Vol. XIV Nº 2 Diciembre (2006)
Matemáticas: 41–63

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Proceso crítico de Galton-Watson con segundos momentos infinitos

Humberto LLinás Hugo Zapata

Recibido Abr. 3, 2006 Aceptado Jun. 21, 2006

Abstract

In the present work, Galton-Watson branching critical processes with only one type of particle are studied, in the case that second moments are infinite. The probability generating functions which have a Slack type [17] with index a $\alpha \in (0, 1]$ are studied. Limiting theorems are presented and demonstrated where the asymptotic behaviour of joint distributions are studied of the various generations due to nonextinction of a generation. Existence of a Slack type function, where index $\alpha = 0$, is also demonstrated. Finally, some limit theorems which show certain properties for this particular case are presented.

Keywords: Galton-Watson Process, critical process, probability generating function.

AMSC(2000): Primary: 60G99, Secondary: 60K99

Resumen

En este trabajo se estudian procesos críticos de ramificación de Galton-Watson con un sólo tipo de partícula, para el caso en que los segundos momentos son infinitos. Se estudian las funciones generatrices de probabilidad que tienen la forma tipo Slack [17] con índice $\alpha \in (0, 1]$. Se presentan y demuestran teoremas límites en donde se estudia el comportamiento asintótico de la distribución conjunta de diversas generaciones dada la no extinción de una generación. Se demuestra también la existencia de una función tipo Slack pero en donde el índice $\alpha = 0$. Igualmente se presentan algunos teoremas límites en donde se muestran ciertas propiedades para este caso particular.

Palabras y frases claves: Proceso de Galton-Watson, proceso crítico, función generatriz de probabilidad.

1 Introducción

El desarrollo de este trabajo está basado en las investigaciones realizadas por R. S. Slack [17], [18] en donde estudia el proceso crítico de ramificación de Galton-Watson con un sólo tipo de partícula, y segundos momentos infinitos. Para su estudio, Slack supone que la función generatriz f de probabilidad asociada al proceso es de la forma como se muestra en (4). Los teoremas límites que él presenta y demuestra sólo tienen en cuenta una sola generación.

Uno de los objetivos de este trabajo es generalizar los resultados de Slack que se mencionan en la sección 3.1 (véase las secciones 3.2 y 3.3). El segundo objetivo es demostrar la existencia de una función generatriz de probabilidad de la forma (4) en donde $\alpha = 0$. Esto se hace en la sección 4 y con ello, presentar y demostrar teoremas límites.

También cabe anotar que en la actualidad existen trabajos más recientes que presentan demostraciones detalladas de estos y otros resultados vía arboles aleatorios como, por ejemplo, los de Lyons [14], Kauffmann [10], Kuhlbusch [13] y Geiger [3], [4], [5].

El artículo está dividido en cuatro secciones. La primera de ellas corresponde a la introducción. En la segunda se presentan algunos resultados conocidos e importantes relacionados con el proceso de Galton-Watson con segundos momentos finitos. En la tercera se estudian teoremas límites y propiedades del proceso de Galton-Watson con segundos momentos infinitos, así mismo se comparan estos resultados con los resultados presentados en la primera sección (los resultados de la sección 3.1 están basados en los trabajos de Slack [17], [18] y los de la sección 3.2 y 3.3 son resultados nuevos que generalizan aquéllos de Slack). En la cuarta sección se presenta y demuestra un resultado nuevo: la existencia de la función generatriz de probabilidad, de la forma (17) y a su vez se demuestran algunos teoremas límites para este caso.

2 Generalidades del proceso crítico de Galton-Watson con un tipo de partícula y segundos momentos finitos

En un proceso de Galton-Watson cada partícula tiene una unidad de tiempo de vida y en el momento de su muerte se transforma, independientemente de su procedencia y de la existencia de otras partículas, en un número aleatorio ξ de partículas de acuerdo a una función de probabilidad dada. Las nuevas partículas forman la nueva generación y cada una se transforma con la misma función de probabilidad y con las mismas características de la madre. Sea Z_n el número de partículas en la n-ésima generación, $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, Z_{n+1} es la suma de Z_n variables aleatorias e independientes, cada una distribuida como ξ. Los datos del modelo son funciones de probabilidad $\{p_i : i \in \mathbb{N}_0\}$, $p_i = P(\xi = i)$ y $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. En lo que viene, si no se dice otra cosa, supondremos que el proceso sólo comienza con una partícula, es decir, $Z_0 = 1$, y, además, supondremos que $p_0 + p_1 < 1$ y $p_0 > 0$. Sea

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, \quad 0 \leq s \leq 1 \tag{1}$$

la función generatriz de probabilidad (f.g.p.) de los descendientes de una partícula y $f_n(s)$ la n-ésima iteración de $f(s)$, definida a través de

$$f_0(s) = s, \quad f_{n+1}(s) = f(f_n(s)), \ 0 \leq s \leq 1, \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Entonces, la f.g.p de Z_n es

$$f_n(s) = E\left(s^{Z_n}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z_n = i)\, s^i, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Sea $Q_n(s) := 1 - f_n(s)$, para todo $n \geq 1$. En particular, $Q_1(s) = 1 - f(s)$. Con esto, $Q_n(0)$ es la probabilidad de supervivencia del proceso hasta la n-ésima generación. Suponiendo que $E(\xi) < +\infty$ y $E(\xi^2) < +\infty$, la esperanza

m de los descendientes por transformación y la varianza σ^2 del número formado están dadas por

$$m = E\{\xi\} = f'(1) \quad \text{ y } \quad \sigma^2 = E\left\{\xi^2\right\} - m^2 = f''(1) + m - m^2, \qquad (3)$$

respectivamente, y en donde las derivadas anteriores en el 1 lo son por la izquierda porque $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1))$. Además, f es creciente y convexa, estrictamente convexa salvo que $p_0 + p_1 = 1$, caso que se descarta porque hemos supuesto que $p_0 + p_1 < 1$. La investigación de la f.g.p. $f_n(s)$ se divide en tres casos de acuerdo a $m > 1$, $m < 1$ y $m = 1$ (el caso crítico) que es el caso que se tendrá en cuenta para el desarrollo del trabajo. Es conocido que si $m \leq 1$, entonces $f_n(0) \uparrow 1$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $Q_n(0) \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Además, $Q_n(0) > 0$. Para $[x] = \max\{z \in Z / z \leq x\}$ escribiremos simplemente x, donde sea claro. La función generatriz conjunta correspondiente a Z_{n_1}, $Z_{n_1+n_2}, \ldots, Z_{n_1+n_2+\ldots+n_k}$ es la expresión

$$\begin{aligned} & f_{(n_1,\ldots,n_k)}(s_1,\ldots,s_k) \\ = & \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=0}^{\infty} P\left(Z_{n_1} = j_1, \ldots, Z_{n_1+\cdots+n_k} = j_k\right) s_1^{j_1} \cdots s_k^{j_k}, \end{aligned}$$

con $0 \leq s_i(n) \leq 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Con esto sea $Q_{(n_1,\ldots,n_k)}(s_1, \ldots s_k) = 1 - f_{(n_1,\ldots,n_k)}(s_1, \ldots s_k)$. En general, si $x_1, \ldots, x_k$ son naturales se define

$$f_{(x_1,\ldots,x_k)}(s_1, \ldots s_k) = E\left(s_1^{Z_{[x_1]}} \cdots s_k^{Z_{[x_1+\cdots+x_k]}}\right),$$

la función generatriz de probabilidad conjunta de $(Z_{[x_1]}, \ldots, Z_{[x_1+\cdots+x_k]})$, y

$$Q_{(x_1,\ldots,x_k)}(s_1, \ldots s_k) = 1 - f_{(x_1,\ldots,x_k)}(s_1, \ldots s_k)$$

