



Dificultades en el pensamiento estocástico en estudiantes de grado quinto

Luis Eduardo Díaz Murillo

Angely Katherine Ocampo Pabón

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Matemáticas y Física

2019



Dificultades en el pensamiento estocástico en estudiantes de grado quinto

Luis Eduardo Díaz Murillo

Angely Katherine Ocampo Pabón

Requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física.

Director:

David Benítez Mojica

Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Matemáticas y Física

2019

Contenido

Agradecimientos	7
Resumen	8
CAPÍTULO I.....	9
1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	9
1.2 JUSTIFICACIÓN	11
1.3 ANTECEDENTES	14
1.3.1. Antecedentes de Investigación.....	14
1.3.2 Antecedentes curriculares.....	17
1.3.3 Pruebas SABER.....	21
1.4 OBJETIVOS	26
1. 4.1 Objetivo general.....	26
1. 4.2 Objetivos específicos.....	26
1.5 Preguntas de Investigación	27
CAPÍTULO II	28
2.1 MARCO REFERENCIAL	28
2.1. Contexto histórico.....	28
2.2 Contexto matemático	31
2.3 Niveles de pensamiento probabilístico.....	35
2.3.1 Aportes de Polya	38
2.3.2 Aportes de Schoenfeld.....	39
2.4 Tecnologías digitales y su uso en la educación matemática	40
2.5. Geogebra.....	42
CAPITULO III.....	43
3.1 METODOLOGÍA.....	43
3.1.2.1. Principios y fundamentos institucionales	44
3.1.2.2. Perfil de los estudiantes	44
3.1.2.3. Enseñanza de las matemáticas en la institución	45
CAPITULO IV	50
4.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS	50
4.1.1 ANÁLISIS DE LA ENCUESTA DIAGNÓSTICA.....	50
4.1.1.1 Presentación de la actividad.....	51
4.1.1.2 Análisis cuantitativo	53

4.1.1.3 Análisis cualitativo	59
4.1.1.4 Entrevistas clínicas	67
4.1.2 ANÁLISIS DE HOJAS DE TRABAJO	73
4.1.2.1 HOJA DE TRABAJO 1	73
4.1.2.1.1 Presentación de la actividad	73
4.1.2.1.2 Análisis de los resultados	79
4.1.2.1.3 Entrevistas clínicas	94
4.1.2.1.4 Comentarios finales de la actividad	106
4.1.2.2 HOJA DE TRABAJO 2	107
4.1.2.2.1 Presentación de la hoja de trabajo	107
4.1.2.2.2 Análisis de resultados	110
4.1.2.2.3 Comentarios finales de la actividad	129
4.1.3 ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LA ENCUESTA DE DIAGNÓSTICO Y LAS HOJAS DE TRABAJO	130
CAPITULO V	133
CONCLUSIONES	133
BIBLIOGRAFÍA	139
Anexo 1: Encuesta diagnostica	142
Anexo 2: Hoja de trabajo #1	148
Anexo 3: Hoja de trabajo #2	158

Índice de figuras

Figura 1 Resultados nacionales en Saber 5°, área de matemáticas. Tomado de: icfes (2017)	Error! Bookmark not defined.
Figura 2 Comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año en matemáticas en grado quinto (IETIPAM). Tomado de: icfes (2018)	Error! Bookmark not defined.
Figura 3: Porcentaje de respuestas correctas en las preguntas de selección múltiple de la encuesta aplicada en el presente trabajo de grado. (Elaboración propia).	53
Figura 4 Grafico del uso y creencia de amuletos y/o supersticiones. (Elaboración propia).	58
Figura 5 Grafica general del análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica. (Elaboración propia).	60
Figura 6. Diseño N°1 “el juego de la pirinola” vista grafica 1. Elaboración propia	76
Figura 7. Diseño N°1 “el juego de la pirinola” vista grafica 2. Elaboración propia	76
Figura 8: Comparativo entre respuestas con y sin uso de tecnología. Elaboración propia.....	105
Figura 9: Diseño N°2 “lanzamientos de dados”. Elaboración propia.....	108
Figura 10: Comparativo de los resultados globales con el uso de tecnología computacional y sin el uso de la misma. Elaboración propia.....	128
Figura 11: Comparativo de los resultados globales de la encuesta diagnostica con la hoja n° 1, sin uso y con uso de tecnología. Elaboración propia	130
Figura 12: Comparativo de los resultados globales de la encuesta diagnostica con la hoja n° 2, sin uso y con uso de tecnología. Elaboración propia	131

