y lo formal, implementa un modelo de solución basado en ejemplificaciones.

Pero si el estudiante construye sin dificultad alguna este ítem, se situará en la dimensión contenido y método en el nivel aprendiz, ya que identifica las teorías del concepto implicado y a su vez comprende la lógica de las soluciones al problema.

Ítem b: en esta actividad se espera que el estudiante busque una estrategia para determinar el tiempo. El objetivo es enfrentar a los estudiantes a una situación de cambio. Se espera que los estudiantes respondan de las siguientes maneras:

Por deducciones, ejemplo que determinen que si por cada 102 minutos hay 6 aviones entonces cada 17 minutos hay un avión en la pista, pues el estudiante implementa modelos mecánicos, aunque logra dar solución es un proceso que se sitúa en el nivel principiante en la dimensión método.

Otra forma es que los estudiantes determinen una expresión el cual la puedan igualar al tiempo que se les indica y así determinar la cantidad de aviones en la pista. De tal forma que el estudiante comprende la lógica de los métodos de solución desde una perspectiva matemática. Acción que corresponde a la dimensión método y contenido estando en el nivel aprendiz.

Ítem c: en esta actividad se espera que el estudiante bosqueje una forma para determinar el número de aviones dado la cantidad tiempo; la intención es enfrentar al

estudiante ante situaciones que no tenga que contar, en caso de ser este el proceso que se desarrolle, se propone una cantidad de tiempo mayor, para que el estudiante busque una estrategia apropiada que le evite realizar un proceso adictivo. Por ello se espera que los estudiantes enuncien una estrategia para determinar que la cantidad de aviones sin importar el tiempo establecido.

Si los estudiantes son capaces de comunicar una estrategia válida con la cual se pueda determinar el número de aviones sin importar el tiempo este se situará en la dimensión método, contenido y formas de comunicación, movilizándose así en el nivel aprendiz, ya que el estudiante expresa correctamente procesos enmarcados en contenidos matemáticos.

Sin embargo, se pueden presentar situaciones donde los estudiantes no logren dar respuesta a esta actividad, siendo así los estudiantes se encontrarán en la dimensión método nivel ingenuo, ya que no aplica procesos correctos mostrando falta de contenidos matemáticos.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta explícitamente los resultados obtenidos durante la aplicación de las tareas (*Aprendiendo a preparar un buen café* y *El aeropuerto*) y los momentos de intervención con los estudiantes, donde fue posible evidenciar las dificultades y obstáculos que presentaban los participantes para la comprensión del concepto de función lineal, y al mismo tiempo visualizar los avances del proceso de comprensión por niveles y dimensiones desde el enfoque de la EpC.

La primera situación “*Aprendiendo a preparar un buen café*”, se utilizó como instrumento en la etapa de exploración para indagar acerca de lo que el estudiante conoce, partiendo de algunas concepciones acerca de la proporcionalidad para introducir el concepto de función lineal y posteriormente reconocer los saberes previos de los estudiantes. De hecho, se prosigue con la segunda situación “*El aeropuerto*” como instrumento para el desarrollo de la investigación guiada, para evidenciar y caracterizar el desarrollo y habilidades de los estudiantes, tales como: la observación, comunicación, comparación, registro de datos, entre otros, con fin de potenciar en los estudiantes flexibilidad alcanzando un mayor nivel y dimensión de comprensión de la EpC.

En este sentido, este apartado muestra las producciones realizadas por los estudiantes, donde se destacan las formas de resolución de problemas y las diversas estrategias empleadas por los participantes, estas se consideran apropiadas para dar cuenta de ciertas características del proceso de modelación matemática de los estudiantes cuando trabajan en forma dinámica el concepto de función lineal.

Para el análisis final, se ha privilegiado la información diseñada la rejilla de análisis, que consideramos que fue relevante para lograr caracterizar elementos que evidencien la comprensión del concepto de función lineal. Se analiza en relación con los supuestos iniciales discutidos en el análisis a priori, la puesta en escena y el lugar que pueden ocupar los estudiantes dentro de los niveles y dimensiones de comprensión referenciados en las categorías de análisis. Cabe resaltar que más que aportar elementos para la enseñanza y comprensión del concepto de función lineal, lo que se intenta en esta investigación es potenciar en el estudiante elementos didácticos de la (EpC) y fomentar el desarrollo del pensamiento variacional.

4.2 Análisis posteriori de las situaciones

4.2.1. Análisis a posteriori de la situación 1: Aprendiendo a preparar un buen café

Para la aplicación de la secuencia propuesta en este trabajo de investigación se contó con 11 secciones de clases, con tiempo entre 40 min y 45 min, de las cuales 6 de ellas se usaron para realizar observaciones e interacciones con los estudiantes, estableciendo grupos de diálogos y dinámicas, con el objetivo de conocer cuáles son los medios extracurriculares donde se moviliza el estudiante, cómo es su comportamiento ante la presentación de un nuevo contenido matemático, como es su actitud o comportamiento con sus compañeros en clases de matemáticas, conocer sus formas de comunicación o expresión y observar cómo el estudiante interpreta un enunciado bien sea matemático o no, y a la vez familiarizar a los estudiantes con ejemplificaciones básicas del concepto de función lineal, además 3 secciones fueron usadas para la aplicación de la situación n°1 (***aprendiendo a preparar un buen café***) centrados en la etapa de exploración, y 2 secciones para la aplicación de la situación n°2 (***el aeropuerto***) centrada en la etapa de la investigación guiada.

Una vez entregada las hojas de trabajo, se hizo necesario intervenir en el discurso de la explicación de cada una de las tareas, motivando al estudiante a enfrentarse con la ejecución de la situación problema. Posteriormente se apuntó a que los estudiantes identificaran porqué es importante y significativo realizar estas tareas.

Por consiguiente, los estudiantes de cada grupo asumieron un rol más activo y una actitud de líder, asumiendo con responsabilidad cada uno de los ejercicios. Se observó el trabajo cooperativo y la actitud entusiasta por dar una respuesta efectiva a cada una de las

tareas asignadas. Así mismo, participaban las ideas/opiniones de cada integrante del grupo, teniendo como opción de una posible respuesta. Ilustración N°5, demuestra el momento en que los estudiantes se inician en el desarrollo de la tarea.



Ilustración 5 Inicio de la situación "Aprendiendo a preparar un buen café"

Análisis de la tarea 1

En relación a la pregunta, se observó que algunos estudiantes alcanzaron a relacionar las magnitudes de los casos 1 y 2 de cada cafetería, debido a que (10 de 14 estudiantes – 71,4%) lograron establecer una exploración visualizando y comparando las variables (cantidad de cucharadas por vasos, en cada caso) para esta situación a Pedro le gusta el preparado de café con mayor intensidad, dentro del cual, el estudiante observa en cada caso, que entre más cucharadas de café mayor intensidad de sabor. En el caso 1, el estudiante puede lograr identificar cuál de las dos cafeterías tiene mayor intensidad de

sabor, de acuerdo al número de cucharas de café, e igualmente lo hace con el caso 2, pero en el caso 3 evidencia una igualdad de intensidad de sabor para ambas cafeterías (concepción errónea) ya que el estudiante considera que al agregar una cucharada de café y aumentar un vaso de agua mantiene la misma intensidad de sabor a café. Para el estudiante entra en juego las estrategias a utilizar para desarrollar la situación problema y decidir cuál de las cafeterías puede ir Pedro a tomar su café.

se obtuvieron respuestas como la siguiente:

Representa la cantidad de café.

Representa la cantidad de agua en mililitros.
Cada vaso contiene 200ml de capacidad

Tarea 1. Pedro vive muy cerca de las dos cafeterías y sabemos que él prefiere el preparado de café con mayor intensidad. Según el gusto de Pedro, decide para cada uno de los tres casos, ¿qué cafetería ofrece el mejor preparado de café?

Explica detalladamente qué estrategia(s) utilizaste para tomar la decisión más acertada.

Caso 1. La cafetería 1 tiene más cantidad de cucharadas de café. Entonces tiene más intensidad.

Caso 2. La cafetería 2 tiene más cantidad de cucharadas de café. Esta tiene más intensidad.

Caso 3. Las cafetería 1 tiene 7 cucharadas de café y 5 vasos de agua, pero la cafetería 2 aumenta en una cucharada y un vaso de agua. Entonces tienen la misma intensidad de sabor. Pedro puede ir a cualquiera de las 2 cafeterías

Ilustración 6 Análisis de tarea 1.

Traducción

Caso 1. La cafetería 1 tiene más cantidad de cucharadas de café. Entonces tiene más intensidad.

Caso 2. La cafetería 2 tiene más cantidad de cucharadas de café. Esta tiene más intensidad.

Caso 3. Las cafeterías 1 tiene 7 cucharadas de café y 5 vasos de agua, pero la cafetería 2 aumenta en una cucharada y un vaso de agua. Entonces tienen la misma intensidad de sabor. Pedro puede ir a cualquiera de las dos cafeterías

Lo anterior deja ver que para los casos 1 y 2, los estudiantes tomaban una decisión simplemente comparando la cantidad de cucharitas de café y la cantidad de vasos de agua. Es decir, se afirma que una de las cafeterías tiene mayor intensidad de sabor con el hecho de contemplar mayores cucharadas de café y menor número de vasos de agua.

Un grupo de estudiantes discutían sobre la elección de las cafeterías, mientras dialogaban, expresaban lo siguiente:

E: el café será más intenso si le hechas muchas cucharadas de café

F: si, pero ¿qué pasa si tiene más vasos de agua? Hay que tener en cuenta la cantidad de vasos de agua.

E: ¡será! Pero más cuenta las cucharadas de café. O ¿no?

F: mire. Si mi mamá prepara un café con 4 cucharadas de café y 3 vasos de agua y su mamá lo prepara con la misma cantidad de cucharadas (4) pero le hecha 6 vasos de agua. ¿Cuál de los 2 preparados tiene mayor intensidad de sabor?

E: pues es obvio, será el que prepara su mamá, ummm ya le entendí.

F: Ammm, si ve que tengo razón.

Aquí se puede evidenciar claramente las estrategias que utilizan los estudiantes para justificar o explicar sus ideas y pensamientos, logrando hacerlo de una forma espontánea, de cierta manera es un aspecto que posibilita el proceso para la comprensión (Giraldo, 2012); este claro ejemplo permitió que su compañero comprendiera lo que él le trataba de decir. Aunque se nota un esfuerzo por el abordaje de contenidos matemáticos por el estudiante (F), no se deja de lado la actitud con la que el estudiante (E) asume la situación y la forma minuciosa de ambos al explorar la situación. Se reconoce la forma de modelar la situación problema, en la que se busca la forma de encontrar una respuesta factiblemente.

En el caso 3, no es correcto el accionar intuitivo de mayor numero de cucharadas de café y menor número de vasos, pues en esta situación requiere ver como el estudiante

implementa una estrategia de razón, pues se desea saber qué cantidad de chucharas se necesita por vaso.

Este porcentaje de estudiantes, permite mencionar que, debidamente se movilizan en las **dimensiones de métodos y formas de comunicación**, alcanzando el **nivel ingenuo**; puesto que, las estrategias aditivas que no son suficientes para responder los tres casos correctamente y la forma de expresar sus argumentos muestran falta de conocimientos matemáticos.

A su vez dentro del análisis a priori no se consideró la siguiente situación; que 2 de 14 estudiantes no lograran comprender el contexto de la situación, es decir que la manera en que se presentó la situación no fue totalmente clara para algunos estudiantes; ya que, el contexto dice que defina para la cafetería uno y cafetería dos por cada caso, y no que defina cual caso es el conveniente.

The image shows a handwritten student response on lined paper. At the top left, there is a legend: a spoon icon labeled 'Representa la cantidad de café.' and a glass icon labeled 'Representa la cantidad de agua en mililitros. Cada vaso contiene 200ml de capacidad.' To the right of the legend is the problem statement: 'Tarea 1. Pedro vive muy cerca de las dos cafeterías y sabemos que él prefiere el preparado de café con mayor intensidad. Según el gusto de Pedro, decide para cada uno de los tres casos, ¿qué cafetería ofrece el mejor preparado de café?'. Below the problem statement is the instruction: 'Explica detalladamente qué estrategia(s) utilizaste para tomar la decisión más acertada.' The student's response is written in three paragraphs: 'Para Pedro la mejor cafetería sería el caso 3 por que son las que tienen mayor intensidad y ofrecen el mejor café para Pedro. y ofrecen el mejor', 'En el caso 2 y iría a la Cafetería 2 por que está mas cargado que la Cafetería 1.', and 'Caso 1 = Cafetería 1 por que tiene mas intensidad que la otra.'

Ilustración 7 Análisis de la Tarea, momento dos.

Traducción

Para Pedro la mejor cafetería sería el caso 3 porque son las que tienen, mayor intensidad y ofrecen el mejor café para Pedro.

En el caso 2: iría a la cafetería 2, porque está más cargado que la cafetería 1.

Caso 1: cafetería 1 porque tiene más intensidad que la otra.

Estos estudiantes no lograron justificar correctamente la situación presentada, por ello no es posible ubicarlos en un nivel ni dimensión del enfoque de la EpC, ya que no se consideró esta posibilidad de respuesta.

De otro lado, el resto de los estudiantes no logran evidenciar correctamente las comparaciones que se debe establecer en la situación problema, ya que presentan confusión con la intensidad de sabor a café con el sabor dulce del azúcar o confunden los casos de la cafetería 1 con la cafetería 2, mientras que otros participantes no respondieron a la tarea 1. Ver ilustración N°8

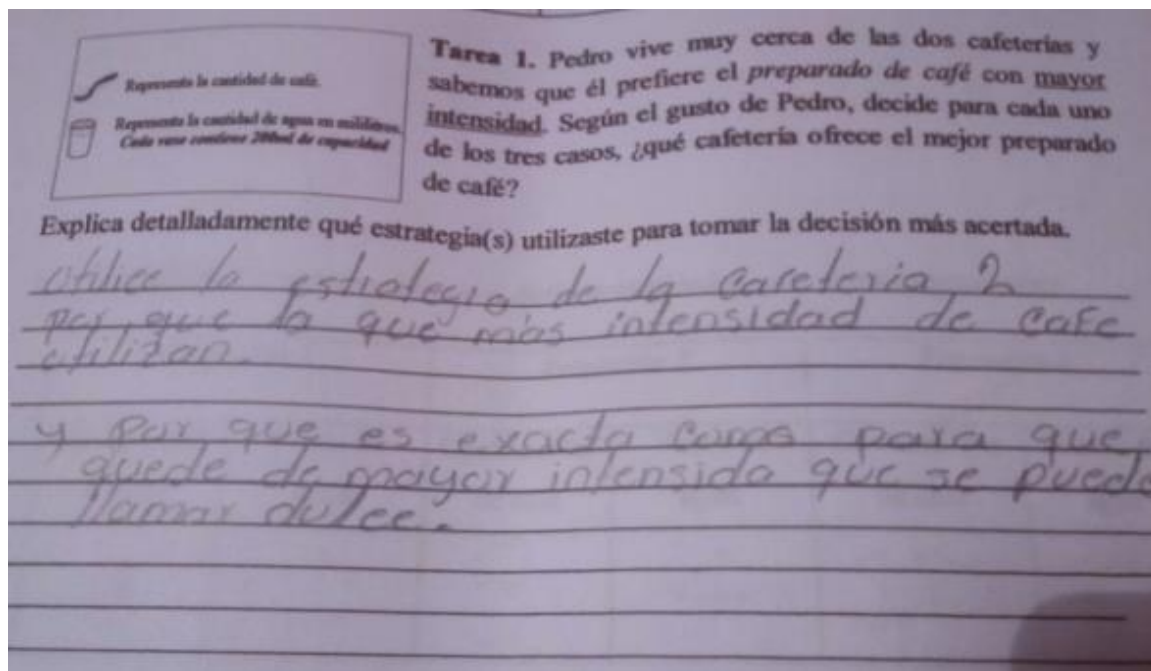


Ilustración 8 Análisis de la Tarea 1, momento 3.

Traducción

Utilice la estrategia de la cafetería 2 por que la que más intensidad de café utilizan.

Y porque es exacta como para que quede de mayor intensidad que se puede llamar dulce.

Este porcentaje de estudiantes permite deducir que posiblemente se proporcionó una alta desconcentración y poca asimilación de la información o en efecto probablemente se presentó algunos factores intrínsecos al desarrollo del niño o factores externos de la

enseñanza/aprendizaje (Maciques, 2004). Para estos casos, se recomienda que se debe realizar un mayor énfasis en casos de proporcionalidad y de comparaciones entre magnitudes, en la que se articulen procedimientos de exploración y de contextos cercanos a la realidad.

Análisis de la tarea 2; pregunta 1

En efecto, en esta pregunta 1, el 57,1% de los estudiantes (8 de 14) logran identificar la relación de proporcionalidad entre las magnitudes que se establecen en el preparado original. La identificación de los patrones de medidas para el preparado de café hace que sea efectiva una respuesta.

Un grupo de estudiante, establece una estrategia dibujando una cantidad de vasos de agua y de cucharadas de café requeridos para un preparado deseado; en la que deducen que, para preparar más café con la misma intensidad de sabor, se debe preparar otra cantidad igual, es decir, con los mismos patrones de medidas, ver ilustración N° 9.