El siguiente teorema nos muestra el comportamiento asintótico de la probabilidad de supervivencia en un proceso crítico de Galton-Watson con segundos momentos finitos. Para el caso crítico y momentos de tercer orden finitos ya fue probado en un trabajo pionero de Kolmogorov [12] y fue demostrado con momentos de segundo orden finitos por H. Kesten, P. Ney y F. Spitzer [11].

Teorema 2.1 (Goldstein [6]). *Si $m = 1$ y $\sigma^2 < \infty$, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} nQ_n(0) = \frac{2}{\sigma^2}.$$

El siguiente teorema es conocido como teorema de Yaglom ya que él lo demostró inicialmente en el año de 1947 bajo una restricción de terceros momentos.

Teorema 2.2 (Athreya and Ney [2]). *Si* $m = 1$ *y* $\sigma^2 < \infty$, *entonces,* $\left\{\frac{Z_n}{n} \mid Z_n > 0\right\}$ *converge en distribución hacia una variable aleatoria distribuida exponencialmente con parámetro* σ^2.

Generalizaciones de estos resultados para procesos críticos de Galton-Watson con un solo tipo de partículas y segundos momentos finitos pueden encontrarse en Hurtado [8] y LLinás [15].

3 Generalidades del proceso crítico de Galton-Watson con un tipo de partícula y segundos momentos infinitos

En esta sección se tratan las funciones de Slack con índice $\alpha \in (0,1]$. Así mismo, investigamos el comportamiento asintótico de la función generatriz conjunta para este caso y presentamos y demostramos algunos teoremas límites.

3.1 La función de Slack con índice α

En esta sección suponemos que la función generatriz de probabilidad f tiene la forma

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s), \quad 0 \le s \le 1, \tag{4}$$

en donde $\alpha \in (0,1]$ y $L(x)$ es una función de variación lenta[1] para $x \to 0^+$. Si $\sigma^2 < \infty$ y $E(\xi) = m = 1$, entonces,

$$\begin{aligned} f(s) &= f(1) - (1-s) f'(1) + \frac{1}{2}(1-s)^2 f''(\zeta(s)), \quad s < \zeta(s) < 1, \\ &= s + \frac{1}{2}(1-s)^2 f''(\zeta(s)) \end{aligned}$$

porque $f(1) = 1$ y la derivada por la izquierda en el 1 es $f'(1) = m = 1$. Luego f es la forma (4) con $\alpha = 1$ y con $L(x) = \frac{1}{2} f''(\zeta(1-x))$, siendo $x = 1-s$. Además, $L(x) \to \frac{1}{2} f''(1) = \frac{\sigma^2}{2}$ cuando $x \to 0^+$, puesto que en este caso, $1 - x \to 1^-$, así que $\zeta(1-x) \to 1^-$, siendo $f''(1)$ la segunda derivada por la izquierda en 1 de f. Sin embargo, Slack [17] también considera funciones del tipo (4) con $\alpha = 1$ y $\sigma^2 = \infty$. Por ejemplo,

$$f(s) = s + (1-s)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log(1-s)\right).$$

Se analizarán en esta sección algunos teoremas referentes a límites en el proceso de crítico de Galton-watson, teniendo en cuenta que para estos teoremas

[1]Una función L se dice que es una función de variación lenta para $x \to 0^+$ si es real, positiva y medible en$[A, \infty)$ para un $A > 0$ y si, para todo $\lambda > 0$ se cumple que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = 1.$$

se considera la posibilidad de que la varianza sea infinita. La forma de las funciones generatrices de probabilidad estudiadas en este trabajo, requieren del conocimiento y manejo de algunas propiedades de las funciones de variación lenta. Afortunadamente, existen algunos trabajos en los que el lector puede encontrar información al respecto de las funciones de variación lenta tales como Karamata [9] y Seneta [16], en el primero de estos trabajos se da una introducción a este tema y en el segundo se hace un estudio más detallado de esta clase de funciones. Información adicional sobre este tipo de funciones también lo pueden encontrar en la sección 4.1 de Zapata [19]. Un primer resultado importante sobre el comportamiento asintótico de la probabilidad de supervivencia en un proceso crítico de Galton-Watson con segundos momentos infinitos es el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Slack [17, Lema 2]). *Sean f como en (4) y $m = 1$. Entonces,*

$$[Q_n(0)]^{\alpha} L(Q_n(0)) \sim \frac{1}{\alpha n}, \text{ cuando } n \to \infty.$$

En el caso de varianza finita el teorema 2.2 hace afirmaciones acerca de la existencia de una distribución límite. En nuestro caso, se obtiene del siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Slack [17, Teorema 1]). *Sean f como en (4) y $m = 1$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{-uQ_n(0)Z_n} \mid Z_n > 0\right) = 1 - \frac{u}{(1+u^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}},$$

para todo $u > 0$.

Corolario 3.3 (Zapata [19, Corolario 2.0.12]). *Sean f como en (4) y $m = 1$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{Q_n\left(e^{-uQ_n(0)}\right)}{Q_n(0)}\right] = \frac{u}{(1+u^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}},$$

uniformemente para todo $u > 0$.

3.2 Comportamiento asintótico de la función generatriz de probabilidad conjunta con $\alpha \in (0, 1]$

Teorema 3.4. *Sea $0 < d_i < \infty$ tal que $n_i = [d_i n]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Además, sea $0 \le s_i(n) \le 1$ con $\lim_{n\to\infty} \frac{1-s_i(n)}{1-f_n(0)} \le \infty$, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} f_{(n_1,\ldots,n_k)}(s_1(n), \ldots, s_k(n)) = 1$.*

Demostración. Se demuestra por inducción sobre k teniendo en cuenta que $f_n(s) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \ \forall\ s \in [0, 1]$ uniformemente y que, para la función generatriz de cualquier proceso de Galton-Watson se cumple la siguiente propiedad (véase Harris [7, Cap.1, secciones 13.1 y 13.5]):

$$f_{(n_1,n_2,...,n_k)}(s_1, s_2, ..., s_k) = f_{n_1}\left(s_1 f_{(n_2,...,n_k)}(s_2, ..., s_k)\right) \tag{5}$$

para todo k natural. □

Definimos ahora las siguientes expresiones con $x, x_1, x_2, \ldots, x_k > 0$:

$$B_1(x) := \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad B_2(x_1, x_2) := \frac{1}{\left(x_1 + \frac{1}{x_2^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

En general, para $k \geq 3$,

$$B_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) := B_2(x_1, x_2 + B_{k-2}(x_3, x_4, \ldots, x_k)). \tag{6}$$

El siguiente teorema nos muestra el comportamiento asintótico de la función generatriz de probabilidad conjunta en un proceso crítico de Galton-watson con un sólo tipo de partículas y segundos momentos infinitos.