Índice de tablas

Tabla 1: <i>Representación de los Estándares curriculares de matemáticas.....</i>	Error! Bookmark not defined.
Tabla 2: <i>Competencias evaluadas en el área de matemáticas grado quinto .</i>	Error! Bookmark not defined.
Tabla 3: <i>Descripción general de los niveles de desempeño.....</i>	Error! Bookmark not defined.
Tabla 4: <i>Características esenciales en cada una de las etapas de la investigación.....</i>	46
Tabla 5: <i>Problemas de la encuesta diagnóstica con menor porcentaje de acierto.</i>	54
Tabla 6: <i>Posibles resultados para obtener los números planteados en la pregunta de la encuesta</i>	55
Tabla 7: <i>Problemas de la encuesta diagnóstica con mayor porcentaje de acierto</i>	56
Tabla 8: <i>Resumen de las ocho preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica.....</i>	57
Tabla 9: <i>Análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica.</i>	61
Tabla 10: <i>Valores obtenidos en la hoja de trabajo N° 1 sin uso de la tecnología.</i>	79
Tabla 11: <i>Valores obtenidos en la hoja de trabajo N° 1 con uso de la tecnología.....</i>	80
Tabla 12: <i>Resultados segunda tabla, actividades con uso de tecnología</i>	91
Tabla 13: <i>Resultados segunda tabla, actividades con uso de tecnología</i>	92
Tabla 14: <i>Opción por respuesta de cada pregunta con y sin uso de la tecnología</i>	111
Tabla 15: <i>Opción por respuesta de cada pregunta con y sin uso de la tecnología</i>	111
Tabla 16: <i>Opción por respuesta de cada pregunta abierta con y sin uso de la tecnología</i>	118
Tabla 17: <i>Opción por respuesta de cada pregunta abierta con y sin uso de la tecnología</i>	119

Agradecimientos

A Dios gracias, por darnos la oportunidad de estar en este mundo, por guiarnos durante la realización de este largo proceso, por concedernos la sabiduría y la fortaleza en cada paso que dimos para llegar a la realización de nuestra anhelada meta.

A nuestros padres por ser los principales promotores de este gran sueño, gracias a ellos por confiar y creer en nosotros, por su apoyo incondicional y las acompañadas en largas y agotadoras noches de estudio, por sus palabras de ánimo y su ejemplo de superación, que nos llevaron a lograr esta meta.

Gracias a la vida por este nuevo triunfo y a todas aquellas personas que nos apoyaron y nos dieron palabras de aliento que se convirtieron en fuerzas para continuar con este nuestro sueño.

También agradecemos a nuestro director de trabajo de grado, David Benítez Mojica por su acompañamiento, y sus valiosos aportes para nuestra formación profesional.

Resumen

En las situaciones del diario vivir se presentan eventos que se encuentran relacionados con el azar y la probabilidad. Sin embargo, a pesar de estar latentes en la sociedad y la cotidianidad, la importancia que se le da a esta ciencia, ha sido y sigue siendo mínima si se contrasta con otros conceptos matemáticos enseñados en la escuela, es por ello, que el presente trabajo está enfocado en la manera en que estudiantes de quinto grado solucionan situaciones problema que involucran el concepto de probabilidad y así poder determinar el nivel de razonamiento probabilístico en el que se encuentran los estudiantes con sus respuestas. El principal objetivo de este trabajo es identificar y explorar el impacto que tiene la mediación y uso computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico; tomándose estos para organizar y categorizar las respuestas de cada uno de ellos. De manera general los estudiantes a partir del uso y la mediación computacional de GeoGebra, las hojas de trabajo y la ayuda de los docentes se muestra un avance notorio en algunos niveles más que en otros en lo que corresponde a la resolución de situaciones problema que están relacionadas con el concepto de probabilidad logrando ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento superior al inicial.

Palabras clave: GeoGebra, mediación computacional, Resolución de Problemas, niveles de razonamiento probabilístico, Probabilidad.

CAPÍTULO I

1.1.DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemática (2006), el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), una entidad con fines políticos de educación nacional, que fomenta el desarrollo de una educación competitiva, de buena calidad, y que permite generar oportunidades de progreso; plantea que el pensamiento aleatorio se apoya directamente en los conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial; del mismo modo, indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria.

Dentro del pensamiento probabilístico se presentan distintos niveles de su desarrollo; uno de ellos es el nivel de impredeción, el cual recoge al grupo de personas que creen que por estar en situaciones de azar, es completamente imposible predecir los resultados; en el nivel determinista, se agrupan los estudiantes que deciden explicar el comportamiento de los fenómenos de azar mediante alguna causa poderosa que los rige, las explicaciones de este orden acuden a la suerte o a la voluntad divina; en el nivel mecánico, los estudiantes incorporan de manera errónea el conocimiento de la matemática para la resolución de problemas; en el nivel pre-rigor, los estudiantes que se alejan de las anteriores argumentaciones, y en algunos problemas hacen listados incompletos del espacio muestral y de los sucesos que verdaderamente puedan ocurrir; en el nivel de rigor, estudiantes utilizan diferentes representaciones para explicar el comportamiento del suceso como tablas, gráficas y demás (Benítez y Sánchez, 1997).

En este sentido, los estándares básicos dentro del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, establece que a través de la enseñanza de los conceptos matemáticos regidos en este pensamiento, los estudiantes entre los grados cuarto y quinto pueden llegar a representar, describir e interpretar datos empleando tablas y gráficas (gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares); usar e interpretar algunas de las medias de tendencia central, incluso generar conjeturas acerca de los sucesos de distintos eventos y resolver o formular problemas partiendo de un conjunto de problemas.

Cabe resaltar, que el pensamiento aleatorio o probabilístico, ayuda a buscar soluciones razonables, a encontrar claramente los problemas cuya solución no es clara y segura; además permite abordarlos con un espíritu de exploración y de investigación, mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar, y, sobre todo, permite la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. Por tanto, es fundamental que desde muy temprana edad al niño se le debe formar en estos conocimientos, pues el MEN declara que este tema se debe abordar en los primeros grados de escolaridad, sin embargo, los estudiantes no contextualizan muy bien los fenómenos probabilísticos debido a que posiblemente el docente no expuso el tema, o quizás no lo hizo por el poco tiempo de clase.

