Heurística y formalismo: la diferencial de Fréchet según el enfoque de Lakatos.

Luis Cornelio Recalde
Profesor Departamento de Matemáticas
Luis Carlos Arboleda
Profesor ad Honorem GEM-IEP
Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Resumen

Se comienza por trazar un paralelo entre las concepciones filosóficas de Maurice Fréchet (1878-1973) sobre la desaxiomatización de las teorías matemáticas altamente formalizadas, y la posición crítica de Imre Lakatos al formalismo en su método de pruebas y refutaciones. El próposito de esta comparación es doble. De un parte, estudiar el esquema conceptual empleado por Fréchet en la generalización de la diferencial a espacios abstractos con distintas topoloías. Por otra parte, precisar la heurística del proceso histórico-epistemológico seguido por Fréchet en sus trabajos originales sobre la diferencial abstracta (1912, 1914, 1925). Finalmente se compara esta clase de definiciones con las de autores como Vito Volterra (1887), Jacques Hadamard (1899) y Paul Lévy (1922), con el fin de establecer los procedimientos que más tarde les permitieron a Fréchet, a sus alumnos y colaboradores, continuar extendiendo la teoría de la diferencial a espacios cada vez más útiles en las investigaciones: vectoriales normados (Fréchet, 1925),

métricos afines (Ky Fan, 1942), topológicos lineales (Aristotle D. Michal, 1938) y grupos topológicos abelianos (Fréchet, 1938) y (Michal, 1947).

Palabras claves: Diferencial abstracta, diferencial de Fréchet, diferencial de Volterra, diferencial de Hadamard, diferencial de Lévy, diferencial de Fan, diferencial de Michal, desaxiomatización, heurística, formalismo, epistemología, historia de la topología, historia del análisis funcional.

1 Fréchet, Lakatos y el método axiomático

En 1925, Fréchet dicta una conferencia en Berna, en la cual llama la atención sobre el peligro de quedarse en los terrenos de la axiomatización cuando las teorías han alcanzado un alto grado de abstracción (Fréchet [1925]). No niega la importancia de la búsqueda de formalización de las matemáticas; pero señala los riesgos de limitarse exclusivamente al método axiomático. Al distinguir entre el contexto de descubrimiento y el contexto de justificación de los resultados, su intención es proponer una interpretación filosófica sobre el origen de las nociones matemáticas en la experiencia y en este sentido, mostrar la conveniencia que tiene, tanto para la enseñanza como para la investigación matemática, la distinción entre estos dos contextos. En términos generales, Fréchet denomina desaxiomatización de las matemáticas a la reconstrucción que se hace con fines investigativos o pedagógicos, de la síntesis que ha dado lugar a la teoría axiomático-formal, y a las verificaciones a las cuales esta teoría es sometida a través de aplicaciones teóricas y prácticas.[1] Fréchet sustenta que si bien al final la teoría aparece impecable en su presentación axiomática, como construcción histórica ha debido satisfacer necesidades conceptuales y prácticas relacionadas con la experiencia. Aunque no es clara su concepción de la experiencia, y si bien Fréchet insiste, en primera instancia, en el referente de la experiencia empírica, en sus consideraciones sobre la desaxiomatización intervienen diferentes niveles de experiencia, relativos a estados de síntesis parciales a través de los cuales el objeto matemático final-

[1] Este aspecto es desarrollado en: Arboleda, L. C. [2.000], *Maurice Fréchet (1878 – 1973) and the mathematical "désaxiomatisation"*. En Panza, M. and Lacki, J. [2.000], The Axiomatic way. Boston, Kluwer Academic Publisher-Boston Studies in the Phylosophy of Science. In press.

mente se constituye a partir de lo concreto.[2]