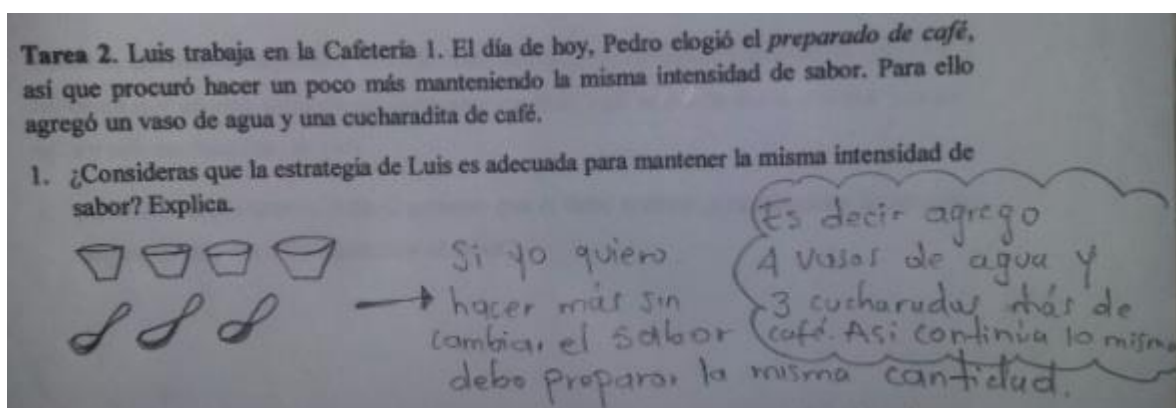


Ilustración 9 Análisis de la tarea 2

Traducción

Si yo quiero hacer más sin cambiar el sabor debo preparar la misma cantidad.

Es decir, agrego 4 vasos de agua y 3 cucharadas más de café. Así continúa lo mismo.

Este modelo ya había sido anticipado en el análisis a priori, es interesante observar la semejanza presentada entre ambas soluciones, pues esto implica posiblemente una cierta comprensión adicional acerca del concepto de función lineal, por lo que reconoce que debe haber una proporcionalidad para aumentar más cantidad del preparado de café. Con este diseño el estudiante tiene la posibilidad de familiarizarse con contextos cercanos a su realidad, vinculado a través de conocimientos previos o adquiridos con anterioridad.

Además, la simple asignación simbólica de las variables, muestra un alto nivel de comprensión sobre lo que se hace, que también se evidencia, por ejemplo, en la explicación escrita del modelo, demostrando con ello, claridad en la forma de comunicar a otros lo que saben. Otro aspecto importante en la construcción de esta pregunta, es la manera en que los conocimientos informales de los estudiantes lograron entrelazarse y evolucionar hacia la consideración de aspectos generalizables.

En concordancia con las categorías de análisis propuestas, estos estudiantes pueden asociarse con un **nivel de comprensión maestría** movilizándose en las **dimensiones de contenido y método**, ya que los participantes comprenden la importancia del contenido matemático y apropia diversos métodos de conocimiento de manera sofisticada movilizándose flexiblemente en el conocimiento matemático.

De hecho, esta producción no fue la única que permitió caracterizar la actividad matemática de los estudiantes dentro de este nivel, puesto que el otro grupo también logró construir un modelo potente con claros nexos con lo matemático. Ver ilustraciones N°10 y 11.

Tarea 2. Luis trabaja en la Cafetería 1. El día de hoy, Pedro elogió el *preparado de café*, así que procuró hacer un poco más manteniendo la misma intensidad de sabor. Para ello agregó un vaso de agua y una cucharadita de café.

1. ¿Consideras que la estrategia de Luis es adecuada para mantener la misma intensidad de sabor? Explica.

No. porque al añadirle 1 vaso de agua y 1 cucharada de café no tendrá la misma intensidad porque 1 cucharada de café no es suficiente para 1 vaso de agua

Ilustración 10 Análisis de la tarea2, momento 2

Traducción

No, porque al añadirle 1 vaso de agua y 1 cucharada de café no tendrá la misma intensidad, porque 1 cucharada de café no es suficiente para para 1 vaso de agua.

Tarea 2. Luis trabaja en la Cafetería 1. El día de hoy, Pedro elogió el *preparado de café*, así que procuró hacer un poco más manteniendo la misma intensidad de sabor. Para ello agregó un vaso de agua y una cucharadita de café.

1. ¿Consideras que la estrategia de Luis es adecuada para mantener la misma intensidad de sabor? Explica.

No, porque Luis debe tener en cuenta, las cantidades necesarias para preparar más café. Él no puede echarle un solo vaso de agua y una cucharada de café. Debe agregarle las mismas cantidades que utilizó en la primera preparación, así no cambiaría su intensidad de sabor y queda con más cantidad de café

Ilustración 11 Análisis de la tarea 2, momento 3.

Traducción

No, porque Luis debe tener en cuenta las cantidades necesarias para preparar más café.

Él no puede echarle un solo vaso de agua y una cucharada de café. Debe agregarle las mismas cantidades que utilizó en la primera preparación, así o cambiaría su intensidad de sabor y queda con más cantidad de café.

Esencialmente, esta respuesta construida por este grupo, representa un buen ejemplo del proceso de modelar problemas, básicamente porque los integrantes del grupo construyen su modelo a partir de consideraciones netas del contexto, identificando algunos aspectos claves de la situación y de la manera en que estos se relacionan, así poco a poco logran transformarlos con las herramientas matemáticas que conocen.

Es importante señalar que el otro porcentaje de los estudiantes (42,8%, 6 de 14), aún no han establecido un acercamiento de los conceptos matemáticos involucrados en la situación, razón por la cual los integrantes están asociados a un **nivel de comprensión ingenuo y principiante**, y no a un nivel de comprensión más avanzado; que además se diferencia del nivel anterior porque los estudiantes son capaces de identificar las teorías y los conocimientos disciplinares (definiciones, relaciones) y la lógica de los métodos de solución de una situación desde una perspectiva matemática. Ver ilustraciones N° 12 y 13.

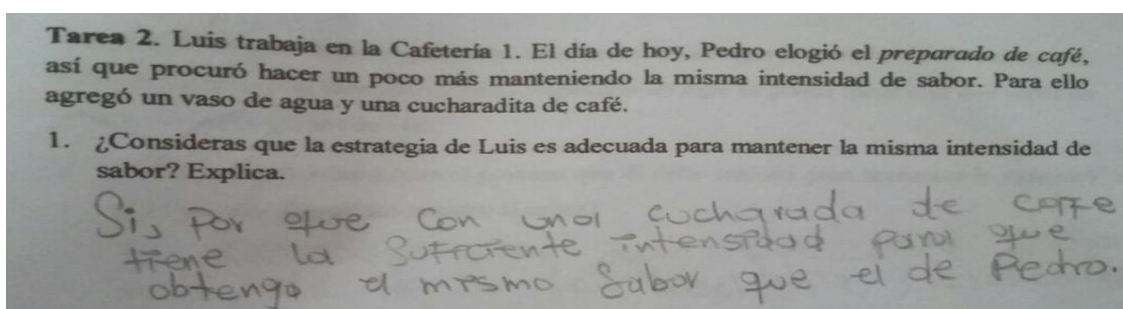


Ilustración 12 Análisis de la tarea 2, momento 4

Traducción

Si porque con una cucharada de café tiene la suficiente intensidad para que obtenga el mismo sabor que el de Pedro.

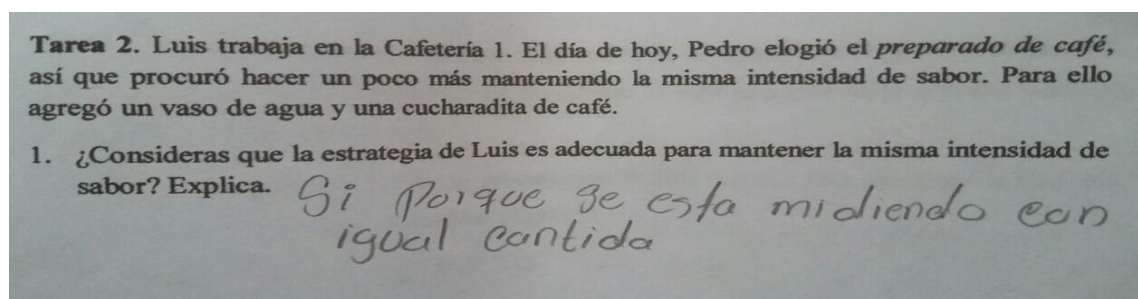


Ilustración 13 Análisis de la tarea 2, momento 5

Sí, porque se está midiendo con igual cantidad.

En este particular caso, se evidencia en los estudiantes una falta de apropiación del enunciado matemático, además no establecen una estructura de solución; este es un claro ejemplo, donde se anexa los insuficientes conocimientos matemáticos de proporcionalidad, lo que permite que se aleje de la comprensión del concepto de función lineal. Pues bien, los

integrantes de estos grupos piensan que para preparar más café sólo se necesita agregar más agua y café, y no hacen una relación o comparación entre el primer preparado con el último que se espera, además suponen que por agregar la misma cantidad de agua y de café es suficiente para obtener más preparado de café con la misma intensidad de sabor.

Es importante anotar que, este diseño permite visualizar qué conocimientos obtienen los estudiantes, qué clases de estrategias o métodos utiliza para resolver una determinada situación problema.

Análisis de la tarea 2, pregunta 2, ítem a.

Según este ítem, más de la mitad de los estudiantes desarrollaron eficazmente la situación (12 de 14 estudiantes – 85,7%), en esta actividad se permitió el dinamismo del trabajo cooperativo de los participantes. En su mayoría realizaron un procedimiento acertado, debido a que usaron estratégicamente las relaciones directas de correspondencia entre las magnitudes, logrando saber las equivalencias entre las cucharadas y el vaso de agua y así poder determinar que para cada 2 vasos de agua le corresponden 5 cucharadas de café o por 1 vaso de agua le corresponde dos cucharadas y media de café.

De manera sencilla, algunos estudiantes realizaron diversos métodos para justificar la respuesta ver ilustraciones N° 14, 15 y 16, donde se deja ver que los participantes identificaron la proporcionalidad existente en el enunciado (por cada “x” cucharadas de café, le corresponde “y” vasos de agua). Esta tarea no pretende solamente que el estudiante realice una formula algebraica o una ecuación, sino que el estudiante pueda identificar la secuencia e intencionalidad del mismo.

Es importante resaltar que los estudiantes no solo evidencian la correspondencia entre las magnitudes proporcionales, sino que también reconocen e identifican los

contenidos matemáticos e intencionalidad emergente ella, lo que les permite llegar fácilmente a ciertos resultados; esto se debe a la previa exposición que se le interactuó al inicio de las observaciones de las clases.

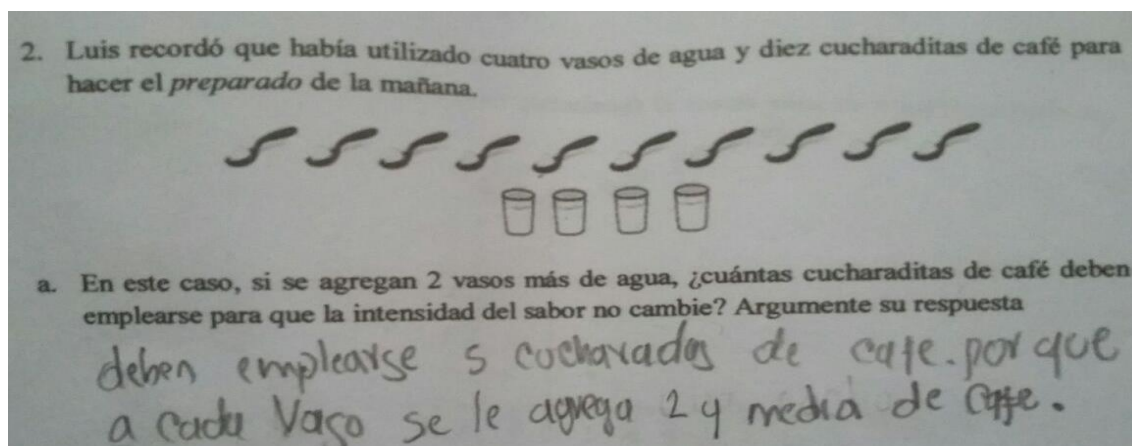


Ilustración 14 Análisis de la tarea 2, Ítem a

Traducción

Deben emplearse 5 cucharadas de café, porque a cada vaso se le agrega 2 y media de café.

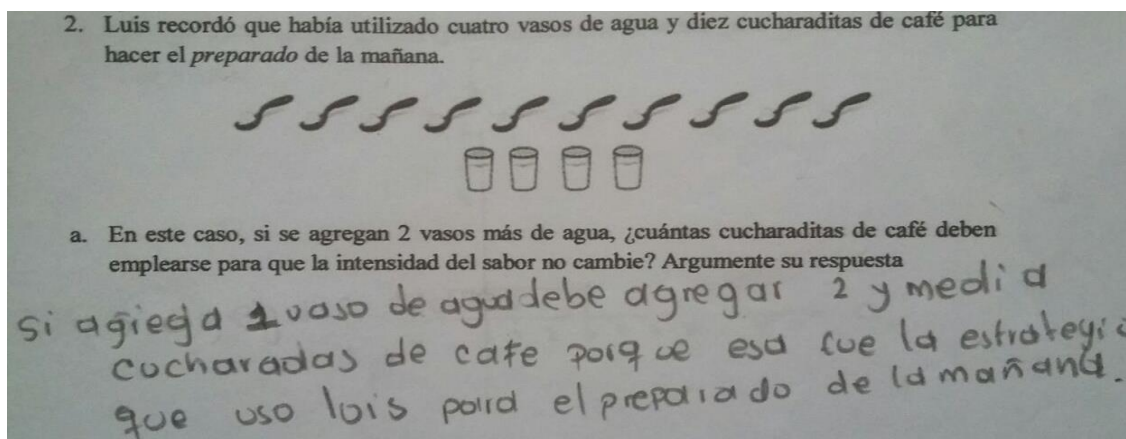


Ilustración 15 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 2

Traducción

Si agrega 1 vaso de agua debe agregar 2 y media cucharadas de café porque esa fue la estrategia que usó Luis para el preparado de la mañana.

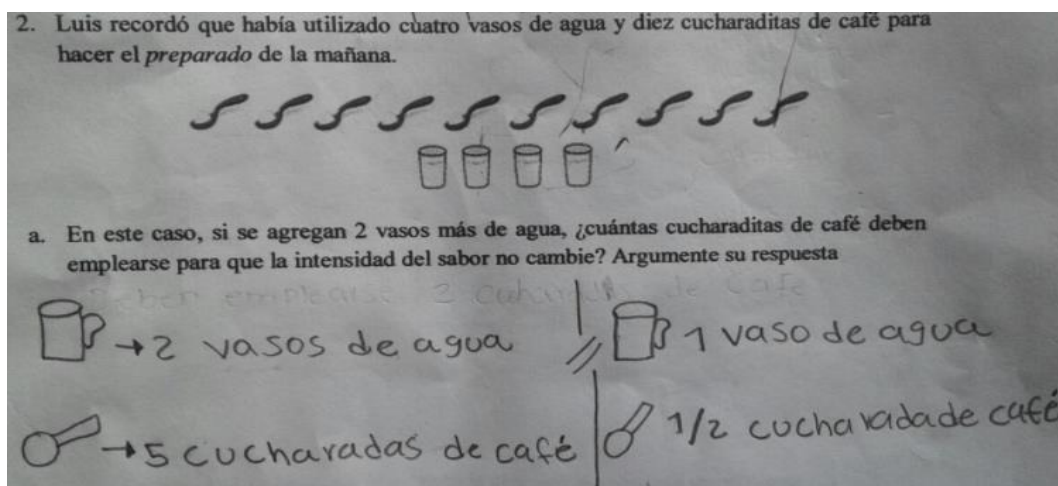


Ilustración 16 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 3

Por lo anterior se expresa, que este grupo de estudiantes alcanzan el nivel de maestría movilizándose entre dimensiones, ya que es capaz de comprender la importancia del contenido matemático, aplicando diversas formas de comunicar de manera apropiada y clara.

El otro 14% de los estudiantes, no perciben la relación proporcional que existe entre las magnitudes, esto se puede evidenciar, ya que no determinan algunos aspectos claves de la situación y una débil interpretación del enunciado, anulando la posibilidad de cimentar una explicación o argumentación válida de acuerdo a la dimensión de formas de comunicación de la (EpC). Ver ilustraciones N° 17 y 18

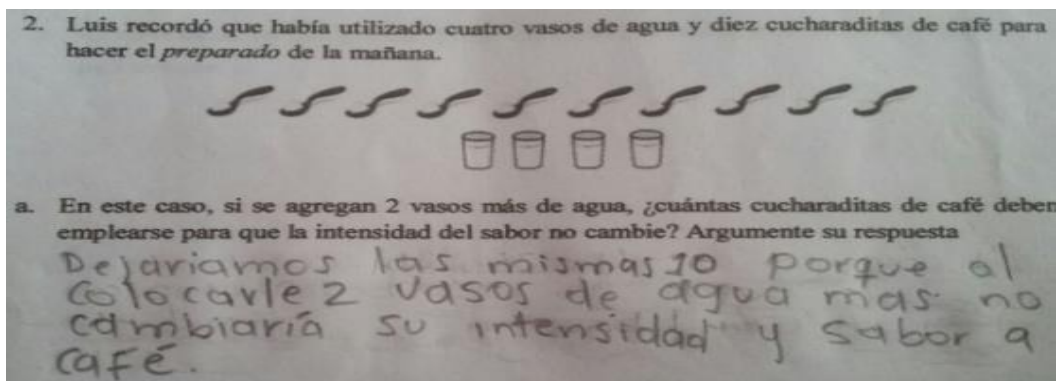


Ilustración 17 Ilustración 17 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 4

Traducción:

Dejaríamos las mismas 10 porque al colocarle 2 vasos de agua más no cambiaría su intensidad y sabor a café.

