UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE HACES Y ESQUEMAS

YAZMIN RIVERA NENE

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
2017

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE HACES Y ESQUEMAS

YAZMIN RIVERA NENE

yazmin.rivera@correounivalle.edu.co

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas.

Director: ÁLVARO GARZÓN ROJAS, PhD.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
2017.

UNIVERSIDAD DEL VALLE.
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS.
2017.

Yazmin Rivera Nene.

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE HACES Y ESQUEMAS.

TEMAS Y PALABRAS CLAVES:
Haces, Esquemas, Esquema Afín, Espectro, Espacio anillado.

A mi familia, amigos y todo aquel que en su momento guió mis pasos.

Agradecimientos.

Doy gracias a Dios por permitirme ser, estar y hacer.
Doy infinitas gracias a mi familia por que ellos con su amor, respeto, firmeza y enseñanzas forjaron la persona que soy ahora (mis errores y contradiciones van a mi cuenta). Porque son mi fuente inspiración, motivación y energía para empreder y culminar mis proyectos, deseando ir por más.

Doy gracias a mis amigos y compañeros, a Luz, Oscar, Carlos, Viviana, Diana, César,..., porque su apoyo y compañía fue invaluable. Porque tengo la dicha del recuerdo de momentos que ante el estrés y la presión una sonrisa a carcajada no se hacía esperar para darme fuerza de continuar.

También agradezco a todos los profesores que han contribuido a mi formación, alimentando mi mente y pensamiento. Por último, doy gracias a mi asesor Álvaro Garzón por su compañía en todo mi proceso académico, por sus consejos y enseñanzas, por su paciencia, dedicación y apoyo en la realización de éste trabajo.

Índice general

Índice general I

Resumen. II

Introducción. IV

A el lector. VI

1. HACES. **1**

2. ESQUEMAS. **23**

3. PROPIEDADES Y MORFISMOS DE ESQUEMAS. **57**

4. HACES DE MÓDULOS. **99**

5. ANEXOS. **130**

5.1. Anillo de Funciones Regulares 130

5.2. Anillos de Valuación Discreta 132

5.3. Pegado de Haces y Esquemas 134

5.3.1. Pegado de Haces 134

5.3.2. Pegado de Esquemas 140

Resumen

A grandes rasgos, la Geometría Algebraica es el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas en el espacio afín o proyectivo; es decir, es el estudio de las variedades algebraicas. De ahí que, el problema principal de la Geometría Algebraica es la clasificación de las variedades. Aquí no pretendemos estudiar dicha clasificación, pero sí buscamos adquirir el lenguaje y las herramientas necesarias como un primer paso para abordar dicho problema.
André Weil y Alexander Grothendieck presentaron dos fundamentaciones de la Geometría Algebraica, con lenguajes absolutamente distintos, tanto que ir de un lado a otro es un procedimiento muy complejo, de ahí que se concibieron como incompatibles. Es de resaltar que aunque ambas fundamentaciones son grandes obras de la matemática, fue Alexander Grothendieck quien encontró la forma más adecuada de conectar la Geometría Algebraica y el Álgebra conmutativa mediante la teoría de *esquemas*, permitiendo así reducir algunos problemas geométricos a problemas del álgebra conmutativa, los cuales pueden ser tratados sin la necesidad de tener mucha familiaridad con la geometría.

En éste trabajo seguimos los lineamientos de la teoría expuesta por Grothendieck. Así que haremos una introducción a la teoría de haces y esquemas exhibiendo algunos de los resultados más relevantes y partiendo del supuesto que se tiene un buen manejo del Álgebra Conmutativa.

A fin de adquirir el lenguaje de la teoría de Grothendieck, iniciamos nuestro estudio con las definiciones de pre-haz y haz, las cuales completamos exhibiendo algunos ejemplos

para tener una mayor claridad de éstos conceptos, posteriormente veremos algunas de las propiedades que satisfacen los haces y morfismos entre ellos.
En el segundo capítulo, ya familiarizados con los haces, abordamos los esquemas afines, los cuales son la base para definir un esquema en general, que también será expuesto en éste capítulo junto con algunos ejemplos, con el fin de aclarar dicho concepto.
En un tercer capítulo estudiaremos algunas de las propiedades que satisfacen los esquemas y los morfismos de esquemas, tales como ser Noetheriano, cuasi-compacto, entre otras.
Finalmente, haremos una breve presentación de haces de módulos, exhibiendo algunos de los resultados análogos a la teoría de esquemas presentada en los capítulos anteriores.

Introducción

Podríamos decir que el origen de la Geometría Algebraica surge a partir de la Geometría Analítica de Descartes y Fermat en el siglo XVII, donde se descubre la posibilidad de estudiar las figuras geométricas directamente a partir de las ecuaciones que las determinan. A partir de ahí, y aprovechando el desarrollo que tuvo el Álgebra, se constituyó la Geometría Algebraica Clásica, que tuvo su apogeo en la escuela italiana de finales del siglo XIX.

La necesidad de formalización y creación de un lenguaje preciso es compartida por matemáticos como Dedekind, Weber, Van der Waerden, Krull, Hilbert, entre otros, pero es quizás la obra de Zariski la que marca la pauta en ésta dirección. Ésta tarea se intensificó con los trabajos de Weil y Serre, quienes gracias a sus estrechas relaciones con otras disciplinas de la Matemática como el Análisis, la Topología, la Teoría de Números y la Geometría Diferencial, lograron dotar a la Geometría Algebraica de una presentación análoga a la de la Geometría Diferencial y la enriquecieron con los métodos cohomológicos y la teoría de haces.
Pero fue Grothendieck, quien dió un impulso sin igual a la Geometría Algebraica, creando un marco común que puede abarcar a la Geometría Algebraica, la Geometría Diferencial, la Teoría de Números, la Teoría de Singularidades y el Álgebra Conmutativa.
Grothendieck propone como objeto básico de estudio la noción de *esquema,* concepto que abarca simultáneamente la noción geométrica de variedad y la noción algebraica de anillo y que marca el nacimiento de la Geometría Algebraica Moderna, de la cual podríamos decir que es el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales en un

$n-$espacio afín o proyectivo. Esto es, el estudio de las variedades algebraicas.

El objetivo principal de la Geometría Algebraica, es el de clasificar las variedades algebraicas salvo isomorfismos. Generalmente la solución a cualquier problema de clasificación en Geometría Algebraica consiste de una parte discreta y una parte continua, así que podríamos reformular el problema y estudiar los invariantes númericos y los invariantes continuos de las variedades algebraicas, los cuales permiten realizar la clasificación de las variedades. Entonces el problema ahora se traslada a saber como definir invariantes en una variedad algebraica.
La principal técnica para definir invariantes numéricos es por medio de la cohomología, y aunque hay varias teorías de cohomología la que es de interés para nuestro propósito, es la cohomología de haces coherentes, esta última introducida por Serre.

En el proceso de fundamentación de la Geometría Algebraica es pertinente establecer el grado de generalidad en el que se desea desarrollar toda la teoría, hacemos referencia a éste hecho, puesto que al definir las variedades afines y proyectivas, estas son pensadas sobre cuerpos algebraicamente cerrados, pero existen razones para permitir cuerpos que no lo sean. La necesidad de trabajar sobre cuerpos arbitrarios fue reconocida por Zariski y Weil; de hecho, una de las principales contribuciones de Weil fue proporcionar un marco sistemático para estudiar variedades sobre cuerpos arbitrarios.

Es en éste momento en que Grothendieck, introduce los esquemas, eje central de éste trabajo, mediante los cuales ha sido posible lograr grandes avances en la Geometría Algebraica. Así, el lenguaje de los esquemas resulta ser pieza clave en el desarrollo de ésta rama de la Matemática. Esto se debe entre otras cosas a que los anillos que aparecen en la definición de *esquema afín,* no estan restringidos a álgebras sobre un cuerpo y además pueden contener elementos nilpotentes.

A el lector

En el presente trabajo buscamos introducir el lenguaje de la Geometría Algebraica que sigue los lineamientos de Alexander Grothendieck. Es importante resaltar que no pretendemos abordar el problema de clasificación de las variedades algebraicas, el cual se logra gracias a la teoría de cohomología que infortunadamente tampoco trataremos en éste trabajo.

Este trabajo es intruductorio e intenta mostrar lo esencial de la teoría de haces y esquemas de la manera más completa y clara posible. Aún así el lector se encontrará con un documento algo extenso y tendrá que asumir parte de contenido vital que sustenta la teoría, dado que sería un trabajo demasiado pretencioso y desbordaría en contenido si fuese el caso de un documento completamente autocontenido.

Para una buena compresión de éste trabajo se espera que el lector tenga un buen dominio del álgebra abstracta elemental, de la teoría de módulos y del álgebra conmutativa. Además debe conocer el lenguaje y los resultados más relevantes para *variedades afines* y *variedades proyectivas,* los cuales se pueden encontrar en el capítulo I de [**?**] o en el documento de Tesis [**?**], entre otras.

Capítulo 1

HACES.

En ésta sección introducimos la noción de haz. El estudio de haces juega un papel fundamental en la definición, y por lo tanto en la comprención, del concepto de *Esquema,* tema central de éste trabajo. Exhibiremos algunas propiedades básicas y ejemplos de haces los cuales, pretendemos, ayuden a entender y familiarizar al lector con éstos conceptos. Cabe aclarar que la teoría de haces es extensa, razón por la cual no pretendemos abordarla completamente. Iniciamos con una definición un poco más general, la cual nos irá aproximando al concepto concreto de haz.

Definición 1.0.1. *Sea X un espacio topológico. Diremos que $\mathcal{F}$ es un pre-haz sobre X si se satisfacen las siguientes condiciones:*

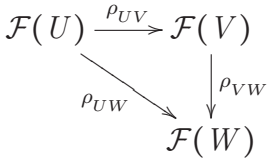
a) A cada subconjunto abierto $U \subseteq X$, le corresponde un grupo abeliano denotado por $\mathcal{F}(U)$.

b) Si $V \subseteq U$ son subconjuntos abiertos de X, existe un homomorfismo de grupos abelianos

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

el cual satisface las siguientes tres propiedades:
1. $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$, siendo $\varnothing$ el conjunto vacío.
2. ρ_{UU} es la aplicación identidad, $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$.

3. Si $W \subseteq V \subseteq U$ son subconjuntos abiertos de X entonces $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta.



Observación 1.0.1. Debe notarse que en la definición de pre-haz, hemos exigido que los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ sean grupos abelianos razón por la cual diremos en éste caso, que el pre-haz $\mathcal{F}$ definido sobre el espacio topológico X, es un pre-haz de grupos abelianos. De forma análoga podemos definir un pre-haz de anillos, módulos, etc. teniendo en cuenta la exigencia de estructura de los grupos $\mathcal{F}(U)$ y los morfismos ρ_{UW}. No obstante, a menos que se indique lo contrario, siempre supondremos que todo pre-haz es de grupos abelianos. Antes de continuar es necesario precisar algo de terminología y notación.

Notación 1.0.1. *Sea $\mathcal{F}$ un pre-haz sobre X.*

- *Al grupo $\mathcal{F}(U)$ lo llamaremos "el conjunto de secciones del pre-haz $\mathcal{F}$, sobre el subconjunto abierto $U \subseteq X$". Una notación opcional para dicho conjunto es $\Gamma(U, \mathcal{F})$.*
- *El morfismo $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$, lo denominaremos "la función restricción de U a V" o simplemente "La restricción de U a V". Usualmente si $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces denotaremos por $s|_V$ (s restringida a V), a la imagen de la sección s bajo el morfismo de restricción ρ_{UV}; ésto es, $s|_V := \rho_{UV}(s)$.*

Observe que aun cuando $\mathcal{F}(U)$ es un grupo abeliano y a sus elementos los llamamos secciones, no es claro qué es propiamente o cómo se comporta una sección. Infortunadamente no es posible dar una respuesta en un contexto general. Aun así, posteriormente mediante ejemplos veremos algunos casos particulares en los cuales podremos determinar qué son éstos elementos, claro está que dependerá de la naturaleza intrínseca de $\mathcal{F}(U)$. Por ahora observemos que dado que X es un espacio topológico y las secciones están definidas sobre subconjuntos abiertos de X, desearíamos que nuestra definición fuera compatible con las

intersecciones de dichos subconjuntos de X, ésto es, nos preguntamos, ¿si U y V son subconjuntos abiertos de X tales que $U \cap V \neq \varnothing$ y $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, ¿qué sucede con $s|_{U\cap V}$ y $t|_{U\cap V}$?. La siguiente definición introduce un par de condiciones adicionales las cuales nos permiten llegar a la noción de haz.

Definición 1.0.2. *Sean $\mathcal{F}$ un pre-haz sobre un espacio topológico X, U un subconjunto abierto de X y $\{V_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. $\mathcal{F}$ es un haz si satisface las siguientes dos condiciones adicionales:*

4) Si $s \in \mathcal{F}(U)$ es tal que $s|_{V_i} = \rho_{UV_i}(s) = 0$ para todo i, entonces $s = 0$.

5) Si existen elementos $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ para cada i, tales que $s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ para cada i, j, entonces existe un elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada i.

Ejemplo 1.0.1.

1. Sea k un cuerpo y X una variedad sobre k. Definimos sobre X el *haz estructural* $\mathcal{O}_X$ de la siguiente manera.

   1) A cada subconjunto abierto $U \subseteq X$, le corresponde *el anillo de las funciones regulares* de U en k, el cual denotaremos por $\mathcal{O}_X(U)$[1].

   2) Para todo par de subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ de X, la aplicación inclusión $i : V \longrightarrow U$ induce un homomorfismo de anillos

   $$\begin{array}{rcl} i^* : \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V). \\ s & \longmapsto & s|_V \end{array}$$

   3) Sean $U \subseteq X$ un subconjunto abierto, $\bigcup_{i\in I} V_i = U$ una cubierta abierta de U y $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $f|_{V_i} = 0$ para todo i, entonces $f|_{\bigcup_{i\in I} V_i} = 0$, ésto es, $f = 0$ en U.

   4) Finalmente supongamos que para cada $i, j \in I$ tales que $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, existen $f_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ y $f_j \in \mathcal{O}_X(V_j)$ con $f_i|_{V_i\cap V_j} = f_j|_{V_i\cap V_j}$. La función $f : U \longrightarrow k$ definida por $f(p) := f_i(p)$ si $p \in V_i$, es una función regular que satisface $f|_{V_i} = f_i$.

[1] Más adelante, en el anexo 5.1 ampliaremos un poco sobre el anillo $\mathcal{O}_X(U)$.

Observe que en éste caso el conjunto de secciones $\mathcal{O}_X(U)$ de U, están perfectamente determinadas para cualquier subconjunto abierto U, ya que son precisamente funciones regulares. En adelante, mientras no haya lugar a confusión, denotaremos por $\mathcal{O}$ al haz estructural $\mathcal{O}_X$.

2. Sean X un espacio topológico y A un grupo abeliano. Definimos el haz constante A_X sobre X, determinado por A como sigue. Dotamos al grupo abeliano A con la topología discreta y asociamos a cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ el grupo de funciones,

$$A_X(U) \coloneqq \{f : U \longrightarrow A| \ \ f \text{ continua } \}.$$

Considerando la restricción como la restricción usual de funciones obtenemos que A_X es un haz. En efecto, si U es un subconjunto abierto de X, $\{V_i\}$ es una cubierta abierta de U y $f \in A_X(U)$ es tal que $f\,|_{V_i} = 0$ para cada i se sigue, por argumentos de continuidad, que $f \equiv 0$. De otro lado, y nuevamente en virtud de la continuidad de los elementos de $A_X(U)$, la existencia de subconjuntos abiertos V_i, V_j con $i, j \in I$ de X con $V_i \cap V_j \neq \varnothing$ y funciones f_i, f_j tales que $f_i\,|_{V_i\cap V_j} = f_j\,|_{V_i\cap V_j}$ implica la existencia de una función continua $f : U \longrightarrow A$ tal que $f\,|_{V_i} = f_i$. Tal función está definida a trozos a partir de las funciones f_i y su buena definición es consecuencia de la condición $f_i\,|_{V_i\cap V_j} = f_j\,|_{V_i\cap V_j}$ que se satisface.

Ahora nos proponemos justificar porqué el nombre de haz constante. Supongamos que U es un conjunto abierto conexo, $f \in A_X(U)$ y que $f(U) = \{a, b\}$ por ejemplo. Puesto que $\{a\}$ y $\{b\}$ son subconjuntos abiertos de A, entonces $U = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$, ésto contradice la conexidad de U, en consecuencia f es constante y por lo tanto $A_X(U) \cong A$.

3. Sea X un espacio topológico y W un subconjunto abierto de X. Denotemos por $\mathcal{C}^0(W)$ al conjunto de las funciones continuas $f : W \longrightarrow \quad$ y para cada par de subconjuntos abiertos $V \subseteq W$ de X definimos $\rho_{WV}(f) \coloneqq f\,|_V$, la aplicación restricción usual. Es fácil comprobar que $\mathcal{C}$ es un haz sobre X que llamaremos *el haz de las funciones continuas de valor real.*

4. **No todo pre-haz es un haz.** Sean X un espacio topológico y G un grupo abeliano no trivial. A cada subconjunto abierto U de X le asignamos el grupo $G_X(U)$ el cual definimos como,

$$G_X(U) \coloneqq \{f : U \longrightarrow G | \quad f \quad \text{constante } \}.$$

Considerando los morfismos restricción ρ_{UV} como la restricción usual de funciones se sigue que G_X es un pre-haz. Sin embargo, observe que si $f_1 \in G_X(U)$ y $f_2 \in G_X(V)$ con U, V subconjuntos abiertos disjuntos de X y $f_1 \neq f_2$, entonces no es posible que exista una sección $f \in G_X(U \cup V)$ tal que $f\,|_U = f_1$ y $f\,|_V = f_2$, pues de ser así, tendríamos que $f_1 = f_2$, por ser funciones constantes, contradiciendo con ello nuestro supuesto. Así pues, G_X a pesar de ser un pre-haz, no es un haz.

De acuerdo con nuestro último ejemplo es natural el preguntarse si existe alguna forma de construir un haz a partir de un pre-haz dado, por fortuna la respuesta es sí. Con el fin de iniciar dicha construcción, es necesario introducir el concepto de *tallo*. Antes, recordemos que dado un sistema inductivo $\{G_i, \phi_{ij}\}_{i\in I}$, conformado por una familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ y morfismos $\phi_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$ que satisfacen, $\phi_{ii} = id$ y $\phi_{kj} \circ \phi_{ik} = \phi_{ij}$, se define el límite directo del sistema como,

$$\varinjlim_{i\in I} G_i = \coprod_{i\in I} G_i / \sim,$$

donde dos elementos $g_i \in G_i$ y $g_j \in G_j$ están relacionados ($g_i \sim g_j$) si existe $k \in I$ tal que $\phi_{ik}(g_i) = \phi_{jk}(g_j)$. Así que el conjunto de vecindades de p forman un sistema tal que $\{\mathcal{F}(U), \rho_{UV}\}$ es inductivo.

Definición 1.0.3. *Si $\mathcal{F}$ es un pre-haz sobre X y p es un punto de X definimos el tallo $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ en p como,*

$$\mathcal{F}_p \coloneqq \varinjlim_{p\in U} \mathcal{F}(U).$$

donde U recorre el conjunto de vecindades del punto p.

Observe que en éste caso $s \sim t$, con $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, si existe un subconjunto abierto $W \subset U \cap V$ que contenga a p tal que $\rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t)$, lo cual podemos reescribir como $s|_W = t|_W$. De manera que, formalmente, los elementos de un tallo son clases de equivalencia $\overline{\langle U, f\rangle}$ con $U \subseteq X$ una vecindad de p y $f \in \mathcal{F}(U)$. Observe que dos pares $\langle U, s\rangle$ y

$\langle V, t\rangle$ representan el mismo elemento de $\mathcal{F}_p$ si y sólo si existe una vecindad W de p, con $W \subseteq U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$; además si $V \subseteq U$ es un subconjunto abierto, $\langle V, s|_V\rangle$ y $\langle U, s\rangle$ representan el mismo elemento en el tallo.

A los elementos del tallo $\mathcal{F}_p$ los llamaremos *gérmenes de las secciones de $\mathcal{F}$ en el punto p.* De otro lado, observe que, dada una sección $s \in \mathcal{F}(U)$, ésta induce un elemento $s_p = \overline{\langle U, s\rangle} \in \mathcal{F}_p$ para todo punto $p \in U$. En éste caso diremos que s_p es el gérmen de s. En aras de simplificar la notación, denotaremos las clases de equivalencia $\overline{\langle U, f\rangle}$ sin la barra superior, ésto es, escribiremos $s_p = \langle U, s\rangle$ para denotar un elemento de $\mathcal{F}_p$ representado por la pareja $\langle U, s\rangle$.

Observación 1.0.2. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pre-haces sobre X. Las igualdades $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ y $\mathcal{F}_p = \mathcal{G}_p$ para todo $p \in X$, son equivalentes. En efecto, notemos que es completamente loable el hecho de que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ implique la igualdad en los tallos para todo punto de X, así que sólo haremos énfasis en que la igualdad en los tallos implica la igualdad de los pre-haces.
Sea $\mathcal{F}_p = \mathcal{G}_p$ para todo $p \in X$. Consideremos $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathcal{F}_p$ y $t_p = \langle V, t\rangle \in \mathcal{G}_p$ tales que $s_p = t_p$. Por definición existe una vecindad $W \subseteq U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$, ésto es $s = t$ como elementos de $\mathcal{F}(W)$ y $\mathcal{G}(W)$ respectivamente. Por lo tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Ejemplo 1.0.2. Si $\mathcal{O}_X$ es el haz estructural definido sobre la k-variedad algebraica X y $p \in X$ es un punto, entonces el tallo de $\mathcal{O}_X$ en un punto p, es por definición, el anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$ de las funciones regulares en p.

A continuación veremos cuándo entre dos pre-haces sobre un mismo espacio topológico podemos establecer un morfismo. También serán mostradas algunas propiedades y ejemplos de pre-haces, relacionados con los morfismos a definir.

Definición 1.0.4. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ pre-haces definidos sobre un espacio topológico X. Decimos que $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de pre-haces si para cada subconjunto abierto $U \subset X$ existe un morfismo de grupos abelianos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ compatible con las aplicaciones restricción; ésto es, si $V \subseteq U$ entonces el siguiente diagrama es conmutativo,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{UV}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho'_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[\varphi(V)]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

siendo ρ_{UV} y ρ'_{UV} las aplicaciones restricción en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente.

En el caso en que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sean haces sobre X la definición de morfismo de haces es análoga. Más aún, definimos isomorfismo de pre-haces (respectivamente de haces) como un morfismo que tiene inversa a ambos lados. Esto es, si $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo entonces existe $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$ y $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{G}}$.

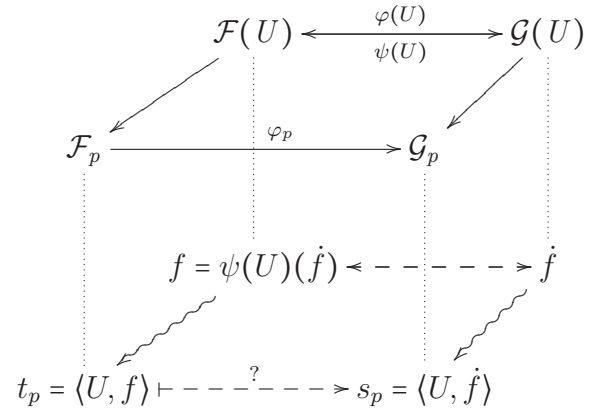
Observación 1.0.3. Debe notarse que si $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de pre-haces sobre X y p es un punto cualquiera de X, entonces φ induce un morfismo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$, dado por $\varphi_p(s_p) = (\varphi(U)(s))_p$. Brevemente explicamos cómo funciona ésta aplicación. Dada una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ con $U \subseteq X$ una vecindad abierta de p, la aplicación φ_p, envía el elemento $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathcal{F}_p$ al elemento $(\varphi(U)(s))_p = \langle U, \varphi(U)(s)\rangle \in \mathcal{G}_p$. Verifiquemos que está bien definida. Sean U, V, vecindades de un punto $p \in X$ y $s \in \mathcal{F}(U)$ y $r \in \mathcal{F}(V)$ tales que $s_p = r_p$. Queremos probar que $\varphi_p(s_p) = \varphi_p(r_p)$. En efecto, existe una vecindad abierta de p, digamos $W \subseteq U \cap V$, tal que $s|_W = r|_W$. Luego $(\varphi(U)(s))|_W = \varphi(W)(s|_W) = \varphi(W)(r|_W) = (\varphi(V)(r))|_W$ (por ser φ un morfismo) y en consecuencia $(\varphi(U)(s))_p = (\varphi(V)(r))_p$. □

Proposición 1.0.1. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. Entonces φ es un isomorfismo si y sólo si la aplicación inducida sobre los tallos $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo para cada $p \in X$.*

Demostración. Supongamos que $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$ y consideremos $s_p = \langle U, f\rangle \in \mathcal{F}_p$ tal que $\varphi_p(s_p) = 0_p$. Nuestro propósito es probar que $s_p = 0_p$, ésto es, queremos probar que existe una vecindad $W \subseteq U$ de p tal que $f|_W = 0_{\mathcal{F}(U)}|_W$. Puesto que la igualdad $\varphi_p(s_p) = 0_p$ significa que $\langle U, \varphi(U)(f)\rangle \sim \langle U, 0_{\mathcal{G}(U)}\rangle$, entonces existe una vecindad abierta $V_p \subseteq U$ de p, tal que $(\varphi(U)(f))|_{V_p} = 0_{\mathcal{G}(V_p)}$ (aquí usamos $0_{\mathcal{G}(U)}|_{V_p} = 0_{\mathcal{G}(V_p)}$) y en consecuencia

$$0_{\mathcal{F}(V_p)} = \psi(V_p)(0_{\mathcal{G}(V_p)}) = \psi(V_p)((\varphi(U)(f))|_{V_p}) = \psi(V_p)((\varphi(V_p)(f|_{V_p})) = f|_{V_p}.$$

Para verificar que φ_p es un epimorfismo, sean $s_p = \langle U, \dot{f}\rangle \in \mathcal{G}_p$, $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f = \psi(U)(\dot{f})$ y t_p el gérmen inducido por f. El siguiente diagrama ilustra lo mencionado anteriormente.



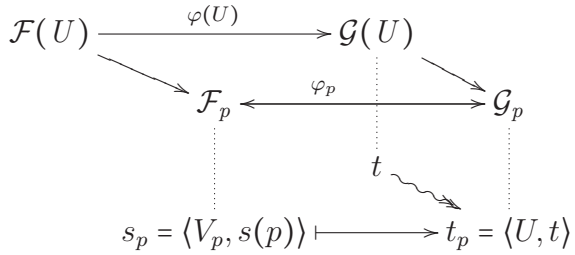
Afirmamos que $t_p = \langle U, f\rangle \in \mathcal{F}_p$ es una preimagen de s_p vía φ_p. En efecto

$$\varphi_p(t_p) = (\varphi(U)(f))_p = (\varphi(U)(\psi(U)(\dot{f})))_p = (\dot{f})_p = \langle U, \dot{f}\rangle = s_p.$$

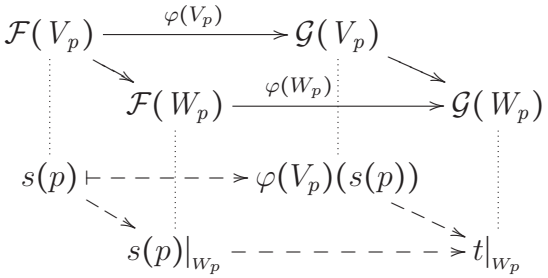
De otro lado, supongamos que φ_p es un isomorfismo para todo $p \in X$. A fin de mostrar que φ es un isomorfismo, mostraremos que $\varphi(U)$ es un isomorfismo para todo subconjunto abierto $U \subseteq X$, lo cual permitirá definir el morfismo inverso ψ de φ como $\psi(U) = \varphi(U)^{-1}$ para cada $U \subseteq X$. Inicialmente veamos que $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es un monomorfismo para todo $U \subseteq X$. Para ello, sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi(U)(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$. La estrategia que usaremos será probar que para cada punto $p \in U$ existe una vecindad $V_p \subseteq U$ de p tal que $s|_{V_p} = 0_{\mathcal{F}(U)}|_{V_p}$, puesto que $\bigcup_{p\in U} V_p = U$, entonces la propiedad 4 en 1.0.2 garantizará que $s = 0$.

La igualdad $\varphi(U)(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$ implica que para todo $p \in U$ y toda vecindad $W_p \subseteq U$ de p se verifica que $\varphi(U)(s)|_{W_p} = 0_{\mathcal{G}(U)}|_{W_p}$, así que $(\varphi(U)(s))_p = 0_p$ (ésta igualdad es en $\mathcal{G}_p$ y para todo $p \in U$). De otro lado, $(\varphi(U)(s))_p$ no es otra cosa que $\varphi_p(s_p)$. Entonces dada la inyectividad de φ_p, obtenemos que $s_p = 0_p$ (ésta igualdad es en $\mathcal{F}_p$), lo cual equivale a la existencia de una vecindad $V_p \subseteq U$ de p tal que $s|_{V_p} = 0_{\mathcal{F}(U)|_{V_p}}$ y como la familia $\{V_p\}_{p\in U}$ forma un cubrimiento de U concluimos que $s = 0$.
Resta mostrar que $\varphi(U)$ es un epimorfismo. Para ello, dada una sección $t \in \mathcal{G}(U)$ sean

$p \in U$ y $t_p = \langle U, t\rangle \in \mathcal{G}_p$ el germen de t en $\mathcal{G}_p$, puesto que φ_p es un epimorfismo, existe un germen preimagen $s_p = \langle V_p, s(p)\rangle \in \mathcal{F}_p$ de t_p, con V_p un subconjunto abierto de U. La situación anterior está representada en el siguiente diagrama.



Ahora puesto que φ_p es un isomorfismo, entonces $\langle U, t\rangle \sim \langle V_p, \varphi(V_p)(s(p))\rangle$. Luego se sigue que $\varphi(V_p)(s(p))$ y $t|_{V_p}$, elementos de $\mathcal{G}(V_p)$, tienen el mismo germen t_p en $\mathcal{G}_p$. De aquí que existe una vecindad abierta $W_p \subset V_p$ de p tal que $t|_{W_p} = \varphi(V_p)(s(p))|_{W_p} = \varphi(W_p)(s(p)|_{W_p})$.



Ahora consideremos dos puntos cualesquiera $p, q \in U$. En virtud de lo expuesto anteriormente, existen $s(p)|_{W_p} \in \mathcal{F}(W_p)$ y $s(q)|_{W_q} \in \mathcal{F}(W_q)$, tales que

$$\varphi(W_p \cap W_q)(s(p)|_{W_p \cap W_q}) = t|_{W_p \cap W_q} = \varphi(W_p \cap W_q)(s(q)|_{W_p \cap W_q})$$

y puesto que $\varphi(W_p \cap W_q)$ es un monomorfismo, entonces necesariamente tenemos la igualdad $s(p)|_{W_p \cap W_q} = s(q)|_{W_p \cap W_q}$. De otro lado, puesto que $\{W_p\}_{p \in U}$ es una cubierta abierta de U y $\mathcal{F}$ es un haz, existe una sección $\widetilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\widetilde{s}|_{W_p} = s(p)|_{W_P}$; más aún, dicha sección satisface que $\varphi(U)(\widetilde{s}) = t$. En efecto $\varphi(U)(\widetilde{s})$ y t son secciones de $\mathcal{G}(U)$ que satisfacen $\varphi(U)(\widetilde{s})|_{W_p} = t|_{W_p}$. Luego la propiedad 4 de 1.0.2 aplicada a $\varphi(U)(\widetilde{s}) - t$ nos lleva a que $\varphi(U)(\widetilde{s}) = t$ □

Observe que en general si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, entonces asociados a dicho homomorfismo tenemos los subgrupos $\ker(\varphi) \leq \mathrm{G}$, $\mathrm{im}(\varphi) \leq \mathrm{H}$ y el grupo cociente $\mathrm{coker}(\varphi) = \mathrm{H}/\mathrm{im}(\varphi)$. Ahora, como hemos visto, la existencia de un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X equivale a la existencia de homomorfismos de grupos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ para todo subconjunto abierto $U \subseteq X$. Luego es natural preguntarnos si las asignaciones,

$$\begin{aligned} U &\longmapsto \ker(\varphi(\mathrm{U})) \\ U &\longmapsto \mathrm{im}\varphi(\mathrm{U})) \\ U &\longmapsto \mathcal{G}(U)/\mathrm{im}(\varphi(\mathrm{U})), \end{aligned}$$

definen pre-haces sobre X. Los siguientes resultados nos dan una respuesta precisa a éstos interrogantes.

Proposición 1.0.2. *Si $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, entonces la asignación*

$$U \longmapsto (\ker\varphi)(U) := \ker(\varphi(\mathrm{U})) = \{\mathrm{s} \in \mathcal{F}(U) |\ \varphi(U)(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}\}$$

define un haz sobre X.

Demostración. Primero que todo vamos a probar que $\ker\varphi$ es un pre-haz, para ello debemos probar que las aplicaciones restricción están bien definidas; ésto es, si U y V son subconjuntos abiertos de X tales que $V \subset U$, entonces $(\ker\varphi(\mathrm{U}))|_{\mathrm{V}} \subseteq \ker\varphi(\mathrm{V})$. Lo anterior equivale a probar que si $s \in (\ker\varphi)(\mathrm{U})$ entonces $\varphi(V)(s|_V) = 0_{\mathcal{G}(V)}$. Puesto que φ es un morfismo de haces, entonces $\varphi(V)(s|_V) = (\varphi(U)(s))|_V$ para toda sección $s \in \mathcal{F}(U)$. Luego si $(\varphi(U)(s)) = 0_{\mathcal{G}(\mathrm{U})}$, claramente

$$0_{\mathcal{G}(V)} = 0_{\mathcal{G}(U)}|_V = (\varphi(U)(s))|_V = \varphi(V)(s|_V).$$

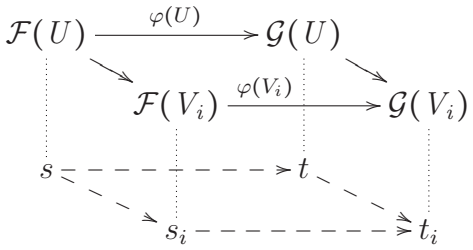
Entonces podemos definir la aplicación restricción como,

$$\begin{aligned} \ker\varphi(\mathrm{U}) &\xrightarrow{\rho_{UV}} \ker\varphi(\mathrm{V}) \\ s &\longmapsto s|_V. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que $\ker\varphi$ es un haz. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y supongamos que,

1. $s \in \ker\varphi(\mathrm{U})$ satisface que $\rho_{UV_i}(s) = s|_{V_i} = 0_{\mathcal{G}(V_i)}$ para todo $i \in I$. Puesto que $\ker\varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}$ es un haz, se sigue que $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$.

2. $V_{ij} = V_i \cap V_j \neq \varnothing$ y $s_j|_{V_{ij}} = s_i|_{V_{ij}}$ para todo $s_i \in \ker\varphi(\mathrm{V_i})$ con $i \in I$, afirmamos que existe $s \in \ker\varphi(\mathrm{U})$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para todo $i \in I$. En efecto, dado que $s_i \in \ker\varphi(\mathrm{V_i})$ implica que $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, entonces al ser $\mathcal{F}$ un haz y $s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Resta verificar que $s \in \ker\varphi(\mathrm{U})$, así que consideremos $t = \varphi(U)(s)$ y $t_i = t|_{V_i}$, como lo indica el siguiente diagrama.



   Como el diagrama conmuta y $s_i \in \ker\varphi(\mathrm{V_i})$, se sigue que

$$t_i = \varphi(V_i)(s|_{V_i}) = \varphi(V_i)(s_i) = 0_{\mathcal{G}(V_i)},$$

   para todo $i \in I$. Así que $t = 0_{\mathcal{G}(U)}$ a causa de ser $\mathcal{G}$ un haz. Finalmente, como $\varphi(U)(s) = t$ concluimos que $s \in \ker\varphi(\mathrm{U})$.

Por lo tanto, $\ker\varphi$ es un haz. □

Definición 1.0.5. *El haz* $\ker\varphi$ *definido en la Proposición 1.0.2, lo llamaremos el haz núcleo de* φ.

De acuerdo con los resultados anteriores, es natural el preguntarse si podemos definir el pre-haz imagen de φ y el pre-haz conúcleo de φ, y en tal caso cabe además el preguntarse si tales pre-haces son o no haces. A continuación abordaremos éstas incógnitas.

Proposición 1.0.3. *Si* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *es un morfismo de haces sobre* X*, entonces la asignación*

$$U \longmapsto \mathcal{I}(U) := \mathrm{im}(\varphi(\mathrm{U})) = \{\varphi(\mathrm{U})(\mathrm{s}) \in \mathcal{G}(U) \quad \textit{tal que} \quad s \in \mathcal{F}(U)\};$$

con $U \subset X$*, define un pre-haz sobre* X*, más no necesariamente un haz.*

Demostración. Procedemos probando que imφ es un pre-haz. Para ello verificamos que $\mathcal{I}(U)|_V \subseteq \mathcal{I}(V)$, lo cual garantiza la buena definición de las aplicaciones restricción. Luego evidenciamos la condición (4) de la definición 1.0.2 y finalmente vemos que no es posible garantizar, de forma general, la condición (5) de la definición mencionada.
Notemos que para todo $t \in \mathcal{I}(U)$ existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t = \varphi(U)(s)$. Así que, si $V \subset U$ es un subconjunto abierto, $t\,|_V = (\varphi(U)(s))|_V = \varphi(V)(s|_V) \in \mathcal{I}(V)$. Entonces la restricción para imφ queda completamente determinada por la restricción de la aplicación $\rho_{UV} : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(V)$ a $\mathcal{I}(U)$, ésto es,

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{I}(U) &\longrightarrow \mathcal{I}(V) \\ t &\longmapsto t\,|_V \,. \end{aligned}$$

En consecuencia, imφ es un pre-haz.
Ahora, recordemos que para ser imφ un haz es necesario que se verifiquen dos condiciones adicionales. La primera es la condición (4) dada en la definición 1.0.2, que se cumple como consecuencia inmediata de ser $\mathcal{G}$ un haz e $\mathcal{I}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$ para cualquier subconjunto abierto $U \subset X$. De otro lado, la condición (5) dada en 1.0.2 no se satisface. En efecto, si $\{V_j\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U y $t_i \in \mathcal{I}(V_i)$ son tales que $t_i|_{V_{ij}} = t_j|_{V_{ij}}$, siendo $V_{ij} = V_i \cap V_j \neq \varnothing$, entonces existe $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t|_{V_i} = t_i$, a causa de la contenencia $I(W) \subseteq \mathcal{G}(W)$ y ser $\mathcal{G}$ un haz. Pero no es posible garantizar de forma general que dicha sección pertenece a $\mathcal{I}(U)$, eliminando así la posibilidad de ser imφ un haz. □

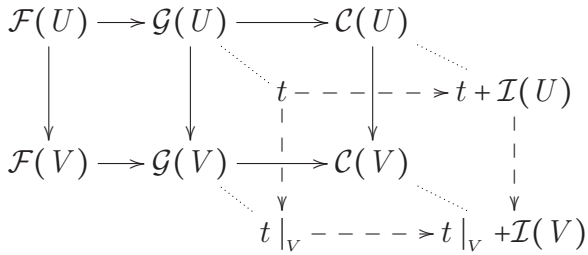
Proposición 1.0.4. *Si $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces sobre X, entonces la asignación*

$$U \longmapsto \mathcal{C}(U) := \operatorname{coker}(\varphi(\mathrm{U})) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{I}(U);$$

con $U \subset X$, define un pre-haz más no necesariamente un haz.

Demostración. A fin de verificar éste hecho, iniciamos evidenciando las aplicaciones restricción que dan la estructura de pre-haz a $\mathcal{C}$ y posteriormente se hace énfasis en que las condiciones adicionales para ser un haz no necesariamente se satisfacen.

Sean U y V subconjuntos abiertos tales que $V \subset U$, y consideremos el siguiente diagrama.



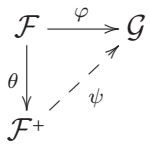
La restricción $\rho_{UV} : \mathcal{C}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ es inducida de forma natural por la restricción que da la estructura de pre-haz a $\mathcal{G}$ y su buena definición se garantiza pues $\mathcal{I}(U)|_V \subset \mathcal{I}(V)$, como se vió anteriormente. Es decir, $\rho_{UV}(t + \mathcal{I}(U)) = t|_V + \mathcal{I}(V)$; siendo $t|_V = \rho_{UV}(\mathcal{G})(t)$ (aquí $\rho_{UV}(\mathcal{G})$ denota la restricción definida para $\mathcal{G}$). Luego, cokerφ es un pre-haz.

De otro lado, notemos que si $t + \mathcal{I}(U) \in \mathcal{C}(U)$, $\{V_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U y $\rho_{UV_i}(t + \mathcal{I}(U)) \in \mathcal{I}(V_i)$ para cada $i \in I$ entonces $t|_{V_i} \in \mathcal{I}(V_i)$. Pero como se vió en el caso de imφ no es posible garantizar de forma general que dicha relación de pertenencia implica $t \in \mathcal{I}(U)$. Por lo tanto cokerφ no necesariamente es un haz. □

Definición 1.0.6. *Los pre-haces definidos en las proposiciones 1.0.3 y 1.0.4, los llamaremos el pre-haz imagen de φ; denotado por* imφ *y el pre-haz conúcleo de φ; denotado por* cokerφ*, respectivamente.*

Ahora bien, siendo claro que no necesariamente un pre-haz es un haz, es posible garantizar, como fue mencionado anteriormente, la existencia un haz extrechamente ligado a un pre-haz dado. A continuación abordamos éste hecho.

Proposición 1.0.5. *Si $\mathcal{F}$ es un pre-haz sobre un espacio topológico X, entonces existe un haz $\mathcal{F}^+$ sobre X y un morfismo de pre-haces $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$, con la propiedad que para cualquier haz $\mathcal{G}$ sobre X y cualquier morfismo de pre-haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, existe un único morfismo de haces $\psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta.*



Además el par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ *es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Primero que todo vamos a definir los grupos $\mathcal{F}^+(U)$ para todo subconjunto abierto $U \subset X$ y las aplicaciones restricción que hacen de $\mathcal{F}^+$ un pre-haz. Posteriormente verificamos que es en realidad un haz. Luego nos ocuparemos de la construcción del morfismo $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ y finalmente verificaremos que satisface la propiedad del enunciado. Para todo subconjunto abierto U de X, definimos $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de funciones

$$\mathcal{F}^+(U) = \{s : U \longrightarrow \bigcup_{p \in U} \mathcal{F}_p\},$$

donde $s \in \mathcal{F}^+(U)$ satisface:

1. Para cada $p \in U$, se tiene que $s(p) \in \mathcal{F}_p$.

2. Para cada $p \in U$, existe una vecindad de p, $V \subseteq U$ y un elemento $t \in \mathcal{F}(V)$ tal que para todo $q \in V$ se satisface que $t_q = s(q)$.

Observe que por la condición (1) toda sección $s \in \mathcal{F}^+(U)$ puede, abusando de la notación, representarse como $\{s(p)\}_{p \in U}$. De otro lado la condición (2) garantiza la existencia de una vecindad $V \subseteq U$ de p y una sección $t \in \mathcal{F}(V)$ que satisface $s(x) = t_x$. Entonces, en aras de homogenizar la notación, denotamos a t por $\overline{s}$; así un elemento $s \in \mathcal{F}^+(U)$ lo escribiremos como $\{\overline{s}_x\}_{x \in U}$.

Ahora bien, si $V \subset U$ son subconjuntos abiertos y $s \in \mathcal{F}^+(U)$, entonces por (1) la restricción de s a V está bien definida, ésto es $s|_V : V \longrightarrow \bigcup_{p \in V} \mathcal{F}_p$. Por lo tanto, la aplicación restricción se define de forma natural como la restricción usual de funciones,

$$\begin{array}{rccc} \rho^+_{UV} : \mathcal{F}^+(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^+(V). \\ s & \longmapsto & s\,|_V \end{array}$$

Esto hace de $\mathcal{F}^+$ un pre-haz. Nuestro propósito ahora es verificar que $\mathcal{F}^+$ es efectivamente un haz. Para ello comprobamos que se satisfacen las condiciones (4) y (5) dadas en la definición 1.0.2.
Sea $\{V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U. Entonces,

1. si $s \in \mathcal{F}^+(U)$ es tal que $\rho^+_{UV_i}(s) = s|_{V_i} = 0$ para todo $i \in I$, entonces dado que s es una función y $U = \bigcup V_i$ se sigue que s es la función nula.

2. si $s_i \in \mathcal{F}^+(V_i)$, $s_k \in \mathcal{F}^+(V_k)$, con $i, k \in I$ y $V_{ik} = V_i \cap V_k \neq \varnothing$, son tales que

$$\rho^+_{V_iV_{ik}}(s_i) = s_i\,|_{V_{ik}} = s_k\,|_{V_{ik}} = \rho^+_{V_kV_{ik}}(s_k)$$

   Entonces, para todo $x \in V_{ik}$ tenemos que $s_i(x) = s_k(x) \in \mathcal{F}_x$. Luego, como $\{V_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U, para cada $x \in U$ existe una vecindad $V_r \in \{V_i\}_{i\in I}$ tal que $x \in V_r$, así que podemos definir la función,

$$\begin{aligned} s : U &\longrightarrow \bigcup_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ x &\longmapsto s(x) := s_r(x) \end{aligned}$$

   donde $x \in V_r$, $s_r \in \mathcal{F}^+(V_r)$ y $s_r(x) \in \mathcal{F}_x$. Observe que, por hipótesis, s es una función bien definida y por definición de s, $s|_{V_r} = s_r$. Además, como $s_r \in \mathcal{F}^+(V_r)$, la condición (2) garantiza la existencia de una vecindad de x, digamos $W \subseteq V_r$, y la existencia de $\overline{s_r} \in \mathcal{F}(W)$ que satisface $s_r(z) = \overline{s_r}_z$ para todo $z \in W$. Finalmente, como $V_r \subset U$ se sigue que $W \subset U$ es una vecindad de x tal que $\overline{s_r} \in \mathcal{F}(W)$ y $s(z) = s_r(z) = \overline{s_r}_z$ para todo $z \in W$. Por lo tanto, $s \in \mathcal{F}^+(U)$.