Para Fréchet, no basta con presentar las definiciones y teoremas en una teoría discursiva acabada; se requiere que el matemático se ocupe también de explicar los diferentes grados de desarrollo conceptual obtenidos en la investigación sobre un determinado problema; las conjeturas primitivas, las refutaciones por contraejemplo y los diferentes refinamientos que finalmente hacen que la explicación de un objeto matemático se ajuste a ciertos requerimientos lógicos. A este doble carácter responden algunas de sus obras; tanto aquellas de sistematización de conocimientos como los *Espaces Abstraits* (Fréchet [1928]), como las publicaciones de investigación propiamente dichas. Este es precisamente el caso de sus artículos sobre la generalización de la diferencial. Mientras que Volterra presenta sus resultados generales, sobre este problema, de una manera lacónica, simple y directa, sin indicar los detalles técnicos de su procedencia ni, menos aún, sus filiaciones epistemológicas, Fréchet, al contrario, va indicando no sólo los pormenores que lo llevaron a su definición, sino que ubica sus resultados en el contexto de las diferentes tentativas realizadas por otros y por él mismo antes de lograr las conclusiones finales.

En otro trabajo hemos analizado comparativamente las características del aporte de Fréchet y Volterra a la generalización de la diferencial (Recalde y Arboleda [1999]). En esta ocasión nos interesa referirnos al esquema conceptual seguido por Fréchet para llegar a esta generalización. Nos parece que ello ilumina de una manera particularmente reveladora, el propósito de algunos programas de heurística general, que serían propuestos decenios después por Popper y Lakatos. Recordemos que para Imre Lakatos (1923-1974) lo propio a la actividad científica no son tanto los conceptos y teorías, sino los "programas de investigación", entendidos como el conjunto articulado de teorías que constituyen la razón de ser histórica de un descubrimiento. La heurística de Lakatos está basada en dos componentes: De una parte, la "heurística negativa" la cual apunta a reconocer aquellos procedimientos investigativos que deberían descartarse para mantenerse dentro del "núcleo fuerte" del programa. Para ello se requiere dotarse de un "escudo protector de

[2]Las concepciones filosóficas y epistemológicas de Fréchet han sido analizadas en otras publicaciones: Arboleda y Recalde [1997], y Arboleda y Recalde [1999a].

hipótesis auxiliares adecuadas", cuyos éxitos empíricos se miden en los progresos obtenidos al utilizarlas en el desarrollo del programa. Por otra parte está la acción de la "heurística positiva" dirigida a hacer avanzar las ideas centrales del programa, sin tener en cuenta las anomalías o el proceso de perfeccionamiento de su contenido.
Según Lakatos es imposible aislar el proceso de descubrimiento o producción de un enunciado, de una ley o de una conjetura particular. Es por ello que critica el reduccionismo del programa formalista tipo Hilbert, que tiende a identificar las matemáticas con lo axiomático formal. Al establecer esta identidad, los conceptos matemáticos aparecen sin historia, y completamente desconectados de la filosofía de las matemáticas, la cual es sustituida por la metamatemática. De ahí la crítica a los planteamientos de Dieudonné sobre todo en Dieudonné [1939]:

> *Dieudonné habla de la "absoluta necesidad impuesta sobre todo matemático que se preocupe por la integridad intelectual" consistente en presentar sus razonamientos en forma axiomática (Lakatos [1978]).*

Para Lakatos, el "formalismo" es un baluarte de la filosofía positivista que se antepone completamente a las matemáticas informales. Pero, pregunta en relación con estas últimas, ¿cómo desconocerlas si son constructos históricos, usados en la práctica matemática como tal? Esta es la critica fuerte de Lakatos al formalismo, ya que al restringir la investigación a su componente positiva, solo acepta que un enunciado es significativo si es o bien tautológico o bien empírico; y como las matemáticas informales no son ni lo uno ni lo otro, carecerían de sentido.
Según Lakatos, la teoría formalizada nos brinda muy poca información sobre la naturaleza y la dinámica de los objetos matemáticos. Sólo dos cuestiones se podrían reconocer: la solución de problemas que una máquina de Turing, bien programada, resolvería en un determinado tiempo, y los problemas típicos del metalenguaje. Pero ésta es una manera demasiado limitada de considerar las matemáticas. Frente a ella, Lakatos opone la perspectiva de unas matemáticas vivas y en constante cambio.
Para Lakatos, la filosofía formalista tiene sus raíces profundas en el método hipotético-deductivo de corte euclideo y, en consecuen-