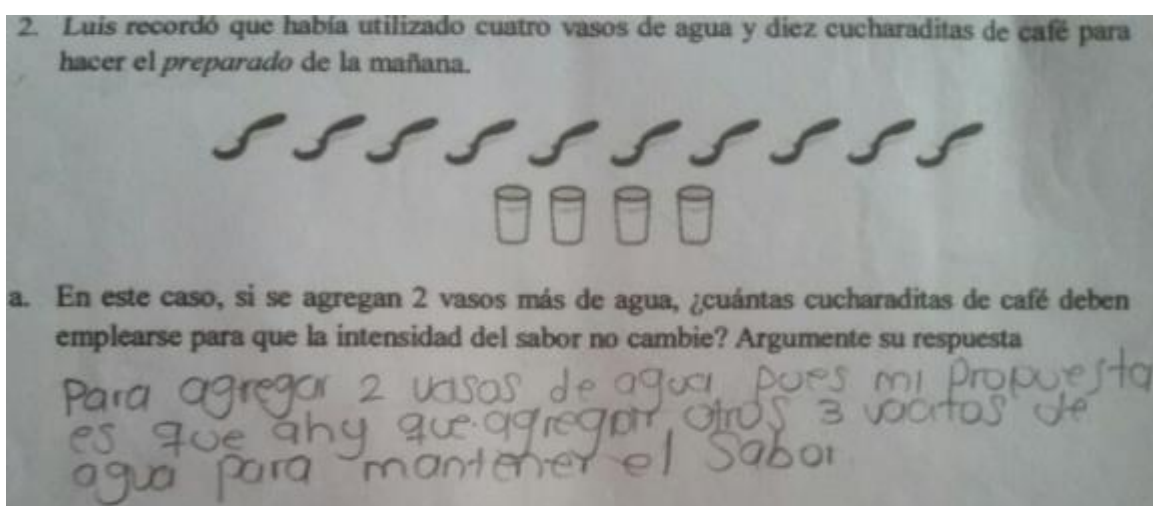


Ilustración 18 Análisis de la tarea 2, ítem a momento 5

Traducción

Para agregar 2 vasos de agua, pues mi propuesta es que hay que agregar otros 3 vasitos de agua para mantener el sabor.

Es importante señalar que este grupo, aún no hay comprensión total de los conceptos matemáticos involucrados en la situación, razón por la cual los integrantes del mismo continúan asociados a un nivel de comprensión principiante y no de maestría, puesto que, aplican modelos que no son suficientes para el desarrollo de la situación y sus argumentos muestran falta de propiedades del conocimiento.

Este análisis nos permite resaltar que, se debe hacer especial énfasis en operaciones con diferentes representaciones donde se implementen casos de proporcionalidad y

propiciar en el estudiante el pensamiento variacional, por tal motivo una de las dificultades que el estudiante presenta es que desconoce algunos de los elementos matemáticos entorno a la proporcionalidad, en la que lo direcciona al concepto de función lineal; por ende, se puede nombrar que se les dificulta desarrollar satisfactoriamente la actividad.

Análisis de la tarea 2, pregunta 2, ítem b.

En este ítem se determinó que (10 de 14 estudiantes – 71,4%) lograron identificar la relación que debe haber entre las magnitudes para que exista una proporcionalidad y corroborar la intensidad que hay expuesta en ella.

Así mismo, los estudiantes contemplaron que debe existir una correspondencia directamente proporcional entre las variables y así el sabor o intensidad del café no variar. Algunos de los participantes, mostraron inquietudes a la hora de realizar esta situación, mostrando señas y gestos entre ellos, en medio del dialogo expresaban palabras como:

A: “el médico le dijo a mi papá que cuando tomara agua le agregara sólo 2 sobrecitos de vitamina a 1 vaso”

B: Eso quiere decir que por 1 vaso de agua son 2 sobrecitos. Entonces 2 vasos de agua le echan 4 sobrecitos.

A: Sí, y así sucesivamente. Y así la dosis no se altera.

B: Ah bueno, entonces implementemos este método

Este breve ejemplo, expone de forma precisa, que el contexto en el que se mueve el estudiante es importante para el proceso de su aprendizaje. La forma de comunicar y relacionar aspectos cercanos a la realidad con la situación expuesta, demuestra que el

estudiante obtiene un acercamiento significativo a la comprensión del concepto. De este modo algunos estudiantes respondieron lo siguiente. Ver ilustraciones N°19 y 20.

b. Proponga otras 3 preparaciones con distintas cantidades, pero con el mismo sabor.

<i>Propuesta 1</i>		<i>Propuesta 2</i>		<i>Propuesta 3</i>	
Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua
4	2	12	6	24	12

Ilustración 19 Análisis de la tarea 2, ítem b

b. Proponga otras 3 preparaciones con distintas cantidades, pero con el mismo sabor.

<i>Propuesta 1</i>		<i>Propuesta 2</i>		<i>Propuesta 3</i>	
Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua
3	2	6	4	9	6

Ilustración 20 Análisis de la tarea 2, ítem b momento 2

Este análisis permite determinar que los estudiantes se movilizan en el **nivel de maestría**, logrando comprender la intencionalidad y los aspectos matemáticos involucrados en la situación, expresando de manera clara el proceso estratégico por el cual se logró llegar a la respuesta correcta.

De otro modo se estipula que el resto de los estudiantes 28,5% (4 de 14) presentaron algunas dificultades para contemplar las características básicas que expone la situación (no reconocen las variables, débil interpretación etc.), ya que desconocen algunos métodos

particulares que le pueden servir de ayuda para identificar el concepto de proporcionalidad que esta emerge, para este caso el estudiante no tiene en cuenta la correspondencia entre las magnitudes, dejando de lado que la intensidad de cucharada de café tiene una única correspondencia o equivalencia con los vasos de agua. Ver ilustración N° 21.

b. Proponga otras 3 preparaciones con distintas cantidades, pero con el mismo sabor.

<i>Propuesta 1</i>		<i>Propuesta 2</i>		<i>Propuesta 3</i>	
Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua	Cucharaditas de café	Vasos de agua
3	2	12	6	16	8

Ilustración 21 Análisis de la tarea 2, ítem b momento 3

El desarrollo de este ítem permitió observar que algunos estudiantes colocaron al azar algunas magnitudes, lo que hace que ellos mismos se convenzan de que están haciendo correctamente las actividades; ya que desconocen totalmente la intención de la actividad. Por otro lado, se presentó una débil estrategia para elaborar una correcta respuesta, por ende, se les dificultaba expresar y comunicar sus ideas al respecto. Estos estudiantes se pueden situar en un **nivel ingenuo de comprensión**, ya que de acuerdo a la EpC no lograron movilizarse flexiblemente en el conocimiento matemático.

Análisis de la tarea 3

Pregunta 1

En la situación de la pregunta 1, entra en juego la forma de interacción y exploración del estudiante. Durante el desarrollo de este apartado se evidenció que el 85,7% (12 de 14 estudiante) demostraron buena comunicación de conocimientos y desarrollo flexible de hipótesis o conjeturas, además se demostró dominio de la situación para obtener una buena argumentación y análisis del mismo.

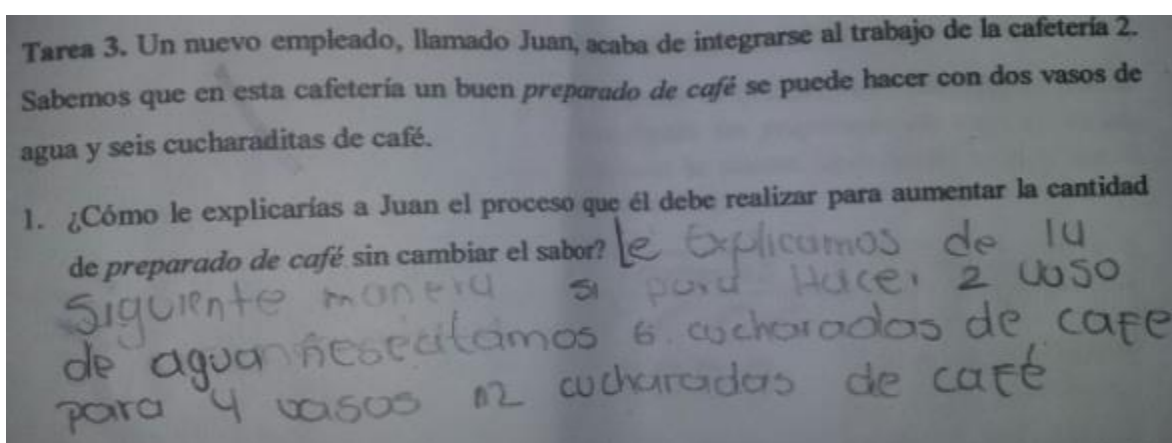


Ilustración 22 Análisis de la tarea 3

Traducción

Le explicamos de la siguiente manera, si para hacer 2 vasos de agua necesitamos 6 cucharadas de café para 4 vasos 12 de café.

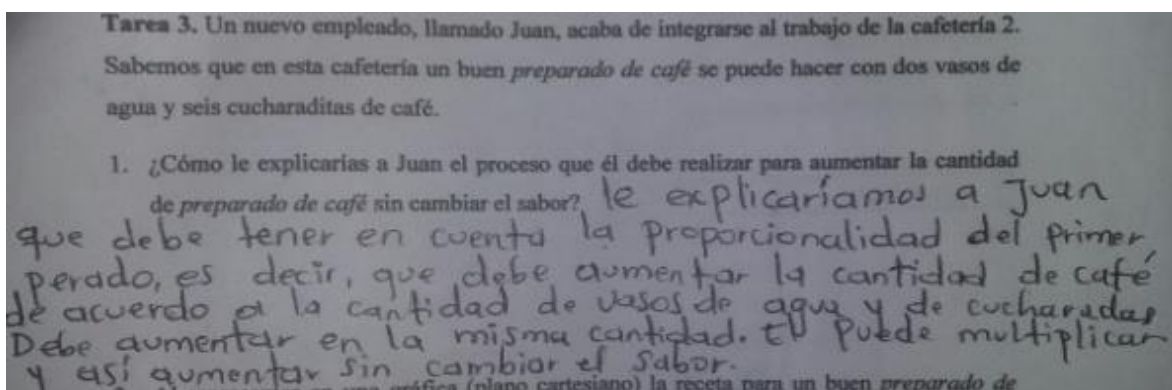


Ilustración 23 Análisis de la tarea 3, momento 2

Traducción: le explicaríamos a Juan que debe tener en cuenta la proporcionalidad del primer preparado, es decir, que debe aumentar la cantidad de café de acuerdo a la cantidad de vasos de agua y de cucharadas. Debe aumentar en la misma cantidad. Él puede multiplicar y así aumentar sin cambiar el sabor.

En este último se puede observar que el estudiante, trata de mostrar un proceso aplicando la multiplicación, aunque no lo mostró por escrito, lo hace argumentando verbalmente a su compañero lo siguiente:

G: Si Juan multiplica la cantidad de cucharadas y de vasos de agua por el mismo factor, podrá darse cuenta que aumentará la cantidad de café sin cambiar la intensidad.

H: ¿O sea que, si Juan multiplica los 2 vasos de agua por 2 (2x2) y las 6 cucharaditas de café por la misma cantidad (6x2) aumentaría y no cambiaría la intensidad?

G: Exacto. Si Juan quiere duplicar la cantidad de café, debe multiplicar las magnitudes por 2, si quiere triplicar, debe multiplicar ambas magnitudes por 3, y así va avanzando y aumentando la cantidad del preparado de café.

H: Sí, ya veo.

Al observar a los estudiantes, se pudo evidenciar que la mayoría de ellos interactúa sobre lo que conocen, se hacen preguntas entre los integrantes de un mismo grupo, o en efecto de un grupo a otro, esto es posible ya que, algunos estudiantes presentan dudas e inquietudes al momento de desarrollar una tarea y buscan una forma de apoyarse con otro compañero quien ya tenga claro o haya entendido perfectamente. Estas formas de comunicar inquietudes, permite que el estudiante se retroalimente de lo que sabe; con base a la EpC, los estudiantes cuando expresan o comunican sus conocimientos van adquiriendo más información y es posible que logren comprender la intencionalidad de la tarea. Estos estudiantes se sitúan según la rejilla de análisis en un nivel de aprendiz acercándose al nivel de maestría movilizándose en las dimensiones de propósito y formas de comunicación, ya que los estudiantes muestran un dominio flexible y comunicativo frente al eje temático, a partir de las reflexiones emergentes de los desempeños de comprensión e igualmente

identifica la intencionalidad del conocimiento, a partir de la reflexión de situaciones prácticas.

La otra parte de los estudiantes (2 de 14 – 14,3%) obtuvieron algunas falencias y dificultades en la interpretación y argumentación del enunciado, a lo anterior se le suma que estos estudiantes no tienen claro las características que se requiere para que las magnitudes estén en constante proporcionalidad. Aunque algunos grupos no alcanzaron a establecer una estrategia significativa que les permitiera profundizar en el enunciado, esto no quiere decir que el estudiante no asimile el contenido matemático expuesto en la situación. De acuerdo a la rejilla de análisis, estos estudiantes se movilizan en un nivel principiante, ya que los participantes poseen un conocimiento entre lo intuitivo y lo formal, además implementa un modelo de solución basado mecánicamente en ejemplificaciones. Ver ilustraciones N° 24 y 25.

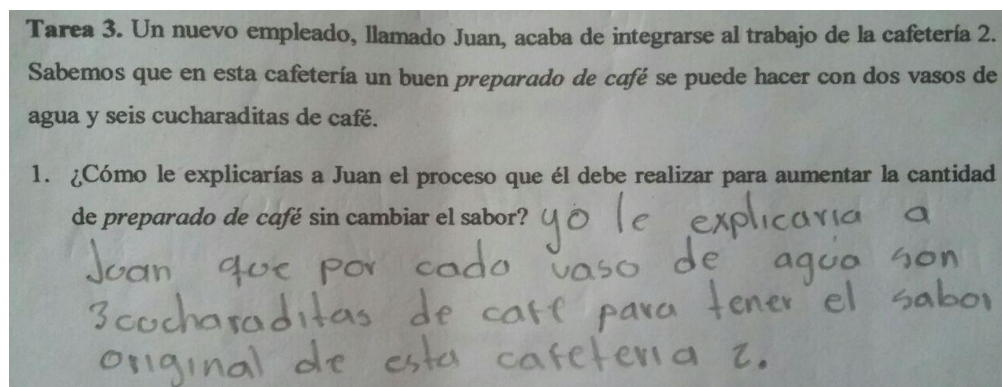


Ilustración 24 Análisis de la tarea 3, momento 3

Traducción: Yo le explicaré a Juan que por cada vaso de agua son 3 cucharaditas de café para tener el sabor original de esta cafetería 2.

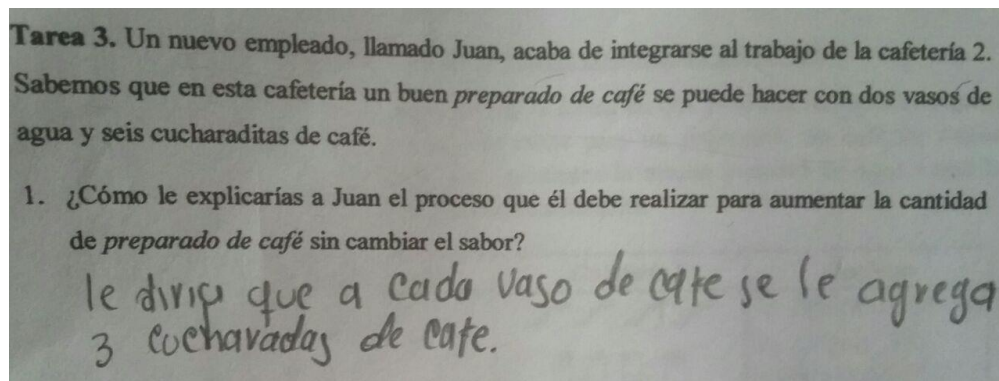


Ilustración 25 Análisis de la tarea 3, momento 4

Traducción: Le diría que a cada vaso de café se le agrega 3 cucharadas de café.

Por lo anterior se evidencia, que estos estudiantes no usan un método o una estrategia de solución que le permita profundizar en el análisis e interpretación de una situación problema, en este ítem se hace visible la búsqueda de regularidades a través de la identificación de las magnitudes que intervienen en el problema y como estas se relacionan; en efecto, un grupo de estudiantes no logró responder correctamente, lo que implica el uso de estrategias informales ligadas al contexto de la situación misma, caracterizadas fundamentalmente por la organización visual de los datos, esquematizaciones, búsqueda de regularidades y relaciones no matemáticas, y mucho menos participación activa, que dé cuenta de su comunicación y desarrollo de conocimientos adquiridos antes y durante la ejecución de las tareas, por lo cual, se requiere una intervención detallada en este aspecto. (Aguirre, 2016).

Análisis de la tarea 3, ítem a, b y c.

En esta tarea se les pide a los estudiantes que expresen ciertas consideraciones con respecto a elementos pertenecientes al plano cartesiano aspecto que fue ilustrado, para saber si reconocen la abscisa, la ordenada, y el significado que representa un punto en el plano cartesiano.

En relación al ítem *a* de la tarea 3. Se observó que de los 14 grupos formados por los estudiantes solo 8 grupos mostraron reconocer que es una abscisa y argumentar cual es el papel asignado en la representación gráfica.

Se observa que, aunque la representación gráfica enseñada no posee elementos evidentes que le indiquen a los estudiantes cuales son las funciones de cada uno. El estudiante fue capaz de reconocer las características y relacionarlo con la situación, (un integrante puede definir la abscisa como la cantidad de vasos de agua y la ordenada como la cantidad de cucharadas de café; y viceversa) aspecto importante ya que nos permite identificar como el estudiante es capaz de representar la situación gráficamente. Es decir que es competente a la hora de señalar las variables dependientes e independientes de una situación.