Teorema 3.5. *Sea $m = 1$ y f como en (4). Sean $0 < d_i < \infty, n_i = d_i n$ y $0 \leq s_i := s_i(n) < 1$ tal que*[2]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - s_i}{Q_n(0)} = \pi_i \leq \infty \ , \quad i = 1, 2, ..., k, \tag{7}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{(n_1,n_2,...,n_k)}(s_1, s_2, ..., s_k)}{Q_n(0)} = B_{2k}(d_1, \pi_1, d_2, \pi_2, ..., d_k, \pi_k), \tag{8}$$

con la interpretación $\frac{1}{\infty} = 0$, es decir, si hay un último índice $\tilde{k}$ tal que $\pi_{\tilde{k}} = \infty$, entonces, el límite anterior es igual a $B_{2\tilde{k}-1}\left(d_1, \pi_1, d_2, \pi_2, ..., \pi_{\tilde{k}-1}, d_{\tilde{k}}\right)$.

Demostración. Esta demostración se realizará por inducción sobre k.
Veamos si (8) es cierto para $k = 1$:

$$\frac{Q_{n_1}(s_1)}{Q_n(0)} = \frac{Q_{n_1}\left(e^{-Q_{n_1}(0)u_n}\right)}{Q_{n_1}(0)} \frac{Q_{n_1}(0)}{Q_n(0)}, \tag{9}$$

en donde, $u_n := -\frac{\log(s_1)}{Q_{n_1}(0)} \sim \frac{1-s_1}{Q_{n_1}(0)}$ cuando $n \to \infty$ y por hipótesis $\frac{1-s_1(n)}{Q_n(0)} \to \pi_1$. Por esto, se tiene

$$\frac{1 - s_1}{Q_n(0)} \frac{Q_n(0)}{Q_{nd_1}(0)} \underset{n\to\infty}{\to} \pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}},$$

[2]Si $s_i(n) = 0$ para algún i, entonces $\pi_i = +\infty$.

porque, por el teorema 3.1, $\frac{Q_n(0)}{Q_{nd_1}(0)} \to d_1^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, con la convergencia uniforme del límite en el corolario 3.3 y con (9) tenemos

$$\frac{Q_{n_1}(s_1)}{Q_n(0)} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}}}{\left[1+\left(\pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{d_1^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\pi_1}{\left[1+\pi_1^{\alpha} d_1\right]^{\frac{1}{\alpha}}} = B_2(d_1, \pi_1).$$

Supongamos que (8) se cumple para $k = m$, es decir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)}(s_1, s_2, \ldots, s_m)}{Q_n(0)} = B_{2m}(d_1, \pi_1, d_2, \pi_2, \ldots, d_m, \pi_m).$$

Veamos si (8) se cumple para $k = m+1$. Utilizando la definición de Q_n y teniendo en cuenta (5), tenemos

$$\frac{Q_{(n_1,\ldots,n_{m+1})}(s_1, \ldots, s_{m+1})}{Q_n(0)} = \frac{Q_{n_1}\left(e^{-Q_{n_1}(0)v_n}\right)}{Q_{n_1}(0)} . \frac{Q_{n_1}(0)}{Q_n(0)}, \tag{10}$$

en donde $v_n = -\frac{\log s_1}{Q_{n_1}(0)} - \frac{\log\left(f_{(n_2,\ldots,n_{m+1})}(s_2,\ldots,s_{m+1})\right)}{Q_{n_1}(0)}$. Debido a que

$$-\frac{\log s_1}{Q_{n_1}(0)} \sim \frac{1-s_1}{Q_{n_1}(0)} = \left(\frac{1-s_1}{Q_n(0)}\right)\left(\frac{Q_n(0)}{Q_{n_1}(0)}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}},$$

y a que

$$-\frac{\log\left(f_{(n_2,\ldots,n_{m+1})}(s_2, \ldots, s_{m+1})\right)}{Q_{n_1}(0)} \sim \left(\frac{Q_{(n_2,\ldots,n_{m+1})}(s_2, \ldots, s_{m+1})}{Q_n(0)}\right)\left(\frac{Q_n(0)}{Q_{n_1}(0)}\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\to} B_{2m}(d_2, \pi_2, \ldots, d_{m+1}, \pi_{m+1})\, d_1^{\frac{1}{\alpha}},$$

entonces,

$$v_n \underset{n\to\infty}{\to} \pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}} + B_{2m}(d_2, \pi_2, \ldots, d_{m+1}, \pi_{m+1})\, d_1^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Con esto, (10), por hipótesis de inducción y por la convergencia uniforme de Q_n, tenemos

$$\frac{Q_{(n_1,\ldots,n_{m+1})}(s_1,\ldots,s_m,s_{m+1})}{Q_n(0)} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}} + B_{2m}(d_2,\pi_2,\ldots,d_{m+1},\pi_{m+1}) d_1^{\frac{1}{\alpha}}}{d_1^{\frac{1}{\alpha}}\left[1+\left(\pi_1 d_1^{\frac{1}{\alpha}} + B_{2m}(d_2,\pi_2,\ldots,d_{m+1},\pi_{m+1}) d_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}$$
$$= B_{2m+2}(d_1, \pi_1, d_2, \pi_2, \ldots, d_{m+1}, \pi_{m+1})$$

con lo cual queda demostrado el teorema. □

3.3 Teoremas límites

Basándonos en el teorema anterior analizaremos el siguiente teorema en el cual se estudia el comportamiento asintótico de la distribución conjunta de dos generaciones distintas dada la no extinción de la última generación. Es decir queremos encontrar la distribución límite del proceso $\left\{Q_n(0)\,Z_{[bn]},\ Q_n(0)\,Z_n \mid Z_n > 0,\ b \in (0,1)\right\}$.