Batanero (2005), en sus investigaciones menciona que los estudiantes a lo largo de su aprendizaje, se enfrentan a las mismas dificultades que surgieron en el desarrollo histórico del concepto de probabilidad. De igual modo, afirma Benítez, D & Sánchez, E. (1997) que la probabilidad es un concepto que aparentemente es manejado por todos, por personas con y sin altos niveles de escolaridad, pues este tipo de pensamiento ayuda a tomar decisiones, y analizar situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad la vida cotidiana, por falta de información confiable.

Por otro lado, desde el principio de la historia de la educación se han presentado muchos problemas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas, esto es posible a los múltiples factores que se presentan intraescolares como extraescolares. Uno de estos problemas se relaciona con la interpretación de los fenómenos del azar vistos en la probabilidad, pues es un tema que se empieza a tratar desde la primaria, así como lo plantea el Ministerio de educación Nacional (2006) y es la manera en que se aborda, es quizás la generadora de diversas dificultades en la adquisición de nuevos conceptos posteriormente.

De igual modo, De las Fuentes (2008), en sus investigaciones encontró que la mayoría de los alumnos tienen dificultades para resolver problemas que involucran el concepto de probabilidad y en gran medida se debe a las ideas equivocadas; por tanto, esto es lo que permite cuestionar el método de enseñanza porque posiblemente de ahí surgen esas dificultades.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Investigaciones como las de Benítez, D. y Sánchez, E. (1997) evidencian que en los distintos grados escolares los estudiantes describen y clasifican algunas características del pensamiento probabilístico; sin embargo, varios grupos de estudiantes se relacionaron más con el pensamiento determinista, a pesar de haber asistido a varios cursos matemáticos en su formación académica. Así mismo, De las Fuentes (2008), en sus investigaciones a estudiantes del nivel de preparatoria, encontró que las dificultades que los estudiantes pueden tener, va en relación con la resolución de problemas que involucran el concepto de probabilidad y en gran medida se debe a las ideas equivocadas del mismo.

Benítez y Sánchez (1997) en sus trabajos implementaron ciertas preguntas “elementales” que involucran el concepto de probabilidad, con el objetivo de reconocer los métodos de solución empleados por los estudiantes. Para el cuestionario, se tiene en cuenta que algunas preguntas elaboradas en de selección múltiple tienen espacio para que el estudiante justifique su respuesta. Las aplicaciones del cuestionario se realizaron en dos países: Colombia y México; y sus análisis se exponen en unos referentes teóricos donde se explora los obstáculos epistemológicos, presentados no por factores externos al conocimiento sino por factores intrínsecos que producen entorpecimientos y retrocesos en su construcción.

Particularmente, en lo que respecta a la enseñanza de la probabilidad, investigaciones como las de Batanero (2001 y 2005) destacan las ventajas de la simulación en la construcción de modelos los cuales permiten reproducir una situación aleatoria y reducir el experimento a un tiempo y espacio determinado. La autora considera que la simulación es un método universal para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos, por ende, recomienda que el uso de materiales manipulables como dados, monedas etc. son muy importantes en el ámbito del aprendizaje.

Cabe destacar que a lo largo de la historia de la educación, en el aprendizaje de las matemáticas se ha presentado un gran problema reflejado en los grandes índices de reprobación; esto debido a múltiples factores, uno de ellos podría ser que los temas de la estadística y probabilidad se dejan

para estudiar al final del curso, sin embargo, por distintos motivos, en ocasiones no se pueden ver estos temas y no se aterrizan las ideas de los conceptos; por otra parte, se puede decir que otro de los factores se relaciona con la poca importancia que un profesor le da a los conceptos, y deja estos en el aire por ver otros temas de gran relevancia.

En este sentido, pruebas estandarizadas como la Evaluación Nacional del Logro Académico en los Centros Escolares de México (ENLACE, 2007) y en otras pruebas estandarizadas como el tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias (TIMSS,) y el Programa internacional de Evaluación a Estudiantes (PISA) que realiza la Organización de países en desarrollo (OCDE), han demostrado que los estudiantes tienen serias deficiencias en la resolución de problemas ligados al concepto de probabilidad.

Como lo mencionan Ortiz, Batanero, y Serrano, en sus investigaciones, a pesar de que la probabilidad se incluye de una forma oficial en el currículo, no siempre se enseña, y muchos profesores hacen un énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas, en lugar de seguir las directrices actuales que recomiendan el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas y experimentación con fenómenos aleatorios. Los estudios sobre libros de texto indican que es difícil para los profesores encontrar un apoyo para cambiar el enfoque tradicional, ya que éstos presentan a veces una visión sesgada o incompleta del tema (Ortiz, 1999; Cañizares, Ortiz, Batanero, y Serrano, 1998).

Ya que la probabilidad forma parte del currículo, las investigaciones realizadas en contextos educativos específicos aumentan, y son frecuentes aquellas que tratan de evaluar el aprendizaje, tanto a nivel escolar como universitario. Por ejemplo, (Tauber, Batanero y Sánchez (2005)) diseñan una secuencia de aprendizaje basada en el uso de ordenadores, donde los estudiantes adquieren los diferentes elementos del significado de la distribución normal, a partir de resolución de problemas de análisis de datos. La tecnología introduce nuevos significados en los conceptos que se trata de enseñar, y ello lleva también a nuevas formas de evaluación, basadas en trabajos abiertos y tareas complejas de análisis de datos (Batanero, Tauber. y Sánchez, 2005).