De lo anterior concluimos que $\mathcal{F}^+$ es un haz.
Ahora bien, dados los pre-haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$ sobre X, para cada subconjunto abierto $U \subset X$, podemos definir el morfismo de grupos,

$$\begin{aligned} \theta(U) : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}^+(U), \\ s &\longmapsto \{s_x\}_{x\in U} \end{aligned}$$

donde s_x es el gérmen de s en x. Claramente $\theta(U)(s) \in \mathcal{F}^+(U)$ tomando $V_p = U$ para todo $p \in U$. De otro lado, en virtud de las aplicaciones restricción ρ_{UV} y ρ^+_{UV} de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$ respectivamente, podemos definir el morfismo de pre-haces $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$.
Afirmamos que $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ satisface que para cualquier haz $\mathcal{G}$ y un morfismo de pre-haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, existe un morfismo ψ que satisface la propiedad universal. En efecto, dado un haz $\mathcal{G}$, el morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ y un abierto $U \subset X$ podemos considerar el siguiente diagrama

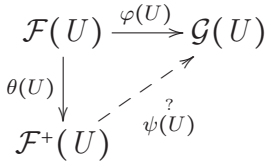


Diagrama 1.0.5

y construir un morfismo de grupos $\psi(U) : \mathcal{F}^+(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ el cual lo hace conmutativo. Dicha construcción es hecha de la siguiente forma. Sea $s \in \mathcal{F}^+(U)$, la condición (2) implica la existencia de una cubierta abierta de U, supongamos $\{V_p\}_{p\in U}$, tal que para cada $p \in U$ existe $\overline{s_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ con $s(z) = \overline{s_p}_z$ para todo $z \in V_p$. Ahora, para $z \in V_p \cap V_q$ se tiene que, $\overline{s_p}_z = s(z) = \overline{s_q}_z$; con $\overline{s_p}_z$ y $\overline{s_q}_z$ elementos de $\mathcal{F}_z$. Esto implica la existencia de una vecindad de z, digamos $W_{pq} \subseteq V_p \cap V_q$, en la que se satisface

$$\rho_{V_pW_{pq}}(\overline{s_p}) = \overline{s_p}|_{W_{pq}} = \overline{s_q}|_{W_{pq}} = \rho_{V_qW_{pq}}(\overline{s_q}).$$

Luego, como φ es un morfismo, de la igualdad anterior se sigue que $\varphi(W_{pq})(\overline{s_p}|_{W_{pq}}) = \varphi(W_{pq})(\overline{s_q}|_{W_{pq}})$. Así que, si denotamos por $\widetilde{s_p}$ a la imagen de $\overline{s_p}$ mediante $\varphi(V_p)$, lo anterior es equivalente a decir que $\rho_{V_pW_{pq}}(\widetilde{s_p}) = \rho_{V_qW_{pq}}(\widetilde{s_q})$ y al ser $\mathcal{G}$ un haz se garantiza la existencia de una sección $\widetilde{s} \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\rho_{UV_p}(\widetilde{s}) = \widetilde{s_p}$. Por lo tanto, podemos definir el morfismo,

$$\begin{aligned} \psi(U) : \mathcal{F}^+(U) &\longrightarrow \mathcal{G}(U) \\ s &\longmapsto \widetilde{s}. \end{aligned}$$

Es claro que dada la definición de θ, tomando $V_p = U$ para todo $p \in U$, el Diagrama 1.0.5 es conmutativo. Finalmente, la unicidad del par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ es garantizada puesto que éste viene dado en términos de los gérmenes de una sección en un punto. □

Definición 1.0.7. *El haz $\mathcal{F}^+$ construido en la anterior proposición se le conoce como, el haz asociado al pre-haz $\mathcal{F}$.*

La siguiente definición provee dos ejemplos adicionales de haces, uno de ellos definido como el haz asociado a un pre-haz dado.

Definición 1.0.8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua de espacios topológicos.*

1. *Para cada haz $\mathcal{F}$ sobre X definimos el haz imagen directa sobre Y, denotado por $f_*\mathcal{F}$, mediante los subgrupos $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$, para cada subconjunto abierto $V \subseteq Y$.*

2. *Para cada haz $\mathcal{G}$ sobre Y definimos el haz imagen inversa sobre X, que denotamos por $f^{-1}\mathcal{G}$, como el haz asociado a el pre-haz definido mediante los subgrupos $(f^{-1}\mathcal{G})(U) := \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)$, siendo $U \subseteq X$ un subconjunto abierto.*

Anteriormente nos preguntabamos por la existencia de pre-haces correspondientes a estructuras existentes en el álgebra moderna. En lo siguiente veremos algunos otros ejemplos de éstos pre-haces y adicionalmente algunas propiedades que ahora satisfacen los morfismos entre pre-haces.

Definición 1.0.9. *Un subhaz de un haz $\mathcal{F}$, es un haz $\mathcal{F}'$ tal que para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$, se tiene que $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y la aplicación restricción del haz $\mathcal{F}'$ es la inducida por la restricción de $\mathcal{F}$.*

Observe que, de acuerdo con la definición de subhaz, la condición impuesta a las aplicaciones restricción exige que $\rho_{UV}(\mathcal{F}'(U)) \subseteq \mathcal{F}(V)$; además para cualquier $p \in U$ tenemos $\mathcal{F}'_p \leq \mathcal{F}_p$.

Dado un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, el haz $\ker\varphi$ es un ejemplo de un subhaz del haz $\mathcal{F}$. En efecto, como vimos anteriormente, para cada $U \subseteq X$ se satisface la contenencia de subgrupos $\ker\varphi(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ y las aplicaciones restricción que hacen de $\ker\varphi$ un pre-haz son precisamente las inducidas por las aplicaciones restricción que hacen de $\mathcal{F}$ un pre-haz
.

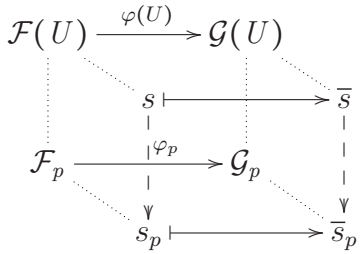
Definición 1.0.10. *Un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ se dice inyectivo si* $\ker\varphi = 0$.

Proposición 1.0.6. *Un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es inyectivo si y sólo si el morfismo de subgrupos inducido $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es inyectivo para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$.*

Demostración. Sea φ un morfismo de haces inyectivo, que por definición equivale a decir que $\ker\varphi = 0$, que a su vez es equivalente a tener $\ker\varphi(\mathrm{U}) = 0$ para todo subconjunto abierto $U \subseteq X$ y ésto último se tiene si y sólo si $\varphi(U)$ es un morfismo de subgrupos inyectivo para todo $U \subseteq X$. □

Proposición 1.0.7. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X. Entonces, para cada $p \in X$ se verifica que $(\ker\varphi)_{\mathrm{p}} = \ker(\varphi_{\mathrm{p}})$.*

Demostración. Sean $p \in X$, $U \subseteq X$ una vecindad de p, $s \in \ker\varphi(\mathrm{U})$ y $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathcal{F}_p$ el germen inducido por s en p. Denotemos por $\overline{s}$ a $\varphi(U)(s)$ y por $\overline{s}_p$ a $(\varphi(U)(s))_p$ como se ilustra en el siguiente diagrama,



Ahora bien, $\overline{s} = 0_{\mathcal{G}(U)}$ implica que $\overline{s}_p = 0_p$, y así $s_p \in \ker\varphi_{\mathrm{p}}$. Esto es,

$$(\ker\varphi)_{\mathrm{p}} \subseteq \ker(\varphi_{\mathrm{p}}). \tag{1.1}$$

De otro lado, si $s_p = \langle U, s\rangle \in \ker(\varphi_{\mathrm{p}})$ entonces existe una vecindad $V \subseteq U$ de p tal que $0_{\mathcal{G}(V)} = \overline{s}\,|_V = \varphi(V)(s|_V)$, ésto es, $s|_V \in \ker\varphi(\mathrm{V})$. Ahora, puesto que $\langle U, s\rangle \sim \langle V, s|_V\rangle$, se sigue que $s_p \in (\ker\varphi)_{\mathrm{p}}$. □

Proposición 1.0.8. *Un morfismo de haces φ es inyectivo si y sólo si φ_p es inyectivo para todo $p \in X$.*

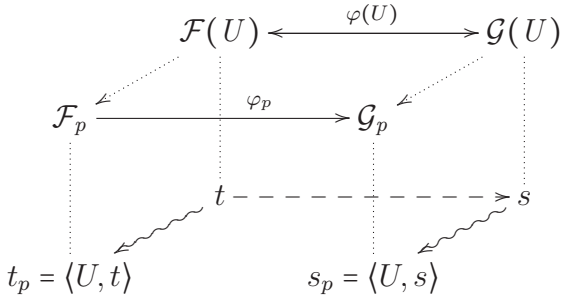
Demostración. Si $\ker\varphi = 0$, entonces $(\ker\varphi)_{\mathrm{p}} = 0_{\mathrm{p}}$ para cada $p \in X$. Ahora, en virtud de la Proposición 1.0.7, tenemos que $\ker(\varphi_{\mathrm{p}}) = 0_{\mathrm{p}}$ para todo $p \in X$ y la anterior igualdad se verifica si y sólo si φ_p es inyectivo para todo $p \in X$. □

Antes de enunciar el siguiente resultado es conveniente fijar algo de notación. De ahora en adelante si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces sobre un espacio topológico X y $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo

de haces, entonces denotaremos por $\mathrm{im}\varphi$ al haz asociado (Proposición 1.0.5) al pre-haz imagen de φ.

Proposición 1.0.9. *Con la notación del párrafo anterior, para cada $p \in X$ se tiene que* $(\mathrm{im}\varphi)_{\mathrm{p}} = \mathrm{im}(\varphi_{\mathrm{p}})$.

Demostración. Sean $U \subseteq X$ un subconjunto abierto, $s \in \mathrm{im}\varphi(\mathrm{U})$ y $t \in \mathcal{F}(U)$ una preimagen de s. Denotemos por $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathcal{G}_p$ y por $t_p = \langle U, t\rangle \in \mathcal{F}_p$ los gérmenes en p inducidos por s y t respectivamente, como se ilustra en el siguiente diagrama.



Ahora, por definición de φ_p, se tiene que $s_p \in \mathrm{im}(\varphi_{\mathrm{p}})$ y por lo tanto, $(\mathrm{im}\varphi)_{\mathrm{p}} \subseteq \mathrm{im}(\varphi_{\mathrm{p}})$. De otro lado, si $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathrm{im}(\varphi_{\mathrm{p}})$ y $t_p = \langle V, t\rangle \in \mathcal{F}_p$ es una preimagen de s_p, nuevamente por definición de φ_p ha de ser $s_p = \varphi_p(t_p) = (\varphi(V)(t))_p$, es decir $s_p \in (\mathrm{im}\varphi)_{\mathrm{p}}$.

□

Definición 1.0.11. *Un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, es sobreyectivo si* $\mathrm{im}\varphi = \mathcal{G}$.

A diferencia de un morfismo de haces inyectivo, en el caso de un morfismo sobreyectivo no podemos garantizar un resultado equivalente a la Proposición 1.0.6, sin embargo tenemos los siguientes resultados.

Proposición 1.0.10. *Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de haces sobre X es sobreyectivo si y sólo si el morfismo inducido de los tallos $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ es sobreyectivo para cada $p \in X$.*

Demostración. La hipótesis $\mathrm{im}\varphi = \mathcal{G}$ implica la igualdad en los tallos $(\mathrm{im}\varphi)_{\mathrm{p}} = \mathcal{G}_p$ para todo punto $p \in X$. Luego, en virtud de la Proposición 1.0.9, se sigue que $\mathrm{im}(\varphi_{\mathrm{p}}) = \mathcal{G}_p$. De otro lado, si $\mathcal{G}_p = \mathrm{im}(\varphi_{\mathrm{p}}) = (\mathrm{im}\varphi)_{\mathrm{p}}$ (nuevamente por 1.0.9), entonces de la Observación 1.0.2 tenenos que $\mathcal{G} = \mathrm{im}\varphi$ □

Proposición 1.0.11. *Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de haces sobre X es sobreyectivo si y sólo si la siguiente condición se satisface. Para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ y para cada $s \in \mathcal{G}(U)$ existen una cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y elementos $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $\varphi(U_i)(t_i) = s|_{U_i}$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que φ es sobreyectivo y sean $s \in \mathcal{G}(U)$ y $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathcal{G}_p$ su gérmen en el punto p. Puesto que φ_p es sobreyectivo (Proposición 1.0.10), entonces si $t_p = \langle V_p, t\rangle \in \mathcal{F}_p$ es una preimagen de s_p, tenemos que $s_p = \varphi_p(t_p) = (\varphi(V_p)(t))_p$. Esta igualdad garantiza la existencia de una vecindad U_p de p con $U_p \subseteq U \cap V_p$ sobre la cual se satisface que $s|_{U_p} = \varphi(V_p)(t)|_{U_p} = \varphi(U_p)(t|_{U_p})$ con lo cual obtenemos el resultado deseado después de observar que $\{U_p\}_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U. Recíprocamente supongamos que se satisface la condición del enunciado. Afirmamos que φ_p es sobreyectivo. En efecto, si $s_p = \langle U, s\rangle \in \mathcal{G}_p$, entonces existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y elementos $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para todo $i \in I$, los cuales verifican que $\varphi(U_i)(t_i) = s|_{U_i}$. En consecuencia el germen de t_i en p; que denotamos por $(t_i)_p$, satisface

$$\varphi_p((t_i)_p) = (\varphi(U_i)(t_i))_p = (s|_{U_i})_p = s_p,$$

donde la última igualdad es garantizada dado que $\langle U, s\rangle \sim \langle U_i, s|_{U_i}\rangle$. Por lo tanto, φ_p es sobreyectivo. □

Definición 1.0.12. *Decimos que la sucesión de haces $\mathcal{F}_i$ y morfismos φ_i, con $i \in I$*

$$\mathfrak{S} := \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

es exacta, si en cada eslabón de la cadena se tiene que, $\ker\varphi_i = \mathrm{im}\varphi_{i-1}$.

Antes de proseguir, convendremos adoptar la siguiente notación. Si,

$$\mathfrak{S} := \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

es una sucesión de haces y morfismos, convendremos escribir $\mathfrak{S}_p$ para denotar la sucesión de tallos y morfismos, para cada punto $p \in X$

$$\mathfrak{S}_p := \cdots \longrightarrow (\mathcal{F}_{i-1})_p \xrightarrow{(\varphi_{i-1})_p} (\mathcal{F}_i)_p \xrightarrow{(\varphi_i)_p} (\mathcal{F}_{i+1})_p \longrightarrow \cdots,$$

Observación 1.0.4. De la definición anterior y las definiciones 1.0.10, 1.0.11 se deducen las siguientes equivalencias:

1. La sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ es exacta si y sólo si φ es inyectivo.
2. La sucesión $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si φ es sobreyectivo.
3. La sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{K} \longrightarrow 0$ es exacta cuando φ es inyectiva, ψ es sobreyectiva e $\mathrm{im}\varphi = \ker\psi$.

Proposición 1.0.12. *El funtor $\Gamma : Sh(X) \longrightarrow Ab$, de la categoría de los haces sobre X en la categoría de los grupos abelianos, es un funtor exacto a izquierda. Esto es, si $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$ es una sucesión exacta de haces sobre X, entonces para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ es una sucesión exacta de grupos.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''$ una sucesión exacta de haces sobre X entonces φ es inyectivo. En consecuencia el morfismo de grupos $\varphi(U)$ también lo es para todo $U \subseteq X$. Luego $0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ es exacta. Adicionalmente, como $\mathrm{im}\varphi = \ker\psi$ entonces para todo $U \subseteq X$, $\mathrm{im}\varphi(\mathrm{U}) = \ker\psi(\mathrm{U})$. Por lo tanto $0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ es una sucesión exacta. □

Proposición 1.0.13. *La sucesión $\mathfrak{S} := \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots$ de haces y morfismos es exacta si y sólo si la correspondiente sucesión de tallos $\mathfrak{S}_p$ es exacta para cada $p \in X$.*

Demostración. $\mathcal{G}$ es exacta si y sólo si $\ker\varphi_{\mathrm{i}} = \mathrm{im}\varphi_{\mathrm{i-1}}$ para todo i, si y sólo si $(\ker\varphi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{p}} = (\mathrm{im}\varphi_{\mathrm{i-1}})_{\mathrm{p}}$ para todo i y para todo $p \in X$ (Observación 1.0.2), si y sólo si $\ker((\varphi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{p}}) = \mathrm{im}((\varphi_{\mathrm{i-1}})_{\mathrm{p}})$ (Proposiciones 1.0.7 y 1.0.9), si y sólo si $\mathcal{G}_p$ es exacta para todo $p \in X$. □

Definición 1.0.13. *Sea $\mathcal{F}'$ un subhaz de un haz $\mathcal{F}$. Definimos el haz cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ como el haz asociado a el pre-haz determinado por los subgrupos $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$, para cada $U \subseteq X$.*

Anteriormente vimos que si $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces entonces cokerφ es un pre-haz, cuyo haz asociado lo denotaremos de igual forma cokerφ. Así que, el haz cokerφ es un ejemplo de un haz cociente.

Proposición 1.0.14. *Si $\mathcal{F}'$ es un subhaz de un haz $\mathcal{F}$, entonces para todo $p \in U \subseteq X$ se tiene que $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_p = \mathcal{F}_p/\mathcal{F}'_p$.*

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata de la definición de tallo y del haz cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$. □

Proposición 1.0.15. *Sea $\mathcal{F}'$ un subhaz de un haz $\mathcal{F}$. Entonces el morfismo canónico $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es sobreyectivo y tiene núcleo $\mathcal{F}'$. En consecuencia todo subhaz $\mathcal{F}'$ de un haz $\mathcal{F}$ induce sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}' \longrightarrow 0$.*

Demostración. Sea $p \in X$ un punto cualquiera. Puesto que $\mathcal{F}'_p \leq \mathcal{F}_p$, se sigue que el morfismo de grupos $\pi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p/\mathcal{F}'_p = (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_p$ (Proposición 1.0.14), es sobreyectivo y en consecuencia también lo es π (Proposición 1.0.10). Esto implica que ker$\pi = \mathfrak{F}'$. Finalmente, para todo $U \subset X$, el morfismo inclusión $i(U) : \mathfrak{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ es inyectivo, y por la Proposición 1.0.6, ésto equivale a que el morfismo de haces $i : \mathfrak{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ también lo es. Por lo tanto, en virtud del item (3) de la Observación 1.0.4,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}/\mathfrak{F}' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. □

Capítulo 2

ESQUEMAS.

En éste capítulo, introducimos el concepto central de éste trabajo, el de esquema. Para ello iniciamos el estudio de los llamados esquemas afínes, los cuales son construidos a partir de un anillo y que finalmente forman la base para dar la definición de un esquema en general. Así mismo incluimos una gran variedad de ejemplos que nos permitirán tener una mayor claridad de éste concepto.

Definición 2.0.1. *Sea A un anillo, definimos el espectro primo de A como el conjunto*

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A | \quad \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\}.$$

Nuestro propósito ahora es dotar al conjunto $\mathrm{Spec}(A)$ de una topología por conjuntos cerrados. Más precisamente.

Lema 2.0.1. *Sean A un anillo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Los conjuntos del tipo*

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) | \quad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

satisfacen las siguientes propiedades:

1. $V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ *para cada par de ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de A .*
2. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ es una familia de ideales de A, entonces $V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$.*

3. $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ *si y sólo si* $rad(\mathfrak{a}) \supseteq rad(\mathfrak{b})$.

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})$, como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A se sigue que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. En efecto, si $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$ entonces existe $a \in \mathfrak{a}$ tal que $a \notin \mathfrak{p}$. Pero por hipótesis para todo $b \in \mathfrak{b}$ se tiene que $a \cdot b \in \mathfrak{p}$, de lo cual se sigue que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto, con un argumento análogo si $\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{p}$, se obtiene que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Luego $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ o $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$, así que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. De otro lado, si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ entonces $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, y como $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$, entonces $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Esto es, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})$.

2. $\mathfrak{p} \in V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$, que por definición es $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, si y sólo si $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $i \in I$, y una vez más por definición ésto es $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_i)$ para todo $i \in I$, lo cual equivale a tener que $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

3. Supongamos que $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$, por definición de radical de un ideal[1] se tiene que,

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{b}) = \bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \left(\bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p} \ \wedge \ \mathfrak{a}\nsubseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p}\right) \cap \left(\bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p} \ \wedge \ \mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p}\right) \subseteq \left(\bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p} \ \wedge \ \mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p}\right) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}).$$

   Recíprocamente si $\operatorname{rad}(\mathfrak{b}) \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, que por definición ésto es $\bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, se sigue que $\bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \left(\bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p}\right) \cap \mathfrak{b}$. Luego, si $\mathfrak{p}^* \in V(\mathfrak{a})$ entonces de la anterior igualdad y como $\bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^*$ se obtiene la siguiente cadena de contenencias,

$$\mathfrak{b} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \left(\bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p}\right) \cap \mathfrak{b} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^*.$$

   así que $\mathfrak{p}^* \in V(\mathfrak{b})$. Por lo tanto, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$. □

Observación 2.0.1. De acuerdo con la definición de $V(\mathfrak{a})$ se tiene que $V(A) = \varnothing$ y $V(0) = \operatorname{Spec}(A)$. De aquí que considerando las propiedades dadas en el Lema 2.0.1, tenemos que $\operatorname{Spec}(A)$ satisface todas las condiciones de espacio topológico cuya topología está dada por los conjuntos cerrados $V(\mathfrak{a})$.

Nuestro propósito ahora es definir un haz de anillos sobre el espacio topológico $\operatorname{Spec}(A)$.

[1] Para la definición de radical de un ideal ver Proposición 1.14 de [**?**], pag 10.

Definición 2.0.2. *Sean A un anillo, $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo y $A_{\mathfrak{p}}$ la localización de A en $\mathfrak{p}$. Entonces, para cada conjunto abierto $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, definimos $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ como el conjunto de todas las funciones,*

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

tales que:

1. *$s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in U$.*
2. *Para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta $V \subset U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $a, f \in A$ tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se cumple que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$.*

Cuando no haya ambigüedad respecto al espacio topológico considerado, denotaremos por $\mathcal{O}(U)$ al conjunto $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ y muy ocasionalmente por $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$.

Ahora probamos que los conjuntos $\mathcal{O}(U)$ definidos en 2.0.2 son efectivamente anillos. Para cada $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ definimos la suma y el producto en $\mathcal{O}(U)$ como sigue:
Si $s, t \in \mathcal{O}(U)$, entonces para todo $\mathfrak{p} \in U$ definimos

$$(s + t)(\mathfrak{p}) := s(\mathfrak{p}) + t(\mathfrak{p}),$$

donde para cada $\mathfrak{p} \in U$ existen vecindades $V_{\mathfrak{p}}$ y $W_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ contenidas en U y elementos a, b, f, g de A, tales que para todo $\mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}}$ y todo $\mathfrak{r} \in W_{\mathfrak{p}}$ se tiene que $f \notin \mathfrak{q}$, $g \notin \mathfrak{r}$ y

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \quad \text{y} \quad t(\mathfrak{r}) = \frac{b}{g}.$$

Así que $(s + t)(\mathfrak{p})$ es localmente el cociente

$$s(\mathfrak{q}) + t(\mathfrak{q}) = \frac{ag + bf}{fg}$$

de elementos de A con $fg \notin \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}} \cap W_{\mathfrak{p}}$. Luego, $s + t \in \mathcal{O}(U)$. Además, $s \cdot t \in \mathcal{O}(U)$ considerando $(s \cdot t)(\mathfrak{p}) := s(\mathfrak{p}) \cdot t(\mathfrak{p})$, donde el anterior producto es localmente de la forma

$$s(\mathfrak{q}) \cdot t(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} = \frac{ab}{fg},$$

con a, b, f, g elementos de A y $fg \notin \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V_\mathfrak{p} \cap W_\mathfrak{p}$; siendo $V_\mathfrak{p} \cap W_\mathfrak{p} \subset U$ una vecindad de $\mathfrak{p}$. Más aún, la sección

$$\begin{aligned} 1 : U &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto 1(\mathfrak{p}) = 1 \in A_\mathfrak{p} \end{aligned}$$

es el elemento identidad. Por lo tanto, $\mathcal{O}(U)$ es un anillo conmutativo unitario.

Adicionalmente, si $V \subset U$ son subconjuntos abiertos de $\mathrm{Spec}(A)$ entonces para toda $s \in \mathcal{O}(U)$, definimos $s|_V : V \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in V} A_\mathfrak{p}$ como la restricción natural de s a V. Entonces la aplicación restricción

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \mathcal{O}(U) &\longrightarrow \mathcal{O}(V) \\ s &\longmapsto s|_V \end{aligned}$$

es un morfismo de anillos y por lo tanto $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ es un pre-haz de anillos. De otro lado, supongamos que $\{V_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de U y que $s \in \mathcal{O}(U)$ es tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo $i \in I$. Entonces, al ser s una función que localmente es identica a la función constante cero, se tiene que s es precisamente la función nula. Además, si existen $s_i \in \mathcal{O}(V_i)$ para todo $i \in I$ tales que $s_i|_{V_{ik}} = s_k|_{V_{ik}}$ con $V_{ik} = V_i \cap V_k \neq \varnothing$, entonces, dado que para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe $i \in I$ tal que $\mathfrak{p} \in V_i \subset U$, podemos definir una función $s \in \mathcal{O}(U)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} s : U &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto s(\mathfrak{p}) := s_i(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Notemos que por definición de s se tiene que $s|_{V_k} = s_k$ y la buena definición de s es garantizada por la condición $s_i|_{V_{ik}} = s_k|_{V_{ik}}$ que se satisface. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ es un haz de anillos.

De acuerdo con lo anterior, cada vez que nos refiramos al "espectro" de un anillo A, estaremos refiriendonos al par $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$, ésto es; el espacio topológico $\mathrm{Spec}(A)$ y el haz $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ construido arriba.

Recordemos que la topología del espacio $\mathrm{Spec}(A)$ fue definida por subconjuntos cerrados, de la forma $V(\mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Entonces, considerando un elemento $f \in A$ y su ideal generado que denotamos por $\langle f \rangle \subseteq A$, el conjunto

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) | \ \ \langle f \rangle \nsubseteq \mathfrak{p}\}$$

es el complemento del conjunto $V(\langle f \rangle)$. Así pues, $D(f)$ es un conjunto abierto de $\mathrm{Spec}(A)$.

Proposición 2.0.1. *Los conjuntos* $\{D(f)\}_{f \in A}$ *forman una base para la topología de* $\mathrm{Spec}(A)$.

Demostración. Dado un subconjunto abierto $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, existe un ideal $\mathfrak{a} \subset A$ tal que $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})^c$. Luego si $\mathfrak{p} \in U$ entonces $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$ lo cual implica la existencia de $f \in \mathfrak{a}$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{p} \in D(f)$, y en consecuencia $U \subseteq \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$. □

El resultado que presentamos a continuación da cuenta del caso especial en el que consideramos el espacio topológico $\mathrm{Spec}(A)$ y el haz $\mathcal{O}$ definido sobre él. Aquí encontraremos con qué podemos identificar la secciones correspondientes a un abierto básico del espacio, como también con qué se identifican los tallos en un punto.

Proposición 2.0.2. *Sea* A *un anillo y* $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ *su espectro.*

1. *Para todo* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$.
2. *Para todo* $f \in A$, $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$.
3. *En el caso particular en que el abierto considerado sea* $\mathrm{Spec}(A)$, *se satisface que* $\Gamma(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}) \cong A$.

Demostración.

1. Primero que todo, definiremos un morfismo entre $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ y $A_{\mathfrak{p}}$, y posteriormente mostraremos que éste es realmente isomorfismo de anillos. Sea

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & A_{\mathfrak{p}} \\ & s_{\mathfrak{p}} = \langle U, s \rangle & \longmapsto & \varphi(s_{\mathfrak{p}}) := s(\mathfrak{p}) \end{array}$$

   Puesto que $s \in \mathcal{O}(U)$, entonces para cada $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ y existen, elementos $a, f \in A$ y una vecindad de $\mathfrak{p}$, $V \subseteq U$, tales que para todo $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$. Veamos que φ es sobreyectivo. Sea $x = \dfrac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$, entonces

por definición $\mathfrak{p} \in D(f)$ y $V \coloneqq D(f) \cap U$ es una vecindad de $\mathfrak{p}$; luego si para todo $\mathfrak{q} \in V$ definimos $x(\mathfrak{q}) \coloneqq \dfrac{a}{f}$, tenemos que x es una sección de $\mathcal{O}(V)$ y en consecuencia $x_{\mathfrak{p}} = \langle V, x\rangle$ es una preimagen de x. Para verificar la inyectividad de φ consideremos una vecindad $U \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ de $\mathfrak{p}$ y supongamos que $s_{\mathfrak{p}} = \langle U, s\rangle$ y $t_{\mathfrak{p}} = \langle U, t\rangle$ son elementos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ tales que

$$\varphi(s_{\mathfrak{p}}) = s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p}) = \varphi(t_{\mathfrak{p}}).$$

Como $s, t \in \mathcal{O}(U)$ podemos suponer que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$ y $t(\mathfrak{q}) = \dfrac{b}{g}$ siendo a, b, f, g elementos de A con $f, g \notin \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V \subseteq U$ y V una vecindad de $\mathfrak{p}$. Luego, por hipótesis tenemos la igualdad $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$ en $A_{\mathfrak{p}}$, que implica la existencia de $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(ag - bf) = 0$. Entonces, localmente, se garantiza la existencia de $h \notin \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V \subseteq U$ tal que $h(ag - bf) = 0$ con $f, g \notin \mathfrak{q}$, es decir $s(\mathfrak{q}) = t(\mathfrak{q})$ para todo $\mathfrak{q} \in V$. Ahora, dado que el conjunto $C = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) |\ \ f, g, h \notin \mathfrak{q}\} = D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ es un conjunto abierto de $\operatorname{Spec}(A)$ que contiene a $\mathfrak{p}$, entonces $C' = C \cap U$ es una vecindad abierta de $\mathfrak{p}$ para la cual $s|_{C'} = t|_{C'}$, y la siguiente cadena de relaciones

$$\langle U, s\rangle \sim \langle C', s|_{C'}\rangle = \langle C', t|_{C'}\rangle \sim \langle U, t\rangle$$

garantiza que $s_{\mathfrak{p}} = \langle U, s\rangle = \langle U, t\rangle = t_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, φ es inyectivo y con ello se concluye lo deseado.

2. Procedemos de forma análoga al item anterior, considerando el siguiente morfismo:

$$\begin{aligned} \psi : A_f &\longrightarrow \mathcal{O}(D(f)), \\ \frac{a}{f^n} &\longmapsto \psi\left(\frac{a}{f^n}\right) \coloneqq s \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} s : D(f) &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{q} &\longmapsto s(\mathfrak{q}) \coloneqq \frac{a}{f^n} \end{aligned}$$

Notemos que si $\mathfrak{q} \in D(f)$ entonces $\langle f\rangle \nsubseteq \mathfrak{q}$, así que $f \notin \mathfrak{q}$ y por tanto $\dfrac{a}{f^n} \in A_{\mathfrak{q}}$. Veamos a continuación que ψ es un isomorfismo, probando primero la inyectividad.

Supongamos que para algunos $n, m \in$ se tiene que $\psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = \psi\left(\frac{b}{f^m}\right)$. Entonces para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$ se satisface que $\psi\left(\frac{a}{f^n}\right)(\mathfrak{p}) = \psi\left(\frac{b}{f^m}\right)(\mathfrak{p})$, y por definición de ψ ésto es $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ en $A_{\mathfrak{p}}$, así que existe $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(af^m - bf^n) = 0$ en A. Luego, denotando por $\mathfrak{a}$ al ideal anulador[2] de $(af^m - bf^n)$, que generalmente es denotado por $\mathrm{Ann}(\mathrm{af^m} - \mathrm{bf^n})$, tenemos que $h \in \mathfrak{a}$ y en consecuencia $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$. En resumen, para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$ tenemos que $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$, lo cual podemos reescribir como, si $f \notin \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$, que a su vez es equivalente al enunciado, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ implica $f \in \mathfrak{p}$. Ahora, como la anterior implicación se tiene para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ y en consecuencia existe $l \in$ tal que $f^l \in \mathfrak{a}$, así que $f^l(af^m - bf^n) = 0$, que no es más que $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ en A_f. Por lo tanto, ψ es inyectiva. Ahora, para mostrar la sobreyectividad de ψ, procedemos de la siguiente forma. Como es habitual, iniciamos considerando un elemento arbitrario s de $\mathcal{O}(D(f))$ y en virtud de las condiciones que satisfacen dichos elementos obtendremos un cubierta abierta de $D(f)$ que estará dada en términos de los abiertos básicos de $\mathrm{Spec}(A)$. Posteriormente mostraremos que dicha cubierta es finita y por último se construye un elemento que será la preimagen de s mediante ψ; dicha construcción hace uso de la finitud de la cubierta de $D(f)$ y las representaciones locales de s.

Sea $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Puesto que para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$ existen una vecindad $V_{\mathfrak{p}} \subset D(f)$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $\tilde{a}, g \in A$ tales que $s(\mathfrak{q}) = \frac{\tilde{a}}{g}$ para todo $\mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}}$ con $g \notin \mathfrak{q}$. Entonces los conjuntos $V_{\mathfrak{p}}$ forman una cubierta abierta de $D(f)$.

Antes de proseguir con la prueba vamos a fijar la siguiente notación, a fin de obtener un lenguaje más ameno. De ahora en adelante las vecindades que cubren a $D(f)$ las denotaremos por V_i con $i \in I$ y en cada V_i la sección s se representa por $s(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{g_i}$; con $a_i, g_i \in A$ y $g_i \notin \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in V_i$. En lo siguiente deberemos tener presente que la afirmación $g_i \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in V_i$ se puede reformular como $V_i \subseteq D(g_i)$.

Retornando a la prueba, como los conjuntos de la forma $D(h)$ con $h \in A$, forman

[2]El ideal $\mathrm{Ann(x)} = \{\mathrm{a} \in \mathrm{A};\ \ \mathrm{ax} = 0\}$ es llamado el anulador de x; para más información de éste ideal ver [**?**] pag 9

una base para la topología de Spec(A), entonces podemos suponer que $D(h_i) = V_i$ para algún $h_i \in A$ y en consecuencia $\{D(h_i)\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $D(f)$. De otro lado, como $D(h_i) = V_i \subseteq D(g_i)$ entonces $V(g_i) \subseteq V(h_i)$ y en virtud del Lema 2.0.1 se obtiene que $\mathrm{rad}(\mathrm{h_i}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathrm{g_i})$, que a su vez implica la existencia de $n \in$ tal que $h_i^n \in (g_i)$, ésto es $h_i^n = c.g_i$ para algún $c \in A$. Entonces $s(\mathfrak{p}) = \dfrac{a_i}{g_i} = \dfrac{ca_i}{h_i^n}$ para todo $\mathfrak{p} \in D(h_i)$. Más aún, como $D(h_i) = D(h_i^n)$ entonces reemplazando h_i^n por h_i y denotando por $\widetilde{a_i}$ a ca_i, la sección s está representada por $s(\mathfrak{p}) = \dfrac{\widetilde{a_i}}{h_i}$ en $D(h_i)$.
Afirmamos ahora que $D(f)$ es cubierto por un número finito de conjuntos $D(h_i)$. En efecto, $D(f) \subset \bigcup D(h_i)$ si y sólo si $\bigcap V(\langle h_i\rangle) \subset V(\langle f\rangle)$ y dado que $\bigcap V(\langle h_i\rangle) = V\left(\sum\langle h_i\rangle\right)$ entonces $V\left(\sum\langle h_i\rangle\right) \subset V(\langle f\rangle)$. Luego en virtud del Lema 2.0.1 se sigue que $\mathrm{rad}(\langle \mathrm{f}\rangle) \subseteq \mathrm{rad}(\sum\langle \mathrm{h_i}\rangle)$, lo cual implica la existencia de $n > 0$ tal que $f^n \in \sum\langle h_i\rangle$. Esto es,

$$f^n = b_1h_1 + b_2h_2 + \cdots + b_rh_r, \quad con \quad b_i \in A,$$

y como $D(f) = D(f^n)$, entonces si $\mathfrak{p} \in D(f)$ se deduce que $\langle h_i\rangle \nsubseteq \mathfrak{p}$ para algún $1 \leqslant i \leqslant r$, o equivalentemente $\mathfrak{p} \in D(h_i)$ para algún $1 \leqslant i \leqslant r$, así que $\mathfrak{p} \in \bigcup_{i=1}^{r} D(h_i)$. Por lo tanto, podemos cubrir a $D(f)$ con un número finito de los $D(h_i)$. Finalmente, dado $s \in \mathcal{O}(D(f))$ asignaremos un elemento de A_f para ser la preimagen de s mediante ψ, para ello primero fijamos que $D(h_ih_j) = D(h_i) \cap D(h_j)$. Luego, teniendo presente lo establecido y demostrado hasta el momento sabemos que:

a) $D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{r} D(h_i)$,

b) $s(\mathfrak{p}) = \dfrac{\widetilde{a_i}}{h_i}$ para todo $\mathfrak{p} \in D(h_i)$, con $s(\mathfrak{p}) \in A_{h_i}$,

c) $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{\widetilde{a_j}}{h_j}$ para todo $\mathfrak{q} \in D(h_j)$, con $s(\mathfrak{q}) \in A_{h_j}$.

Entonces, en particular $\dfrac{\widetilde{a_i}}{h_i}$ y $\dfrac{\widetilde{a_j}}{h_j}$ son dos elementos de $(A_{h_i})_{h_j} = A_{h_ih_j}$ que representan a s en $D(h_ih_j)$. Así que considerando ψ aplicada sobre $A_{h_ih_j}$ se tiene que los elementos $\dfrac{\widetilde{a_i}}{h_i}$ y $\dfrac{\widetilde{a_j}}{h_j}$ poseen la misma imagen mediante ψ; a saber s, y como ψ es

inyectiva se garantiza que $\frac{\widetilde{a_i}}{h_i} = \frac{\widetilde{a_j}}{h_j}$ en $A_{h_i h_j}$, por lo tanto existe $n_{ij} \in$ tal que

$$(h_i h_j)^{n_{ij}}(\widetilde{a_i} h_j - \widetilde{a_j} h_i) = 0.$$

Como lo anterior se tiene para todo h_i y h_j, sabiendo de antemano que de éstos sólo hay un número finito entonces podemos escoger $n \in$ suficientemente grande tal que para todo i, j se satisfaga la ecuación,

$$(h_i h_j)^{n}(\widetilde{a_i} h_j - \widetilde{a_j} h_i) = 0.$$

Notemos que la igualdad anterior la podemos reescribir como,

$$h_j^{n+1}(\widetilde{a_i} h_i^n) - h_i^{n+1}(\widetilde{a_j} h_j^n) = 0 \tag{2.1}$$

Ahora, si expresamos a $s(\mathfrak{p})$ como

$$s(\mathfrak{p}) = \frac{\widetilde{a_i}}{h_i} = \frac{\widetilde{a_i} h_i^n}{h_i^{n+1}}$$

con $\mathfrak{p} \in D(h_i)$ y a $s(\mathfrak{q})$ como

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{\widetilde{a_j}}{h_j} = \frac{\widetilde{a_j} h_j^n}{h_j^{n+1}}$$

con $\mathfrak{q} \in D(h_j)$, entonces tenemos que, s está representado sobre $D(h_i)$ por $\frac{\widetilde{a_i}}{h_i}$, pero además por (2.1) $h_j \widetilde{a_i} = h_i \widetilde{a_j}$ para todo i, j. Ahora, como $\{D(h_i)\}_{i=1}^r$ es una cubierta abierta de $D(f)$, entonces podemos escribir a f^n como

$$f^n = \sum_{i=1}^{r} b_i h_i, \quad \text{para algún } n,$$

y haciendo $\widetilde{a} = \sum_i b_i \widetilde{a_i}$, para cada j se obtiene que

$$h_j \widetilde{a} = \sum_i b_i \widetilde{a_i} h_j = \sum_i b_i (\widetilde{a_i} h_j) = \sum_i b_i (\widetilde{a_j} h_i) = \sum_i b_i h_i \widetilde{a_j} = f^n \widetilde{a_j},$$

así que para todo $\mathfrak{p} \in D(h_j)$ se tiene que

$$s(\mathfrak{p}) = \frac{\widetilde{a_j}}{h_j} = \frac{\widetilde{a}}{f^n}.$$

Por lo tanto, las seciones $\psi\left(\frac{\widetilde{a}}{f^n}\right)$ y s coinciden en todo $D(f)$ y en consecuencia ψ es sobreyectivo.

3. Este item es consecuencia inmediata del resultado anterior considerando $f = 1$; puesto que $D(1) = \mathrm{Spec}(A)$.

□

Con el fin de presentar la definición que nos atañe en éste capítulo, fijaremos algunos conceptos previos y algunas propiedades que nos permitirán exhibir los ejemplos básicos en la teoría de esquemas. Antes de seguir convenimos lo siguiente. A partir de ahora el par $(X, \mathcal{O}_X)$, que consiste de un espacio topológico X y un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ sobre X, lo llamaremos un *espacio anillado.*

Definición 2.0.3.

1. *Un morfismo de espacios anillados de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un par* $(f, f^\sharp)$ *tal que,* $f : X \longrightarrow Y$ *es una función continua de espacios topológicos y* $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ *es una aplicación de haces de anillos sobre* Y*.*

2. *Un espacio anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un espacio localmente anillado si para cada punto* $p \in X$ *el tallo* $\mathcal{O}_{X,p}$ *es un anillo local.*

3. *Un morfismo de espacios localmente anillados es un morfismo* $(f, f^\sharp)$ *de espacios anillados tal que para cada punto* $p \in X$*, la aplicación inducida de anillos locales* $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ *es un morfismo local, ésto es, la imagen inversa del ideal maximal de* $\mathcal{O}_{X,p}$ *es el ideal maximal de* $\mathcal{O}_{Y,f(p)}$*.*

Respecto al item 3) de la definición anterior, vamos a aclarar cómo está definido el morfismo $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$. Observe que para cualquier subconjunto abierto $V \subset Y$, el morfismo de haces $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ induce un morfismo de anillos $f^\sharp(V) : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. Ahora si para todo punto $p \in X$, denotamos por $\mathfrak{V}_{f(p)}$ el conjunto de todas las vecindades de $f(p)$ en Y, es claro que cuando V recorre $\mathfrak{V}_{f(p)}$, $\{f^{-1}(V)\}_{V \in \mathfrak{V}_{f(p)}}$ es

un subconjunto del conjunto de vecindades de p en X, $\mathfrak{V}_p$. Esto es, tenemos la siguiente inclusión

$$\left\{\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))\right\}_{V\in\mathfrak{V}_{f(p)}} \subseteq \{\mathcal{O}_X(U)\}_{U\in\mathfrak{V}_p}$$

de aquí que tomando límites directos tendremos una aplicación

$$\mathcal{O}_{Y,f(p)} = \varinjlim_{V\in\mathfrak{V}_{f(p)}} \mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{f_p^\sharp} \varinjlim_{V\in\mathfrak{V}_{f(p)}} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{U\in\mathfrak{V}_p} \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X,p}$$

$$s_p = \langle V, s\rangle \longmapsto f_p^\sharp(s_p) := \langle f^{-1}(V), f^\sharp(V)(s)\rangle.$$

Observación 2.0.2. Debemos aclarar aquí que la aplicación a la cual hace referencia la definición 2.0.3 item 3) es a una aplicación de tallos correspondientes a haces definidos sobre espacios topológicos diferentes, en cuanto que la aplicación mencionada en la Observación 1.0.3 se refiere a la aplicación de tallos inducida por un morfismo de haces definidos sobre un mismo espacio topológico.

Adicionalmente, definimos un isomorfismo de espacios localmente anillados como un morfismo de espacios localmente anillados con inversa a ambos lados. En otras palabras, $(f, f^\sharp)$ es un isomorfismo de espacios localmente anillados si y sólo si f es un homeomorfismo de los espacios topológicos subyacentes y $f^\sharp$ es un isomorfismo de haces.
El siguiente resultado presenta un primer ejemplo de un espacio localmente anillado.

Proposición 2.0.3.

1. *Sea A un anillo, entonces* $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ *es un espacio localmente anillado.*

2. *Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un morfismo de anillos entonces φ induce un morfismo natural de espacios localmente anillados.*

$$(f, f^\sharp) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

3. *Si A y B son anillos entonces cualquier morfismo de espacios localmente anillados de* $\mathrm{Spec}(B)$ *en* $\mathrm{Spec}(A)$ *es inducido por un morfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$ (como se indica en el item 2.).*

Demostración.

1. $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ es un espacio localmente anillado como una consecuencia inmediata de la Proposición 2.0.2.

2. Primero que todo observe que un morfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$, induce de manera natural un morfismo de espacios topológicos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathrm{Spec}(B) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{b} & \longmapsto & f(\mathfrak{b}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \end{array}$$

   Verificaremos que el morfismo de espacios topológicos dado es continuo y a partir de éste, establecemos el morfismo de haces, el morfismos de tallos y finalmente mostramos que éste es un morfismo local.
   Observe entonces que si $\mathfrak{a} \subseteq A$ es un ideal entonces $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$. En efecto, $\mathfrak{b} \in f^{-1}(V(\mathfrak{a}))$ si y sólo si $f(\mathfrak{b}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \in V(\mathfrak{a})$, ésto es, $\mathfrak{a} \subset f(\mathfrak{b}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ lo cual equivale a que $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$, entonces $\mathfrak{b} \in V(\varphi(\mathfrak{a}))$ y por lo tanto f es continuo.
   De otro lado, si $V \subset \mathrm{Spec}(A)$ un subconjunto abierto, entonces definimos el morfismo de anillos $f^\sharp(V)$ de la siguiente manera.