Teorema 3.6. *Sean $m = 1$ y f como en (4). Entonces, si $b \in (0,1)$, tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{Q_n(0)Z_{[bn]} < x_1,\ Q_n(0)Z_n < x_2 \mid Z_n > 0\right\} = H_b(x_1, x_2),$$

en donde $x_1, x_2 \geq 0$ y $H_b(x_1,x_2)$ es la distribución de dos variables aleatorias cuya función de densidad tiene transformada de Laplace

$$\frac{\lambda_1 + \left(\frac{1}{1-b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left\{1 + \left[\lambda_1 b^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{b}{1-b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\left[1+(1-b)\lambda_2^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}}{\left\{1 + \left[\lambda_1 b^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\lambda_2 b^{\frac{1}{\alpha}}}{\left[1+(1-b)\lambda_2^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^{\alpha}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{12}$$

En especial si $\alpha = 1$, entonces $H_b(x_1,x_2)$ tiene exactamente las mismas propiedades como en el teorema 2.4.2 en Hurtado [8]: Sean $m = 1$ y $\sigma^2 := 2K < \infty$. Entonces, si $b \in (0,1)$,

$$\left\{\frac{Z_{[bn]}}{Kn}, \frac{Z_n}{Kn} \mid Z_n > 0\right\}$$

converge, cuando $n \to \infty$, a la distribución $H_b(x_1,x_2)$ de la suma de dos variables aleatorias U y V independientes, donde las densidades para estas variables son respectivamente

$$h_U(x,y) = \frac{1}{b(1-b)}\delta(y)\exp\left\{-\frac{1}{b(1-b)}x\right\}, \quad x, y \geq 0$$

y

$$h_V(x,y) = \frac{1}{b(1-b)} J_o\left(\frac{2\sqrt{-1}}{b-1}\sqrt{\frac{2-b}{b}xy}\right)\exp\left\{-\frac{x+y}{b(1-b)}\right\},$$

para $x, y \geq 0$ y donde $\delta(y)$ es la función delta de Dirac y

$$J_m\left(\sqrt{-1}x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,(j+m)!}\left(\frac{\sqrt{-1}x}{2}\right)^{2j+m}, \quad x \in (0,\infty).$$

Demostración. Es claro que la transformada de Laplace de

$$\left(Q_n(0)Z_{[bn]}, Q_n(0)Z_n\right)/Z_n > 0, \quad \text{en } (\lambda_1, \lambda_2)$$

está dada por :

$$\begin{aligned}
L &= L(\lambda_1, \lambda_2, b, n) \\
&= E\left\{\exp\left[-Q_n(0)\, Z_{[bn]}\lambda_1 - Q_n(0)\, Z_n\lambda_2\right] \mid Z_n > 0\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k, Z_n = j \mid Z_n > 0\right)\exp\left(-\lambda_1 Q_n(0)\, k - \lambda_2 Q_n(0)\, j\right) \\
&= \frac{Q_{([nb],[n(1-b)])}\left(\exp\left(-\lambda_1 Q_n(0)\right),\ 0\right)}{Q_n(0)} - \\
&\qquad \frac{Q_{([nb],[n(1-b)])}\left(\exp\left(-\lambda_1 Q_n(0)\right),\ \exp\left(-\lambda_2 Q_n(0)\right)\right)}{Q_n(0)} \qquad (13)
\end{aligned}$$

Por el teorema 3.5 con $s_1 = \exp\left(-\lambda_1 Q_n(0)\right)$, $s_2 = 0$, $n_1 = bn$, $n_2 = n(1-b)$ y los límites

$$\pi_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1-s_1}{Q_n(0)} = \lambda_1, \quad \pi_2 = \infty,$$

el primer cociente de (13) tiende a $B_3(b, \lambda_1, 1-b)$ cuando $n \to \infty$. Nuevamente, por el teorema 3.5 con $s_1 = \exp\left(-\lambda_1 Q_n(0)\right)$, $s_2 = \exp\left(-\lambda_2 Q_n(0)\right)$, $n_1 = bn$, $n_2 = n(1-b)$ y el límite

$$\pi_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1-s_1}{Q_n(0)} = \lambda_1, \quad \pi_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1-s_2}{Q_n(0)} = \lambda_2,$$

el segundo cociente de (13) tiende a $B_4(b, \lambda_1, 1-b, \lambda_2)$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} L(\lambda_1, \lambda_2, b, n) = B_3(b, \lambda_1, 1-b) - B_4(b, \lambda_1, 1-b, \lambda_2).$$

Al tener en cuenta la forma como están definidas $B_4(b, \lambda_1, 1-b, \lambda_2)$ y $B_3(b, \lambda_1, 1-b)$, obtenemos (12). Y utilizando el teorema de continuidad de Laplace, se obtiene lo que se quería demostrar. □

En el siguiente teorema se analiza el comportamiento asintótico de la distribución de un proceso dada la no extinción del otro proceso. En otras palabras, queremos encontrar la distribución límite del proceso

$$\left\{Q_n(0)\, Z_{[bn]} \mid Z_n > 0,\ b \in (0,1)\right\}.$$

Teorema 3.7. *Sea $m = 1$ y f como en (4). Entonces, si $b \in (0,1)$, tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{Q_n(0)\, Z_{[bn]} < x \mid Z_n > 0\right\} = H_b(x),$$

en donde $x \geq 0$ y $H_b(x)$ es la distribución de una variable aleatoria cuya función de densidad tiene como transformada de Laplace

$$\frac{\lambda + \left(\frac{1}{1-b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left\{1 + \left[\lambda b^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{b}{1-b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{\lambda}{\left(1 + \lambda^{\alpha} b\right)^{\frac{1}{\alpha}}}. \qquad (14)$$

Si $\alpha = 1$, entonces $H_b(x)$ tiene exactamente las mismas propiedades como en el teorema 2.4.3 en Hurtado [8]: Sean $m = 1$ y $\sigma^2 := 2K < \infty$. Entonces, si $b \in (0,1)$,

$$\left\{ \frac{Z_{[bn]}}{Kn} \mid Z_n > 0 \right\}$$

converge, cuando $n \to \infty$, a la distribución $H_b(x)$ de la suma de dos variables aleatorias, independientes, exponenciales U y V, con parámetros b y $b(1-b)$.

Demostración. Tenemos por definición que la transformada de Laplace de $Q_n(0)Z_{[bn]} \,/\, Z_n > 0$, en λ es:

$$\begin{aligned} & L(\lambda, b, n) \\ = \; & E\left\{ \exp\left[-\lambda Q_n(0) Z_{[bn]}\right] \mid Z_n > 0 \right\} \\ = \; & \sum_{k=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k \mid Z_n > 0\right) \exp\left(-\lambda Q_n(0) k\right) \\ = \; & \frac{Q_{([bn],[n(1-b)])}\left(\exp\left(-\lambda Q_n(0)\right), 0\right)}{Q_n(0)} - \frac{Q_{[bn]}\left(\exp\left(-\lambda Q_n(0)\right)\right)}{Q_n(0)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta, para el primer término, el teorema 3.5 con $s_1 = \exp(-\lambda Q_n(0))$, $s_2 = 0$, $n_1 = bn$, $n_2 = n(1-b)$ y el límite $\pi_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1-s_1}{Q_n(0)} = \lambda_1$ (análogamente para el segundo término), se obtiene $\lim_{n\to\infty} L(\lambda, b, n) = B_3(b, \lambda, 1-b) - B_2(b, \lambda)$ y considerando las definiciones de $B_3(b, \lambda, 1-b)$ y $B_2(b, \lambda)$ obtenemos (14). Por el teorema de continuidad de transformada de Laplace obtenemos el resultado deseado. □

En el próximo teorema estudiaremos el comportamiento asintótico de dos generaciones, dado que la generación precedente no se extinguió.