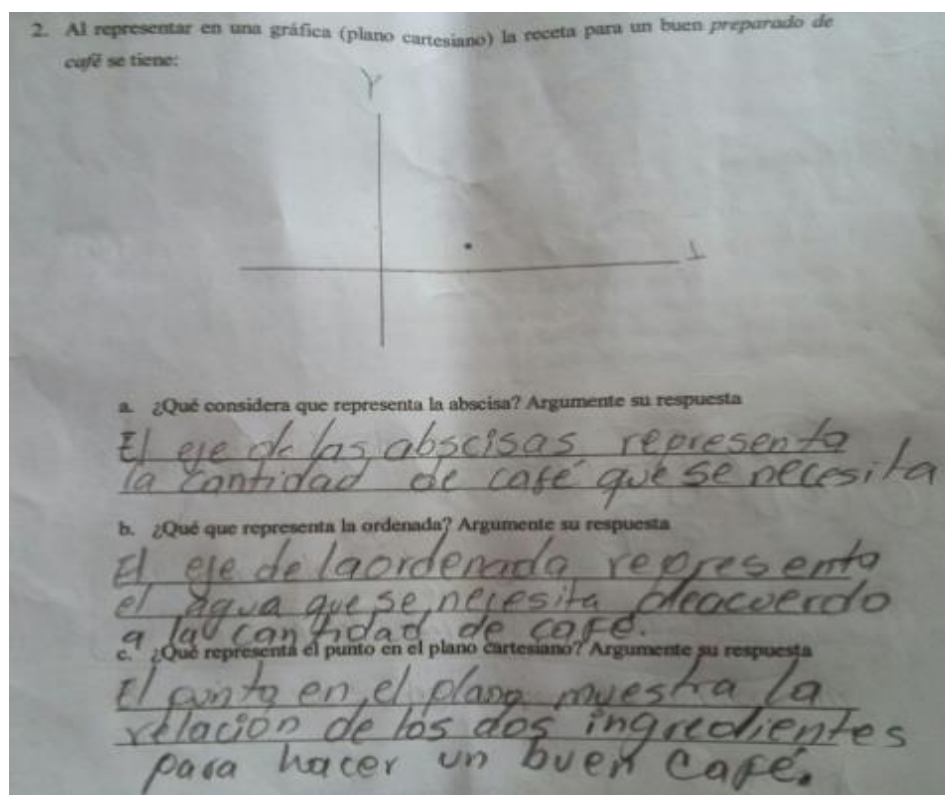


Ilustración 26 Análisis de la tarea 3, momento 5.

Traducción: El eje de las abscisas representa la cantidad de café que se necesita. El eje de la ordenada representa el agua que se necesita de acuerdo a la cantidad de café.

El punto en el plano muestra la relación de los ingredientes para hacer un buen café.

En relación al ítem *b* de la tarea 3. Se observó que 7 grupos mostraron reconocer que es una abscisa y la ordenada argumentar cuál era la relación existente entre los vasos de agua y las cucharaditas de café. Las respuestas señaladas por estos grupos apuntaron al reconocimiento gráfico de la situación, permitiendo evidenciar que son capaces de identificar aspectos y variables y además graficarlos.

Así mismo, fue posible evidenciar como algunos estudiantes no lograron argumentar cuales son las funciones que representa la abscisa, pues poseían dificultad para poder expresar lo señalado.

Aunque las respuestas que se presenta pueden relacionarse con lo cuestionado, esto no da claridad si los estudiantes comprenden lo que representa la abscisa, ya que no se evidencia argumentación, pues uno de los momentos relevantes del enfoque de la EpC, es contemplar como los estudiantes son capaces de expresar lo comprendido, que estrategias o interrogantes son formulados para acercarse a la noción matemática.

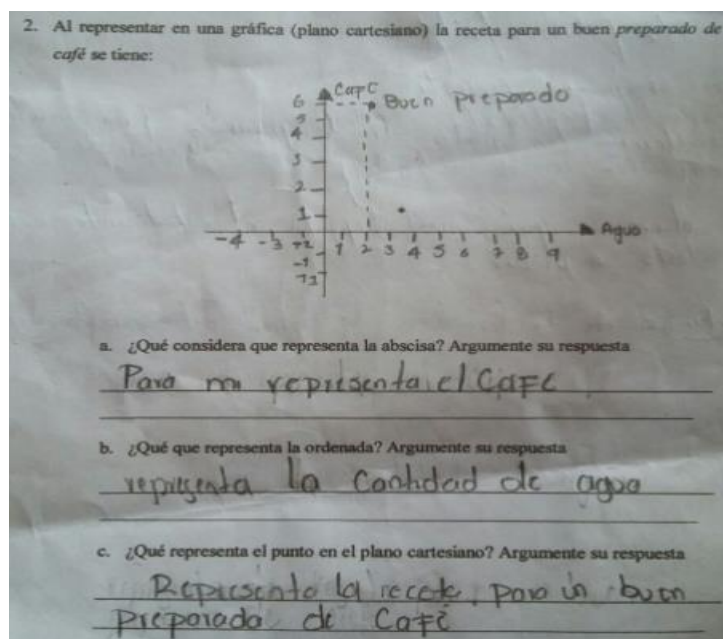


Ilustración 27 Análisis de la tarea3, momento 6

Traducción: Para mi representa el café. Representa la cantidad de agua, representa la receta, para un buen preparado de café

Así mismo se encontró que aquellos estudiantes que no identificaron la abscisa tampoco fueron capaces de dar respuesta al interrogante ¿Qué representa la ordenada?, ¿Qué representa el punto en el plano cartesiano?; estudiantes que no mostraron cuestiones sobre su proceso de comprensión, en este sentido aquellos que no fueron capaces de dar respuesta al interrogante de forma objetiva, buscaron de una u otra forma contestar la pregunta, sin demostrar argumentación. Este análisis permite deducir que los estudiantes están en un nivel de principiante e ingenuo, debido a que expresan sus ideas teniendo en cuenta los desempeños de comprensión, pero sus argumentos muestran las faltas de propiedades del conocimiento y a la vez no es consciente de las razones que lo conllevan a la investigación de un conocimiento matemático.

De acuerdo a estas dificultades, se hace importante en primera instancia que los estudiantes comprendan cómo se debe ubicar los puntos en el plano cartesiano y cómo graficar en él a partir de sus elementos principales, además relacionar aspectos que demanden el uso del pensamiento variacional.

4.2.2. Análisis a posteriori de la situación 2: El aeropuerto

Estas tareas se enmarcan en la etapa de investigación guiada, aspecto que le permite al estudiante cuestionar su proceso y buscar estrategias validas que le permitan relacionar la actividad con los conocimientos matemáticos.

Tarea 1, ítem a.

En el desarrollo de esta tarea se evidenció que (8 de 14 estudiantes – 57,1%), lograron reconocer las variables involucradas en la situación justificando la decisión enunciada, ya que enuncian las variables apropiadas e igualmente presentaron argumentos flexibles de la temática las cuales permiten ver que tanto dominio tienen los estudiantes ante este contenido matemático. En efecto en la ilustración N°28 y 29 contempla que estos estudiantes se sitúan en la dimensión de comunicación, en el nivel aprendiz, dado que sus argumentos muestran coherencia con lo que se les pregunta.

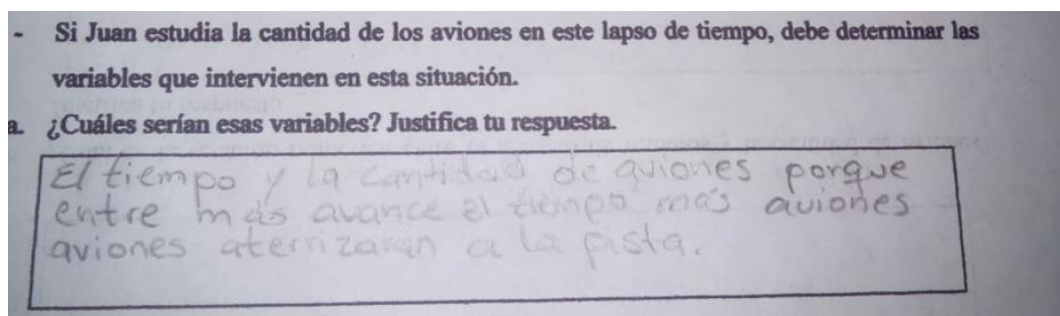


Ilustración 28 Tarea 1 ítem a

Traducción El tiempo y la cantidad de aviones porque entre más avance el tiempo más aviones aterrizaran a la pista.

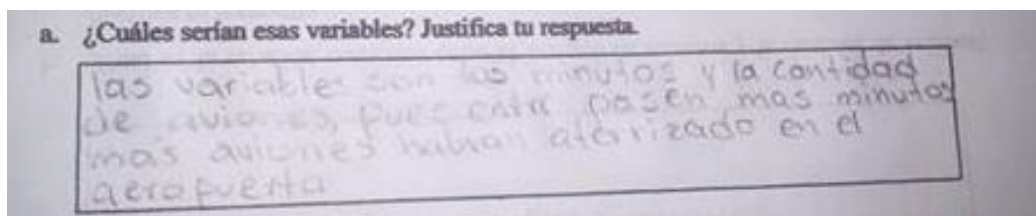


Ilustración 29 Tarea 1 ítem a momento 1

Traducciones

las variables son los minutos y la cantidad de aviones, pues entre más pasen los minutos más aviones habrán aterrizado al aeropuerto.

En este mismo sentido se encuentra a 4 estudiantes que, aunque enuncian las variables involucradas en la situación, esto no es suficiente para contemplar si realmente los estudiantes comprenden la funcionalidad de una variable en este contexto. Pues se evidencia la falta de comprensión del concepto, dado que sus argumentos no expresan de manera clara la decisión, tal como se muestran en las ilustraciones N°30 y 31. En este sentido estos estudiantes se encuentran en **la dimensión contenido y formas de comunicación en el nivel ingenuo**, ya que las respuestas señaladas se asocian a sus experiencias previas y sus expresiones no dejan ver con claridad el dominio del conocimiento matemático.

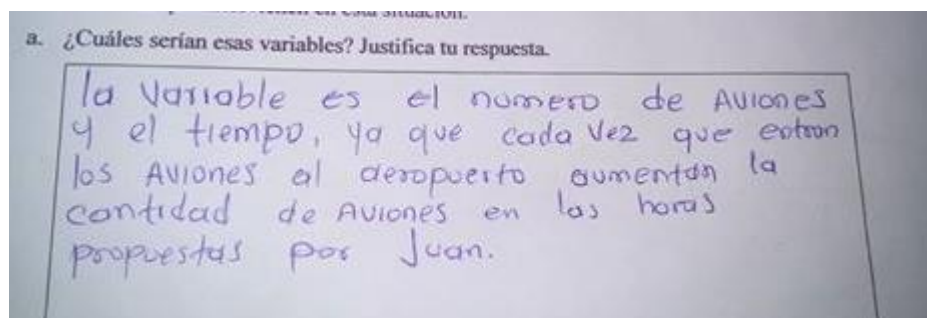


Ilustración 30 Tarea 1 ítem a, momento 2

la variable es el número de aviones y el tiempo ya que cada vez que entran los aviones al aeropuerto aumentan la cantidad de aviones en las horas propuestas por Juan.

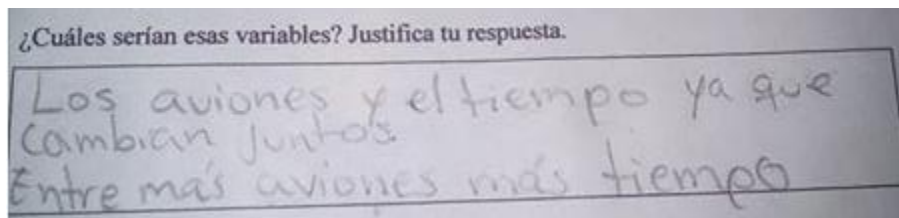


Ilustración 31 Tarea 1 ítem a, momento 3

Traducción

Los aviones y el tiempo ya que cambian juntos. Entre más aviones más tiempo.

Igualmente, en el resto del porcentaje de los estudiantes, se encontró repuestas que, aunque apuntaban a las variables implícitas de la situación los estudiantes no poseen una comprensión apta del conocimiento, pues no expresaron argumentos de su elección. En este sentido estos estudiantes se sitúan en la **dimensión contenido nivel ingenuo**, ya que presenta falta de conocimiento matemático y dan respuestas según sus experiencias.

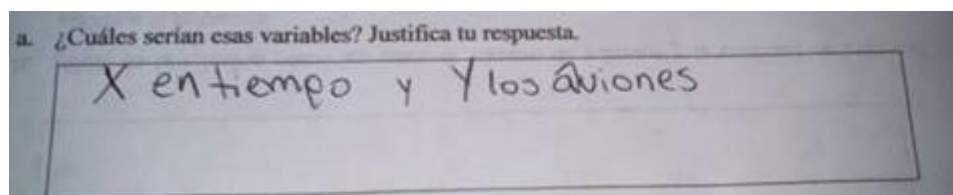


Ilustración 32 Tarea 1 ítem a, momento 4

Traducción

(X) en tiempo y (y) los aviones

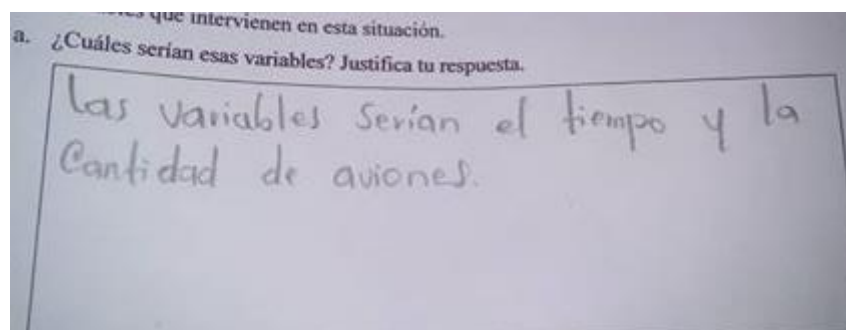


Ilustración 33 Tarea 1 ítem a, momento 5

Traducción

Las variables serían el tiempo y las cantidades de aviones

Ítem b.

En este ítem se evidenció que (6 de 14 estudiantes – 42,8%) fueron capaces de explicar la relación entre el número de minutos y la cantidad de aviones que se manifestaban en el enunciado, en este sentido se sitúan a los estudiantes en la dimensión de comunicación y contenido en nivel aprendiz, dado que fueron capaces de comprender la relación entre las cantidades enunciadas, y explicarla en manera coherente. Tal como se muestra en la ilustración N° 34, 35 y 36.

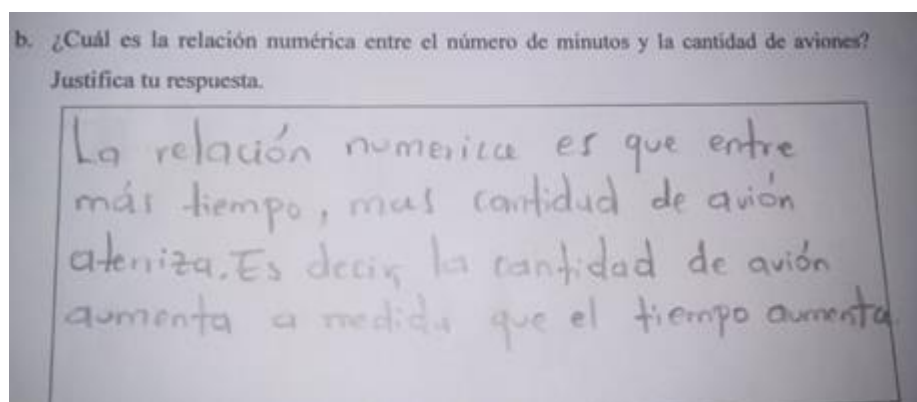


Ilustración 34 Tarea 1 ítem b

Traducciones

La relación numérica es que, entre más tiempo, más cantidad de aviones aterriza. Es decir, la cantidad de aviones aumenta a medida que el tiempo aumenta.

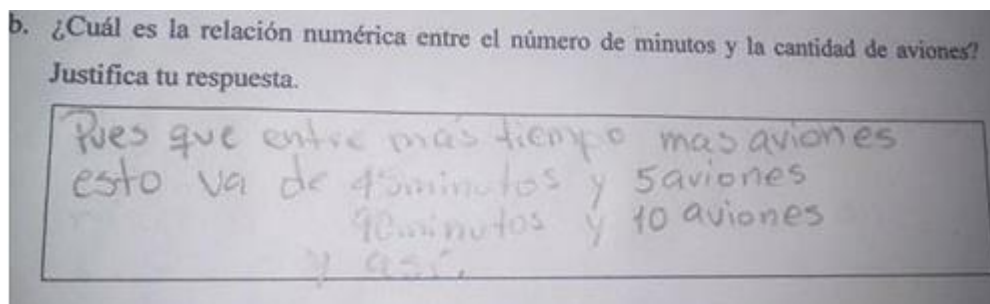


Ilustración 35 Tarea 1 ítem b momento 2

Traducción

Pues que entre más tiempo más aviones, esto va de 45 minutos y 5aviones, 90 minutos y 10 aviones y así.

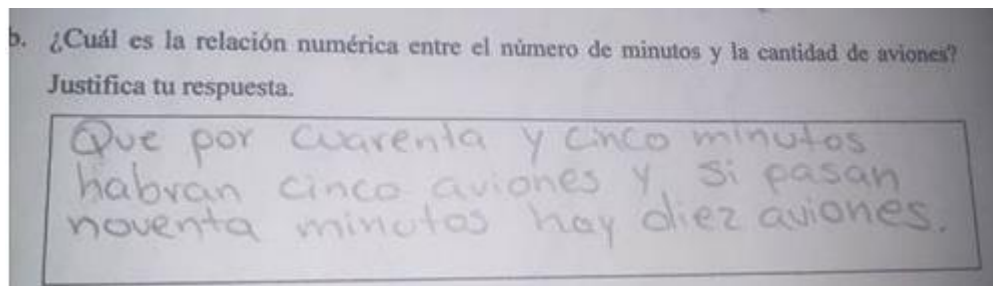


Ilustración 36 Tarea 1 ítem b momento 3

Traducción

Que por cada cuarenta y cinco minutos habrá cinco aviones y si pasan noventa minutos hay diez aviones.