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp(V) : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(f^{-1}(V)) \\ s & \longmapsto & (f^\sharp(V))(s) \end{array}$$

   Verifiquemos que $(f^\sharp(V))(s)$ es localmente constante. Para ello, si $\mathfrak{r} = f^{-1}(\mathfrak{q}) \in f^{-1}(V)$, entonces por definición, tenemos que existen una vecindad $W \subset V$ y elementos $a, g \in A$ tales que $s(\mathfrak{p}) = \dfrac{a}{g}$ con $g \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$, de aquí que $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V)$ es una vecindad de $\mathfrak{r} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Es claro que $\varphi(g) \notin \mathfrak{h}$ para todo $\mathfrak{h} \in f^{-1}(W)$, pues en caso contrario $\varphi(g) \in \mathfrak{h}$ implicaría que $g \in \varphi^{-1}(\mathfrak{h}) = f(\mathfrak{h})$ y dado que $\mathfrak{h} \in f^{-1}(W)$ entonces $f(\mathfrak{h}) \in W$, así que $g \in \varphi^{-1}(\mathfrak{h}) \in W$, lo cual contradice el hecho de que $g \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in W$. Por lo tanto definiendo

$$(f^\sharp(V))(s)(\mathfrak{r}) := \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)},$$

probamos que $f^\sharp(V)$ está bien definida y en consecuencia, definimos el morfismo de haces

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)},$$

como el inducido por los morfismos $f^\sharp(V)$ para todo subconjunto abierto $V \subseteq \mathrm{Spec}(A)$.

Nuestro propósito ahora es mostrar que el morfismo de tallos inducido por $f^\sharp$ es un morfismo local. Para ello sea $\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(B)$, el morfismo de tallos en el punto $\mathfrak{r}$, con $\varphi^{-1}(\mathfrak{r}) \in \mathrm{Spec}(A)$, está dado por

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp_{\mathfrak{r}} : (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})_{\mathfrak{r}} \\ \langle V, s\rangle & \longmapsto & \langle f^{-1}(V), f^\sharp(V)(s)\rangle. \end{array}$$

Ahora por la Proposición 2.0.2 tenemos los isomorfismos

$$(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})_{\varphi^{-1}_{(\mathfrak{r})}} \cong A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})} \quad \text{y} \quad (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})_{(\mathfrak{r})} \cong B_{\mathfrak{r}}.$$

Entonces $f^\sharp_{\mathfrak{r}}$ no es otra cosa que el morfismo de anillos locales $\varphi_{\mathfrak{r}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})} \longrightarrow B_{\mathfrak{r}}$, donde para cada $\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(B)$ tal morfismo está definido por

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\mathfrak{r}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{r}} \\ \dfrac{a}{s} & \longmapsto & \varphi_{\mathfrak{r}}\left(\dfrac{a}{s}\right) := \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \end{array}$$

así que $\varphi_{\mathfrak{r}}$ es un morfismo local. Por lo tanto $(f, f^\sharp)$ es un morfismo de espacios localmente anillados inducido por φ.

3. Recíprocamente, sean A y B anillos y supongamos que $(f, f^\sharp)$ es un morfismo de espacios localmente anillados

$$(f, f^\sharp) : (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}).$$

Primero que todo, observemos que considerando $V = \mathrm{Spec}(A)$ tenemos el morfismo de anillos

$$f^\sharp(\mathrm{Spec}(A)) : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \longrightarrow (f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})(\mathrm{Spec}(A)).$$

Ahora por definición y nuevamente por la Proposición 2.0.2 tenemos que,

$$(f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})(\mathrm{Spec}(A)) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(f^{-1}(\mathrm{Spec}(A))) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(\mathrm{Spec}(B)) \cong B$$

y $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$. Luego $f^\sharp(\mathrm{Spec}(A))$ no es otra cosa que el morfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$. De otro lado, para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$, el morfismo de tallos

$$f^\sharp_{\mathfrak{p}} : (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})_{f(\mathfrak{p})} \longrightarrow (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})_{\mathfrak{p}}$$

inducido por $f^\sharp$, no es más que $A_{f(\mathfrak{p})} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ (Proposición 2.0.2), el cual es compatible con la aplicación de secciones globales φ y el morfismo de localización ψ. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle \psi_{f(\mathfrak{p})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathfrak{p}}} \\ A_{f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f^\sharp_{\mathfrak{p}}} & B_{\mathfrak{p}}. \end{array}$$

Finalmente observemos que los ideales maximales de los anillos locales $A_{f(\mathfrak{p})}$ y $B_{\mathfrak{p}}$ son respectivamente $\psi_{f(\mathfrak{p})}(f(\mathfrak{p})) = \mathfrak{m}_{A_{f(\mathfrak{p})}}$ y $\psi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}$ y puesto que $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ es un morfismo local entonces tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$(f^\sharp_{\mathfrak{p}})^{-1}(\psi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})) = (f^\sharp_{\mathfrak{p}})^{-1}(\mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}) = \mathfrak{m}_{A_{f(\mathfrak{p})}} = \psi_{f(\mathfrak{p})}(f(\mathfrak{p})). \tag{2.2}$$

De otro lado, la conmutatividad del diagrama anterior garantiza que

$$f^\sharp_{\mathfrak{p}}(\psi_{f(\mathfrak{p})}(f(\mathfrak{p}))) = \psi_{\mathfrak{p}}(\varphi(f(\mathfrak{p}))). \tag{2.3}$$

Luego aplicando $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$ a la igualdad (2.2) obtenemos

$$f^\sharp_{\mathfrak{p}}(\psi_{f(\mathfrak{p})}(f(\mathfrak{p}))) = \psi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = \psi_{\mathfrak{p}}(\varphi(f(\mathfrak{p}))), \tag{2.4}$$

de donde se sigue que $\mathfrak{p} = \varphi(f(\mathfrak{p}))$ y en consecuencia $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$, quedando demostrado con ello que f coincide con la aplicación inducida por φ y por consiguiente $f^\sharp$ también es inducido por φ. En resumen, $(f, f^\sharp)$ es inducido por $\varphi : A \longrightarrow B$. $\square$

De los resultados precedentes tenemos que $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ es un ejemplo de espacio localmente anillado. La siguiente proposición nos provee otros ejemplos

Proposición 2.0.4. *Sean A un anillo, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $f \in A$ y $D(f)$ un abierto básico de X. Entonces $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ es un espacio localmente anillado.*

Demostración. Sea $D(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ entonces $D(f)$ es un espacio topológico con la topología de subespacio. Además $\mathcal{O}_{X|_{D(f)}}$ es el haz restricción sobre $D(f)$. Por otro lado, como los tallos en un punto $\mathfrak{p} \in D(f)$ se definen como el límite directo de los anillos $\mathcal{O}_{x|_{D(f)}}(U)$, donde U recorre el conjunto de vecindades de $\mathfrak{p}$ contenidas en $D(f)$; siendo tal conjunto de vecindades un subconjunto del conjunto de todas las vecindades de $\mathfrak{p}$ en X, entonces $(\mathcal{O}_{X|_{D(f)}})_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{O}_X)_{\mathfrak{p}}$. Luego, la anterior igualdad y la Proposición 2.0.2 garantizan que $(\mathcal{O}_{X|_{D(f)}})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$. □

Definición 2.0.4. *Un esquema afín es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, el cual es isomorfo como espacio localmente anillado, al espectro de algún anillo.*

En virtud de la Proposición 2.0.3 es claro que un ejemplo inmediato de un esquema afín es el espectro de cualquier anillo. Más aún, tenemos lo siguiente.

Proposición 2.0.5. *Si A es un anillo, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $f \in A$ y $D(f)$ es un abierto básico de X, entonces el espacio localmente anillado $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ es isomorfo a $\mathrm{Spec}(A_f)$.*

Demostración. Procedemos mostrando en primer lugar el isomorfismo como espacios topológicos y luego el isomorfismo de haces. A fin de obtener el primer isomorfismo recordemos la correspondencia biyectiva[3] existente entre el conjunto de los ideales primos de A que no cortan a $\langle f \rangle$ y el conjunto de los ideales primos de A_f, donde el primer conjunto corresponde justamente el conjunto $D(f)$. Por lo tanto, como espacios topológicos $\mathrm{Spec}(A_f) \cong D(f)$. Por otro lado, en virtud de la Proposición 2.0.2, sabemos que $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong A_f$, así que $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}}) = \mathcal{O}_X(D(f)) \cong A_f$ y nuevamente 2.0.2 garantiza que $\mathcal{O}_{X|_{D(f)}} \cong \mathcal{O}_{A_f}$. □

[3]Podemos indagar más sobre ésta correspondencia en [?] Proposición 3.11, pag 41

El isomorfismo del anterior resultado garantiza que todo espacio localmente anillado cuyo espacio topológico subyacente es un abierto básico de Spec(A), es otro ejemplo de un esquema afín. Más adelante veremos otros ejemplos.

Ahora con base en la definición de un esquema afín es posible presentar la definición del concepto central de éste trabajo: un *esquema.*

Definición 2.0.5. *Un esquema es un espacio localmente anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$*, tal que para todo punto* $\mathfrak{p} \in X$ *existe una vecindad* $U_\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{p}$ *tal que el par* $(U_\mathfrak{p}, \mathcal{O}_{X|_{U_\mathfrak{p}}})$ *es un esquema afín. En otras palabras, un esquema es un espacio localmente anillado que localmente es un esquema afín.*

A fin de simplificar la notación fijamos lo siguiente. De ahora en adelante cuando consideremos un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ se entenderá que X es el espacio topológico subyacente del esquema y $\mathcal{O}_X$ su haz estructural. Además, cuando sea claro el contexto sólo escribiremos X para denotar un esquema; en lugar de $(X, \mathcal{O}_X)$, y si es necesario hacer referencia sólo al espacio topológico subyacente sin la estructura de esquema, lo denotaremos por sp(X).

Proposición 2.0.6. *Si* X *es un esquema y* $U \subseteq sp(X)$ *un subconjunto abierto, entonces* $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ *es un esquema llamado el esquema estructural inducido sobre el abierto* U *y nos referimos a él como un subesquema abierto de* X*.*

Demostración. Sean $x \in U \subset$ sp(X), Spec(A) = $V \subset$ sp(X) una vecindad afín de p y $f \in A$ tal que $p \in D(f) \subseteq V \cap U$, (los conjuntos $D(f)$ con $f \in A$ forman una base para la topología de Spec(A)). En virtud de la Proposición 2.0.5 sabemos que el espacio anillado $(D(f), \mathcal{O}_V|_{D(f)})$ es un esquema afín y como lo anterior se tiene para cualquier $x \in U$, se concluye que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un esquema. □

El resultado precedente exhibe una serie de esquemas o subesquemas abiertos que se obtienen a partir de un esquema base. Entonces, a partir de ahora dado un esquema fijo X, como mínimo podemos obtener tantos subesquemas como subconjuntos abiertos tenga sp(X).

Definición 2.0.6. *Un morfismo de esquemas es un morfismo de los espacios localmente anillados subyacentes.*

A continuación presentamos algunos ejemplos de esquemas, pero primero que todo, notemos que la Definición 2.0.4 y la Proposición 2.0.5 garantizan que en particular un esquema afín es un esquema.

Ejemplo 2.0.1.

1. El espectro de cualquier anillo A es un esquema.

2. Si k es un cuerpo, entonces $\mathrm{sp}(\mathrm{Spec}(k)) = \{0\}$ consta de un único punto y su estructura de haz $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}$ es justamente k, ésto último es consecuencia de que el espacio topológico tiene un único abierto y de la Proposición 2.0.2.

3. El siguiente es un ejemplo de un esquema que es el espectro de un anillo de valuación. En éste caso particular, como lo veremos a continuación, el espacio topológico subyacente consta de dos puntos y el morfismo inclusión de dicho anillo y su cuerpo de cocientes inducen dos morfismos, pero sólo uno de ellos corresponde al morfismo natural de espacios localmente anillados como lo establece la Proposición 2.0.3.

   Sea R un anillo de valuación discreta[4], esto es, R es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_R$. Si $T = \mathrm{Spec}(R)$ entonces T es un esquema afín cuyo espacio topológico consta de dos puntos, más precisamente

   $$\mathrm{sp(T)} = \{\mathfrak{m}_\mathrm{R}, 0\}.$$

   Puesto que R un DIP se tiene que $\mathfrak{m}_R = \langle\pi\rangle$ para algún $\pi \in R$, de aquí que $V(\pi) = \{\mathfrak{p} \in T | \langle\pi\rangle \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathfrak{m}_R$, ésto es $\mathfrak{m}_R$ es un subconjunto cerrado. De otro lado, $0 = V(\pi)^c = D(\pi) = \{\mathfrak{p} \in T |\ \langle\pi\rangle \nsubseteq \mathfrak{p}\}$ es un subconjunto abierto y denso en T. En efecto, supongamos que existe un cerrado que contiene a 0 entonces se verifica que $0 \subseteq V(\mathfrak{a})$

[4]Un anillo de valuación discreta es un DIP, el cual es el anillo de valuación de alguna valuación discreta de su cuerpo de cocientes. Ver [**?**] pag 72 y anexos 5.2.

para algún $\mathfrak{a} \subseteq R$, ésto es $\mathfrak{a} \subseteq 0$ y en consecuencia $\mathfrak{a} = 0$, luego $V(\mathfrak{a}) = V(0) = T$. Ahora, en virtud de la Proposición 2.0.2, se verifica el isomorfismo de anillos

$$\mathcal{O}_{T,\mathfrak{m}_R} = \mathcal{O}_{\mathfrak{m}_R} \cong R_{\mathfrak{m}_R},$$

siendo

$$R_{\mathfrak{m}_R} = \{a/b |\ a, b \in R\ y\ b \in R \setminus \mathfrak{m}_R\},$$

pero dado que R es un anillo local se tiene que b es una unidad[5] entonces $R_{\mathfrak{m}_R} = R$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_R} \cong R$. De forma análoga también se verifica que

$$\mathcal{O}_{T,0} = \mathcal{O}_0 \cong R_0,$$

siendo $R_0 = \{a/b;\ a, b \in R\ y\ b \in R \setminus \{0\}\} = k$, con k el cuerpo de cocientes de R. Así que, $\mathcal{O}_0 \cong k$.

Adicionalmente, notemos que del morfismo inclusión $\varphi : R \longrightarrow k$ podemos considerar dos aplicaciones, a saber

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{f_1} & T \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{f_2} & T \\ 0 & \longmapsto & \mathfrak{m}_R \end{array}$$

Nuestro propósito ahora es mostrar que una de éstas aplicaciones no corresponde al morfismo inducido por un morfismo de anillos como se da en la Proposición 2.0.3. Primero consideremos la aplicación f_1, la cual induce la aplicación de haces,

$$f_1^\sharp : \mathcal{O}_T \longrightarrow (f_{1*}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}),$$

donde su correspondiente aplicación de tallos está dada por

$$(f_1^\sharp)_0 : \mathcal{O}_{T,f_1(0)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k),0};$$

[5]Recordemos que para todo ideal distinto de (1) existe un ideal maximal que lo contiene, pero dado que $(R, \mathfrak{m}_R)$ es local y $b \notin \mathfrak{m}_R$, a de ser $(b) = (1)$. Ver Corolario 1.4 de [?], pag 4

siendo $f_1(0) = 0$. Así que, teniendo en cuenta los isomorfismos que satisfacen los anillos de la aplicación $(f_1^\sharp)_0 : \mathcal{O}_{T,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k),0}$, se tiene que ésta no es otra cosa que

$$(f_1^\sharp)_0 : k \longrightarrow k,$$

siendo tal un morfismo local. Por lo tanto $(f_1, f_1^\sharp)$ es un morfismo de espacios localmente anillados inducido por φ, como fue dado en la Proposición 2.0.3.
Por otro lado, en el caso de f_2 la aplicación de tallos está dada por

$$(f_2^\sharp)_0 : \mathcal{O}_{T,f_2(0)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k),0};$$

siendo $f_2(0) = \mathfrak{m}_R$, y nuevamente dado los isomorfismos que satisfacen los anillos de la aplicación $(f_2^\sharp)_0 : \mathcal{O}_{T,\mathfrak{m}_R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k),0}$, ésta no es más que

$$\begin{aligned} (f_2^\sharp)_0 : R &\longrightarrow k, \\ r &\longmapsto \varphi(r) = r \end{aligned}$$

entonces $((f_2^\sharp)_0)^{-1}(0) = 0 \neq \mathfrak{m}_R$ y en consecuencia el morfismo de tallos no es un morfismo local, así que $(f_2, f_2^\sharp)$ no es un morfismo de espacios localmente anillados.

4. Sea k un cuerpo, definimos la línea afín sobre k, denotada por $\mathbb{A}^1_k$, como

$$\mathbb{A}^1_k := \mathrm{Spec}(k[x]).$$

Así pues, la línea afín es otro ejemplo de un esquema afín. En éste caso, el punto $\zeta \in \mathrm{Spec}(k[x])$ correspondiente al ideal cero es denso y es llamado *punto genérico.* Por otro lado, los puntos que se corresponden con los ideales maximales de $k[x]$ son llamados *puntos cerrados* y dichos puntos estan en correspondencia[6] uno a uno con polinomios mónicos irreducibles no constantes. En particular, si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, los puntos cerrados están en correspondencia uno a uno con los elementos de k, puesto que los polinomios irreducibles en $k[x]$ son de la forma $p(x) = x - a$, con $a \in k$.

[6]En un DIP un elemento es irreducible si y sólo si su ideal generado es maximal. Para ver más ir a [**?**] Teorema 3.4, pag 136

5. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Definimos el plano afín sobre k como,

$$\mathbb{A}^2_k := \mathrm{Spec}(k[x,y]).$$

Entonces el plano afín es un nuevo ejemplo de un esquema afín. De forma análoga al ejemplo anterior los puntos cerrados de $\mathbb{A}^2_k$ son puntos correspondientes a ideales maximales de $k[x,y]$, los cuales están en correspondencia uno a uno con elementos de la forma $(a_1,a_2) \in k \times k$. Además, el conjunto de los puntos cerrados de $\mathbb{A}^2_k$ con la topología inducida es homeomorfo a la variedad afín[7] $\mathbb{A}^2$. Esto es,

$$\begin{aligned} \{\text{Puntos cerrados } \mathbb{A}^2_k\} \subset \mathrm{Spec}(k[x,y]) &\longleftrightarrow \{(a,b) \in k \times k\} = \mathbb{A}^2(k) \\ \langle x-a_1, y-a_2\rangle &\longleftrightarrow (a_1,a_2) \end{aligned}$$

Adicional a los puntos cerrados, existe un punto genérico ζ correspondiente al ideal primo cero, y tal punto es denso. De otro lado, como $k[x,y]$ es DFU entonces, si $f(x,y)$ es un polinomio irreducible se sigue que el ideal (f) es primo y en consecuencia $(f) \in \mathrm{Spec}(k[x,y])$, así que para cada polinomio irreducible $f(x,y) \in k[x,y]$ existe un punto $\eta \in \mathrm{Spec}(k[x,y])$ tal que su clausura está dada por,

$$\overline{\eta} = \eta \cup \{(a,b) \in k \times k;\ f(a,b) = 0\}.$$

Decimos que η es un punto genérico de la curva $f(x,y) = 0$. Luego,

$$\mathrm{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}^2_k = \{\zeta, \{\text{Puntos cerrados}\}, \{\text{Puntos genéricos de curvas}\}\}.$$

6. Sean X_1 y X_2 dos esquemas, $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$ subconjuntos abiertos y

$$(\varphi, \varphi^\sharp) : (U_1, \mathcal{O}_{X_1|_{U_1}}) \longrightarrow (U_2, \mathcal{O}_{X_2|_{U_2}}).$$

un isomorfismo de espacios localmente anillados. Definimos a X, como el esquema obtenido pegando los esquemas X_1 y X_2 a lo largo de U_1 y U_2 vía φ. Es decir,

$$X = X_1 \sqcup X_2/_\sim, \text{ donde } x_1 \sim \varphi(x_1) \text{ para cada } x_1 \in U_1$$

[7] Una variedad afín es un subconjunto cerrado e irreducible de $\mathbb{A}^n$. Ver Capítulo I, Variedades, de [**?**].

y dotamos a X de la topología cociente. Entonces existen aplicaciones $i_1 : X_1 \longrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \longrightarrow X$, donde un subconjunto $V \subset X$ es abierto si tanto $i_1^{-1}(V)$ como $i_2^{-1}(V)$ son abiertos de X_1 y X_2 respectivamente. Por otro lado, la estructura de haz está definida de la siguiente manera. Para cualquier subconjunto abierto $V \subset X$ definimos el conjunto $\mathcal{O}_X(V)$ como

$$\mathcal{O}_X(V) := \{\langle s_1, s_2\rangle;\ \varphi^\sharp(i_1^{-1}(V) \cap U_1)(s_1|_{i_1^{-1}(V)\cap U_1}) = s_2|_{i_2^{-1}(V)\cap U_2}\},$$

donde $s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V))$ y $s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V))$. Luego, como $\mathcal{O}_X$ es un haz sobre X, $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado y tanto X_1 como X_2 son esquemas. Entonces para cada punto de X existe una vecindad U tal que $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ es un esquema afín. Por lo tanto, X es un esquema[8].

7. El presente ejemplo exhibe un caso particular del pegamento de esquemas. Sean k un cuerpo, $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$, $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1_k \setminus \{p\}$, donde p es el punto correspondiente al ideal maximal $\langle x\rangle$ y sea $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ la aplicación identidad. Entonces haciendo $X = X_1 \sqcup X_2/\sim$, donde $x_1 \sim \varphi(x_1) = x_1$, se tiene que X el pegamento de X_1 y X_2 a lo largo de U_1 y U_2 vía φ, que no es más que una línea afín con el punto p doble, es decir $X = \mathbb{A}^1_k \cup \{p\}$. En éste caso X es un esquema que no es un esquema afín, como consecuencia del punto doble.

Nuestro propósito ahora es construir un esquema a partir de un anillo graduado. Para tal fin, es necesario recordar algunos conceptos y propiedades de los anillos graduados, que presentaremos a continuación.

Decimos que un anillo S es un anillo graduado, si posee una descomposición de la forma

$$S = \bigoplus_{d\geqslant 0} S_d,$$

donde los S_d son grupos abelianos tales que para cualquier $d, e \geqslant 0$ se tiene $S_d S_e \subseteq S_{d+e}$. Además,

[8]Para ahondar más en el pegado de haces y esquemas ver anexos 5.3, en éste apartado se aclara el porqué $\mathcal{O}_X$ es efectivamente un haz y X un esquema.

1. Si $x \in S_d$ entonces decimos que x es un *elemento homogéneo* de grado d.
2. Un ideal $\mathfrak{a} \subseteq S$ es un *ideal homogéneo* si $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geqslant 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$.
3. Un ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ es *primo* si para cualquier par de elementos homogéneos $f, g \in S$ se tiene que, $f.g \in \mathfrak{a}$ implica $f \in \mathfrak{a}$ o $g \in \mathfrak{a}$.
4. Simbolizamos por S_+ al ideal $\bigoplus_{d>0} S_d$.

Definición 2.0.7. *Sea S un anillo graduado, definimos el espectro primo homogéneo del anillo graduado S, denotado por* $\mathrm{Proy}(S)$ *como el conjunto*

$$\mathrm{Proy}(S) = \{\mathfrak{p} \subset S |\ \ \mathfrak{p} \text{ ideal homogéneo primo tal que } S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}\}$$

De forma análoga al caso del espectro de un anillo, lo que se pretende hacer es dotar a $\mathrm{Proy}(S)$ de una topología dada por subconjuntos cerrados y posteriormente presentar el haz estructural asociado a dicho espacio topológico. Para tal fin, si $\mathfrak{a} \subseteq S$ es un ideal homogéneo definimos el conjunto $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}(S) |\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$, el cual satisface las siguientes propiedades.

Lema 2.0.2. *Para todo anillo graduado S se tienen las siguientes igualdades:*

1. $V(0) = \mathrm{Proy}(S)$.
2. $V(S) = \varnothing$.
3. $V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, *para cada par de ideales homogéneos $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de S.*
4. *Si $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ es una familia de ideales homogéneos de S entonces* $V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$

Demostración. Esta prueba es análoga a la prueba del Lema 2.0.1. □

Observe que el Lema 2.0.2 garantiza que $\mathrm{Proy}(S)$ es un espacio topológico cuya topología está dada por los conjuntos cerrados $V(\mathfrak{a})$ siendo $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo de S. Ahora nuestro paso a seguir es definir un haz de anillos sobre $\mathrm{Proy}(S)$.

Definición 2.0.8. *Sean S un anillo graduado, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}(S)$ y*

$$S_{(\mathfrak{p})} = \{x \in T^{-1}S | \ \ \mathrm{grado}(x) = 0, \quad con \quad T = S \setminus \mathfrak{p}\}.$$

Entonces para cualquier abierto $U \subseteq \mathrm{Proy}(S)$ definimos $\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)}(U)$ como el conjunto de todas las funciones

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})}$$

tales que:

1. *Para todo $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$.*
2. *Para cada $\mathfrak{p} \in U$ existen una vecindad $V \subset U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos homogéneos $a, f \in S$ con $\mathrm{grado}(a) = \mathrm{grado}(f)$ tales que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f} \in S_{(\mathfrak{q})}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$, con $f \notin \mathfrak{q}$.*

Teniendo en cuenta que estamos considerando anillos graduados, de ahora en adelante cuando no exista ambigüedad con el espacio topológico en cuestión denotaremos por $\mathcal{O}(U)$ al conjunto $\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)}(U)$ y en algunos casos escribiremos $\mathcal{O}$ para denotar $\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)}$. Adicionalmente, si $V \subseteq U$ es un subconjunto abierto, entonces la aplicación restricción es la natural. Esto es,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(U) & \xrightarrow{\rho_{UV}} & \mathcal{O}(V). & & \\ s & \longmapsto & s|_V : V & \longrightarrow & \coprod_{\mathfrak{p} \in V} S_{(\mathfrak{p})} \end{array}$$

Luego, $\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)}$ es un haz de anillos[9].

Entonces, a partir de ahora si S es un anillo graduado llamaremos espectro homogéneo de S al par $(\mathrm{Proy}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)})$.
El resultado que viene a continuación es el equivalente a un par de resultados ya vistos en el caso de $\mathrm{Spec}(A)$. Más precisamente, es un equivalente de las Proposiciones 2.0.2 y 2.0.5, con lo cual obtenemos el ejemplo adicional de un esquema que buscabamos.

[9]En éste caso no precisamos verificar que los conjuntos $\mathcal{O}(U)$ son anillos y que en efecto $\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)}$ es un haz, puesto que es un procedimiento equivalente a hecho en el caso de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$.

Antes de enunciar dicho resultado, notemos que si $f \in S_+$ entonces el conjunto

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proy}(S) | f \notin \mathfrak{p}\} = \text{Proy}(S) \setminus V(\langle f \rangle) = V(\langle f \rangle)^c$$

es un subconjunto abierto de $\text{Proy}(S)$, puesto que $V(\langle f \rangle)$ es un subconjunto cerrado de $\text{Proy}(S)$. Además, como los elementos de $\text{Proy}(S)$ son todos los ideales primos homogéneos que no contiene a todo S_+ entonces para todo $\mathfrak{p} \in \text{Proy}(S)$ existe $f \in S_+$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, ésto es $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, por lo tanto los conjuntos abiertos $D_+(f)$ con $f \in S_+$ forman una cubierta de $\text{Proy}(S)$.

Para simplificar la notación, de ahora en adelante el grado de un elemento $x \in S$ lo denotaremos por $\partial(x)$.

Proposición 2.0.7. *Sea S un anillo graduado.*

1. *Para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Proy}(S)$, $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong S_{(\mathfrak{p})}$.*

2. *Para cualquier elemento homogéneo $f \in S_+$ se verifica el isomorfismo de espacios localmente anillados*

$$\left(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}\right) \cong \left(\text{Spec}(S_{(f)}), \mathcal{O}_{\text{Spec}(S_{(f)})}\right),$$

   donde $S_{(f)}$ es el subanillo de elementos de grado cero en el anillo localizado S_f

3. *$(\text{Proy}(S), \mathcal{O})$ es un esquema.*

Antes de adentrarnos en la prueba de éste resultado resaltemos la información que provee.

1. Primero que todo el isomorfismo $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong S_{(\mathfrak{p})}$ garantiza que $(\text{Proy}(S), \mathcal{O})$ es un espacio localmente anillado.

2. Por otro lado, el isomorfismo del segundo item garantiza que $(\text{Proy}(S), \mathcal{O})$ es localmente un esquema afín, puesto que los conjuntos abiertos $D_+(f)$ forman una cubierta de $\text{Proy}(S)$. En consecuencia, $(\text{Proy}(S), \mathcal{O})$ es un esquema.

Demostración.

1. Primero que todo definiremos un morfismo entre $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ y $S_{(\mathfrak{p})}$ y luego procedemos a mostrar que en efecto es un isomorfismo. Sea

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & S_{(\mathfrak{p})}. \\ & s_{\mathfrak{p}} = \langle U, s\rangle & \longmapsto & \varphi(s_{\mathfrak{p}}) = \dfrac{a}{f} \end{array}$$

Recordemos que si $s_{\mathfrak{p}} = \langle U, s\rangle \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ entonces $s \in \mathcal{O}(U)$, así que para cada $\mathfrak{p} \in U$ existen una vecindad $V \subset U$ de $\mathfrak{p}$ y elememtos homogéneos de S, digamos a y f con $\partial(a) = \partial(f)$, tales que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f} \in S_{(\mathfrak{q})}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$ y $f \notin \mathfrak{q}$. Esto es, $s_{\mathfrak{p}}$ localmente es un cociente y dicho cociente es justamente su imagen mediante φ.
Veamos que φ es sobreyectiva. Sea $x = \dfrac{a}{b} \in S_{(\mathfrak{p})}$ con $a, b \in S$; $\partial(a) = \partial(b)$ y $b \notin \mathfrak{p}$. Puesto que el conjunto abierto

$$D_+(b) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Proy}(S);\ b \notin \mathfrak{q}\} \subseteq \operatorname{Proy}(S),$$

es una vecindad de $\mathfrak{p}$, entonces la sección

$$\begin{array}{rccc} x: & D_+(b) & \longrightarrow & \displaystyle\coprod_{\mathfrak{r}\in D_+(b)} S_{(\mathfrak{r})} \\ & \mathfrak{r} & \longmapsto & x(\mathfrak{r}) = \dfrac{a}{b} \end{array}$$

es localmente es el cociente $\dfrac{a}{b}$ y por lo tanto, $\langle D_+(b), x\rangle$ es una preimagen de x mediante φ.

A continuación mostraremos que φ es inyectivo, y para ello consideraremos dos gérmenes en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ que poseen la misma imagen mediante φ. Esto es, sean $U \subseteq \operatorname{Proy}(S)$ un abierto y $s_{\mathfrak{p}} = \langle U, s\rangle$, $t_{\mathfrak{p}} = \langle U, t\rangle$ elementos de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ tales que $\varphi(s_{\mathfrak{p}}) = \varphi(t_{\mathfrak{p}})$. Supongamos ahora que las secciones $s, t \in \mathcal{O}(U)$ son localmente los siguientes cocientes de elementos de S,

$$s(\mathfrak{p}) = \frac{a_1}{f_1} \quad \text{y} \quad t(\mathfrak{p}) = \frac{a_2}{f_2},$$

donde $f_1, f_2 \notin \mathfrak{p}$, $\partial(a_1) = \partial(f_1)$ y $\partial(a_2) = \partial(f_2)$. Luego, como $\varphi(s_\mathfrak{p}) = \varphi(t_\mathfrak{p})$ entonces $\frac{a_1}{f_1} = \frac{a_2}{f_2}$, así que existe $f \notin \mathfrak{p}$ tal que $f(a_1 f_2 - a_2 f_1) = 0$. Ahora como el conjunto de todos los ideales homogéneos primos $\mathfrak{r}$ que satisfacen que $f, f_1, f_2 \notin \mathfrak{r}$ está dado por

$$C = \{\mathfrak{r} \in \mathrm{Proy}(S) | f, f_1, f_2 \notin \mathfrak{r}\} = D_+(f) \cap D_+(f_1) \cap D_+(f_2);$$

siendo $C \subseteq \mathrm{Proy}(S)$ un subconjunto abierto y una vecindad de $\mathfrak{p}$, entonces haciendo $\mathcal{C} = C \cap U$ se verifica que

$$s|_\mathcal{C} = t|_\mathcal{C},$$

lo cual implica que $\langle \mathcal{C}, s\rangle = \langle \mathcal{C}, t\rangle$ y en consecuencia $s_\mathfrak{p} = \langle U, s\rangle = \langle U, t\rangle = t_\mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong S_{(\mathfrak{p})}$.

2. Primero que todo, fijemos un elemento $f \in S_+$ y construyamos un isomorfismo de espacios anillados,

$$(\varphi, \varphi^\sharp) : (D_+(f), \mathcal{O}_{D_+(f)}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(S_{(f)}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_{(f)})}).$$

Para definir φ, tengamos presente las siguientes observaciones.

i) $S_{(f)}$ es un subanillo de S_f, siendo $S_{(f)}$ compuesto por todos los elementos de S_f que tienen grado cero. Esto es,

$$S_{(f)} := \{\frac{s}{f^n} \in S_f |\ s, f \in S,\ n \geq 0 \ \ y \ \ \partial(s) = n \cdot \partial(f)\},$$

ii) Existe un morfismo natural de un anillo S en su localización respecto al conjunto multiplicativo $T = \{f^n | n \geq 0\}$, dado por

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & S & \longrightarrow & T^{-1}(S) = S_f \\ & s & \longmapsto & \frac{s}{1} = \frac{sf^n}{f^n} \end{array}$$

Además existe una correspondencia biyectiva entre los ideales primos de S_f y los ideales primos de S que no cortan a T, siendo todos los ideales de S_f ideales extendidos[10].

[10]Ver Capítulo III de [?], Anillos y módulos de fracciones, Proposición 3.11, pag 47.

iii) Como $S_{(f)} \subseteq S_f$ entonces tenemos el morfismo inclusión $i : S_{(f)} \longrightarrow S_f$, así que si $\mathfrak{q} \subseteq S_f$ es un ideal homogéneo primo entonces $i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cap S_{(f)}$ es un ideal homogéneo primo de $S_{(f)}$.

Ahora bien, definamos el siguiente morfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \{\text{Ideales homogéneos de S}\} & \longrightarrow & \{\text{Ideales de } S_{(f)}\} \\ \mathfrak{a} & \longmapsto & \varphi(\mathfrak{a}) := i^{-1} \circ \lambda(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

Esto es,

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \{\frac{a}{f^n} \in S_f;\ a \in \mathfrak{a}\ y\ \partial(a) = n.\partial(f)\}.$$

Notemos que el morfismo φ definido anteriormente no es el deseado, pero al considerar su restricción al conjunto abierto $D_+(f)$ obtenemos precisamente el buscado. En efecto, si $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ se tiene que $(f) \nsubseteq \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es un ideal homogéneo primo $\mathfrak{p} \cap T = \varnothing$. En consecuencia $\lambda(\mathfrak{p})$ es un ideal homogéneo primo de S_f, así que $\lambda(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_f$ es tal que

$$i^{-1}(\lambda(\mathfrak{p})) = i^{-1}(\mathfrak{p}S_f) = \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \varphi(\mathfrak{p})$$

es primo de $S_{(f)}$. Por lo tanto obtenemos el morfismo buscado, el cual exhibimos a acontinuación.

$$\begin{array}{rcl} \varphi : D_+(f) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} \end{array}$$

Ahora mostraremos que φ es inyectivo y para ello consideraremos dos ideales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{r}$ en $D_+(f)$ que poseen la misma imagen mediante φ. Esto es, sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{r} \in D_+(f)$ tales que

$$\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)} = \mathfrak{r}S_f \cap S_{(f)} = \varphi(\mathfrak{r}).$$

Entonces para cada $x \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\dfrac{x^{\partial(f)}}{f^{\partial(x)}} \in \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$ y en consecuencia existe $r \in \mathfrak{r}$ tal que $\dfrac{x^{\partial(f)}}{f^{\partial(x)}} = \dfrac{r}{f^m}$ con $m\partial(f) = \partial(r)$; puesto que $\dfrac{r}{f^m} \in \mathfrak{r}S_f \cap S_{(f)}$. Luego,

$\frac{x^{\partial(f)}}{f^{\partial(x)}} = \frac{r}{f^{\frac{\partial(r)}{\partial(f)}}}$ con $r \in \mathfrak{r}$, donde la anterior igualdad garantiza la existencia de $k > 0$ tal que $f^k(x^{\partial(f)} f^{\frac{\partial(r)}{\partial(f)}} - r f^{\partial(x)}) = 0$, entonces considerando $\partial(x) < \dfrac{\partial(r)}{\partial(f)}$ se sigue que

$$f^{k+\partial(x)}(x^{\partial(f)} f^{\frac{\partial(r)}{\partial(f)} - \partial(x)} - r) = 0.$$

En consecuencia,

$$\frac{x^{\partial(f)}}{1} = \frac{r}{f^{\frac{\partial(r)}{\partial(f)} - \partial(x)}}$$

con $r \in \mathfrak{r}$ y $f^{\frac{\partial(r)}{\partial(f)} - \partial(x)} \in T$, siendo $T = \{f^n;\ n \geq 0\}$. Esto es,

$$\frac{x^{\partial(f)}}{1} = \frac{r}{f^{\frac{\partial(r)}{\partial(f)} - \partial(x)}} \in \mathfrak{r}S_f,$$

por lo tanto $x^{\partial(f)} \in \mathfrak{r}$ y como $\mathfrak{r}$ es un ideal primo, en particular se tiene que $x \in \mathfrak{r}$, así que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r}$. De forma análoga se muestra que $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}$ y con ello se concluye que $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}$. Es decir, φ es inyectiva.

Ahora para demostrar que φ es sobreyectiva consideremos $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S_{(f)})$ y verifiquemos la existencia de un ideal en $D_+(f)$ cuya imagen mediante φ sea $\mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{ec}$ con respecto a la aplicación inclusión $i : S_{(f)} \longrightarrow S_f$ entonces $\mathfrak{q}$ es la contracción de un ideal primo de S_f[11]. Esto es, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^c$ siendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^e$ un ideal primo de S_f.

Luego, como $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S_f)$ y $\mathrm{Spec}(S_f)$ está en correspondencia biyectiva con los ideales primos de S que no cortan a T, entonces existe un ideal primo $\widetilde{\mathfrak{p}} \in S$ tal que $\mathfrak{p} = \lambda(\tilde{\mathfrak{p}})$ con $\widetilde{\mathfrak{p}} \cap T = \varnothing$. Además, como $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S_{(f)})$ entonces para todo $x \in \mathfrak{q}$ se tiene que $\partial(x) = 0$, en particular los generadores de $\mathfrak{q}$ tienen grado cero, así que $\mathfrak{q}$ es homogéneo y por construcción $\tilde{\mathfrak{p}}$ también lo es. Por lo tanto, $\widetilde{\mathfrak{p}} \in D_+(f)$ y satisface que

$$\varphi(\tilde{\mathfrak{p}}) = i^{-1}(\lambda(\tilde{\mathfrak{p}})) = i^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^c = \mathfrak{q},$$

es decir φ es sobreyectiva.

Ahora para verificar que φ es un homeomorfismo, hacemos uso de la siguiente equivalencia, si $\mathfrak{a} \subseteq S$ es un ideal homogéneo entonces $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ si y sólo si $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$. En

[11] Ver Capítulo III de [?], Anillos y módulos de fracciones, Proposición 3.16, pag 49.

efecto, φ^{-1} es continua si la imagen mediante φ de un cerrado de $\mathrm{Proy}(S)$ es un cerrado de $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$, así que consideremos $\mathfrak{a} \subseteq S$ un ideal homogéneo y $V(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Proy}(S)$, y como $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ implica $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$ entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi(V(\mathfrak{a})) &= \{\varphi(\mathfrak{p}) |\ \ \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}(S)\} \\
&= \{\varphi(\mathfrak{p}) |\ \ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}(S)\} \\
&= \{\varphi(\mathfrak{p}) |\ \ \varphi(\mathfrak{a}) \subset \varphi(\mathfrak{p}),\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}(S)\} \\
&= V(\varphi(\mathfrak{a})),
\end{aligned}$$

siendo $V(\varphi(\mathfrak{a}))$ es cerrado de $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ Luego φ^{-1} es continua.
Para mostrar que φ es continua consideremos $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Spec}(S_{(f)})$, así que $V(\mathfrak{a})$ es un cerrado de $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$. Como φ es una biyección existe $\mathfrak{r} \in D_+(f)$ tal que $\varphi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{a}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(V(\mathfrak{a})) &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) |\ \ \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S_{(f)})\} \\
&= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) |\ \ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p},\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S_{(f)})\} \\
&= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) |\ \varphi(\mathfrak{r}) \subset \varphi(\tilde{\mathfrak{p}}) \text{ para algún } \tilde{\mathfrak{p}} \in D_+(f)\} \\
&= \{\tilde{\mathfrak{p}} \in D_+(f);\ \mathfrak{r} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}\} \\
&= V(\mathfrak{r}),
\end{aligned}$$

donde $V(\mathfrak{r})$ es un cerrado de $\mathrm{Proy}(S)$ y la existencia de $\widetilde{\mathfrak{p}} \in D_+(f)$ tal que $\varphi(\widetilde{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$ se garantiza puesto que φ es una biyección. Luego φ es continua.
Por lo tanto, $\varphi : D_+(f) \longrightarrow \mathrm{Spec}(S_{(f)})$ es un homeomorfismo el cual induce el morfismo de haces

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_{(f)})} \longrightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)|_{D_+(f)}}).$$

Además, como $\varphi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)|_{D_+(f)}}) \subseteq \varphi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)})$ entonces la aplicación de los tallos está dada por

$$(\varphi^\sharp)_{\mathfrak{p}} : (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_{(f)})})_{\varphi(\mathfrak{p})} \longrightarrow (\varphi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)}))_{\mathfrak{p}},$$

pero dado que en virtud del item anterior tenemos los isomorfismos

$$(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_{(f)})})_{\varphi(\mathfrak{p})} \cong (S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})} \quad \text{y} \quad (\mathcal{O}_{\mathrm{Proy}(S)})_{\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})},$$

entonces la aplicación de tallos inducida no es otra cosa que

$$(\varphi^\sharp)_\mathfrak{p} : (S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})} \longrightarrow S_{(\mathfrak{p})}.$$

Notemos que resta probar que $(\varphi^\sharp)_\mathfrak{p}$ es un morfismo local, para ello exhibimos un elemento de $(S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$ y vemos como está dado dicho morfismo. Recordemos que $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$, así que si $y \in (S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})}$ entonces $y = \dfrac{x}{g}$ donde $x, g \in S_{(f)}$ y $g \notin \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$, es decir $x = \dfrac{a}{f^n}$ con $\partial(a) = n\partial(f)$ y $g = \dfrac{c}{f^m}$ con $\partial(c) = m\partial(f)$ y $c \notin \mathfrak{p}$. Por lo tanto,

$$y = \frac{af^m}{cf^n}, \text{ con } \partial(a) + m\partial(f) = \partial(c) + n\partial(f) \text{ y } cf^n \notin \mathfrak{p}.$$

Luego $(\varphi^\sharp)_\mathfrak{p}$ actúa de la siguiente forma,

$$\begin{array}{rccc} (\varphi^\sharp)_\mathfrak{p}: & (S_{(f)})_{\varphi(\mathfrak{p})} & \longrightarrow & S_{(\mathfrak{p})} \\ & \dfrac{af^m}{cf^n} & \longmapsto & \dfrac{af^m}{cf^n} \\ & \dfrac{af^k}{bf^k} & \longleftarrow & \dfrac{a}{b} = \dfrac{af^k}{bf^k} \end{array}$$

Entonces, $(\varphi^\sharp)_\mathfrak{p}$ es un isomorfismo y por tanto un morfismo local. Así que podemos afirmar que $(\varphi, \varphi^\sharp)$ es un morfismo de espacios localmente anillados. □

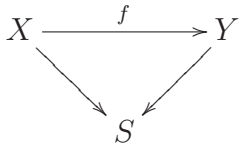
Ejemplo 2.0.2. Si A es un anillo, definimos el $n-$espacio proyectivo sobre A como el esquema $\mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proy} A[x_0, ..., x_n]$. Notemos que estamos justamente en el caso de la proposición anterior, puesto que $A[x_0, ..., x_n]$ es un anillo graduado. En particular, si A es un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces $\mathbb{P}^n_k$ es un esquema cuyo subespacio de puntos cerrados[12] es naturalmente isomorfo a la variedad llamada *n-espacio proyectivo.*

A continuación veremos que la noción de esquema generaliza la noción de variedad. Como vimos en ejemplos anteriores, 2.0.1, los espacios topológicos subyacentes de esquemas como

[12]Los puntos cerrado son aquellos puntos que se corresponden con los ideales maximales de $k[x_1, ..., x_n]$.

$\overset{1}{k}$ y $\overset{2}{k}$ tienen más puntos que las variedades correspondientes. Sin embargo, mostraremos que existe una forma natural de adicionar puntos genéricos para cada subconjunto irreducible de una variedad, tal que la variedad se convierta en un esquema.

Definición 2.0.9. *Sea S un esquema fijo. Un esquema sobre S es un esquema X junto con un morfismo de esquemas $X \longrightarrow S$. Además, si X y Y son esquemas sobre S, un morfismo de X a Y como esquemas sobre S, es un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ el cual es compatible con los morfismos dados a S. Esto es, el siguiente diagrama conmuta.*



De ahora en adelante denotaremos por $\mathfrak{Ech}(S)$ a la categoría de esquemas sobre S. En particular si A es un anillo, abusando de la notación, escribiremos $\mathfrak{Ech}(A)$ para denotar la categoría de esquemas sobre $\mathrm{Spec}(A)$.