Teorema 3.8. *Sean $m = 1$ y f como en (4). Entonces, si $b \in (1, \infty)$, tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ Q_n(0) Z_{[bn]} < x_1,\ Q_n(0) Z_n < x_2 \mid Z_n > 0 \right\} = H_b(x_1, x_2),$$

en donde $x_1, x_2 \geq 0$ y $H_b(x_1, x_2)$ es la distribución conjunta de dos variables aleatorias cuya función de densidad tiene como transformada de Laplace

$$1 - \frac{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\left[1+\lambda_2^{\alpha}(b-1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}}{\left[1 + \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\left[1+\lambda_2^{\alpha}(b-1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{15}$$

Si $\alpha = 1$, entonces $H_b(x_1, x_2)$ tiene exactamente las mismas propiedades como en el teorema 2.4.4 en Hurtado [8]: Sean $m = 1$ y $\sigma^2 := 2K < \infty$.

Entonces, si $b \in (1, \infty)$*,*

$$\left\{ \frac{Z_{[bn]}}{Kn}, \frac{Z_n}{Kn} \mid Z_n > 0 \right\}$$

converge, cuando $n \to \infty$*, a la distribución* $H_b(x_1, x_2)$ *de la suma de dos variables aleatorias independientes U y V, donde las densidades para estas variables son respectivamente*

$$h_U(x, y) = \frac{b}{b-1} \delta(y) \exp\left\{ -\frac{b}{b-1} x \right\}, \; x, y \geq 0$$

y

$$h_V(x, y) = \tfrac{b-1}{b} \delta(y) + \tfrac{1}{b(1-b)} J_o\left(\tfrac{2\sqrt{-1}}{b-1} \sqrt{\tfrac{2-b}{b} xy} \right) \exp\left\{ -\tfrac{b}{b-1} x - \tfrac{1}{b-1} y \right\},$$

para $x, y \geq 0$*, donde* $\delta(y)$ *es la función delta de Dirac y*

$$J_m\left(\sqrt{-1}x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,(j+m)!} \left(\frac{\sqrt{-1}x}{2} \right)^{2j+m}, \quad x \in (0, \infty).$$

Demostración. Sea $a_{kj}(n) := \lambda_1 Q_n(0)\, k + \lambda_2 Q_n(0)\, j$. Teniendo en cuenta la fórmula de iteración (4), la transformada de Laplace de $\left(Q_n(0) Z_{[bn]}, Q_n(0) Z_n\right) / Z_n > 0$, en (λ_1, λ_2) es:

$$\begin{aligned}
& L(\lambda_1, \lambda_2, b, n) \\
= \;& E\left\{ \exp\left[-\lambda_1 Q_n(0) Z_{[bn]} - \lambda_2 Q_n(0) Z_n \right] \mid Z_n > 0 \right\} \\
= \;& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{P\left(Z_{[bn]} = k, Z_n = j, Z_n > 0\right)}{P(Z_n > 0)} \right] \exp(-a_{kj}(n)) \\
= \;& \tfrac{1}{Q_n(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k, Z_n = j\right) \exp(-a_{kj}(n)) \\
& - \tfrac{1}{Q_n(0)} \sum_{k=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k, Z_n = 0\right) \exp(-a_{k0}(n)) \\
= \;& \frac{1}{Q_n(0)} \left[f_{(n,[n(b-1)])}\left(\exp(-\lambda_1 Q_n(0)), \exp(-\lambda_2 Q_n(0)) \right) - f_n(0) \right] \\
= \;& 1 - \frac{Q_{(n,[n(b-1)])}\left(\exp(-\lambda_1 Q_n(0)), \exp(-\lambda_2 Q_n(0)) \right)}{Q_n(0)}.
\end{aligned}$$

Así como en el teorema anterior tenemos en cuenta el teorema 3.5 considerando para este caso $s_1 = \exp(-\lambda_1 Q_n(0))$, $s_2 = \exp(-\lambda_2 Q_n(0))$, $n_1 = n$, $n_2 = n(b-1)$ y $\pi_i = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - s_i}{Q_n(0)} = \lambda_i$, se obtiene $\lim\limits_{n \to \infty} L(\lambda_1, \lambda_2, b, n) = 1 - B_4(1, \lambda_1, b-1, \lambda_2)$, y por la definición de $B_4(1, \lambda_1, b-1, \lambda_2)$ obtenemos (15). Con el teorema de continuidad de transformada de Laplace queda demostrado completamente el teorema. □

En el siguiente teorema se analizará el comportamiento de una generacion dado que la generación anterior a ella no se ha extinguido.

Teorema 3.9. *Sean $m = 1$ y f es como en (4). Entonces, si $b \in (1, \infty)$, tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{Q_n(0) Z_{[bn]} < x \mid Z_n > 0\right\} = H_b(x),$$

en donde $x \geq 0$ y $H_b(x)$ es la distribución de una variable aleatoria U cuya función de densidad tiene como transformada de Laplace

$$1 - \frac{\lambda}{\left[1 + \left(\lambda b^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{16}$$

Si $\alpha = 1$, entonces U tiene exactamente las mismas propiedades como en el teorema 2.4.5 en Hurtado [8]: Sean $m = 1$ y $\sigma^2 := 2K < \infty$. Entonces, si $b \in (1, \infty)$,

$$\left\{\frac{Z_{[bn]}}{Kn} \mid Z_n > 0\right\}$$

converge, cuando $n \to \infty$, a la distribución de la variable aleatoria U que tiene densidad

$$h_U(y) = \frac{b-1}{b}\delta(y) + \left(1 - \frac{b-1}{b}\right)\frac{1}{b}\exp\left\{-\frac{1}{b}y\right\},\ y \geq 0,$$

donde $\delta(y)$ es la función delta de Dirac.

Demostración. Sea $y_n := \exp(-\lambda Q_n(0))$. Entonces, la transformada de Laplace de $Q_n(0)Z_{[bn]} \,/\, Z_n > 0$, en λ es:

$$\begin{aligned}
L(\lambda, b, n) &= E\left\{\exp\left(-\lambda Q_n(0) Z_{[bn]}\right) \mid Z_n > 0\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k \mid Z_n > 0\right) y_n^k \\
&= \frac{1}{P(Z_n > 0)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[P\left(Z_{[bn]} = k\right) - P\left(Z_{[bn]} = k, Z_n = 0\right)\right] y_n^k \\
&= \frac{1}{Q_n(0)} \left\{\sum_{k=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k\right) - \sum_{k=0}^{\infty} P\left(Z_{[bn]} = k, Z_n = 0\right)\right\} y_n^k \\
&= 1 - \frac{Q_{[bn]}(y_n)}{Q_n(0)}.
\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 3.5 con $s = y_n$ y $n_1 = bn$, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} L(\lambda, b, n) = 1 - B_2(b, \lambda)$, y con la definición de $B_2(b, \lambda)$ se recibe (16). Por el teorema de continuidad de transformada de Laplace obtenemos el resultado deseado. □