Como se puede apreciar estos estudiantes afirmaron que entre mayor minutos mayor cantidad de aviones es decir que existe una correspondencia entre variables, pues para un tiempo específico hay una cantidad de aviones en la pista.

Igualmente, se apreciaron que (8 de 14 estudiantes – 57,1%) dieron razones válidas de la actividad propuesta, pero con falta de argumentación; en este sentido, según la rejilla de análisis estos estudiantes, se localizan en la **dimensión contenido nivel principiante**, ya que se observa que son capaces de detallar las variaciones.

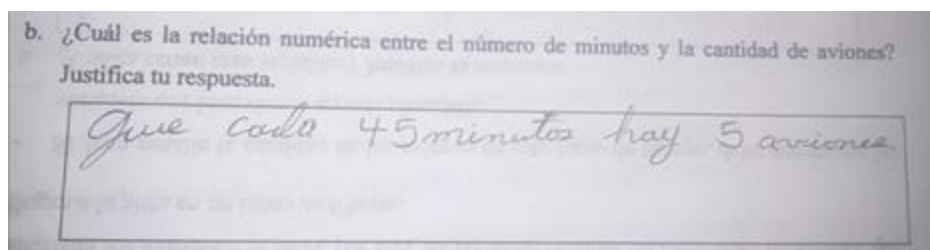


Ilustración 37 Tarea 1 ítem b momento 4

Traducción

Que cada 45 minutos hay 5 aviones

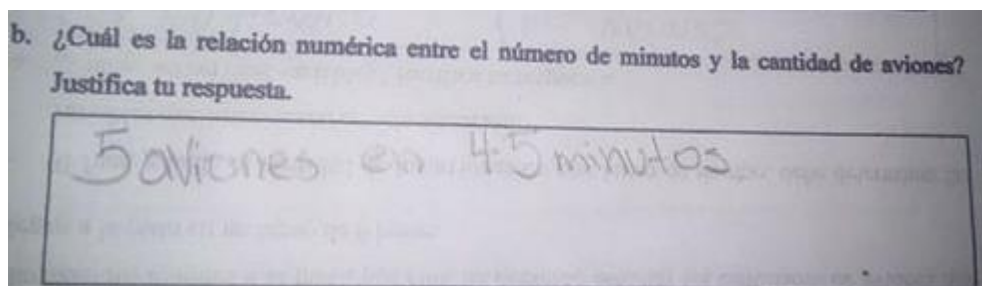


Ilustración 38 Tarea 1 ítem b momento 5

Traducción

5 aviones en 45 minutos.

Ítem c

Esta actividad lleva a los estudiantes a situarse en la dimensión método, la intención es ver como el estudiante da respuesta a la situación y que estrategia implementa.

En esta actividad se sitúan a (6 de 14 de estudiantes – 42,8%) **en el nivel aprendiz**, dado que los estudiantes comprendieron la lógica para dar solución a la actividad. En este sentido se evidenciaron diferentes métodos para dar respuesta de la pregunta.

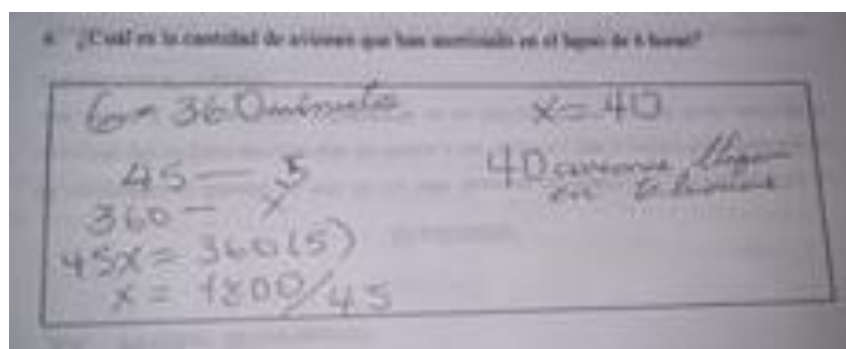


Ilustración 39 Tarea 1 ítem c

6—360 minutos	X=40
45—5	
360—x	
$45x=360(5)$	
$X=1800/45$	40 aviones llegan en 6 horas.

e. Expresa una forma para determinar, ¿cuántos aviones aterrizan al cabo de 715 minutos?
Explica tu respuesta

Tiempo	Aviones
715	X
102	6

$$X = \frac{715 \times 6}{102} = \frac{4290}{102} = 42.05$$

Aviones

Ilustración 40 Tarea 1 ítem c momento 2

En este sentido se observó que (2 de 14 estudiantes – 14,3%) aplicaron la regla de tres, como un modelo lógico y apropiado para dar la respuesta, sin embargo, no consideraron que los aviones no se pueden expresar en magnitudes continuas.

Igualmente se evidenciaron que (2 de 14 estudiantes – 14,3%) estudiantes no tuvieron en cuenta las relaciones entre horas y minutos. En este sentido estos estudiantes se localizan en la **dimensión método nivel ingenuo**. Como se contempla en la ilustración N°41 este proceso aplicado es incorrecto y esto le impide al estudiante dar la respuesta correcta, esto por falta de conocimientos matemáticos.

e. ¿Cuál es la cantidad de aviones que han aterrizado en el lapso de 6 horas?

45 minutos – 5 aviones

$$45/5 = 9 \text{ aviones en un minuto}$$

$$9 \times 6 = 54$$

Hay 54 aviones

Ilustración 41 Tarea 1 ítem c momento 3

Una de las respuestas analizadas nos llevó a situar a un grupo de estudiantes (2 de 14 estudiantes – 14,3%) en la **dimensión método nivel ingenuo**, pues de una u otra manera intenta dar respuesta a la actividad basándose en las propiedades adictivas, pero la implementación de este método aun que lo acerca a la respuesta, el estudiante no es capaz de identificar cuanto tiempo debe transcurrir para que aterrice un avión al aeropuerto.

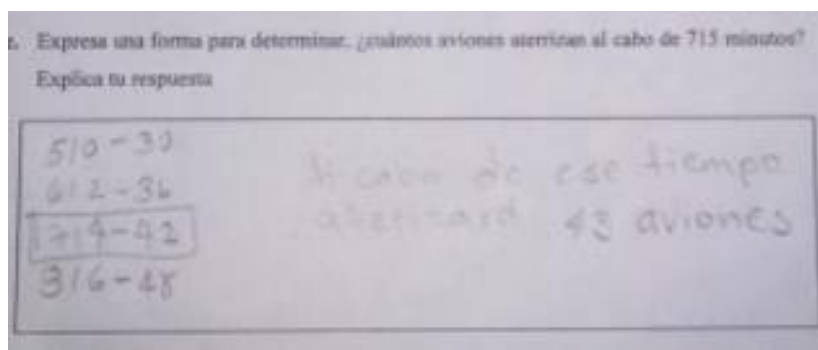


Ilustración 42 Tarea 1 ítem c momento 4

Traducción

510 – 30 Al cabo de ese tiempo aterrizará 43 aviones
 612 – 36
 714 – 42
 816 – 48

En este mismo sentido se evidenciaron (2 de 14 estudiantes – 14,3%) que enuncian la respuesta, pero no muestran los procesos aplicados para llegar ella, en este sentido este aspecto no se considera, ya que no fue una de las posibles respuestas señaladas en el análisis a priori. Ya que el objetivo era contemplar que método se implementaba para dar solución a la actividad.

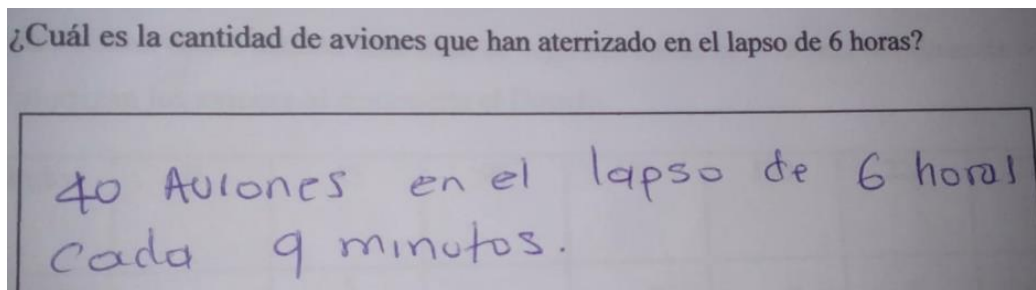


Ilustración 43 Tarea 1 ítem c momento 5

Traducción

40 aviones en el lapso de 6 horas cada 9 minutos.

Tarea 2. Ítem a

En relación a la pregunta (a) se observó que aproximadamente (8 de 14 estudiantes – 57,1%) lograron completar eficazmente la tabla que se propone en la situación, estableciendo una exploración en la que logran identificar que a medida que aumenta el tiempo, también aumenta la cantidad de aviones aterrizados; en efecto los estudiantes logran establecer que existe una relación de correspondencia uno a uno entre magnitudes (a un determinado tiempo le corresponde una única cantidad de avión) y además visualizan las cantidades directamente proporcionales, lo que posibilita que el estudiante se acerque al conocimiento matemático del concepto de función lineal.

Cabe resaltar que, si un estudiante logra completar la tabla correctamente, se debe a que ha alcanzado conocer algunos elementos básicos acerca de la proporcionalidad, a lo que suma un acercamiento valorativo al concepto de función lineal. De este mismo modo, se logró evidenciar que este porcentaje de estudiantes utilizan palabras adecuadas para expresar o comunicar sus respuestas o ideas respecto a la situación dada; lo anterior se hizo posible evidenciarlo en el momento que los estudiantes dialogaban acerca del caso:

E1: tenemos que darnos cuenta, que los valores de (y) aumentaran a medida que los valores de (x) aumentan.

E2: si, pero, aunque ambos aumenten, el valor debe permanecer constante, para que me entienda, quiero decir que, la razón entre las magnitudes no debe cambiar.

E1: si, yo eso lo entiendo, es decir, si tengo los valores 3 y 5, al aumentar en igual razón quedaría 6 y 10. Así no cambiaría.

E2: eso sería algo proporcional.

Este breve diálogo permite percibir la forma en que los estudiantes comunican sus conocimientos a partir de ejemplificaciones y uso de estrategias, esto se logra ya que, en la etapa de exploración los estudiantes tomaron nuevos conocimientos que aluden a mejorar su comprensión y así interactuar dinámicamente entre lo aprendido, a su vez retoman aspectos significativos, tales como: habilidad para pensar, actuar, explicar, demostrar, etc.; aspectos que ayudan a mejorar más adelante la forma de interpretar y hablar sobre sus ideas u opiniones.

De esta manera, se muestran algunas producciones realizadas por los estudiantes ilustración N° 44.

Tarea 2: Juan desea diseñar una tabla de registros donde se evidencia la frecuencia con la que aterrizan los aviones al aeropuerto el Dorado.

Minutos	0	45	90	135	180	225	270
Aviones	0	5	10	15	20	25	30

Completa la tabla y enuncia.

a. ¿Cómo encontraste los valores para cada dato?

Sumando los minutos de 45 en 45 y así mismo el número de aviones o multiplicar normalmente el 5 así como fue multiplicado el 45.

Ilustración 44 Tarea 2 ítem a

Traducción

Sumando los minutos de 45 en 45 y así mismo o multiplicar el 5 así como fue multiplicado el 45

Estos estudiantes, permiten mencionar que se movilizan en el nivel **aprendiz en la dimensión de método**; ya que el estudiante comprende la lógica de los métodos de solución de una situación desde una perspectiva matemática, así como lo establece la rejilla de análisis.

Por otro lado, el de los estudiantes (4 de 14 estudiantes), no lograron identificar ostensiblemente la intencionalidad del caso, es decir, presentaron algunas dificultades para completar la tabla propuesta en el caso, lo que permite ver, que no han encontrado la relación directamente proporcional entre las magnitudes, ni la razón de cambio que ésta emerge, a su vez no se evidencia una respuesta significativa que dé cuenta de sus estrategias y de su decisión; esto posibilita que el estudiante se aleje del concepto de función lineal; ya que la EpC demanda que la forma de comunicar y reflexionar sobre lo que se aprende permite el acercamiento a la comprensión. Particularmente algunos estudiantes respondieron lo siguiente. Ilustración 45.

Tarea 2: Juan desea diseñar una tabla de registros donde se evidencia la frecuencia con la que aterrizan los aviones al aeropuerto el Dorado.

Minutos	0	45	90	135	180	225	270
Aviones	0	5	10	20	40	80	160

Completa la tabla y enuncia.

a. ¿Cómo encontraste los valores para cada dato?

Como a 45 le sacaron el doble que es 90, entonces a 5 le sacamos el doble que es 10, y así sucesivamente le fuimos sacando el doble a cada resultado

Ilustración 45 Tarea 2 ítem a momento 2

Traducción.

Como a 45 le sacaron el doble que es 90, entonces a 5 le sacamos el doble que es 10, y así sucesivamente le fuimos sacando el doble a cada resultado.

Estos estudiantes se sitúan en el **nivel ingenuo en la dimensión de método y propósito**, debido a que aplica modelos que no son suficientes para el desarrollo de una situación y además no es consciente de las razones que lo conllevan a la investigación de un conocimiento matemático.

Pertinentemente el otro 14,3% estudiantes (2 de 14 estudiantes) consiguieron completar correctamente la tabla, pero no lograron justificar o argumentar claramente las estrategias utilizadas para el desarrollo de la tarea. Ilustración N°46

Tarea 2: Juan desea diseñar una tabla de registros donde se evidencia la frecuencia con la que aterrizan los aviones al aeropuerto el Dorado.

Minutos	0	45	90	135	180	225	270
Aviones	0	5	10	15	20	25	30

Completa la tabla y enuncia.

a. ¿Cómo encontraste los valores para cada dato?

Profe no sé cómo argumentar lo que hice.

Ilustración 46 Tarea 2 ítem a momento 3

Traducción

Profe no sé cómo argumentar lo que hice.

Esto permite enunciar, que el estudiante puede procesar alguna información de acuerdo a su conocimiento y capacidades, pero no es capaz de procesar toda la información necesaria para establecer un claro ejemplo de lo que conoce o aprende. (Maciques, 2004).

Particularmente estos estudiantes no implementaron una nueva estrategia o método de solución, ya que se evidencia que presentaron poco argumento. Por lo anterior estos estudiantes se movilizan en un **nivel ingenuo en las dimensiones de método y propósito**.

Tarea 2. Ítem b

Es importante resaltar que esta pregunta, apunta a que el estudiante establezca generalmente un método que le permita siempre encontrar la cantidad de aviones para cualquier tiempo dado; a lo que se suma que solo (8 de 14 estudiantes – 57,1%) lograron encontrar una forma de hacerlo; y así designar correctamente el número de avión para un determinado tiempo; ya que ellos identificaron que utilizar la fórmula de pendiente y punto pendiente se les permitía hallar una fórmula general para este caso, del mismo modo el uso de la regla de tres también fue viable para hallar rápidamente el número de aviones, así como se predijo en el desarrollo del análisis a priori. Además, la forma de resolver este ítem, permite ver que el estudiante ha adquirido un conocimiento asequible durante el transcurso de la etapa de exploración que se llevó a cabo, dado a que cada vez son más los estudiantes que reconocen las diversas formas de resolver una situación. Ilustración 47

b. Escribe una forma de encontrar el número de aviones para cualquier tiempo dado

90 min → 10 aviones
180 min → 20 aviones

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{20 - 10}{180 - 90} = \frac{10}{90} = 0,11$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 10 = 0,11(x - 90)$$

$$y - 10 = 0,11x - 9,9$$

$$y = 0,11x - 9,9 + 10$$

$$y = 0,11x + 0,1$$

Prueba

$$y = 0,11x + 0,1$$

$$y = 0,11(45) + 0,1$$

$$y = 4,95 + 0,1$$

$$y = 5,05$$

Redondeamos a 5.

Ilustración 47 Tarea 2 ítem b

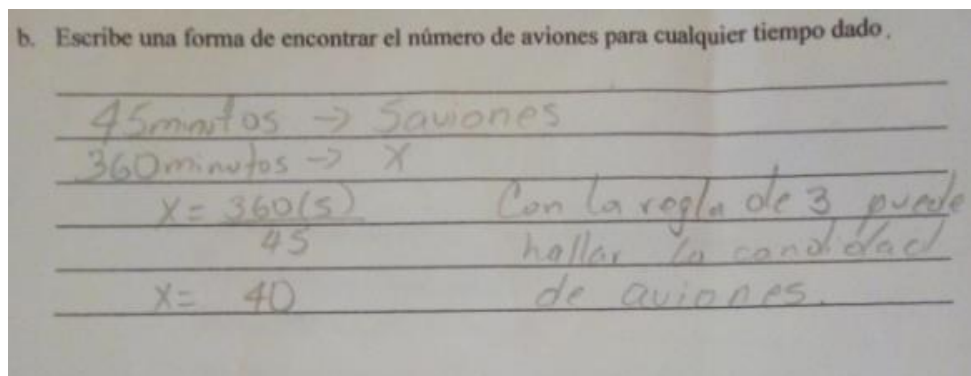
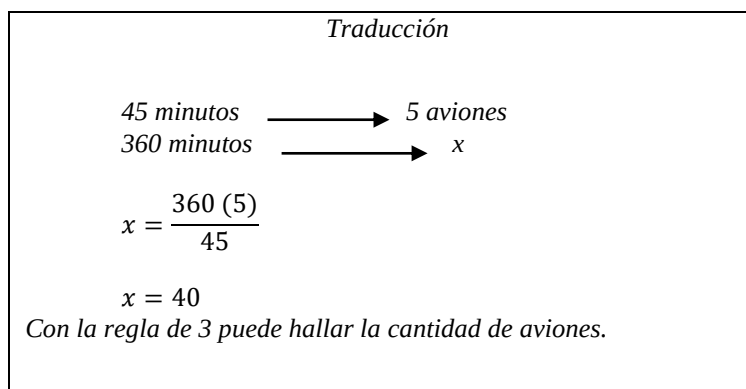


Ilustración 48 Tarea 2 ítem b momento 2



La rejilla de análisis permite mencionar que, este porcentaje de estudiantes se encuentran en **las dimensiones de método, formas de comunicación y contenido en el nivel maestría**; esto es posible, ya que el estudiante muestra dominio en la lógica de los métodos de solución desde una perspectiva matemática y sobre todo identifica la intencionalidad del conocimiento, a partir de la reflexión de situaciones prácticas.