Proposición 2.0.8. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Existe un funtor natural completamente fiel*[13]

$$t : \mathfrak{Var}(k) \longrightarrow \mathfrak{Ech}(k),$$

de la categoría de las variedades sobre k a los esquemas sobre k. Para cualquier variedad V, su espacio topológico es homeomorfo a el conjunto de puntos cerrados de $\mathrm{sp}(t(V))$*, y su haz de funciones regulares es obtenido por restricción del haz estructural de $t(V)$ vía este homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathfrak{Top}$ la categoría de los espacios topológicos y definamos

$$\begin{array}{rcl} t : \mathfrak{Top} & \longrightarrow & \mathfrak{Top} \\ X & \longmapsto & t(X) := \text{conjunto de subconjuntos} \\ & & \qquad \text{cerrados irreducibles no} \\ & & \qquad \text{vacíos de } X. \end{array}$$

[13]Un funtor es completamente fiel si su aplicación funtorial es inyectiva.

Probaremos que t es un funtor. Para ello notemos que si Y es un subconjunto cerrado de X entonces, por definición $t(Y) \subseteq t(X)$ y además,

1. $t(Y_1 \cup Y_2) = t(Y_1) \cup t(Y_2)$
2. $t(\bigcap Y_i) = \bigcap t(Y_i)$.

Esto nos permite definir una topolología sobre $t(X)$ tomando como subconjuntos cerrados los subconjuntos de la forma $t(Y)$, donde Y es un subconjunto cerrado de X; ésto es, un subconjunto cerrado en $t(X)$ es una colección de subconjuntos cerrados irreducibles de X.

De otro lado, observe que si $Y \subset X$ es un subconjunto irreducible, entonces su clausura $\overline{Y}$ en X es irreducible. Luego toda función continua $f : X_1 \longrightarrow X_2$ induce una aplicación continua,

$$\begin{array}{ccc} t(X_1) & \xrightarrow{t(f)} & t(X_2) \\ t(Y) & \longmapsto & t(f)(t(Y)) := \overline{f(Y)}, \end{array}$$

y por lo tanto t es un funtor en la categoría de los espacios topológicos.
De otro lado, la función $\alpha : X \longrightarrow t(X)$ tal que $\alpha(p) = \{p\}^- = \overline{\{p\}}$ es continua. En efecto, si $V = t(Y)$ un subconjunto cerrado de $t(X)$ entonces

$$\alpha^{-1}(V) = \alpha^{-1}(t(Y)) = \{x \in X;\ \alpha(x) = \{x\}^- \in t(Y)\}.$$

Además, si $y \in Y$ entonces $\{y\}^- \in t(Y)$ y por lo tanto $Y \subseteq \alpha^{-1}(t(Y))$. Ahora, si $x \in \alpha^{-1}(t(Y)) \setminus Y$ se sigue que $\{x\}^- \in t(Y)$, es decir $\{x\}^-$ es un subconjunto cerrado de Y, así que $x \in \{x\}^- \subset Y$, lo cual contradice la escogencia de x. Por lo tanto $\alpha^{-1}(t(Y)) = Y$. Es decir $\alpha^{-1}(V)$ es cerrado, con lo cual concluimos que α es continua.
De lo anterior tenemos que α induce una biyección,

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Conjuntos abiertos de X}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Conjuntos abiertos de } t(X)\} \\ Y^c & \longleftrightarrow & t(Y)^c \end{array}$$

Ahora, sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, $\mathfrak{V}$ una variedad sobre k y $\mathcal{O}_{\mathfrak{V}}$ su haz de funciones regulares. Probaremos que $(t(\mathfrak{V}), \alpha_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{V}}))$ es un esquema sobre k. Como cualquier variedad puede ser cubierta por subvariedades abiertas afines entonces basta

probar que si $\mathfrak{V}$ es afín entonces $(t(\mathfrak{V}), \alpha_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{V}}))$ es un esquema sobre k.
Denotemos por $A = A(\mathfrak{V}) := k[x_1, ...x_n]/I(\mathfrak{V})$ el anillo coordenado de $\mathfrak{V}$ y por $X = \mathrm{Spec}(A)$. Nos proponemos ahora definir un morfismo de espacios localmente anillados, $(\beta, \beta^\sharp) : (\mathfrak{V}, \mathcal{O}_{\mathfrak{V}}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$. Para ello, primero definimos

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathfrak{V} & \longrightarrow & X \\ p & \longmapsto & \beta(p) := \mathfrak{m}_p = \{f \in A |\ f(p) = 0\}. \end{array}$$

(Observe que por definición y por Capítulo I, Teorema 3.2, item (b) de [?], β es una biyección de $\mathfrak{V}$ sobre el conjunto de puntos cerrados de X.)
Afirmamos que β es un homeomorfismo de $\mathfrak{V}$ sobre su imagen. En efecto, si $Y \subset \beta(\mathfrak{V}) \subseteq X$ es un cerrado, entonces existe un ideal $\mathfrak{a} \subset A$ tal que $Y = \beta(\mathfrak{V}) \cap V(\mathfrak{a})$ y puesto que $k[x_1, ..., x_n]$ es noetheriano entonces $\mathfrak{a} = \langle a_1, ..., a_m \rangle$ para algunos $a_i \in A$ con $a_i = \widetilde{a_i} + I(\mathfrak{V})$ y $\widetilde{a_i} \in k[x_1, ..., x_n]$. De aquí que,

$$\begin{array}{rcl} \beta^{-1}(Y) & = & \{x \in \mathfrak{V};\ \beta(x) \in Y\} \\ & = & \{x \in \mathfrak{V} |\ \mathfrak{m}_x \in Y\} \\ & = & \{x \in \mathfrak{V} |\ \mathfrak{m}_x \in V(\mathfrak{a})\} \\ & = & \{x \in \mathfrak{V} |\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_x\} \\ & = & \{x \in \mathfrak{V} |\ \widetilde{a_i}(x) = 0 \text{ para todo } i\} \\ & = & \bigcap_{i=1}^{m} V(\widetilde{a_i}) \end{array}$$

De otro lado, sean $U \subseteq X$ un subconjunto abierto, $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y $p \in \beta^{-1}(U)$. Puesto que $\mathcal{O}_{X,\beta(p)} \cong A_{\beta(p)} = A_{\mathfrak{m}_p}$, entonces pasando al cociente por $\mathfrak{m}_p$ y teniendo en mente que $A_{\mathfrak{m}_p}/\mathfrak{m}_p \cong k$, el elemento $\langle U, s \rangle \in \mathcal{O}_{X,\beta(p)}$ induce la función regular sobre $\beta^{-1}(U)$ la cual definimos por $s(p) := \overline{\langle U, s \rangle}$. Esto es,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \overset{\beta^\sharp(U)}{\longrightarrow} & \beta_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{V}})(U) = \mathcal{O}_{\mathfrak{V}}(\beta^{-1}(U)) \\ s & \longmapsto & \beta^\sharp(s) : \beta^{-1}(U) \longrightarrow k \\ & & p \longmapsto s(p) \end{array}$$

A continuación nos proponemos demostrar que $\beta^\sharp(U) : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{V}}(\beta^{-1}(U))$ es un isomorfismo. En efecto, si $t \in \mathcal{O}_{\mathfrak{V}}(\beta^{-1}(U))$ es una función regular, entonces $t(p) \in k \cong A_{\mathfrak{m}_p}/\mathfrak{m}_p$

para todo $p \in \beta^{-1}(U)$. Ahora, haciendo uso de los isomorfismos satisfechos por los anillos locales $A_{\mathfrak{m}_p} = A_{\beta(p)} \cong \mathcal{O}_{X,\beta(p)}$ tenemos que $t(p) = \overline{\langle U, s\rangle}$ para algún $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y así $\beta^\sharp(U)(s) = t$. De otro lado, si $\beta^\sharp(U)(s) = \beta^\sharp(U)(t)$ entonces $[\beta^\sharp(U)(s)](p) = [\beta^\sharp(U)(t)](p)$ para todo $p \in \beta^{-1}(U)$, así que $\overline{\langle U, s\rangle} = s(p) = t(p) = \overline{\langle U, t\rangle}$ y en consecuencia $\overline{\langle U, s-t\rangle} = \overline{\langle U, 0\rangle}$ lo que equivale a que $s = t$.

Finalmente, dado que los ideales primos de A están en correspondencia uno a uno con los subconjuntos cerrados irreducibles de $\mathfrak{V}$, se tiene que

$$X = \operatorname{Spec}(A) \longleftrightarrow t(\mathfrak{V}) \quad \text{y} \quad V \xrightarrow{\alpha} t(V) \cong X$$

entonces

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\cong} (t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V),$$

es un isomorfismo, por lo tanto $(t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V)$ es un esquema afín.

Ahora, para dar un morfismo de $(t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V)$ a $\operatorname{Spec}(k)$ establecemos el morfismo de anillos

$$\begin{array}{ccccc} k & \longrightarrow & \Gamma(t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V) \cong \Gamma(V, \mathcal{O}_V) & & \\ \lambda & \longmapsto & \lambda : V & \longmapsto & k \\ & & p & \longmapsto & \lambda(p) := \lambda \end{array}$$

Entonces $t(V)$ es un esquema sobre k.

Finalmente, si V y W son dos variedades entonces la siguiente aplicación natural es una biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Var}(k)}(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}(k)}(t(V), t(W)),$$

lo cual muestra que el funtor t es completamente fiel. En particular, ésto implica que $t(V)$ es isomorfo a $t(W)$ si y sólo si V es isomorfo a W. □

Capítulo 3

PROPIEDADES Y MORFISMOS DE ESQUEMAS.

Es completamemte loable el preguntarnos por la existencia de ciertas propiedades dadas para los espacios topológicos, que son de profunda relevancia, pero en éste caso para los esquemas. Así que en éste capítulo exhibimos algunas propiedades para los esquemas tales como ser conexo, reducido, cuasi-compacto, entre otras. También estudiaremos algunos tipos de morfismos de esquemas y para tal fin presentamos unas serie de resultados que a su vez permiten dar cuenta de algunos ejemplos.

Definición 3.0.1. *Un esquema es conexo (respectivamente irreducible) si su espacio topológico es conexo (respectivamente irreducible*[1]*).*

Definición 3.0.2. *Un esquema* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es reducido si para cualquier subconjunto abierto* $U \subset X$ *el anillo* $\mathcal{O}_X(U)$ *es reducido.*

Proposición 3.0.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ *es reducido si y sólo si los anillos locales* $\mathcal{O}_p$ $(p \in X)$ *no tienen elementos nilpotentes.*

Demostración. Supongamos que existe $p \in X$ tal que $\mathcal{O}_{X,p}$ tiene un elemento nilpotente f_p. Esto implica que existen, una vecindad abierta $V \subseteq X$ de p, $f \in \mathcal{O}_X(V)$ y $n > 0$ tales

[1]Ver Capítulo I de [**?**], Variedades, pag 3.

que $f_p = \langle V, f\rangle$ y $f^n = 0$ ahora, puesto que $\mathcal{O}_X(V)$ es reducido se sigue que $f_p = 0$.
De otro lado supongamos que existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $\mathcal{O}_X(U)$ tiene un elemento nilpotente $f \neq 0$, esto implica que $f_p := \langle U, f\rangle \neq 0$ es un elemento nilpotente en $\mathcal{O}_{X,p}$ lo cual es ridículo. □

Definición 3.0.3. *Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es entero si para todo subconjunto abierto $U \subseteq X$ el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio de integridad.*

Proposición 3.0.2. *Sean A un anillo, $X = \mathrm{Spec}(A)$ y consideremos el esquema afín $(X, \mathcal{O}_X)$. Entonces,*

1. *X es irreducible si y sólo si el nilradical de A, $\eta(A)$, es primo.*
2. *X es reducido si y sólo si $\eta(A) = 0$.*
3. *X es entero si y sólo si A es dominio entero.*

Demostración.

1. Puesto que los conjuntos $X_f = D(f)$ forman una base para la topología de X entonces, X es irreducible si y sólo si, $X_f \neq \varnothing$ y $X_g \neq \varnothing$ implica $X_f \cap X_g \neq \varnothing$, equivalentemente, X es irreducible si y sólo si, $X_f \cap X_g = \varnothing$ implica $X_f = \varnothing$ ó $X_g = \varnothing$.

   De otro lado, $X_f = \varnothing$ si y sólo si $f \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in X$ si y sólo si $f \in \eta(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in X} \mathfrak{p}$ si y sólo si f es nilpotente. En resumen, X es irreducible si y sólo si, fg es nilpotente implica que f es nilpotente ó g es nilpotente, lo cual equivale a decir que $\eta(A)$, es un ideal primo.

2. Supongamos que $\eta(A) = 0$ y que existen, un abierto $U \subseteq X$ y una sección no nula $s \in \mathcal{O}(U)$ nilpotente.

   Por definición para todo $\mathfrak{p} \in U$ existen, $n \in$, una vecindad de $\mathfrak{p}$, $V \subseteq U$ y elementos $a, b \in A$ tales que para todo $\mathfrak{r} \in V$ se tiene que $s^n(\mathfrak{r}) = \dfrac{a^n}{b^n} = 0$ en $A_{\mathfrak{r}}$ para todo $\mathfrak{r} \in V$, luego existe $t \in A \setminus \mathfrak{r}$ tal que $ta^n = 0$ de lo cual se sigue que $t^n a^n = (ta)^n = 0$, pero

dado que $\eta(A) = 0$ se tiene que $ta = 0$, así que existe $t \in A \setminus \mathfrak{r}$ tal que $ta = 0$. Esto es, $s(\mathfrak{r}) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{at}{bt} = 0$ para todo $\mathfrak{r} \in V$. Por lo tanto $s = 0$ lo cual contradice el supuesto, así que X es reducido.

Recíprocamente, si $0 \neq f \in \eta(A)$ entonces la sección,

$$\begin{aligned} s : X_f &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in X_f} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto s(\mathfrak{p}) = \frac{f}{1} \end{aligned}$$

es nilpotente y por lo tanto X no es reducido.

3. Si X es entero, entonces $A \cong \mathcal{O}(X)$ es entero. Recíprocamente, supongamos que existen $a_1 \neq 0 \neq a_2$ elementos de A tales que $a_1 a_2 = 0$ y consideremos las secciones

$$\begin{aligned} s_1 : X_{a_1} &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in X_{a_1}} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto s_1(\mathfrak{p}) = \frac{a_1}{1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_2 : X_{a_2} &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in X_{a_2}} A_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto s_2(\mathfrak{p}) = \frac{a_2}{1}. \end{aligned}$$

Así que $\widetilde{s_i} = s_i|_{X_{a_1 a_2}} \in \mathcal{O}(X_{a_1} \cap X_{a_2}) = \mathcal{O}(X_{a_1 a_2})$ con $i = 1, 2$ son tales que existe una vecindad $V \subset X_{a_1 a_2}$ de $\mathfrak{p}$ tal que

$$\widetilde{s_1}\widetilde{s_2}(\mathfrak{r}) = \widetilde{s_1}(\mathfrak{r})\widetilde{s_2}(\mathfrak{r}) = \frac{a_1}{1}\frac{a_2}{1} = \frac{a_1 a_2}{1} = 0$$

para todo $\mathfrak{r} \in V$. Por lo tanto $\mathcal{O}(X_{a_1 a_2})$ no es un dominio entero, en consecuencia $(X, \mathcal{O}_X)$ no es entero. □

Proposición 3.0.3. *Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es entero si y sólo si es reducido e irreducible.*

Demostración. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema entero, entonces para cada abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathcal{O}(U)$ es un dominio entero, ésto es no posee divisores de cero y en consecuencia no posee elementos nilpotentes, así que $(X, \mathcal{O}_X)$ es reducido. Ahora, supongamos que X no es irreducible entonces existen dos abiertos disjuntos U_1 y U_2 de X tales que $X = U_1 \cup U_2$. Luego $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2)$ donde $\mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2)$ no es un dominio entero, así que X no es entero lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, X es irreducible. Recíprocamente, supongamos que $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema reducido e irreducible y $U \subseteq X$

un subconjunto abierto cualquiera. Vamos a suponer la existencia de dos secciones $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tales que $fg = 0$, y mediante éstas secciones definimos dos subconjuntos cerrados cuya unión es justamente U. Luego, en virtud de la irreducibilidad de X se garantiza que U es uno de los cerrados definidos y tal igualdad implica que la restricción de una de las secciones a un subconjunto abierto afín de U es nilpotente, pero al ser X un esquema reducido se concluye que la sección es nula, obteniendo así lo deseado.
Sean $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tales que $fg = 0$ y consideremos los subconjuntos de U

$$Y = \{x \in U |\ f_x \in \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}\} \quad \text{y} \quad Z = \{x \in U |\ g_x \in \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Tales subconjuntos son cerrados. En efecto, como X es un esquema entonces localmente es un esquema afín, así que para todo abierto $U \subset X$ existen, un anillo B tal que

$$(U, \mathcal{O}_{X|_U}) \cong (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}),$$

y los isomorfismos $\varphi : \mathcal{O}(U) \longrightarrow B$ y $\psi : \mathcal{O}_{X,p} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ para todo $p \in U$.
Luego, denotando por $\overline{s}$ a la imagen mediante φ de una sección $s \in \mathcal{O}(U)$, podemos afirmar que $U \cap X_f = D(\overline{f})$, siendo $X_f = \{x \in X |\ f_x \notin \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}\}$. A fin de verificar la anterior afirmación notemos el isomorfismo $U \cong \mathrm{Spec}(B)$ identifica cada elemento $u \in U$ con un ideal primo $\mathfrak{p}_u$ de B y en virtud de φ, ψ y el morfismo de localización α podemos reescribir $U \cap X_f = \{u \in U |\ f_u \notin \mathfrak{m}_u \subset \mathcal{O}_{X,u}\}$ como

$$U \cap X_f = \{\mathfrak{p}_u \subseteq B |\ \overline{f_{\mathfrak{p}_u}} \notin \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_u} \subset B_{\mathfrak{p}_u}\},$$

siendo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_u} \subset B_{\mathfrak{p}_u}$ el ideal maximal de $B_{\mathfrak{p}_u}$, ésto es $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_u} = \mathfrak{p}_u B_{\mathfrak{p}_u}$. Así que,

$$U \cap X_f = \{\mathfrak{p}_u \subseteq B |\ \overline{f} \notin \mathfrak{p}_u\} = \{\mathfrak{p}_u \in \mathrm{Spec}(B) |\ \overline{f} \notin \mathfrak{p}_u\} = D(\overline{f}).$$

En consecuencia $Y = (U \cap X_f)^c$ es un subconjunto cerrado de U. De forma análoga también tenemos que Z es un subconjunto cerrado de U.
Además $U = Y \cup Z$. Para verificar la igualdad anterior primero observemos cómo está dado el producto en $\mathcal{O}_{X,p}$. Sea $p \in U$, si t y l son elementos de $\mathcal{O}_{X,p}$ entonces $t = \langle V_t, s_t \rangle$ y $l = \langle V_l, s_l \rangle$ con $s_t \in \mathcal{O}(V_t)$ y $s_l \in \mathcal{O}(V_l)$. Luego $V_t \cap V_l \neq \varnothing$ es una vecindad de p, así que $\mathcal{O}(V_t \cap V_l)$ es un anillo y $tl = \langle V_t \cap V_l, s_t|_{V_{lt}} \cdot s_l|_{V_{tl}} \rangle$. Ahora bien, de la definición de Y y Z es

claro que $Y \cup Z \subseteq U$, pero adicionalmente si $u \in U$ entonces $f_u \in \mathfrak{m}_u$ o $g_u \in \mathfrak{m}_u$, pues de lo contrario tendríamos que $f_u g_u = (fg)_u \notin \mathfrak{m}_u$, lo cual es un absurdo ya que $(fg)_u = 0 \in \mathfrak{m}_u$. Así que, $u \in Y$ o $u \in Z$, es decir $U \subseteq Y \cup Z$, y en consecuencia $U = Y \cup Z$.
Ahora, como $U = Y \cup Z$ con Y y Z subconjuntos cerrados de U y X es irreducible entonces $U \subseteq X$ es irreducible[2], lo cual implica que $U = Y$ o $U = Z$.
Supongamos que $U = Y$, ésto es $U = Y = \{u \in U;\ f_u \in \mathfrak{m}_u\}$. Así que podemos afirmar que la restricción de f a cualquier subconjunto abierto y afín de U será nilpotente. En efecto, para todo $V \subseteq U$ tenemos que $f|_V$ es tal que $(f|_V)_x \in \mathfrak{m}_x$, ésto es $f_x \in \mathfrak{m}_x$ para todo $x \in V$ y todo $V \subseteq U$, lo cual implica que $\overline{f_x} \in \mathfrak{M}_x \subseteq B_{\mathfrak{p}_x}$ y como $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x}$ se sigue que $\overline{f} \in \mathfrak{p}_x$ para todo $x \in V$ y todo $V \subseteq U$. Esto es, $\overline{f} \in \mathfrak{p}_x$ para todo $\mathfrak{p}_x \in \mathrm{Spec}(B)$ y en consecuencia $\overline{f}$ es nilpotente, lo cual implica que f también lo es, pero dado que X es un esquema reducido se sigue que $f = 0$. De forma análoga, si $U = Z$ entonces $g = 0$. Por lo tanto, X es entero. □

Definición 3.0.4. *Un esquema X es localmente noetheriano si puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines* $\mathrm{Spec}(A_i)$*, donde cada A_i es un anillo noetheriano.*

Definición 3.0.5. *Un espaccio topológico es cuasi-compacto si cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita.*

Proposición 3.0.4. *Si X es un esquema afín entonces* $\mathrm{sp}(X)$ *es cuasi-compacto.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $X = \mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$. Ahora puesto que $\varnothing = \bigcap_{i\in I} D(f_i) = V(\{f_i\}_{i\in I})$ entonces $A = \{f_i\}_{i\in I}$ y por lo tanto podemos expresar el elemento $1 \in A$ como una combinación lineal finita, $1 = a_1 f_1 + a_2 f_2 + ... + a_n f_n$ y en consecuencia $1 \in \langle f_1, f_2, ..., f_n \rangle$. Por lo tanto $X = \mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$. Esto es, $X = \mathrm{Spec}(A)$ es cuasi-compacto. □

Definición 3.0.6. *Un esquema X es noetheriano si es localmente noetheriano y cuasi-compacto.*

[2]Ver Capítulo I de [**?**], Variedades, Ejemplo 1.1.3.

Notemos que la definición anterior la podemos reformular como, X es un esquema noetheriano si puede ser cubierto por un número finito de subconjuntos abiertos afines $\mathrm{Spec}(A_i)$, con cada A_i un anillo noetheriano.

Proposición 3.0.5. *Un esquema X es localmente noetheriano si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $U = \mathrm{Spec}(A)$, A es un anillo noetheriano. En particular, un esquema afín $X = \mathrm{Spec}(A)$ es un esquema noetheriano si y sólo si el anillo A es un anillo noetheriano.*

Demostración. Supongamos que todo subconjunto abierto afín $U = \mathrm{Spec}(A)$ es tal que A es un anillo noetheriano, entonces evidentemente por definición X es un esquema localmente noetheriano.
Recíprocamente, supongamos que $X = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Spec}(B_i)$ con B_i noetheriano y que $U = \mathrm{Spec}(A)$ es un subconjunto abierto afín. Puesto que a su vez $\{\mathrm{Spec}(B_i)\}_{i\in I}$ cubre a U, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ admite una cubierta por subconjuntos abiertos, los cuales son espectros de anillos noetherianos B_i. Debemos probar que A es noetheriano.
Sean $U = \mathrm{Spec}(B) \subset X$ un abierto con B noetheriano y $D(f) \subseteq U$ para algún $f \in A$. Observe que la aplicación inclusión $i : U \longrightarrow X$ induce la aplicación de haces sobre X

$$i^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_{X|_U}),$$

y en consecuencia considerando $V = \mathrm{Spec}(A)$ obtenemos el homomorfismo de anillos,

$$i^\sharp(X) : A \longrightarrow B.$$

De otro lado, si denotamos por $\overline{f}$ a la imagen de f mediante $i^\sharp(X)$, entonces el elemento $i^\sharp(X)(f)/1$ es una unidad en $B_{\overline{f}}$ y por lo tanto existe un único homomorfismo de A_f en $B_{\overline{f}}$, el cual es un isomorfismo dado que $D(f) = D(\overline{f})$, esto es $A_f \cong B_{\overline{f}}$, y puesto que B es noetheriano entonces $B_{\overline{f}}$ también lo es. En consecuencia A_f es noetheriano.
Luego, dado que $X = \mathrm{Spec}(A) = \bigcup\limits_{f\in A} D(f)$ y $D(f) \cong \mathrm{Spec}(A_f)$ entonces X es cubierto por los subconjuntos $\mathrm{Spec}(A_f)$ con $f \in A$ y A_f un anillo noetheriano. Además, como X es cuasi-compacto entonces posee una subcubierta finita de $\{\mathrm{Spec}(A_f)\}_{f\in A}$. Es decir,

$X = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Spec}(A_{f_i})$, siendo A_{f_i} anillos noetherianos y como una consecuencia de la anterior subcubierta finita se tiene que el subconjunto finito $\{f_1, f_2, ..., f_r\} \subseteq A$ es un conjunto generador[3] de A.

Para completar la prueba de que A es noetheriano primero consideremos el siguiente lema:

Lema 3.0.1. *Sea $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal y sea $\varphi_i : A \longrightarrow A_{f_i}$ la aplicación de localización dada por $\varphi_i(a) = \dfrac{a}{1}$ para cada $i = 1, ..., r$ entonces $\mathfrak{a} = \bigcap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i})$*

Demostración. La inclusión $\mathfrak{a} \subseteq \bigcap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i})$ es evidente. De otro lado, sea $b \in A$ tal que $b \in \bigcap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i})$, entonces $\varphi_i(b) = \dfrac{b}{1} = \dfrac{a_i}{f_i^{n_i}}$ en A_{f_i} para cada i con $a_i \in \mathfrak{a}$ y $n_i > 0$. Como lo anterior se tiene para cada $i = 1, ..., r$ entonces podemos considerar $n = \max\{n_i\}_{i=1}^{r}$, así que $\varphi_i(b) = \dfrac{b}{1} = \dfrac{a_i}{f^n}$ para cada i. Luego existe $m_i > 0$ tal que $f^{m_i}(f_i^n b - a_i) = 0$ en A para cada i, de igual forma podemos fijar los m_i considerando $m = \max\{m_i\}_{i=1}^{r}$, entonces $f_i^{m+n}b - a_i f^m = 0$ y como $a_i \in \mathfrak{a}$ entonces $a_i f^m \in \mathfrak{a}$, en consecuencia $f_i^{m+n}b \in \mathfrak{a}$ para cada i.

Ahora como los $f_1, f_2, ..., f_r$ generan el ideal unidad entonces sus potencias n–ésimas también lo hacen. Entonces tomando $N = m + n$ tenemos que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i^N, \text{ para algunos } c_i \in A.$$

Luego

$$b = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i^N b \in \mathfrak{a},$$

probando con ello la contenencia $\bigcap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i}) \subseteq \mathfrak{a}$ y por la tanto también la igualdad $\bigcap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a})A_{f_i}) = \mathfrak{a}$ □

Ahora, retornando al problema que nos atañe, podemos probar de manera sencilla que A es un anillo noetheriano haciendo uso del Lema 3.0.1. Consideremos la siguiente cadena ascendente $C_{\mathfrak{a}}$ de ideales de A

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq ... \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n+1} \subseteq ...$$

[3] Ver Capítulo II de [?], Esquemas, Proposición 2.8, pag 65.

Notemos que para cada $i = 1, ..., r$ tenemos las respectivas cadenas ascendentes C_i de ideales de A_{f_i}, que son justamente las cadenas de las imagenes de los ideales $\mathfrak{a}_j$ mediante los morfismos φ_i. Es decir la cadena C_i está dada por,

$$\varphi_i(\mathfrak{a}_1)A_{f_i} \subseteq \varphi_i(\mathfrak{a}_2)A_{f_i} \subseteq ... \subseteq \varphi_i(\mathfrak{a}_n)A_{f_i} \subseteq \varphi_i(\mathfrak{a}_{n+1})A_{f_i} \subseteq ...,$$

pero dado que cada A_{f_i} es noetheriano entonces cada una de éstas cadenas es estacionaria. Es decir $\varphi_i(\mathfrak{a}_{k_i})A_{f_i} = \varphi_i(\mathfrak{a}_{k_{i+1}})A_{f_i}$ para algún k_i y para todo $i = 1, ..., r$. Entonces haciendo $n = \max\{k_i\}_{i=1}^{r}$ podemos afirmar que $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1}$. En efecto, por el Lema anterior tenemos

$$\mathfrak{a}_{n+1} = \bigcap^{r} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a}_{n+1})A_{f_i}),$$

pero dado que las cadenas C_i son estacionarias se tiene que $\varphi_i(\mathfrak{a}_{n+1})A_{f_i} = \varphi_i(\mathfrak{a}_n)A_{f_i}$ para cada i entonces

$$\mathfrak{a}_{n+1} = \bigcap^{r} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\mathfrak{a}_n)A_{f_i}) = \mathfrak{a}_n,$$

lo cual implica que la cadena $C_{\mathfrak{a}}$ también es estacionaria. Por lo tanto A, es noetheriano. □

Definición 3.0.7. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es de tipo localmente finito si existe una cubierta de Y por subconjuntos abiertos afines $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierta por subconjuntos abiertos afines $U_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$ donde cada A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. El morfismo f es de tipo finito si además cada $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por un número finito de los U_{ij}.*

Definición 3.0.8. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo finito si existe una cubierta de Y por subconjuntos abiertos afines $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ tal que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ es afín igual a $\mathrm{Spec}(A_i)$, donde cada A_i es una B_i-álgebra el cual es finitamente generada como B_i-módulo.*

Observación 3.0.1. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo finito entonces para cada i el morfismo de espacios topológicos

$$f_i : \mathrm{Spec}(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B_i),$$

induce el morfismo de anillos $f_i^\sharp : B_i \longrightarrow A_i$ que determina la estructura de B_i–módulo para cada A_i de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} B_i \times A_i & \longrightarrow & A_i \\ (b, a) & \longmapsto & b \cdot a \coloneqq f_i^\sharp(b) \cdot a \end{array}$$

Observemos que en las Definiciones 3.0.7 y 3.0.8 una propiedad sobre un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ está determinada por la existencia de una cubierta abierta afín de Y con cierta propiedad adicional. A continuación veremos que ésto es equivalente a requerir dicha propiedad adicional para cada subconjunto abierto afín de Y. Para tal fin primero que todo consideraremos un lema que nos ayudará en la prueba de las proposiciones siguientes.

Lema 3.0.2. *Sea X un esquema y P una propiedad de un abierto afín de X tal que:*

1. *Para cualquier* $\mathrm{Spec}(A) \subseteq X$*, si* $\mathrm{Spec}(A)$ *tiene la propiedad P entonces $D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$ para todo $f \in A$ también tienen la propiedad P.*

2. *Si $f_1, f_2, ..., f_n$ generan a A y cada $D(f_i) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ tiene la propiedad P entonces* $\mathrm{Spec}(A)$ *también la tiene.*

Entonces si existe una cubierta abierta afín de X tal que cada afín tiene la propiedad P, entonces cada abierto afín de X tiene la propiedad P.

Demostración. Sean $\{\mathrm{Spec}(A_i)\}_{i \in I}$ una cubierta abierta y afín de X, tal que para cada $i \in I$, $\mathrm{Spec}(A_i)$ tiene la propiedad P y $\mathrm{Spec}(B)$ un abierto afín. Notemos que $\{\mathrm{Spec}(B) \cap \mathrm{Spec}(A_i)\}_{i \in I}$ forma una cubierta abierta de $\mathrm{Spec}(B)$, donde cada abierto a su vez se puede cubrir con abiertos afines que son localizaciones por un elemento de ambos anillos A_i y B. Luego, como los $\mathrm{Spec}(A_i)$ tienen la propiedad P entonces de la condición (1) las localizaciones también tienen la propiedad P y por lo tanto se obtiene una cubierta de $\mathrm{Spec}(B)$ por abiertos básicos de elementos que generan a B con la propiedad P, así que de la condición (2) se puede concluir que $\mathrm{Spec}(B)$ posee la propiedad P. □

Proposición 3.0.6. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es de tipo localmente finito si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $V = \mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(V)$ puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $U_j = \mathrm{Spec}(A_j)$, donde cada A_j es una $B-$álgebra finitamente generada.*

Demostración. Supongamos que f es un morfismo de tipo localmente finito y que P es la propiedad de que la preimagen de un abierto afín $\mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$ tiene una cubierta por abiertos afines $\mathrm{Spec}(A_i)$ donde cada A_i es finitamente generado como $B-$álgebra. Basta verificar que se cumplen las dos condiciones del lema anterior.
Sea $\mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$ un abierto afín tal que $f^{-1}(\mathrm{Spec}(B))$ tiene una cubierta $\mathrm{Spec}(A_i)$ donde cada A_i es finitamente generado como $B-$álgebra y consideremos $g \in B$. Si $f_i : \mathrm{Spec}(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ es la restricción de f, entonces haciendo $\widetilde{g}$ la imagen de g mediante el morfismo natural de anillos $B \longrightarrow A_i$ se tiene que $f_i^{-1}(D(g)) = \mathrm{Spec}(A_i)_g$, entonces $f^{-1}(D(g)) = \bigcup \mathrm{Spec}(A_i)_g$, donde cada $(A_i)_{\widetilde{g}}$ es finitamente generado como B_g-álgebra cuyos generadores son las imagenes de los generadores de A_i como $B-$álgebra, con lo cual se verifica la primera condición.
Ahora, supongamos que $g_1, g_2, ..., g_n$ generan a B y que cada $D(g_i) = \mathrm{Spec}(B)_{g_i}$ posee la propiedad P. Entonces los conjuntos $\mathrm{Spec}(B)_{g_i}$ forman una cubierta de $\mathrm{Spec}(B)$ y por tanto los conjuntos $f^{-1}(\mathrm{Spec}(B)_{g_i})$ cubren a $f^{-1}(\mathrm{Spec}(B))$ y como cada $\mathrm{Spec}(B)_{g_i}$ posee la propiedad P entonces cada $f^{-1}(\mathrm{Spec}(B)_{g_i})$ posee una cubierta por abiertos afines, digamos $\mathrm{Spec}(A_{ij})$ donde cada A_{ij} es finitamente generado como $B_{g_i}-$álgebra, más aún como cada B_{g_i} es finitamente generado como $B-$álgebra con generador $\frac{1}{g_i}$, en particular los A_{ij} son finitamente generados como $B-$álgebra. Luego la unión de todos los $\mathrm{Spec}(A_{ij})$ forman una cubierta de $f^{-1}(\mathrm{Spec}(B))$, la cual es finitamente generada como $B-$álgebra, verificando así que $\mathrm{Spec}(B)$ posee la propiedad P. Por lo tanto se satisface la condición dos del Lema.
El recíproco es consecuencia inmediata de la definición de un morfismo de tipo localmente finito. □

Proposición 3.0.7. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es finito si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $V = \mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es afín igual a $\mathrm{Spec}(A)$,*

donde A es un $B-$módulo finito.

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo finito y que P es la propiedad:
P: Si $V = \mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$ es un abierto, entonces $f^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(A)$ con A un $B-$módulo finitamente generado.
Probaremos que se satisfacen las dos condiciones del Lema 3.0.2 para garantizar la primera implicación.
Primero que todo, observemos que el morfismo $f|_{\mathrm{Spec}(A)} : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$, induce un morfismo de anillos $\varphi : B \longrightarrow A$ el cual a su vez dota al anillo A de una estructura de B-módulo de manera natural. Ahora, sean $\mathrm{Spec}(B) \subseteq Y$ un abierto afín que satisface la propiedad **P** y $\{g_1, g_2, ..., g_r\}$ es un conjunto generador de A como $B-$módulo, entonces para cada $g \in B$ se tiene que el conjunto $\{\frac{g_1}{1}, \frac{g_2}{1}, ..., \frac{g_r}{1}\} \subset A_{\widetilde{g}}$ con $\widetilde{g} = \varphi(g)$ es un conjunto generador de $A_{\widetilde{g}}$ como un B_g-módulo. Finalmente, puesto que $f^{-1}(D(g)) = f^{-1}(\mathrm{Spec}(B_g)) = \mathrm{Spec}(A_g)$, entonces $D(g)$ posee la propiedad P y por lo tanto se satisface la condición (1).

Para la segunda propiedad si denotamos por $U = f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathrm{Spec}(B))$, entonces tenemos un morfismo de esquemas

$$(U, \mathcal{O}_{X|_U}) \xrightarrow{(f, f^\sharp)} (V, \mathcal{O}_V),$$

el cual induce un homomorfismo de anillos,

$$B = \mathcal{O}_V(V) \xrightarrow{f^\sharp(V)} \mathcal{O}_{X|_U}(f^{-1}(V)) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U) .$$

Supongamos ahora que existen elementos $g_1, ..., g_r$ que generan a B y tales que los anillos locales B_{g_i} tienen la propiedad **P**. Esto es, $f^{-1}(\mathrm{Spec}(B_{g_i})) = \mathrm{Spec}(A_i)$ donde cada A_i es finitamente generado como B_{g_i}-módulo. Observe que si $\mathfrak{g}_i$ es la imagen de g_i bajo la aplicación $B \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, entonces el conjunto $\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, , ...\mathfrak{g}_r\}$ genera a $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ pues los g_i generan el ideal unidad en B y $f^\sharp(V)$ es un homomorfismo de anillos.
Afirmamos que:

$$U_{\mathfrak{g}_i} = \{u \in U | \mathfrak{g}_{i_u} \notin \mathfrak{m}_u \subset \mathcal{O}_{U,u}\} = \mathrm{Spec}(A_i)$$

para todo i, donde $\mathfrak{g}_{iu}$ es el tallo de $\mathfrak{g}_i$ en u y $\mathfrak{m}_u$ es el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{U,u}$. En efecto, el conjunto $\mathrm{Spec}(A_i) \cap U_{\mathfrak{g}_i}$ es el conjunto de ideales primos de A_i que no contienen a $\mathfrak{g}_i$ y puesto que tenemos un homomorfismo de anillos $B_{g_i} \longrightarrow A_i$, entonces $\mathfrak{g}_i$ es invertible en A_i y por lo tanto no existen ideales primos de A_i que lo contengan, de aquí que $\mathrm{Spec}(A_i) \subseteq U_{\mathfrak{g}_i}$. En consecuencia $\mathrm{Spec}(A_i) = \mathrm{Spec}(A_i) \cap U_{\mathfrak{g}_i} = D(\overline{\mathfrak{g}_i}) = \mathrm{Spec}(A_{i_{\overline{\mathfrak{g}_i}}})$ donde $\overline{\mathfrak{g}_i} \in A_i = \Gamma(\mathrm{Spec}(A_i), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_i)})$ es la restricción de $\mathfrak{g}_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.
De otro lado la igualdad $\mathrm{Spec}(A_i) = \mathrm{Spec}(A_i) \cap U_{\mathfrak{g}_i}$ implica que

$$\mathrm{Spec}(A_i) \cap \mathrm{Spec}(A_j) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_j) : \mathfrak{g}_i \notin \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_i) : \mathfrak{g}_j \notin \mathfrak{p}\},$$

y por lo tanto $U_{\mathfrak{g}_i} \cap \mathrm{Spec}(A_j) = \mathrm{Spec}(A_i) \cap \mathrm{Spec}(A_j)$ para todo $j \neq i$ y puesto que los conjuntos $\mathrm{Spec}(A_i)$ cubren a U, entonces $U_{\mathfrak{g}_i} = \mathrm{Spec}(A_i)$ y el criterio de afinidad implica que U es afín, digamos $U = \mathrm{Spec}(A)$.
Debemos probar ahora que A es finitamente generado como B-módulo. Primero que todo observe que la igualdad $\mathrm{Spec}(A_i) = \mathrm{Spec}(A_{i_{\overline{\mathfrak{g}_i}}})$ implica que $A_i = A_{i_{\overline{\mathfrak{g}_i}}}$. Si $\{a_{ij}\}$ es un conjunto generador para A_i como B_{g_i}-módulo, entonces el conjunto $\{a_{ij}/1, a_{ij}/g_i\}$ genera a A_i como B-módulo y por lo tanto cualquier $c \in A$ puede ser escrito como $c/1 = p_i/g_i^{n_i}$ en A_{g_i} donde p_i es una combinación lineal de los $\{a_{ij}\}$ con coeficientes en B, entonces $g_i^{n_i} c = p_i$ para todo i, luego si $N = \max\{n_k\}_{k=1}^r$; entonces existen coeficientes $b_1, ..., b_N \in B$ tales que $b_1 g_1^N + ... + b_N g_N^N = 1$ en A y por lo tanto $b_1 g_1^{N-n_1} p_1 + ... + b_r g_N^{N-n_r} p_r = c$, de aquí que $\{\{a_{ij}\} \cup \{g_i^k\}_{k=1}^r\}$ es un conjunto generador para A como B-módulo, esto verifica la condicion (2) del Lema.
El recíproco es consecuencia inmediata de la definición de un morfismo finito. □

Ejemplo 3.0.1.

1. Si V es una variedad sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces el esquema asociado $t(V)$ es entero, noetheriano y de tipo localmente finito sobre k.
   Primero que todo veamos que $(t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V)$ es un esquema noetheriano, para ello hacemos uso del resultado y la prueba de la Proposición 2.0.8. Recordemos que

$$(t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V) \cong (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}),$$

donde $\alpha : V \longrightarrow t(V)$ y A es el anillo coordenado de la variedad V. Entonces $(t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V)$ es un esquema afín.

En efecto, por el Corolario 2.3 del Capítulo I de [**?**], V puede ser cubierta por un número finito de subvariedades abiertas afines, digamos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y procediendo como en la prueba de la Proposición 2.0.8, los correspondientes espacios anillados $(t(V_i), \alpha_{i_*} \mathcal{O}_{V_i})$ son esquemas afines esto es, $(t(V_i), \alpha_{i_*} \mathcal{O}_{V_i}) \cong (\mathrm{Spec}(A_i), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A_i)})$ con $A_i = A_i(V_i)$ el anillo coordenado de V_i el cual es claramente Noetheriano. Entonces

$$t(V) = \bigcup_{i=1}^{n} t(V_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Spec}(A_i),$$

es cubierto por un número finito subconjuntos abiertos afines $\mathrm{Spec}(A_i)$ con A_i noetheriano.

Veamos ahora que $t(V)$ es un dominio entero. Si $U \subseteq t(V)$ un subconjunto abierto, entonces puesto que $\alpha : V \longrightarrow t(V)$ es continua, $\alpha^{-1}(U) = W \subset V$ es abierto y por lo tanto $(\alpha_* \mathcal{O}_V)(U) = \mathcal{O}_V(\alpha^{-1}(U)) = \mathcal{O}_V(W) = k[x_1, ..., x_n]/I(W)$ es obviamente un dominio entero.

Finalmente veamos que $t(V)$ es de tipo localmente finito sobre k. Esto es, existe un morfismo $t(V) \xrightarrow{f} k$, siendo f de tipo localmente finito. Notemos que aquí k representa el esquema $k = (\mathrm{Spec}(k), k)$, cuyo espacio topológico consta de un único punto; a saber $sp(\mathrm{Spec}(k)) = \{0\}$. Así que podemos definir el morfismo de esquemas

$$(f, f^\sharp) : (t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(k), k),$$

donde $f : t(V) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ no es más que la función nula y $f^\sharp : k \longrightarrow f_*(\alpha_* \mathcal{O}_V)$ es tal que si $U \subseteq \mathrm{Spec}(k)$ es un abierto entonces

$$\begin{aligned} f^\sharp(U) : k &\longrightarrow \mathcal{O}_V(\alpha^{-1}(f^{-1}(U))) \\ \lambda &\longmapsto f^\sharp(U)(\lambda) : \alpha^{-1}(f^{-1}(U)) \longrightarrow k, \end{aligned}$$

y al ser $sp(\mathrm{Spec}(k)) = \{0\} = \mathrm{D}(1)$ entonces considerando $U = D(1)$ tenemos

$$f^\sharp(U) : k \longrightarrow \mathcal{O}_V(\alpha^{-1}(f^{-1}(U))) = \mathcal{O}_V(V),$$

puesto que $f^{-1}(D(1)) = t(V)$ y $\alpha^{-1}(t(V)) = V$. Entonces $f^\sharp(U)$ no es más que

$$\begin{aligned} f^\sharp(U) : k &\longrightarrow \mathcal{O}_V(V) \\ \lambda &\longmapsto f^\sharp(U)(\lambda) : V \longrightarrow k \\ & \qquad\qquad p \longmapsto [f^\sharp(U)(\lambda)](p) = \lambda. \end{aligned}$$

Además

$$f^{-1}(D(1)) = f^{-1}(\mathrm{Spec}(k)) = t(V) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Spec}(A_i),$$

siendo $A_i = A_i(V_i) = k[x_1, ..., x_n]/I(V_i)$, es decir A_i es una $k-$álgebra finitamente generada, entonces $f^{-1}(D(1))$ está cubierto por un número finito de subconjuntos abiertos afines $\mathrm{Spec}(A_i)$ donde los A_i son $k-$álgebras finitamente generadas. Por lo tanto $t(V)$ es de tipo localmente finito sobre k.

2. Si p es un punto de una variedad V con anillo local $\mathcal{O}_p$ entonces $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)$ es un esquema entero, noetheriano, que en general no es de tipo finito sobre k.
   Recordemos que si V es una variedad afín o proyectiva entonces $\mathcal{O}_p \cong A(V)_{\mathfrak{m}_p}$[4], con $p \in V$ y donde $A(V)$ es el anillo coordenado de la variedad V, así que $A(V)_{\mathfrak{m}_p}$ será un dominio entero finitamente generado como $k-$álgebra. Luego de la Proposición 3.0.2 se concluye que $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)$ es entero. Además como $A(V)_{\mathfrak{m}_p}$ es noetheriano tenemos que $\mathcal{O}_p$ es noetheriano, entonces de la Proposición 3.0.5 se sigue que $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)$ es noetheriano.

A continuación presentamos una serie de definiciones que introducen las nociones de subesquemas abiertos y cerrados.