4 El problema del cero

El resultado que se presenta en el teorema 3.2 fue encontrado por primera vez por R. S. Slack ([17] y [18]). Sin embargo, él observó sólo procesos con funciones generatrices f de la forma (4), para todo $\alpha \in (0,1]$. En estos trabajos, el caso en que $\alpha = 0$ no fue tenido en cuenta. Este caso es el que estudiaremos en esta sección. Como primer paso, primero demostraremos la existencia de una función generatriz de la forma

$$f(s) = s + (1-s)\, L(1-s), \qquad 0 \leq s < 1. \tag{17}$$

Para lograr esto, utilizaremos las siguientes definiciones. Para $0 \leq s \leq 1$, sea

$$f^{(0)}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{(n)}(s), \tag{18}$$

en donde, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(s) := s + \frac{1}{2}(1-s)^{1+\frac{1}{n}}, \quad p_n > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \tag{19}$$

Teorema 4.1. *La función $f^{(0)}$ es una función generatriz de probabilidad y se cumple que*

$$f^{(0)}(s) = s + (1-s)\, L(1-s), \tag{20}$$

en donde $L(x)$ es una función de variación lenta cuando $x \to 0^+$.

Demostración. La prueba se divide en dos partes. Primero, demostraremos que $f^{(n)}$ es una función generatriz de probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$. Con esto, por la forma como está definida, $f^{(0)}$ tambien es una función generatriz de probabilidad por ser combinación convexa de funciones generatrices de probabilidad (ver, por ejemplo, [2], página 4). Ahora, definiendo

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!},$$

donde r es un número real y k es un número entero no negativo, entonces, tenemos la siguiente serie binómica, cuya convergencia se justifica a partir del Teorema de Bernstein (véase Apóstol [1], Sección 9.21):

$$\begin{aligned}
(1-s)^{1+\frac{1}{n}} &= (1+(-s))^{1+\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1+\frac{1}{n}}{k} (-1)^k s^k \\
&= 1 - (1+\frac{1}{n})s + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{1+\frac{1}{n}}{k} (-1)^k s^k.
\end{aligned}$$

Con lo anterior, con $a_i(n) := \frac{\left(2+\frac{1}{n}-i\right)}{i}$ y considerando (19) se cumple entonces:

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(s) &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)s+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\binom{1+\frac{1}{n}}{k}(-1)^k s^k \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)s+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)-i+1}{i}\right)(-1)^k s^k \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)s+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k s^k\left(\prod_{i=1}^{k}a_i(n)\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)s \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k s^k\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\prod_{i=3}^{k}a_i(n)\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)s+ \\
&\quad +\frac{1}{4n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k s^k\left(\prod_{i=3}^{k}a_i(n)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}r_k s^k,
\end{aligned}
$$

en donde $r_0 = \frac{1}{2}$, $r_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, y

$$
r_k = \frac{1}{4n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\prod_{i=3}^{k}\frac{\left(i-2-\frac{1}{n}\right)}{i}\right) > 0, \quad k \geq 2,
$$

(para la definición de r_k se utiliza la convención $\prod_{i=3}^{2} = 1$).

Notamos que los r_k, $k \geq 0$ están unívocamente determinados por la representación de $f^{(n)}(s)$ que aparece anteriormente. Claramente $r_k > 0$ para todo $k \geq 0$ y, por (19),

$$
1 = f^{(n)}(1) = \left.\sum_{k=0}^{\infty}r_k s^k\right|_{s=1} = \sum_{k=0}^{\infty}r_k.
$$

Por consiguiente, $f^{(n)}$ es una función generatriz de probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$. Con lo anterior hemos demostrado la primera parte del teorema. Probemos ahora que $f^{(0)}(s) = s + (1-s)\,L(1-s)$, donde L es una función de variación lenta. Observemos que

$$\begin{aligned} f^{(0)}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n s + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} p_n (1-s)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= s + (1-s)\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} p_n (1-s)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Debemos probar entonces que $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (x)^{\frac{1}{n}}$ es una función de variación lenta cuando $x \to 0^+$. Escojamos cualquier $\lambda > 0$. Sea $g_k(x) := \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}$ para $k \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} W(x) &:= \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sum_{n=1}^{k} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}}{\sum_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{n}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{\left(\sum_{n=1}^{k} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}\right)[g_k(x)]^{-1} + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}\right)[g_k(x)]^{-1}}{\left(\sum_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{n}}\right)[g_k(x)]^{-1} + 1} \\ &=: \frac{A_k(x) + B_k(x)}{C_k(x) + 1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k := k(\varepsilon)$ tal que $1 - \varepsilon < \lambda^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ para todo $n > k$. Teniendo en cuenta la desigualdad anterior, obtenemos

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n (1-\varepsilon) x^{\frac{1}{n}} < \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} < \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n (1+\varepsilon) x^{\frac{1}{n}},$$

de donde se tiene que

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n \lambda^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}}{\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}} < 1 + \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$1 - \varepsilon < B_k(x) < 1 + \varepsilon. \tag{22}$$

Demostraremos ahora que $\lim\limits_{x\to 0^+} C_k(x) = 0$. Ya que $x \in (0,1]$, entonces, $x^{\frac{1}{n}} \to 1$, cuando $n \to \infty$. Ahora, • Para todo $n \leq k$ se cumple $x^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{k}}$. De aquí,

$$\sum_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{k}}.$$

- Para $n \geq k+1$ se tiene que $x^{\frac{1}{k+1}} \leq x^{\frac{1}{n}}$. Por consiguiente,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{k+1}} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}},$$

multiplicando término a término las dos desigualdades obtenemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{n}}\right)\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{k+1}}\right) \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}\right)\left(\sum_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{k}}\right).$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la desigualdad anterior y que $\sum\limits_{n=1}^{k} p_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n \leq 1$, tenemos

$$0 \leq C_k(x) \;\leq\; \frac{\sum\limits_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{n}}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{x^{\frac{1}{k}} \sum\limits_{n=1}^{k} p_n}{x^{\frac{1}{k+1}} \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} p_n} \leq \frac{x^{\frac{1}{k(k+1)}}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} p_n} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Por tanto, $C_k(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Ahora, procederemos a demostrar que $\lim\limits_{x\to 0^+} A_k(x) = 0$. Teniendo en cuenta que $\lambda^{1/n} \leq \max\{1,\lambda\}$ y siguiendo en forma análoga los pasos realizados para $C_k(x)$, tenemos que

$$0 \leq A_k(x) \;\leq\; \max\{1,\lambda\} \frac{\sum\limits_{n=1}^{k} p_n x^{\frac{1}{n}}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} p_n x^{\frac{1}{n}}} \;\leq\; \max\{1,\lambda\} \frac{x^{\frac{1}{k(k+1)}}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} p_n} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Entonces,

$$1-\varepsilon \;\leq\; \lim_{x\to 0^+} \inf W(x) \;\leq\; \lim_{x\to 0^+} \sup W(x) \;\leq\; 1+\varepsilon$$

y como ε es arbitrario obtenemos $\lim\limits_{x\to 0^+} W(x) = 1$. □

El siguiente teorema nos muestra, en cierta forma, el comportamiento de la probabilidad de supervivencia $Q_n(0)$ cuando f tiene la forma (17).