Del mismo modo, se han analizado las concepciones espontáneas de los sujetos adultos sobre conceptos estocásticos avanzados (Ruiz, Albert y Batanero, 2006), así como la resistencia de ciertas concepciones incorrectas y heurísticas tras un aprendizaje basado en el cambio conceptual. Otras investigaciones se centran en la evaluación de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de probabilidad, las variables que afectan la dificultad de las tareas y los posibles errores o conflictos en el proceso de resolución; (De las Fuentes (2008)).

El desarrollo de esta propuesta pretende observar las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a la comprensión de los temas propios de la estadística, haciendo uso de las nuevas tecnologías de la informática y la comunicación; un logro que se podría obtener con esta implementación, es el aumento de nivel de abstracción de los estudiantes, lo que conllevara, a un mejoramiento del rendimiento académico en general y en consecuencia, la institución educativa obtendrá mejores resultados en las diferentes pruebas estatales.

1.3 ANTECEDENTES

1.3.1. Antecedentes de Investigación

Existen algunas investigaciones que preceden a la presente, como las elaboradas por Batanero, (2005), Sanchez y Benitez, (1997), Alarcón, Arriaga y Barrón, (2001), Zúñiga (2017), Inzunza (2014), Mera y Santana (2018) y Galindo y Velasco (2019), en las cuales se observan las ventajas de la enseñanza de la probabilidad en el aula de clase, algunas dificultades presentes en los estudiantes, el uso de Geogebra y un acercamiento a la caracterización del Razonamiento Probabilístico, cuando estudiantes de algunos grados, se enfrentan a problemas relacionados con el concepto de probabilidad.

Por ejemplo, Batanero (2005), expresa que la probabilidad muestra dificultades y episodios que en su momento fueron desafiantes, hasta para los matemáticos de la época, las respuestas, soluciones e interpretaciones no fueron inmediatas. Por lo cual, Batanero considera que de la misma manera sucede con los estudiantes, quienes edifican su conocimiento por medio de un proceso gradual, superando así todas las dificultades y errores presentes en el proceso. Además, estudia los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, laplaciano, frecuencial y matemático), resaltando que la enseñanza de la misma no debe limitarse a uno de ellos en general, ya que están enlazados dialécticamente y en la experiencia.

Por su parte, Sanchez y Benitez, (1997) muestran un informe de un proyecto, realizado a estudiantes en varios grados de escolaridad, que tiene como fin detallar y caracterizar el razonamiento de los estudiantes según los niveles de Razonamiento Probabilístico, cuando estos se afrontan a problemas relacionados con el concepto de probabilidad. Con ello concluyen, que la mayoría de los estudiantes consideran que las situaciones están determinadas por el azar, y es imposible predecir los resultados. Algunos otros estudiantes, tratan de explicar el comportamiento de los fenómenos de azar mediante la suerte, aspectos físicos, experiencia o intervención divina, lo que lleva a considerar, que es necesario replantear la manera en la cual se presenta este concepto en el salón de clase, así como las estrategias utilizadas para ello.

Así mismo, Zúñiga (2017) en su tesis de maestría muestra la importancia de abordar el concepto de aleatoriedad con estudiantes de grado cuarto de primaria, por medio de una propuesta educativa

basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), ya que considera que es una noción que se olvida en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, lo cual genera conocimientos incompletos en estas áreas. Zúñiga afirma que la propuesta a pesar de ser muy efectiva para romper una concepción arraigada, hace la invitación de continuar trabajando en este aspecto, con el fin de quedarse en el pensamiento del estudiante y fortalecer la idea de aleatoriedad.

Por otra parte, Mera y Santana (2018) en su trabajo de grado, establecieron como propósito principal identificar el impacto de Geogebra como mediadora en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de grado noveno, como conclusiones y comentarios finales expusieron que el uso de Geogebra como herramienta computacional, permite confrontar las ideas previas que los estudiantes tiene en torno al concepto de probabilidad, con los resultados que obtienen después de explorar los diseños en Geogebra y así obtener sus conjeturas. Además, en su trabajo mencionan que el uso de los diseños elaborados en Geogebra favorece el empleo de diferentes tipos de representación de los fenómenos probabilísticos, lo que permite un acercamiento lúdico, a la resolución de problemas de probabilidad.

Finalmente, Galindo y Velasco (2019) en su trabajo de grado, Documentaron la importancia que tiene la intervención de la mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once, entre los comentarios finales y conclusiones Galindo y Velasco mencionan que el sistema de creencias de los estudiantes, podría constituirse como un obstáculo epistemológico.

En otro sentido, hacia el final del siglo XVIII y principios del XIX se amplía el número de situaciones consideradas aleatorias, incluyendo no sólo los juegos de azar, sino muchos fenómenos naturales. Paralelamente, se produce un cambio en el concepto de aleatoriedad, que se hace progresivamente más formalizado, introduciendo la idea de "independencia", que se considera imprescindible para asegurar la aleatoriedad de un suceso en experimentos repetidos.