Definición 3.0.9. *Un esquema $(U, \mathcal{O}_U)$ cuyo espacio topológico es un subconjunto abierto U de un esquema X y su estructura de haz $\mathcal{O}_U$ es isomorfa a la restricción $\mathcal{O}_{X|_U}$ de la estructura de haz de X se denomina un subesquema abierto del esquema X.*

Definición 3.0.10. *Una inmersión abierta es un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ el cual induce un isomorfismo de X con un subesquema abierto de Y.*

[4]Ver Capítulo I de [**?**], Variedades. Caso afín Teorema 3,2 pag 17. Caso proyectivo Teorema 3,4 pag 18.

Definición 3.0.11. *Una inmersión cerrada es un morfismo de esquemas $f : Y \longrightarrow X$ tal que f induce un homeomorfismo de* $\mathrm{sp}(Y)$ *sobre un subconjunto cerrado de* $\mathrm{sp}(X)$*, además la aplicación inducida de haces sobre X, $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ es sobreyectiva.*

Definición 3.0.12. *Un subesquema cerrado de un esquema X es una clase de equivalencia de inmersiones cerradas, donde decimos que $f : Y \longrightarrow X$ y $f' : Y' \longrightarrow X$ son equivalentes si existe un isomorfismo $i : Y' \longrightarrow Y$ tal que $f' = f \circ i$, es decir tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i}\uparrow & \nearrow_{f'} & \\ Y' & & \end{array}$$

A continuación se presentan un par de ejemplos que buscan resaltar el hecho que un subconjunto cerrado puede poseer varias estructuras de subesquema cerrado y exhibe una de tales estructuras, presentada como la más pequeña.

Ejemplo 3.0.2.

1. Sean A un anillo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Considerando $X = \mathrm{Spec}(A)$ y $Y = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ el morfismo de anillos $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ induce un morfismo de esquemas $f : Y \longrightarrow X$ el cual es una inmersión cerrada. En efecto, f induce el homeomorfismo $\widetilde{f} : \mathrm{sp}(Y) \longrightarrow V(\mathfrak{a})$ el cual está dado por

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : \mathrm{sp}(A/\mathfrak{a}) & \longrightarrow & V(\mathfrak{a}) \\ \widetilde{\mathfrak{p}} & \longmapsto & \mathfrak{p}, \end{array}$$

donde $\widetilde{\mathfrak{p}} = \pi(\mathfrak{p})$. Además la aplicación de haces $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ es sobreyectiva puesto que su respectiva aplicación de tallos $f^\sharp_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{X,f(\widetilde{\mathfrak{p}})} \longrightarrow (f_*\mathcal{O}_Y)_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$, (Proposición 2.0.2) no es más que

$$f^\sharp_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (A/\mathfrak{a})_{\widetilde{\mathfrak{p}}},$$

y la localización de un morfismo de A–módulos sobreyectivo, es sobreyectiva[5]. Por lo tanto $f : Y \longrightarrow X$ es una inmersión cerrada.

[5]Ver Capítulo III de [?], Anillos y módulos de fracciones, Proposición 3.9, pag 46.

Entonces como consecuencia de lo anterior, para cada ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ obtenemos una estructura de subesquema cerrado sobre el conjunto cerrado $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$. En particular, cada subconjunto cerrado Y de X tiene varias estructuras de subesquema cerrado, correspondientes a todos los ideales $\mathfrak{a}$ para los cuales $Y = V(\mathfrak{a})$. En efecto, cada estructura de subesquema cerrado sobre un subconjunto cerrado Y de un esquema afín X se origina de un ideal de la forma mencionada inicialmente.

2. Sean X un esquema y Y un subconjunto cerrado de X. Como fue mencionado en el ejemplo anterior, en general Y tiene varias posibles estructuras de subesquema cerrado. Sin embargo existe una que es la más pequeña de todas, llamada la estructura de subesquema cerrado reducida inducida, que definimos a continuación.
   Sean $X = \mathrm{Spec}(A)$ un esquema afín, Y un subconjunto cerrado de X y $\mathfrak{a} \subseteq A$ la intersección de todos los ideales primos en Y, ésto es $\mathfrak{a}$ es el ideal más grande para el cual $Y = V(\mathfrak{a})$. Entonces la estructura de subesquema cerrado reducida inducida sobre Y es la definida por el ideal $\mathfrak{a}$.
   En general, si X es un esquema cualquiera y Y un subconjunto cerrado de X, también podemos definir una estructura de subesquema cerrado reducida inducida sobre Y, en éste caso para cada subconjunto abierto afín $U_i \subseteq X$ consideramos los subconjuntos cerrados $Y_i = Y \cap U_i$ de U_i y damos la estructura reducida inducida que se definió para los afines y luego procedemos a pegar los haces definidos sobre cada Y_i, para obtener un haz sobre Y con la estructura deseada.
   A fin de comprobar lo anterior, notemos que para cualquier i, j las restricciones a $Y_i \cap Y_j$ de las dos estructuras de haz definidas sobre Y_i y Y_j son isomorfas. Además tres de tales isomorfismos sobre $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ son compatibles para todo i, j, k. Es decir, $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ sobre $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$; siendo φ_{jk}, φ_{ij} isomorfismos. La anterior afirmación la podemos verificar reduciendo el problema de la siguiente manera.
   Consideremos $U = \mathrm{Spec}(A)$ un subconjunto abierto afín de X, $f \in A$ y el abierto básico $V = D(f) = \mathrm{Spec}(A_f)$. Entonces damos a el subconjunto cerrado $Y_U = Y \cap U$ un estructura de subesquema cerrado reducida inducida mediante el ideal $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y \cap U} \mathfrak{p}$, así que $Y_U = V(\mathfrak{a})$. Luego la restricción de dicha estructura a $Y \cap V$; en éste caso estamos pensando en la restricción dada en la Proposición 2.0.6, coincide con la

estructura de subesquema cerrado reducida inducida de Y_V. Es decir,

$$(Y_U|_{Y\cap V}, \mathcal{O}_{Y_U}|_{Y\cap V}) \cong (Y_V, \mathcal{O}_{Y_V}),$$

donde $Y_V = Y \cap V = Y \cap D(f) = V(\mathfrak{a}A_f)$ y $\mathfrak{a}A_f$ es la intersección de todos los ideales primos de A_f los cuales están en $Y \cap D(f)$. En particular para Y_i, Y_j y cualquier abierto básico V tenemos que,

$$(Y_i|_{Y_i\cap V}, \mathcal{O}_{Y_i}|_{Y_i\cap V}) \cong (Y_V, \mathcal{O}_{Y_V}) \cong (Y_j|_{Y_j\cap V}, \mathcal{O}_{Y_j}|_{Y_j\cap V}).$$

Así que la cadena de isomorfismos se satisface para $Y \cap U_i \cap U_j \cap V = Y_i \cap Y_j \cap V$ y ésto se tiene para todo abierto básico V, entonces el isomorfismo se tiene en $Y_i \cap Y_j$. Esto es,

$$(Y_i|_{Y_i\cap Y_j}, \mathcal{O}_{Y_i}|_{Y_i\cap Y_j}) \cong (Y_j|_{Y_i\cap Y_j}, \mathcal{O}_{Y_j}|_{Y_i\cap Y_j}).$$

Luego, podemos pegar los haces definidos sobre los Y_i para obtener un haz sobre Y. Entonces, bajo las condiciones anteriores diremos que el haz obtenido sobre Y posee una estructura de subesquema cerrado reducido inducido.

Recordemos que si X es un espacio topológico la dimensión de X, denotada por $dimX$, es el supremo de todos los enteros n tales que existe una cadena

$$X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq X_3 \subsetneqq .... \subsetneqq X_n,$$

de subconjuntos cerrados irreducibles distintos de X (La longitud de una cadena como la de arriba es n). Luego, puesto que el espacio subyacente de un esquema es un espacio topológico, es natural extender el concepto de dimensión a un esquema, más precisamente.

Definición 3.0.13. *La dimensión de un esquema X, denotada por $dimX$, es la dimensión como un espacio topológico.*

Ejemplo 3.0.3.

1. Si k es un cuerpo, entonces $dim(\mathrm{Spec}(k)) = 0$

2. Si A es un dominio de ideales prioncipales que no es un cuerpo, entonces puesto que todo ideal primo es maximal, se tiene que $dim(\mathrm{Spec}(A)) = 1$. En particular, para cualquier cuerpo k, $dim(\ ^{1}_{k}) = 1$.

3. $X = \mathrm{Spec}(A)$ es un esquema afín, entonces existe una biyección antimonótona entre los subconjuntos cerrados irreducibles de X y los ideales primos de A, de aquí que $dim(X) = dim(A)$. Esto es, la dimensión de un esquema afín $X = \mathrm{Spec}(A)$ coincide con la dimensión de Krull[6] de A.

4. Si A es un anillo y $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq .... \subsetneqq \mathfrak{p}_n$, es una cadena de ideales primos de A, entonces $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq .... \subsetneqq \mathfrak{p}_n \subsetneqq (T)$ es una cadena de ideales primos de $A[T]$, de aquí que $dim(A[T] \geq 1 + dim(A)$.

Definición 3.0.14. *Si Z es un subconjunto cerrado irreducible de X entonces la codimensión de Z en X, denotada por $codim(Z, X)$, es el supremo de los enteros n tales que existe una cadena*

$$Z = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset .... \subset Z_n$$

de subconjuntos cerrados irreducibles distintos de X, comenzando con Z. En particular, si Y es cualquier subconjunto cerrado de X definimos

$$codim(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y} codim(Z, X),$$

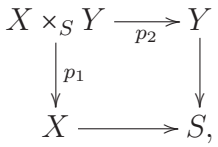
donde el infimo es tomado sobre todos los subconjuntos cerrados irreducibles de Y.

Supongamos ahora que X y Y son dos esquemas sobre S, ésto es, existen morfismos de esquemas $X \longrightarrow S$ y $Y \longrightarrow S$. Nos proponemos construir un nuevo esquema sobre S a partir de los esquemas dados.

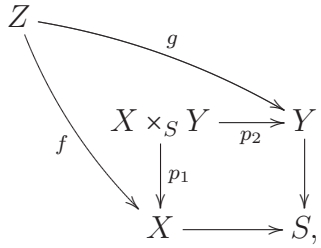
Definición 3.0.15. *El producto fibrado de X y Y sobre S, denotado por $X \times_S Y$, es un esquema junto con dos morfismos $p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$; los cuales hacen*

[6] Recordemos que si A es un anillo, la altura de un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ es el supremo de todos los enteros n tales que existe una cadena $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset ... \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$, de ideales primos distintos. Entonces se define la dimensión de Krull de A como el supremo de las alturas de todos los ideales primos de A.

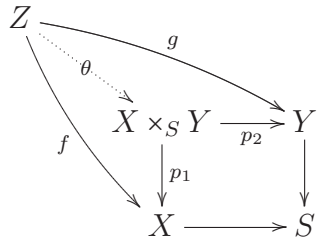
conmutativo el siguiente diagrama



y tal que dados cualquier esquema Z sobre S y morfismos $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$ que hacen conmutativo el diagrama



existe un único morfismo $\theta : Z \longrightarrow X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ \theta$ y $g = p_2 \circ \theta$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta.



Los morfismos p_1 y p_2 son llamados los morfismos proyección del producto fibrado sobre sus factores.

Observación 3.0.2. Si X y Y son dos esquemas que no están referenciados a un esquema base S, entonces consideramos $S = \mathrm{Spec}(\ )$ y definimos el producto fibrado de X y Y, denotado por $X \times Y$, como $X \times_{\mathrm{Spec}(\ )} Y$.

Teorema 3.0.1. *Para cualquier par de esquemas X y Y sobre un esquema S existe el producto fibrado $X \times_S Y$ y es único salvo isomorfismo.*

Demostración. La prueba de éste resultado se realiza en siete pasos. El primero de ellos será considerar el caso afín. Posteriormente demostraremos la existencia de $X \times_S Y$, con X y Y esquemas arbitrarios, a partir del caso afín y apoyandonos en el pegado de esquemas. Primero que todo consideremos $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ y $S = \mathrm{Spec}(R)$, con X y Y esquemas sobre S. Afirmamos que A y B son R–álgebras, en efecto, los morfismos de esquemas

$$X \longrightarrow S \quad \text{y} \quad Y \longrightarrow S,$$

inducen morfismos de anillos

$$R \xrightarrow{\varphi_A} A \quad \text{y} \quad R \xrightarrow{\varphi_B} B.$$

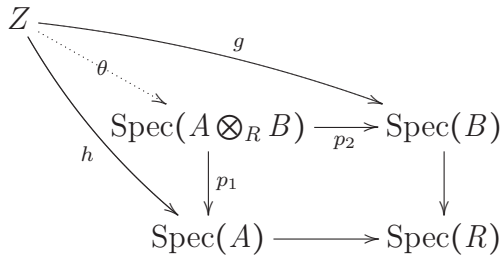
Por lo tanto podemos considerar a A y B como R–módulos, cuya estructura está dada como sigue:

$$\begin{array}{rcl} R \times A & \longrightarrow & A \\ (r, a) & \longmapsto & r \cdot a := \varphi_A(r) \cdot a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} R \times B & \longrightarrow & B \\ (r, b) & \longmapsto & r \cdot b := \varphi_B(r) \cdot b. \end{array}$$

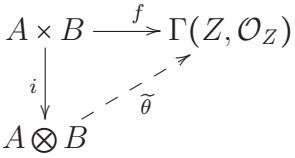
Afirmamos que $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ satisface las condiciones de un producto fibrado. Esto es, debemos mostrar que existen morfismos $p_1 : \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ y $p_2 : \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ que hacen el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) & \xrightarrow{p_2} & \mathrm{Spec}(B) \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

tal que para cualquier esquema Z sobre S y dado los morfismos $h : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ y $g : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ existe un único morfismo $\theta : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ tal que $h = p_1 \circ \theta$ y $g = p_2 \circ \theta$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.



Ahora como dar el morfismo $\theta : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ es equivalente[7] a dar el morfismo $\widetilde{\theta} : A \otimes_R B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$, y de la propiedad universal del producto tensorial se tiene que dada una aplicación bilineal $f : A \times B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ existe un único morfismo $\widetilde{\theta} : A \otimes_R B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ que hace conmutar el siguiente diagrama,



siendo $i : A \times B \longrightarrow A \otimes B$ la aplicación canónica dada por $(x, y) \longmapsto x \otimes y$. Entonces, para garantizar la existencia de θ bastará exhibir una aplicación bilineal

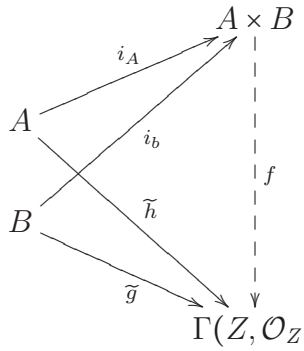
$$f : A \times B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z).$$

Para tal fin, consideremos un esquema Z sobre S y los morfismos $h : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ y $g : Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$. Una vez más, recordemos que tener los anteriores morfismos es equivalente a tener los morfismos de anillos $\widetilde{h} : A \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ y $\widetilde{g} : B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. También notemos que tenemos las inclusiones $i_A : A \longrightarrow A \times B$ y $i_B : B \longrightarrow A \times B$, así que por la propiedad universal del producto existe un único R–morfismo

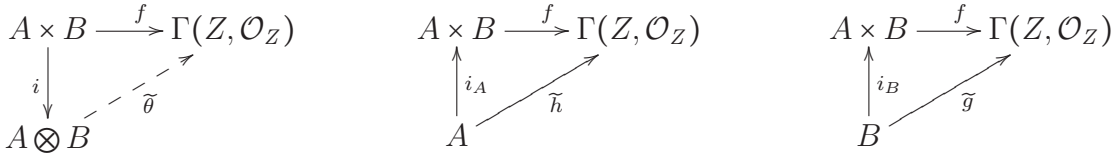
$$f : A \times B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z),$$

dado por $f(a, b) = \widetilde{h}(a) + \widetilde{g}(b)$, el cual es una aplicación bilineal. Esto es, existe f que hace conmutar el diagrama

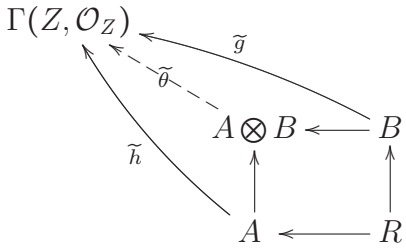
[7] Ver Capítulo II de [**?**], Esquemas, ejercicio 2.4.



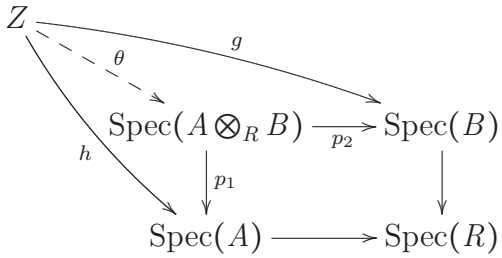
Luego, por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo de R–módulos, $\widetilde{\theta} : A \otimes_R B \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$. Por lo tanto tenemos los siguientes diagramas conmutativos



que considerados en simultáneo y adicionando los correspondientes morfismos por ser X y Y esquemas sobre S, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.



El cual es equivalente al diagrama



Por lo tanto, $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ es un producto fibrado. Entonces si X, Y y S son esquemas afines, definimos el producto fibrado entre X y Y sobre S como

$$X \times_S Y := \mathrm{Spec}(A \bigotimes_R B).$$

En segundo lugar, afirmamos la unicidad de $X \times_S Y$. En efecto, dado que la existencia de $X \times_S Y$ estará basada en el primer paso, en el cual la existencia de $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ es única salvo isomorfismo en virtud de la propiedad universal del producto, entonces se garantiza que $X \times_S Y$ también será único salvo isomorfismo.

El tercer paso corresponde al pegado de morfismos. Sean X y Y dos esquemas. Dar un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es equivalente a dar una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X junto con morfismos de esquemas $f_i : U_i \longrightarrow Y$, donde U_i tiene la estructura de subesquema abierto inducida, tal que para todo i, j

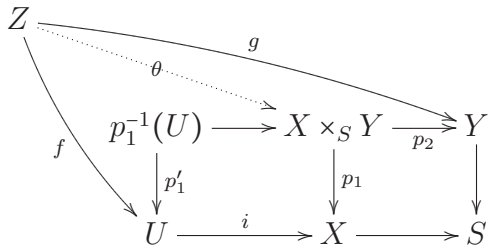
$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

En efecto, la anterior afirmación es cierta puesto que dado un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$, las restricciones $f|_{U_i} = f_i : U_i \longrightarrow Y$ para todo i, también son morfismos de esquemas y por la buena definición de f se sigue que, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. De otro lado, si tenemos los morfismos f_i que satisfacen la anterior igualdad entonces podemos definir $f : X \longrightarrow Y$ como $f(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$.

Suponiendo la existencia $X \times_S Y$ y considerando un subconjunto abierto $U \subseteq X$, en el cuarto paso buscamos definir el producto fibrado del subesquema abierto U y el esquema Y sobre S. Así que, bajo las condiciones anteriores veamos que $p_1^{-1}(U) \subseteq X \times_S Y$ es un producto para U y Y sobre S. En efecto, dado un esquema Z y los morfismos $f : Z \longrightarrow U$ y $g : Z \longrightarrow Y$, se tiene que f determina un morfismo $\widetilde{f} : Z \longrightarrow X$ dado por $\widetilde{f} = i \circ f$, siendo $i : U \longrightarrow X$ el morfismo inclusión, entonces existe $\theta : Z \longrightarrow X \times_S Y$ tal que $\widetilde{f} = p_1 \circ \theta$ y $g = p_2 \circ \theta$, donde $f(Z) \subseteq U$. Así que $\widetilde{f}(Z) = i \circ f(Z) = i(f(Z)) = f(Z) \subseteq U$, entonces

$$(p_1 \circ \theta)(Z) = p_1(\theta(Z)) = \widetilde{f}(Z) = f(Z) \subseteq U.$$

Luego, $\theta(Z) \subseteq p_1^{-1}(U) \subseteq X \times_S Y$ y en consecuencia podemos considerar el morfismo $\theta : Z \longrightarrow X \times_S Y$ como $\theta : Z \longrightarrow p_1^{-1}(U)$, y dada la existencia de $X \times_S Y$ el siguiente diagrama conmuta, siendo p_1' la restricción de p_1.



Por lo tanto, $p_1^{-1}(U)$ es un producto para U y Y sobre S.

En el quinto paso, considerando X, Y esquemas arbitrarios sobre S, $\{X_i\}_{i\in I}$ una cubierta de X y suponiendo la existencia de $X_i \times_S Y$ para todo $i \in I$, mostraremos la existencia de $X \times_S Y$. Para cada $i, j \in I$ denotamos por X_{ij} a $X_i \cap X_j$, entonces definimos

$$U_{ij} \coloneqq p_1^{-1}(X_{ij}) \subseteq X_i \times_S Y,$$

el cual en virtud del paso anterior es un producto para X_{ij} y Y sobre S.
Luego, como $X_{ij} = X_{ji}$ y $U_{ji} \coloneqq p_1^{-1}(X_{ji}) \subseteq X_j \times_S Y$ es un producto para X_{ji} y Y sobre S, entonces por la unicidad del producto fibrado existen isomorfismos $\varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$ para todo $i, j \in I$ los cuales satisfacen

$$\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}.$$

En efecto, si $a \in U_{ij} \cap U_{ik} = p_1^{-1}(X_{ij}) \cap P_1^{-1}(X_{ik})$, al ser φ_{ij} un isomorfismo identificamos a con su imagen y como $\varphi_{ij}(a) \in U_{ji} = p_1^{-1}(X_{ji})$ entonces tenemos que

$$p_1(\varphi_{ij}(a)) = p_1(a) \in X_{ij} \cap X_{ik} = X_{ijk} = X_i \cap X_j \cap X_k.$$

En consecuencia

$$\varphi_{ij}(a) \in p_1^{-1}(X_{ijk}) = p_1^{-1}((X_j \cap X_i) \cap (X_j \cap X_k)) = p_1^{-1}(X_{ji}) \cap p_1^{-1}(X_{jk}) = U_{ji} \cap U_{jk}.$$

Esto es, $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) \subseteq U_{ji} \cap U_{jk}$.
De otro lado, si $a \in p_1^{-1}(X_{ij}) = U_{ij}$ es tal que $\varphi_{ij}(a) \in p_1^{-1}(X_{ji}) \cap p_1^{-1}(X_{jk}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, entonces como φ_{ij} es un isomorfismo tenemos que

$$p_1(a) = p_1(\varphi_{ij}(a)) \in X_{ji} \cap X_{jk} = X_{jik} = X_{ij} \cap X_{ik}.$$

Luego, $a \in p_1^{-1}(X_{jik}) = p_1^{-1}(X_{ij}) \cap p_1^{-1}(X_{ik})$, así que $\varphi_{ij}(a) \in \varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik})$, es decir $p_1^{-1}(X_{ji}) \cap p_1^{-1}(X_{jk}) = U_{ji} \cap U_{jk} \subseteq \varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik})$. Por lo tanto, $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$.

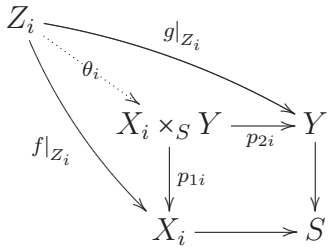
Además, como $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ sobre $U_{ji} \cap U_{jk}$, entonces tenemos las condiciones para pegar los esquemas $\{X_i \times_S Y\}_{i \in I}$ vía los morfismos φ_{ij} obteniendo un esquema $X \times_S Y$.
A continuación veremos que efectivamente $X \times_S Y$ es un producto para X y Y sobre S. Dado que para cada $i \in I$ se tiene que $X_i \times_S Y$ es un producto, entonces denotando por p_{1i} al morfismo $X_i \times_S Y \longrightarrow X_i$ y por p_{2i} al morfismo $X_i \times_S Y \longrightarrow Y$, tenemos la existencia de los morfismos p_{1i} y p_{2i} para cada $i \in I$, los cuales son únicos en virtud de la unicidad del producto. Así que

$$p_{1i}|_{X_{ij} \times_S Y} = p_{1j}|_{X_i j \times_S Y} \quad \text{y} \quad p_{2i}|_{X_{ij} \times_S Y} = p_{2j}|_{X_i j \times_S Y}.$$

Luego, como consecuencia del tercer paso podemos pegar los morfismos p_{1i} para todo $i \in I$ y los morfismos p_{2i} para todo $i \in I$, obteniendo así los morfismos

$$p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X \quad \text{y} \quad p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y.$$

Entonces dados un esquema Z y los morfismos $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$, si consideramos la notación $Z_i = f^{-1}(X_i)$ y los morfismos $f|_{Z_i} : Z_i \longrightarrow X$ y $g|_{Z_i} : Z_i \longrightarrow Y$, al ser $X_i \times_S Y$ un producto existe un único morfismo $\theta_i : Z_i \longrightarrow X_i \times_S Y$; para cada $i \in I$, que hace conmutar el siguiente diagrama.



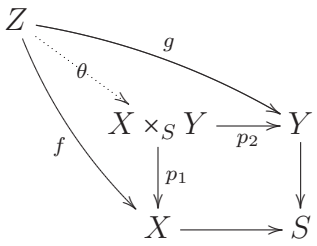
Ahora, como lo anterior se verifica para todo $i \in I$ y los θ_i son únicos, se satisface que

$$\theta_i|_{Z_i \cap Z_j} = \theta_j|_{Z_i \cap Z_j}.$$

Luego, nuevamente como una consecuencia del tercer paso podemos pegar los morfismos θ_i obteniendo el morfismo

$$\theta : Z \longrightarrow X \times_S Y,$$

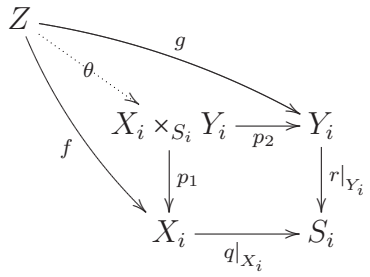
donde la unicidad de θ se deriva de la unicidad de los morfismos θ_i. Además el morfismo θ hace conmutar el diagrama,



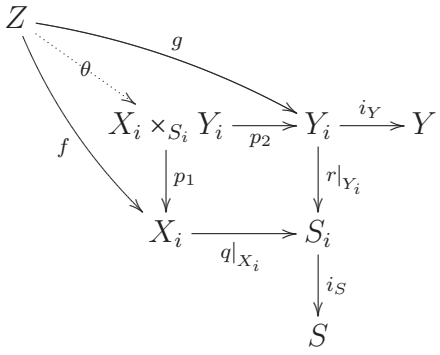
Por lo tanto $X \times_S Y$ es un producto para X y Y sobre S.

En el sexto paso, teniendo en cuenta los pasos anteriores, mostraremos que $X \times_S Y$ es un producto para dos esquemas arbitrarios X y Y, siendo S un esquema afín.
Recordemos que si X, Y y S son esquemas afines, entonces $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ existe. Entonces, como todo esquema tiene una cubierta por abiertos afines primero consideremos el caso en el que X es un esquema arbitrario con $\{X_i\}_{i \in I}$ una cubierta afín de X y sean Y y S esquemas afines, así que $X_i \times_S Y$ existe para todo $i \in I$. Luego, en virtud del quinto paso podemos pegar estos esquemas obteniendo el esquema $X \times_S Y$ que es el producto de X y Y sobre S, con X arbitrario y S, Y afines.
Ahora consideremos el caso en el que S un esquema afín y X, Y son esquemas arbitrarios. Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ y $\{Y_j\}_{j \in J}$ cubiertas por abiertos afines para X y Y respectivamente. Notemos que si fijamos X_i con $i \in I$ entonces $X_i \times_S Y_j$ existe para todo $j \in J$ y estamos justamente en el caso anterior, así que el producto $X_i \times_S Y$ existe y como lo anterior se tiene para todo $i \in I$ fijo, entonces $X_i \times_S Y$ existe para todo $i \in I$ y nuevamente del quinto paso se sigue que $X \times_S Y$ existe. Es decir, $X \times_S Y$ existe para X y Y arbitrarios y S un esquema afín.

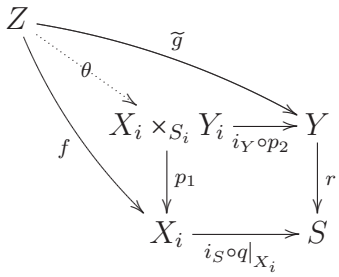
Finalmente, en el séptimo paso consideramos el caso en el que X, Y y S son esquemas arbitrarios. Entonces bajo tales condiciones y considerando los morfismos $q : X \longrightarrow S$ y $r : Y \longrightarrow S$ y $\{S_i\}_{i\in I}$ una cubierta por abiertos afines de S, si denotamos por $X_i = q^{-1}(S_i)$ y $Y_i = r^{-1}(S_i)$ entonces tenemos los morfismos $q|_{X_i} : X_i \longrightarrow S_i$ y $r|_{Y_i} : Y_i \longrightarrow S_i$.
Luego, como X_i y Y_i son esquemas sobre S_i con S_i un esquema afín entonces en virtud del paso anterior el producto $X_i \times_{S_i} Y_i$ existe para todo $i \in I$. Además, $X_i \times_{S_i} Y_i$ es un producto para X_i y Y sobre S. En efecto, sea Z un esquema y consideremos los morfismos $f : Z \longrightarrow X_i$ y $g : Z \longrightarrow Y_i$, como $X_i \times_{S_i} Y_i$ es un producto fibrado existe el morfismo $\theta : Z \longrightarrow X_i \times_{S_i} Y_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta.



Ahora de los morfismos inclusión $S_i \xrightarrow{i_S} S$ y $Y_i \xrightarrow{i_Y} Y$ podemos ampliar el anterior diagrama. Esto es,



Entonces podemos afirmar que tanto Z como X_i son esquemas sobre S. Además podemos definir el morfismo $\widetilde{g} : Z \longrightarrow Y$ dado por $\widetilde{g} = i_Y \circ g$, con lo cual obtenemos el diagrama conmutativo.



Así que, $X_i \times_{S_i} Y_i$ es un producto para X_i y Y sobre S, por lo tanto $X_i \times_S Y$ existe para cada $i \in I$. Luego, aplicando una vez más el quinto paso se tiene que $X \times_S Y$ existe, siendo X, Y y S esquemas arbitrarios. □

Definición 3.0.16. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas, $y \in Y$ un punto, $k(y)$ el cuerpo residual*[8] *de y y $\mathrm{Spec}(k(y)) \longrightarrow Y$ el morfismo natural. Definimos la fibra del morfismo f sobre el punto y como el esquema*

$$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y)).$$

Notemos que la fibra X_y es por definición un esquema sobre $\mathrm{Spec}(k(y))$.
A continuación consideremos el caso afín. Sean $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas con $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ y $\mathfrak{p}$ un punto en $\mathrm{Spec}(B)$. Puesto que

$$X_{\mathfrak{p}} = X \times_Y \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p})) = \mathrm{Spec}(A) \times_Y \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p})),$$

es el producto fibrado de esquemas afines, entonces

$$X_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}(A \otimes_B k(\mathfrak{p}))$$

y como $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ entonces $k(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$, siendo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ el conjunto de germenes de las funciones regulares que se anulan en $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ el ideal maximal de $B_{\mathfrak{p}}$, el cual es el ideal extendido $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$. Entonces,

$$X_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}(A \otimes_B B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}).$$

[8]Para cualquier punto $y \in Y$ de un esquema se define el cuerpo residual de y como $k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$.

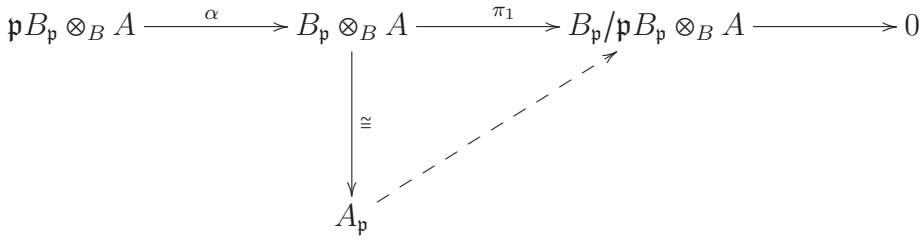
Además como la sucesión $C_{\mathfrak{p}}$ dada por

$$\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0,$$

es exacta entonces la sucesión que denotamos por $C_{\mathfrak{p}} \otimes A$ también será exacta[9]

$$\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A \longrightarrow 0.$$

Luego, como $B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A \cong A_{\mathfrak{p}}$[10], entonces obtenemos el siguiente diagrama



y en virtud del primer teorema de isomorfismos

$$A_{\mathfrak{p}}/\ker(\pi_1) \cong B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A$$

y al ser $C_{\mathfrak{p}} \otimes A$ una sucesión exacta se tiene que $\ker(\pi_1) = \mathrm{im}(\alpha) = \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A$, donde $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A \cong \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = f^{-1}(\mathfrak{p})A_{\mathfrak{p}}$; siendo $A_{\mathfrak{p}}$ la localización de A en $S = A \setminus f^{-1}(\mathfrak{p})$. Entonces,

$$A_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A) \cong B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A$$

es equivalente a

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A.$$

Por lo tanto,

$$X_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}(A \otimes_B B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) \cong \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}).$$

Finalmente, como la localización y el cociente conmutan se tiene que la fibra de f en $\mathfrak{p}$, cuando f es un morfismo de esquemas afines, queda completamente determinada por,

$$X_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Spec}(\big(A/f^{-1}(\mathfrak{p})\big)_{f^{-1}(\mathfrak{p})}).$$

[9]Ver Capítulo IV de [**?**], Módulos, Proposición 5.4, pag 209

[10]El isomorfismo $B_{\mathfrak{p}} \otimes_B A \cong A_{\mathfrak{p}}$ lo podemos encontrar en el Capítulo III de [**?**], Proposición 3.5, pag 45.

Proposición 3.0.8. *Sean X, Y y Z esquemas sobre un esquema S. Entonces,*

1. $X \times_S S \cong X$.
2. $X \times_S Y \cong Y \times_S X$
3. $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$
4. *Si existe un morfismo $Z \longrightarrow Y$ entonces* $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$.

Demostración. Dado que el producto fibrado se sustenta en el producto tensorial y para éste último se verifican las propiedades anteriores entonces podemos afirmar que tales propiedades también se satisfacen para el producto fibrado. □

Proposición 3.0.9. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas y $y \in Y$. Entonces, la fibra X_y es un esquema tal que* $\mathrm{sp}(X_y)$ *es homeomorfo a el subconjunto $f^{-1}(y)$ de X.*

Demostración. Sea V una vecindad abierta afín de $y \in Y$, entonces tenemos los siguientes morfismos,

1. $i : V \longrightarrow Y$, la inclusión.
2. $\mathrm{Spec}(k(y)) \longrightarrow V \longrightarrow Y$, donde el morfismo como espacios topológicos está dado por $0 \longmapsto y \longmapsto y$.
3. $\pi_2 : X \times_Y V \longrightarrow V$.

Luego, por la cuarta propiedad que satisface el producto fibrado, Proposición 3.0.8,

$$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y)) \cong (X \times_Y V) \times_V \mathrm{Spec}(k(y)).$$

De otro lado, como $X \times_Y Y$ es un producto fibrado y $V \subseteq Y$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} p_2^{-1}(V) & \dashrightarrow & X \times_Y Y & \xrightarrow{p_2} & Y \xleftarrow[i]{} V, \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

siendo $p_2^{-1}(V)$ un producto fibrado para X y V sobre Y, y de la unicidad del producto $p_2^{-1}(V) \cong X \times_Y V$. Además, de la conmutatividad del diagrama anterior $f \circ p_1 = 1 \circ p_2 = p_2$. Entonces $p_2^{-1} = (f \circ p_1)^{-1} = p_1^{-1} \circ f^{-1}$, de lo cual

$$p_2^{-1}(V) = p_1^{-1}(f^{-1}(V)) \cong f^{-1}(V) \times_Y Y \cong f^{-1}(V).$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} p_1^{-1}(f^{-1}(V)) & \dashrightarrow & X \times_Y Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ f^{-1}(V) & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} X_y &= X \times_Y \operatorname{Spec}(k(y)) \\ &\cong (X \times_Y V) \times_V \operatorname{Spec}(k(y)) \\ &\cong p_2^{-1}(V) \times_V \operatorname{Spec}(k(y)) \\ &\cong f^{-1}(V) \times_V \operatorname{Spec}(k(y)), \end{aligned}$$

y lo anterior se tiene para toda vecindad abierta afín de $y \in Y$.

Luego, por un razonamiento análogo al realizado en la demostración del Teorema 3.0.1, para probar el resultado en cuestión bastará considerar $Y = \operatorname{Spec}(B)$ y verificar que el morfismo proyección $X_y \longrightarrow X$ induce un homeomorfismo entre X_y y $f^{-1}(y)$. Notemos que el esquema S del Teorema 3.0.1 aquí se corresponde con Y, que por ser éste un esquema $Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec}(B_i)$.

Sea $U \subseteq X$ un abierto y como X_y es un producto fibrado el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U) & \dashrightarrow & X_y & \xrightarrow{\pi_2} & \operatorname{Spec}(k(y)) \\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ U & \xhookrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Entonces $\pi_1^{-1}(U)$ es un producto fibrado para U y $\operatorname{Spec}(k(y))$. Esto es,

$$\pi_1^{-1}(U) \cong U \times_Y \operatorname{Spec}(k(y)),$$

y por ser X un esquema, existe una cubierta de X por abiertos afines, supongamos $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ donde $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Entonces para todo $i \in I$ se tiene que

$$\pi_1^{-1}(U_i) \cong U_i \times_Y \mathrm{Spec}(k(y)) \cong \mathrm{Spec}(A_i \otimes_B k(y)) \cong \mathrm{Spec}((A_i/y)_y),$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi_1^{-1}(U) \cong \mathrm{Spec}((A_i/y)_y) &= \mathrm{Spec}(A_{i\,y}/yA_{iy}) \\
&= \{\widetilde{\mathfrak{p}} \subseteq A_{iy}/yA_{iy};\ \widetilde{\mathfrak{p}} \text{ primo}\} \\
&= \{\mathfrak{p} \subseteq A_{iy};\ \mathfrak{p} \text{ primo y } yA_{iy} \subseteq \mathfrak{p}\} \\
&= \{\mathfrak{p}' \subseteq A_i;\ \mathfrak{p}' \text{ primo},\ yA_{iy} \subseteq \mathfrak{p} \text{ y } \mathfrak{p}' \nsubseteq A_i \setminus f^{-1}(y)\} \\
&= \{\mathfrak{p}' \subseteq A_i;\ \mathfrak{p}' \text{ primo},\ yA_{iy} \subseteq \mathfrak{p} \text{ y } \mathfrak{p}' \subseteq f^{-1}(y)\} \\
&= \{\mathfrak{p}' \subseteq A_i;\ \mathfrak{p}' \text{ primo},\ yA_{iy} \subseteq \mathfrak{p}'A_{iy} \text{ y } \mathfrak{p}' \subseteq f^{-1}(y)\} \\
&= \{\mathfrak{p}' \subseteq A_i;\ \mathfrak{p}' \text{ primo},\ \widetilde{f}_i(y) \in \mathfrak{p}' \text{ y } \mathfrak{p}' \subseteq f^{-1}(y)\} \\
&= \{\mathfrak{p}' \subseteq A_i;\ \mathfrak{p}' \text{ primo y } \widetilde{f}_i(y) = \mathfrak{p}'\} \\
&= \{\mathfrak{p}' \subseteq A_i;\ \mathfrak{p}' \text{ primo y } \mathfrak{p}' \subseteq f^{-1}(y)\},
\end{aligned}$$

siendo $\widetilde{f}_i$ el morfismo restricción del morfismo de anillos inducido por f, es decir, $\widetilde{f}_i : B \longrightarrow A_i$. Finalmente, como lo anterior se tiene para todo $i \in I$ y $\pi_1^{-1}(U_i) \cong U_i \times_Y \mathrm{Spec}(k(y))$ entonces por la propiedad de pegado de esquemas se sigue que

$$X_y \cong X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y)) \cong \bigsqcup_{i\in I} \pi_1^{-1}(U_i) = f^{-1}(y),$$

siendo la anterior unión una unión disjunta. Por lo tanto, como espacio topológico X_y es homeomorfo a el subconjunto $f^{-1}(y)$ de X. □

La noción de fibra de un morfismo permite considerar un morfismo como una famila de esquemas, las fibras, determinadas por los puntos del esquema imagen.

Otro ejemplo de una familia de esquemas surge cuando consideramos un esquema X sobre Spec( ). En éste caso, tomando la fibra sobre el punto genérico obtenemos un esquema X sobre . En efecto, si consideramos el punto genérico entonces $X_0 = X \times k(0)$, donde $k(0) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\ ),0}/\mathfrak{m}_0 \cong (\ )_0/\mathfrak{m}_0$ con $(\ )_0 =$ y $\mathfrak{m}_0 = 0(\ )_0 = 0$; puesto que los ideales de la

localización son ideales extendidos, así que $k(0) =$ y en consecuencia $X_0 = X \times := X$. Luego, X es un esquema sobre .

Por otro lado, si consideramos la fibra sobre un punto cerrado correspondiente a un número primo p obtenemos un esquema $X_\mathfrak{p}$ sobre el cuerpo finito $_p$. En efecto, considerando un ideal primo $\mathfrak{p}$ tenemos que $X_\mathfrak{p} = X \times k(\mathfrak{p})$, donde $k(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\ ),\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ y siendo $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\ ),\mathfrak{p}} \cong (\ )_\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\ )_\mathfrak{p}$. Así que,

$$k(\mathfrak{p}) \cong (\ )_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(\ )_\mathfrak{p} \cong (\ /p\ )_\mathfrak{p} \cong (\ _p)_\mathfrak{p} \cong \ _p \cong \ _p.$$

Por lo tanto, $X_\mathfrak{p} \cong X \times \ _p$ y en tal caso decimos que $X_\mathfrak{p}$ surge por reducción módulo p del esquema X.

Otra aplicación importante del producto fibrado es permitir la noción de cambio de base.

Definición 3.0.17. *Sea S un esquema fijo, el cual es pensado como un esquema base. Dado otro esquema S' y un morfismo de esquemas, $S' \longrightarrow S$, para cualquier esquema X sobre S definimos su extensión o cambio de base como el esquema $X' = X \times_S S'$, el cual es un esquema sobre S'.*

Notemos que el cambio de base es una operación transitiva. Esto es, dado un esquema base S y otros dos esquemas S' y S'', tales que existe un morfismo $S'' \longrightarrow S' \longrightarrow S$, en virtud de las propiedades del producto fibrado, para cualquier esquema X sobre S se verifica

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' \cong X \times_S (S' \times_{S'} S'') \cong X \times_S S''.$$

A lo largo del segundo capítulo y del presente hemos visto qué es un esquema, ejemplos de ellos y morfismos entre esquemas. A continuación, nos proponemos profundizar un poco respecto a los morfismo. Para tal fin presentaremos algunos tipos especiales de morfismos entre esquemas tales como el morfismo diagonal, separado y cuasi-compacto, y verificamos algunas de las propiedades que satisfacen.

Definición 3.0.18. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. El morfismo diagonal es el único morfismo $\bigtriangleup : X \longrightarrow X \times_Y X$ tal que su composición con los morfismos proyección $p_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times_Y X \longrightarrow X$ es justamente el morfismo identidad $1_X : X \longrightarrow X$.*

Definición 3.0.19. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es separado si el morfismo diagonal $\bigtriangleup$ es una inmersión cerrada. En tal caso también decimos que X es separado sobre Y.*

Recordemos que $\bigtriangleup$ es una inmersión cerrada si induce un homeomorfismo de $\mathrm{sp}(X)$ sobre un subconjunto cerrado de $\mathrm{sp}(X \times_Y X)$ y el morfismo de haces inducido $\bigtriangleup^\sharp : \mathcal{O}X \times_Y X \longrightarrow \bigtriangleup_* \mathcal{O}_X$ sobre $X \times_Y X$, es sobreyectivo.
En general decimos que un esquema X es separado si éste es separado sobre Spec( ).

Antes de enunciar algunos resultados que nos brindan un sin número de ejemplos de morfismos separados, presentamos un ejemplo que expone el caso particular en el que el esquema considerado no es separado. Más precisamente.

Ejemplo 3.0.4. Sean k un cuerpo y X la línea afín con origen doble, esto quiere decir que X se ha obtenido al pegar dos líneas afines mediante $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ con $U_1 = U_2 = \ \frac{1}{k} \setminus p$, tal como se realizó en el ejemplo 2.0.1. Entonces, X no es separado sobre k.
En efecto, veamos que $\bigtriangleup : X \longrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$ no es una inmersión cerrada y para ello primero que todo notemos que $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$ es un plano afín con ejes dobles y cuatro orígenes. Si denotamos p_1 y p_2 los orígenes de X entonces los cuarto orígenes del plano afín mencionado son (p_1, p_1), (p_2, p_2), (p_1, p_2) y (p_2, p_1). Ahora, puesto que la imagen de $\bigtriangleup$ es la diagonal usual entonces dos de los orígenes están en la imagen. Esto es,

$$\begin{array}{rcl} \bigtriangleup : X & \longrightarrow & X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X. \\ a & \longmapsto & (a, a) \end{array}$$

Así que, $\bigtriangleup(X)$ contiene los puntos (p_1, p_1) y (p_2, p_2), y en consecuencia $\bigtriangleup(X)$ no es cerrado, puesto que los cuatro orígenes estan en la clausura de $\bigtriangleup(X)$, ya que toda sucesión que converge a (p_1, p_1) también converge a (p_1, p_2) por ser p_2 una copia de p_1, así que (p_1, p_2) es un punto de adherencia de $\bigtriangleup(X)$, de forma análoga (p_2, p_1) también lo es. Por lo tanto, $\mathrm{sp}(X)$ no es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathrm{sp}(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X)$, entonces $\bigtriangleup$ no es una inmersión cerrada. En consecuencia X no es separado sobre k.