Teorema 4.2. *Sea f como en (17). Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nL(Q_n(0))} = 0.$$

Demostración. Sea $x \in (0,1]$ y $g(x) = x - xL(x)$. Sea $\theta \in (0,1)$, entonces, $0 < \theta x L(x) < xL(x)$ y con ello

$$g(x) = x - xL(x) < x - \theta x L(x) < x.$$

Por consiguiente, por el teorema del valor medio, existe $x - \theta x L(x) \in (g(x), x)$ con $\theta \in (0,1)$ tal que

$$L'(x - \theta x L(x)) = \frac{L(x) - L(g(x))}{x - g(x)}.$$

Por tanto teniendo en cuenta lo anterior

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(g(x))} - \frac{1}{L(x)} &= L'(x - \theta x L(x)) \left(\frac{x - g(x)}{L(g(x))\, L(x)} \right) \\ &= \left(\frac{L'(x - \theta x L(x))}{L(g(x))} \right) x \underset{x\to 0^+}{\to} 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Sea ahora $x_n := Q_n(0)$. Entonces, $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y

$$x_{n+1} = Q_1(f_n(0)) = Q_1(1 - (Q_n(0))) = Q_1(1 - x_n) = g(x_n).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(x_n)} &= \frac{1}{L(x_0)} + \left(\frac{1}{L(x_1)} - \frac{1}{L(x_0)} \right) + \left(\frac{1}{L(x_2)} - \frac{1}{L(x_1)} \right) + ... \\ &\quad + \left(\frac{1}{L(x_n)} - \frac{1}{L(x_{n-1})} \right) \\ &=: q_0 + q_1 + \cdots + q_n, \end{aligned}$$

en donde, por (23), se cumple que

$$q_n = \left(\frac{1}{L(g(x_{n-1}))} - \frac{1}{L(x_{n-1})} \right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$ se cumple que

$$-\varepsilon < q_n < \varepsilon.$$

Por consiguiente, si $n > n_0$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n_0} q_i - \sum_{i=n_0+1}^{n} \varepsilon < \sum_{i=0}^{n_0} q_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} q_i < \sum_{i=0}^{n_0} q_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} \varepsilon,$$

y multiplicando los miembros de las desigualdades por $\frac{1}{n}$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i=0}^{n} q_i = \frac{1}{L(x_n)}$, entonces,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n_0} q_i - \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n} \varepsilon < \frac{1}{n}\frac{1}{L(x_n)} < \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n_0} q_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n} \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left(\frac{1}{n}\frac{1}{L(x_n)}\right) \geq -\varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \sup \left(\frac{1}{n}\frac{1}{L(x_n)}\right) \leq \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\frac{1}{L(x_n)}\right) = 0,$$

y con ello hemos demostrado el teorema. □

Ahora un lema técnico.

Lema 4.3. *Sea f como en (17). Entonces, $nL\left(Q_n\left(0\right)\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$, si y sólo si existe una sucesión $\left(K\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ con $K\left(n\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$ tal que $L\left(Q_n\left(0\right)\right) \geq \frac{K(n)}{n}$.*

Demostración. Inmediata. □

Corolario 4.4. *Sea f como en (17) y $m = 1$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n\left(0\right)}{n\left[f_{n+1}\left(0\right) - f_n\left(0\right)\right]} = 0.$$

Demostración. Por (17), tenemos que

$$f_{n+1}\left(0\right) = f\left(f_n\left(0\right)\right) = f_n\left(0\right) + \left(1 - f_n\left(0\right)\right) L\left(1 - f_n\left(0\right)\right).$$

Esto implica que, $\frac{1-f_n(0)}{n[f_{n+1}(0)-f_n(0)]} = \frac{1}{nL(1-f_n(0))}$ y el resultado se obtiene del teorema 4.2 puesto que $f_n(0) = 1 - Q_n(0)$. □

El siguiente lema será importante como preparación para demostrar el teorema 4.6.

Lema 4.5. *Sea $\lambda > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y f como en (17). Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{\lambda n}(0)}{Q_n(0)} = 0.$$

Obsérvese que, dado $\lambda > 1$, para n suficientemente grande, se tiene que $[\lambda n] \geq n+1$. Por esto, el cociente $\frac{Q_{\lambda n}(0)}{Q_n(0)}$ no es 1 y puede converger a 0.

Demostración. Teniendo en cuenta a (17) con $s = f_j(0)$, obtenemos

$$\frac{Q_{\lambda n}(0)}{Q_n(0)} = \prod_{j=n}^{[\lambda n]-1} \frac{Q_{j+1}(0)}{Q_j(0)} = \prod_{j=n}^{[\lambda n]-1} \left[1 - L(Q_j(0))\right]. \tag{24}$$

Sabemos que (ver Apóstol [1, Teorema 8.55]), para todo $0 < a_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, es válido que

$$\prod_{j=1}^{n} (1-a_j) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \iff \sum_{j=1}^{n} a_j \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Con esto y teniendo en cuenta (24), será suficiente demostrar que

$$\sum_{j=n}^{[\lambda n]-1} L(Q_j(0)) \underset{n\to\infty}{\to} \infty. \tag{25}$$

Por el lema 4.3 y el teorema 4.2 existe una sucesión $(K(j))_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ con $K(j) \underset{j\to\infty}{\to} \infty$ tal que $L(Q_j(0)) \geq K(j)\frac{1}{j}$. Ahora, en el teorema 4.2.4 de Zapata [19] se ha demostrado que para $\lambda > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{[\lambda n]-1} \frac{1}{j} = \log \lambda.$$

Entonces con esto y la desigualdad anterior, tenemos

$$\sum_{j=n}^{[\lambda n]-1} L(Q_j(0)) \geq \left(\inf_{n\leq j\leq[\lambda n]-1} K(j)\right) \sum_{j=n}^{[\lambda n]-1} \frac{1}{j} \underset{n\to\infty}{\to} \infty, \tag{26}$$

y con ello queda demostrado el teorema. □

Si en el teorema 3.2 se toma $\alpha = 0$, entonces, podemos conjeturar que el límite presentado y demostrado en ese teorema es 1. Exactamente el siguiente teorema confirma esto.

Teorema 4.6. *Sea $m = 1$ y f como en (17). Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{-uQ_n(0)Z_n}/Z_n > 0\right) = 1,$$

para todo $u > 0$.