En relación a los resultados del ítem b, se evidenció que (6 de 14 estudiantes – 42,8%) no mostraron adecuadamente una forma de hallar el número de aviones para cualquier tiempo dado. Aunque, esta pregunta hace referencia únicamente a relaciones o expresiones numéricas, los estudiantes en su mayoría no adoptaron diferentes formas de

visualizar la situación, es decir, establecer una relación formal entre las variables desde lo verbal. Cabe decir, algunos de los estudiantes, intentó establecer una relación numérica entre las variables (utilizando fórmulas), pero no fue suficiente para hallar la solución a lo establecido. Ilustración N° 49

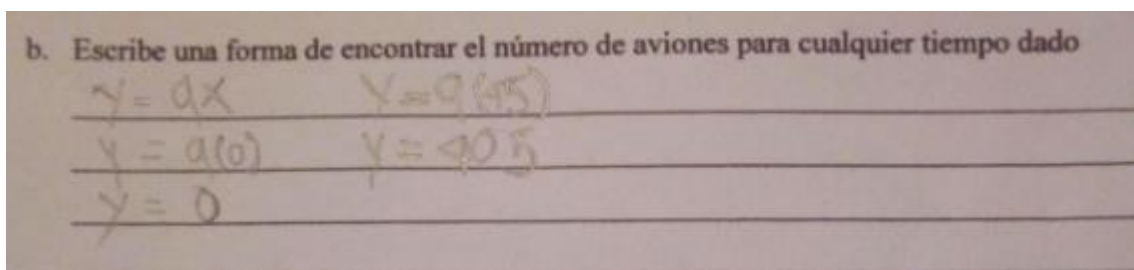


Ilustración 49 Tarea 2 ítem b momento 3

Traducción

$$y = 9x$$

$$y = 9(0)$$

$$y = 0$$

$$y = 9(45)$$

$$y = 405$$

El uso de esta expresión algebraica ($y = 9x$), determina que el estudiante conoce algunos términos matemáticos que lo pueden introducir para conocer el concepto de función lineal; ya que escribe expresiones que lo acercan a la solución y así mismo puede inducirlo a implementar otros métodos; no obstante, se basa en ejemplificaciones que no determina o no clarifica lo que conoce; es claro que esta expresión al estudiante sólo le sirve cuando el tiempo es igual cero ($x = 0$), pero no es general para cualquier intervalo de tiempo. Particularmente estos participantes se encuentran en **un nivel principiante desde la dimensión propósito**, debido a que toma conciencia de ciertos criterios que aluden a la investigación del conocimiento, igualmente se movilizan **en el nivel ingenuo en la**

dimensión de método, ya que aplica modelos que no son suficientes para el desarrollo de una situación.

De esa manera, los estudiantes que no lograron establecer ningún tipo de métodos que demuestre su forma y habilidad de resolver una situación se encuentran según lo estipulado en el análisis a priori en el **nivel ingenuo desde la dimensión de propósito**, pues particularmente no reconocen las razones que lo llevan a la investigación de un conocimiento.

Tarea 3. Ítem a

Según el resultado de este ítem, se muestra que la mayoría de los estudiantes realiza un buen procedimiento en la construcción del plano cartesiano; en este caso (12 de 14 estudiantes – 85,7%) lograron determinar los elementos esenciales para la construcción de la gráfica. Este ítem se relaciona con los datos de la tabla del ítem (a) de la tarea 2; lo que significa que para el estudiante lograr construir correctamente la gráfica, debe tener correctamente los datos de la tabla; pero según el análisis del ítem (a) en la tarea 2, se evidenció que solo 8 de 14 estudiantes completaron la tabla sin cometer errores; se verifica que de los 6 estudiantes que no alcanzaron el nivel de comprensión, 4 de ellos posteriormente lograron identificar los errores cometidos durante el desarrollo de la tabla, lo que les permitió superar aquellas debilidades, para luego hacer una buena construcción del plano cartesiano; esto permite reconocer que el estudiante avanza entre niveles y dimensiones, superando sus dificultades. Por consiguiente, se puede mencionar que el estudiante toma estrategias de reflexión y control de la propia actividad cognitiva. (Quintero, 2014). De esta manera se muestran algunos planos cartesianos realizados por los estudiantes. Ilustración N°50.

Tarea 3: Con los datos de la tabla anterior

a. Construye un plano cartesiano y responde los siguientes enunciados.

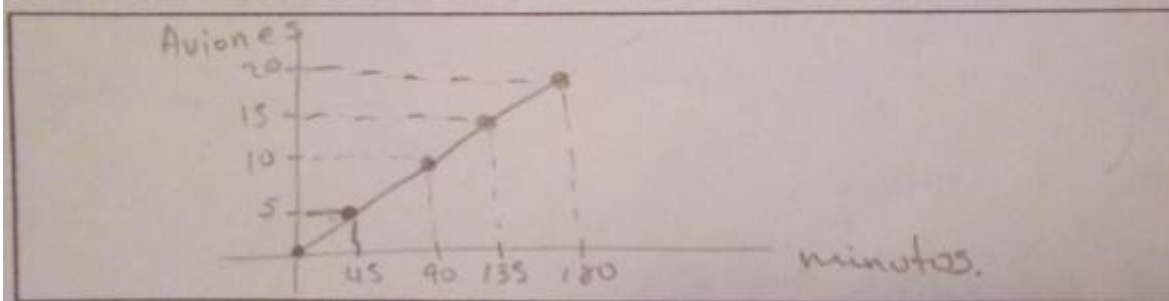


Ilustración 50 Tarea 3 ítem a

Por consiguiente, los participantes comprenden la importancia de las múltiples representaciones de la función lineal, ya que esta tarea requiere que el estudiante contemple el uso de pasar de un registro de representación semiótico a otro; en este caso (pasar de una representación tabular a una representación gráfica). Estas producciones permiten deducir que los estudiantes se movilizan en el **nivel aprendiz desde la dimensión de método**, pues implementa correctamente los métodos de solución ante la situación.

De los 2 estudiantes restantes (14,3%), no es posible decir lo mismo, ya que no mostraron un buen avance en la construcción de la gráfica, lo que determina que no realizaron de manera correcta tabla del ítem (a) de la tarea 2, por ende, cometieron algunos errores y dificultades en la construcción del gráfico, tales como: no reconocen las variables dependiente e independiente, no grafican correctamente (no distingue la abscisa y la ordenada), no ubican bien los puntos, no relaciona los conceptos matemáticos; todos esto puntos permite que el estudiante se aleje de la comprensión del concepto de función lineal, ya que la construcción de un plano cartesiano es un componente esencial en para el conocimiento e indagación del concepto de función lineal. Ilustración N°51

Tarea 3: Con los datos de la tabla anterior

a. Construye un plano cartesiano y responde los siguientes enunciados.

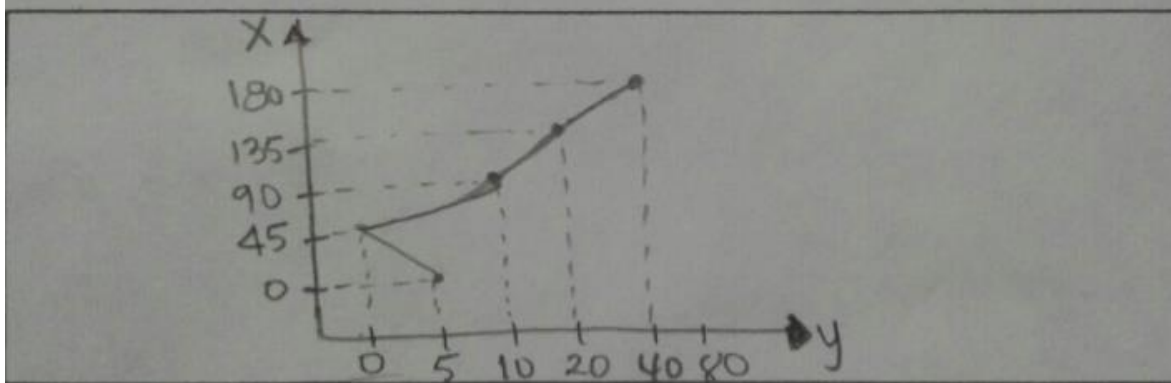


Ilustración 51 Tarea 3 ítem a momento 1

Así mismo se encontró diálogos donde los estudiantes expresaban lo siguiente:

E1: Oye, ¿en la línea horizontal va (x) o va (y)?

E2: la verdad, no tengo idea. Ponga la que le parezca.

E1: es que no recuerdo bien.

De acuerdo a lo anterior, estos estudiantes se movilizan en el nivel **ingenuo en la dimensión método**, debido a que aplica modelos que no son suficientes para el desarrollo de la situación.

Tarea 3. Ítem b

En este apartado es posible nombrar que (12 de 14 estudiantes – 85,7%) respondieron de manera correcta a la pregunta del ítem b, ya que se observó que este porcentaje de estudiantes, fueron aquellos que lograron ejercer correctamente la gráfica del punto anterior. A los estudiantes se les facilitó identificar que la figura que se forma en la

gráfica es una línea recta, y posteriormente lo relacionan con las características de una función lineal. Ilustración N° 52

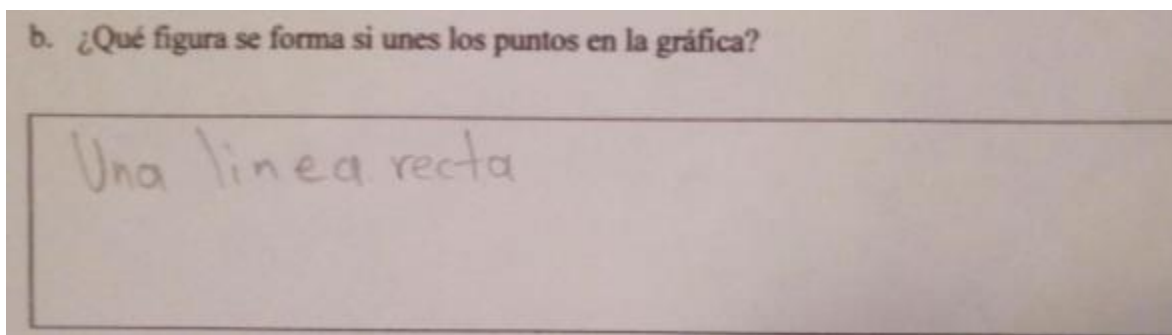


Ilustración 52 Tarea 3 ítem b

Traducción

Una línea recta

Cabe resaltar que este porcentaje de estudiantes, identifica claramente los elementos de un plano cartesiano y las condiciones que implican al realizarlo, posteriormente entienden que cuando se une 2 o más puntos formando una línea recta, es porque existe proporcionalidad entre las magnitudes. Según la rejilla de análisis estos participantes se movilizan en **el nivel de aprendiz desde la dimensión de propósito**, debido a que reconoce la intencionalidad del conocimiento, a partir de la reflexión de situaciones prácticas.

De lo contrario, el otro porcentaje de estudiantes (2 de 14 estudiantes – 14,3%) no lograron identificar qué figura se forma en la gráfica; esto es debido a que en el punto anterior no construyeron satisfactoriamente la gráfica o plano cartesiano; debido a que este ítem está íntimamente relacionado con el ítem (a), por ende, no lograría responder correctamente, a no ser que estos estudiantes reflexionaran sobre las dificultades obtenidas en el ítem (a) y buscaran un método de solución. Esto requiere, que el estudiante reconozca que se debe hacer un buen proceso desde el comienzo, para avanzar pertinentemente. Este

este tipo de actividades permite que el estudiante permanezca activo en la solución de problemas; ya que lo estimula a realizar un buen proceso desde el inicio de una actividad escolar. Ilustración N°53.

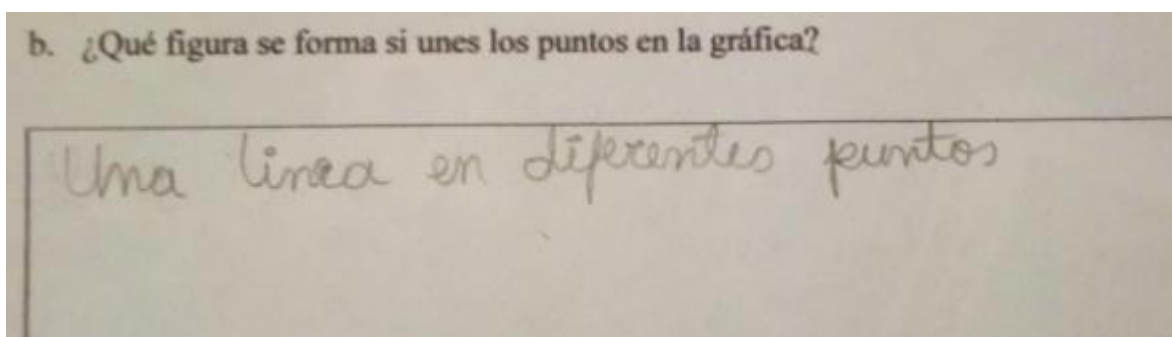


Ilustración 53 Tarea 3 ítem b momento 2

Traducción

Una línea en diferentes puntos

En relación a la rejilla de análisis, se puede mencionar que estos estudiantes se movilizan en **el nivel ingenuo desde la dimensión de propósito**, pues el estudiante no reconoce las razones que lo conllevan a la investigación de un conocimiento matemático.

Tarea 3. Ítem c

Según este ítem, más de la mitad de los estudiantes desarrollaron eficazmente la situación (12 de 14 estudiantes – 85,7%), durante el desarrollo de la actividad los estudiantes demostraron dominio y dinamismo para la determinación y toma de decisión al respecto. Pues buen, se denota que los integrantes lograron identificar cual es la variable dependiente e independiente de la situación, debido al uso de algunas estrategias de acuerdo a su contexto, lo que les permitió identificar rápidamente las variables dependientes e independientes. En el desarrollo de la actividad, un grupo de estudiantes discutían sobre la elección de las variables dependientes, mientras dialogaban, expresaban lo siguiente:

E1: mira, ¿tú todavía vives en tu casa, no trabajas, no haces nada y todo te lo dan?

E2: si claro, todavía soy menor de edad, por eso no trabajo y me lo dan todo

E1: pues ahí está la respuesta.

E2: ¿cómo así?

E1: pues que tú todavía dependes de tus padres, no eres independiente. Lo mismo pasa con las variables. La cantidad de aviones depende del tiempo.

E2: o sea, que la cantidad de aviones aumenta, a medida que pasa el tiempo. Umm si.

De cierta manera, se evidencia, el método que utilizan los estudiantes para resolver la situación, bien sea por medio de un discurso, un dibujo etc. Este tipo de estrategia permite que los estudiantes entrelacen conocimientos y además propicia la participación activa, especialmente cuando trabajan en equipo; debido a que el trabajo colectivo fomenta al desarrollo de una formación integral y a la vez genera un conocimiento potencial, que se enriquece desde un conocimiento individual. (Aristizabal, Varela, & Calle, 1989).

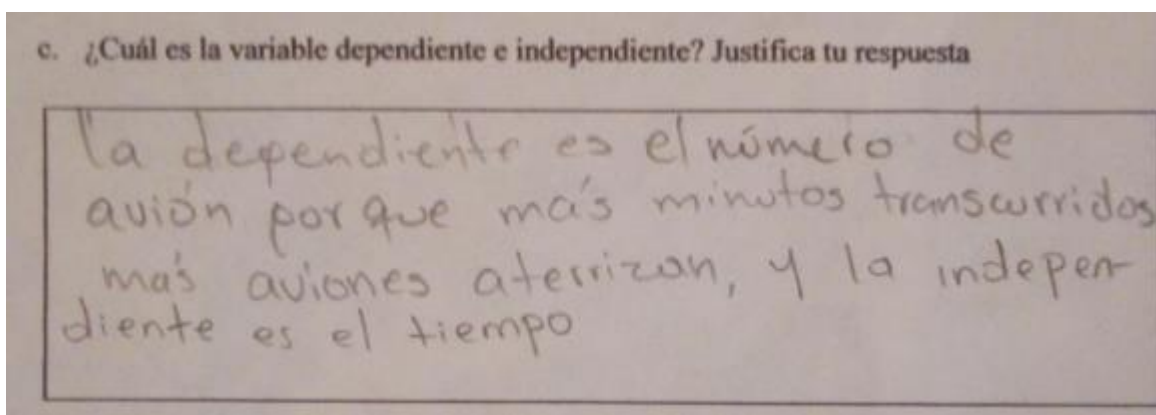


Ilustración 54 Tarea 3 ítem c

Traducción

La dependiente es el número de avión porque entre más minutos transcurridos más aviones aterrizan y la independiente es el tiempo.