Proposición 3.0.10. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es cualquier morfismo de esquemas afines entonces f es separado.*

Demostración.
Sean $X = \mathrm{Spec}(A)$ y $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Puesto que A es una $B-$álgebra vía el morfismo inducido por f sobre los anillos B y A, entonces el morfismo sobreyectivo

$$\begin{aligned} A \otimes_B A &\longrightarrow A \\ a \otimes_B a' &\longmapsto a \cdot a', \end{aligned}$$

induce a su vez el morfismo diagonal $\bigtriangleup : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A \otimes_B A)$. El resultado se sigue del hecho que la diagonal usual, como espacio topológico, es cerrada.

□

Corolario 3.0.1. *Un morfismo esquemas arbitrarios $f : X \longrightarrow Y$ es separado si y sólo si la imagen del morfismo diagonal es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$.*

Demostración. Por definición, la imagen del morfismo diagonal $\bigtriangleup$ es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$.
Recíprocamente, supongamos que la imagen del morfismo diagonal es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$. Entonces, si $p_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ es la primera proyección, $p_1 \circ \bigtriangleup = 1_X$ así que p_1 es una inversa de $\bigtriangleup$, adicionalmente como p_1 es una proyección también es continua y en consecuencia $\bigtriangleup : X \longrightarrow \bigtriangleup(X)$ es un isomorfismo con inversa continua. Por lo tanto $\bigtriangleup$ es un homeomorfismo, siendo $\bigtriangleup(X) \subseteq X \times_Y X$ un subconjunto cerrado por hipótesis. Ahora, resta verificar que el morfismo de haces $\bigtriangleup^\sharp : \mathcal{O}_{X \times_Y X} \longrightarrow \bigtriangleup_* \mathcal{O}_X$ es sobreyectivo y ésto lo hacemos de manera local.
Para cualquier punto $p \in X$ consideremos una vecindad abierta afín U de p lo suficientemente pequeña de tal forma que $f(U)$ esté contenida en un subconjunto abierto afín V de Y. Por la Proposición 3.0.10 el morfismo $f_U : U \longrightarrow V$ es separado así que el morfismo diagonal $\bigtriangleup_U : U \longrightarrow U \times_V U$ es una inmersión cerrada y en consecuencia el morfismo de haces es sobreyectivo en una vecindad de p para cualquier $p \in X$. Por lo tanto, el morfismo de haces $\bigtriangleup^\sharp$ es sobreyectivo. □

Teorema 3.0.2 (Criterio Valuativo de Separabilidad)**.**
Sean X un esquema noetheriano y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Entonces f es separado si y sólo si la siguiente condición se cumple. "Para algún cuerpo k y algún anillo

de valuación R con cuerpo de cocientes k, sean $T = \mathrm{Spec}(R)$, $U = \mathrm{Spec}(k)$ e $i : U \longrightarrow T$ el morfismo inducido por la inclusión $R \subseteq k$. Entonces, dados los morfismos $T \longrightarrow Y$ y $U \longrightarrow X$ que hacen conmutativo el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe a lo más un morfismo $T \longrightarrow X$ que hace conmutativo todo el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Para poder abordar la prueba de éste teorema primero que todo es necesario conocer un par de resultados que exhibimos a continuación.

Lema 3.0.3. *Sean R un anillo de valuación de un cuerpo k, $T = \mathrm{Spec}(R)$ y $U = \mathrm{Spec}(k)$.*

1. *Dar un morfismo de U a un esquema X es equivalente a dar un punto $x_1 \in X$ y una inclusión de cuerpos, $k(x_1) \subseteq k$.*

2. *Dar un morfismo de T a un esquema X es equivalente a dar dos puntos $x_0, x_1 \in X$, con x_0 una especialización de x_1 (es decir $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$) y una inclusión de cuerpos $k(x_1) \subseteq k$, tal que R domina al anillo local $\mathcal{O}_{Z,x_0}$ siendo $Z = \overline{\{x_1\}}$ el subesquema de X con su estructura reducida inducida.*

Demostración.

1. Sean X un esquema dado y $(f, f^\sharp) : (\mathrm{Spec}(k), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ un morfismo de esquemas. Como $U = \mathrm{Spec}(k)$ es un esquema unipuntual con estructura de haz k entonces $f : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow X$ envía a el único elemento de $\mathrm{sp}(\mathrm{Spec}(k)) = \{0\}$ en algún punto $x_1 \in X$, así que el morfismo de haces $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}$ induce la aplicación de tallos

$$f^\sharp_{x_1} : \mathcal{O}_{X,x_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k),0} \cong k,$$

cuyo correspondiente morfismo de cuerpos residuales está dado por

$$\mathcal{O}_{X,x_1}/\mathfrak{m}_{x_1} \longrightarrow k,$$

siendo tal morfismo inyectivo puesto que k es un cuerpo, y en consecuencia

$$\mathcal{O}_{X,x_1}/\mathfrak{m}_{x_1} = k(x_1) \subseteq k.$$

Recíprocamente, sean $x_1 \in X$ y $k(x_1) \longrightarrow k$ el morfismo inclusión. Entonces podemos definir el morfismo de espacios topológicos $f : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow X$ como $f(0) = x_1$.
Luego, para definir el correspondiente morfismo de haces $f^\sharp$, argumentamos de forma local. Esto es, para un abierto $U \subseteq X$ tal que $x_1 \in U$ consideremos el morfismo

$$f^\sharp(U) : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}(U),$$

donde $f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}(U) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{Spec}k) \cong k$ y por lo tanto $f^\sharp(U)$ no es más que el morfismo $f^\sharp : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow k$, el cual está definido por la composición

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x_1}/\mathfrak{m}_{x_1} = k(x_1) \longrightarrow k.$$

Notemos que si $x_1 \notin U$ entonces $f^{-1}(U) = \varnothing$ lo cual implica que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}(\varnothing) = 0$, por lo tanto bastará definir $f^\sharp$ para abiertos $U \subseteq X$ que contienen a x_1.
Finalmente, como $\mathcal{O}_{X,x_1}/\mathfrak{m}_{x_1} = k(x_1) \longrightarrow k$ es un isomorfismo entonces en particular es un morfismo local y dado que $f^\sharp$ está definido mediante la composición $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x_1}/\mathfrak{m}_{x_1} = k(x_1) \longrightarrow k$ entonces podemos concluir que el morfismo de tallos $f_0^\sharp : \mathcal{O}_{X,x_1} \longrightarrow k$ es un morfismo local.

2. Sea $\varphi : T \longrightarrow X$ un morfismo de esquemas. Recordemos que al ser R un anillo de valuación, T es un esquema con dos puntos siendo el primero de ellos el punto genérico t_1 y el segundo es el punto cerrado t_0. Entonces dado el morfismo φ podemos considerar los siguientes puntos de X, $x_0 = \varphi(t_0)$ y $x_1 = \varphi(t_1)$.
A continuación veamos que T es un esquema reducido, con lo cual se garantiza que φ se factoriza a traves de un subesquema cerrado de X, el cual tiene la estructura

reducida inducida sobre la clausura de la imagen[11]. Recordemos que verificar que T es reducido corresponde a mostrar que $\mathcal{O}_T(U)$ no tiene elementos nilpotentes para cualquier abierto $U \subseteq T$, pero bastará con mostrar lo deseado sólo para los abiertos básicos $\{D(f)\}_{f\in R}$ de T.

Luego, como R es un anillo de valuación existe una valuación $v : k \longrightarrow \quad \cup \{\infty\}$ tal que $R = \{x \in k;\ v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$, entonces de existir un elemento $x \in R$ nilpotente se tendría que $x^n = 0$ para algún $n \in \quad$, de lo cual $v(x^n) = v(0) = \infty$, pero dado que $v(x^n) = nv(x)$ con $n \in \quad$ entonces $v(x) = \infty$ lo cual implica que $x = 0$ y en consecuencia R no posee elementos nilpotentes distintos de cero, luego R_f tampoco poseerá elementos nilpotentes. Ahora, como $\mathcal{O}_T(D(f)) \cong R_f$ entonces $\mathcal{O}_T(D(f))$ no posee elementos nilpotentes así que T es reducido.

Luego, sea $Z = \overline{\{x_1\}} \subseteq X$ entonces Z es un subconjunto cerrado de X y le damos la estructura de subesquema cerrado reducida inducida y tal subesquema factoriza a φ. Veamos que en efecto $Z = \overline{\varphi(T)}$. Como $\varphi^{-1}(Z) = \{t_i \in T;\ \varphi(t_i) \in Z\}$, al ser Z un subconjunto cerrado y φ una aplicación continua se sigue que $\varphi^{-1}(Z)$ es un subconjunto cerrado de T tal que $t_1 \in \varphi^{-1}(Z)$. Entonces,

$$\overline{\{t_1\}} = V(t_1) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R); \langle t_1 \rangle \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R); (0) \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}(R) = T$$

así que $\overline{\{t_1\}} = T \subseteq \varphi^{-1}(Z)$ y en consecuencia $T = \varphi^{-1}(Z)$. Por lo tanto, $\overline{\varphi(T)} = Z = \overline{\{x_1\}}$, lo cual implica que $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$. Es decir, x_0 es una especialización de x_1.

Ahora consideremos φ restringido a su imagen, ésto es $\varphi : T \longrightarrow Z$, cuyo correspondiente morfismo de haces $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Z \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_T$ verifica para cualquier abierto $U \subseteq Z$, en particular para los abiertos básicos, que $(\varphi_*\mathcal{O}_T)(D(f)) = \mathcal{O}(\varphi^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_T(D(\widetilde{f})) \cong R_{\widetilde{f}}$ y como R es un anillo local entonces $(\varphi_*\mathcal{O}_T)_{t_0} \cong R_{t_0} \cong R$, luego el morfismo de tallos $\varphi^\sharp_{x_0} : \mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow (\varphi_*\mathcal{O}_T)_{t_0}$ es un morfismo local que es justamente $\varphi^\sharp_{x_0} : \mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow R$, cuyo correspondiente morfismo de cuerpos residuales es

$$\mathcal{O}_{Z,x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \longrightarrow R/\mathfrak{m}_R,$$

ésto es $k(x_0) \longrightarrow k$, el cual es un isomorfismo y por lo tanto $k(x_0) \subseteq k$.

[11] Ver Capítulo II de [?], Esquemas, ejercicio 3.11 item (d).

Finalmente, como R es un anillo de valuación de k entonces R es maximal[12] en el conjunto de todos los anillos locales contenidos en k, respecto a la relación de dominación. Por lo tanto R domina a $\mathcal{O}_{Z,x_0}$.
Recíprocamente, supongamos dados dos puntos $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$ y $k(x_1) \subseteq k$ tal que R domina a $\mathcal{O}_{Z,x_0}$. Entonces, en virtud de la relación de dominación tenemos el morfismo inclusión $i : \mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow R$, el cual induce el morfismo de espacios topológicos

$$T = \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}).$$

Además, como también tenemos la inclusión $\overline{\{x_1\}} = Z \subseteq X$ entonces se tiene el morfismo $i_1 : Z \longrightarrow X$ cuyo correspondiente morfismo de haces es $i_1^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z$, el cual al componerlo con la aplicación natural de $\mathcal{O}_Z$ a el tallo $\mathcal{O}_{Z,x_0}$ obtenemos el morfismo

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{i_1^\sharp} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,x_0}$$

y dicho morfismo a su vez induce el morfismo de espacios topológicos $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \longrightarrow X$, cuya composición con el morfismo inducido por i establece el morfismo deseado, $\varphi : T \longrightarrow X$ □

Definición 3.0.20. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es cuasi-compacto si existe una cubierta de Y por abiertos afines $\{V_i\}_{i\in I}$ tal que $f^{-1}(V_i)$ es cuasi-compacto para cada $i \in I$.*

Proposición 3.0.11. *Un morfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es cuasi-compacto si y sólo si para todo subconjunto abierto afín $V \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(V)$ es cuasi-compacto.*

De ahora en adelante diremos que un conjunto A es estable bajo especializaciones (en el sentido del Lema 3.0.3) si para todo $a \in A$, toda especialización de a pertenece a A. En particular, un subconjunto cerrado es estable bajo especializaciones como veremos a continuación.

Lema 3.0.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo cuasi-compacto de esquemas. Entonces $\mathrm{im}(f) \subseteq Y$ es cerrado si y sólo si es estable bajo especializaciones.*

[12]Ver Capítulo I de [**?**], Variedades, Teorema 6.1A, pag 40.

Demostración. Supongamos que $f(X) \subseteq Y$ es cerrado. Puesto que $\overline{\{y\}} \subseteq Y$ es el subconjunto cerrado más pequeño de Y que contiene a y, entonces $\overline{\{y\}} \subseteq f(X)$ y por lo tanto cualquier especialización y_0 de y se satisface que $y_0 \in \overline{\{y\}} \subseteq f(X)$.
Recíprocamente, supongamos que $f(X)$ es estable bajo especializaciones. Sin perdida de generalidad podemos suponer que X y Y son reducidos y $\overline{f(X)} = Y$.
Sea $y \in Y$, así que debemos mostrar que $y \in f(X)$. Dado que podemos reemplazar Y por una vecindad afín de y supongamos que Y es afín. Luego, como $f : X \longrightarrow Y$ es cuasi-compacto se tiene que X es la unión finita de abiertos afines, digamos $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ con $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Entonces $y \in Y = \overline{f(X)} = \overline{f(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)}$, de lo cual $y \in \overline{f(X_i)}$ para algún i. Además, si denotamos por Y_i a $\overline{f(X_i)}$, como Y es afín y Y_i es un subconjunto cerrado el cual determina un subesquema cerrado de Y se sigue que Y_i también es afín[13], entonces consideremos el morfismo dominante $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ de esquemas afines reducidos. Es decir, f_i es un morfismo de esquemas afines reducidos tal que $\overline{f_i(X_i)} = Y_i$, donde al ser X_i y Y_i esquemas afines podemos suponer que $X_i = \mathrm{Spec}(A)$ y $Y_i = \mathrm{Spec}(B)$, entonces el morfismo $f_i : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ induce el morfismo de anillos $B \longrightarrow A$ y dado que f_i es dominante entonces $(f_i^\sharp)_p$ es inyectivo[14], luego en virtud de la Proposición 1.0.8 el correspondiente morfismo de haces también lo es y en consecuencia el morfismo de secciones globales, que es justamente $B \longrightarrow A$, es inyectivo.

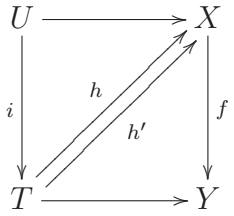
Ahora, como el punto $y \in Y_i$ corresponde a un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq B$, entonces sea $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ el ideal primo minimal de B contenido en $\mathfrak{p}$, donde la existencia de dicho ideal es garantizada por el Lema de Zorn, entonces $\mathfrak{p}'$ corresponde a un punto $y' \in Y_i$, para el cual y es una especialización, es decir $y \in \overline{\{y'\}}$. Entonces afirmamos que $y' \in f(X_i)$. En efecto, dado el morfismo inclusión $B \longrightarrow A \otimes B$ tenemos el correspondiente morfismo de localización $B_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow (A \otimes B)_{\mathfrak{p}'} \cong A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$, de lo cual $B_{\mathfrak{p}'} \subseteq A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$ y dado que $\mathfrak{p}' \subseteq B$ es el primo minimal contenido en $\mathfrak{p}$ se tiene que $B_{\mathfrak{p}'}$ es un cuerpo; puesto que al ser Y_i reducido se tiene que el nilradical de B es el ideal nulo y por lo tanto $\mathfrak{p}' = 0$.

[13]Ver Capítulo II de [**?**], Esquemas, ejercicio 3.11 items (b), pag 92.

[14]Un morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ tal que $\varphi(X)$ es denso en Y satisface que el morfismo inducido de tallos es inyectivo. Ver Capítulo I de [**?**], Variedades, ejercicio 3.3, pag 21.

Luego, sea $\mathfrak{q}'_0$ un ideal primo cualquiera de $A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$ entonces $\mathfrak{q}'_0 \cap B_{\mathfrak{p}'} = 0$. Adicionalmente, sea $\mathfrak{q}' \subseteq A$ la imagen inversa de $\mathfrak{q}'_0$ bajo el morfismo $A \longrightarrow A \otimes B_{\mathfrak{p}'}$ entonces $\mathfrak{q}' \cap B = \mathfrak{p}'$, además $\mathfrak{q}'$ se corresponde con un punto $x' \in X_i$ tal que $f(x') = y'$. Entonces, al ser $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ se sigue que $x' \in X$ tal que $f(x') = y'$, por lo tanto $y' \in f(X)$.
Finalmente, como $f(X)$ es estable bajo especializaciones y $y \in \overline{\{y'\}}$ con $y' \in f(X)$, entonces $y \in f(X)$. Por lo tanto, $f(X)$ es un subconjunto cerrado de Y. □

Demostración. [Teorema 3.0.2: Criterio Valuativo de Separabilidad.]
Supongamos que f es un morfismo separado y consideremos un diagrama como el expuesto por la condición del teorema, tal que existen dos morfismos h y h' de T a X que lo hacen conmutativo.



Notemos que de h y h' podemos obtener el morfismo h'' dado por:

$$\begin{aligned} h'' : T &\longrightarrow X \times_Y X \\ a &\longmapsto (h(a), h'(a)) \end{aligned}$$

y como $h(i(U)) = h'(i(U))$, entonces las restricciones de h y h' a U son iguales así que el punto genérico t_1 de T tiene imagen en la diagonal $\bigtriangleup(X)$. Además como f es separado se tiene que $\bigtriangleup(X)$ es cerrado así que t_0 también tiene imagen en la diagonal. Esto es, de los morfismos h y h' se tiene que a los puntos t_0 y t_1, mediante los morfismos, les corresponden los puntos x_0 y x_1 de X respectivamente, tal que $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$ y como $(x_1, x_1) \in \bigtriangleup(X)$ entonces $(x_0, x_0) \in \overline{\{(x_1, x_1)\}} \subseteq \bigtriangleup(X)$. Además las inclusiones de $k(x_1) \subseteq k$ inducidas por h y h' son las mismas entonces en virtud del Lema 3.0.3 podemos concluir que h y h' son iguales.

De otro lado, supongamos que la condición del Teorema 3.0.2 se satisface, entonces en virtud del Corolario 3.0.1 bastará mostrar que $\bigtriangleup(X)$ es un subconjunto cerrado de $X \times_Y X$. Luego, como X es noetheriano, puede ser cubierto por un número finito de subconjuntos abiertos afines, digamos $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ tales que cada A_i es un anillo noetheriano. Entonces

si $\{(W_i, W_i)\}_{i=1}$. es una cubierta por afines de $X \times_Y X$ se tiene que el morfismo $\bigtriangleup : X \longrightarrow X \times_Y X$ es tal que $\bigtriangleup^{-1}(W_i, W_i) = W_i$, donde $\{U_j \cap W_i\}_{j=1}^n$ es una cubierta por abiertos afines de W_i y ésto se tiene para todo i, así que $\bigtriangleup$ es cuasi-compacto y por el Lema anterior bastará mostrar que $\bigtriangleup(X)$ es estable bajo especializaciones.

Sean $\varepsilon_1 \in \bigtriangleup(X)$, ε_0 una especialización de ε_1, $k = k(\varepsilon_1)$ y $\mathcal{O}$ el anillo local de ε_0 sobre el subesquema $\overline{\{\varepsilon_1\}}$ con su estructura reducida inducida. Esto es,

$$k = k(\varepsilon_1) = \mathcal{O}_{X \times_Y X, \varepsilon_1}/\mathfrak{m}_{\varepsilon_1} \quad \text{y} \quad \mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z, \varepsilon_0},$$

donde $Z = \overline{\{\varepsilon_1\}}$. Luego como $\varepsilon_0 \in \overline{\{\varepsilon_1\}}$ entonces $\mathcal{O} \subseteq k$ y como cada anillo local contenido en k es dominado por algún anillo de valuación de k[15] entonces existe un anillo de valuación R de k el cual domina a $\mathcal{O}$. Ahora en virtud del Lema 3.0.3 lo anterior es equivalente a tener un morfismo de $T = \mathrm{Spec}(R)$ a $X \times_Y X$, el cual envía a t_0 y t_1 en ε_0 y ε_1 respectivamente. Luego, haciendo la composición de dicho morfismo con las proyecciones p_1, p_2 obtenemos dos morfismos de T a X. Es decir, si denotamos por φ al morfismo de T a $X \times_Y X$ entonces los morfismos obtenidos son $p_1 \circ \varphi$ y $p_2 \circ \varphi$, los cuales dan el mismo morfismo a Y. Esto es, $f \circ p_1 \circ \varphi = f \circ p_2 \circ \varphi$; puesto que por hipótesis la condición del teorema se satisface, además las restricciones a $U = \mathrm{Spec}(k)$ de los dos morfismos son iguales. En efecto, como $\mathrm{sp}(U) = \mathrm{sp}(\mathrm{Spec}(k)) = \{\langle 0 \rangle\} = \{\mathrm{t}_1\}$ entonces $p_1 \circ \varphi(t_1) = p_1(\varepsilon_1) = p_2(\varepsilon_1) = p_2 \circ \varphi(t_1)$, puesto que $\varepsilon_1 \in \bigtriangleup(X)$ y $p_1 \circ \bigtriangleup = p_2 \circ \bigtriangleup = 1_X$.

Finalmente, de la condición que se satisface se deduce que los dos morfismos de T a X son el mismo, digamos $\overline{\varphi}$. Entonces podemos factorizar el morfismo $\varphi : T \longrightarrow X \times_Y X$ mediante el morfismo diagonal y $\overline{\varphi}$, ésto es $T \xrightarrow{\overline{\varphi}} X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X$ con $\varphi = \bigtriangleup \circ \overline{\varphi}$, entonces $\varphi(t_0) = \bigtriangleup(\overline{\varphi}(t_0)) = \varepsilon_0$. Por lo tanto, $\varepsilon_0 \in \bigtriangleup(X)$, con lo cual se completa la prueba. □

[15] Ver Capítulo I de [?], Variedades, Teorema 6.1A, pag 40

Capítulo 4

HACES DE MÓDULOS.

En éste capítulo presentaremos la noción de haces de módulos y haremos un breve recorrido por ésta teoría, exhibiendo ejemplos y algunas de las propiedades que son resultados análogos al caso de un haz en general. También presentamos, de forma somera, el caso de haces de módulos sobre el espectro de un anillo y sobre el espectro proyectivo de un anillo graduado.

Definición 4.0.1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un haz de $\mathcal{O}_X-$módulos (o simplemente un $\mathcal{O}_X-$módulo) es un haz $\mathcal{F}$ sobre X tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el grupo $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)-$módulo, y para cada inclusión de conjuntos abiertos $V \subseteq U$ el morfismo restricción $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulo vía el morfismo de anillos $\rho_{\mathcal{O}_{UV}} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$. Esto es, como $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)-$módulo entonces para $s_U \in \mathcal{O}_X(U)$ y $f_U \in \mathcal{F}(U)$ se tiene que*

$$\rho_{UV}(s_U f_U) = \rho_{\mathcal{O}_{UV}}(s_U)\rho_{UV}(f_U).$$

Observe que mediante el morfismo $\rho_{\mathcal{O}_{UV}} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ podemos dar a $\mathcal{F}(V)$ una estructura de $\mathcal{O}_X(U)-$módulo, así que ρ_{UV} es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)-$módulos.

Definición 4.0.2. *Un morfismo de $\mathcal{O}_X-$módulos $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ la aplicación $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)-$módulos.*

A continuación presentamos algunos ejemplos de $\mathcal{O}_X(U)$–módulos que se obtienen de forma natural de las teorías de módulos y haces.

Ejemplo 4.0.1.

1. Dado un morfismo de $\mathcal{O}_X$–módulos el kernel, cokernel y la imagen del morfismo son $\mathcal{O}_X$–módulos. En efecto, si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$–módulos, entonces para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ la aplicación $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)$–módulos y de la teoría de módulos se garantiza que $\ker(\varphi(U))$, $\operatorname{coker}(\varphi(U))$ e $\operatorname{im}(\varphi(U))$ son $\mathcal{O}_X(U)$–módulos. Por lo tanto los haces kernel de φ, cokernel de φ e imagen de φ son $\mathcal{O}_X$–módulos.

2. Si $\mathcal{F}'$ es un subhaz de un haz $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$–módulos, entonces el haz cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es un haz de $\mathcal{O}_X$–módulos. En efecto, para cada abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y como $\mathcal{F}(U)$ es $\mathcal{O}_X(U)$–módulo entonces de la teoría de módulos tenemos que $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ es $\mathcal{O}_X(U)$–módulo. Por lo tanto, $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ es un haz de $\mathcal{O}_X$–módulos.

3. La suma directa, producto directo, límite directo o límite inverso de haces de $\mathcal{O}_X$–módulos es un $\mathcal{O}_X$–módulo. De la teoría de módulos, dada una familia de $\mathcal{O}_X(U)$–módulos la suma directa y el producto directo es un $\mathcal{O}_X(U)$–módulo[1]. Ahora veamos que el límite inverso es un $\mathcal{O}_X$–módulo. Sea (A_i, f_{ij}) un sistema inverso. Si A_i es un $\mathcal{O}_X(U)$–módulo, entonces para cada $i \in I$ y $U \subseteq X$, la siguiente acción está bien definida

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(U)\times A_i & \longrightarrow & A_i \\ (s, x_i) & \longmapsto & s \cdot x_i \end{array}$$

   Luego, si $x = (x_i)_{i\in I} \in \varprojlim A_i$ entonces $sx_j \in A_j$ verifica que $f_{ij}(sx_j) = sf_{ij}(x_j) = sx_i$ para todo $s \in \mathcal{O}_X(U)$ puesto que f_{ij} es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)$–módulos. Así que, para $s \in \mathcal{O}_X(U)$ y $x \in \varprojlim A_i$, el elemento $sx = (sx_i)_{i\in I}$ satisface que $sx_i = f_{ij}(sx_j)$, y en consecuencia $sx \in \varprojlim A_i$. Por lo tanto la siguiente acción está bien definida.

[1]Ver Capítulo II de [**?**], Módulos, pag 22.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \varprojlim A_i & \longrightarrow & \varprojlim A_i \\ (s, x) & \longmapsto & s \cdot x = (sx_i)_{i \in I} \end{array}$$

Es decir, $\varprojlim A_i$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(U)$–módulo para cada $U \subseteq X$.

4. Si U es un subconjunto abierto de X y $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$–módulos entonces el haz restricción $\mathcal{F}|_U$ también lo es. En efecto, la acción

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ (s, f) & \longmapsto & s \cdot f \end{array}$$

está bien definida para todo $U \subseteq X$, y en consecuencia para todo abierto $V \subseteq U$ podemos definir la acción

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X|_U}(V) \times \mathcal{F}|_U(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}|_U(V), \\ (s|_V, f|_V) & \longmapsto & s|_V \cdot f|_V \coloneqq (s \cdot f)|_V \end{array}$$

donde $(s \cdot f)|_V$ está bien definido; puesto que $s \cdot f$ también lo está. Así que $\mathcal{F}|_U(V)$ es un haz de $\mathcal{O}_{X|_U}(V)$–módulos para todo $V \subseteq U$.

5. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos haces de $\mathcal{O}_X$–módulos, denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ al grupo de los morfismos de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$. El pre-haz determinado por $U \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|_U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ es un haz, denotado por $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, el cual también es un haz de $\mathcal{O}_X$–módulo.

Definición 4.0.3. *Una sucesión de $\mathcal{O}_X$–módulos y morfismos es exacta si ésta es exacta como una sucesión de haces de grupos abelianos. Esto es, para cada $U \subseteq X$ la sucesión de grupos abelianos*

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1}(U) \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i(U) \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \ldots$$

satisface que $\ker(\varphi_i(U)) = \mathrm{im}(\varphi_{i-1}(U))$ *para cada i.*

Definición 4.0.4. *Un $\mathcal{O}_X$–módulo $\mathcal{F}$ es libre si es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathcal{O}_X$. De otro lado, es localmente libre si X puede ser cubierto por conjuntos abiertos U para los cuales $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X|_U$–módulo libre. En éste caso, el rango de $\mathcal{F}$ sobre uno de los abiertos mencionados anteriormente es el número de copias del haz estructural necesarias, ya sean finitas o infinitas.*

En el caso particular que X sea conexo el rango de un haz localmente libre es el mismo para cada abierto de la cubierta de X que hace de $\mathcal{F}|_U$ un $\mathcal{O}_X|_U$–módulo libre. A saber, si $f : X \longrightarrow$ es una función continua que a cada abierto $U \subseteq X$ le asigna el número de copias de $\mathcal{O}_X|_U$ que hace de $\mathcal{F}|_U$ un $\mathcal{O}_X|U$–módulo libre, entonces f ha de ser constante puesto que la única función continua no nula de un espacio conexo a un espacio discreto es la función constante. En consecuencia se garantiza que el rango de $\mathcal{F}$ sobre cada U es el mismo. A partir de ahora un haz localmente libre de rango uno lo llamaremos un *haz invertible.*

Definición 4.0.5.

1. *Dados dos $\mathcal{O}_X$–módulos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ definimos su producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ como el haz asociado a el pre-haz determinado por $U \longrightarrow \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.*

2. *Un haz de ideales sobre X es un haz de módulos $\mathcal{I}$ el cual es un sub-haz de $\mathcal{O}_X$. Es decir, para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathcal{I}(U)$ es un ideal en $\mathcal{O}_X(U)$.*

Notemos que si $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$–módulo, entonces el haz imagen directa de $\mathcal{F}$ por el morfismo f denotado por $f_*\mathcal{F}$, el cual fue definido en 1.0.8, es un $f_*\mathcal{O}_X$–módulo. Adicionalmente, en virtud del morfismo de haces inducido sobre Y, $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$, dotamos a $f_*\mathcal{F}$ de una estructura natural de $\mathcal{O}_Y$–módulo.
De otro lado, si $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_Y$–módulos entonces $f^{-1}\mathcal{G}$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$–módulo. Además, en virtud de la propiedad adjunta[2] de f^{-1}, tenemos el morfismo de haces sobre X, $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$, así que $f^{-1}\mathcal{G}$ tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_X$–módulo. Luego, definimos el haz $f^*\mathcal{G}$ como el producto tensorial $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$, el cual evidentemente es un $\mathcal{O}_X$–módulo, llamado el haz imagen inversa de $\mathcal{G}$ mediante f.

En los capítulos anteriores hemos estudiado el caso especial en el cual el espacio topológico está definido a partir de un anillo. Ahí presentamos el haz y el esquema asociado a dicho

[2]Ver Capítulo II de [**?**], Esquemas, ejercicio 1.18, pag 68.

espacio y consideramos algunas de sus propiedades más relevantes. A continuación nos proponemos hacer un estudio equivalente pero en el caso de un haz de módulos.

Definición 4.0.6. *Sean A un anillo, M un A–módulo, $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo y $M_{\mathfrak{p}}$ la localización de M en $\mathfrak{p}$. Definimos el haz asociado a M sobre* $\mathrm{Spec}(A)$*, denotado por $\widetilde{M}$, mediante los grupos $\widetilde{M}(U)$ para cada $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, donde tales grupos se definen como el conjunto de funciones*

$$\begin{aligned} s : U &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_{\mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{p} &\longmapsto s(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

tal que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ y s es localmente un cociente m/f con $m \in M$ y $f \in A$. Esto es, para cada $\mathfrak{p} \in U$ existen una vecindad $V \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $m \in M$ y $f \in A$ tal que para todo $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $s(\mathfrak{q}) = m/f \in M_{\mathfrak{q}}$ con $f \notin \mathfrak{q}$.

Observemos que $\widetilde{M}$ es un haz usando las restricciones naturales. Esto es, dados dos abiertos $V \subseteq U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \widetilde{M}(U) &\longrightarrow \widetilde{M}(V) \\ s &\longmapsto \rho_{UV}(s) := s|_V \end{aligned}$$

A continuación presentamos la caracterización del haz $\widetilde{M}$ asociado a un A–módulo M, el cual es un resultado análogo a la Proposición 2.0.2.

Proposición 4.0.1. *Sean A un anillo, M un A–módulo y $\widetilde{M}$ el haz asociado a M sobre $X = \mathrm{Spec}(A)$. Entonces,*

1. *$\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$–módulo.*
2. *Para cada $\mathfrak{p} \in X$, el tallo $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}}$ es isomorfo a el módulo localizado $M_{\mathfrak{p}}$.*
3. *Para cualquier $f \in A$, el A_f–módulo $\widetilde{M}(D(f))$ es isomorfo a M_f.*
4. *$\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.*

Demostración.

1. Dotamos a $\widetilde{M}$ de una estructura de $\mathcal{O}_X$–módulo mediante la siguiente aplicación. Para cada abierto $U \subseteq X$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) \times \widetilde{M}(U) &\longrightarrow \widetilde{M}(U), \\ (f, s) &\longmapsto f \cdot s \end{aligned}$$

donde $f \cdot s$ está dado por

$$\begin{aligned} f \cdot s : U &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{p} &\longmapsto (f \cdot s)(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}) \cdot s(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

tal que para todo $\mathfrak{p} \in U$ se verifica que $(f \cdot s)(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ y existen una vecindad $V_{\mathfrak{p}} \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $a, b, t \in A$ y $m \in M$ los cuales para todo $\mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}}$ satisfacen que $b \notin \mathfrak{q}$, $t \notin \mathfrak{q}$ y $f(\mathfrak{q}) \cdot s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{m}{t}$, ésto es $f(\mathfrak{q}) \cdot s(\mathfrak{q}) = \dfrac{am}{bt} \in M_{\mathfrak{q}}$ con $bt \notin \mathfrak{q}$.

2. Para el caso de los items restantes, 2, 3 y 4 las pruebas son análogas a las de la Proposición 2.0.2; salvo que en lugar de considerar el haz $\mathcal{O}$ sobre X consideramos el haz $\widetilde{M}$, por lo tanto son omitidas. □

Notemos que cualquier anillo A es a su vez un A–módulo, así que es posible considerar el haz asociado a el módulo A sobre $\mathrm{Spec}(A)$, que en virtud de las definiciones 2.0.2 y 4.0.6, dicho haz no es más que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$. Además dado un morfismo de A–módulos es posible inducir un morfismos de haces asociados a dichos módulos. Esto es,

Observación 4.0.1.

1. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ y consideramos $M = A$, entonces $\widetilde{M} = \mathcal{O}_X$.

2. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ y M, N son A–módulos, entonces cada morfismo A–módulos $f : M \longrightarrow N$ induce un morfismo de $\mathcal{O}_X$–módulo $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$. A saber, si

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow N, \\ m &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

y $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$ son los haces asociados a M y N respectivamente, entonces definimos $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$ de la siguiente manera. Para cualquier abierto $U \subseteq X$

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(U) : \widetilde{M}(U) &\longrightarrow \widetilde{N}(U), \\ s &\longmapsto \widetilde{f}(U)(s) \end{aligned}$$

donde $\widetilde{f}(U)(s)$ es una sección de $\widetilde{N}(U)$ que se define como la función,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(U)(s) : U &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} N_{\mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{p} &\longmapsto [\widetilde{f}(U)(s)](\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

la cual es una función localmente constante. Esto es, dado que $s \in \widetilde{M}(U)$ entonces definimos a dicha sección como la función

$$\begin{aligned} s : U &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_{\mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{p} &\longmapsto s(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

tal que para todo $\mathfrak{p} \in U$ se verifica que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ y existen una vecindad $V_{\mathfrak{p}} \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $m \in M$ y $h \in A$ los cuales para todo $q \in V_{\mathfrak{q}}$ cumplen que $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{m}{h}$ con $h \notin \mathfrak{q}$. Por lo tanto, $[\widetilde{f}(U)(s)](\mathfrak{p})$ está definida de tal forma que para cada $\mathfrak{p} \in U$ se verifica que $[\widetilde{f}(U)(s)](\mathfrak{p}) \in N_{\mathfrak{p}}$ y existen una vecindad $V_{\mathfrak{p}} \subseteq U$ de $\mathfrak{p}$ y elementos $f(m) \in N$ con $m \in M$ y $h \in A$ que para todo $\mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}}$ cumplen que $[\widetilde{f}(U)(s)](\mathfrak{q}) = \dfrac{f(m)}{h}$ con $h \notin \mathfrak{q}$.

Proposición 4.0.2. *Sean A un anillo, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos y $f : \operatorname{Spec}(B) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ el correspondiente morfismo de espectros de φ. Entonces,*

1. *La aplicación $\sim : M \longrightarrow \widetilde{M}$ da un funtor exacto totalmente fiel de la categoría de los $A-$módulos a la categoría de los $\mathcal{O}_X-$módulos.*
2. *Si M y N son dos $A-$módulos entonces $(\widetilde{M \otimes_A N}) \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.*
3. *Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es cualquier familia de $A-$módulos entonces $(\widetilde{\bigoplus_i M_i}) \cong \bigoplus_i \widetilde{M_i}$.*
4. *Para cualquier $B-$módulo N se verifica que $f_*(\widetilde{N}) \cong (\widetilde{{}_A N})$, donde ${}_A N$ denota a N considerado como $A-$módulo.*
5. *Para cualquier $A-$módulo M se verifica que $f^*(\widetilde{M}) \cong (\widetilde{M \otimes_A B})$.*

Demostración.

1. Como todo A–módulo M tiene asociado un $\mathcal{O}_X$–módulo $\widetilde{M}$ y cada morfismo de A–módulos $f : M \longrightarrow N$ induce un morfismo de $\mathcal{O}_X$–módulo $\widetilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$, entonces la aplicación $\sim\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$, que va de la categoría de A–módulos a la categoría de $\mathcal{O}_X$–módulos, y que envía A–módulos en $\mathcal{O}_X$–módulos y morfismos de módulos en morfismos de $\mathcal{O}_X$–módulos, es decir

$$M \longrightarrow \mathcal{O}_X(M) = \widetilde{M},$$

$$f \longrightarrow \mathcal{O}_X(f) = \widetilde{f}$$

es funtorial. Además, se satisface que si $N \longrightarrow M \longrightarrow K$ es una sucesión exacta, entonces $\widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{K}$ también lo es. En efecto, si $N \longrightarrow M \longrightarrow K$ es una sucesión exacta entonces su localización $N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow K_{\mathfrak{p}}$ es exacta[3] para cada $\mathfrak{p}$. Luego, la Proposición 4.0.1 garantiza que la sucesión $(\widetilde{N})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\widetilde{K})_{\mathfrak{p}}$ es exacta. Así que en virtud de la Proposición 1.0.13 podemos concluir que la sucesión de haces $\widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{K}$ también lo es.
Adicionalmente, si M y N son A–módulos tales que $M = N$ entonces la sucesión de A–módulos $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$ es exacta, con $\alpha = 1_N$. En consecuencia, la sucesión de haces de módulos $0 \longrightarrow \widetilde{N} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \widetilde{M} \longrightarrow 0$ también es exacta, así que $\widetilde{N} \cong \widetilde{M}$. Pero al ser $\alpha = 1_N$, se tiene que $\widetilde{\alpha} = 1_{\widetilde{N}}$ entonces $\widetilde{M} = \widetilde{N}$. Por lo tanto, $\sim$ es un funtor exacto totalmente fiel.

2. Sea $L = M \otimes_A N$. Por la Proposición 4.0.1, para cualquier $f \in A$ tenemos el isomorfismo de A_f–módulos $\widetilde{L}(D(f)) \cong L_f$ y en consecuencia obtenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\widetilde{L}(D(f)) \cong (M \otimes_A N)_f \cong M_f \otimes_{A_f} N_f \cong \widetilde{M}(D(f)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(f))} \widetilde{N}(D(f)),$$

de lo cual se sigue que $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.

3. Sea $D(f) \subseteq X = \mathrm{Spec}(A)$ con $f \in A$, entonces en virtud de la Proposición 4.0.1, y por las propiedades de la suma de módulos, se tiene la siguiente cadena de isomorfismos

$$(\widetilde{\oplus_i M_i})(D(f)) \cong (\oplus_i M_i)_f \cong \oplus_i (M_i)_f \cong \oplus_i \widetilde{M_i}(D(f)),$$

[3]Ver Capítulo III de [?], Anillos y módulo de fracciones. Proposición 3.3, pag 44.

y por lo tanto $(\widetilde{\oplus_i M_i}) \cong \oplus_i \widetilde{M_i}$.

4. Sea N un $B-$módulo, entonces dado el morfismo de anillos φ se tiene que a su vez N es un $A-$módulo el cual denotaremos por ${}_AN$. Ahora, por definición para cualquier abierto $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ tenemos $f_*(\widetilde{N})(U) = N(\widetilde{f^{-1}(U)})$ y como una cubierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ provee de una cubierta a $\mathrm{Spec}(B)$, dada por los abiertos de la forma $f^{-1}(U_i)$, que no son más que $\varphi|_{\mathrm{Spec}(A)}(U_i)$ entonces los conjuntos $N(\widetilde{f^{-1}(U_i)})$ definen justamente a el haz $\widetilde{{}_AN}$

5. De la definición del haz imagen inversa, del segundo item de la presente proposición y considerando $X = \mathrm{Spec}(A), Y = \mathrm{Spec}(B)$ se tiene la siguiente cadena de isomorfismos que verifican el enunciado: para cualquier abierto $U \subseteq Y$,

$$f^*(\widetilde{M})(U) \cong (f^{-1}\widetilde{M} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y)(U) \cong (f^{-1}\widetilde{M} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \widetilde{B})(U) \cong (\widetilde{M \otimes_A B})(U).$$

□

Los haces de módulos asociados a un $A-$módulo que acabamos de presentar, son un ejemplo básico para un tipo muy especial de haces de módulos sobre un esquema arbitrario X, los cuales son localmente de la forma $\widetilde{M}$, y que llamaremos haces cuasi-coherentes. Más precisamente,

Definición 4.0.7. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Un haz de $\mathcal{O}_X-$módulo $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente si X puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, tal que para cada i existe un A_i-módulo M_i con $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$. En el caso particular en el que cada M_i puede ser tomado como un A_i-módulo finitamente generado diremos que $\mathcal{F}$ es coherente.*

Ejemplo 4.0.2.

1. Para un esquema arbitrario X, el haz estructural $\mathcal{O}_X$ es cuasi-coherente, y más aún es coherente. En efecto, sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Entonces $\mathcal{O}_X$ es claramente un $\mathcal{O}_X-$módulo. Además al ser X un esquema, existe una cubierta por abiertos afines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, así que para todo i podemos considerar el A_i-módulo $M_i = A_i$ entonces $\widetilde{M_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$ y en consecuencia $\mathcal{O}_X$ es cuasi-coherente. Luego, como

$M_i = A_i$ entonces M_i es finitamente generado como A_i–módulo por lo tanto $\mathcal{O}_X$ es coherente.

2. Sean $X = \mathrm{Spec}(A)$ un esquema afín, $Y \subseteq X$ el subesquema cerrado definido por un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ e $i : Y \longrightarrow X$ el morfismo inclusión. Entonces $i_*\mathcal{O}_Y$ es un $\mathcal{O}_X$–módulo cuasi-coherente y coherente. En efecto, bajo las condiciones anteriores, y según el Ejemplo 3.0.2, recordemos que el morfismo $\varphi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ induce el morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : Y & \longrightarrow & X, \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & f(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}$$

donde $f(Y) = f(\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})) = \varphi^{-1}(\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$. Así que $f : Y \longrightarrow V(\mathfrak{a})$ es un homeomorfismo y como $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$, de ésta forma consideramos a Y como un subconjunto de X y en consecuencia obtenemos el morfismo inclusión $i : Y \longrightarrow X$ el cual induce el morfismo de haces sobre X, $i^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$. Luego, el morfismo $i^\sharp$ da a $i_*\mathcal{O}_Y$ una estructura de $\mathcal{O}_X$–módulo. Además como $X = \mathrm{Spec}(A)$, sin perdida de generalidad podemos suponer que es cubierto por abiertos básicos $\{D(h)\}_{h\in A}$, entonces considerando el A–módulo $M = A/\mathfrak{a}$ bastará verificar $i_*\mathcal{O}_Y(D(h)) = \widetilde{M}(D(h))$ para mostrar que $i_*\mathcal{O}_Y$ es cuasi-coherente. En efecto, para todo $h \in A$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} i^{-1}(D(h)) & = & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) |\ i(\mathfrak{p}) \in D(h)\} \\ & = & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) |\ f(\mathfrak{p}) \in D(h)\} \\ & = & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) |\ h \notin f(\mathfrak{p})\} \\ & = & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) |\ h \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\ & = & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) |\ \varphi(h) \notin \mathfrak{p}\} = D(\varphi(h)) \end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} i_*\mathcal{O}_Y(D(h)) = \mathcal{O}_Y(i^{-1}(D(h))) & = & \mathcal{O}_Y(D(\varphi(h))) \\ & \cong & (A/\mathfrak{a})(\varphi(h)) = M_{\varphi(h)} \\ & \cong & \widetilde{M}(D(\varphi(h))) \\ & = & \widetilde{(A/\mathfrak{a})}(D(\varphi(h))), \end{array}$$

donde el primer isomorfismo se obtiene de la Proposición 2.0.2 y el segundo de 4.0.1. Por lo tanto $i_*\mathcal{O}_Y \cong \widetilde{(A/\mathfrak{a})}$ y en consecuencia $i_*\mathcal{O}_Y$ es cuasi-coherente. Luego,

como $M = A/\mathfrak{a}$ es finitamente generado como $A-$módulo entonces $i_*\mathcal{O}_Y$ también es coherente.

3. Sea Y un subesquema cerrado de un esquema X entonces el haz $\mathcal{O}_X|_Y$ en general no es cuasi-coherente sobre Y. En efecto, el haz $\mathcal{O}_X|_Y$ en general no es un $\mathcal{O}_Y-$módulo.

Lema 4.0.1. *Sean $X = \mathrm{Spec}(A)$, $f \in A$, $D(f) \subseteq X$ y $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente sobre X.*

1. *Si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es una sección global de $\mathcal{F}$ cuya restricción a $D(f)$ es cero, entonces existe $n > 0$ tal que $f^n s = 0$.*

2. *Dada una sección $t \in \mathcal{F}(D(f))$ de $\mathcal{F}$ sobre un conjunto abierto $D(f)$ existe $n > 0$ tal que $f^n t$ se extiende a una sección global de $\mathcal{F}$ sobre X.*

Antes de iniciar la prueba es necesario recordar algunos resultados y consideraciones particulares que tendremos en cuenta:

1. Si X es un esquema afín entonces $\mathrm{sp}(X)$ es cuasi-compacto. Ver Proposición 3.0.4.

2. Como $\mathcal{F}$ es un haz cuasi-coherente sobre X entonces existe una cubierta por abiertos afines, digamos $X = \bigcap_{i\in I} U_i$ con $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ para los cuales se satisface $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$, con M_i un A_i-módulo y $\widetilde{M_i}$ el haz asociado al módulo M_i.