cia, es heredera de las filosofías dogmáticas que primaron en las matemáticas por más de veinte siglos. Durante mucho tiempo, los matemáticos, intentaron la construcción de un cuerpo teórico infalible e irrefutable, al que Lakatos llama fortaleza del dogmatismo, que diera cuenta de la verdad. La búsqueda de este horizonte infalible estaba mediada por cánones de rigor impuestos por el método deductivo.

Por su parte, Fréchet utilizó, medio siglo antes, este tipo de argumentos para objetar a quienes, sin ningún miramiento, afirmaban dogmáticamente que era indispensable ajustarse en todo y por todo al método axiomático-deductivo; un método que según Fréchet, "presenta la ciencia como una especie de revelación divina, por medio de lemas, teoremas y corolarios, cada cual perfectamente demostrado, pero cuya continuación se desarrolla de acuerdo a una ley mística e inaccesible" (Fréchet [1955]). Igualmente suponía que ese "dogmatismo cómodo pero estrecho" tenía su origen en la geometría euclidiana (Fréchet [1955]):

> *... si yo admiro a Euclides, mi reconocimiento hacia él no está desprovisto de cierta mezcla de crítica. Luchar contra la adopción exclusiva del método axiomático no es combatir contra molinos de viento.*

2 El método de Pruebas y Refutaciones de Lakatos

En la explicación de su método de *Pruebas y Refutaciones*, Lakatos aborda los siguientes problemas ya conocidos:

- La fórmula de Euler, que relaciona los vértices, las aristas y las caras de un poliedro regular: $V - A + C = 2$.
- La prueba de Cauchy del enunciado según el cual suma infinita de funciones continuas es continua.
- La definición de variación acotada para funciones.
- La definición de Carathéodory de conjunto medible.

El esquema general del método de Lakatos, se estructura en siete estadios, cuya articulación práctica no necesariamente se da en una

secuencia lineal. Los cuatro primeros son considerados fundamentales al método y los tres últimos opcionales:

L1: Formulación de la conjetura primitiva.

L2: Desarrollo de la prueba o elaboración de un argumento mental de carácter aproximado, el cual descompone la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas.

L3: Formulación de contraejemplos "globales", que se constituyen en tanto que tales a partir de la conjetura primitiva.

L4: Revisión de la prueba para identificar el llamado el lema "culpable", respecto al cual el contraejemplo global se constituye en un contraejemplo "local". Puede ocurrir que este lema culpable haya permanecido "oculto" anteriormente o que no haya sido correctamente explicado. Ahora se explica y se incorpora como condición a la conjetura primitiva. El teorema (la conjetura mejorada) supera a la conjetura primitiva con el nuevo concepto generado por la prueba como su aspecto supremo.

L5: Se examinan pruebas de otros teoremas para contrastar si aparece en ellas el lema recientemente descubierto o el nuevo enunciado al que se refiere la prueba. Puede ocurrir que se descubra que este concepto se encuentra en las encrucijadas de diversas pruebas, lo cual establecería su importancia básica.

L6: Se comprueban las consecuencias de la conjetura original ya refutada.

L7: Los contraejemplos se convierten en ejemplos nuevos y se abren así otros campos de investigación.