Es importante reconocer que los estudiantes identifica los conceptos matemáticos que involucra el concepto de función lineal, pues reconoce cuando una variable es dependiente e independiente, justificando por medio de ejemplificaciones cercanas a su realidad; por lo anterior el porcentaje de estudiantes se moviliza en el **nivel aprendiz en la dimensión de contenido y formas de comunicación**, ya que además de reconocer algunos contenidos básicos del concepto de función lineal, también posee dominio y comunica de manera clara y coherente sus respuestas.

El otro 14,3% de los estudiantes (2 de 14 estudiantes), no perciben la diferencia entre las variables, debido a que establecen que la variable dependiente es el tiempo y la variable independiente es la cantidad de aviones aterrizados, esto es una respuesta errónea, de acuerdo a lo denotado en el análisis a priori, esto se puede evidenciar, ya que no determinan algunos aspectos claves de la situación y al mismo tiempo se evidencia una débil interpretación del enunciado, anulando la posibilidad de reconocer los contenidos matemáticos la intencionalidad emergente en ella. Ilustración N°55.

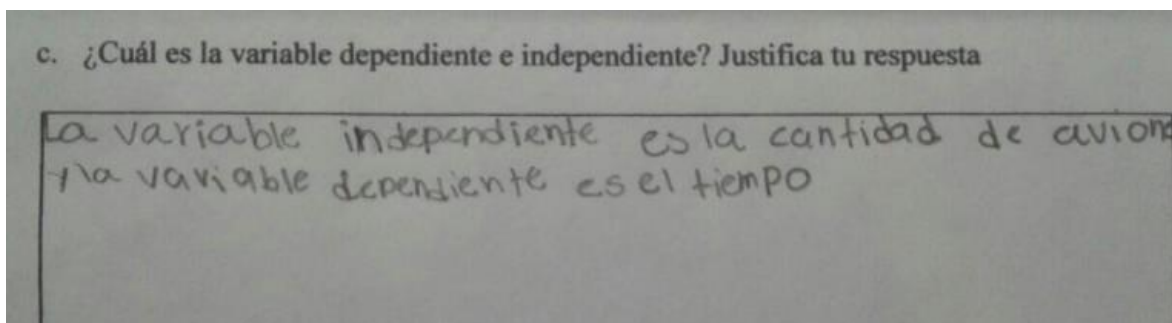


Ilustración 55 Tarea 3 ítem c momento 1

Traducción

La variable independiente es la cantidad de aviones y la variable dependiente es el tiempo.

En concordancia con la rejilla de análisis estos estudiantes se movilizan en **el nivel ingenuo de la dimensión formas de comunicación y contenido**, debido a que maneja el

conocimiento basándose en experiencias previas usualmente incorrectas y muestra falta de propiedades del conocimiento.

Tarea 4

Ítem a

Aquí se contempló que aquellos estudiantes que lograron dar respuesta correcta en la tarea 3 ítem (a), fueron los mismo que pudieron dar respuesta a esta actividad; pues se les pidió construir una representación gráfica del enunciado con informaciones similares a la inicial de la situación el aeropuerto.

De ello se logró analizar (10 de 14 estudiantes – 71,4%), se sitúan en la **dimensión contenido y método en el nivel aprendiz**, dado que, se identificaron los elementos esenciales para la construcción de una representación gráfica.

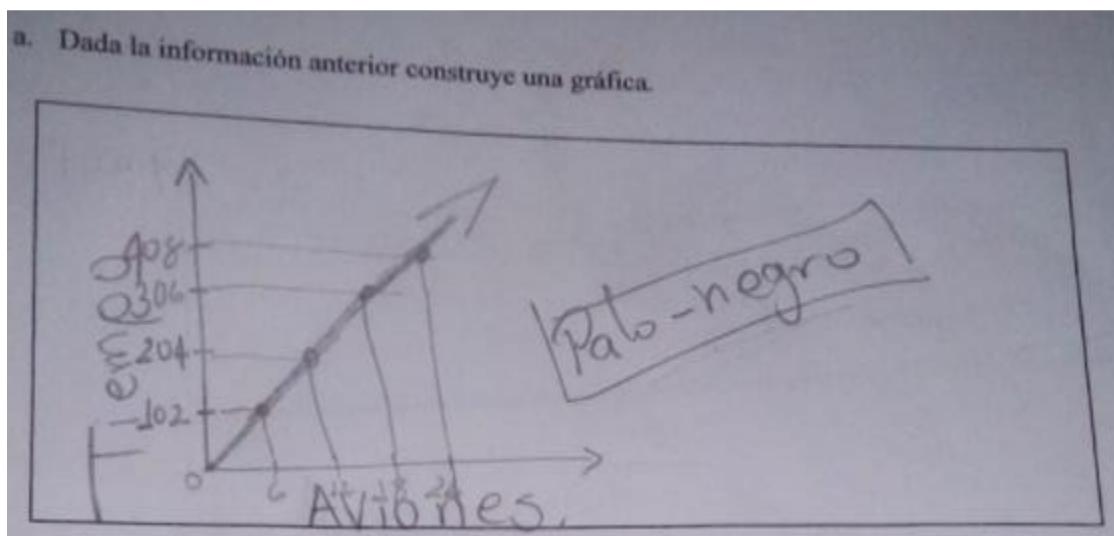


Ilustración 56 Tarea 4 ítem a

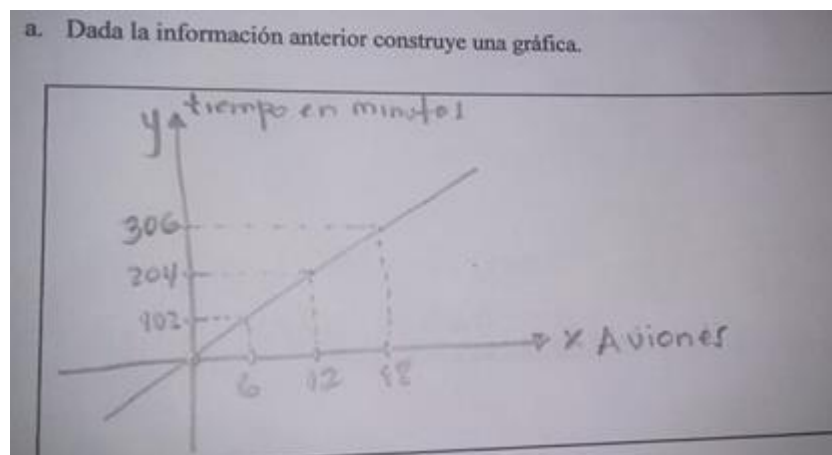


Ilustración 57 Tarea 4 ítem a momento 1

Sin embargo, también se encontraron 2 estudiantes que realizaron una representación gráfica, pero muestra la falta de comprensión para representar una situación gráficamente, pues no tiene en cuenta las variables implícitas en la actividad. Estos estudiantes se sitúan en la **dimensión contenido y método en el nivel ingenuo**, ya que no logra conocer los elementos propios del concepto matemático.

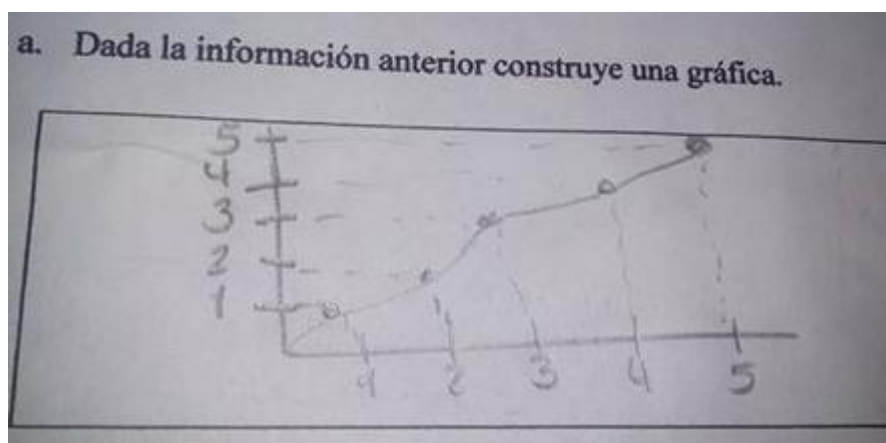


Ilustración 58 Tarea 4 ítem a momento 2

Igualmente se encontró con una producción que deja ver la falta de conocimiento ante las representaciones gráficas, pues (2 de 14 estudiantes – 14,3%) no comprendieron la

actividad propuesta. En este caso, estos estudiantes se encuentran en la **dimensión contenido y método en el nivel ingenuo**, pues no actúan de manera flexible. Demostrando así implementación de modelos erróneos y falta de conocimientos.

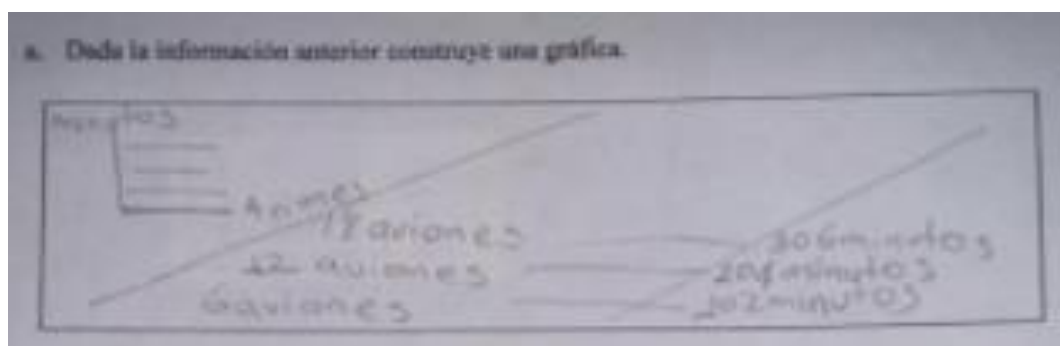


Ilustración 59 Tarea 4 ítem a momento 3

Ítem b

En esta actividad se observó que (10 de 14 estudiantes – 71,4%) implementaron la regla de tres para dar solución a la actividad, este accionar sitúa a los estudiantes **en la dimensión de método en el nivel principiante**, ya que los estudiantes implementan modelos matemáticos que le conllevan a la solución oportuna de la situación, sin embargo, estas acciones permiten contemplar que tanto razona el estudiante ante la actividad que enfrenta.

b. ¿Si han aterrizado 27 aviones a la pista cuanto tiempo ha transcurrido?

Aviones	Tiempo
27	X
6	102

$$X = \frac{27 \times 102}{6} = 459$$

459 minutos

Ilustración 60 Tarea 4 ítem b

b. ¿Si han aterrizado 27 aviones a la pista cuanto tiempo ha transcurrido?

6 aviones → 102 minutos
 1 avión → 17 minutos
 24 aviones → 408 minutos

$$\begin{array}{r} 408 \\ + 51 \\ \hline 459 \end{array}$$

17 x 3 = 51 minutos

459 minutos para 27 aviones aterrizados.

Ilustración 61 Tarea 4 ítem b momento 1

Por otro lado, se hallaron que (4 de 14 estudiantes – 28,5%) emplearon modelos adictivos que les permitieron acercarse a la respuesta más no precisarla, en este caso de ubica a este grupo de estudiantes en la **dimensión método y contenido nivel ingenuo**, ya que, se aplican modelos que no son suficientes para dar respuesta a lo que se pregunta, demostrando así mismo la falta de contenidos matemáticos, pues los estudiantes solo se basan en las experiencias previamente incorrectas.

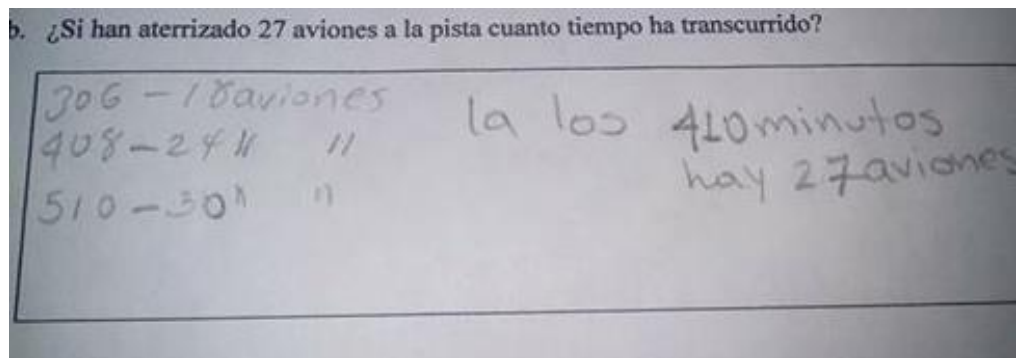


Ilustración 62 Tarea 4 ítem b momento 2

Ítem c

En esta actividad se observó que (8 de 14 estudiantes – 57,1%), fueron aquellos que respondieron en base a las reglas de tres, accionares que centran a este grupo de estudiantes en la **dimensión método y contenido en el nivel principiante**, dado que emplean modelos mecánicos para dar solución a la actividad.

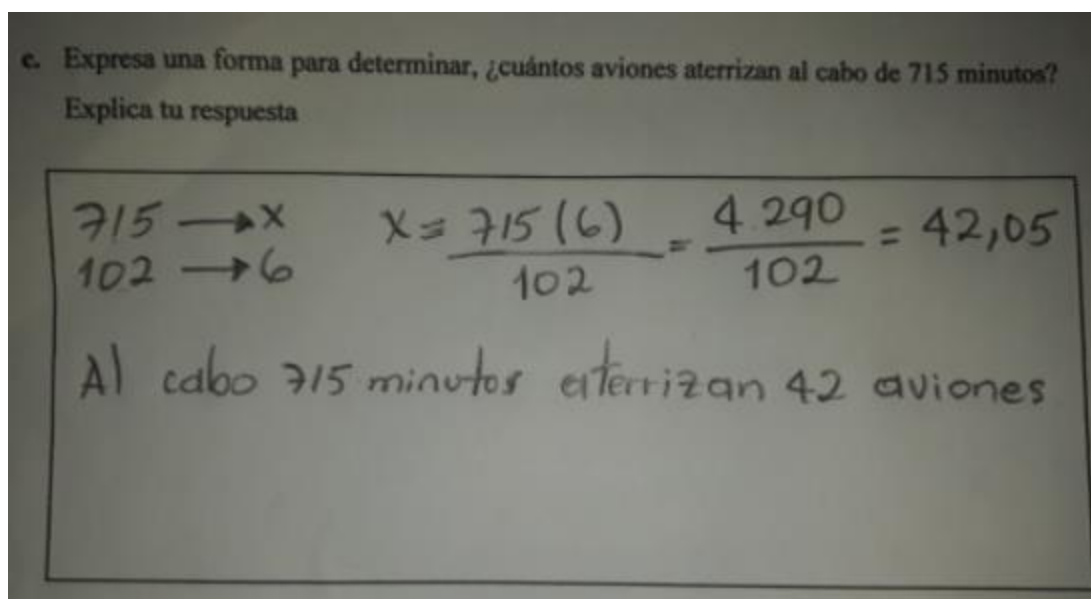


Ilustración 63 Tarea 4 ítem c

Por consiguiente, fue posible observar que (2 de 14 estudiantes – 14,3%) implementaron la regla de tres para dar solución a la actividad, pero no consideraron que las cantidades de aviones se dan en magnitudes discretas, pues la solución que estos planearon reflejan esa falencia del conocimiento; por lo anterior, estos estudiantes se movilizan en la **dimensión método nivel ingenuo**, ya que emplean modelos que no son suficientes para el desarrollo de la situación.

c. Expresa una forma para determinar, ¿cuántos aviones aterrizan al cabo de 715 minutos?
Explica tu respuesta

Tiempo	Aviones
715	x
102	6

$$x = \frac{715 \times 6}{102} = \frac{4290}{102} = 42.05$$

Aviones

Ilustración 64 Tarea 4 ítem c momento 1

En este mismo sentido se analizaron (2 de 14 estudiantes – 14,3%) que respondieron la situación implementando la fórmula de pendiente y punto-pendiente para expresar una forma que les permita determinar el número de aviones para cualquier tiempo.

a. Expresa una forma para determinar, ¿cuántas aviones aterrizan al cabo de 715 minutos?
Explica tu respuesta

$$y = \frac{5}{85}x$$

42 aviones aterrizan en la pista al cabo de 715 minutos.

X	Y
Tiempo	Avión
0	$\frac{5}{85}$
17	1
102	6
715	42

$102 \div 6 = 17$
 En 17 minutos hay un avión
 $(17, 1)$ $m = \frac{6-1}{102-17} = \frac{5}{85} = 0,06$
 $(102, 6)$
 $y - 1 = \frac{5}{85}(x - 17)$
 $y = \frac{5}{85}x - \frac{85}{85} + 1$
 $y = \frac{5}{85}x - 1 + 1$
 $y = \frac{5}{85}x$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 715 \\ \times 5 \\ \hline 3625 \end{array}$$

Ilustración 65 Tarea 4 ítem c momento 2

Este grupo de estudiantes se centran en el recorrido de las dimensiones, pues este ítem permite ver como el estudiante relaciona el conjunto de las actividades anteriores, es decir que extrae de la situación el propósito del contenido matemático que se le ha impartido. Estos procesos son aquellos que les dan cabida a los estudiantes de ser unas personas reflexivas de su proceso académico y son aquellos que se localizan en las **dimensiones de método, contenido y formas de comunicación**, estando así en el nivel **aprendiz**.

4.3 Consideraciones finales del análisis posteriori

Las dimensiones y niveles de comprensión de la EpC se configuran cuando los estudiantes trabajan en la creación, innovación y uso de procesos estratégicos que dé cuenta de su forma de comunicar e interactuar un nuevo aprendizaje. En general se encontró que los estudiantes hacen uso constante de diferentes estrategias y métodos para realizar una situación problema, en efecto hacen uso de procesos intuitivos, conocimientos matemáticos formales e informales y se motivan a encontrar modelos o respuestas que le permitan conectar el mundo de las matemáticas con fenómenos cercanos a su cotidianidad, y por consiguiente, avanzar en niveles de comprensión.