Los estudios de Piaget e Inhelder (1951) inician el análisis detallado de las etapas en la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, el razonamiento combinatorio, distribución

y convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de probabilidades en niños y adolescentes. Estos estudios indican que en el estadio pre operacional (4-7 años) los niños rechazan la idea de azar o la conciben de una forma determinista; tienen dificultad para diferenciar certeza e incertidumbre, carecen de estrategias combinatorias y al comparar probabilidades sólo toman en cuenta los casos favorables. En el periodo de las operaciones concretas (7-11) los niños adquieren progresivamente una comprensión del azar, pero aún confían demasiado en la posibilidad de controlarlo. Comienzan a ser capaces de enumerar situaciones combinatorias sencillas, aunque la estrategia no es siempre completa o consistente. Sus estrategias de comparación de probabilidades se amplían, usando tanto los casos favorables como los desfavorables, sin llegar al razonamiento proporcional completo. No llegan a reconocer la ley de los grandes números. Finalmente, en la etapa de operaciones formales (a partir de 12 años) los chicos progresivamente conciben el azar como ausencia de patrones e impredecibilidad, adquieren la intuición de la convergencia, llegan a usar proporciones en la comparación de probabilidades y alcanzan la capacidad de enumeración combinatoria. En este sentido, esto puede ayudar a visualizar en qué tipo de operación concreta se encuentran los estudiantes que se van a analizar como una muestra.

Los trabajos de Green (1983) sintetizan proporcionando un cuestionario, donde recoge versiones de papel y lápiz de las tareas propuestas por Piaget y Fischbein, permitiendo evaluar el desarrollo cognitivo en probabilidad de los chicos de 11 a 16 años; lo que podría permitir diseñar una encuesta diagnóstica para los estudiantes como muestra.

Serrano (1996) ha estudiado la influencia de las creencias previas y concepciones animistas de los niños, su capacidad de percepción de lo aleatorio y comparación de probabilidades. Y la importancia que estos trabajos tienen para los profesores es que permiten seleccionar de una forma racional el tipo de tareas probabilísticas que se pueden proponer a estudiantes en función de su edad. De modo que los instrumentos de evaluación contruidos en su investigación son también útiles para valorar los conocimientos y modos de razonamiento de los alumnos; lo que podría contribuir al análisis de las encuestas diagnosticas desarrolladas a los estudiantes como una muestra.

El uso de la tecnología en los colegios está supuesto para expandir, enriquecer, implementar, individualizar, diferenciar y extender el currículo. Para que los estudiantes vean lo que es difícil de ver en el universo del lápiz y el papel y para que reorganicen su pensamiento.

En este sentido, Kanobel (2010) expone la experiencia de incorporar plataformas virtuales de aprendizaje en los procesos de enseñanza de la probabilidad y estadística de la Regional Avellaneda de la Universidad Tecnológica Nacional durante el ciclo lectivo 2009, esto con el objetivo de contribuir a superar las dificultades de los estudiantes en la construcción del conocimiento razonamiento probabilístico. Lo que permitiría ser una fuente para diseñar hojas de trabajo o actividades de mediación de la enseñanza y el aprendizaje empleando tecnologías. Por otra parte, esto podría ayudar a la elaboración de la entrevista clínica a los estudiantes, para evidenciar las dificultades que poseen los estudiantes y analizar cuáles son las más comunes.

Socas (1997), evidencia las dificultades asociadas a las matemáticas agrupadas en cinco categorías: la complejidad de los objetos matemáticos, los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y, las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Las dos primeras están relacionadas con la misma disciplina, es decir, con los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento; la tercera a los procesos de enseñanza; la cuarta, conectada con los procesos cognitivos de; y la quinta, relacionada con la falta de actitud racional hacia la disciplina de las matemáticas. En este sentido, esto también puede contribuir a la clasificación de las dificultades encontradas a razón de dónde posiblemente radican. ((Batanero, 2005) investigación en didáctica de la probabilidad).

1.3.2 Antecedentes curriculares

Esta sección se caracterizó a partir de la explicación detallada de cada uno de los elementos de la teoría que fueron empleados en el desarrollo de la investigación y poder así dar claridad a todas aquellas definiciones, conceptos y teorías que la enmarcaron.

a) Estándares y lineamientos básicos de competencias en matemáticas.

Los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas (1998), plantean el concepto de pensamiento aleatorio que se quiere desarrollar y promover a los estudiantes y como a partir de las palabras se pueden generar procesos de reflexión y análisis crítico, preparándolo hacia el dominio

de competencias incorporando un saber pragmático e instrumental de las matemáticas, por lo dicho anteriormente, se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo. En la enseñanza enfocada a lograr este tipo de aprendizaje no se puede valorar apropiadamente el progreso en los niveles de una competencia si se piensa en ella en un sentido dicotómico (se tiene o no se tiene), sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales en donde se desarrolla (MEN, 2006).

Ser matemáticamente competente se concreta en el pensamiento lógico y matemático el cual se subdivide en cinco pensamientos: el numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Solo nos ocuparemos del pensamiento aleatorio. Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria (MEN, 2006).

Por otro lado, desde los lineamientos curriculares se pretende que el pensamiento aleatorio aporte herramientas que permitan buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos.

Tabla 1: Representación de los Estándares curriculares de matemáticas para los grados 4° y 5°

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS	
• Represento datos usando tablas y graficas (pictogramas, graficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares)	• Describo de manera cómo parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y lo compara con la

• Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. • Interpreto información presentada en tablas y graficas (pictogramas, graficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares) • Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.	manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos. • Uso e interpreto la media (promedio) y la mediana y comparo lo que indican. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.
---	--

Nota: adaptado de los Estándares básicos de competencias matemáticas (2003)

El azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, como es el caso de los estados del tiempo; de la ocurrencia de los terremotos, huracanes u otros fenómenos de la naturaleza; de los accidentes, fallas mecánicas, epidemias y enfermedades; de las elecciones por votación; de los resultados de dispositivos como los que se usan para extraer esferas numeradas para las loterías y de las técnicas para efectuar los lanzamientos de dados o monedas o para el reparto de cartas o fichas en los juegos que por esto mismo se llaman “de azar” (MEN, 2006).