Demostración. Sean $\varphi_n(u) := E\left(e^{-uQ_n(0)Z_n} \mid Z_n > 0\right)$ y $y_n := e^{-uQ_n(0)}$. Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= E(y_n^{Z_n} \mid Z_n > 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(Z_n = k, Z_n > 0)}{P(Z_n > 0)} y_n^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{P(Z_n = k) - P(Z_n = k, Z_n = 0)}{P(Z_n > 0)}\right] y_n^k \\
&= \frac{1}{P(Z_n > 0)} \left\{\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)\, y_n^k - P(Z_n = 0)\right\} \\
&= 1 - \frac{Q_n(y_n)}{Q_n(0)}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

El teorema estará demostrado si podemos probar que para todo $u > 0$

$$\frac{Q_n(y_n)}{Q_n(0)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Ya que $y_n \nearrow 1$ cuando $n \to \infty$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe un $k := k(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_k(0) \leq y_n < f_{k+1}(0) \quad \text{y} \quad k(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty. \qquad (28)$$

Por consiguiente, debido a que la sucesión $(f_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente en s, tenemos que

$$f_{n+k}(0) = f_n(f_k(0)) \leq f_n(y_n) < f_n(f_{k+1}(0)) = f_{n+k+1}(0).$$

O sea

$$Q_{n+k+1}(0) < Q_n(y_n) \leq Q_{n+k}(0),$$

lo que es equivalente a

$$\frac{Q_{n+k+1}(0)}{Q_{n+k}(0)} < \frac{Q_n(y_n)}{Q_{n+k}(0)} \leq 1 \qquad (29)$$

y como para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{Q_n(y_n)}{Q_n(0)} = \frac{Q_n(y_n)}{Q_{n+k}(0)} \frac{Q_{n+k}(0)}{Q_n(0)},$$

por (29) el teorema estará demostrado cuando probemos que

$$\frac{Q_{n+k}(0)}{Q_n(0)} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{30}$$

El límite (30) se puede demostrar así: Por (28),

$$Q_{k+1}(0) < 1 - y_n \leq Q_k(0),$$

y entonces,

$$\frac{Q_k(0)}{Q_n(0)} \sim \frac{1 - y_n}{Q_n(0)}.$$

Y además por la definición de y_n y por L'Hopital se tiene

$$\frac{1 - y_n}{Q_n(0)} = \frac{1 - e^{-u(Q_n(0))}}{Q_n(0)} \underset{n\to\infty}{\to} \left(-e^{-ux}\right)' |_{x=0} = u.$$

Por tanto

$$\frac{Q_k(0)}{Q_n(0)} \underset{n\to\infty}{\to} u, \tag{31}$$

Supongamos ahora que $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{n}{k} < 1$ ó $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{n}{k} > 1$. Entonces, existe una sucesión $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $k(n_l) \geq \delta n_l$ ó $\delta k(n_l) \leq n_l$, respectivamente, para un $\delta > 1$. Sin pérdida de generalidad nos limitaremos a analizar el segundo caso. Escojamos cualquier $\varepsilon > 0$. Por el lema 4.5, tenemos

$$0 \leq \frac{Q_{n_l}(0)}{Q_k(0)} \leq \frac{Q_{\delta k}(0)}{Q_k(0)} < \varepsilon,$$

siempre y cuando n sea suficientemente grande. Pero esto es una contradicción con (31). Por tanto, $\frac{n}{k} \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Por consiguiente,

$$0 \leq \frac{Q_{n+k}(0)}{Q_n(0)} \leq \frac{Q_{\frac{3}{2}n}(0)}{Q_n(0)},$$

para n grande y por el lema 4.5 con $\lambda = \frac{3}{2} > 1$ sigue el resultado deseado. □

Observación 4.7. $\varphi(u) \equiv 1$ *es la transformada de Laplace de una distribución de una variable aleatoria y esta distribución es degenerada en 0. Por tanto, la variable aleatoria es 0 casi seguro.*

Corolario 4.8. *Sea* $m = 1$ *y* f *como en (17). Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} P(Q_n(0) Z_n \leq x / Z_n > 0) = 1,$$

para todo $x > 0$.

Demostración. Sólo debemos aplicar el teorema de continuidad para transformadas de Laplace. □

Referencias

[1] Apostol, T. Análisis Matemático. Reverté. España. (1977).

[2] Athreya K. B. and Ney, P. Branching Processes. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York.(1972).

[3] Geiger, J. Elementary new proofs of classical limit theorems for Galton-Watson processes, J. Appl. Prob., 36, 301-309, (1999).

[4] Geiger, J. A new proof of Yaglom's exponential limit law, (2001) URL. http://verdi.mi.informatik.uni-frankfurt.delag/1/people.

[5] Geiger, J. and Kauffman L. The space of large Galton-Warson trees with possibly infinite variance, URL. http://ismi.math.uni-frankfurt.de-/kauffmann/

[6] Goldstein, M. Critical age-dependent branching processes: Single and multitype, Z. Wahrscheinlichkeistheorie Verw, Gebiete 17,74-88, (1971).

[7] Harris, TH. E. The theory of branching processes. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York.(1963).

[8] Hurtado J. Procesos de Ramificación Galton-Watson. Tesis de maestría. Universidad del Norte. Barranquilla. Atlántico. (2004).

[9] Karamata, J. Sur un Mode de Croissance Reguliere des Functions, Mathematica, Universitatea Cluj, 4, (1930).

[10] Kauffmann, L. Grosse Stammbäume. Tesis doctoral. Universidad de Frankfurt am Main, Alemania. (2003) URL. http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kauffmann/

[11] Kesten, H; Ney, P. and Spitzer, F. The Galton-Watson Process with mean one and finite variance, Teor. Veroyatn. Primen, 11 (4), 513-540 (1966).

[12] Kolmogorov, A. Zur Losung einer biologishen Aufgabe, Izv. NII Mat. Mekh. Tomskogo Un-ta, 2, 1-6 (1938).

[13] Kuhlbusch, D. Galton-Watson-Bäume und ihre Verwendung Zum Beweis Klassischer Grenzwertsätze für Verzweigungsprazesse. Tesis maestrìa. Universidad de Münster, Alemania. (2001). URL. http://www.math.uni-muenster.de/inst/statistik/alsmeyer/Diplomarbeiten/kuhlbusch.pdf

[14] Lyons R. and Perez Y. Probability on trees and Networks, URL. http://www.math.gatech.edu/∼rdlyons/prbtree/book.ps.

[15] Llinas, S. H. Grenzwertsaetze bei kritischen Verzweigunsprozessen. Tesis doctoral. Mainz (Alemania). (2002).

[16] Seneta, E. Regularly Varying Functions. Springer, Berlin. (1976).

[17] Slack, R. S. A branching process with mean one and possibly infinite variance, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9, 139-145. (1968).

[18] Slack, R.S. , Further Notes on a Branching Process with Mean One, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 25, 31-18. (1971).

[19] Zapata, H. Proceso crítico de Galton-Watson con un tipo de partícula y segundos momentos infinitos, Tesis de maestría, Universidad del Norte - Universidad Nacional sede Medellín (2005).

Dirección de los autores: Humberto LLinás, hllinas@uninorte.edu.co, Universidad del Norte — Hugo Zapata, hugozapata1@hotmail.com, Universidad del Magdalena

Escuela Regional
de Matemáticas