3. Dado un abierto afín $V = \mathrm{Spec}(B)$, $\mathcal{F}|_V$ es un haz sobre V, entonces sin perdida de generalidad, podemos considerar una cubierta de V por abiertos básicos $D(g_i)$ con $g_i \in A$. Luego $D(g_i) \subseteq V$ y se tiene garantizada la existencia de un $A_{g_i}-$módulo y un $B-$módulo tales que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ y $\mathcal{F}|_V \cong \widetilde{M}$ respectivamente.

4. Además del morfismo inclusión $i : D(g_i) \longrightarrow V$ y del isomorfismo $\mathcal{F}|_V \cong \widetilde{M}$, se tiene que $i^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes_B A_{g_i}}$. En particular, como $D(g_i)$ es un abierto de X y $\mathcal{F}$ es un haz sobre X, tenemos que $\mathcal{F}|_{D(g_i)}$ y $i^*(\widetilde{M})$ son dos haces definidos sobre $D(g_i)$, siendo $i^*(\widetilde{M})$ el haz determinado por el morfismo inclusión $i : D(g_i) \longrightarrow V$, por lo que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} = i^*(\widetilde{M})$. En consecuencia, $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M \otimes_B A_{g_i}}$.

Demostración.

1. Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $s|_{D(f)} = 0$ y sin perdida de generalidad supongamos una cubierta abierta de X dada por los abiertos básicos $\{D(g_i)\}_{g_i \in A}$. Entonces para cada i tenemos una restricción s_i de s sobre $D(g_i)$, es decir, $s_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$ con $s_i = s|_{D(g_i)}$. Con base a las observaciones iniciales como, $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$, siendo M_i un A_{g_i}–módulo, entonces $s_i \in (\mathcal{F}|_{D(g_i)})(D(g_i)) \cong \widetilde{M_i}(D(g_i))$. Además como $\Gamma(D(g_i), \mathcal{F}|_{D(g_i)}) = \mathcal{F}|_{D(g_i)}(D(g_i)) = M_i$ entonces $s_i \in M_i = \mathcal{F}|_{D(g_i)}(D(g_i))$.

   Luego, notemos que $\mathcal{F}|_{D(g_i)}(D(f)) \cong \widetilde{M_i}(D(f)) \cong (M_i)_f$, donde el último isomorfismo se obtiene de la Proposición 4.0.1. Además, como $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$ y $s_i \in \mathcal{F}|_{D(g_i)}(D(g_i))$, donde $s_i = s|_{D(g_i)}$ y $s|_{D(f)} = 0$ entonces $s_i|_{D(f)} = s|_{D(fg_i)} = 0$ con $s_i|_{D(f)} \in \mathcal{F}|_{D(g_i)}(D(f))$. Por lo tanto, la imagen de $s_i|_{D(f)}$ en $(M_i)_f$; digamos $\mathfrak{s}_i$, es cero y en consecuencia existe $n_i > 0$ tal que $f^{n_i}\mathfrak{s}_i = 0$. Ahora, como X es cuasi-compacto entonces es cubierto por finitos abiertos básicos; supongamos $X = \bigcup_{i=1}^{m} D(g_i)$. Luego para cada i existe un $n_i > 0$ el cual satisface que $f^{n_i}\mathfrak{s}_i = 0$, entonces considerando $n = \max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ se tiene que $f^n\mathfrak{s}_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$, y como X es cubierto por los $D(g_i)$ con $1 \leq i \leq m$, se sigue que $f^n s = 0$.

2. Sin perdida de generalidad, supongamos que $X = \bigcup_{i=1}^{m} D(g_i)$ y sea $t \in \mathcal{F}(D(f))$. Restringiendo t para cada i obtenemos un elemento τ_i, es decir

$$\rho_{D(f)D(fg_i)}(t) = \rho(t) = t|_{D(g_i)} = \tau_i,$$

   donde $\tau_i \in \mathcal{F}(D(f) \cap D(g_i)) = \mathcal{F}(D(fg_i)) = (\mathcal{F}|_{D(g_i)})(D(f)) \cong \widetilde{M_i}(D(f)) \cong (M_i)_f$. Esto es, $\tau_i \in (M_i)_f$, y por lo tanto, existen $n_i > 0$ y un elemento $t_i \in M_i = \mathcal{F}(D(g_i))$ tales que $\tau_i = \dfrac{t_i}{f^{n_i}}$. Luego, como n_i depende de $1 \leq i \leq m$ entonces tomando $n \in$ tal que $n = \max\{n_1, ..., n_m\}$ se tiene que n satisface que $\tau_i = \dfrac{t_i}{f^n}$ para todo $1 \leq i \leq m$, y al ser el morfismo restricción ρ un morfismo de A–módulos, la igualdad anterior implica que $t_i = \rho(f^n t)$. Es decir, t_i es la restricción de $f^n t$ sobre $D(fg_i)$. Luego, en $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$ existen dos secciones $t_i, t_j \in \mathcal{F}(D(g_i g_j))$ las cuales por el argumento anterior coinciden con $f^n t$ en $D(fg_i g_j)$. Entonces del item anterior existe un entero $m_{ij} > 0$ tal que $f^{m_{ij}}(t_i - t_j) = 0$ sobre $D(g_i g_j)$. Ahora, dado que m_{ij}

depende de i y j, como es habitual podemos tomar $m = \max\{m_{ij};\ 1 \leq i \neq j \leq m\}$, así que $f^m(t_i - t_j) = 0$, de lo cual las secciones $f^m t_i$ de $\mathcal{F}$ sobre $D(g_i)$ se pueden pegar dando lugar a una sección global s de $\mathcal{F}(X)$, donde $s|_{D(f)} = f^m t_f = f^m(f^n t) = f^{m+n}t$.

□

Proposición 4.0.3. *Sea X un esquema. Entonces un $\mathcal{O}_X-$módulo $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, existe un $A-$módulo M tal que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. Si X es noetheriano entonces $\mathcal{F}$ es coherente si y sólo si para cada subconjunto abierto afín $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X existe un $A-$módulo M finitamente generado tal que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente sobre X y $U = \mathrm{Spec}(A)$ un abierto afín de X. Entonces existe una cubierta de X por abiertos afines, digamos $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}_{i\in I}$, tal que para cada $i \in I$ existe un A_i-módulo M_i el cual verifica $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$. Además

$$U = \bigcup_{i\in I}(U \cap U_i)$$

Luego, dado el morfismo inclusión $i : U \cap U_i \longrightarrow U_i$ inducido por el morfismo de anillos $A_i \longrightarrow A \cap A_i$, tenemos el haz $i^*(\widetilde{M_i}) \cong M_i \otimes \widetilde{_{A_i}(A \cap A_i)}$ sobre $U \cap U_i$ y teniendo en cuenta las observaciones del lema anterior también tenemos que $\mathcal{F}|_{U\cap U_i} = i^*(\widetilde{M_i})$. Entonces,

$$\mathcal{F}|_{U\cap U_i} \cong M_i \otimes \widetilde{_{A_i}(A \cap A_i)} \text{ para todo } i \in I,$$

así que $\mathcal{F}|_U$ es cuasi-coherente. En consecuencia, podemos suponer que X es afín.
Supongamos $X = \mathrm{Spec}(A)$ y $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Entonces existe[4] una aplicación $\alpha : \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{F}$. Además, de nuevo teniendo presente el proceder en la prueba del lema anterior, X se puede cubrir por abiertos básicos, ésto es $X = \bigcup_{i=1}^{m} D(g_i)$ tal que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ para algún $A_{g_i}-$módulo M_i, así que

$$M_{g_i} = \mathcal{F}(D(g_i)) = \Gamma(D(g_i), \mathcal{F}|_{D(g_i)}) \cong \Gamma(D(g_i), \widetilde{M_i}) = M_i,$$

es decir $M_{g_i} \cong M_i$. Entonces la aplicación $\alpha|_{D(g_i)} : \widetilde{M}|_{D(g_i)} \longrightarrow \mathcal{F}|_{D(g_i)}$ es equivalente al isomorfismo $\widetilde{M}|_{D(g_i)} \longrightarrow \widetilde{M_i}$ y como los abiertos $D(g_i)$ forman una base para X se sigue

[4]La existencia de la aplicación α es garantizada por $\mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F})$.

que $\alpha : \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{F}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. El recíproco es consecuencia inmediata de la definición de un haz cuasi-coherente.
Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es coherente y X es noetheriano. Como cada M_i es un $A_{g_i}-$módulo finitamente generado y los anillos A y A_{g_i} son noetherianos, de la Proposición 6.5 de [**?**], se sigue que los módulos M_{g_i} son noetherianos. Luego, como X es noetheriano, entonces al reducir el problema al caso afín, $X = \mathrm{Spec}(A)$, se tiene que A es noetheriano y como $\mathcal{F}$ es coherente también se tiene que M es un $A-$módulo finitamente generado y una vez más por la Proposición 6.5 de [**?**] podemos concluir que M es noetheriano. □

Observación 4.0.2. Notemos que la proposición anterior tiene inmerso que, si $\mathcal{F}$ es un haz cuasi-coherente, entonces para cualquier subconjunto abierto afín $U = \mathrm{Spec}(A)$, el haz $\mathcal{F}|_U$ también es cuasi-coherente.

Corolario 4.0.1. *Sean A un anillo y $X = \mathrm{Spec}(A)$. El funtor $M \longrightarrow \widetilde{M}$ da una equivalencia de categorias entre la categoría de $A-$módulos y la categoría de $\mathcal{O}_X-$módulos cuasi-coherente. Su inverso es el funtor $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$. Si A es un anillo noetheriano el mismo funtor también da una equivalencia de categorias entre la categoría de los $A-$módulos finitamente generados y la categoría de los $\mathcal{O}_X-$módulos coherentes.*

Demostración. De la Proposición 4.0.2, sabemos que existe una correspondencia entre la categoría de los $A-$modulos y la categoría de los $\mathcal{O}_X-$módulos. Más aún, la proposición anterior, garantiza que $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente sobre $X = \mathrm{Spec}(A)$ si y sólo si es de la forma $\widetilde{M}$ donde $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, obteniendo así la equivalencia deseada. Ahora, si A es noetheriano entonces $X = \mathrm{Spec}(A)$ es noetheriano y nuevamente la proposición anterior garantiza la equivalencia entre la categoría de los $A-$módulos finitamente generados y los $\mathcal{O}_X-$módulos coherentes. □

Proposición 4.0.4. *Sean X un esquema afín, $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X-$módulos y $\mathcal{F}'$ un haz cuasi-coherente. Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0,$$

la cual denotaremos por $S_{\Gamma(X,.)}$, es exacta.

Demostración.

Sean $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{F}'$ un haz cuasi-coherente y $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$−módulos denotada por $S_{\mathcal{O}_X}$. En virtud de la Proposición 1.0.12, la sucesión $0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\varphi(X)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi(X)} \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ es exacta, así que bastará mostrar que $\psi(X)$ es sobreyectivo para concluir la prueba.

Sea $s \in \Gamma(X, \mathfrak{F}'')$, como ψ es sobreyectivo, de la Proposición 1.0.11 para cualquier $x \in X$ existen una vecindad abierta de x, digamos $D(f)$, y $t \in \mathcal{F}(D(f))$ tal que $\psi(D(f))(t) = s|_{D(f)}$. Entonces podemos afirmar que para algún $k > 0$, $f^k s$ se extiende a una sección global de $\mathcal{F}(X)$. En efecto, dado que sin perdida de generalidad X es cubierto por un número finito de conjuntos abiertos de la forma $D(g_i)$, entonces por la Proposición 1.0.11, para cada i, $s|_{D(g_i)}$ se levanta de una sección $t_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$, es decir $\psi(D(g_i))(t_i) = s|_{D(g_i)}$. Luego sobre $D(fg_i)$ existen dos secciones $t, t_i \in \mathcal{F}(D(fg_i))$ que verifican

$$\psi(D(fg_i))(t) = s|_{D(fg_i)} = \psi(D(fg_i))(t_i).$$

Así que, $t - t_i \in \ker\psi(D(fg_i)) = \mathrm{im}\varphi(D(fg_i))$, donde la igualdad es garantizada por la exactitud de $0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\varphi(X)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi(X)} \Gamma(X, \mathcal{F}'')$. Luego la inyectividad de φ garantiza que $t - t_i \in \mathcal{F}'(D(fg_i))$. Adicionalmente, como $\mathcal{F}'$ es cuasi-coherente entonces $\mathcal{F}'|_{D(g_i)}$ también lo es y por el Lema 4.0.1 para algún $n_i > 0$ se tiene que $f^{n_i}(t - t_i)$ se extiende a una sección global $u_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$. Así que, considerando $n = \max\{n_i\}_{i \in I}$, tenemos que $f^n(t - t_i)$ puede extenderse a $u_i \in \mathcal{F}'(D(g_i))$ para todo i.

Abusando de la notación cosideremos la imagen de u_i mediante $\varphi(D(g_i))$ como u_i y sea $t'_i = f^n t_i + u_i$, entonces t'_i se eleva a $f^n s$ sobre $D(g_i)$, ésto es $\psi(D(g_i))(t'_i) = f^n s|_{D(g_i)}$ y notemos que t'_i y $f^n t$ coinciden sobre $D(fg_i)$ puesto que

$$t'_i|_{D(fg_i)} = (f^n t_i + u_i)|_{D(fg_i)} = f^n t_i + f^n t - f^n t_i|_{D(fg_i)} = f^n t|_{D(fg_i)}.$$

Ahora, sobre $D(g_i g_j)$, las secciones $t'_i = f^n t_i + u_i$ y $t'_j = f^n t_j + u_j$ satisfacen que

$$\psi(D(g_i g_j))(t'_i) = \psi(D(g_i g_j))(t'_j) = f^n s|_{D(g_i g_j)}.$$

En consecuencia $t'_i - t'_j \in \ker\psi(D(g_i g_j)) = \mathrm{im}\varphi(D(g_i g_j))$ y de la inyectividad de φ, $t'_i - t'_j \in \mathcal{F}'(D(g_i g_j))$. Además, como

$$t'_i|_{D(fg_i g_j)} = t'_j|D(fg_i g_j) = f^n t|_{D(fg_i g_j)}$$

entonces $t'_i - t'_j$ se anula sobre $D(fg_ig_j)$ y nuevamente por el Lema 4.0.1 para algún $m_{ij} > 0$ se verifica que $f^{m_{ij}}(t'_i - t'_j) = 0$, pero dado que m_{ij} depende de i y de j entonces haciendo $m = \max\{m_{ij};\ i, j \in I\}$ se sigue que para $m > 0$, $f^m(t'_i - t'_j) = 0$. Esto es,

$$f^m t'_i|_{D(g_ig_j)} = f^m t'_j|_{D(g_ig_j)}.$$

Luego, considerando las secciones $f^m t'_i|_{D(g_i)}$, las podemos pegar para obtener una sección global $t'' \in \mathcal{F}(X)$, la cual satisface que

$$\psi(X)(t'') = \psi(X)\left(\bigsqcup_{i\in I} f^m t'_i|_{D(g_i)}\right) = f^m\psi(X)\left(\bigsqcup_{i\in I} t'_i|_{D(g_i)}\right) = f^m\left(\bigsqcup_{i\in I} f^n s|_{D(g_i)}\right) = f^m(f^n s).$$

Por lo tanto para $k = m + n > 0$ existe $t'' \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\psi(X)(t'') = f^k s$.
Ahora, como X es cubierto por un número finito de conjuntos abiertos $D(f_i)$, supongamos $1 \leq i \leq r$, y para cada i la sección $s|_{D(f_i)}$ es la elevación de una sección $t_i \in \mathcal{F}(D(f_i))$, ésto es, $\psi(D(f_i))(t_i) = s|_{D(f_i)}$. Entonces podemos encontrar un entero $n_i > 0$ y una sección global $\widetilde{t_i}$ tal que $\psi(X)(\widetilde{t_i}) = f_i^{n_i} s$. Así pues, como es habitual, podemos fijar $n > 0$ de suerte que exista $\widetilde{t_i} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ que satisfaga $\psi(X)(\widetilde{t_i}) = f_i^n s$ para $1 \leq i \leq r$. Luego, como $X = \operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i)$ entonces $A = \langle f_i^n, ..., f_r^n \rangle$, así que $1 = \sum_{i=1}^r a_i f_i^n$, donde $a_i \in A$, en consecuencia $t = \sum_{i=1}^r a_i \widetilde{t_i} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ y

$$\psi(X)(t) = \psi(X)\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\widetilde{t_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i\psi(X)(\widetilde{t_i}) = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i^n s = \left(\sum_{i=1}^{r} a_i f_i^n\right) s = s.$$

Esto es, existe $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tal que $\psi(X)(t) = s$, por lo tanto $\psi(X)$ es sobreyectivo y en consecuencia la sucesión $S_{\Gamma(X,.)}$ es exacta. □

Proposición 4.0.5. *Sea X un esquema. Los haces Kernel, Cokernel e Imagen de cualquier morfismo de haces cuasi-coherentes son cuasi-coherentes. Si X es noetheriano la anterior afirmación se verifica para haces coherentes.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, podemos suponer $X = \operatorname{Spec}(A)$ un esquema afín. Sea $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ un morfismo de haces cuasi-coherentes sobre X, con $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ y

$\mathcal{F}' \cong \widetilde{M'}$ tales que $\Gamma(X, \mathcal{F}) = M$ y $\Gamma(X, \mathcal{F}') = M'$, siendo M y M' $A-$módulos. Como Γ es un funtor exacto a izquierda, dada la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M',$$

se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \ker\varphi) \xrightarrow{\tau} M \xrightarrow{\varphi} M',$$

también es exacta. Entonces, $\ker\varphi = \mathrm{im}\tau$. Luego, como τ es inyectiva $\mathrm{im}\tau \cong \Gamma(X, \ker\varphi)$, así que $\Gamma(X, \ker\varphi) \cong \ker\varphi$ y al ser M y M' $A-$módulos se sigue que $\ker\varphi \cong \Gamma(X, \ker\varphi) = K$ también lo es. Además, en virtud de la Proposición 4.0.2 el funtor $\sim\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ es totalmente fiel, así que $\Gamma(X, \ker\varphi) = K$ implica $\ker\varphi \cong K$. Por lo tanto, del Corolario 4.0.1, se sigue que $\ker\varphi$ es un haz cuasi-coherente.

Por otra parte recordemos que $\mathrm{coker}\varphi = \mathcal{F}'/\mathrm{im}\varphi$, y consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}' \longrightarrow \mathrm{coker}\varphi \longrightarrow 0$. Teniendo presente el caso anterior, como $\ker\varphi \cong K$ entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{M} \xrightarrow{\varphi} \widetilde{M'} \longrightarrow \mathrm{coker}\varphi \longrightarrow 0$$

es exacta. Además, como $\sim\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ es un funtor exacto, entonces

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} M' \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, \mathrm{coker}\varphi) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y en consecuencia $\mathrm{coker}\varphi = M'/\mathrm{im}\varphi = M'/\ker\alpha \cong \Gamma(X, \mathrm{coker}\varphi)$. Notemos que la afirmación anterior se garantiza por el Primer Teorema de Isomorfismos, puesto que α es sobreyectivo. Luego, como K, M, M' son $A-$módulos entonces $\mathrm{coker}\varphi = CK$ también lo es. Más aún $\widetilde{CK} \cong \mathrm{coker}\varphi$, puesto que $\sim\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ es un funtor totalmente fiel. Es decir, $\mathrm{coker}\varphi$ es cuasi-coherente.

Ahora, para verificar que $\mathrm{im}\varphi$ es cuasi-coherente, consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\varphi \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}' \xrightarrow{\beta} \mathrm{coker}\varphi \longrightarrow 0,$$

la cual, teniendo en cuenta la prueba anterior, es equivalente a la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\varphi \longrightarrow M' \longrightarrow CK \longrightarrow 0.$$

Luego, como consecuencia de la exactitud del funtor $\sim\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{im}\varphi) \xrightarrow{\alpha} M' \xrightarrow{\beta} CK \longrightarrow 0$$

es exacta, así que $\ker\beta = \mathrm{im}\alpha = \Gamma(X, \mathrm{im}\varphi)$. Además, como $CK = \mathrm{coker}\varphi = M'/\mathrm{im}\varphi$ entonces $\ker\beta = \mathrm{im}\varphi$, siendo $\mathrm{im}\varphi$ un $A-$módulo el cual denotaremos por I. Luego $\Gamma(X, \mathrm{im}\varphi) = \ker\beta = \mathrm{im}\varphi = I$ y como $\sim\colon M \longrightarrow \widetilde{M}$ es un funtor totalmente fiel tenemos que $\mathrm{im}\varphi \cong I$. Esto es, $\mathrm{im}\varphi$ es cuasi-coherente.

Finalmente, para verificar que la extensión[5] de un haz cuasi-coherente es cuasi-coherente, consideremos la siguiente sucesión exacta de $\mathcal{O}_X-$modulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ son cuasi-coherentes. Notemos que, en virtud de la Proposición 4.0.4, la correspondiente sucesión de secciones globales de la sucesión considerada, ésto es

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0,$$

también es exacta y dado que $\mathcal{F}' \cong \widetilde{M'}$ y $\mathcal{F}'' \cong \widetilde{M''}$, entonces la anterior sucesión es equivalente a

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Luego, aplicando el funtor $\sim$ y tomando $\Gamma(X, \mathcal{F}) = M$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widetilde{M'} & \longrightarrow & \widetilde{M} & \longrightarrow & \widetilde{M''} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ahora, como α y β son isomorfismos entonces en virtud del Lema corto de los cinco[6] τ también es un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente.

[5]Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ haces de $\mathcal{O}_X-$módulos. Una extensión de $\mathcal{F}''$ por $\mathcal{F}'$ es una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$.

[6]Ver Capítulo IV de [**?**], Módulos, Lema 1.17, pag 176.

En el caso particular que X sea noetheriano y $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}''$ haces coherentes, se tiene que M' y M'' son finitamente generados y en consecuencia M también lo es. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente. □

Proposición 4.0.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas.*

1. *Si $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_Y-$módulo cuasi-coherente entonces $f^*\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_X-$módulo cuasi-coherente.*

2. *Si X y Y son noetherianos y $\mathcal{G}$ es coherente entonces $f^*\mathcal{G}$ es coherente.*

3. *Supongamos cualquiera de las siguientes dos condiciones, X es noetheriano o f es cuasi-compacto y separado. Entonces, si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X-$módulo cuasi-coherente se tiene que $f_*\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_Y-$módulo cuasi-coherente.*

Demostración.

1. Sin perdida de generalidad, consideremos $X = \mathrm{Spec}(B)$ y $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Entonces, si $\mathcal{G}$ es un haz cuasi-coherente de $\mathcal{O}_Y-$módulos se tiene que $\mathcal{G} \cong \widetilde{M}$, siendo M un $A-$módulo. Luego, por la Proposición 4.0.2 se sigue que $f^*(\mathcal{G}) = f^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M \otimes_A B}$. Así que, en virtud del Corolario 4.0.1, podemos concluir que $f^*\mathcal{G}$ es cuasi-coherente.

2. Si X es noetheriano, la información adicional en éste caso es que M es un $A-$módulo finitamente generado, así que $(M \otimes_A B)$ es un $B-$módulo finitamente generado. Esto es, $f^*\mathcal{G}$ es coherente.

3. Sin perdida de generalidad, consideremos $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Notemos que bajo cualquiera de las dos condiciones del enunciado, X es cuasi-compacto. En efecto, si X es noetheriano entonces por definición X es cuasi-compacto. De otro lado, si el morfismo f es cuasi-compacto, por la Proposición 3.0.11 se verifica que $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\mathrm{Spec}(B)) = X$ es cuasi-compacto. Entonces podemos cubrir a X por un número finito de subconjuntos abiertos afines, digamos

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Spec}(A_i).$$

Ahora, si X es separado se tiene que $U_i \cap U_j$ también es un abierto afín, entonces supongamos $U_i \cap U_j = \text{Spec}(A_{ij})$. De otro lado, si X es noetheriano, $U_i \cap U_j$ es cuasi-compacto y en consecuencia podemos cubrir a $U_i \cap U_j$ con un número finito de subconjuntos abiertos afines; llamemos a los elementos de tal cubierta U_{ijk}.

Luego, para cualquier subconjunto abierto $V \subseteq Y$, dar una sección $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ es equivalente a dar una colección de secciones $s_i \in \mathcal{F}(f_i^{-1}(V) \cap U_i)$, donde f_i es la restricción de f a el abierto U_i y las restricciones de s_i a los subconjuntos abiertos $f_{ijk}^{-1}(V) \cap U_{ijk}$ son iguales. Entonces, existe una sucesión exacta de haces sobre Y dada por

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \oplus_i f_{i*}(\mathcal{F}|_{U_i}) \xrightarrow{\beta} \oplus_{i,j,k} f_{ijk*}(\mathcal{F}|_{U_{ijk}}),$$

donde

$$\begin{aligned} f_i = f|_{U_i} : U_i &\longrightarrow Y, \\ x &\longmapsto f_i(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ijk} = f|_{U_{ijk}} : U_{ijk} &\longrightarrow Y. \\ x &\longmapsto f_{ijk}(x) = f(x) \end{aligned}$$

Veamos que en efecto la sucesión anterior es exacta, para ello supongamos que $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ es tal que $\alpha(V)(s) = 0$. Luego, como $\alpha(V)(s) = \{s_i\}$ entonces $s_i = 0$ para todo i, de lo cual se sigue que $s = 0$. Por lo tanto $Ker\alpha(V) = 0$ para todo abierto $V \subseteq Y$. Esto es, α es inyectivo. Resta verificar que $Ker\beta(V) = Im\alpha(V)$ para todo abierto $V \subseteq Y$. Primero que todo, veamos como está definido el morfismo $\beta(V)$.

$$\begin{aligned} \oplus_i \mathcal{F}|_{U_i}(f_i^{-1}(V)) &\longrightarrow \oplus_{ijk} \mathcal{F}|_{U_{ijk}}(f_{ijk}^{-1}(V)) \\ (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m) &\longmapsto \left(\tau_1 - \tau_2|_{U_{121} \cap f_{121}^{-1}(V)}, ..., \tau_{m-1} - \tau_m|_{U_{(m-1)mm} \cap f_{(m-1)mm}^{-1}(V)}\right) \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\alpha(V)} & \oplus_i \mathcal{F}|_{U_i}(f_i^{-1}(V)) & \xrightarrow{\beta(V)} & \oplus_{ijk} \mathcal{F}|_{U_{ijk}}(f_{ijk}^{-1}(V)) \\ & & s & \longmapsto & (s_1, s_2, ..., s_m) & \longmapsto & \left(s_1 - s_2|_{U_{121} \cap f_{121}^{-1}(V)}, ...\right) \end{array}$$

Ahora, como las secciones $s_i \in \mathcal{F}(f_i^{-1}(V) \cap U_i)$ son tales que las restricciones a los subconjuntos abiertos $f_{ijk}^{-1}(V) \cap U_{ijk}$ son iguales, entonces $s_i - s_j|_{U_{ijk} \cap f_{ijk}^{-1}(V)} = 0$

para todo i, j, k. En consecuencia, $Im\alpha(V) = Ker\beta(V)$, puesto que justamente los elementos de $Im\alpha(V)$ son los que satisfacen que sus componentes coinciden en las restricciones a los abiertos $f_{ijk}^{-1}(V) \cap U_{ijk}$.

Luego, como $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente entonces $\mathcal{F}|_{U_i}$ y $\mathcal{F}|_{U_{ijk}}$ son cuasi-coherentes y de la Proposición 4.0.2 se garantiza que para todo i, j, k, $f_{i*}(\mathcal{F}|_{U_i})$ y $f_{ijk*}(\mathcal{F}|_{U_{ijk}})$ también lo son. Así que, al ser β un morfismo de haces cuasi-coherentes, de la Proposición 4.0.5, se sigue que $Ker\beta(V) = Im\alpha(V)$ es cuasi-coherente. Además, como α es inyectivo, $f_*\mathcal{F}(V) \cong Im\alpha(V)$. Por lo tanto, $f_*\mathcal{F}$ es cuasi-coherente. □

Definición 4.0.8. *Sean Y un subesquema cerrado de un esquema X e $i : Y \longrightarrow X$ el morfismo inclusión. Definimos el haz ideal de Y, denotado por $\mathcal{J}_Y$, como el Kernel del morfismo $i^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$.*

Proposición 4.0.7. *Sea X un esquema. Para cualquier subesquema cerrado Y de X el correspondiente haz ideal $\mathcal{J}_Y$ es un haz cuasi-coherente de ideales sobre X. Si X es noetheriano entonces $\mathcal{J}_Y$ es coherente. Inversamente, cualquier haz cuasi-coherente de ideales sobre X es el haz ideal de un subesquema cerrado de X determinado de forma única.*

Demostración. Si Y es un subesquema cerrado de X entonces el morfismo inclusión $i : Y \longrightarrow X$ es cuasi-compacto y es una inmersión cerrada. Entonces por el Corolario 4.6 de [**?**], i es separado. Luego, como $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_Y$ son cuasi-coherentes (respectivamente coherentes) entonces de la Proposición 4.0.6 se tiene que $i_*\mathcal{O}_Y$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo coherente sobre X y dado que por definición $\mathcal{J}_Y$ es el kernel del morfismo $i^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$; siendo $i^\sharp$ un morfismo de haces cuasi-coherentes entonces la Proposición 4.0.5 garantiza que el Kernel de $i^\sharp$, denotado por $\mathcal{J}_Y$, es cuasi-coherente.
De otro lado, si X es noetheriano para cualquier subconjunto abierto afín $U = \text{Spec}(A) \subseteq X$ se tiene que A es noetheriano. Además como $\mathcal{O}_X$ es coherente, donde $\mathcal{O}_{X|_U} \cong \widetilde{A}$, y $\Gamma(U, \mathcal{J}_{Y|_U})$ es un ideal de $\mathcal{O}_{X|_U}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X|_U}) = A$ entonces $\Gamma(U, \mathcal{J}_{Y|_U}) = I_U$ es un ideal finitamente generado de A, y como lo anterior se verifica para todo abierto afín de X, $\mathcal{J}_Y$ es coherente.

Inversamente, dado un esquema X y un haz cuasi-coherente de ideales $\mathcal{J}$, sea Y el soporte del haz cociente $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Es decir,

$$Y = Supp(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \{p \in X;\ (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_p \neq 0\} = \{p \in X;\ \mathcal{O}_{X,p}/\mathcal{J}_p \neq 0\}.$$

Así que $Y \subseteq X$ es un subespacio de X. Luego, podemos afirmar que $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ es el único subesquema cerrado de X con haz ideal $\mathcal{J}$. □

Corolario 4.0.2. *Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ es un esquema afín, existe una correspondencia uno a uno entre los ideales $\mathfrak{a}$ de A y los subesquemas cerrados Y de X, dada por*

$$\mathfrak{a} \longmapsto Im(\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})) \subseteq X.$$

En particular, cada subesquema cerrado de un esquema afín es afín.

Demostración. Este resultado es consecuencia de la proposición anterior, el ejemplo 3.0.2 y del Corolario 4.0.1; el cual establece que los haces cuasi-coherentes de ideales sobre X estan en correspondencia uno a uno con los ideales de A. □

Recordemos que si A es un anillo y M es un $A-$módulo entonces podemos realizar la construcción de un haz asociado a M que denotamos por $\widetilde{M}$, el cual brinda otra estructura de esquema sobre $X = \mathrm{Spec}(A)$. A continuación pretendemos hacer, de forma somera, una construcción análoga de un haz asociado a un módulo, pero en éste caso que brinde una estructura de esquema sobre $X = \mathrm{Proy}(A)$.

Definición 4.0.9. *Sean S un anillo graduado y M un $S-$módulo graduado. Esto es,*

$$S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n \quad y \quad M = \bigoplus_{n\in} M_n.$$

Además, para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}(S)$ sea $M_{(\mathfrak{p})}$ el grupo de elementos de grado cero en $M_{\mathfrak{p}}$. Definimos el haz asociado a M sobre $X = \mathrm{Proy}(S)$, denotado por $\widetilde{M}$, mediante los conjuntos $\widetilde{M}(U)$ para cualquier subconjunto abierto $U \subseteq \mathrm{Proy}(S)$, donde $\widetilde{M}(U)$ se define como el conjunto de las funciones

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} M_{(\mathfrak{p})},$$

tales que para cada $\mathfrak{p} \in U$ *verifican que* $s(\mathfrak{p}) \in M_{(\mathfrak{p})}$ *y existen una vecindad* $V \subseteq U$ *de* $\mathfrak{p}$ *y elementos homogéneos* $m \in M$ *y* $f \in S$ *del mismo grado los cuales para cada* $\mathfrak{q} \in V$ *satisfacen* $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f} \in M_{(\mathfrak{q})}$ *con* $f \notin \mathfrak{q}$. *Notemos que* $\widetilde{M}$ *es un haz sobre* X *con las restricciones naturales.*

A continuación exhibimos un resultado que es la versión para haces de módulos sobre $X = \mathrm{Proy}(S)$ de las Proposiciones 2.0.7 y 4.0.1.

Proposición 4.0.8. *Sean* S *un anillo graduado,* M *un* $S-$*módulo graduado y* $X = \mathrm{Proy}(S)$.

1. *Para cada* $\mathfrak{p} \in X$, *el tallo* $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$.
2. *Para cualquier elemento homogéneo* $f \in S_+$ *tenemos que* $\widetilde{M}|_{D_{+(f)}} \cong \widetilde{(M_{(f)})}$, *vía el isomorfismo de* $D_{+(f)}$ *con* $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$, *donde* $M_{(f)}$ *denota el grupo de elementos de grado cero en el módulo localizado* M_f.
3. $\widetilde{M}$ *es un* $\mathcal{O}_X-$*módulo cuasi-coherente. Si* S *es noetheriano y* M *es finitamente generado entonces* $\widetilde{M}$ *es coherente.*

Demostración. La prueba de éste resultado es análoga a la realizada en la Proposición 2.0.7, por lo tanto es omitida. □

Definición 4.0.10. *Sean* S *un anillo graduado y* M *un* $S-$*módulo graduado. Es decir, supongamos que* $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ *y* $M = \bigoplus_{d\in} M_d$.

1. *Sean* M *un* $S-$*módulo graduado y* $n \in$. *Denotaremos por* $M(n)$ *al* $S-$*módulo graduado cuya componente de grado* r *es la componente de grado* $n + r$ *de* M. *Es decir, para cada* $n \in$, *el* $S-$*módulo* $M(n)$ *está determinado por* $M(n)_r = M_{n+r}$. *Así que*
$$M(n) = \bigoplus_{d\geq 0} M(n)_d = \bigoplus_{d\geq 0} M_{n+d}.$$
2. *Sea* $X = \mathrm{Proy}(S)$. *Para cualquier* $n \in$ *definimos el haz* $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$, *donde* $S(n)$ *está determinado por* $S(n)_d = S_{n+d}$. *Es decir,*
$$S(n) = \bigoplus_{d\geq n} S_d = \bigoplus_{d\geq 0} S_{n+d}.$$

3. *$\mathcal{O}_X(1)$ es llamado el haz torcido de Serre.*

4. *Para cualquier haz de $\mathcal{O}_X-$módulo $\mathcal{F}$, se define el haz torcido de $\mathcal{F}$ como*

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n).$$

Proposición 4.0.9. *Sean $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ un anillo graduado y $X = \mathrm{Proy}(S)$. Supongamos que S es generado por S_1 como una S_0-álgebra. Entonces,*

1. *$\mathcal{O}_X(n)$ es un haz invertible sobre X.*

2. *Para cualquier $S-$módulo graduado M se tiene que $\widetilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$. En particular, $\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.*

3. *Si T es otro anillo graduado, generado por T_1 como una T_0-álgebra, $\varphi : S \longrightarrow T$ un morfismo que preserva el grado, $U \subseteq Y = \mathrm{Proy}(T)$ y $f : U \longrightarrow \mathrm{Proy}(S)$ el morfismo determinado por φ. Entonces, $f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong \mathcal{O}_Y(n)|_U$ y $f_*(\mathcal{O}_Y(n)|_U) \cong (f_*\mathcal{O}_U)(n)$.*

Demostración.

1. Primero que todo recordemos que ser invertible implica que $\mathcal{O}_X(n)$ es localmente libre y de rango 1. Es decir, X puede ser cubierto por abiertos U_i y la restricción $\mathcal{O}_X(n)|_{U_i}$ es un $\mathcal{O}_X|_{U_i}-$módulo libre de rango 1. Sea $f \in S_1$ y consideremos la restricción $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)}$. Dado que $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$ entonces de la Proposición 4.0.8 se tiene que

$$\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} = \widetilde{S(n)}|_{D_+(f)} \cong (\widetilde{S(n)_{(f)}}),$$

sobre $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$. Luego $S(n)_{(f)}$ es un $S_{(f)}-$módulo libre de rango 1. En efecto, como $S_{(f)}$ es el grupo de elementos de grado cero de S_f y $S(n)_{(f)}$ es el de grado n, tenemos el siguiente isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \longrightarrow & S(n)_{(f)} = f^n S_{(f)} \\ s & \longmapsto & f^n s \end{array}$$

Entonces, para todo $n \in$ se verifica que

$$\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)} \cong (\widetilde{S(n)_{(f)}}) \cong \widetilde{f^n S_{(f)}} \cong \widetilde{S_{(f)}} \cong \widetilde{S}|_{D_+(f)} = \mathcal{O}_X|_{D_+(f)}.$$

Luego, como S es generado por S_1 como una S_0-álgebra y X es cubierto por los abiertos $D_+(f)$ con $f \in S_1$ entonces $\mathcal{O}(n)$ es invertible.

2. Al ser S generado por S_1 como una S_0-álgebra tenemos que $S = S_0[\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ..]$ y como $\widetilde{M}(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$, entonces el isomorfismo está dado por

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) & \longrightarrow & \widetilde{M(n)} \\ \frac{m_r}{\varepsilon_i^r} \otimes \frac{p_{s+n}}{\varepsilon_i^s} & \longmapsto & \frac{p_{s+n} m_r}{\varepsilon_i^{r+s}} \\ \frac{m_{r+n}}{\varepsilon_i^{r+n}} \otimes \varepsilon_i^n & \longleftarrow\!\shortmid & \frac{m_{r+n}}{\varepsilon_i^r} \end{array}$$

En particular,

$$\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) = \widetilde{S(n)} \otimes \mathcal{O}(m) = \widetilde{S(n)}(m) \cong (\widetilde{S(n))}(m) = \widetilde{S(n+m)} = \mathcal{O}(m+n).$$

3. Sea $T = T_0[\tau_1, \tau_2, ...]$ con $\tau_i \in T_1$. Entonces,

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{O}_X(n)) \cong f^*(\widetilde{S(n)}) &\cong (S(n)\widetilde{\otimes_S \Gamma}(U)) \cong (S(n)\widetilde{\otimes_S \mathcal{O}}_Y(U) \\ &\cong \widetilde{S(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{\mathcal{O}_Y(U)} \cong \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{\mathcal{O}_Y(U)} \\ &\cong \widetilde{\mathcal{O}_Y(U)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_Y|_U \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \\ &\cong (\mathcal{O}_Y(n))|_U. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f_*(\mathcal{O}_Y(n)|_U) &\cong f_*(\mathcal{O}_Y|_U \otimes \mathcal{O}_X(n)) \\ &\cong f_*(\widetilde{\mathcal{O}_Y(U)} \otimes \widetilde{S(n)}) \\ &\cong f_*(\mathcal{O}_Y(\widetilde{U) \otimes} S(n)) \\ &\cong {}_S(\mathcal{O}_Y(\widetilde{U) \otimes} S(n)) \\ &\cong {}_S(\widetilde{\mathcal{O}_Y(U)}) \otimes \widetilde{S(n)} \\ &\cong {}_S(\mathcal{O}_Y|_U) \otimes \mathcal{O}_X(n) \\ &\cong (f_*\mathcal{O}_U) \otimes \mathcal{O}_X(n) \\ &\cong (f_*\mathcal{O}_U)(n). \end{aligned}$$

□

Notemos que la operación de torcer, *"twisting"*, permite definir un $S-$módulo graduado asociado a cualquier haz de módulos sobre $X = proy(S)$.

Definición 4.0.11. *Sean S un anillo graduado, $X = \mathrm{Proy}(S)$ y $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X-$módulo. Definimos el $S-$módulo graduado asociado a $\mathcal{F}$ como el grupo*

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in} \Gamma(X, \mathcal{F}(n)).$$

Damos una estructura de $S-$módulo al anterior grupo de la siguiente forma. Si $s \in S_d$ entonces s determina de forma natural un sección global $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$. Entonces, para cualquier $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ definimos el producto $s \cdot t$ en $\Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$ como el producto tensorial $s \otimes t$, usando el morfismo natural $\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}_X(d) \cong \mathcal{F}(n+d)$.

Proposición 4.0.10. *Sean A un anillo, $S = A[x_0, x_1, ..., x_r]$ con $r \geq 1$ y $X = \mathrm{Proy}(S)$. Entonces, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong S$.*

Demostración. Como $S = A[x_0, x_1, ..., x_r]$ y $X = \mathrm{Proy}(S)$ entonces, sin perdida de generalidad, podemos cubrir a X con los conjuntos abiertos $D_+(x_i)$. Ahora, como dar una sección $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ es equivalente a dar para cada i secciones $ti \in \mathcal{O}_X(n)(D_+(x_i))$, las cuales coinciden sobre las intersecciones $D_+(x_i x_j)$, donde los t_i son elementos homogéneos de grado n en la localización S_{x_i} y su restricción a $D_+(x_i x_j)$ es justamente la imagen del elemento en $S_{x_i x_j}$. Sumando sobre todo n vemos que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ puede ser identificado con el conjunto de $(r+1)-$uplas $(t_0, t_1, ..., t_r)$, donde para cada i, $t_i \in S_{x_i}$ y para cada i, j las imagenes de t_i y t_j en $S_{x_i x_j}$ son las mismas.
Luego, como los x_i no son divisores de cero en S entonces los morfismos de localización $S \longrightarrow S_{x_i}$ y $S_{x_i} \longrightarrow S_{x_i x_j}$ son inyectivos y los anillos de tales morfismos son todos subanillos de $S' = S_{x_0 x_1 ... x_r}$. Entonces, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ es la intersección $\bigcap S_{x_i}$ tomada sobre S'. Así que cualquier elemento homogéneo de S' puede escribirse de forma única como un producto $x_0^{i_0} x_1^{i_1} ... x_r^{i_r} f(x_0, x_1, ..., x_r)$, donde $i_j \in$ y f es un polinomio homogéneo no divisible por ningún x_i. Dicho elemento estará en S_{x_i} si y sólo si $i_j \geq 0$ para $i \neq j$. En consecuencia la intersección de todos los S_{x_i} es exactamente S. □

A continuación exhibimos un resultado que es una versión más general del Lema 4.0.1, siendo el hecho de considerar un espacio arbitrario lo que provee un mayor grado de generalidad. Claro está que ésto tiene un costo adicional y es la presencia de un haz invertible.

Lema 4.0.2. *Sean X un esquema, $\mathcal{L}$ un haz invertible sobre X, $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, X_f el conjunto abierto de puntos $x \in X$ tales que $f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ y $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente sobre X.*

1. *Supongamos que X es cuasi-compacto y sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ una sección global de $\mathcal{F}$ cuya restricción a X_f es cero. Entonces, para algún $n > 0$ tenemos que $f^n s = 0$, donde $f^n s$ es considerado como una sección global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$.*

2. *Supongamos que X tiene una cubierta finita por subconjuntos abiertos afines U_i tal que $\mathcal{L}|_{U_i}$ es libre para cada i y $U_i \cap U_j$ es cuasi-compacto para cada i, j. Entonces, dada una sección $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$, para algún $n > 0$ la sección $f^n t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)$ se extiende a una sección global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$.*

Demostración.

1. Dado que X es cuasi-compacto lo podemos cubrir con un número finito de abiertos afines. Sea $U = \mathrm{Spec}(A)$ un elemento de dicha cubierta, entonces $\mathcal{L}|_U$ es libre, más aún $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$. De otro lado, como $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente, existe un A–módulo M tal que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. Notemos que dada nuestra sección global s su restricción a U se puede identificar con un elemento del A–módulo M, el cual abusando de la notación también designamos como s y dada la sección global f de $\mathcal{L}$ su restricción es una sección de $\mathcal{L}|_U$ la cual se identifica con un elemento de A, en virtud de la invertibilidad de $\mathcal{L}$, puesto que $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = A$; supongamos sea tal elemento $g \in A$. Luego, como $X_f \cap U = D(g)$ y $s|_{X_f} = 0$ entonces estamos justamente bajo las condiciones del primer enunciado del Lema 4.0.1, por lo tanto existe $n > 0$ de suerte que $g^n s = 0$ en M, y dada la correspondencia entre las secciones f y g tenemos que $f^n s \in \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)$ es cero, visto s como una sección global restringida.
   Por último, como lo anterior se tiene para todo abierto de la cubierta entonces podemos considerar n fijo de tal forma que $0 = f^n s \in \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)$ para todo U. Por lo tanto, $f^n s = 0$ sobre X.