En otras palabras, el estudiante establece conceptos matemáticos, procedimientos, emplean representaciones en la que le posibilite interpretar o analizar una situación problema, pero lo hacen desde un nivel ingenuo, mediante elementos que le ofrece el contexto, pero poco a poco va tomando conciencia de la situación y reconociendo las ideas matemáticas expuestas, y va avanzando entre dimensiones, hasta alcanzar un mejor nivel de comprensión.

De esta manera los estudiantes, fueron mostrando un avance significativo; a medida que se aplicaban las tareas, eran pocas las dificultades que presentaban los estudiantes, por el hecho, de que cada vez más sus conocimientos iban madurando, retroalimentaban sus saberes previos con los nuevos conocimientos adquiridos, mostraban avance en la forma de interpretar y analizar un enunciado de una situación problema y lo más importante, es que, compartieron sus conocimientos de forma especial y validable.

Los planteamientos expuestos en el análisis, nos permite rescatar el buen trabajo del diseño de las tareas, ya que éstas lograron cumplir con el propósito de los objetivos específicos que fueron planteados desde el inicio del trabajo y poco a poco fue desarrollado en el transcurso de la investigación. De hecho, a lo largo de la aplicación de las tareas, los estudiantes cada vez más cobraban mayor interés por el diseño, ya que éstas, fueron construidas pensando en el estudiante y cómo poder llamar en ellos la atención factiblemente, y por ende se evidenció un buen avance en este aspecto. Aunque fue un poco complejo inculcar este nuevo conocimiento, los estudiantes se preocupaban por realizar diversas representaciones del concepto, como en su forma verbal y gráfica, hasta obtener un resultado satisfactorio, y este desempeño hizo que fuera compartido el conocimiento

Es importante destacar, que el análisis a posteriori, ilustra ostensiblemente, que los estudiantes pueden darse cuenta de lo importante que es obtener conocimientos matemáticos y de emplear herramientas matemáticas para el análisis y la comprensión de una situación, en la que posiblemente puedan enfrentarse. Aspecto que se evidenció en las producciones escritas de los estudiantes, al momento de aplicar las tareas; dentro de algunos grupos de trabajo en sus progresiones mostraban desespero y preocupación por alcanzar un resultado, diseños que particularmente emergía de exploración dinámica y a veces erróneas.

Finalmente, cabe resaltar que la fundamentación teórica de las tareas diseñadas, tuvo un lugar fundamental para poder dar cuenta de los procesos de comprensión y las dimensiones y niveles por donde se movilizaban los estudiantes del caso, puesto que fueron las pautas y los criterios definidos en ese apartado los que permitieron la visualización de las características encontradas en la producción de los estudiantes.

4.4 Conclusiones con respecto al cumplimiento de los objetivos

La investigación, tenía como propósito caracterizar elementos que evidencien la comprensión del concepto de *función lineal* cuando se trabaja con la resolución de tareas enmarcadas en el enfoque de la *Enseñanza para la Comprensión* con estudiantes de grado noveno (9°).

El diseño y gestión de las tareas nos permitió reconocer la proporcionalidad directa como un elemento fundamental para introducir la enseñanza del concepto de función lineal, ya que permitió ver la formación y desarrollo del pensamiento variacional por medio de actividades que emplean el dinamismo y la construcción de ideas, en la que el estudiante determina ciertos patrones de comportamiento al modificar algunas características de una representación gráfica, tabular o en lengua natural. De este modo, el diseño de las tareas también ayudó a reconocer este aspecto porque el estudiante a partir de esta noción logra entender que las magnitudes tienen una relación directa cuando varía en la misma proporción; situación que alude al reconocimiento de la función lineal como una función de proporcionalidad directa; reconociendo que una variable depende de la otra.

Es importante destacar que, de acuerdo a la EpC los elementos que permitieron evidenciar que los estudiantes comprendieron o se aproximaron a la comprensión del concepto de función lineal son: a) logran establecer una exploración visualizando y comparando variables, identificando patrones de medidas y de correspondencia entre magnitudes, b) articulan diversas estrategias o métodos para la realización de un tarea, c) exponen ideas, opiniones y ejemplificaciones significativas que aporta a una solución de un problema dado, d) construyen y argumentan sus propias producciones con claridad y coherencia, diversificando su aprendizaje a través de diálogos y explicaciones, e)

reconocen las diversas formas de representación de una situación (verbal, simbólico, tabular, gráfico) y finalmente, f) establecen el uso de algunos términos y expresiones matemáticas, reconociendo la razón de cambio y la variación de dos magnitudes.

En consecuencia, se retoma los análisis de respuestas ya presentadas en el capítulo y algunos aspectos expuestos en investigaciones sobre el tema.

- a. Los estudiantes desarrollan sin mayores dificultades la secuencia (1) iniciando con la comparación de magnitudes directamente proporcionales a través de la visualización, para luego expresarlo en diversos registros, que les permite ir acercándose más al concepto.
- b. En los resultados se observó que los estudiantes logran relacionar las magnitudes involucradas en una situación, moviéndose con facilidad entre dimensiones y niveles cuando se trata de identificar la variación implicada, permitiéndonos así, obtener buenos resultados para enriquecer las situaciones propuestas, ya que con ello se busca acercar desde la proporcionalidad directa al estudiante a un pensamiento variacional.
- c. En los resultados se observa que a los estudiantes se les facilita identificar las variables involucradas en una situación que incluyen procesos interpretativos y a su vez justificar su decisión. Aunque las situaciones presentadas pueden ser ampliadas en un grado de investigación que desee relacionar estas concepciones.
- d. Uno de tablas como registro de representaciones permitió que los estudiantes identificarán y relacionarán cantidades de una manera cómoda, lo que favoreció que a través de diferentes registros los estudiantes relacionarán un objeto

matemático, permitiendo así contemplar los métodos que ellos empleaban para dar respuesta.

- e. A sí mismo, se presentaron algunas dificultades en los estudiantes al momento de realizar un cálculo numérico o una expresión algebraica, ya que es más sencillo para ellos dar una solución aplicando la regla de tres, en este sentido los métodos empleados por los estudiantes no le permitieron movilizarse por el nivel maestría.

En consecuencia, se puede afirmar que la situación (1) permitió al estudiante constatar y dinamizar la importancia del concepto de la proporcionalidad; aspecto que se considera importante para acercar al estudiante al conocimiento del concepto de función lineal, sin embargo.

De este modo se prosigue a mencionar que, se encontró que los estudiantes hacen uso de diferentes conceptos matemáticos informales, procesos intuitivos, aplican experiencias, desarrollan prejuicios y utilizan estrategias que le permiten acercarse y conectarse con la naturaleza de las matemáticas y con fenómenos cercanos a su realidad y así posteriormente dar un resultado sobre situaciones problemas que ella emerge.

En otras palabras, los estudiantes hacen distintas representaciones, aplican algunos conceptos matemáticos y estrategias de acuerdo a sus experiencias, para poder dar una respuesta o solución válida a una situación dada, pero lo hacen desde un primer nivel mediante los elementos que le ofrece su contexto y su cotidianidad, pero poco a poco van cobrando conocimiento y alimentan sus saberes matemáticos, logrando así obtener una mejor comprensión de manera guiada y estructurada.

Por otro lado, se observó que los estudiantes fueron capaces de autoevaluar sus conocimientos, tales como, empezar por explicarle a otros compañeros, realizar actividades expuestas en el tablero de manera eficaz, trabajar en equipo, hacer comparaciones de resultados y además reflexionar acerca de sus errores durante el desarrollo de las tareas.

En este sentido, es importante destacar que se logró satisfactoriamente alcanzar las expectativas de este trabajo, siendo críticas con lo que sugiere el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), el mayor logro de esta investigación es haber conseguido que la mayoría de los estudiantes se muevan con flexibilidad a través de los niveles y dimensiones de este enfoque logrando favorablemente la caracterización de elementos que evidencia la comprensión del concepto de función lineal. Sin embargo, el diseño propuesto puede ser rediseñado para abordar el concepto de función lineal desde un campo más amplio de la educación matemática, haciendo uso de la EpC.

En consecuencia, los contextos y la interacción social, demostraron ocupar un lugar protagónico en la integración de las tareas para el trabajo matemático y el razonamiento variacional, esto se refleja inicialmente, en la fundamentación teórica de las tareas diseñadas, pero trasciende al plano de lo práctico al mostrar que este tipo de tareas logran:

1. Dar un lugar protagónico al estudiante, como participante activo y dinámico, del conocimiento matemático.
2. Promueve la interacción y comunicación reflexiva entre los estudiantes, fomentando la creatividad y la exploración de ideas.
3. Crear la necesidad en el estudiante, de buscar métodos y estrategias que le permita satisfactoriamente llegar al resultado.

De igual manera, estas tareas reconocen:

4. Las dificultades que existen con las diversas representaciones de registros semióticos.
5. El conocimiento previo de los estudiantes, su forma de relacionar el mundo matemático con fenómenos cercanos a la cotidianidad.
6. Tareas que permiten la comunicación e interacción entre los estudiantes y de esta manera reconocer la intencionalidad e importancia que destaca cada situación.
7. Tareas que permite que el estudiante reconozca la importancia del concepto de función lineal, en ambientes tanto curriculares como extracurriculares.

Entre los elementos de esta tarea se destacan la importancia de familiarizar a los estudiantes con un trabajo experimental a partir de situaciones que promuevan la exploración, el planteamiento de conjeturas, generalizaciones que permitan que vayan avanzando por niveles de comprensión cada vez más complejos. De igual manera, el trabajo en equipo fue central para crear un ambiente propicio para la motivación, el trabajo libre de los estudiantes para promover el intercambio de ideas y el trabajo colaborativo, elementos que entran en consonancia con los principios del enfoque de la (EpC).

Finalmente, se encontró que los estudiantes pueden moverse cada vez más por medio de los niveles de comprensión, hasta hallar un carácter más general y relativo en cualquier aspecto de aprendizaje.

La estructura del enfoque de la Enseñanza para la Comprensión fue abordada en este trabajo de investigación como teoría principal y fundamental para mejorar de la

comprensión referente al concepto matemático de función lineal. De ahí se trabajó con el diseño de las actividades, en la que particularmente se encontró que, al implementar estas tareas, ayuda al estudiante a mejorar la comprensión del concepto de *función lineal*.

En síntesis, como producto de esta investigación es posible afirmar:

La aplicación de las dos situaciones (implementada durante la etapa de exploración e investigación guiada) dio lugar a un marco teórico y una aproximación metodológica que permitió diagnosticar las dificultades y conceptos previos que poseían los estudiantes, esencialmente caracterizar elementos que evidencie la comprensión del concepto de función lineal. Estos aspectos posibilitaron la elaboración de una propuesta didáctica, la cual se objetiva con miras a fortalecer los elementos identificados. La construcción de la propuesta se adapta a los elementos del enfoque de la EpC, la cual es uno de los compendios más importantes de la investigación, ya que los desempeños se adecuan a ideologías novedosas las cuales relacionan los contextos curriculares y extracurriculares en el campo académico, permitiendo así que los estudiantes se conviertan en seres autónomos de su comprensión, pues la puesta en escena de este enfoque teórico permite que los estudiantes reflexionen sobre su proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.5 Recomendaciones

Este trabajo de grado se llevó a cabo con una profunda convicción de que es posible construir un conjunto de tareas desde el enfoque de la EpC, para abordar una aproximación al concepto de función lineal.

Por tanto, se recomienda que las tareas propuestas en el aula de clases contemplen la articulación de diferentes registros de representación semiótica, para ampliar el conocimiento del estudiante, a su vez implementar actividades en la que protagonice al estudiante con sus aportes e ideas; es decir, tareas que propicie la participación activa y dinámica dentro de la clase.

De esta manera, se recomienda la implementación de actividades donde reconozca los conocimientos previos de los estudiantes y su entorno; debido a que le ayuda al estudiante a familiarizarse con los contenidos matemáticos y de esta manera él pueda relacionar sus conocimientos con el mundo que lo rodea. Por otro lado; limitar un poco el uso de libros de textos que privilegia una mirada estática de la función lineal; pues al hacerlo remite al uso de estrategias que tienen poco que ver con la necesidad de introducir el concepto para identificar comportamiento de variación entre magnitudes.

Otro aspecto que es pertinente referir en la importancia de hacer significativa el concepto de función lineal, enunciando su relevancia en la cotidianidad y en su uso frecuente en situaciones diarias. La finalidad de plantear una intervención didáctica que tenga a las competencias matemáticas como protagonistas en el aula de clases, fomentando el desarrollo y potenciación de nuevos conocimientos significativos y además propiciar espacios para desarrollar actitudes y habilidades usando problemas que generen mayores intereses en los estudiantes.

Finalmente, se recomienda articular o diseñar tareas que favorezca el fortaleciendo del pensamiento variacional, de tal forma que los estudiantes vean la matemática como un medio o herramienta para la solución de ejercicios planteados y de situaciones problemas, destacando este conocimiento como componente principal para el reconocimiento,

percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos; por ello, este pensamiento es fundamental en el proceso de comprensión del concepto de función lineal.

Referencias bibliográficas

- Aguirre, A. (2016). *Desarrollo del conocimiento matemático informal y formal en primer grado*. Barranquilla, Colombia.
- Angulo, J, Mina, S y Valencia, J. (2011). *Una secuencia didáctica como herramienta pedagógica para introducir el concepto de función lineal en grado 9°*. Buenaventura, Colombia.
- Azcarate, C & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Colección: Matemáticas, cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid, España
- Aristizabal, J., Varela, R., & Calle, D. (1989). *La dinámica y las técnicas de grupo: su aplicación a la orientación vocacional y profesional*. Medellín, Colombia.
- Bacallao, A., & Boulet, R. (2011). *Apuntes sobre el surgimiento del concepto función en la historia*. Disponible en: http://www.alammi.info/revista/numero2/pon_000d.pdf
- Cano, J. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión en estudiantes de grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín*. Medellín, Colombia.
- Díaz, J. (2013). *El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones*. El Cálculo Y Su Enseñanza, 13–25.
- Fernández, J. (2014). *Análisis de algunas dificultades en la comprensión de la sobrejectividad asociadas a la conversión entre los registros cartesiano y algebraico*. Cali, Colombia.
- García, Y., & Zúñiga, R. (2014). *Planteamiento y resolución de problemas de áreas en el laboratorio de educación matemática*. Cali, Colombia.
- Giraldo, H. (2012). *Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada en las nuevas tecnologías: Estudio de caso en el Colegio Marymount grupo 9° B del municipio de Medellín*. Medellín, Colombia.
- Grueso, R., & Gonzáles, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. Cali, Colombia.
- Henao, S., & Vanegas, J. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos*. Cali, Colombia.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Los enfoques cuantitativo y cualitativo en la investigación científica*. Metodología de la investigación. Disponible en: <https://doi.org/10.6018/turismo.36.231041>
- Hitt, F. (2003). *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*. Disponible en: <http://emis.matem.unam.mx/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>

- Maciques, E. (2004). *Trastornos del aprendizaje: Estilos de aprendizaje y el diagnóstico psicopedagógico*. Disponible en: <http://www.sld.cu>
- Manfredi, V. (2008). "Funciones matemática...¿para qué se utilizan?" la realidad de la función de la funciones lineales. Instituto superior de formación docente.
- Marín, J. (2015). *Elaboración de una propuesta de aula desde un enfoque del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, en los estudiantes del grado VIII de la Institución Educativa San Agustín*. Medellín, Colombia.
- Marín Agudelo, Y. M. (2013). *La modelación: una posibilidad para desarrollar la estimación decantidades continuas en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9°*. Universidad Autonoma de Manizales.
- Mejía, C. (2011). *El marco de la enseñanza para la comprensión aplicado al aprendizaje del concepto de campo eléctrico en estudiantes de ingeniería de sistemas*. Bogotá, Colombia. Disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/4382/>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Mosquera, M. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito*. Medellín, Colombia.
- Noreña, R. (2013). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional*. Cali, Colombia.
- Perkins, D. (1999). *La comprensión es la capacidad de desempeño flexible*. Buenos Aires.
- Perkins, D., & Blythe, T. (2006). *La comprensión en el aula*. Eduteka, 7.
- Quintero, E. (2014). *Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria*. Manizales, Colombia.
- Rioseco, M., & Romero, R. (2007). *La contextualización de la enseñanza como elemento facilitador del aprendizaje significativo*. Encuentro Internacional Sobre El Aprendizaje Significativo, 84, 251–262.
- Rivera, E., & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo Del Pensamiento Variacional En La Educación Básica Primaria: Generalización De Patrones Numéricos*. Cali, Colombia. Disponible en: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4599/1/CB-0472509.pdf>
- Roldan, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. Bogotá, Colombia.

- Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. Universidad Nacional de Colombia.
- Ruíz, P., Peme, C., Longhi, A., & Ferreyra, A. (2012). *Enseñanza para la comprensión*. Marco interpretativo de la construcción del conocimiento en clases de ciencias, 31, 113–137.
- Sánchez, D. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula*. Bogotá, Colombia.
- Socarras, J. (2008). *Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática*. Liberoamericana de Educación. Disponible en: <file:///C:/Users/USER-PC/Downloads/SOCARRA.pdf>
- Stone, M. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión*. Disponible en: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/3/EEDU_Perkins_Unidad_1.pdf
- Vasco, C. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. In Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Blumenau (Vol. 9). Colombia.
- Villegas, D. J. M., & Pereira, R. E. V. (2015). *Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de la matemática universitaria*. Acta Scientiarum. Education, 37, 85. Disponible en: <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v37i1.21040>

Anexos

Evidencia de la puesta en escena de las situaciones.