En las experiencias cotidianas que los estudiantes ya tienen sobre estos sucesos y estos juegos, empiezan a tomar conciencia de que su ocurrencia y sus resultados son impredecibles e intentan realizar estimaciones intuitivas acerca de la posibilidad de que ocurran unos u otros. Estas estimaciones conforman una intuición inicial del azar y permiten hacer algunas asignaciones numéricas para medir las probabilidades de los eventos o sucesos, así sean inicialmente un poco arbitrarias, que comienzan con asignar probabilidad cero (0) a la imposibilidad o a la máxima improbabilidad de ocurrencia; asignar $\frac{1}{2}$ a cualquiera de dos alternativas que se consideran igualmente probables, y asignar 1 a la necesidad o a la máxima probabilidad de ocurrencia (MEN, 2006).

Las situaciones y procesos que permiten hacer un conteo sistemático del número de combinaciones posibles que se puedan asumir como igualmente probables, junto con el registro de diferentes resultados de un mismo juego, así como los intentos de interpretación y predicción de los mismos a partir de la exploración de sistemas de datos, desarrollan en los estudiantes la distinción entre situaciones deterministas y situaciones aleatorias o azarosas y permiten refinar las mediciones de la probabilidad con números entre 0 y 1. Más tarde, esas situaciones y procesos pueden modelarse por medio de sistemas matemáticos relacionados con la teoría de probabilidades y la estadística.

El empleo cada vez más generalizado de las tablas de datos y de las recopilaciones de información codificada llevó al desarrollo de la estadística descriptiva, y el estudio de los sistemas de datos por medio del pensamiento aleatorio llevó a la estadística inferencial y a la teoría de probabilidades. El manejo y análisis de los sistemas de datos se volvió inseparable del pensamiento aleatorio (MEN, 2006).

Los sistemas analíticos probabilísticos y los métodos estadísticos desarrollados durante los siglos XIX y XX se han refinado y potenciado en los últimos decenios con los avances de la computación electrónica y, por ello, hoy día ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos.

Por ello, no es ya necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media o la mediana, la varianza o la desviación estándar, sino avanzar gradualmente en el desarrollo de habilidades combinatorias para encontrar todas las situaciones posibles dentro de ciertas condiciones, estimar si son o no igualmente probables y asignarles probabilidades numéricas, así como en dominar los conceptos y procedimientos necesarios para recoger, estudiar, resumir y diagramar sistemas de datos estadísticos y tratar de extraer de ellos toda la información posible con la ayuda de calculadoras, hojas de cálculo y otros programas de análisis de datos, con

el fin de intentar predecir dentro de ciertos rangos el curso de los acontecimientos respectivos y de tomar decisiones lo más razonables posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar (MEN, 2006).

1.3.3 Pruebas SABER.

a. Características de las pruebas

El propósito de las pruebas SABER 3.º, 5.º y 9.º es contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana mediante la realización de evaluaciones aplicadas periódicamente para monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes de educación básica, como seguimiento de calidad del sistema educativo.

Los resultados de estas evaluaciones y el análisis de los factores asociados que inciden en los desempeños de los estudiantes, permiten que los establecimientos educativos, las secretarías de educación, el Ministerio de Educación Nacional y la sociedad en general identifiquen las destrezas, habilidades y valores que los estudiantes colombianos desarrollan durante la trayectoria escolar, independientemente de su procedencia, condiciones sociales, económicas y culturales, con lo cual, se puedan definir planes de mejoramiento en sus respectivos ámbitos de actuación.

Su carácter periódico posibilita, además, valorar cuáles han sido los avances en un determinado lapso y establecer el impacto de programas y acciones específicas de mejoramiento (ICFES, 2017). A continuación, se muestra la ilustración 1 donde se puede observar cuales son las competencias a evaluar en la prueba saber de 5 grado.

Tabla 2: Competencias evaluadas en el área de matemáticas grado quinto

Comunicación, representación y modelación	Razonamiento y argumentación	Planteamiento y resolución de problemas
Númérico-variacional Reconoce significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros).	Númérico-variacional - Reconoce patrones numéricos. - Justifica propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos. - Reconoce y genera equivalencias entre expresiones numéricas.	Númérico-variacional - Resuelve y formula problemas aditivos de transformación, comparación, combinación e igualación. - Resuelve y formula problemas multiplicativos de adición