2. En éste caso procedemos de forma análoga a como se desarrolló la prueba del Lema 4.0.1, teniendo en cuenta el haz torcido debido a $\mathcal{L}$. Recordemos que en dicha prueba

se hace uso del primer enunciado, de ahí que en éste caso se impone la condición $U_i \cap U_j$ cuasi-compacto para todo i, j. □

Proposición 4.0.11. *Sean S un anillo graduado el cual es finitamente generado por S_1 como una S_0-álgebra, $X = \mathrm{Proy}(S)$ y $\mathcal{F}$ un haz cuasi-coherente sobre X. Entonces existe un isomorfismo natural $\beta : \Gamma_* \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}$.*

Demostración. Primero que todo veamos como está definido el morfismo β, para ello debemos tener en cuenta la equivalencia entre $\mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, \mathcal{F})$. En nuestro caso particular dicha equivalencia es entre $\mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_*(\mathcal{F}), \mathcal{F})$, puesto que al ser $\mathcal{F}$ es un haz cuasi-coherente entonces $\Gamma_* \widetilde{\mathcal{F}}$ también lo es. Así que $\Gamma_*(\widetilde{\mathcal{F}})|_U \cong \widetilde{M}$ con M un $S-$módulo. Naturalmente, también debemos tener presente que el $S-$módulo graduado asociado a $\mathcal{F}$ se define como $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$.
Notemos que para mostrar como actúa β basta exhibir sus imagenes sobre los abiertos de la forma $D_+(f)$, con $f \in S_1$. Entonces, dado un elemento $m \in M_d$, éste se identifica con una sección de $\widetilde{M}(D_+(f))$ que localmente es el cociente $\dfrac{m}{f^d}$. Luego dicho elemento a su vez se identifica; mediante el isomorfismo $\Gamma_*(\widetilde{\mathcal{F}})|_U \cong \widetilde{M}$, con un elemento de $\Gamma(X, \widetilde{\mathcal{F}}(d))$ para $d \geq 0$, entonces visto el cociente $\dfrac{m}{f^d}$ como un elemento de $\Gamma(X, \widetilde{\mathcal{F}}(d))$ tenemos que $m \in \Gamma(X, \mathcal{F}(d))$ y notemos que $\dfrac{1}{f^d} = f^{-d}$ se puede considerar como una sección de $\mathcal{O}_X(-d)$, así que $m \otimes f^{-d} \in \mathcal{F}(d) \otimes \mathcal{O}_X(-d) \cong \mathcal{F}$. En conclusión, β se define mediante:

$$\begin{array}{rccc} \beta(D_+(f)) : & \Gamma_*(\widetilde{\mathcal{F}})(D_+(f)) & \longrightarrow & \mathcal{F}(D_+(f)). \\ & \dfrac{m}{f^d} & \longmapsto & m \otimes f^{-d} \end{array}$$

Ahora, para verificar que β es un isomorfismo debemos identificar el módulo $\Gamma_*(\mathcal{F})_{(f)}$ con el conjunto de secciones $\mathcal{F}(D_+(f))$, para ello consideremos f como una sección del haz invertible $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. Además, notemos que al ser S finitamente generado por S_1 como una S_0-álgebra entonces existen finitos elementos $f_0, f_1, ..., f_r \in S_1$ tales que X es cubierto por abiertos afines de la forma $D_+(f_i)$, donde las intersecciones $D_+(f_i) \cap D_+(f_j)$ también son afines y $\mathcal{L}|_{\mathcal{D}_+()}$ es libre para cada i. Así que contamos con todas las condiciones del segundo enunciado del Lema 4.0.2, por lo tanto $\mathcal{F}(D_+(f)) \cong \Gamma_*(\mathcal{F})_{(f)}$. □

Corolario 4.0.3. *Sean A un anillo.*

1. *Si Y es un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^r_A$, entonces existe un ideal homogéneo $I \subseteq S = A[x_0, x_1, ..., x_r]$ tal que Y es el subesquema cerrado determinado por I.*

2. *Un esquema Y sobre $\mathrm{Spec}(A)$ es proyectivo si y sólo si es isomorfo a $\mathrm{Proy}(S)$ para algún anillo graduado S, donde $S_0 = A$ y S es finitamente generado por S_1 como una S_0-álgebra.*

Demostración.

1. Sea $\mathcal{I}_Y$ el haz ideal de Y sobre $X = \mathbb{P}^r_A = \mathrm{Proy}(A[x_0, x_1, ..., x_r])$. Recordemos que $\mathcal{I}_Y$ es un subhaz de $\mathcal{O}_X$. Luego, en virtud de la exactitud del funtor de las secciones globales(exacto a izquierda) y del funtor de giro cuya imagen sobre un haz es un haz torcido, tenemos que dada la sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y,$$

también es exacta la sucesión de $S-$módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{I}_Y) \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma_*(i_*\mathcal{O}_Y).$$

Entonces, $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$ es un submódulo de $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$, donde la anterior igualdad se garantiza por la Proposición 4.0.10. Por lo tanto, $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$ es un ideal homogéneo de S, el cual denotaremos por I. De otro lado, el ideal I determina un subesquema cerrado de X cuyo haz de ideales es $\widetilde{I}$. Luego, de la Proposición 4.0.7 tenemos que $\mathcal{I}_Y$ es cuasi-coherente, de suerte que contamos con todas las condiciones de la Proposición 4.0.11, así que $\Gamma_*(\widetilde{\mathcal{I}_Y}) \cong \mathcal{I}_Y$ y en consecuencia $\mathcal{I}_Y \cong \widetilde{I}$. Por lo tanto, Y es el subesquema cerrado determinado por I.

2. Recordemos que Y es proyectivo sobre $\mathrm{Spec}(A)$ si es isomorfo a un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^r_A$ para algún r. Ahora, del item anterior tenemos la existencia de un ideal homogéneo I tal que Y es el subesquema determinado por $I \subseteq S$, ésto es, Y es isomorfo a $\mathrm{Proy}(S/I)$ y sin perdida de generalidad podemos suponer que $I \subseteq S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$, entonces $(S/I)_0 = A$. De otro lado, cualquier anillo graduado S es un cociente de anillos de polinomios, entonces $\mathrm{Proy}(S)$ es proyectivo. □

En 4.0.10 definimos el haz torcido de *Serre,* $\mathcal{O}_X(1)$ sobre $X = \mathrm{Proy}(S)$ siendo S un anillo graduado. Ahora exhibimos dicho haz pero en el caso de un esquema arbitrario Y.

Definición 4.0.12. *Para cualquier esquema Y definimos el haz torcido $\mathcal{O}(1)$ sobre $\mathbb{P}^r_Y$ como $g^*(\mathcal{O}(1))$, donde $g : \mathbb{P}^r_Y \longrightarrow \mathbb{P}^r$ es el morfismo natural; siendo $\mathbb{P}^r_Y = \mathbb{P}^r \times Y$.*

A partir de ahora diremos que un morfismo $i : X \longrightarrow Z$ es una inmersión si éste da un isomorfismo de X con un subesquema abierto de un subesquema cerrado de Z.

Definición 4.0.13. *Si X es cualquier esquema sobre Y, un haz invertible $\mathcal{L}$ sobre X es muy amplio relativo a Y si existe una inmersión $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^r_Y$ para algún r, tal que $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$.*

Definición 4.0.14. *Sean X un esquema y $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X-$módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es generado por secciones globales si existe una familia de secciones globales $\{s_i\}_{i\in I}$, con $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, tal que para cada $x \in X$ las imagenes de las s_i en los tallos $\mathcal{F}_x$ generan el tallo como un $\mathcal{O}_X-$módulo.*

Teorema 4.0.1 (Serre)**.** *Sean X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, $\mathcal{O}(1)$ un haz invertible muy amplio sobre X y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo coherente. Entonces, existe un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, el haz $\mathcal{F}(n)$ puede ser generado por un número finito de secciones globales.*

Demostración. Sea $i : X \longrightarrow \mathbb{P}^r_A$ una inmersión cerrada de X sobre un espacio proyectivo sobre A, tal que $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{O}_X(1)$. Entonces, $i_*\mathcal{F}$ es coherente sobre $\mathbb{P}^r_A$ y $i_*(\mathcal{F}(n)) = (i_*\mathcal{F})(n)$. Además $\mathcal{F}(n)$ es generado por secciones globales si y sólo si $i_*(\mathcal{F}(n))$ también lo es, de hecho las secciones globales de ambos haces son las mismas, entonces nos reducimos al caso $X = \mathbb{P}^r_A = \mathrm{Proy}(A[x_0, ..., x_r])$.
Sin perdida de generalidad podemos cubrir a X mediante conjuntos abiertos $D_+(x_i)$, con $0 \leq i \leq r$ y dado que $\mathcal{F}$ es coherente, para cada i existe un módulo finitamente generado M_i sobre $B_i = A[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}]$ tal que $\mathcal{F}|_{D_+(x_i)} \cong \widetilde{M_i}$. Luego, para cada i tomamos un número finito de elementos $s_{ij} \in M_i$ los cuales generan el módulo M_i y abusando de la notación consideremos también como s_{ij} la sección correspondiente en $\widetilde{M_i}$. Entonces, en virtud del

Lema 4.0.2, existe un entero n_{ij} tal que $x_i^{n_{ij}} s_{ij}$ se extiende a una sección global t_{ij} de $\mathcal{F}(n_{ij})$. Ahora, como es habitual tomemos n suficientemente grande de suerte que para todo i, j se verifique la anterior afirmación. Luego, $\mathcal{F}(n)$ corresponde a un B_i–módulo M_i' sobre $D_+(x_i)$ y la aplicación $x_i^n : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}(n)$ induce un isomorfismo de M_i a M_i'. Entonces las secciones $x_i^n s_{ij}$ generan a M_i' y en consecuencia todas las secciones globales $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ generan el haz $\mathcal{F}(n)$. □

Capítulo 5

ANEXOS.

5.1. Anillo de Funciones Regulares

Sea Y una variedad cuasi-afín[1] en ^{n}. Entonces,

Definición 5.1.1. *Una función $f : Y \longrightarrow k$ es regular en un punto $P \in Y$ si existe una vecindad abierta U de P y funciones polinomiales $g, h \in A = k[x_1, ..., x_n]$ tal que h no se anula en U y $f = \frac{g}{h}$ sobre U. Decimos que f es regular sobre Y si es regular en cada punto de Y.*

De forma análoga, si $Y \subseteq ^n$ es una variedad cuasi-proyectiva entonces, una función $f : Y \longrightarrow k$ es regular en un punto $P \in Y$ si existe una vecindad abierta U de P y polinomios homogéneos $g, h \in S = k[x_0, x_1, ..., x_n]$ del mismo grado, tal que h no se anula en U y $f = \frac{g}{h}$ sobre U. Decimos que f es regular sobre Y si es regular en cada punto de Y.

A continuación definiremos el anillo de las funciones regulares asociado a una variedad afín o proyectiva, también exhibimos un resultado sin demostración, que evidencia la relación de estos anillos con el anillo coordenado de la variedad en el caso afín, y con el cuerpo k en el caso proyectivo.

[1]Una variedad cuasi-afín es un subconjunto abierto de una variedad afín.

Definición 5.1.2. *Sea Y una variedad. Denotamos por $\mathcal{O}(Y)$ a el anillo de todas las funciones regulares sobre Y. Si P es un punto de Y definimos el anillo local de P sobre Y, denotado por $\mathcal{O}_{P,Y}$, como el anillo de gérmenes de las funciones regulares sobre Y alrededor de P. En otras palabras, un elemento de $\mathcal{O}_P$ es un par $\langle U, f\rangle$, donde U es un subconjunto abierto de Y que contiene a P y f es una función regular sobre U, y dos pares $\langle U, f\rangle$, $\langle V, g\rangle$ se identifican si $f = g$ sobre $U \cap V$.*

Observemos que $\mathcal{O}_P$ es en efecto un anillo local, cuyo ideal maximal $\mathfrak{m}$ es el conjunto de gérmenes de funciones regulares que se anulan en P. Además, el cuerpo residual $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}$ es isomorfo a k.

Definición 5.1.3. *Si Y es una variedad, definimos el cuerpo de funciones de Y, denotado por $K(Y)$, como el conjunto de clases de equivalencia de pares $\langle U, f\rangle$, donde U es un conjunto abierto no vacío de Y y f es una función regular sobre U. Decimos que dos pares $\langle U, f\rangle$ y $\langle V, g\rangle$ se identifican si $f = g$ sobre $U \cap V$. Los elementos de $K(Y)$ son llamados funciones racionales sobre Y.*

Notemos que en efecto $K(Y)$ es un cuerpo, puesto que al ser Y irreducibles la intersección de cualquier par de conjuntos abiertos es no vacía, así que es posible definir la adición y multiplicación, que hacen de $K(Y)$ un anillo. Adicionalmente, si $\langle U, f\rangle \in K(Y)$ con $f \neq 0$ entonces podemos restringir f a el conjunto $V = U \setminus (U \cap Z(f))$ donde ésta no se anula y en consecuencia $\dfrac{1}{f}$ es una función regular sobre V, así que $\langle V, \dfrac{1}{f}\rangle$ es un inverso para el elemento $\langle U, f\rangle$.

Teorema 5.1.1. *Sea $Y \subseteq$ ^{n} una variedad afín con anillo coordenado $A(Y)$. Entonces,*

1. *$\mathcal{O}(Y) \cong A(Y)$.*
2. *Para cada punto $P \in Y$ sea $\mathfrak{m}_P \subseteq A(Y)$ el ideal de las funciones que se anulan en P. Entonces $P \longrightarrow \mathfrak{m}_P$ da una correspondencia uno a uno entre los puntos de Y y los ideales maximales de $A(Y)$.*
3. *Para cada P, $\mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$.*

De forma análoga, en el caso proyectivo tenemos:

Teorema 5.1.2. *Sea $Y \subseteq$ ^{n} una variedad proyectiva con anillo coordenado homogéneo $S(Y)$. Entonces,*

1. $\mathcal{O}(Y) \cong k$.
2. *Para cada punto $P \in Y$, sea $\mathfrak{m}_P \subseteq S(Y)$ el ideal generado por el conjunto de funciones homogéneas $f \in S(Y)$ tales que $f(P) = 0$. Entonces, $\mathcal{O}_P \cong S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)}$.*

Podemos encontrar las demostraciones de los teoremas anteriores y profundizar un poco más en el tema de funciones regulares en el Capítulo I de [**?**].

5.2. Anillos de Valuación Discreta

Definición 5.2.1. *Sea k un cuerpo. Una valuación discreta en k es una aplicación v de $k^* = k \setminus \{0\}$ en los enteros, es decir, $v : k^* \longrightarrow$, que para todo $x, y \in k^*$ verifica las siguientes condiciones.*

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$
2. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

El conjunto $A = \{x \in K^*;\ v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ es un anillo llamado *el anillo de valuación discreta* del cuerpo k. En particular, un dominio de integridad A es un anillo de valuación discreta si existe una valuación discreta v de su cuerpo de cocientes k, tal que A es el anillo de valuación de v.

Proposición 5.2.1. *Sea k un cuerpo y v una valuación discreta de k. Entonces,*

1. $v(1) = 0$.
2. $v(-x) = v(x)$ *para todo* $x \in k$.
3. $v(x^{-1}) = -v(x)$ *para todo* $x \in k^*$.
4. *Si $x, y \in A$ son tales que $v(x) = v(y)$ entonces $(x) = (y)$.*

5. *Si* $v(x) \neq v(y)$ *entonces* $v(x+y) = \min\{v(x),\ v(y)\}$.

En términos generales, si A es un dominio de integridad y k es su cuerpo de cocientes, diremos que A es un anillo de valuación de k si para cada $x \in k$ con $x \neq 0$ se verifica que $x \in A$ o $x^{-1} \in A$ (o ambos).

Notemos que si consideramos una valuación discreta $v : k^* \longrightarrow$ y su anillo de valuación discreta $A = \{x \in K^*;\ v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$, entonces A es un anillo de valuación en los términos anteriores. En efecto, si $x \in k$ con $x \neq 1$ entonces $v(x) > 0$ o $v(x) < 0$. Esto es $v(x) > 0$ o $-v(x) > 0$, así que $v(x) > 0$ o $v(x^{-1}) > 0$, y en consecuencia $x \in A$ o $x^{-1} \in A$. Es decir, A es un anillo de valuación.

Una de las propiedades que poseen los anillos de valuación la presenta la siguiente proposición.

Proposición 5.2.2. *Sea A un anillo de valuación de k. Entonces, A es un anillo local.*

Del resultado anterior si A es un anillo de valuación discreta entonces A es un anillo local cuyo ideal maximal $\mathfrak{m}$ es el conjunto de todos los $x \in k$ tales que $v(x) > 0$.

Además, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A existe al menos un entero n de suerte que $v(x) = n$ para algún $x \in \mathfrak{a}$. Luego, podemos afirmar que $\mathfrak{a}$ contiene todos los elementos $y \in A$ tales que $v(y) \geq n$. En efecto, si $v(y) = v(x) = n$ entonces $(y) = (x)$, en consecuencia $y \in \mathfrak{a}$. Por otro lado, si $v(y) > v(x) = n$ entonces $v(x+y) = v(x)$, así que $(x+y) = (x)$ de lo cual se sigue que $y \in (x) \subseteq \mathfrak{a}$. Por lo tanto $y \in \mathfrak{a}$. Entonces de la afirmación anterior se garantiza que los únicos ideales distintos de cero en A son de la forma $\mathfrak{m}_n = \{x \in A; v(x) \geq n\}$, y tales ideales forman una cadena única ascendente

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_3 \supset ...,$$

por lo tanto A es notheriano. Más aún, como la valuación es una aplicación sobreyectiva entonces existe $x \in \mathfrak{m}$ tal que $v(x) = 1$, así que $\mathfrak{m} = (x)$ y $\mathfrak{m}_n = (x^n)$ con $n \geq 1$. Luego, $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo no nulo de A.

En resumen, un anillo de valuación discreta A es un dominio noetheriano, local de dimensión uno, en el cual cada ideal no nulo es una potencia del ideal maximal.

5.3. Pegado de Haces y Esquemas

5.3.1. Pegado de Haces

Proposición 5.3.1. *Sean X un espacio topológico, $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de X y supongamos que tenemos dado un haz $\mathcal{F}_i$ sobre U_i para cada $i \in I$, y para cada i, j un isomorfismo $\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i\cap U_j} \longrightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i\cap U_j}$ tal que*

1. *Para cada $i \in I$, $\varphi_{ii} = id$.*
2. *Para cada $i, j, k \in I$, $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$.*

Entonces, existe un único haz $\mathcal{F}$ sobre X junto con isomorfismos $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ tal que $\psi_j = \varphi_{ij} \circ \psi_i$ sobre $U_i \cap U_j$, para cada $i, j \in I$.

Demostración. Como $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X entonces para cualquier abierto $U \subseteq X$ tenemos que $\{U \cap U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U. Ahora, supongamos la existencia de un haz $\mathcal{F}_i$ para cada $i \in I$ sobre U_i, los cuales verifican lo siguiente.

1. $\mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ es un grupo abeliano.
2. Si $V \subseteq U$ son abiertos de X, entonces como $V \cap U_i \subseteq U \cap U_i$, existe un morfismo $\rho_{i_{UV}} : \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \longrightarrow \mathcal{F}_i(V \cap U_i)$.
3. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. Dado que $U \cap U_i$ es un abierto y $\{W_j \cap U_i\}_{j\in I}$ es una cubierta abierta de $U \cap U_i$, entonces si $s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ es tal que $s_i|_{U_i\cap W_j} = 0$ para todo $j \in I$, se verifica que $s_i = 0$.
4. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. Como $U \cap U_i$ es un abierto y $\{W_j \cap U_i\}_{j\in I}$ es una cubierta abierta de $U \cap U_i$ entonces si $s_{ij} \in \mathcal{F}_i(U_i \cap W_j)$ es tal que para todo j, t se satisface que
$$s_{ij}|_{U_i\cap W_j\cap W_t} = s_{it}|_{U_i\cap W_j\cap W_t},$$
existe un elemento $s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ tal que $s_i|_{U_i\cap W_j} = s_{ij}$ para todo $j \in I$.

Entonces, para definir un haz $\mathcal{F}$ sobre X, a partir de los haces $\mathcal{F}_i$, consideremos el producto de los grupos abelianos $\mathcal{F}_i(U \cap U_i)$. Esto es,

$$P = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U \cap U_i),$$

donde $s \in P$ verifica que $s = \{s_i\}_{i \in I}$ con $s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$.
Luego, para un abierto $U \subseteq X$ definimos el conjunto.

$$\mathcal{F}(U) = \{s = \{s_i\}_{i \in I} \in P |\ s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)\ y\ \ \varphi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j)(s_i|_{U \cap U_i \cap U_j}) = s_j|_{U \cap U_i \cap U_j}, \forall_{ij}\}.$$

Así que, mediante los conjuntos $\mathcal{F}(U)$, con $U \subseteq X$ un abierto, definimos un haz $\mathcal{F}$ sobre X. Veamos que en efecto $\mathcal{F}$ es un haz.

1. Primero que todo mostremos que $\mathcal{F}(U) \subseteq P$ es un grupo abeliano. Sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$, siendo $s = \{s_i\}_{i \in I}$ con $s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ y $t = \{t_i\}_{i \in I}$ con $t_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$. Como $\mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ es un grupo abeliano se sigue que $s_i - t_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ para todo $i \in I$, entonces $s - t = \{s_i - t_i\}_{i \in I} \in P$ y como φ_{ij} es un isomorfismo, denotando por U_{ij} a $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(U \cap U_{ij})(s_i - t_i|_{U \cap U_{ij}}) &= \varphi_{ij}(U \cap U_{ij})(s_i|_{U \cap U_{ij}}) - \varphi_{ij}(U \cap U_{ij})(t_i|_{U \cap U_{ij}}) \\ &= s_j|_{U \cap U_{ij}} - t_j|_{U \cap U_{ij}} \\ &= (s_j - t_j)|_{U \cap U_{ij}}. \end{aligned}$$

   Así que $s - t \in \mathcal{F}(U)$. Luego, $\mathcal{F}(U)$ es un subgrupo de P y por lo tanto también es un grupo abeliano.

2. Para cualquier par de abiertos $V \subseteq U$ de X existe una aplicación de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ inducida por los morfismos $\mathcal{F}_i(U \cap U_i) \longrightarrow \mathcal{F}_i(V \cap U_i)$.
   En efecto, si $V \subseteq U$ entonces $V \cap U_i \subseteq U \cap U_i$ y como $\mathcal{F}_i$ es un haz para todo $i \in I$ existe un morfismo $\rho_{i_{UV}} : \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \longrightarrow \mathcal{F}_i(V \cap U_i)$. Luego, si $s, r \in \mathcal{F}(U)$ satisfacen que $s = r \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$, como $\rho_{i_{UV}}$ está bien definida se tiene que $\rho_{i_{UV}}(s_i) = \rho_{i_{UV}}(r_i)$ para todo $i \in I$. Entonces $\rho_{UV}(s) = \rho_{UV}(r)$, así que ρ_{UV} está bien definida.
   Además se verifican las siguientes propiedades.

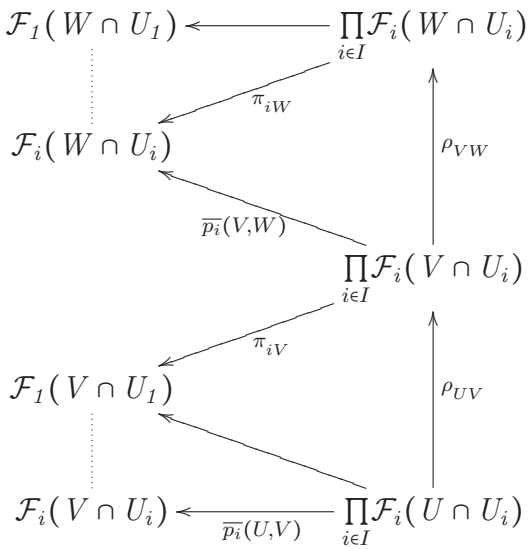
a) $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$. Esto es consecuencia inmediata de ser $\mathcal{F}_i$ un haz y para $U \subseteq X$ $\mathcal{F}(U) \subseteq \prod \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$.

b) $\rho_{UU} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ es justamente $\rho_{UU} = id$.

c) Sean W, V, U abiertos de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces para cada $i \in I$ tenemos la siguiente cadena de morfismos

$$\mathcal{F}_i(U \cap U_i) \overset{\rho_{i_{UV}}}{\longrightarrow} \mathcal{F}_i(V \cap U_i) \overset{\rho_{i_{VW}}}{\longrightarrow} \mathcal{F}_i(W \cap U_i).$$

Esto es, $\rho_{i_{UW}} = \rho_{i_{VW}} \circ \rho_{i_{UV}}$. Ahora, para verificar que $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ hacemos uso de la composición anterior, dada para cada $i \in I$, y de la propiedad universal del producto. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

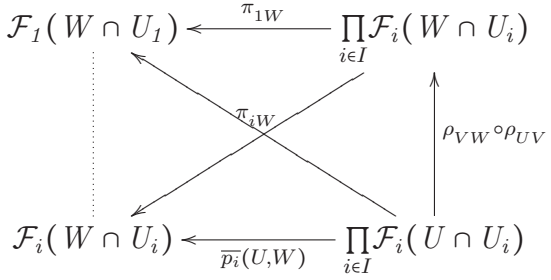


Entonces, obtenemos la cadena de morfismos

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(U \cap U_i) \overset{\rho_{UV}}{\longrightarrow} \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(V \cap U_i) \overset{\overline{p_i}(V,W)}{\longrightarrow} \mathcal{F}_i(W \cap U_i),$$

cuya composición la denotamos por $\overline{p_i}(U,W)$. Esto es, $\overline{p_i}(U,W) = \overline{p_i}(V,W) \circ \rho_{UV}$ y dado que $\overline{p_i}(V,W) = \pi_{iW} \circ \rho_{VW}$ entonces $\overline{p_i}(U,W) = \pi_{iW} \circ \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$. En

consecuencia tenemos el siguiente diagrama conmutativo.



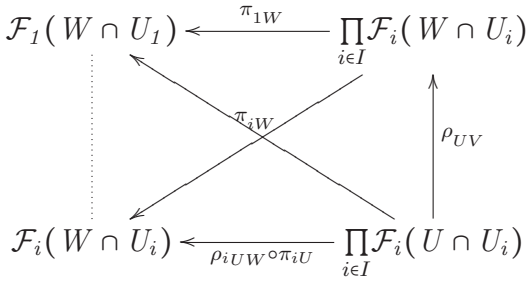
Adicionalmente, podemos construir la cadena de morfismos

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(U \cap U_i) \xrightarrow{\pi_{1U}} \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \xrightarrow{\rho_{iUV}} \mathcal{F}_i(V \cap U_i) \xrightarrow{\rho_{iVW}} \mathcal{F}_i(W \cap U_i),$$

que no es más que,

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i(U \cap U_i) \xrightarrow{\pi_{1U}} \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \xrightarrow{\rho_{iUW}} \mathcal{F}_i(W \cap U_i).$$

Así que, en virtud del anterior morfismo de composición y de la propiedad universal del producto tenemos el siguiente diagrama conmutativo.



Finalmente, de la unicidad del producto podemos concluir que $\rho_{UW} = \rho_{VW}\circ\rho_{UV}$.

3. Consideremos U un abierto de X y $\{W_j\}_{j\in I}$ una cubierta abierta de U y supongamos que $s \in \mathcal{F}(U)$ es tal que $s|_{W_j} = 0$ para todo j. Entonces, para cada $i \in I$ se tiene que $s_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ satisface que $s_i|_{W_j} = 0$ y dado que $\mathcal{F}_i$ es un haz y $\{U_i \cap W_j\}_{j\in I}$ es una cubierta abierta de $U_i \cap U$ entonces $s_i|_{U_i\cap W_j} = 0$ para todo j. Así que, $s_i = 0$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $s = 0$.

4. Consideremos U un abierto de X y $\{W_j\}_{j\in I}$ una cubierta abierta de U y supongamos que existen $s^j \in \mathcal{F}(W_j)$ para todo j, los cuales verifican la siguiente propiedad para todo j, k

$$s^j|_{W_j\cap W_k} = s^k|_{W_j\cap W_k}.$$

Recordemos que $s^j \in \mathcal{F}(W_j)$ es tal que $s^j = \{s_i^j\}_{i\in I}$ con $s_i^j \in \mathcal{F}_i(U_i \cap W_j)$. Entonces la propiedad anterior implica que para todo $i \in I$

$$s_i^j|_{W_j\cap W_k} = s_i^k|_{W_j\cap W_k},$$

que a su vez implica que

$$s_i^j|_{U_i\cap W_j\cap W_k} = s_i^k|_{U_i\cap W_j\cap W_k}.$$

Ahora, como $\{U_i\cap W_j\}_{j\in I}$ es una cubierta abierta de $U_i\cap U$ y los $\mathcal{F}_i$ son haces, entonces la anterior igualdad implica la existencia de $s_i \in \mathcal{F}(U\cap U_i)$ de suerte que $s_i|_{U_i\cap W_j} = s_i^j$ para todo j, donde los s_i satisfacen que $\varphi_{ik}(U_i\cap U_k\cap W_j)(s_i|_{U_i\cap U_k\cap W_j}) = s_k|_{U_i\cap U_k\cap W_j}$. Luego, como lo anterior se satisface para todo j, entonces

$$\varphi_{ik}(U\cap U_i\cap U_k)(s_i|_{U\cap U_i\cap U_k}) = s_k|_{U\cap U_i\cap U_k}.$$

Por lo tanto, para cada $s_i \in \mathcal{F}_i(U\cap U_i)$ se verifica que $\varphi_{ik}(U\cap U_i\cap U_k)(s_i|_{U\cap U_i\cap U_k}) = s_k|_{U\cap U_i\cap U_k}$. Entonces, haciendo $s = \{s_i\}_{i\in I}$ se tiene que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{W_j} = s^j$ para todo j.

Los items anteriores garantizan que $\mathcal{F}$ es un haz. Ahora verifiquemos que los morfismos $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ son de hecho isomorfismos tales que $\psi_j = \varphi_{ij}\circ\psi_i$ sobre $U_i\cap U_j$, para cada i, j.
Sea $V \subseteq X$ un abierto, entonces tenemos el siguiente morfismo de grupos

$$\psi_i(V) : \mathcal{F}|_{U_i}(V) \longrightarrow \mathcal{F}_i(V\cap U_i),$$

y sin perdida de generalidad podemos suponer que $V \subseteq U_i$, entonces $\mathcal{F}|_{U_i}(V) = \mathcal{F}(V)$ y $\mathcal{F}_i(V\cap U_i) = \mathcal{F}_i(V)$, así que el anterior morfismo no es más que

$$\psi_i(V) : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}_i(V),$$

donde $s = \{s_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}(V)$ es tal que su imagen mediante $\psi_i(V)$ es justamente s_i.
Primero que todo veamos que ψ_i es inyectiva. Sea $t \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\psi_i(V)(t) = s_i = \psi_i(V)(s)$. Como $\{V \cap U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta de V y $t \in \mathcal{F}(V)$ entonces $\varphi_{ij}(V \cap U_j \cap U_i)(t_j|_{V\cap U_j\cap U_i}) = t_i|_{V\cap U_j\cap U_i}$ y como $V \subseteq U_i$ se sigue que $\varphi_{ij}(V \cap U_j)(t_j|_{V\cap U_j}) = t_i|_{V\cap U_j}$. Luego, dado que $\psi_i(V)(t) = s_i$ entonces $\varphi_{ij}(V \cap U_j)(t_j|_{V\cap U_j}) = t_i|_{V\cap U_j} = s_i|_{V\cap U_j} = \varphi_{ij}(V \cap U_j)(s_j|_{V\cap U_j})$, y como φ_{ij} es isomorfismo se tiene que $t_j|_{V\cap U_j} = s_j|_{V\cap U_j}$ para todo j, así que $t = s$. Por lo tanto, ψ_i es inyectiva.
Ahora, para verificar la sobreyectividad de $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ supongamos que $\{W_j\}_{j\in I}$ es una cubierta de U_i. Así que, para cualquier abierto $V \subseteq U_i$ se tiene que $\{V \cap W_j\}$ es una cubierta de V, además para cada $s_i \in \mathcal{F}_i(V)$ existe un elemento $s_{ij} \in \mathcal{F}_i(V \cap W_j)$, el cual no es otra cosa que la imagen de s_i mediante el morfismo restricción y como lo anterior se tiene para todo $j \in I$ entonces podemos definir el elemento $\overline{s_i} = \{s_{ij}\}_{j\in I} \in \mathcal{F}|_{U_i}(V)$, el cual, por definición de ψ_i, verifica que $\psi_i(V \cap W_j)(\overline{s_i}) = s_{ii}|_{W_j} = s_i|_{V\cap W_j}$. Luego, en virtud de la Proposición 1.0.11, podemos concluir que ψ_i es sobreyectiva. Por lo tanto, $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ es un isomorfismo. Ahora veamos que para cada i, j se verifica que $\psi_j = \varphi_{ij} \circ \psi_i$ sobre $U_i \cap U_j$. Entonces, considerando $V \subseteq U_i$, el morfismo $\psi_i(V)$ restringido a $U_i \cap U_j$ no es más que

$$\begin{array}{rcl} \psi_i(V)|_{U_i\cap U_j} \coloneqq \psi_{ij}(V) : \mathcal{F}|_{U_i\cap U_j}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}_i(V \cap U_i \cap U_j) \\ s|_{U_i\cap U_j} & \longmapsto & s_i|_{U_i\cap U_j} \end{array}$$

Así que,

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_{ij}(V) \circ \psi_i(V))|_{U_i\cap U_j}(s) & = & \varphi_{ij}(V)(\psi_i(V)|_{U_i\cap U_j}(s)) \\ & = & \varphi_{ij}(V)(\psi_{ij}(V)(s|_{U_i\cap U_j})) \\ & = & \varphi_{ij}(V)(s_i|_{U_i\cap U_j}) \\ & = & s_j|_{U_i\cap U_j} \\ & = & \psi_{ij}(V)(s|_{U_i\cap U_j}) \\ & = & \psi_j(V)|_{U_i\cap U_j}(s) \end{array}$$

y lo anterior se tiene para todo $s \in \mathcal{F}(V)$. Por lo tanto, $\varphi_{ij} \circ \psi_i = \psi_j$ sobre $U_i \cap U_j$.
Finalmente verifiquemos la unicidad de $\mathcal{F}$. Para ello supongamos que existe otro haz $\mathcal{F}'$ sobre X de suerte que exista un isomorfismo $\psi'_i : \mathcal{F}'|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ tal que $\psi'_j = \varphi_{ij} \circ \psi'_i$ sobre $U_i \cap U_j$ para todo i, j. Entonces, como $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ es un isomorfismo se tiene que

el morfismo $\mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}'|_{U_i}$, dado por la composición $(\psi_i')^{-1} \circ \psi_i$, es un isomorfismo, y lo anterior se tiene para todo $U_i \subseteq X$. En consecuencia, $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es único salvo isomorfismo. □

5.3.2. Pegado de Esquemas

Proposición 5.3.2. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia(posiblemente infinita) de esquemas y supongamos dado un subconjunto abierto $U_{ij} \subseteq X_i$ para cada $i \neq j$, el cual tiene la estructura de esquema inducida. También, para cada $i \neq j$ supongamos dado un isomorfismo de esquemas $\varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$ tal que:*

1. *Para cada i, j se verifica que $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.*
2. *Para cada i, j, k tenemos $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ y $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ sobre $U_{ij} \cap U_{ik}$.*

Entonces, existe un esquema X junto con morfismos $\psi_i : X_i \longrightarrow X$ para todo i, tales que

1. *ψ_i es un isomorfismo de X_i sobre un subespacio abierto de X.*
2. *Los $\psi_i(X_i)$ cubren X*
3. *$\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$*
4. *$\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ sobre U_{ij}*

El esquema X dado bajo las condiciones anteriores decimos que se obtiene pegando los esquemas X_i, a travez de los isomorfismos φ_{ij}. Tal esquema es llamado la unión disjunta de los esquemas X_i, el cual denotamos por $\bigsqcup X_i$.

Demostración. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de esquemas y $U_{ij} \subseteq X_i$ un abierto para cada $i \neq j$. Notemos que para tales abiertos tenemos una estructura de esquema considerando U_{ij} como un espacio topológico con la topología inducida y cuyo haz es el haz $\mathcal{F}_i$ de X_i restringido a U_{ij}. Esto es, el esquema dado por el abierto U_{ij} es el par $(U_{ij}, \mathcal{F}_i|_{U_{ij}})$. Adicionalmente supongamos un isomorfismo de esquemas $\varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$ para cada $i \neq j$, los cuales satisfacen las dos condiciones descritas en el enunciado. Entonces, definimos

$$X = \bigsqcup_{\bullet} X_i / \sim,$$

donde dos elementos $\overline{x}$, $\overline{y} \in X$ satisfacen que $\overline{x} = \overline{y}$ si existe $U_{ij} \subseteq X_i$ para algún i tal que $x \in U_{ij}$ y $\varphi_{ij}(U_{ij})(x) = y$.
Primero que todo veamos que " $\sim$ " es una relación de equivalencia.

1. Dado que $\varphi_{ii} = id$ entonces si $x \in U_{ii}$ para algún $i \in I$ implica que $\varphi_{ii}(U_{ii})(x) = x$, así que $\overline{x} = \overline{x}$. Esto es, $x \sim x$.

2. Sea $\overline{x} = \overline{y}$ entonces existe U_{ij} tal que $x \in U_{ij}$ y $\varphi_{ij}(U_{ij})(x) = y$. Luego, como $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$ se sigue que
$$\varphi_{ij}^{-1}(U_{ij})(\varphi_{ij}(U_{ij})(x)) = \varphi_{ij}^{-1}(U_{ij})(y) = \varphi_{ji}(U_{ij})(y).$$
Esto es, $\varphi_{ji}(U_{ji})(y) = x$ donde $y \in U_{ji}$, entonces $\overline{y} = \overline{x}$.

3. Ahora, si $\overline{x} = \overline{y}$ y $\overline{y} = \overline{z}$ entonces existen abiertos U_{ij}, U_{ik}, U_{ji} y U_{jk}, para los cuales $x \in U_{ij} \cap U_{ik}$, $y \in U_{ji} \cap U_{jk}$ y $z \in U_{ij} \cap U_{ik} \cap U_{jk}$, con $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik})(x) = y$ y $\varphi_{jk}(U_{ji} \cap U_{jk})(y) = z$. Además, dado que $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ entonces
$$\begin{aligned} z = \varphi_{jk}(U_{ji} \cap U_{jk})(y) &= \varphi_{jk}(U_{ji} \cap U_{jk})(\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik})(x)) \\ &= (\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij})(U_{ij} \cap U_{ik})(x) \\ &= \varphi_{ik}(U_{ij} \cap U_{ik})(x), \end{aligned}$$
donde $\varphi_{ik}(U_{ij} \cap U_{ik})(x) = z$ implica que $\overline{x} = \overline{z}$.

Luego, los tres items anteriores garantizan que " $\sim$ " es una relación de equivalencia.

Entonces, dotamos a X con la topología cociente. Esto es, $V \subseteq X$ es un abierto de X si $\psi_i^{-1}(V)$ es un abierto de X_i para cada $i \in I$, donde $\psi_i : X_i \longrightarrow X$ es el morfismo composición del morfismos inclusión $\iota_i : X_i \longrightarrow \bigsqcup X_i$ y el morfismo proyección canónica $\pi : \bigsqcup X_i \longrightarrow X$.
Ahora, siendo X un espacio topológico dado a partir de los espacios X_i, verifiquemos que ψ_i es un isomorfismo de esquemas sobre un subespacio de X. Para ello debemos probar que se tiene un homeomorfismo de espacios topológicos y un isomorfismo de haces.
Notemos que $U_{ij} \subseteq X_i$ es un abierto de X_i y mediante el morfismo φ_{ij} dicho abierto se identifica con U_{ji} que es un abierto de X_j. Esto es, U_{ij} y U_{ji} son el mismo conjunto, salvo

que el primer conjunto es visto como un abierto de X_i y el segundo es visto como un abierto de X_j.
Ahora consideremos el morfismo

$$\overline{\psi_i} : X_i \longrightarrow \mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i}) \subseteq \mathrm{X}.$$

Por definición $\overline{\psi_i}$ es continuo y es un epimorfismo, así que resta verificar que es inyectivo. Para ello notemos que si $x, y \in X_i$ son tales que $\overline{\psi}(X_i)(x) = \overline{\psi_i}(X_i)(y)$ entoncees $\psi_i(X_i)(x) = \psi_i(X_i)(y) \in X$, es decir $\overline{x} = \overline{y}$. En consecuencia, $\overline{\psi_i}$ es un isomorfismo. Luego ψ_i es un isomorfismo sobre un subespacio de X. A partir de ahora no se hará distinción entre los morfismos ψ_i y $\overline{\psi_i}$.

Notemos que en el isomorfismo ψ_i de espacios topológicos $\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i})$ tiene la topología inducida de X. Entonces veamos que en efecto ψ_i es un homeomorfismo y para ello sólo resta verificar que ψ_i^{-1} es continuo, donde $\psi_i^{-1} : \mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i}) \subseteq \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X_i}$. Entonces, sea $W \subseteq X_i$ un abierto. Como la imagen inversa mediante ψ_i^{-1} no es más que la imagen mediante ψ_i entonces debemos mostrar que $\psi_i(W) \subseteq X$ es abierto y recordemos que los abiertos de X son aquellos conjuntos $V \subseteq X$ tales que $\psi_j^{-1}(V)$ sea abierto para todo $j \in I$, así que debemos mostrar que $\psi_j^{-1}(\psi_i(W))$ es un abierto para todo $j \in I$. Luego, de las propiedades que satisfacen los morfismos tenemos que,

$$\psi_j^{-1}(\psi_i(W)) = \varphi_{ij}(W \cap U_{ij}) = W_{ji} \cap U_{ji} \subseteq X,$$

donde W_{ji} es el conjunto con el cual se identifica W en X_j y en consecuencia $\psi_j^{-1}(\psi_i(W)) = W_{ji} \cap U_{ji}$ es abierto de X_j para todo $j \in I$. Por lo tanto, $\psi_i(W)$ es abierto de X. En particular como $\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i}) \subseteq \mathrm{X}$, entonces considerando $\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i})$ como un subespacio tenemos que $\psi_i(W)$ es un abierto de $\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i})$. Así que ψ_i^{-1} es continuo y en consecuencia ψ_i es homeomorfismo de espacios topológicos.
Luego, dado que para cada $j \in I$ tenemos que $\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{j}) = \psi_\mathrm{j}(\mathrm{X_j})$ y $\psi_j = \psi_i \circ \varphi_{ji}$ entonces $\psi_i^{-1}(\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{j})) = \psi_\mathrm{i}^{-1}(\psi_\mathrm{j}(\mathrm{X_j})) = \varphi_{\mathrm{ji}}(\mathrm{X_j}) = \mathrm{U_{ij}}$, donde $U_{ij} \subseteq X_i$ es un abierto, entonces los conjuntos $\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{j})$ son abiertos de X. Más aún, $\{\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i})\}_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ es una familia de abiertos de X tal que $\psi_i(X_i) = \mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i})$ para cada $i \in I$, entonces $\{\mathrm{Im}(\psi_\mathrm{i})\}_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ forma una cubierta abierta de X.

De otro lado, notemos que las propiedades 3 y 4 que satisfacen los morfismos ψ_i son consecuencia inmediata de su definición. Aquí mostraremos solamente el caso de la propiedad 4.

$$\begin{aligned}\psi_j \circ \varphi_{ij}(U_{ij}) = (\pi_j \circ \iota_j \circ \varphi_{ij})(U_{ij}) &= \pi_j \circ \iota_j(U_{ji}) = \pi_j(U_{ji}) \\ &= U_{ji}/\sim = U_{ij}/\sim \\ &= \pi_i(\iota_i(U_{ij})) \\ &= \psi_i(U_{ij}).\end{aligned}$$

Hasta ahora X es un espacio topológico con la topología cociente y tenemos la existencia de isomorfismos ψ_i que satisfacen las cuatro propiedades del enunciado. Entonces definamos un haz sobre X para así obtener una estructura de esquema sobre X. Para ello, primero que todo denotemos por I_i a $\mathrm{Im}(\psi_i)$ y definamos para cada $i \in I$ el haz

$$\mathcal{O}_{I_i} := \psi_{i*}\mathcal{F}_i.$$

Así que, para cada abierto $V \subseteq I_i$ se tiene que $\mathcal{O}_{I_i}(V) = \mathcal{F}_i(\psi_i^{-1}(V))$.
Luego, sea $\mathcal{O}_X$ el haz obtenido al pegar los haces $\mathcal{O}_{I_i}$ para todo $i \in I$.

Entonces, $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Más aún, dado que para cada $p \in X$ se tiene que $p \in I_i$ para algún i entonces

$$(\mathcal{O}_X)_p = \varprojlim_{p \in V \subset X} \mathcal{O}_X(V) = (\mathcal{O}_{X|_{I_i}})_p$$

y como en virtud del pegado de haces tenemos que $\mathcal{O}_{X|_{I_i}} \cong \mathcal{O}_{I_i}$, se sigue que

$$(\mathcal{O}_X)_p \cong (\mathcal{O}_{I_i})_p := (\psi_{i*}\mathcal{F}_i)_{\psi_i^{-1}(p)} = (\mathcal{F}_i)_{\widetilde{p}},$$

donde $\widetilde{p} \in X_i$. Luego, al ser los pares $(X_i, \mathcal{F}_i)$ esquemas para todo $i \in I$ se tiene que $(\mathcal{F}_i)_{\widetilde{p}}$ es un anillo local para todo $\widetilde{p} \in X_i$ y en consecuencia $(\mathcal{O}_X)_p$ es un anillo local para todo $p \in X$. Por lo tanto, $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado.

Adicionalmente, dado que para todo $x \in X$ se tiene que $x \in I_i$ para algún i y los pares $(I_i, \mathcal{O}_{I_i})$ son esquemas, entonces existe una vecindad abierta $V_x \subset I_i \subseteq X$ de x de suerte que V_x con la topología inducida y con el haz restricción es un esquema afín. Como lo

anterior se tiene para todo $x \in X$, entonces X es un esquema cuya unicidad es garantizada por la unicidad del haz construido $\mathcal{O}_X$.
Finalmente, notemos que el morfismo de haces inducido por ψ_i es justamente,

$$\psi_i^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{I_i}$$

y por construcción del haz $\mathcal{O}_X$, mediante el proceso de pegado, tenemos que $\mathcal{O}_{X|_{I_i}} \cong \mathcal{O}_{I_i}$, con lo cual concluimos que ψ_i es un isomorfismo de esquemas. □