En el apéndice 2 del mismo libro, Lakatos antepone el enfoque heurístico al enfoque deductivo de la metodología euclídea. En la estructura deductiva las definiciones aparecen completamente acabadas. No existe ninguna argumentación para-deductiva que explique sus razones de ser a un lector que no esté dispuesto a recurrir para ello a la autoridad de la teoría. De esta forma, para seguir el discurso no es posible poner en evidencia ninguno de los enunciados implicados, puesto que ellos aparecen de manera sintética

sin ninguna referencia a los diferentes estadios que se han dado con antelación a la instauración del concepto en el cuerpo teórico matemático. "El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura", dice Lakatos. En contraposición al estilo deductivista, el enfoque heurístico hace hincapié en las situaciones-problema en cuya resolución se formuló tal o cual definición particular.

3 Heurística de la generalización de la diferencial de Fréchet

Ahora nos proponemos examinar el esquema heurístico que Fréchet utilizó en sus trabajos originales sobre la definición de la diferencial abstracta. Vamos a concentrarnos en señalar las etapas principales del proceso de constitución de la definición general. Resaltaremos las coincidencias que podrían advertirse con el método de Lakatos.[3]

La definición de derivada hace parte del programa de investigación de Fréchet en la Teoría de los Espacios Abstractos y el llamado Análisis General, con el cual inicia su carrera matemática. Los resultados más importantes de este programa se resumen en tres artículos fundamentales sobre la definición de diferencial: Fréchet [1912], Fréchet [1925] y Fréchet [1937].

Las etapas de la heurística de la generalización de la diferencial son las siguientes:

F_1: Volterra presenta la primera versión de la diferencial en dos notas[4] que hacen parte de su célebre artículo: Volterra [1887] *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.*

[3]Para una explicación más detallada sobre el proceso histórico-epistemológico de la diferencial de Fréchet, remitimos a: Arboleda y Recalde [1.999b]. Informe final del proyecto de investigación: "La generalización de la noción de espacio abstracto en Maurice Fréchet". También se puede consultar Recalde y Arboleda[1999].

[4]Nota 1§2. - *Variazione di una funzione che dipende da un'atra funzione.* Nota 2§4. *Funzioni dipendenti da un'altra funzione con punti eccezionali.* Ver Volterra [1913] y Volterra [1887].

Esta definición se sustenta en los métodos del cálculo de variaciones y es una extensión por analogía de los métodos infinitesimales:

Sea la funcional $U(f)$ definida en el campo de las funciones continuas en un intervalo I. Dada la cantidad $U(f(x)+\varepsilon\varphi(x))$, Volterra establece $\Delta U = U(f) - U(f(x) + \varepsilon\varphi(x))$. A continuación calcula el límite de $\Delta U/\varepsilon$, cuando ε tiende a cero, llegando a la conclusión de que, bajo ciertas condiciones, la variación es de la forma:

$$\varepsilon \int_I \varphi(x)k(y)dy + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} A_i\varphi(x_i)$$

F_2: Hadamard encuentra algunos casos en los cuales la derivada de Volterra presenta problemas. Esto podría corresponder al estadio de formulación de contraejemplos del método de Lakatos.

En su artículo, *Sur les dérivées des fonctions de lignes*, Hadamard [1899] hace una critica a la definición de Volterra. Presenta una funcional que pertenece a la clase de la nota 2, Volterra [1897], y llega a la conclusión que además de los términos adicionales tenidos en cuenta por Volterra, era indispensable considerar otros términos complementarios.

F_3: Hadamard plantea el problema a sus alumnos Fréchet y Gâteaux. Propone supeditar la existencia de la derivada a la existencia de una función lineal que dependa del incremento. Fréchet se pregunta sobre el principio general que ha dinamizado históricamente la noción de derivada, y analiza la definición de diferencial para funciones de varias variables (Fréchet [1912]).