• Reconoce diferentes representaciones de un mismo número. • Describe e interpreta propiedades y relaciones de los números y sus operaciones. • Traduce relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.	• Analiza relaciones de dependencia en diferentes situaciones. • Usa y justifica propiedades (aditiva y posicional del sistema de numeración decimal).	repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano. • Resuelve y formula problemas de proporcionalidad directa e inversa. • Resuelve y formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.
Geométrico-métrico • Establece relaciones entre los atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes. • Identifica unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas. • Utiliza sistemas de coordenadas para especificar localizaciones.	Geométrico-métrico • Compara y clasifica objetos tridimensionales y figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes. • Reconoce nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos. Hace conjeturas y verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano. • Describe y argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija. • Relaciona objetos tridimensionales y sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos. • Construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas. Identifica y justifica relaciones de semejanza y congruencia entre figuras.	Geométrico-métrico • Utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes. • Reconoce el uso de las magnitudes y de las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas. • Utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición. • Usa y construye modelos geométricos para solucionar problemas.
Aleatorio • Clasifica y organiza la presentación de datos. Interpreta cualitativamente datos relativos a situaciones del entorno escolar. • Representa un conjunto de datos e interpreta representaciones gráficas de un conjunto de datos. • Hace traducciones entre diferentes representaciones. • Expresa el grado de probabilidad de un suceso.	Aleatorio • Compara datos presentados en diferentes representaciones. • Hace arreglos condicionados o no condicionados. • Hace conjeturas acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.	Aleatorio • Resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones. • Resuelve problemas que requieren encontrar y/o dar significado al promedio de un conjunto de datos. • Resuelve situaciones que requieren calcular la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos.

Se muestra las competencias evaluadas por el icfes en grado quinto según cada uno de los componentes

b. Escala de valoración en las pruebas SABER.

Las pruebas saber se clasifican por cuatro niveles: insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado. Estos niveles tienen que ver con el tipo de dificultad de la pregunta y los saberes previos que debe tener el estudiante para responderlas. Las características generales de cada nivel de desempeño están resumidas en el siguiente cuadro

Tabla 3: Descripción general de los niveles de desempeño

Niveles	Un estudiante promedio ubicado en el nivel
Avanzado	Muestra un desempeño sobresaliente en las competencias esperadas para el área y grado evaluados.
Satisfactorio	Muestra un desempeño adecuado en las competencias exigibles para el área y grado evaluados. Este es el nivel esperado que todos, o la gran mayoría de los estudiantes, debería alcanzar
Mínimo	Muestra un desempeño mínimo en las competencias exigibles para el área y grado evaluados.
Insuficiente	No supera las preguntas de menor complejidad de la prueba.

Se muestra una descripción general de los niveles de desempeño evaluados por el Icfes (2016a) en la prueba saber 5.

c. Resultados en las pruebas SABER nacional

El análisis de este informe tiene en cuenta un cuestionario que responden los estudiantes: Las pruebas incluyen distintas preguntas de selección múltiple que están organizadas en un cuadernillo y contienen preguntas de anclaje para mantenerla comparabilidad con la prueba de 2012.

La gráfica muestra el porcentaje de estudiantes en cada uno de los cuatro niveles de desempeño en cada año. El porcentaje en color rojo hace referencia al nivel insuficiente, naranja al nivel mínimo, amarillo a satisfactorio y verde a avanzado.

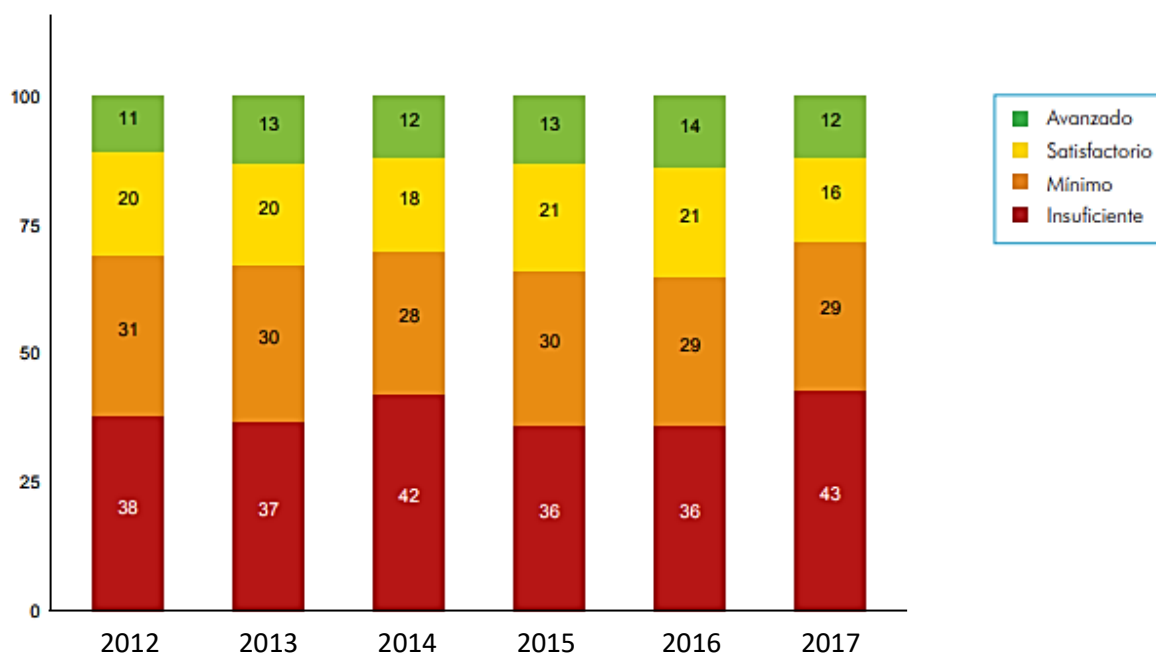


Figura 1. Resultados nacionales en Saber 5°, área de matemáticas. Tomado de: icfes (2017)

Según las pruebas SABER de los últimos años (2012, 2013, 2014, 2015, 2016 y 2017) En grado quinto, el puntaje promedio disminuyó ampliamente entre 2016 y 2017 (alrededor de 7 puntos). Este cambio estuvo relacionado con el resultado por niveles de desempeño, ya que el porcentaje de estudiantes clasificados en el nivel de desempeño insuficiente aumentó 7 puntos.

d. Resultados en las pruebas SABER institucional

De forma particular, con base en las pruebas saber del grado quinto y en los niveles de desempeño de los estudiantes, se presenta a continuación una gráfica que muestra el porcentaje de estudiantes ubicado en cada uno de los niveles de desempeño, en el área de matemáticas de la Institución Educativa Técnica Industrial Pedro Antonio Molina (IETIPAM)

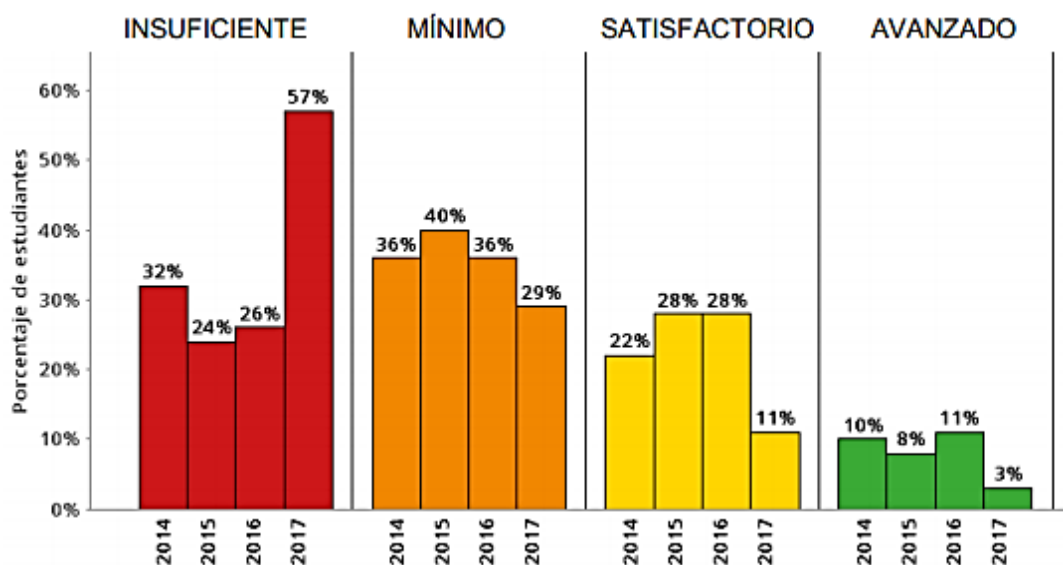


Figura 2. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año en matemáticas en grado quinto (IETIPAM). Tomado de: icfes (2018)

Según las pruebas SABER desde los años 2014 hasta el 2017, se puede observar que en la Institución Educativa (IETIPAM) el porcentaje de estudiantes en nivel desempeño insuficiente y mínimo es mayor al 60% en el área de matemáticas, tomando en consideración que esta prueba contiene elementos de probabilidad, además se puede notar que en el año 2017 se presentó una diferencia del 31% con respecto del año anterior, lo cual representa un aumento significativo en el nivel de insuficiencia. Según Ministerio de educación Nacional (MEN) el estudiante promedio del nivel insuficiente no soluciona preguntas de menos complejidad mientras que en el nivel mínimo el estudiante muestra un desempeño mínimo en las competencias exigibles para el área y grado evaluados. Como puede notarse el estudiante resuelve situaciones problema básicas de menor rigor, pero no elabora una interpretación de conceptos.

4.3 Pensamiento Aleatorio.

El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de

estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (MEN, 2006).

Es importante tener en cuenta que el pensamiento aleatorio está fundamentado en diversos elementos:

- La estadística útil para la vida posterior a la escuela.
- El estudio de esta ayuda al desarrollo personal, fundamentando un razonamiento crítico.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo.
- Permite la comprensión de la estadística.

1.4 OBJETIVOS

1. 4.1 Objetivo general

Analizar las condiciones iniciales respecto a algunas características del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado quinto mediante la intervención tecnológica.

1. 4.2 Objetivos específicos

- a. Analizar las características iniciales del pensamiento aleatorio en estudiantes de 5 grado.
- b. Estudiar el nivel de razonamiento probabilístico que tienen los estudiantes de grado quinto con relación al concepto de probabilidad.
- c. Documentar el papel que juega el uso de la tecnología en la resolución de problemas que incluyen el concepto de probabilidad.

1.5 Preguntas de Investigación

1.5.1. Pregunta central

¿Qué características debe tener el proceso de aprendizaje en la resolución de problemas de probabilidad con la mediación tecnológica en estudiantes de grado 5?

1.5.2. Preguntas auxiliares.

Pregunta 1. ¿Cuáles con las características iniciales del pensamiento aleatorio en estudiantes de 5 grado?

Pregunta 2. ¿Qué características deben tener las actividades para propiciar el aprendizaje del concepto de probabilidad?

Pregunta 3. ¿Qué papel juega el uso de la tecnología en la resolución de problemas que incluyen el concepto de probabilidad?

CAPÍTULO II

2.1 MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se propone el marco teórico y marco conceptual que se estructura para dar los fundamentos que apoyan esta investigación. