

CONTROLABILIDAD INTERNA DE LA ECUACIÓN
LINEAL DE SCHRÖDINGER EN 1-D

JHON ALEXANDER RODRIGUEZ MURILLO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2019

Jhon Alexander Rodriguez Murillo

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Matemático

Directora:
Ivonne Rivas Triviño, Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2019

Contenido

1. Introducción	4
2. Preliminares	7
2.1. Espacios de Banach y espacios de Hilbert	7
2.2. Transformada de Fourier en $\mathbb{T}^n$	20
2.3. Espacios $L^p(\mathbb{T})$ y $H^s(\mathbb{T})$	21
2.4. Semigrupos uniformemente continuos y C_0 semigrupos	25
2.4.1. Teorema de Lumer-Phillips	32
2.5. Operadores lineales compactos	36
2.6. Multiplicadores de Fourier	40
2.7. Control y observabilidad	45
3. Buena Colocación	50
4. Propagación de Compacidad	53
5. Controlabilidad lineal	58
6. Conclusiones	63

1. Introducción

La ecuación de Schrödinger en el toro unidimensional, $\mathbb{T}$, es

$$i\partial_t u + \Delta u = f(u), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \quad (1.0.1)$$

donde u es una función de valor complejo, con término lineal o no lineal $f(u)$, es una ecuación diferencial parcial con dos derivadas en espacio y una derivada en tiempo. La ecuación lineal de Schrödinger matemáticamente describe la evolución en el tiempo de la función de onda de algún sistema, y predecir el comportamiento de los electrones y otras partículas cuando se mueven relativamente lento y tienen poca energía, por lo cual juega un rol muy importante en la mecánica cuántica. La ecuación de Schrödinger generalmente es trabajada en espacios de Hilbert, debido a que en estos espacios es posible caracterizar y conocer el comportamiento de los electrones y las partículas mencionadas anteriormente.

La buena colocación de la ecuación (1.0.1) junto a una condición inicial u_0 (problema de valor inicial PVI), depende fuertemente del espacio donde se encuentre u_0 . Por ejemplo, Y. Tsutsumi [21] mostró la buena colocación del PVI para $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Posteriormente, T. Kato [9], mostró que la buena colocación del PVI para $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, n dimensión del espacio, se encuentra condicionada al valor de s , esto es, para valores de $s \geq \frac{n}{2}$. Finalmente, el caso periódico fue mostrado por J. Bourgain [3], quien demostró la buena colocación del PVI para $u_0 \in H^s(T)$, $s \geq 0$, introduciendo los espacios $X^{s,b}$ con $b = \frac{1}{2}$.

El objetivo de la teoría de control en ecuaciones diferenciales parciales es llevar la solución de un estado inicial a un estado deseado en un tiempo determinado, esto por medio, de una función conocida como control que varía de acuerdo al problema. Este puede ser una fuente interna o un potencial (control interno) o una fuente externa que trabaja desde la frontera (control de frontera). Ver [6] y [13] para una introducción general.

Se ha mostrado que la controlabilidad de la ecuación lineal de Schrödinger esta fuertemente relacionada con la geometría del dominio donde esta se encuentra. Por ejemplo, S. Jaffard [8] mostró la controlabilidad interna un rectángulo con observaciones en un subdominio abierto $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ en el espacio $L^2(\Omega)$ y con control en $L^2(\omega \times (0, T))$. Además, se ha mostrado

que para garantizar controlabilidad es suficiente que una curva $\Gamma \subset \partial\Omega$ sea, intersectada por cada rayo en Ω de acuerdo a las leyes de la geometría óptica en algún tiempo $0 \leq t \leq T$ (esto se conoce como una condición geométrica de control **CGC**), esto fue probado inicialmente por G. Lebeau [12], cabe aclarar que G. Lebeau [12] trabaja con control de frontera, pero las mismas ideas pueden llevar a un control interno. Un caso particular del trabajo de G. Lebeau [12], fue demostrado por E. Machtyngier [14], donde E. Machtyngier [14] demostró la controlabilidad exacta usando la tecnica de multiplicadores. También, fue demostrado por N. Burq [5] que si la ecuación de Schrödinger se encuentra en un dominio perforado, esta puede ser controlada por medio de un abierto en el exterior de la frontera en cualquier espacio de Sobolev $H^s(\Omega)$ con $s > 0$. Para finalizar, C. Laurent y K. Beauchard [2] mostraron la controlabilidad local en $L^2(\mathbb{R})$ con control en $L^2((0, T), \mathbb{R})$ en un intervalo acotado, con control bilineal, que representa una partícula cuántica en un campo eléctrico.

El objetivo de este trabajo es estudiar la controlabilidad interna de la ecuación lineal de Schrödinger periódica en una dimensión. Eso es, para u_0 y u_1 estados iniciales y finales en $L^2(\mathbb{T})$ dados, se pretende encontrar un control g en $L^1([0, T], L^2(\mathbb{T}))$ tal que la solución de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 1_\omega g, & (x, t) \in \mathbb{T} \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (1.0.2)$$

satisface $u(T) = u_1$. Donde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es el toro y $\omega \subset \mathbb{T}$ una región de controlabilidad pequeña. Para tal propósito, se estudia, inicialmente, la buena colocación del problema de Cauchy asociado al sistema (1.0.2) y para ello introducimos la teoría de semigrupos fuertemente continuos para operadores lineales, específicamente una aplicación directa del Teorema de Lumer-Phillips Ver ([16]). Luego, con el objetivo de usar el método de unicidad de Hilbert (HUM) [13] el cual nos ayudará a determinar la controlabilidad interna via un estimativo de observabilidad que se deriva del problema dual, nos apoyamos en la teoría de operadores compactos en espacios de Hilbert, los cuales nos brindarán herramientas y resultados bastante útiles tales como el Teorema de Rellich-Kondrachov [7].

Un concepto importante presentado en este trabajo es el de multiplicadores de Fourier, estos son operadores un poco más generales que los operadores

diferenciales, por lo cual son de interés en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. Esto pues, los multiplicadores de Fourier generalizan el símbolo de los operadores diferenciales, brindando la posibilidad de trabajar con funciones que no solo son polinomiales. Así, uno de los aspectos más relevantes en la teoría de multiplicadores de Fourier trata de cómo invertir tantos operadores como sea posible y al mismo tiempo salvar tanta regularidad como sea posible. Una de las ventajas que trae consigo es que se conoce gran parte de las propiedades y el comportamiento del multiplicador de Fourier por medio de su símbolo. Para los multiplicadores de Fourier se ha desarrollado una gran teoría con resultados bastante interesantes, algunos de ellos serán desarrollados en el contenido de este trabajo.

Es importante detallar que los resultados no son nuevos, el objetivo de esta tesis es de realizar un estudio monográfico, en el cual se tendrá contacto con nuevas técnicas y metodologías para el estudio de la ecuación de Schrödinger por lo cual se realizará un estudio detallado del artículo "*Internal Control of the Schrödinger equation*" de Camille Laurent [11] enfocándose principalmente en resultados de propagación de compacidad para algunas soluciones de la ecuación de Schrödinger en una dimensión; esto, con el objetivo de demostrar el estimativo que garantiza la controlabilidad de (1.0.2).

Se ha dividido el trabajo en cuatro capítulos. En el primer capítulo se proporcionan algunas definiciones y propiedades de los operadores lineales compactos en espacios normados, además, se introduce la noción de semigrupo, enfatizando el estudio en los llamados semigrupos fuertemente continuos y el Teorema de Lumer-Phillips [16], se introduce la noción de multiplicadores de Fourier y se presenta un marco introductorio de la relación entre controlabilidad, observabilidad y dualidad. En el segundo capítulo se trabaja la buena colocación del problema, mostrando que el operador relacionado con el problema de Cauchy es cerrado, la densidad del dominio de dicho operador en $L^2(\mathbb{T})$ y la dependencia continua de los datos de la solución. En el tercer capítulo presentamos un resultado de propagación de compacidad de las soluciones de la ecuación lineal de Schrödinger, el cual muestra que si la sucesión solución es compacta en un conjunto $\omega \subset \mathbb{T}$ esta sería compacta en todo $\mathbb{T}$. Para finalizar, en el cuarto capítulo mostramos como el anterior resultado de propagación de compacidad nos permite demostrar la controlabilidad interna, mostrando explícitamente como HUM es usado en este caso particular.

2. Preliminares

2.1. Espacios de Banach y espacios de Hilbert

En esta sección, presentamos los espacios de Banach y de Hilbert los cuales nos brindan bases y herramientas que nos permiten lograr los objetivos planteado en este trabajo, presentaremos algunas características para luego mostrar algunos resultados de gran importancia. Para finalizar, exhibiremos los espacios de Hilbert y Banach que son de principal intereses para el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.1.1. Norma *Una norma es una aplicación de valor real en un espacio vectorial X cuyo valor para $x \in X$ es denotado por $\|x\|_X$ y tiene las siguientes propiedades*

1. $\|x\|_X \geq 0$.
2. $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$.
4. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$,

para $x, y \in X$ y α escalar.

Una norma en X define una métrica d sobre X , la cual es

$$d(x, y) = \|x - y\|_X$$

para $x, y \in X$.

Definición 2.1.2. Espacio normado y de Banach *Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida en él. Un espacio de Banach X es un espacio normado completo (toda sucesión de Cauchy tiene un límite en el espacio respecto a la métrica definida por la norma).*

Ejemplo 2.1.1. *Un espacio de bastante importancia es el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$. Se define para $p \geq 1$ el conjunto*

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : u \text{ es Lebesgue-medible y } \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Se puede demostrar que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx$$

define una norma, con la cual el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ resulta ser un espacio de Banach.

Definición 2.1.3. Producto interno Un producto interno en H es una aplicación $\langle, \rangle_X : X \times X \rightarrow K$, donde K es el campo escalar del espacio vectorial X , tal que para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in K$ se cumple que

1. $\langle x, x \rangle_X \geq 0$.
2. $\langle x, x \rangle_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_X = \alpha \langle x, z \rangle_X + \beta \langle y, z \rangle_X$.
4. $\langle x, y \rangle_X = \overline{\langle y, x \rangle_X}$.

Definición 2.1.4. Espacio de Hilbert Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial X con producto interno definido en X y completo con respecto a la norma inducida por el producto interno.

Ejemplo 2.1.2. En particular, si tomamos $p = 2$ en el ejemplo 2.1.1, tenemos que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx.$$

Además, tendríamos que $L^2(\mathbb{R}^n)$ resulta ser un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v(x)} dx$$

para $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ahora presentamos algunas características o propiedades importantes de operadores definidos en los anteriores espacios.

Definición 2.1.5. Operador lineal Un operador lineal A es un operador tal que

1. El dominio, $\mathbb{D}(A)$, de A es un espacio vectorial sobre un campo K y el rango, $\mathbb{R}(A)$, es un espacio vectorial sobre el mismo campo.
2. Para todo $x, y \in \mathbb{D}(A)$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$A(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = \alpha_1 Ax + \alpha_2 Ay.$$

Donde introducimos la notación de $\mathbb{D}(A)$ y $\mathbb{R}(A)$ para denotar el dominio de A y el rango de A respectivamente.

Ejemplo 2.1.3. Operador Identidad El operador identidad $I_X : X \rightarrow X$, (X puede ser un espacio de Banach o Hilbert) definido por $I_X x = x$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 2.1.4. Operador Derivada Un operador que se usa frecuentemente en matemáticas es el que toma la derivada de una función, el operador $D : \mathbb{D}(A) = C^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}(A) = C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ que se denota frecuentemente como $\frac{d}{dx}$, D para tomar la primera derivada con respecto a una variable x . Además, es bien conocido que este operador satisface

$$D(f + g) = Df + Dg \quad y \quad D(\alpha f) = \alpha Df, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.1.6. Operador Acotado Sean X y Y espacios de normados y $A : \mathbb{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que A es un operador acotado si existe una constante real $c > 0$ tal que $\|A(x)\| \leq c\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{D}(A)$. El conjunto de todos los operadores lineales acotados de un espacio lineal X en un espacio lineal Y lo denotaremos por $\mathbb{B}(X, Y)$.

Así, sea $A \in B(X, Y)$. Es fácil ver que

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

define una norma en $B(X, Y)$.

Observación. Para simplificar un poco la escritura, denotaremos las sucesiones de la forma (a_n) en lugar de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Ahora, presentamos una desigualdad de bastante importancia, usada múltiples veces a lo largo del trabajo.

Proposición 2.1.1. Desigualdad de Hölder Supongamos $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para U acotado, si $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$, tenemos que

$$\int_U |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}. \quad (2.1.1)$$

Demostración. Por un lado, sin pérdida de generalidad supongamos que $\|u\|_{L^p(U)} = 0$, esto implica $\int_U |uv| dx = 0$, por lo cual $u = 0$ o $v = 0$, pero por definición de norma se tiene que si $\|u\|_{L^p(U)} = 0$ entonces $u = 0$. Por tanto, la desigualdad se cumple para el caso en que $\|u\|_{L^p(U)} = 0$ o $\|v\|_{L^q(U)} = 0$. Por otro lado, supongamos que tanto $\|u\|_{L^p(U)} \neq 0$ o $\|v\|_{L^q(U)} \neq 0$ y usando la desigualdad de Young $\left(ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$ con $f = \frac{|u|}{\|u\|_{L^p(U)}}$ y $g = \frac{|v|}{\|v\|_{L^q(U)}}$, tenemos que

$$fg \leq \frac{1}{p} \frac{|u|^p}{\|u\|_{L^p(U)}^p} + \frac{1}{q} \frac{|v|^q}{\|v\|_{L^q(U)}^q}.$$

Integrando con respecto en U , obtenemos

$$\frac{\int_U |u||v| dx}{\|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y así

$$\int_U |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

□

Observación. 1. Un caso particular muy usado de la desigualdad de Hölder es cuando tenemos $p = q = 2$, esto es

$$\int_U |uv| dx \leq \|u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)}$$

Observación. 2. La desigualdad de Hölder puede ser generalizada, esto es para U acotado, si $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$ puede demostrarse que $fg \in L^r(U)$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Ejemplo 2.1.5. Una matrix real $A = (\alpha_{jk})$, $j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, n$, para $n, r \in \mathbb{Z}^*$ con r filas y n columnas define un operador $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ por medio de $Tx = Ax$, donde $x = (\zeta_j)$ y $y = (\eta_k)$ son vectores columnas con n y r componentes, respectivamente, y la operación realizada es multiplicación de matrices usual. En términos de componentes, tenemos lo siguiente

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \zeta_k \quad j = 1, \dots, r, \quad (2.1.2)$$

T es lineal pues la multiplicación de matrices es una operación lineal. Ahora, para probar que T es acotado, recordemos que la norma en $\mathbb{R}^n$ es

$$\|x\|^2 = \sum_{m=1}^n \zeta_m^2;$$

similarmente para $y \in \mathbb{R}^r$. Luego, usando (2.1.2) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{j=1}^r \eta_j^2 = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \zeta_k \right]^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^r \left[\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n \zeta_m^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= \|x\|^2 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2. \end{aligned}$$

Nótese que $\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2$ no depende de x , por lo cual, podemos reescribir de la siguiente forma

$$\|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2 \quad \text{donde} \quad c^2 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^2.$$

Así, vemos que T es acotado.

Teorema 2.1.1. Continuidad y acotamiento Sean X, Y espacios normados y $A : \mathbb{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces

1. A es continuo si y solo si A es acotado.
2. Si A es continuo en un solo punto, entonces A es continuo en todo punto.

Demostración. Para demostrar 1. Veamos que si $A = 0$ la afirmación es trivial. Ahora, sea $A \neq 0$, entonces $\|A\| \neq 0$. Primero, supongamos que A es acotado y consideremos $x_0 \in \mathbb{D}(A)$ arbitrario. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces, como A es lineal, para $x \in \mathbb{D}(A)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{donde} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|},$$

obtenemos

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\|\|x - x_0\| < \|A\|\delta = \varepsilon.$$

Como x_0 es arbitrario, lo anterior muestra que A es continuo.

Ahora, supongamos que A es continuo, entonces, para $x_0 \in \mathbb{D}(A)$ arbitrario, así, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Ax - Ax_0\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in D(A) \quad \text{tal que} \quad \|x - x_0\| \leq \delta.$$

Sea $y \neq 0$ en $\mathbb{D}(A)$ y definimos $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$. Entonces, si $\|x - x_0\| = \delta$, por la continuidad y linealidad de A tenemos que

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| = \left\| A \left(\frac{\delta}{\|y\|} y \right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ay\| \leq \varepsilon.$$

Donde lo anterior puede ser escrito de la forma $\|Ay\| \leq c\|y\|$, donde $c = \varepsilon/\delta$ lo cual muestra que A es acotado.

Para demostrar 2. Vemos que la continuidad de A en un punto implica que A es acotado por la segunda parte de la prueba del anterior literal, lo cual implica la continuidad de A en todo punto por (1). $\square$

Definición 2.1.7. *Espacio Dual* Sea X un espacio de Banach sobre un campo escalar $\mathbb{K}$. El dual de X es el espacio

$$V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) := \{A : V \rightarrow \mathbb{K} : A \text{ acotado y lineal} \} \quad (2.1.3)$$

donde el anterior espacio tiene norma definida por el operador, eso es

$$A \mapsto \|A\| := \sup_{f \in X: \|f\|_X \leq 1} |A(f)|. \quad (2.1.4)$$

El siguiente resultado, nos da un criterio para saber cuando el espacio es dimensión finita

Teorema 2.1.2. Teorema de Compacidad de Riesz Sea X un espacio normado. Entonces X es de dimensión finita si y sólo si la cerradura de la bola unitaria de X es compacta, eso es, si $\overline{B(0,1)}$ es compacta.

Demostración. Por el Teorema de Heine-Borel, un conjunto en un espacio normado de dimensión finita es compacto si y sólo si es acotado y cerrado. Ahora supongamos que X es de dimensión infinita. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$. Inductivamente, definamos $Y_k := \text{span}\{x_j\}_{j=1}^k \neq X$ y escojamos $x_{k+1} \in X$ tal que $x_{k+1} \notin Y_k$, $\|x_{k+1}\| = 1$ y $\text{dist}(x_{k+1}, Y_k) > 1 - \varepsilon$. Entonces es claro que la secuencia (x_k) no tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto $\overline{B(0,1)}$ no es compacta. $\square$

La teoría de los espacios de Hilbert por lo general cuenta con más estructura geométrica y analítica que los espacios de Banach. Un claro ejemplo de esto, es la representación de Riesz para funcionales lineales acotados.

Teorema 2.1.3. Funcionales en espacios de Hilbert Cada funcional lineal acotado f en un espacio de Hilbert H puede ser representado en términos de el producto interno, eso es

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad (2.1.5)$$

donde z que depende de f , es únicamente determinado por f y tiene norma

$$\|z\| = \|f\|. \quad (2.1.6)$$

Demostración. Si $f = 0$, tomando $z = 0$ se obtiene (2.1.5) y (2.1.6). Sea $f \neq 0$. Consideremos el espacio nulo $\mathcal{N}(f)$ y su complemento ortogonal $\mathcal{N}(f)^\perp$. Como $f \neq 0$ entonces $\mathcal{N}(f) \neq H$ y así $\mathcal{N}(f)^\perp \neq \{0\}$. Por lo cual, podemos tomar $z_0 \neq 0 \in \mathcal{N}(f)^\perp$. Definimos

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$$

donde $x \in H$ es arbitrario. Aplicando f y usando la linealidad de esta obtenemos

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

Lo cual muestra que $v \in \mathcal{N}(f)$. Como $z_0 \perp \mathcal{N}(f)$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0 \rangle = \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \end{aligned}$$

despejando $f(x)$

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle.$$

Por lo cual si tomamos

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0$$

obtenemos (2.1.5).

Ahora, nos resta probar que z en (2.1.5) es único. Supongamos que existen z_1 y z_2 tales que para todo $x \in H$

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

Entonces $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ para todo x . Escogiendo en particular $x = z_1 - z_2$, tenemos que $\|z_1 - z_2\|^2 = 0$. Por lo tanto $z_1 = z_2$.

Para finalizar, probaremos (2.1.6). Como $f \neq 0$ entonces $z \neq 0$. Por (2.1.5) tomando $z = x$ obtenemos

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \|z\| \Rightarrow \|z\| \leq \|f\|.$$

Por otro lado, usando (2.1.5) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz vemos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\| \Rightarrow \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|.$$

□

Definición 2.1.8. Forma sesquilineal Sean X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo $K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Entonces una forma sesquilineal h sobre $X \times Y$ es una función

$$h : X \times Y \rightarrow K$$

tal que, para todo $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ y escalares $\alpha, \beta \in K$

$$\begin{aligned} h(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= h(x_1, y_1) + h(x_1, y_2) + h(x_2, y_1) + h(x_2, y_2), \\ h(\alpha x, \beta y) &= \overline{\alpha} \beta h(x, y). \end{aligned}$$

Definición 2.1.9. Norma de la forma sesquilineal Si X y Y son espacios normados y existe un número real c tal que para todo $x \in X$ y $y \in Y$ se cumple $|h(x, y)| \leq c\|x\|\|y\|$, entonces se dice que h es acotado y su norma es definida de la siguiente forma

$$\|h\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|h(x, y)|}{\|x\|\|y\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |h(x, y)|. \quad (2.1.7)$$

Lema 2.1.1. Sea X un espacio vectorial con producto interno. Si $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$ para todo $w \in X$ entonces $v_1 = v_2$. En particular, $\langle v_1, w \rangle = 0$ para todo $w \in X$ implica $v_1 = 0$.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que para todo $w \in X$

$$\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle = 0.$$

Para $w = v_1 - v_2$ tenemos $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$. Por lo tanto $v_1 - v_2 = 0$, por lo cual $v_1 = v_2$. En particular, $\langle v_1, w \rangle = 0$ con $w = v_1$ obtenemos $\|v_1\|^2 = 0$, tal que $v_1 = 0$. $\square$

Teorema 2.1.4. Representación de Riesz Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $h : H_1 \times H_2 \rightarrow K$ una forma sesquilineal acotada. Entonces h tiene una representación

$$h(x, y) = (Sx, y) \quad (2.1.8)$$

donde $S : H_1 \rightarrow H_2$ es un operador lineal acotado. S es determinado de forma única por h y tiene norma $\|S\| = \|h\|$.

Demostración. Consideremos la aplicación $\overline{h(x, y)}$. Es lineal en y , debido a que es conjugado. Con el objetivo de aplicar el Teorema 2.1.3, tomaremos x fijo. Entonces de acuerdo al Teorema 2.1.3, este brinda una representación en la cual y es variable, eso es,

$$\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle.$$

Por lo tanto,

$$h(x, y) = \langle z, y \rangle.$$

Aquí $z \in H_2$ es único y depende de $x \in H_1$. Por lo cual, podemos definir el siguiente operador dependiente de la variable x

$$S : H_1 \rightarrow H_2 \text{ dado por } z = Sx.$$

Reemplazando $z = Sx$ en $h(x, y) = \langle z, y \rangle$ obtenemos (2.1.8). Ahora, veamos que S es lineal. Entonces para todo $x, x_1, x_2 \in H_1$, $y \in H_2$ y escalares $\alpha, \beta \in K$

$$\begin{aligned}\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle,\end{aligned}$$

así, por el Lema 2.1.1 obtenemos $S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2$.

Para ver que S es acotado, tenemos por (2.1.7) y (2.1.8)

$$\|h\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \geq \sup_{x, Sx \neq 0} \frac{|\langle Sx, Sx \rangle|}{\|x\| \|Sx\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|.$$

Obteniendo, $\|S\| \leq \|h\|$, por lo tanto S es acotado. Para probar que $\|S\| = \|h\|$, vemos que por una aplicación directa de la desigualdad de Schwarz

$$\|h\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq \sup_{x, y \neq 0} \frac{\|Sx\| \|y\|}{\|x\| \|y\|} = \|S\|.$$

Obteniendo, $\|S\| \geq \|h\|$, así $\|S\| = \|h\|$.

Para finalizar, nos resta probar que S es único, por lo cual suponiendo que existe $T : H_1 \rightarrow H_2$ tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$ tenemos

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle,$$

vemos que para todo $x \in H_1$ se cumple que $Sx = Tx$ por el Lema 2.1.1. Por lo tanto $S = T$. $\square$

Ahora, presentamos la definición de el adjunto de un operador, donde la existencia y unicidad de este está estrechamente relacionado con el operador S definido en la demostración del Teorema 2.1.4.

Definición 2.1.10. Operador adjunto A^* Sea $A : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert. Entonces el operador adjunto A^* es el operador

$$A^* : H_2 \rightarrow H_1$$

tal que para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$ se cumple que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Teorema 2.1.5. *Unicidad de A^** El operador adjunto A^* de A existe, es único y es un operador lineal acotado con norma $\|A^*\| = \|A\|$.

Para una prueba de este resultado se refiere al lector a ver [10] página 196 Teorema 3.9-2.

Para estudiar algunas propiedades del operador adjunto, el siguiente lema puede ser de mucha importancia

Lema 2.1.2. *Operador Cero* Sean X y Y espacios de Hilbert y $Q : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, entonces

- (a) $Q = 0$ si y sólo si $\langle Qx, y \rangle = 0$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$.
- (b) Si $Q : X \rightarrow X$, donde el campo escalar de X es complejo, y $\langle Qx, x \rangle = 0$ para todo $x \in X$, entonces $Q = 0$.

Demostración. (a) Por un lado $Q = 0$ implica $Qx = 0$ para todo x e implica además

$$\langle Qx, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0.$$

Por otro lado, si $\langle Qx, y \rangle = 0$ para todo x y y entonces $Qx = 0$ por 2.1.1, y así, $Q = 0$ por definición.

(b) Por hipótesis, $\langle Qv, v \rangle = 0$ para cada $v = \alpha x + y \in X$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y \rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle Qx, x \rangle + \langle Qy, y \rangle + \alpha \langle Qx, y \rangle + \bar{\alpha} \langle Qy, x \rangle \\ &= \alpha \langle Qx, y \rangle + \bar{\alpha} \langle Qy, x \rangle \end{aligned}$$

tomando $\alpha = 1$, obtenemos

$$0 = \langle Qx, y \rangle + \langle Qy, x \rangle$$

y $\alpha = i$

$$0 = \langle Qx, y \rangle - \langle Qy, x \rangle.$$

Sumando las dos expresiones, $\langle Qx, y \rangle = 0$ y por el literal (a) $Q = 0$. $\square$

Definición 2.1.11. *Operador Auto-Adjunto* Un operador acotado $T : H \rightarrow H$, con H un espacio de Hilbert es auto-adjunto si $A^* = A$.

Un criterio bastante útil para saber cuándo un operador es auto-adjunto en un espacio de Hilbert es el siguiente

Teorema 2.1.6. *Sea $A : H \rightarrow H$ un operador lineal en un espacio de Hilbert H . Entonces:*

- (a) *Si A es auto-adjunto, $\langle Ax, x \rangle$ es real para todo $x \in H$.*
- (b) *Si H es complejo y $\langle Ax, x \rangle$ es real para $x \in H$ entonces el operador A es auto-adjunto.*

Demostración. (a) Si $A = A^*$, entonces para todo $x \in H$,

$$\overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle$$

Por lo tanto $\langle Ax, x \rangle$ es igual a su conjugado complejo, por lo tanto es real.

(b) Si $\langle Ax, x \rangle$ es real para todo $x \in H$, entonces

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \overline{\langle x, A^*x \rangle} = \langle A^*x, x \rangle.$$

Por lo tanto,

$$0 = \langle Ax, x \rangle - \langle A^*x, x \rangle = \langle (A - A^*)x, x \rangle$$

y $A - A^* = 0$, así, usando el Lema 2.1.2 obtenemos $A^* = A$ como H es complejo. $\square$

Ejemplo 2.1.6. *Sea $P_2(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual a 1. Definimos el producto interno en $P_2(\mathbb{R})$ como*

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

para $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Consideremos el funcional

$$L : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$$

definido por $L(a + bx) = (8a + 2b) + (b - 3a)x$, para $a, b \in \mathbb{R}$. Mostremos que L es auto adjunto, para esto, debemos ver que $\langle v, L(w) \rangle = \langle L(v), w \rangle$ con $v = a + bx$ y $w = c + dx$. Por un lado,

$$\begin{aligned} \langle v, L(w) \rangle &= \langle a + bx, (8c + 2d) + (d - 3c)x \rangle \\ &= 8ca + 2da + 8cb + 2db + da - 3ca + 8cb + 2db + db - 3cb \\ &= 13ca + 5da + 5cb + 3db. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\langle L(v), w \rangle &= \langle (8a + 2b) + (b - 3a)x, c + dx \rangle \\ &= 8ca + 2cb + 8ca + 8da + 2cb + 2db + cb + db - 3ca - 3da \\ &= 13ca + 5da + 5cb + 3db.\end{aligned}$$

Por lo cual, $\langle v, L(w) \rangle = \langle L(v), w \rangle$ y así $L = L^*$.

Ahora, presentamos las nociones de convergencia débil y fuerte, con el objetivo, de diferenciar una de la otra escribiremos sus respectivas definiciones y notación.

Definición 2.1.12. Convergencia fuerte Una sucesión (x_n) es un espacio normado X converge fuertemente si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0. \quad (2.1.9)$$

Y lo denotamos por $x_n \rightarrow x$.

La convergencia débil es definida en términos de los funcionales lineales acotados de X tal como se muestra en la siguiente definición

Definición 2.1.13. Convergencia débil Una sucesión (x_n) es un espacio normado X converge débilmente si existe $x \in X$ tal que para cada $f \in X'$ (X' espacio dual de X).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x). \quad (2.1.10)$$

Escribimos $x_n \rightharpoonup x$ y decimos, que x es el límite débil de (x_n) .

En particular, por el Teorema 2.1.4 si X es un espacio de Hilbert la anterior definición puede ser escrita de la siguiente forma

$$x_n \rightharpoonup x \text{ si y sólo si } \langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle \text{ para todo } z \in X. \quad (2.1.11)$$

Ahora bien, con el objetivo de presentar los espacios de Banach y Hilbert que fueron usados para el desarrollo de este trabajo debemos antes definir la transformada de Fourier en nuestro espacio de interés.

2.2. Transformada de Fourier en $\mathbb{T}^n$

Primero fijamos la notación para el toro como $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. $\mathbb{T}^n$ puede ser identificado con el cubo $[0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, donde identificamos la medida en el toro con la restricción de la medida euclidiana en el cubo. Las funciones en $\mathbb{T}^n$ pueden ser pensadas como aquellas funciones en $\mathbb{R}^n$ que son 1-periódicas en cada dirección coordinada. De forma más precisa, en $\mathbb{R}^n$ definimos la relación de equivalencia

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n,$$

donde las clases de equivalencia son

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in \mathbb{R}^n : x \sim y\} \\ &= \{x + q : q \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es naturalmente enviado a un punto $[x] \in \mathbb{T}^n$, así, con el fin de abreviar la escritura escribiremos $x \in \mathbb{T}^n$ en vez de $[x] \in \mathbb{T}^n$.

En particular, en este trabajo tomaremos $n = 1$, eso es, el toro de dimensión uno. Así, cabe destacar que $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo a el círculo

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\} \\ &= \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

por medio de la aplicación

$$t \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

por lo cual identificaremos funciones en $\mathbb{T}$ con funciones en $\mathbb{S}^1$. Empezaremos mostrando una característica muy importante de las funciones de $\mathbb{T}$ y definiendo otro espacio que nos ayudaran a definir la transformada de Fourier.

Definición 2.2.1. Funciones periódicas Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ es 1-periódica si $f(x+q) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $q \in \mathbb{Z}^n$. Así, consideramos estas funciones definidas en $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$. El espacio de funciones 1-periódicas m veces continuamente diferenciable está denotado por $C^m(\mathbb{T})$ y las funciones de prueba son elementos del espacio $C^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}^+} C^m(\mathbb{T})$.

Definición 2.2.2. Espacio de Schwartz Sea $S(\mathbb{Z}^n)$ el espacio de funciones de rápido decrecimiento $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Eso es, $\phi \in S(\mathbb{Z}^n)$ si existe $M < \infty$ y una constante $C_{\phi, M}$ tal que

$$|\phi(k)| \leq C_{\phi, M} (1 + \|k\|^2)^{-M/2}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior podemos definir de manera general la transformada de Fourier en $\mathbb{T}^n$.

Definición 2.2.3. Transformada de Fourier periódica Sea

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} = (f \rightarrow \widehat{f}) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow S(\mathbb{Z}^n)$$

la transformada de Fourier en el toro definida por

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot k} f(x) dx. \quad (2.2.1)$$

Entonces $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ es una biyección y su inversa $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : S(\mathbb{Z}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot k} \widehat{f}(k) \quad (2.2.2)$$

tal que para $h \in S(\mathbb{Z}^n)$ tenemos que

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} h)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot k} h(k).$$

2.3. Espacios $L^p(\mathbb{T})$ y $H^s(\mathbb{T})$

Con ayuda de lo anterior, definimos de forma general el espacio $L^p(\mathbb{T})$

Definición 2.3.1. Espacio $L^p(\mathbb{T})$ Para $1 \leq p < \infty$ definimos $L^p(\mathbb{T})$ como el espacio de todas las funciones u tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Para $p = \infty$, sea $L^\infty(\mathbb{T})$ como el espacio de todas las funciones u tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} := \text{esssup}_{x \in \mathbb{T}} |u(x)| < \infty.$$

Estos espacios con sus respectivas normas son de nuevo un par de ejemplos de espacios de Banach.

Así, de acuerdo a lo anterior, de manera particular definimos el espacio $L^2(\mathbb{T})$ y presentamos algunas características de este, cabe resaltar que este espacio es de mucha importancia en este trabajo y muchos de los resultados realizados fueron hechos en este espacio:

Definición 2.3.2. *Espacio $L^2(\mathbb{T})$* El espacio $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \int_{\mathbb{T}} u(x) \overline{v(x)} dx,$$

donde $\bar{z}$ es el conjugado complejo de $z \in \mathbb{C}$. Los coeficientes de Fourier de $u \in L^2$ son

$$\widehat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-i2\pi x \cdot k} u(x) dx \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2.3.1)$$

están bien definidos para todo k debido a la compacidad de $\mathbb{T}$ y la desigualdad de Holder (ver 2.1.1).

Teorema 2.3.1. La familia $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ definida por

$$e_k(x) := e^{i2\pi x \cdot k}$$

forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$.

Para una prueba de este resultado se envía el lector a [19].

Observación. Como ya vimos la familia $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$. Así, las sumas parciales de la serie de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i2\pi x \cdot k}$ converge a u en la norma L^2 , tal que podremos identificar u con su representación en series de Fourier

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i2\pi x \cdot k}, \quad (2.3.2)$$

donde, llamamos a $\widehat{u} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ la transformada de Fourier de u .

Otro espacio de gran importancia en este trabajo es el espacio de distribuciones periódicas

Definición 2.3.3. *Espacio de distribuciones periódicas* $\mathbb{D}'(\mathbb{T})$ El espacio dual $\mathbb{D}'(\mathbb{T}) = \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ es llamado el espacio de distribuciones periódicas. Para $u \in \mathbb{D}'(\mathbb{T})$ y $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$ escribiremos

$$u(\phi) = \langle u, \phi \rangle.$$

Ahora introduciremos los espacios de Sobolev periódico, $H^s(\mathbb{T})$, el cual, para algunos valores de $s \in \mathbb{R}$, note que $s = 0$ es el espacio $L^2(\mathbb{T})$ y nos brinda información acerca de la regularidad de las distribuciones. Pero antes definimos el bracket:

Definición 2.3.4. *Bracket* Consideremos la aplicación

$$k \rightarrow \langle k \rangle : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

tal que

$$\langle k \rangle = \begin{cases} |k| & k \neq 0 \\ 1 & k = 0. \end{cases}$$

La idea de esta función es medir la tasa de decrecimiento de las distribuciones.

Observación. La anterior aplicación también puede ser definida de tal forma que $\langle k \rangle = (1 + |k|^2)^{1/2}$, pues el objetivo principal de esta función es que tenga un comportamiento asintótico como la norma $k \rightarrow |k|$ cuando $|k| \rightarrow \infty$.

Así, teniendo en cuenta lo anterior definimos los espacios de Sobolev

Definición 2.3.5. *Espacios de Sobolev* $H^s(\mathbb{T})$ Para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ y $s \in \mathbb{R}$ definimos la norma $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}$ por

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^{2s} |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.3.3)$$

El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$ es entonces el espacio de distribuciones 1-periódicas para el cual la anterior norma es finita. Así, escribiremos la representación de estas funciones en series de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i2\pi x \cdot k}$.

Cuando restringimos los valores de s a valores reales no negativos, podemos definir una norma distinta y podemos hallar una relación bastante útil entre las dos normas dadas

Teorema 2.3.2. Para $s \in \mathbb{N}_0$ la norma de Sobolev, puede ser definida como

$$\|u\|'_s = \left(\sum_{\alpha \leq s} \int_{\mathbb{T}} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 \right)^{1/2}$$

donde en este caso $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Con esta definición, tenemos entonces la siguiente desigualdad

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|u\|'_s. \quad (2.3.4)$$

Demostración. De la definición de $\langle k \rangle$ tenemos que

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} = |\widehat{u}(0)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} |k|^{2s} |\widehat{u}(k)|^2$$

y

$$\begin{aligned} (\|u\|_s')^2 &= \sum_{\alpha \leq s} \int_{\mathbb{T}} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 \\ &= \sum_{\alpha \leq s} \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \end{aligned}$$

Luego, usando el lema 2.6.1 y aplicando una de las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha \leq s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\partial_x^\alpha u}(k) \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha \leq s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2\pi k|^{2\alpha} |\widehat{u}(k)|^2, \end{aligned}$$

separando de la anterior suma los terminos cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = s$, tendríamos que

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2\pi k|^{2s} |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{0 < \alpha < s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2\pi k|^{2s} |\widehat{u}(k)|^2 \\ &= |\widehat{u}(0)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2\pi k|^{2s} |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{0 < \alpha < s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2\pi k|^{2\alpha} |\widehat{u}(k)|^2. \end{aligned}$$

Donde, comparando la última expresión de arriba con la norma $\|u\|_{H^s(\mathbb{T})}$ dada en (2.3.4), vemos que hay dos términos muy parecidos, uno de ellos con un factor 2π . Por lo cual

$$\|u\|_s' = C\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} |\widehat{u}(k)|^2 + \sum_{0 < \alpha < s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2\pi k|^{2\alpha} |\widehat{u}(k)|^2.$$

Por lo tanto, $\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|u\|_s'$. □

Para terminar la presentación de los espacios de Sobolev, definimos el espacio dual de $H^s(\mathbb{T})$, $s \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3.6. *El espacio $H^{-s}(\mathbb{T})$ es el espacio dual de $H^s(\mathbb{T})$ por medio del producto interno dual Banach*

$$\langle u, v \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) \hat{v}(-k)$$

donde $u \in H^s(\mathbb{T})$ y $v \in H^{-s}(\mathbb{T})$. Note que $\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{T}} u(x) v(x) dx$ cuando $s = 0$. De acuerdo a el producto interno definido en $L^2(\mathbb{T}) = H^0(\mathbb{T})$

$$\langle u, v \rangle_{H^0(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} u(x) \overline{v(x)} dx$$

este sería el producto interno dual Hilbert, y $H^s(\mathbb{T})$ y $H^{-s}(\mathbb{T})$ son espacios duales correspondientes.

2.4. Semigrupos uniformemente continuos y C_0 semigrupos

En esta sección, presentaremos algunos conceptos de la teoria de Semigrupos que son usados a lo largo del trabajo. Para iniciar, presentamos la definición general de un semigrupo.

Definición 2.4.1. Semigrupo Sea X un espacio de Banach. Una familia uniparamétrica $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados de un espacio de Banach X en el mismo, es un semigrupo en X sí

(i) $T(0) = I$, (I es el operador identidad en X).

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$ (Propiedad de semigrupo).

Definición 2.4.2. Semigrupo de operadores lineales acotados Un semigrupo de operadores lineales acotados, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, es uniformemente continuo si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definición 2.4.3. Generador infinitesimal Definimos el operador A por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt} \Big|_{t=0} \quad \text{para } x \in \mathcal{D}(A),$$

si el límite existe. Esto nos permite definir el dominio del operador A como

$$\mathbb{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} < \infty \right\}.$$

A se llama el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Ejemplo 2.4.1. Sea $X = C(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$, con la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Para cada $t \geq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$ definimos $T(t) : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ por

$$(T(t)f)(x) := f(x+t) = f_t(x), t \geq 0.$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es inmediato que $f_t \in C(\mathbb{R})$. Veamos que $T(t)$, es una aplicación lineal acotada para cada $t \geq 0$ y así ver que este operador define un semigrupo cuyo generador infinitesimal es el operador derivada. En efecto, si $f, g \in C(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} (T(t))(f+g)(x) &= (f+g)(x+t) = f(x+t) + g(x+t) \\ &= (T(t)f)(x) + (T(t)g)(x) \end{aligned}$$

y para $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} (T(t))(\alpha f)(x) &= (\alpha f)(x+t) = \alpha f(x+t) \\ &= \alpha (T(t)f)(x). \end{aligned}$$

Luego, $T(t)$ es un operador lineal. Ahora, dado que

$$\|T(t)f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_{\infty},$$

tendríamos que $T(t)$ es acotado, tomando $c = 1$ en la Definición 2.1.6. Ahora, para finalizar, veamos que $T(t)$ define un semigrupo cuyo generador infinitesimal es el operador derivada. Así,

$$(i) \quad (T(0)f)(x) = f(x+0) = f(x) = (If)(x) \text{ entonces } T(0) = I.$$

$$(ii) \quad (T(s+t)f)(x) = f(x+s+t) = (T(t)f)(x+s) = (T(s)T(t)f)(x).$$

Además,

$$Af(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T(s)f)(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = f'(s),$$

por lo cual, $\mathbb{D}(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f' \text{ existe}\}.$

Observación. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados entonces

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Lema 2.4.1. Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo. Entonces, si $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata de la continuidad uniforme del semigrupo, pues por definición de continuidad existe $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\forall s, t \in X$ se cumple $\|s - t\| < \delta$ y $\|T(s)x - T(t)x\| < \varepsilon$. Así,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado es importante para la demostración de un resultado bastante importante en el trabajo.

Teorema 2.4.1. Sea $A \in B(X, X)$, donde X es un espacio de Banach. Si $\|A\| < 1$, entonces $(I - A)^{-1}$ existe como operador lineal acotado en todo el espacio $B(X, X)$ y

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \quad (2.4.1)$$

donde la serie es convergente con respecto a la norma de $B(X, X)$.

Demostración. Por un lado recordemos que $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ y que la serie geométrica $\sum_{j \geq 0} \|A\|^j$ converge para $\|A\| < 1$. Por lo tanto la serie en la ecuación (2.4.1) converge absolutamente. Por otro lado, como X es completo tendríamos que $B(X, X)$ es completo (ver [10] pág. 118 Teorema 2.10-2). Por lo tanto convergencia absoluta implica convergencia de la serie en (2.4.1) (ver [20] pág. 49).

Luego sea $S := \sum_{j \geq 0} \|A\|^j$. Entonces

$$\begin{aligned} (I - A)(I + A + \cdots + A^n) \\ &= (I + A + \cdots + A^n)(I - A) \\ &= I - A^{n+1}. \end{aligned}$$

Con lo cual, si $n \rightarrow \infty$ entonces $A^{n+1} \rightarrow 0$ pues $\|A\| < 1$. Así, obtenemos

$$(I - A)S = S(I - A) = I.$$

Lo cual muestra que $S = (I - A)^{-1}$. □

Teorema 2.4.2. *Un operador lineal A es un generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y sólo si A es un operador lineal acotado.*

Demostración. Sea A un operador lineal acotado en X y definamos

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad (2.4.2)$$

el lado derecho de (2.4.2) converge en norma y define un operador lineal acotado para todo $t \in \mathbb{R}$ $T(t)$. Es que claro que las propiedades (i) y (ii) de 2.4.1 se satisfacen. Realizando cálculos directos con la serie obtenemos

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\|e^{t\|A\|}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^{n+1}}{n!} \right\| \\
&= \|A(T(t) - I)\| \\
&\leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|} \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en X y A es el respectivo operador infinitesimal.

Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en X . Fijamos $\rho > 0$ tal que sea el coeficiente más pequeño que cumpla $\|I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds\| < 1$. Por el Teorema 2.4.1 tenemos que $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds$ es invertible y por lo tanto también lo es $\int_0^\rho T(s) ds$. Así,

$$\begin{aligned}
h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s) ds &= h^{-1} \left(\int_0^\rho T(s+h) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\
&= h^{-1} \left(\int_0^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$h^{-1}(T(h) - I) = h^{-1} \left(\int_0^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$$

Sí $h \rightarrow 0$, tendríamos por Lema 2.4.1 que $h^{-1}(T(h) - I) \rightarrow (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$, el cual es acotado. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \right\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds \right)^n \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds \right\|^n
\end{aligned}$$

donde como $\|I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds\| < 1$, implica que $\left\| \left(\rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \right\| <$

∞ y por tanto, $\left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$ es un operador acotado. $\square$

En lo que sigue de la sección, supondremos X espacio de Banach.

Definición 2.4.4. *Semigrupo fuertemente continuo* Un semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en X , se dice que es fuertemente continuo o C_0 - semigrupo si para todo $x \in X$ se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x. \quad (2.4.3)$$

A este semigrupo lo llamamos un semigrupo de clase C_0 o simplemente C_0 - semigrupo

Ejemplo 2.4.2. Veamos que el operador definido en el ejemplo 2.4.1 es un C_0 - semigrupo. Por la continuidad uniforme de f se tiene que

$$\|T(t)f - f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow 0^+.$$

Por lo tanto el operador $T(t)$ es un C_0 - semigrupo.

Teorema 2.4.3. Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 - semigrupo. Existe una constante $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, 0 \leq t \leq \infty. \quad (2.4.4)$$

Demostración. Primero demostramos que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ es acotado para $0 \leq t \leq \eta$. Si esto es falso, entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ que satisface $t_n \geq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} t_n = \infty$ y $\|T(t_n)\| \geq n$. Por el principio de acotación uniforme (ver [10] pág. 249) se sigue que para todo $x \in X$, $\|T(t_n)x\|$ es no acotado, lo cual contradice (2.4.3). Así, $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$. Dado que $\|T(0)\| = 1, M \geq 1$. Sea $\omega = \eta^{-1} \log(M) \geq 0$. Ahora si, $t > \eta$ entonces para $t \geq 0$ tenemos que $t = n\eta + \delta$, donde $0 \leq \delta \leq \eta$ y por lo tanto empleando la propiedad de semigrupo se tiene que

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = Me^{\omega t}$$

□

Corolario 2.4.1. Si $\{T(t)\}$ es un C_0 -semigrupo entonces para todo $x \in X, t \rightarrow T(t)x$ es una función continua de R_0^+ en X .

Demostración. Sea $t, h \geq 0$, la continuidad de $t \rightarrow T(t)x$ se sigue de

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|$$

Luego, por la definición 2.4.4 obtenemos $\|T(t+h)x - T(t)x\| < \varepsilon Me^{\omega t}$. Luego, para $t \geq h \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &= Me^{\omega t} \|x - T(h)x\|.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.4. *Sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigrupo con generador infinitesimal A . Entonces para $x \in \mathbb{D}(A)$, $T(t)x \in D(A)$ y*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4.5)$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{D}(A)$ y $h > 0$. Entonces

$$\frac{T(h) - I}{h}T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x \rightarrow T(t)Ax \text{ si } h \rightarrow 0. \quad (2.4.6)$$

Así, $T(t)x \in \mathbb{D}(A)$ y $AT(t)x = T(t)Ax$, por lo tanto (2.4.6) implica que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

donde $\frac{d^+}{dt}$ denota la derivada por la derecha. Para completar la demostración de (2.4.5) tenemos que mostrar que para $t > 0$, la derivada izquierda de $T(t)x$ existe y equivale a $T(t)Ax$. En efecto, pues

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} (T(t-h)Ax - T(t)Ax),\end{aligned}$$

ambos términos del lado derecho tienden a cero, el primero dado que $x \in \mathbb{D}(A)$ y $\|T(t-h)\|$ es acotado en $0 \leq h \leq t$ y el segundo por la continuidad fuerte de $T(t)$. □

Definición 2.4.5. Operador cerrado Sea X un espacio de Banach. Un operador lineal $A : \mathbb{D}(A) \subset X \rightarrow X$, es cerrado si para cada sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{D}(A)$ que converge $x \in X$ tal que $Ax_n \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que $x \in \mathbb{D}(A)$ y $Ax = y$.

Definición 2.4.6. *Espacio denso* Sea X un espacio de Banach. Decimos que Y es denso en X si $Y \subset X$ y $\overline{Y} = X$.

Ahora, presentamos un resultado de gran importancia, puesto que, nos garantiza la unicidad del C_0 –semigrupo.

Teorema 2.4.5. Sean $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dos C_0 –semigrupos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{D}(A) = \mathbb{D}(B)$. Por (2.4.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación $\Gamma : s \rightarrow T(t-s)S(s)x$ es constante y en particular los valores de Γ en $s = 0$ y $s = t$ son los mismos, es decir, $T(t)x = S(t)x$. Esto se tiene para todo $x \in \mathbb{D}(A)$, pero como además $\overline{\mathbb{D}(A)} = X$ (ver [16] pág. 5 corolario 2.5), podemos concluir que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$, $\square$

Corolario 2.4.2. Si A es el generador infinitesimal de un C_0 –semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en un espacio de Banach X , entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.4.7)$$

tiene una única solución $u : [0, \infty) \rightarrow X, x \in \mathbb{D}(A)$, con

$$u(t) = T(t)u_0$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de (2.4.5) y del Teorema 2.4.5. $\square$

2.4.1. Teorema de Lumer-Phillips

En esta sección, presentaremos algunas características de los generadores infinitesimales de los C_0 –semigrupos de contracción. Por lo cual, empezaremos definiendo esto último

Definición 2.4.7. Semigrupo de Contracción Un C_0 -semigrupo $T(t)$ es de contracción si las constantes M y ω del Teorema 2.4.3 son 1 y 0 respectivamente.

Ejemplo 2.4.3. Mostremos que $P_t := e^{\lambda t(P-I)}$ (donde $Pf := \int f(y)P(\cdot, dy) \in C_0(\mathbb{R}^d)$, para $C_0(\mathbb{R}^d)$ y $\|P\| = 1$) es un c_0 -semigrupo de contracción en $X = (C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Para probar lo deseado, debemos tener en cuenta que como todo operador conmuta con el operador identidad, tenemos que

$$P_t f = e^{\lambda t(P-I)} f = e^{\lambda t P} e^{-\lambda t I} f = e^{-\lambda t I} e^{\lambda t P} f. \quad (2.4.8)$$

Luego, para probar que P_t es de contracción note que

$$\|e^{\lambda t P}\|_\infty \leq \sum_{n \geq 0} \frac{|\lambda t|^n}{n!} \|P\|^n \|f\|_\infty = e^{\lambda t \|P\|} \|f\|_\infty,$$

como $\|P\| = 1$, obtenemos $\|e^{\lambda t P}\|_\infty \leq e^{\lambda t} \|f\|_\infty$. Así, por (2.4.8)

$$\|P_t f\|_\infty = e^{-\lambda t} \|e^{\lambda t P}\|_\infty \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Ahora, presentamos unas nociones preliminares que nos permitirán enunciar el resultado principal de esta sección.

Sea X un espacio de Banach y X^* su espacio dual. Para todo $x \in X$ se define el conjunto dualidad por $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^*, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (2.4.9)$$

Como consecuencia inmediata del Teorema de Hahn-Banach tenemos que $F(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.

Definición 2.4.8. Operador disipativo Un operador lineal A es disipativo si para todo $x \in \mathbb{D}(A)$ existe un $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Ejemplo 2.4.4. Sea $A : \mathbb{D}(A) \subset L^2[0, 1) \rightarrow L^2[0, 1)$ un operador lineal definidor por $Af = -f_x, \forall f \in \mathbb{D}(A)$ y con dominio

$$\mathbb{D}(A) := \{f \in H^1[0, 1) : f(0) = 0\}.$$

Veamos que A es disipativo, para esto, realizamos el siguiente calculo

$$\langle Af, f \rangle_{L^2[0,1)} = - \int_0^1 f f_x dx = - \frac{f(1)^2}{2} \leq 0$$

por lo cual A es disipativo.

Otra forma de ver cuando un operador lineal es disipativo, es la siguiente

Teorema 2.4.6. *Un operador lineal A es disipativo si y sólo si*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \text{ para todo } x \in \mathbb{D}(A) \text{ y } \lambda > 0.$$

Para una prueba de este resultado ver (ver [16] pág. 14 Teorema 4.2).

Teorema 2.4.7. Lumer-Phillips *Sea A un operador lineal con dominio denso $\mathbb{D}(A)$ en X*

- (a) *Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$ tal que la imagen $(\text{Im}(\lambda_0 I - A))$ de $\lambda_0 I - A$ es X , entonces A es un operador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción en X .*
- (b) *Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción en X entonces $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo. Por otra parte para todo $x \in \mathbb{D}(A)$ y todo $x^* \in F(x)$, tenemos que $\text{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$*

Demostración. (a) Sea $\lambda > 0$, dado que $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ y que A es disipativo, por el teorema 2.4.6 se tiene que el operador $(\lambda_0 I - A)(\lambda = \lambda_0)$ es invertible y que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado y por lo tanto cerrado. Por tanto $\lambda_0 I - A$ es cerrado, y así A también sería cerrado. Si $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ entonces el resolvente $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ y por Teorema 2.4.6 $\|\text{Im}(\lambda : A)\| \leq \lambda^{-1}$ y por el Teorema de Hille-Yosida (ver [16] sección 1.3) se sigue que A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción en X .

Para completar la demostración de (a), queda por mostrar que $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. Para esto, consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{\lambda > 0 : \text{Im}(\lambda I - A) = X\},$$

note que $\Lambda \neq \emptyset$ pues $\lambda_0 \in \Lambda$. Sea $\lambda \in \Lambda$, como $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ y $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{D}(A)$, se tiene que $\lambda \in \rho(A)$, el cual es abierto. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \rho(A)$. Ahora si $\alpha \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \rho(A)$, el operador $\alpha I - A$ es invertible y como consecuencia la ecuación $(\alpha I - A)x = y$ tiene solución para cada $y \in X$, es decir, $\text{Im}(\alpha I - A) = X$. Por lo tanto $\alpha \in \Lambda$, lo cual implica que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \Lambda$ y Λ es abierto en $(0, \infty)$. Ahora consideremos

una sucesión $(\lambda_n) \subseteq \Lambda$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Para cada $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{D}(A)$ tal que $\lambda_n x_n - Ax_n = y$. Por lo tanto

$$\|x_n\| \leq \lambda^{-1} \|y\| \leq C,$$

para algún $C > 0$. Además

$$\begin{aligned} \lambda_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\ &= \|-(\lambda_m x_m - Ax_m) + (\lambda_n x_n - Ax_n) + (\lambda_m - \lambda_n)x_n\| \end{aligned}$$

tomando límites

$$\begin{aligned} &= \|-y + y + (\lambda_m - \lambda_n)x_n\| \\ &= \|x_n\| |\lambda_m - \lambda_n| \\ &\leq C |\lambda_m - \lambda_n|. \end{aligned}$$

Como (λ_n) es una sucesión de Cauchy, también lo será (x_n) y por lo tanto converge a algún $x \in X$. De donde se tiene que $Ax_n \rightarrow \lambda x - y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como A es cerrado, $x \in \mathbb{D}(A)$ y $(\lambda I - A)x = y$, tenemos que $\lambda \in \Lambda$. Luego Λ es cerrado en $(0, \infty)$ y como este último es conexo tenemos entonces que $\Lambda = (0, \infty)$

- (b) Si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción $T(t)$ en X , entonces por el teorema de Hille-Yosida se tiene que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y por lo tanto $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. Además, si $x \in \mathbb{D}(A)$, $x^* \in F(x)$, tenemos entonces

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|T(t)x\| \|x^*\| \leq \|x\|^2$$

luego,

$$\text{Re}\langle T(t)x - x, x^* \rangle = \text{Re}\langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0.$$

Dividiendo la anterior expresión por $t > 0$ y tomando $t \rightarrow 0$ se tiene que $\text{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$ para todo $x^* \in F(x)$.

□

Corolario 2.4.3. *Sea A un operador lineal cerrado con dominio denso en X . Si tanto A como A^* son disipativos, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción en X*

Demostración. Por el literal (a) del teorema 2.4.7 es suficiente probar que $Im(I - A) = X$. Como A es disipativo y cerrado $Im(I - A)$ es un subespacio cerrado de X . Si $Im(I - A) \neq X$ por el teorema de Hahn-Banach (ver [10] sección 4.3) existe un funcional lineal $x^* \neq 0$ que anula a $Im(I - A)$. Es decir, $\langle x^*, (I - A)x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{D}(A)$ (cabe aclarar que en este caso $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el par entre X^* y X , por lo cual $\langle x^*, x \rangle$ significa $x^*(x)$, el resultado de evaluar el funcional x^* en x). Además

$$|\langle x^*, Ax \rangle| = |\langle x^*, x \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X$$

lo cual implica que $x^* \in \mathbb{D}(A)$. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{D}(A)$ tenemos que $0 = \langle x^*, x - Ax \rangle = \langle x^* - A^*x^*, x \rangle$ y como $\mathbb{D}(A)$ es denso $x^* - A^*x^*$ es un funcional lineal continuo que se anula en un subconjunto denso, por lo cual este debe ser idénticamente cero, eso es, $x^* - A^*x^* = 0$. Dado que A^* es también disipativo entonces por el teorema 2.4.6 se sigue $x^* = 0$, lo cual contradice la escogencia de x^* . $\square$

2.5. Operadores lineales compactos

En esta sección discutiremos un poco acerca de la teoría de operadores lineales compactos y de los resultados que fueron implementados en el desarrollo de este trabajo. Para esto, empezaremos con la siguiente definición, la cual nos ayudará a exhibir la definición de operadores lineales acotados.

Observación. Por ahorro de escritura escribiremos (x_n) para las sucesiones en vez de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 2.5.1. Relativamente compacto Sea X un espacio normado, decimos que $A \subseteq X$ es relativamente compacto en X , si $\overline{A}$ es compacto en X .

Definición 2.5.2. Operador lineal compacto Sean X y Y espacios normados. Un operador $A : X \rightarrow Y$ es llamado un operador lineal compacto (o un operador lineal completamente continuo) si A es lineal y si para cada subconjunto acotado M de X , la imagen $A(M)$ es relativamente compacta.

Estos operadores, también suelen ser llamados completamente continuos, pues cada operador lineal compacto es acotado y por ende continuo. Expresamos esto en el siguiente lema.

Lema 2.5.1. Sean X, Y espacios normados. Entonces cada operador lineal compacto $A : X \rightarrow Y$ es acotado, y por lo tanto continuo.

Demostración. La esfera unitaria $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es acotada. Como A es compacto, $\overline{A(U)}$ es compacto, por lo cual acotado, así

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

Por lo tanto A es acotado y el teorema 2.1.1 muestra que es continuo. $\square$

Ahora, presentamos el siguiente resultado el cual es una consecuencia inmediata de los operadores continuos o acotados

Lema 2.5.2. Sea S un operador acotado y T un operador compacto, definidos en espacios normados de tal manera que su composición se encuentra bien definida, entonces ST y TS son compactos.

El anterior lema es consecuencia inmediata de las definiciones de operadores compactos y continuos. En efecto si S es acotado, entonces S envía conjuntos acotados en conjuntos acotados, y como T es compacto envía conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos, por lo cual, TS envía conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Así, TS es compacto, de manera análoga se tiene el resultado para ST .

Ahora presentamos dos caracterizaciones de los operadores compactos una de ellas es por la definición de compacidad de un conjunto, pues de ahí, podemos deducir un criterio de compacidad para los operadores y la otra es una relación con su operador adjunto.

Teorema 2.5.1. Criterio de compacidad Sean X, Y espacios normados. Y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces A es compacto si y sólo para cada sucesión acotada (x_n) en X existe una subsucesión (Ax_{n_k}) de (Ax_n) que converge en Y .

Demostración. Por un lado si A es compacto y (x_n) es acotado, entonces la cerradura de (Ax_n) en Y es compacta y por definición de compacidad de un conjunto tendríamos que (Ax_n) contiene una subsucesión convergente. Por otro lado, supongamos que cada sucesión acotada (x_n) contiene una subsucesión (x_{n_k}) tal que (Ax_{n_k}) converja en Y . Consideremos cualquier subconjunto acotado $B \subset X$, y sea (y_n) cualquier sucesión en $A(B)$. Entonces

$y_n = Ax_n$ para algún $x_n \in B$, y (x_n) es acotado pues B es acotado. Por hipótesis, (Ax_n) contiene una subsucesión convergente. Por lo tanto $\overline{A(B)}$ es compacto por la definición de compacidad de un conjunto, esto pues, (y_n) en $A(B)$ fue arbitrario. Y por definición 2.5.2 tendríamos que A es compacto. $\square$

Antes de enunciar la siguiente caracterización de una propiedad de los operadores lineales compactos, presentamos un resultado que nos muestra como operadores compactos transforman sucesiones que convergen débilmente en sucesiones que convergen fuertemente.

Teorema 2.5.2. *Sean X y Y espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto. Suponga que (x_n) en X converge débilmente. Digamos $x_n \rightharpoonup x$. Entonces (Ax_n) converge fuertemente en Y y su límite es $y = Ax$.*

Demostración. Sea $y_n = Ax_n$ y $y = Ax$. Primero mostraremos que

$$y_n \rightharpoonup y. \quad (2.5.1)$$

Para luego mostrar que

$$y_n \rightarrow y. \quad (2.5.2)$$

Sea g un funcional lineal acotado en Y . Definimos un funcional f en X de la siguiente forma

$$f(z) = g(Az), \quad z \in X.$$

f es lineal, f es acotado pues A es compacto, por lo tanto acotado, y

$$|f(z)| = |g(Az)| \leq \|g\| \|Az\| \leq \|g\| \|A\| \|z\|.$$

Por definición, $x_n \rightharpoonup x$ implica $f(x_n) \rightarrow f(x)$, por lo tanto por la definición, $g(Ax_n) \rightarrow g(Ax)$, eso es, $g(y_n) \rightarrow g(y)$. Como g es arbitrario esto prueba (2.5.1).

Ahora probamos (2.5.2). Procediendo por contradicción, supongamos que (2.5.2) es falso. Entonces (y_n) tiene una subsucesión (y_{n_k}) tal que

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \eta, \quad \eta > 0.$$

Como (x_n) converge débilmente, (x_n) es acotado ([10] pág 258 lema 4.8-3(c)), por lo cual (x_{n_k}) es acotado también. Ahora, por la compacidad de A

y el teorema 2.5.1 tenemos que (Ax_{n_k}) tiene una subsucesión convergente, sea (w_j) tal subsucesión. Sea $w_j \rightarrow w$, entonces $w_j \rightharpoonup w$. Por lo tanto $w = y$ por (2.5.1) y por el hecho de que cada subsucesión converge (ver [10] pág 258 lema 4.8-3(b)). En consecuencia

$$\|w - y\| \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad \|w - y\| \geq \eta > 0.$$

Encontrando así una contradicción, probando así (2.5.2). $\square$

Teorema 2.5.3. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert. Un operador $A : H_1 \rightarrow H_2$ es compacto si y sólo si $A^* : H_2' \rightarrow H_1'$ es compacto. (H' denota el dual de H .)*

Demostración. Supongamos que A es un operador compacto y sea (x_n) una sucesión acotada en H_1 . Como es acotada, podemos construir una subsucesión (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Ahora, debemos mostrar que $A^*x_{n_k} \rightarrow A^*x$ (ver teorema 2.5.2). Entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que toda sucesión que converge débilmente está acotada, vemos que

$$\begin{aligned} \|A^*(x_{n_k} - x)\|^2 &= \langle A^*(x_{n_k} - x), A^*(x_{n_k} - x) \rangle = \langle x_{n_k} - x, AA^*(x_{n_k} - x) \rangle \\ &\leq \|x_{n_k} - x\| \|AA^*(x_{n_k} - x)\| \leq C \|AA^*(x_{n_k} - x)\|. \end{aligned}$$

Por lo cual vemos que es suficiente probar $AA^*(x_{n_k} - x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pero tenemos que $AA^*(x_{n_k} - x) \rightharpoonup 0$ pues AA^* es continuo. Y por la compacidad de A y la unicidad del límite tenemos que $AA^*(x_{n_k} - x) \rightarrow 0$. Lo cual, concluye la prueba. De manera análoga si suponemos A^* compacto procedemos de igual manera para obtener la compacidad de A . $\square$

Ahora, presentamos el Teorema de Rellich-Kondrachov el cual nos ayuda a conocer el comportamiento de las distribuciones L^2 si conocemos algo de ellas en H^1 .

Teorema 2.5.4. Teorema de Rellich-Kondrachov *Sea U un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea ∂U de clase C^1 . Entonces la inmersión*

$$H^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$$

es compacta.

Demostración. Se envía al lector a [7] Sección 5.7, página 286, Teorema 1. $\square$

2.6. Multiplicadores de Fourier

El objetivo de esta sección es introducir los multiplicadores de Fourier y algunas de sus características, estos, son operadores un poco más generales que los operadores diferenciales, por lo cual son fundamentales en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. Para empezar, con el propósito de motivar los conceptos, resultados y definiciones presentados en esta sección, empezaremos con una observación un poco informal pero que nos dará una idea de que objeto matemático estamos trabajando.

Supongamos que T un operador lineal invariante en algún espacio de funciones sobre $\mathbb{R}^n$ tal que

$$T(e^{2\pi i x \cdot \zeta}) = a(\zeta)e^{2\pi i x \cdot \zeta}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6.1)$$

De forma más explícita, si T actúa sobre funciones de la variable y , podemos escribir $f(x, \zeta) = T(e^{2\pi i y \cdot \zeta})(x)$ donde $e_\zeta(x) = e^{2\pi i x \cdot \zeta}$. Sea $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ el operador traslación por $h \in \mathbb{R}^n$. Decimos que T es una traslación invariante si $T\tau_h = \tau_h T$ para todo h . Así, de acuerdo a lo que hemos supuesto, tenemos

$$f(x+h, \zeta) = T(e^{2\pi i(y+h) \cdot \zeta})(x) = e^{2\pi i h \cdot \zeta} T(e^{2\pi i y \cdot \zeta})(x) = e^{2\pi i h \cdot \zeta} f(x, \zeta).$$

Ahora, sea $x = 0$, obtenemos $f(h, \zeta) = e^{2\pi i h \cdot \zeta} f(0, \zeta)$ obteniendo fórmula (2.6.1) con $a(\zeta) = f(0, \zeta)$. De hecho, $a(\zeta)$ puede ser encontrado de (2.6.1), pues

$$a(\zeta) = e^{-2\pi i x \cdot \zeta} T(e^{2\pi i y \cdot \zeta})(x).$$

Si ahora aplicamos T a la fórmula inversa de Fourier

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \zeta} \widehat{f}(\zeta) d\zeta$$

y usamos la linealidad de T , obtenemos

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} T(e^{2\pi i x \cdot \zeta}) \widehat{f}(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y \cdot \zeta} a(\zeta) \widehat{f}(\zeta) d\zeta.$$

Esta última expresión nos permite reducir algunas propiedades del operador T a propiedades de multiplicación por la correspondiente función $a(\zeta)$, llamada el símbolo de T . Por ejemplo, la continuidad de T en L^2 se reduce a saber si el símbolo está acotado, la composición de dos operadores se reduce

a la multiplicación de sus símbolos, entre otras.

Ahora, con el objetivo de introducir los multiplicadores de Fourier, iniciaremos recordando el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ para luego enunciar el teorema de Plancherel, el cual es el ingrediente principal para definir multiplicadores de Fourier.

Definición 2.6.1. *Espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$* El espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ es definido como el espacio de sucesiones $x = (x_n)$ que satisfacen

$$\sum_n |x_n|^2 < \infty$$

por lo cual tenemos que la operación de valor real $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ definida por

$$\|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_n |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

define una norma sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.6.1. *Teorema de Plancherel* El operador lineal $\mathcal{F}_{\mathbb{T}} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definido por

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}} f)(k) = \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

es una biyección tal que

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{T}} f, \mathcal{F}_{\mathbb{T}} g \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \quad (2.6.2)$$

para todo f y g en $L^2\mathbb{T}$.

Demostración. La linealidad y la injectividad se derivan directamente de (2.6.2). Para probar que el operador es sobreyectivo, sea $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces para $N = 0, 1, 2, \dots$, definimos la función s_N sobre $[0, 1)$ por

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{i2\pi x \cdot k} = \sum_{k=-N}^N a_k e_k(x).$$

Entonces para enteros positivos M y N con $N > M$,

$$\begin{aligned}\|s_N - s_M\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \left\| \sum_{M < |k| \leq N} a_k e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &= \left\langle \sum_{M < |k| \leq N} a_k e_k, \sum_{M < |k| \leq N} a_k e_k \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \sum_{M < |k| \leq N} |a_k|^2 \rightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $M \rightarrow \infty$. Por lo tanto (s_N) es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T})$. Como $L^2(\mathbb{T})$ es completo tenemos que

$$s_N \rightarrow f$$

para algún $f \in L^2(\mathbb{T})$ cuando $N \rightarrow \infty$. Ahora, para un $m \in \mathbb{Z}$ fijo

$$\widehat{s_N}(m) = \int_{\mathbb{T}} e^{-i2\pi x \cdot m} s_N(x) dx = \sum_{k=-N}^N a_k \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi(k-m)x} dx = a_m \quad (2.6.3)$$

para un N lo suficiente grande. Además, para todo $m \in \mathbb{Z}$, usando la desigualdad de Hölder 2.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned}\left| \widehat{s_N}(m) - \widehat{f}(m) \right| &\leq \int_{\mathbb{T}} |s_N(x) - f(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |s_N(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}} dx \right)^{1/2} \\ &= \|s_N - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $N \rightarrow \infty$, así, por (2.6.3) y la última expresión de arriba, $\widehat{f}(m) = a_m$ y por lo tanto

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}} f = a.$$

□

De la prueba del anterior teorema podemos ver que para $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}^{-1}a$ es la función en $L^2(\mathbb{T})$ definida por

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}}^{-1}a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i2\pi k \cdot x}.$$

Observación. Dado que $C^\infty(\mathbb{T})$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$ y $S(\mathbb{Z})$ es denso en $\ell^2(\mathbb{Z})$ el operador lineal definido en el Teorema 2.6.1 concuerda con la definición de la transformada de Fourier periódica.

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior podemos definir los multiplicadores de Fourier

Definición 2.6.2. Multiplicadores de Fourier. Sea $\sigma \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Entonces para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$ definimos la función $T_\sigma f$ por

$$(T_\sigma f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi k \cdot x} \sigma(k) \widehat{f}(k). \quad (2.6.4)$$

Así, llamamos a T_σ como multiplicador de Fourier y σ como su símbolo.

La escogencia de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ para los símbolos es razonable en vista del siguiente resultado

Teorema 2.6.2. Sea σ una función medible en $\mathbb{Z}$. Entonces T_σ es un operador lineal acotado de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$ si y sólo si $\sigma \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Además, si $\sigma \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, entonces

$$\|T_\sigma\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\sigma\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Demostración. Ver [22] página 144 Teorema 21.4. □

El siguiente teorema presenta una caracterización de los multiplicadores de Fourier compactos.

Teorema 2.6.3. Sea $\sigma \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Entonces el multiplicador de Fourier $T_\sigma : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ es compacto si y sólo si

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \sigma(k) = 0.$$

Demostración. Primero probaremos que la condición es necesaria. Entonces, para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$, usando el lema de Riemman-Lebesgue ([22] Corolario 20.3),

$$\langle e_k, f \rangle = \overline{\int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i k \cdot x} f(x) dx} \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto $e_k \rightarrow 0$ débilmente en $L^2(\mathbb{T})$ cuando $|k| \rightarrow \infty$. Luego por la compacidad de $T_\sigma : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ y el Teorema 2.5.1 tenemos

que $\|T_\sigma e_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$. Así, por la representación espectral del operador ([22] Teorema 21.5) tenemos que

$$T_\sigma e_k = \sigma(k)e_k.$$

Por lo tanto $|\sigma(k)| \rightarrow 0$ cuando $|k| \rightarrow \infty$. Ahora, probaremos que la condición es suficiente, para esto, definimos para todos los enteros positivos N , la función σ_N en $\mathbb{Z}$ por

$$\sigma_N(k) = \begin{cases} \sigma(k) & |k| \leq N, \\ 0 & |k| > N. \end{cases}$$

Entonces, para $N = 1, 2, \dots$, obtenemos para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$T_{\sigma_N} f = \sum_{|k| \leq N} \sigma(k) \langle f, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} e_k,$$

el cual es un operador de rango finito y por lo cual compacto. Ahora, para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\|T_{\sigma_N} f - T_\sigma f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{|k| > N} |\sigma(k)|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un entero positivo N_0 tal que

$$|k| \geq N_0 \Rightarrow |\sigma(k)| < \varepsilon.$$

Por lo cual,

$$|k| \geq N_0 \Rightarrow \|T_{\sigma_N} f - T_\sigma f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

Por lo tanto,

$$|k| \geq N_0 \Rightarrow \|T_{\sigma_N} - T_\sigma\| \leq \varepsilon.$$

En otras palabras, T_σ es el límite en norma de la sucesión (T_{σ_N}) de operadores compactos y por lo tanto este debe ser compacto también. $\square$

Definición 2.6.3. Conmutador Sean A, B operadores definidos en espacios de funciones de tal forma que su composición por derecha y por izquierda este bien definida, entonces definimos el conmutador de A y B por

$$[A, B] = AB - BA.$$

El concepto de conmutador es una herramienta muy usada en física, esto pues, los estados de alguna cantidad o las partículas en mecánica cuántica son representadas por operadores en espacios de Hilbert, si el conmutador entre estos operadores es cero, significa que ambas cantidades pueden ser medidas simultáneamente. Si su conmutador es distinto de cero significa que ambas cantidades no pueden ser medidas simultáneamente y que existe un error, incertidumbre o diferencia entre ellos. Por lo cual el conmutador nos brinda información de cuanto se limita el conocimiento de una cantidad respecto a la otra. Veamos el siguiente ejemplo que clarifica un poco lo mencionado

Ejemplo 2.6.1. *Se desea calcular el conmutador entre la posición $\hat{x} = x$ y el momento lineal $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ de una partícula sobre el eje x , entonces para una función de prueba ψ se tiene*

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}_x]\psi &= \hat{x}\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x\hat{x}\psi \\ &= \frac{\hbar}{i}x \frac{d\psi}{dx} - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(x\psi) \\ &= -\frac{\hbar}{i} \neq 0. \end{aligned}$$

Lo cual significa que no podemos saber de manera simultánea la posición y el momento lineal en la dirección x de una partícula, donde el valor $-\frac{\hbar}{i}$ nos da un valor aproximado de la incertidumbre que se puede dar del cálculo de la posición respecto al momento lineal.

Así, en este trabajo se intenta de manejar esta misma idea, donde el conmutador será calculado con dos operadores en espacios de Hilbert y se tratará de conocer la incertidumbre de un operador con respecto al otro.

2.7. Control y observabilidad

El objetivo de esta sección es presentar las ideas básicas, conceptos e ingredientes necesarios que nos permitan introducir y presentar el problema de controlabilidad a estudiar. Para empezar, presentaremos de manera informal el problema de control.

Supongamos que deseamos un buen comportamiento de un sistema físico gobernado por la ecuación de estado

$$A(y) = f(v). \tag{2.7.1}$$

Donde, y es el estado, la variable del sistema que deseamos controlar. Supongamos que la anterior ecuación de estado representa la temperatura de un cuarto donde hay un aire acondicionado. La idea de control, es que para una función v , llamada control. Se pueda alcanzar una temperatura deseada en un tiempo fijo, teniendo en cuenta que la función f indicará la forma en que el control v actúe sobre el sistema.

Consideremos la siguiente ecuación de estado

$$\dot{z} = Az + Bu. \quad (2.7.2)$$

Donde $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ es un operador diferencial, $B : U \rightarrow H$ es un operador acotado que representa el efecto del control u , donde H y U espacios de Hilbert. Además, suponemos que A genera un C_0 -semigrupo en H y lo llamamos $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Para un dato inicial $z_0 \in H$, $u \in L^2(0, T; U)$ y un dato final $z(T) = z_T \in H$, sea la solución $z : [0, T] \rightarrow H$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Para cualquier $z_0 \in H$ y $u \in L^1(0, T; U)$, el problema de Cauchy (2.7.3) admite una solución integral $z \in C([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, T]; H)$ que esta caracterizada por la formula de Duhamel

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \forall t \in [0, T]. \quad (2.7.4)$$

El siguiente enunciado presenta algunas de las formas de controlabilidad.

Definición 2.7.1. (a) El sistema (2.7.3) se dice **exactamente controlable** en tiempo T si para cualquier $z_0, z_T \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que la solución z de (2.7.3) satisface $z(T) = z_T$.

(b) El sistema (2.7.3) se dice **nulo controlable** en tiempo T si para cualquier $z_0 \in H$, existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que la solución z de (2.7.3) satisface $z(T) = 0$.

- (c) El sistema (2.7.3) se dice **aproximadamente controlable** en tiempo T si para cualquier $z_0, z_T \in H$, y cualquier $\varepsilon > 0$ existe $u \in L^2(0, T; U)$ tal que la solución z de (2.7.3) satisface $\|z(T) - z_T\|_H < \varepsilon$.

De la solución (2.7.4) vemos que el control u dirige z_0 a z_T en un tiempo $[0, T]$ en el caso que

$$z_t - S(t)z_0 = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \forall t \in [0, T]. \quad (2.7.5)$$

Lo cual motiva a definir el operador $L_T : L^2(0, T; U) \rightarrow H$ como

$$L_T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds. \quad (2.7.6)$$

Con ayuda del anterior operador, podemos reescribir la definición 2.7.1, como

$$\begin{aligned} \text{controlabilidad exacta en tiempo } T &\iff \text{Im} L_t = H, \\ \text{controlabilidad nula en tiempo } T &\iff S(T)H \subset \text{Im} L_T, \\ \text{controlabilidad aproximada en tiempo } T &\iff \overline{\text{Im} L_t} = H. \end{aligned}$$

El semigrupo adjunto o dual denotado por $S^*(t), \forall t \geq 0$ es generado por el operador adjunto A^* . Si $A^* = A$ el operador A es auto-adjunto.

En muchas ocasiones las variables de estado pueden no ser medibles por diferentes razones, esto pasa en un lugar donde se encuentren ciertas cantidades a trabajar que no sean físicamente accesibles. Es por esto que se hace necesario calcular un estimativo de los valores de las variables de estado, por lo cual, presentamos el siguiente teorema que nos permite controlar las variables de estado, conociendo información de un estado inicial.

Teorema 2.7.1. *El sistema (2.7.3) es exactamente controlable en tiempo $T > 0$ si y sólo si, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\int_0^T \|B^*S^*(t)y_0\|_U^2 dt \geq c\|y_0\|_H^2, \quad \forall y_0 \in H. \quad (2.7.7)$$

(2.7.7) se conoce como la desigualdad de observabilidad. Esta desigualdad significa que la función $y_0 \mapsto B^*S^*(\cdot)y_0$ es invertible y acotada, por lo cual, es posible recuperar información del estado inicial y_0 desde una medida en $[0, T]$ de la salida de $B^*[S^*(t)y_0]$.

Para realizar la prueba del anterior teorema, necesitamos primero definir el problema adjunto y establecer el siguiente lema. Asociamos a el problema de Cauchy (2.7.3) con $z(0) = 0$ su problema adjunto, dado por

$$\begin{cases} \dot{y} = -A^*y, \\ y(T) = y_T. \end{cases} \quad (2.7.8)$$

Note que el control u no aparece en el problema adjunto y la solución de (2.7.8) realiza el mismo proceso que la solución del problema de Cauchy (2.7.3) pero retrocediendo en tiempo. Para cualquier $y_T \in H$, la solución del problema adjunto es $y(t) = S^*(T-t)y_T$.

Lema 2.7.1. *Teniendo en cuenta, las definiciones del problema de Cauchy (2.7.3) y el problema adjunto (2.7.8), tenemos que la siguiente igualdad se cumple para el control $u \in L^2(0, T; U)$*

$$\langle z(T), y_T \rangle_H = \int_0^T \langle u, B^*y \rangle_U dt. \quad (2.7.9)$$

Demostración. Supongamos que $u \in C^\infty([0, T], U)$ y $y_T \in \mathbb{D}(A^*)$, tal que tanto z como y están en $C^\infty([0, T], H)$. Por lo tanto, integrando por partes, y teniendo en cuenta que $z(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle \dot{z} - Az - Bu, y \rangle_H dt \\ &= - \int_0^T \langle z, \dot{y} + A^*y \rangle_H dt + [\langle z, y \rangle_H]_0^T - \int_0^T \langle u, B^*y \rangle_U dt \\ &= \langle z(T), y_T \rangle_H - \int_0^T \langle u, B^*y \rangle_U dt. \end{aligned}$$

El resultado se extiende para $u \in L^2(0, T; U)$ y $y_T \in H$ por argumentos de densidad. $\square$

Con ayuda del anterior lema, podemos demostrar el Teorema 2.7.1.

Demostración. Supongamos que el sistema (2.7.2) es exactamente controlable, eso es, la función $L_T : u \mapsto z(T)$ es sobreyectiva. Sea $\Lambda : H \rightarrow L^2(0, T; U)$ la inversa de la restricción de L_T a $(\ker L_T)^\perp$ tal que $u = \Lambda(z_T)$ controla de

0 a z_T para (2.7.3) con $z(0) = 0$. Escojamos cualquier $y_T \in H$ y tomemos $z_T = y_T, u = \Lambda(z_T)$. Entonces

$$\|y_T\|_H^2 = \langle z(T), y_T \rangle_H,$$

uego, por el Lema 2.7.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \|y_T\|_H^2 &= \int_0^T \langle \Lambda(z_T), B^*y \rangle_U dt \\ &\leq \|\Lambda\| \|z_T\|_H \left(\int_0^T \|B^*y\|_U^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\int_0^T \|B^*y\|_U^2 dt \geq c\|y_T\|_H^2$. Para cualquier $y_T \in H$, definimos $u(t) := B^*y(t)$, y consideremos la solución z de problema de Cauchy (2.7.3) con condición inicial nula que le corresponde a el control u . Esto define un operador acotado $\Gamma : y_T \in H \mapsto z(T) = L_T(B^*y(\cdot)) \in H$. Como,

$$\langle \Gamma y_T, y_T \rangle_H = \int_0^T \|B^*y(t)\|_U^2 dt \geq c\|y_T\|_H^2$$

tendríamos que por el Teorema de Lax-Milgram ([7] sección 6.2, pág. 315, Teorema 1) que Γ es invertible. Así, para cualquier $z_T \in H$, el estado $y_T = \Gamma^{-1}(z_T)$ es tal que el control $u(t) = B^*y(t)$ controla desde 0 hasta z_T . $\square$

Observaciones. 1) *La estrategia usada en la anterior demostración es conocida como el método de unicidad de Hilbert(HUM), este método nos proporciona un operador acotado Λ en donde el control es explícito.*

2) *Note que la ecuación de evolución en el problema adjunto (2.7.8), $\dot{y} = -A^*y$ difiere de un menos del operador adjunto $\dot{y} = A^*y$. Por lo cual, soluciones de la segunda ecuación dan soluciones de la segunda realizando el cambio de t a $T - t$.*

3) *En general los operadores B^* y B no se conocen explícitamente. Los aspectos importantes en HUM son la identidad (2.7.9) y la desigualdad de observabilidad.*

Para finalizar, definamos de forma general el problema de control interno. Sea $P(D)$ un operador diferencial, con $P \in \mathbb{C}[\tau, \zeta_1, \dots, \zeta_n]$ y $D = (-i\partial_t, -i\partial_x, \dots, -i\partial_{x_N})$. Por ejemplo, para el operador de onda $P(D) = \partial_t^2 - \Delta$ y usando transformada de Fourier, obtenemos $P = -\tau^2 + |\zeta|^2$.

Definición 2.7.2. Problema de control interno. Dado un conjunto $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera suave $\Gamma = \partial\Omega$ y un conjunto de condiciones de frontera, escrito como $B(D)z = 0$, consideramos el problema de control

$$\begin{aligned} P(D)z &= 1_\omega f, \quad t > 0, x \in \Omega, \\ B(D)z &= 0, \quad t > 0, x \in \Gamma, \\ z(0, x) &= z_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Donde $f = f(t, x)$ es el control interno, $z = z(t, x)$ es solución del sistema. Para el problema de control, dado z_0 y z_1 en algún espacio de funciones H , busquemos por un control $f \in L^2(0, T; U)$, tal que la solución z del sistema satisfaga $z(T, x) = z_1(x)$.

Observación. Escribiremos los espacios $H^s(\mathbb{T})$ y $L^p(\mathbb{T})$ como H^s y L^p . Además la transformada de Fourier será reescrita de la siguiente forma, tomando $w_k = 2\pi k$

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-iw_k x} f(x) dx \quad (2.7.10)$$

y por ende, su inversa toma la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{iw_k x} \widehat{f}(k). \quad (2.7.11)$$

3. Buena Colocación

Se desea demostrar la buena colocación del siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, & (x, t) \in \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_x^i u(1, t) = \partial_x^i u(0, t), \quad i = 0, 1, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Así, sea $A : \mathbb{D}(A) = H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ el operador lineal definido por

$$Au = i\partial_x^2 u, \quad \forall u \in H^2(\mathbb{T}).$$

Con el propósito de usar la teoría de semigrupos, en particular una aplicación del teorema de Lummer Phillips (2.4.3). Mostremos que A es cerrado y que $\mathbb{D}(A)$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$. Por un lado, para probar que dicho operador es cerrado, sea $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset H^2(\mathbb{T})$ tal que

$$u_n \rightarrow u, \quad Au_n \rightarrow y \quad \text{en } L^2(\mathbb{T})$$

como $u_n \rightarrow u$ en $L^2(\mathbb{T})$, entonces $\widehat{u_n} \rightarrow \widehat{u}$ en $l^2(\mathbb{Z})$. Asi mismo, como $Au_n \rightarrow y$ en $L^2(\mathbb{T})$, entonces $\widehat{Au_n} \rightarrow \widehat{y}$ en $l^2(\mathbb{Z})$, por lo cual

$$\widehat{Au_n} = -ik^2 \widehat{u_n(k)} \quad \text{es acotado en } l^2(\mathbb{Z}) \quad (3.0.2)$$

por lo cual, usando el Lema de Fatou, y teniendo en cuenta que $(1 + |k|^2)^2 \leq 2(1 + k^4)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^4 |u(k)|^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^4 |\widehat{u_n(k)}|^2 \\ &\leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_n(k)}|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^4 |\widehat{u_n(k)}|^2 \right). \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la última desigualdad es acotado pues $\widehat{u_n} \in l^2(\mathbb{Z})$ y el segundo término es acotado por (3.0.2), por lo cual tenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^4 |u(k)|^2 < \infty$$

y así $u \in H^2(\mathbb{T})$. De manera análoga, podemos ver en (3.0.2) que

$$\widehat{Au_n} \rightarrow \widehat{Au} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \text{ en } l^2(\mathbb{Z})$$

Por lo cual, $Au_n \rightarrow Au$ en $L^2(\mathbb{T})$. Probando así, que el operador A es cerrado. Para mostrar que $\mathbb{D}(A)$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$, como el dominio es compacto, tenemos que $C^\infty(\mathbb{T}) \subset H^2(\mathbb{T})$, pero como $C^\infty(\mathbb{T})$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$ entonces $H^2(\mathbb{T})$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$.

Para finalizar, veamos que tanto A como A^* son disipativos, entonces, primero calculamos el problema adjunto de (3.0.1) he identifiquemos A^* , por lo cual, multiplicando la ecuación de evolución por $\overline{v}$, donde v es una función suave, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (iu_t + u_{xx}) \overline{v} dx dt &= \int_0^T \int_0^1 (-i\overline{v}_t + \overline{v}_{xx}) u dx dt + \int_0^1 iu\overline{v} \Big|_0^T \\ &\quad + \int_0^T \left[u_x \overline{v} \Big|_0^1 - u \overline{v}_x \Big|_0^1 \right] dt, \end{aligned}$$

por lo cual, el problema adjunto a (3.0.1) es

$$\begin{cases} i\partial_t v + \partial_x^2 v = 0, & (x, t) \in \mathbb{T} \times [0, T] \\ \partial_x^i v(1, t) = \partial_x^i v(0, t), & i = 0, 1, \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \mathbb{T} \end{cases} \quad (3.0.3)$$

de donde tenemos que $A^* = A$, por lo cual, $\mathbb{D}(A) = \mathbb{D}(A^*)$. Entonces, como A es auto-adjunto, solo será necesario ver que A es disipativo, así, nos interesa conocer $\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$, por lo cual, realizamos el cálculo de $\langle Au, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$,

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= i \int_{\mathbb{T}} u_{xx} \bar{u} dx = i \left[u_x \bar{u} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x \bar{u}_x dx \right] \\ &= i u_x(1, t) \bar{u}(1, t) - i u_x(0, t) \bar{u}(0, t) - i \int_0^1 u_x \bar{u}_x dx \\ &= -i \int_0^1 u_x^2 dx \\ &= -i \|u_x\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ y en particular se satisface que $\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \leq 0$ con lo cual podemos concluir que A es disipativo. Y como $A^* = A$, A^* también es disipativo. Así, por el corolario 2.4.3 tenemos que A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción, denotemos a este semigrupo por $S(t)$. Así, de acuerdo a la sección 1.6, el problema de Cauchy (3.0.1) admite una solución $z \in X = C([0, T]; H^2) \cap C^1([0, T]; L^2)$, que la denotaremos

$$u(x, t) = S(t)u_0. \quad (3.0.4)$$

Por lo cual, si tomamos dos condiciones iniciales u_0, v_0 muy cercanas, es decir, $\|u_0 - v_0\|_{L^2} < \varepsilon$, tenemos que la dependencia continua de los datos es consecuencia de que $S(t)$ es de contracción, pues

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_X = \|S(t)(u_0 - v_0)\|_X \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Demostrando así la buena colocación del problema de cauchy (3.0.1).

Observación. Es importante ver que la solución (3.0.4) puede ser escrita de la siguiente forma

$$u(x, t) = e^{it\partial_x^2} u_0. \quad (3.0.5)$$

Esto pues el operador A es acotado. En efecto, si tomamos $u \in H^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|Au\|_{L^2}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{Au}(k) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |ii^2 \omega_k^2 \widehat{u}(k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_k^4 |\widehat{u}(k)|^2 \\ &= (2\pi)^4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^4 |\widehat{u}(k)|^2 \\ &\leq C \|u\|_{H^2}^2.\end{aligned}$$

4. Propagación de Compacidad

Una de las características fundamentales de las soluciones de la ecuación de Schrödinger en toro es la propagación de compacidad en el toro, esto es, si tenemos un conjunto abierto contenido en el toro con una sucesión convergente en dicho conjunto abierto, podemos ver que tal sucesión convergerá en todo el toro. En otras palabras, solo basta tener convergencia de la sucesión en un subconjunto abierto del toro para asegurar la convergencia de esta en todo el toro. Lo anterior, lo enunciamos de manera formal en el siguiente resultado

Teorema 4.0.1. *Sea u_n una sucesión de soluciones suaves de*

$$i\partial_t u_n + \partial_x^2 u_n = f_n$$

con

$$\|u_n\|_{L^2([0,T], L^2(\mathbb{T}))} \leq C, \quad \|u_n\|_{L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{T}))} \rightarrow 0 \text{ y } \|f_n\|_{L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{T}))} \rightarrow 0.$$

Además, supongamos que existe un conjunto distinto de vacío $\omega \subset \mathbb{T}$ tal que $u_n \rightarrow 0$ en $L^2([0, T], L^2(\omega))$ entonces $u_n \rightarrow 0$ en $L_{loc}^2 L^2([0, T], L^2(\mathbb{T}))$.

Demostración. Definamos las funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ y $\psi \in C_0^\infty([0, T])$, además definamos el multiplicador de Fourier $D^{-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, dado por

$$\begin{aligned}\widehat{D^{-1}u}(k) &= \frac{1}{w_k} \widehat{u}(k), \quad \text{si } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &= \widehat{u}(0), \quad \text{si } k = 0.\end{aligned}$$

donde $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier de u y $w_k = 2\pi k$. Por lo cual, para una función v definida en el toro, tenemos lo siguiente

$$D^{-1}v(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{D^{-1}v}(k)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{w_k}\widehat{v}(k)\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{w_k}\widehat{v}(k)e^{iw_k x}. \quad (4.0.1)$$

Ahora bien, definimos lo siguiente, $Bu = \varphi(x)D^{-1}$ y $A = \psi(t)B$. Tenemos así, que el operador adjunto de A es $A^* = \psi(t)D^{-1}\varphi(x)$.

Ahora analicemos la siguiente diferencia,

$$\alpha_n = \langle Lu_n, A^*u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - \langle Au_n, Lu_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \quad (4.0.2)$$

donde $L = i\partial_t + \partial_x^2$ denota el operador de Schrödinger, realizando cálculos análogos al adjunto del operador A en el anterior capítulo, podemos ver que $L^* = L$. Trabajando un poco la anterior expresión, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \langle Lu_n, A^*u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - \langle Au_n, Lu_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \\ &= \langle ALu_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - \langle L^*Au_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \\ &= \langle i\psi(t)\varphi(x)D^{-1}\partial_t u_n + \psi(t)\varphi(x)D^{-1}\partial_x^2 u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \\ &\quad - \langle i\psi'(t)\varphi(x)D^{-1}u_n + \partial_x^2 \psi(t)\varphi(x)D^{-1}u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \\ &= \langle A\partial_x^2 u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - \langle i\psi'(t)Bu_n + \partial_x^2 Au_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \\ &= \langle A\partial_x^2 u_n - \partial_x^2 Au_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - \langle i\psi'(t)Bu_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \\ &= \langle [A, \partial_x^2]u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - i\langle \psi'(t)Bu_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})}. \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

Cabe aclarar que u_n es una sucesión que fija un tiempo para luego dar valores espaciales, por esta misma razón, en los anteriores cálculos el término $i\psi(t)\varphi(x)D^{-1}\partial_t u_n$ es cero. Por otra parte, tomando $f_n = Lu_n$ vemos que la ecuación (4.0.2) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\alpha_n = \langle f_n, A^*u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} - \langle Au_n, f_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})}. \quad (4.0.4)$$

Lo anterior, pues el principal objetivo es trabajar solo con el conmutador, pues ahí está la información principal, para esto escribimos α_n de dos formas distintas para lograr desaparecer todos los otros términos y concentrarnos en

el conmutador

$$\begin{aligned}
\left| \langle f_n, A^* u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \right| &= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{T}} f_n \overline{A^* u_n} dx dt \right| \\
&\leq \int_0^T \left| \langle f_n, A^* u_n \rangle_{H^{-1}, H^1} \right| dt \\
&\leq \int_0^T \|f_n\|_{H^{-1}} \|A^* u_n\|_{H^1} dt. \\
&= \|f_n\|_{L^2([0,T], H^{-1})} \|A^* u_n\|_{L^2([0,T], H^1)}.
\end{aligned} \tag{4.0.5}$$

Tenemos por hipótesis que $\|f_n\|_{L^2([0,T], H^{-1})} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, así que para concluir que $\left| \langle f_n, A^* u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \right| \rightarrow 0$, debemos ver que $\|A^* u_n\|_{L^2([0,T], H^1)}$ está acotado.

De acuerdo al Teorema 2.3.2, tenemos que

$$\|A^* u_n\|_{H^1} \leq \|A^* u_n\|_{L^2} + \|\partial_x A^* u_n\|_{L^2}.$$

Por un lado $\|A^* u_n\|_{L^2}$ es acotada, pues el operador D^{-1} tiene con símbolo $\sigma(k) = \frac{1}{w_k}$ y claramente $\sigma(k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, por el Teorema 2.6.3, D^{-1} es compacto y por ende acotado. Así,

$$\|A^* u_n\|_{L^2} \leq \|A^*\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2}.$$

Por otro lado, tenemos que $\partial_x A^* u_n = \psi(t) \partial_x D^{-1} \varphi(x) u_n(x)$. Por lo cual, retomando el cálculo realizado en (4.0.1), donde en este caso particular podemos pensar $v(x) = \varphi(x) u_n(x)$ y derivamos, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_x A^* u_n &= \psi(t) \left(i \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{\varphi u_n}(k) e^{i w_k x} \right) \\
&= \psi(t) \left(i \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{\varphi u_n}(k) e^{i w_k x} + i \widehat{\varphi u_n}(0) - i \widehat{\varphi u_n}(0) \right) \\
&= \psi(t) \left(i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi u_n}(k) e^{i w_k x} - i \widehat{\varphi u_n}(0) \right) \\
&= i \psi(t) (\varphi(x) u_n(x) - \widehat{\varphi u_n}(0)),
\end{aligned}$$

por lo cual, tomando normas, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\|\partial_x A^* u_n\|_{L^2} &= \|\psi(t)(\varphi(x)u_n(x) - \widehat{\varphi u_n}(0))\|_{L^2} \\ &\leq |\psi(t)| (\|\varphi(x)u_n(x)\|_{L^2} + \|\widehat{\varphi u_n}(0)\|_{L^2})\end{aligned}$$

pero $\widehat{\varphi u_n}(0) \in S(\mathbb{Z})$, por lo cual es acotado, y $\psi(t) \in C_0^\infty([0, T])$, por lo cual también es acotado, obtenemos para una constante M que depende de ψ y de la cota del espacio de Schwarz lo siguiente

$$\|\partial_x A^* u_n\|_{L^2} \leq M \|\varphi(x)u_n(x)\|_{L^2},$$

pero $\varphi(x)$ es una función 1-periódica suave, por lo tanto es acotada, entonces, concluimos que para una constante M' que ahora además depende de φ tenemos que

$$\|\partial_x A^* u_n\|_{L^2} \leq M' \|u_n(x)\|_{L^2}.$$

Obteniendo que $\|A^* u_n\|_{H^1} \leq M \|u_n\|_{L^2}$, donde $M = M(\varphi, C_{\widehat{\varphi u_n}(0)}, \psi, D^{-1})$. De esta manera, retomando (4.0.5), se concluye que

$$\left| \langle f_n, A^* u_n \rangle_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})} \right| \leq M \|f_n\|_{L^2([0, T], H^{-1})} \|u_n\|_{L^2([0, T], L^2)}.$$

Por lo tanto $\left| \langle f_n, A^* u_n \rangle_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})} \right| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. De manera análoga el término $\langle A u_n, f_n \rangle_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})}$ tiende a cero, obteniendo así, que $\alpha_n \rightarrow 0$.

Similarmente, realizando el mismo estimativo dado en (4.0.5), con $\psi'(t)Bu_n$ en lugar de f_n y u_n en lugar de $A^* u_n$, para el segundo término de la ecuación (4.0.2), podemos obtener lo siguiente

$$\left| \langle \psi'(t)Bu_n, u_n \rangle_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})} \right| \leq \overline{M} \|u_n\|_{L^2([0, T], H^{-1})} \|u_n\|_{L^2([0, T], L^2)},$$

donde $\overline{M} = \overline{M}(\psi', \varphi, D^{-1})$. Por lo tanto,

$$\left| \langle \psi'(t)Bu_n, u_n \rangle_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})} \right| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para finalmente obtener

$$\langle [A, \partial_x^2] u_n, u_n \rangle_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Ahora bien, vemos que para continuar, debemos analizar $[A, \partial_x^2]$, sea v una función de prueba y como

$$[A, \partial_x^2]v = A\partial_x^2 v - \partial_x^2 Av.$$

Por un lado,

$$A\partial_x^2 v = \psi(t)\varphi(x)D^{-1}\partial_x^2 v, \quad (4.0.6)$$

donde

$$\begin{aligned} D^{-1}\partial_x^2 v &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{D^{-1}\partial_x^2 v}(k)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{w_k}\widehat{\partial_x^2 v}(k)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{w_k^2}{w_k}\widehat{v}(k)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(-w_k\widehat{v}(k)) \\ &= -\frac{1}{i}\partial_x v = i\partial_x v. \end{aligned}$$

Así, la ecuación (4.0.6) toma la siguiente forma

$$A\partial_x^2 v = \psi(t)\varphi(x)i\partial_x v.$$

Ahora, para calcular $\partial_x^2 Av$, calculamos primero

$$\partial_x Av = \psi(t)\partial_x(\varphi(x)D^{-1}v) = \psi(t)(\partial_x\varphi(x)D^{-1}v + \varphi\partial_x D^{-1}v),$$

derivando, obtenemos

$$\partial_x^2 Av = \psi(t)(\partial_x^2\varphi D^{-1}v + \partial_x\varphi\partial_x D^{-1}v + \partial_x\varphi\partial_x D^{-1}v + \varphi\partial_x^2 D^{-1}v), \quad (4.0.7)$$

donde el término $\partial_x^2 D^{-1}v = \partial_x(\partial_x D^{-1}v)$. De la ecuación (4.0.1) podemos ver que $\partial_x D^{-1}v = iv(x) - i\widehat{v}(0)$, por lo cual, $\partial_x^2 D^{-1}v = \partial_x v$, así reemplazando en (4.0.7), obtenemos lo siguiente

$$\partial_x^2 Av = \psi(t)(\partial_x^2\varphi D^{-1}v + \partial_x\varphi\partial_x D^{-1}v + \partial_x\varphi\partial_x D^{-1}v + i\varphi\partial_x v).$$

Por lo tanto vemos que

$$[A, \partial_x^2]v = A\partial_x^2 v - \partial_x^2 Av = -2\psi(t)(\partial_x\varphi)\partial_x D^{-1}v - \psi(t)\partial_x^2\varphi D^{-1}v.$$

Por un lado, realizando estimativos similares a (4.0.5) obtenemos que cuando $n \rightarrow \infty$

$$\langle \psi(t) \partial_x^2 \varphi D^{-1} u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

De la ecuación (4.0.1) obtenemos que $\partial_x D^{-1} u_n = i u_n(x) - i \widehat{u_n}(0)$. Por lo cual, el primer término del conmutador se convierte en $-2i\psi(t)(\partial_x \phi) u_n - 2i\psi(t)(\partial_x \phi) \widehat{u_n}(0)$. Ahora bien, usando convergencia débil, obtenemos que $\widehat{u_n}(0)(t)$ tiende a 0 en $L^2([0, T])$, esto se deriva de la forma integral que tiene $\widehat{u_n}(0)(t)$ y podemos concluir que

$$\langle \psi(t)(\partial_x \varphi) \widehat{u_n}(0)(t), u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

En conclusión, obtenemos que para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ y $\psi \in C_0^\infty([0, T])$

$$\langle \psi(t)(\partial_x \varphi) u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

Note que las funciones que pueden ser escritas de la forma $\partial_x \varphi$ son todas aquellas funciones Ψ que satisfacen $\int_{\mathbb{T}} \Psi = 0$. Como un ejemplo, podemos tomar cualquier función periódica $f \in C_0^\infty(\omega)$ y un punto $x_0 \in \mathbb{T}$, entonces $\Psi(x) = f(x) - f(x - x_0)$ puede ser escrito de la forma $\Psi = \partial_x \varphi$. Así, por hipótesis, la convergencia fuerte en $L^2([0, T], L^2(\omega))$ implica que

$$\langle \psi(t) f u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

Entonces, para cualquier $x_0 \in \mathbb{T}$

$$\langle \psi(t) f(\cdot - x_0) u_n, u_n \rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

Así, si construimos una partición de la unidad de $\mathbb{T}$ con funciones con soporte más pequeño que ω obtenemos el resultado. Pues de esta forma aseguramos, que la propagación presentada inicialmente en ω se de localmente en todo $\mathbb{T}$. $\square$

5. Controlabilidad lineal

En este capítulo, presentamos la prueba de la desigualdad de observabilidad y como esta implica directamente la controlabilidad del problema de control usando el método de J-L Lions [13]. Pero antes, mostraremos una desigualdad necesaria para la demostración de la desigualdad de observabilidad.

Proposición 5.0.1. Interpolación entre espacios de Sobolev Sean $s, r \in \mathbb{R}$, $s < r$ y $t = (1 - \sigma)s + \sigma r$ para algún $\sigma \in [0, 1]$ y $u \in H^r(\mathbb{T})$ entonces

$$\|u\|_{H^t(\mathbb{T})} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{T})}^{1-\sigma} \|u\|_{H^r(\mathbb{T})}^{\sigma}. \quad (5.0.1)$$

Demostración. Sea $H^s(\mathbb{T}) = H^s$. Por definición, tenemos que

$$\|u\|_{H^s}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle k \rangle^{2s} |\widehat{u}(k)|^2.$$

Por lo cual, si usamos la identidad de Plancherel 2.6.1, podemos reescribir lo anterior de la siguiente forma

$$\|u\|_{H^s}^2 = \|\langle k \rangle^s u\|_{L^2}^2.$$

Entonces sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, luego por la desigualdad de Hölder 2.1.1

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^t} &= \|\langle k \rangle^t u\|_{L^2} \\ &= \|\langle k \rangle^s |\langle k \rangle^{1-\sigma} u|^{1-\sigma} |\langle k \rangle^{\sigma} u|^{\sigma}\|_{L^2} \\ &\leq \|\langle k \rangle^s u\|_{L^p}^{1-\sigma} \|\langle k \rangle^{\sigma} u\|_{L^q}^{\sigma} \end{aligned}$$

como buscamos que el primer término sea $\|u\|_{H^s}$ entonces tomamos $p = \frac{2}{1-\sigma}$ y así $q = \frac{2}{\sigma}$. Por lo cual, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^t} &\leq \|\langle k \rangle^s u\|_{L^p}^{1-\sigma} \|\langle k \rangle^{\sigma} u\|_{L^q}^{\sigma} \\ &= \|\langle k \rangle^s u\|_{L^2}^{1-\sigma} \|\langle k \rangle^{\sigma} u\|_{L^2}^{\sigma} \\ &= \|u\|_{H^s}^{1-\sigma} \|u\|_{H^r}^{\sigma}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.0.1. Sea ω un conjunto no vacío de $\mathbb{T}$ y $T > 0$. Entonces existe $C > 0$ tal que para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ se satisface lo siguiente:

$$\|u_0\|_{L^2}^2 \leq C_T \int_0^T \left\| 1_{\omega}(x) e^{it\partial_x^2} u_0 \right\|_{L^2}^2 dt. \quad (5.0.2)$$

Demostración. Probaremos primero el estimativo débil,

$$\|u_0\|_{L^2}^2 \leq C_T \int_0^T \left\| 1_w(x) e^{it\partial_x^2} u_0 \right\|_{L^2}^2 dt + C_T \|u_0\|_{H^{-2}}^2. \quad (5.0.3)$$

Para probar lo anterior, procedemos por contradicción, sea $u_{n,0}$ una sucesión de funciones suaves en $\mathbb{T}$, sea $u_n = e^{it\partial_x^2} u_{n,0}$ la solución lineal, contradiciendo la desigualdad (5.0.3) obtenemos que para toda constante $C > 0$ tenemos lo siguiente:

$$\|u_0\|_{L^2}^2 \geq C_T \int_0^T \left\| 1_w(x) e^{it\partial_x^2} u_0 \right\|_{L^2}^2 dt + C_T \|u_0\|_{H^{-2}}^2.$$

Así, en particular tomando $C_T = n$ lo anterior se convierte en

$$\frac{1}{n} \|u_{n,0}\|_{L^2}^2 \geq \int_0^T \left\| 1_w(x) e^{it\partial_x^2} u_{n,0} \right\|_{L^2}^2 dt + \|u_{n,0}\|_{H^{-2}}^2. \quad (5.0.4)$$

Como estamos en el caso lineal, podemos suponer que $\|u_{n,0}\|_{L^2} = 1$ (de otra manera, podemos normalizar y tomar $u_{n,0}/\|u_{n,0}\|_{L^2}$). El estimativo (5.0.4) implica que $u_{0,n} \rightarrow 0$ en H^{-2} cuando $n \rightarrow \infty$. Utilizando el teorema de interpolación 5.0.1, obtenemos que $u_{0,n} \rightarrow 0$ en H^{-1} . Por lo tanto $u_n \rightarrow 0$ en $L^2([0, T], H^{-1}(\mathbb{T}))$. Además, el estimativo (5.0.4) implica $u_{0,n} \rightarrow 0$ en $L^2([0, T], L^2(\omega))$. Por lo cual, usando el Teorema 4.0.1 con $f_n = 0$ obtenemos que $u_n \rightarrow 0$ in $L_{loc}^2([0, T], L^2(\mathbb{T}))$ lo cual nos lleva a una contradicción, pues teníamos el supuesto de que $\|u_{n,0}\|_{L^2} = 1$. Probando así, el estimativo (5.0.4).

Volviendo la prueba de la desigualdad de observabilidad (5.0.2), definamos el conjunto $N_T = \left\{ u_0 \in L^2 \mid e^{it\partial_x^2} u_0 = 0 \text{ en } (0, T) \times \omega \right\}$. Claramente, N_T es un subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ y nuestro objetivo es probar que este conjunto solo contiene la condición inicial nula. Veamos primero que los elementos de N_T tienen norma finita, para eso, tomemos $\varepsilon > 0$ y $u_0 \in N_T$. Para ε lo suficientemente pequeño tal que $u_\varepsilon = \frac{e^{i\varepsilon\partial_x^2} u_0 - u_0}{\varepsilon}$ esta en $N_{T/2}$. Como $u_0 \in L^2$, entonces u_ε es acotado uniformemente en H^{-2} cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, esto es debido a que $u_\varepsilon \rightarrow i\partial_x^2 u_0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Así, usando estimativo (5.0.3) obtenemos que $\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq C_{T/2} \|u_\varepsilon\|_{H^{-2}}^2$.

Ahora bien, veamos que el conjunto $B = \{u_0 \in N_T \mid \|u_0\|_{L^2} \leq 1\}$, el cual es la bola unitaria de N_T es acotada en H^2 , lo cual nos permitirá deducir lo que

deseamos probar. Para esto, usando el Teorema 2.3.2 vemos que para todo $u_0 \in B$

$$\|u_0\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{L^2} + \|\partial_x u_0\|_{L^2} + \|\partial_x^2 u_0\|_{L^2}.$$

Así, mostraremos que los tres términos de la derecha son acotados. Para el primer término, como $u_0 \in B$, tenemos que $\|u_0\|_{L^2} \leq 1$. Para el tercer término, tengamos en cuenta que para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} |\langle \partial_x^2 u_0, \varphi \rangle| &= |\langle u_0, \partial_x^2 \varphi \rangle| \\ &\leq \int |u_0| |\partial_x^2 \varphi| dx \\ &\leq \|u_0\|_{L^2} \|\partial_x^2 \varphi\|_{L^2} < \infty. \end{aligned}$$

Como φ son funciones densas en L^2 (por lo cual $\partial_x^2 u$ induce un funcional lineal acotado en L^2), por el teorema de representación de Riesz, existe un correspondiente funcional en L^2 que realiza el papel de dicho funcional lineal acotado, el cual denotamos de nuevo por $\partial_x^2 u_0$. Concluyendo así, que $\|\partial_x^2 u_0\|_{L^2}$ es finito. De manera similar, para el segundo término, probamos que $\|\partial_x u_0\|_{L^2}$ es finito, pues

$$|\langle \partial_x u, -\partial_x u \rangle| = |\langle \partial_x^2 u, u \rangle| < \infty,$$

y, tenemos que para $u_0 \in B$, $\|u_0\|_{H^2} \leq M$.

Luego, consideramos la inmersión de H^2 a H^1 , la cual es continua, y la inmersión de H^1 a L^2 , la cual es compacta por el Teorema de Rellich, por lo tanto la composición de H^2 a L^2 es compacta por el Lema 2.5.2. Así, la bola unitaria B es relativamente compacta en L^2 , eso es, $\overline{B}$ es compacto, así, usando el Teorema de Riesz 2.1.2 tenemos que N_T es de dimensión finita.

Como sabemos que $\|\partial_x^2 u_0\|_{L^2}$ es finita, esto nos dice que $\partial_x^2 u_0 \in L^2$, lo cual implica que $u_0 \in H^2$, y esto inmediatamente nos dice que $\partial_x^2 u_0 \in N_T$. Por lo tanto, N_T es invariante bajo ∂_x^2 , eso es, $\partial_x^2(N_T) \subset N_T$, por lo cual conociendo esto y el hecho de que N_T es finito, tenemos que el operador ∂_x^2 envía N_T a un subconjunto de este mismo, y este, admite un valor propio λ asociado a un vector propio u_λ . Entonces, $\partial_x^2 u_\lambda = \lambda u_\lambda$ y por definición de N_T , tenemos que $u_\lambda = 0$ en ω , lo cual, por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que $u_\lambda = 0$, esto pues $u_\lambda = 0$ es solución a la ecuación diferencial $\partial_x^2 u_\lambda = \lambda u_\lambda$, y si tenemos que $u_\lambda = 0$ en ω , entonces este debe ser la solución nula, por unicidad. Por lo tanto, $N_T = \{0\}$.

Para finalizar la prueba del estimativo (5.0.2), procedemos de nuevo por contradicción. Sea $u_{n,0}$ una sucesión de funciones suaves en $\mathbb{T}$ de norma L^2 igual a 1. Por tanto, $u_n = e^{it\partial_x^2}u_{n,0}$ la solución lineal. Así para todo $C > 0$, en particular para $C = n$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \|u_{n,0}\|_{L^2}^2 \geq \int_0^T \left\| 1_w(x) e^{it\partial_x^2} u_{n,0} \right\|_{L^2}^2 dt. \quad (5.0.5)$$

Supongamos que $u = e^{it\partial_x^2}u_0$ es el límite débil de u_n , lo cual nos dice además que u_0 es el límite débil de $u_{n,0}$. Cuando $n \rightarrow \infty$, estimativo (5.0.5) nos dice que $u_0 \in N_T$, por lo cual, $u_0 = 0$. Lo que implica que $u_{n,0} \rightharpoonup 0$ en L^2 .

Como ya vimos, existe un operador T compacto de H^2 a L^2 dado por composición de inmersiones, así, por el Teorema 2.5.3 tenemos que T^* es un operador compacto entre L^2 y H^{-2} luego usando el Teorema 2.5.2 con T^* tenemos que $u_{n,0} \rightarrow 0$ en H^{-2} . Por lo tanto, usando los estimativos (5.0.3) y (5.0.5) obtenemos que $\|u_{n,0}\| \rightarrow 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Cabe resaltar que todos los argumentos presentados a lo largo de la prueba fueron para sucesiones suaves, eso es, para funciones de $C^\infty(\mathbb{T})$, luego, como este conjunto es denso $L^2(\mathbb{T})$ podemos extender todo lo anterior por densidad de $C^\infty(\mathbb{T})$ a $L^2(\mathbb{T})$.

6. Conclusiones

- Es posible controlar la ecuación de Schrödinger debido a que la propiedad de observabilidad está fuertemente ligada al estudio de la propagación de la información de las soluciones de la ecuación de Schrödinger, en particular, la propagación de la compacidad (la cual nos proporciona la compacidad de una sucesión de soluciones en todo el espacio con tan solo está siendo compacta en un subdominio ω) es suficiente para garantizar el estimativo de observabilidad.
- El concepto de operadores diferenciales es generalizado por los multiplicadores de Fourier debido a que estos nos permiten trabajar con símbolos que no solo son polinomiales. Esta generalización en el símbolo puede verse reflejada y aplicada en demostraciones de buena colocación del problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos, también nos permite reducir el orden de una EDP de segundo orden a un sistema de primer orden sin agregar nuevas características al sistema. Además puede ser usada para técnicas de controlabilidad como se presenta en este trabajo.
- La técnica de controlabilidad empleada en este trabajo utiliza algunas herramientas de análisis microlocal y puede ser empleada en otras ecuaciones, tales como, la Korteweg de-Vries (kdV), Kadomstev-Petviashvili (kp) I y II, entre otras, por lo cual es interesante conocer y entender este tipo de técnicas que utilizan herramientas modernas. Cabe resaltar que el método usado en este trabajo es suficiente pero no necesario, puesto que, métodos como estimativos de Carleman, estimativos de energía, entre otros también son suficientes para garantizar controlabilidad de un sistema. Un método suficiente y necesario es actualmente un problema abierto.
- El trabajo fue desarrollado en una dimensión, por lo cual no se entró en mayores consideraciones geométricas, por lo tanto, como una motivación para un trabajo a futuro se pretende hacer un estudio en dimensiones mayores, donde la condición geométrica de control (CGC), mencionada en la introducción y el análisis microlocal juegan un rol fundamental.

Referencias

- [1] BEAUCHARD, K. Local controllability of a 1D Schrödinger equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 84 (2005), 851–956.
- [2] BEAUCHARD, K., AND LAURENT, C. Local controllability of 1D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 94, 5 (2010), 520 – 554.
- [3] BOURGAIN, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. *Geom. Funct. Anal* 3 (1993), 107–157.
- [4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] BURQ, N. Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes. *Mém. Soc. Math. France* (1993), 55.
- [6] CORON, J.-M. *Control and nonlinearity*, vol. 136. American Mathematical Soc., 2007.
- [7] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [8] JAFFARD, S. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée. *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math* 307 (1988), 759–762.
- [9] KATO, T. On nonlinear Schrödinger equations. II. H^s -solutions and unconditional well-posedness. *J. d'Anal. Math* 67 (1995), 281–306.
- [10] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*, vol. 1. Wiley New York, 1978.
- [11] LAURENT, C. Internal control of the Schrödinger equation. *Math. Control Relat. Fields* 4 (2014), 161–186.
- [12] LEBEAU, G. Contrôle de l'équation Schrödinger. *J. Math. Pures Appl.* 71 (1992), 267–291.
- [13] LIONS, J.-L. Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués. *Tom 1. Masson, RMA* (1998).

- [14] MACHTYNGIER, E. Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de l'équation de Schrödinger. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sr. I Math* 310 (1990), 801–806.
- [15] MICU, S., AND ZUAZUA, E. An introduction to the controllability of partial differential equations. *Quelques questions de théorie du contrôle. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann* (2004).
- [16] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] ROSIER, L. A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations. *Journal Européen des Systemes Automatisés* 41 (2007), 365.
- [18] RUSSELL, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions. *Siam Review* 20, 4 (1978), 639–739.
- [19] RUZHANSKY, M., AND TURUNEN, V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*, vol. 2. Springer Science & Business Media, 2009.
- [20] RYNNE, B. P., AND YOUNGSON, M. A. *Linear functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [21] TSUTSUMI, Y. L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups. *Funkcial. Ekvac* 30 (1987), 115–125.
- [22] WONG, M. W. *Discrete fourier analysis*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2011.