Con el fin de esclarecer este principio general, Fréchet estudia los diversos desarrollos históricos que dieron lugar a la clase de funciones que comparten tal principio. Tenemos entonces una heurística que involucra otra heurística. Los pasos de esta

segunda heurística para la caracterización de la derivada de una función de varias variables, se puede resumir así:

$F_{3.1}$: Hadamard introduce la siguiente definición: Una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ admite en el punto $(a_1, \cdots, a_n)$ una diferencial, si f admite todas las derivadas parciales de primer orden y si además, cuando $\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u)$ son funciones de u tales que $a_1 - \varphi_1(u), \cdots, a_n - \varphi_n(u)$, para $u - u_0$, todas ellas derivables en $u = u_0$, entonces $f(\varphi_1(u), \cdots \cdots, \varphi_n(u))$ es derivable para $u = u_0$, y se tiene:

$$\left[\frac{d}{du} f(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u))\right]_{u=u_0} =$$

$$f'_{a_1}\left[\frac{d\varphi_1}{du}\right]_{u=u_0} + \cdots + f'_{a_n}\left[\frac{d\varphi_n}{du}\right]_{u=u_0}$$

siendo df el símbolo de la operación:

$$\frac{df}{du} = f'_{a_1} dx_1 + \cdots + f'_{a_n} dx_n.$$

$F_{3.2}$: Fréchet se percata de una ventaja de la definición de Hadamard en el sentido de enfatizar las propiedades operatorias, mientras que otras definiciones ponen el énfasis en la propiedad de constituir la parte principal del incremento de la función. Pero también le encuentra problemas, puesto que para algunas funciones el cociente,

$$\frac{\Delta f}{df} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y}$$

no siempre tiende a uno, para toda variación arbitraria de Δx y Δy tendiendo ambos a cero. Además, este cociente carece de sentido cuando f'_x y f'_y son ambas cero, sin ser f constante.

$F_{3.3}$: Fréchet afina entonces, la definición de Hadamard. Llega a la conclusión de que la diferencial de $f(x, y)$ se puede definir como una función de x, y, dx, dy, donde x y y pueden entenderse como funciones de la variable u. Más

concretamente: Una función $f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b), si existe una función $g(x,y,dx,dy)$ designada por df tal que para $u=u_0$ se cumpla:

$$\frac{d}{du}f[x(u),y(u)]=\frac{g[x(u),y(u),x'_u du,y'_u du]}{du},$$

para $x(u_0)=a,\ y(u_0)=b$, siendo $x(u)$ y $y(u)$ derivables en $u=u_0$.

$F_{3.4}$: En su célebre obra, *Leçons d'analyse functionnelle* [1922], Paul Lévy presenta un contraejemplo que contradice el resultado de Fréchet:

$$\text{La función } f(x,y)=\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}, & \text{para } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{para } (0,0), \end{cases}$$

es diferenciable en la propuesta de refinamiento de Fréchet; pero tomando $x(u)$ y $y(u)$, apropiadamente, se muestra que no existe la derivada en el sentido propuesto en $F_{3.1}$.

$F_{3.5}$: Lévy observa que todas las definiciones anteriores supeditan la existencia de la diferencial a la existencia de las derivadas parciales. Entonces propone la siguiente definición:

Una función $f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b), si:
(1)La expresión,

$$\rho=\frac{f(a+\lambda\Delta x,b+\lambda\Delta y)-f(a,b)}{\lambda},$$

tiene límite, con variaciones arbitrarias de Δx y Δy, cuando λ tiende a cero.

(2) Este límite es de primer grado y homogéneo en Δx y Δy.

$F_{3.6}$: Fréchet encuentra en su trabajo Fréchet[1937] un contraejemplo a la definición de Lévy. Esta definición es la más general de la clase de definiciones de Hadamard, Fréchet, Stolz, Young y Pierpont, pero no parece susceptible de aplicaciones en el análisis clásico. Observemos

que Fréchet descubre, con posterioridad a la introducción de su diferencial general, que las definiciones de Stolz (1893), Pierpont (1905) y Young (1910), pertenecen a la misma clase que la suya. Esta es la versión geométrica de la diferencial de Fréchet propuesta en Fréchet [1912a]: Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b), si la superficie $z = f(x, y)$ admite en el punto $(a, b, f(a, b))$ un plano tangente no paralelo al eje oz. Y si ese plano tiene por ecuación:

$$z - c = p(x - a) + q(y - b),$$

la diferencial de f es :

$$df = p\ dx + q\ dx.$$

$F_{3.7}$: Fréchet enuncia una segunda definición, donde es fácil advertir un procedimiento para continuar extendiendo su generalización al caso de las funcionales. En efecto, la diferencial de $f(x_1, \cdots, x_n)$ aparece como una función de los incrementos $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n$, y constituye una representación **simple y apropiada** [el subrayado es de Fréchet] del incremento correspondiente de la función.

Fréchet expresa entonces, su definición de manera precisa (Fréchet [1937]):

Una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ es diferenciable en un punto $(a_1, \cdots, a_n)$ si existe una función de $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n$, de primer grado y homogénea, tal que:

$$A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_n \Delta x_n,$$

sólo difiera del incremento correspondiente Δf de la función f por una cantidad infinitamente pequeña respecto a la distancia $r = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$, del punto fijo $(a_1, \cdots, a_n)$ y del punto variable $(a_1 + \Delta x_1, \cdots, a_n + \Delta x_n)$. Entonces, esta función auxiliar $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i$ es la diferencial de f correspondiente a tales incrementos Δx_i.

F_4: Tomando como referencia la diferencial en funciones de varias variables, Fréchet enuncia la definición de diferencial de una funcional (Fréchet [1937]):

Una funcional U_f admite una diferencial para un argumento f_0, si existe una funcional $V_{\Delta f}$ (lineal con respecto al incremento Δf del argumento f_0) que no difiere del incremento correspondiente $U_{f_0+\Delta f} - U_{f_0}$ de la funcional, más que una cantidad infinitamente pequeña respecto a la desviación Δ de f_0 y de $f_0 + \Delta f$.

Fréchet propone la notación,

$$\partial_{\Delta f} U_f.$$

La ventaja de esta definición es que extiende al análisis funcional, las propiedades operatorias de la definición que Hadamard había formulado en 1923.

F_5: Fréchet da un paso más avanzado y generaliza su definición para espacios vectoriales normados (Fréchet [1925b]):

Sea la transformación,

$$F : X \to Y, \text{ donde } X, Y \text{ son espacios normados.}$$

Se dice que esta transformación es diferenciable en un punto x_0, interior a X, si existe una transformación lineal T de X en Y, y una función escalar ε tal que:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - T(\Delta x) = \varepsilon ||\Delta x|| U,$$

donde U es un vector unitario variable en Y y $\varepsilon \to 0$, cuando $||\Delta x|| \to 0$.

E_6: Se abren nuevos campos de investigación.

En su artículo, Nashed [1971], Nashed realiza una sistematización de los desarrollos de la diferencial a partir de las generalizaciones más importantes desde finales del siglo XIX a comienzos del siglo XX. Su presentación abarca un largo y

fructífero período que va desde el cálculo de variaciones hasta las derivadas asintóticas y los operadores cuasi acotados. En principio, presenta las definiciones de Hadamard, Fréchet, Lévy y Gâteux, estableciendo comparaciones e implicaciones. A continuación, hace una revisión detallada de la diferencial en espacios topológicos. Estudia diferenciales y variaciones de orden superior, como también extensiones de los teoremas de Taylor y del valor medio, a espacios topológicos lineales y de Banach. Para concluir nuestro trabajo mencionaremos algunas publicaciones en esta última dirección.

$F_{6.1}$: La generalización en los espacios topológicos lineales:

En Fréchet [1937], se había observado que la anterior definición F_4, generalizada a paritir de la de Hadamard, tenía la ventaja de poder extenderse a espacios vectoriales no metrizables; incluso se había sugerido que este problema de investigación era importante en el programa de generalización del análisis clásico a los espacios abstractos. En su tesis doctoral de 1941, Ky Fan, alumno de Fréchet, estudia el problema y extiende la definición F_4 a espacios metricos afines (Ky Fan [1942]). Previamente, A. Michal, había generalizado tanto la definición F_5 de Fréchet como la F_4, en el sentido de Hadamard, a espacios topológicos lineales. Luego, el mismo Michal publica en [1945] un trabajo que había esbozado en [1940], en el cual extiende F_5 al caso en que los espacios X y Y, son grupos topológicos abelianos. Anotemos que Fréchet y Michal trabajaron paralelamente en la sistematización de estos resultados en un corpus teórico formalizado en Fréchet [1938] y en Michal [1947]. En fin, este ciclo de formalización culminaría con la publicación *post-mortem*, a instancias de Fréchet, de la obra de Michal: *Calcul différentiel dans les espaces de Banach* [1964]. En esta publicación se cumple el propósito expuesto en Michal [1938], de garantizar en la generalización del cálculo diferencial el sentido intuitivo de aproximación que se requiere en las aplicaciones físicas. Michal estaba, de hecho, interesado en obtener un nivel de generalidad del

cálculo que le permitiera, por ejemplo, caracterizar las vibraciones de un medio continuo a través de ecuaciones con derivadas parciales de segundo orden en relación con el tiempo.

Referencias

[1] Arboleda, L.C., Recalde L.C. [1997]. *Las concepciones sobre matemáticas y experiencia en Maurice Fréchet.* Matemáticas, Enseñanza Universitaria. Vol. II, No 1,2, E.R.M., Cali. Otra versión fue publicada en: *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures.* ICME-8, Sevilla, 1996, pp.1-13.

[2] Arboleda L.C., Recalde L.C. [1999a]. *Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality.* Synthese. An International Journal for Epistemology Methodology and philosophy of Science. Boston. In press.

[3] Arboleda L. C., Recalde L. C [1999b]. *Matemáticas y Experiencia: la generalización de la noción de espacio abstracto en Maurice Fréchet.* Informe final del Proyecto 406-05-317-95, Colciencias, Universidad del Valle, Cali.

[4] Arboleda L.C. *Maurice Fréchet (1878-1973) and the mathematical "désaxiomatisation".* En: Panza, M. and Lacki, J. (2000), *The Axiomatic Way.* Boston, Kluwer Academic Publisher-Boston Studies on the Phylosophy of Science. In press.

[5] Dieudonné, J. [1981]. *History of Functional Analysis.* Amsterdam, North-Holland.

[6] Fan, K. [1942]. *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse Générale.* Journal de Mathématiques, t.21, pp.289-369.

[7] Fréchet, M. [1912]. *Sur la notion de différentielle dans le calcul fonctionnel C. R.* Congrés des Sociétés, Savantes, Paris,1912, pp.45-49.

[8] Fréchet, M. [1912a]. *Sur la notion de différentielle totale.* Nouvelles. ann. mathématiques; t.12, pp.385-403; 433-449.

[9] Fréchet, M. [1914]. *Sur la notion de différentiellle d'une fonction de ligne.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. XV, pp. 135-161.

[10] Fréchet, M. [1925a]. *Sur une désaxiomatisation de la science,* Conferencia publicada por primera vez en: Fréchet [1955], pp. 1-10.

[11] Fréchet, M. [1925b]. *La notion de différencielle dans l'analyse générale.* Annales de l'Ecole Normale Supérieur., t. 42; pp.293-323.

[12] Fréchet, M. [1928]. *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale.* Paris, Gauthier-Villars.

[13] Fréchet, M. [1937]. *Sur la notion de différentielle.* Journal de Mathématiques, vol XVI, pp. 233-250.

[14] Fréchet, M. [1938]. *La notion de différentielle sur un groupe Abélian.* Portugaliae Mathématica, vol. 7, pp. 59-72.

[15] Fréchet, M. [1953]. *Pages choisies d'Analyse générale.* Paris, Gauthier-Villars.

[16] Fréchet, M. [1955].*Les Mathématiques et le Concret.* Paris, PUF; p.409-413.

[17] Fréchet, M. [1955a]. *Les origines des notions mathématiques.* En: Fréchet [1955]; pp. 11-51.

[18] Fréchet, M. [1958]. *Las Matemáticas y lo Concreto.* Universidad Nacional Autónoma de México. México. Traducción al castellano de Fréchet [1955].

[19] Hadamard, J. [1899]. *Sur les dérivées des functions de lignes.* Rendiconti Accad. Naz. dei Lincei, 4^e série, t. III, passim. En: Acta Mathematica, t. XII, pp.233 et suivantes.

[20] Hadamard, J. [1923]. *La notion de différentielle dans l'enseignement.* Scripta Univ. Ab. Bib, Hierosolymitanarum, Jerusalem.

[21] Lakatos, I. [1978]. *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Editorial, Madrid.

[22] Lakatos, I. [1978]. *Mathematics, science and epistemology.* Cambridge Uniserdity Press, New York.

[23] Lévy, P. [1922]. *Leçons d'analyse functionnelle.* Gauthier-Villars, Paris.

[24] Michal, A. [1938]. *Differential calculus in linear topological spaces.* Proceedings National Academy of Scinces, U.S.A., vol. 24; pp.340-342.

[25] Michal, A. [1940]. *Differential of functions with arguments and values in topological abelian groups.* Proceedings National Academy of Sciences, U.S.A.; vol. 26, pp.356-359.

[26] Michal, A. [1945]. *First order differentials functions with arguments and values in topological abelian groups.* Revista de ciencias, año XLVII.

[27] Michal, A. [1947]. *Functional Analysis in topological groups spaces.*Mathematics Magazine, vol. XX.

[28] Michal, A. [1964]. *Le calcul différential dans les espaces de Banach.* Dos volúmenes. Gauthier-Villars, Paris.

[29] Nashed, M. [1971]. *Differentiability and Related Propierties of Nonlinear Operators: Some Aspects of the Role of Differentials in Nonlinear Functional Analysis.* En: Rall, L. (E.) Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, New York.

[30] Recalde, L. C., Arboleda L. C. [1999]. *Fréchet and the Generalization of Mathematical concepts: the differential case.* Manuscrito.

[31] Volterra, V. [1913]. *Variazione di una funzione che dipende da unatra funzione. En: Leçons sur les fonctions de lignes,* Gauthier-Villars, Paris.

[32] Volterra, V., [1887]. *Funzioni dipendenti da un'altra funzione con punti eccezionali.* Rendiconti Accad. Naz. dei Lincei, ser. IV, vol III, 1887, nota II, pp 141-146. En: *Opere Matematiche. Memorie e note.* Volume primo, 1881-1892, Accad. Naz. dei Lincei, 1954-1962, pp. 303-308; incluído en la edición de [33] en *Opere*

[33] Volterra, V., [1887]. *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* Rendiconti. Accad. Naz. dei Lincei, ser IV, vol III, 1887, pp. 97-105. En: *Opere Matematiche. Memorie e note.* Vol. primo, 1881-1892, Accad. Naz. dei Lincei, 1954-1962, pp 294-314.

[34] Taylor, A. E. [1982]. *A study of Maurice Fréchet I: His early works on point set theory and the theory of functionales.* Archive for History of Exact Sciences, vol. 27, pp. 233-295.

[35] Taylor, A. E. [1985]. *A study of Maurice Fréchet II: Mainly about his work on general topology, 1909-1928.* Archive for History of Exact Sciences, vol. 34, pp. 279-380.

[36] Taylor, A. E. [1987]. *A study of Maurice Fréchet III: Fréchet as Analyst, 1909-1930.* Archive for History of Exact Sciences, vol. 37, pp. 25-76.

Luis Cornelio Recalde
Profesor Departamento de Matemáticas Universidad del Valle
Luis Carlos Arboleda
Profesor ad Honorem, Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y pedagogía Universidad del Valle.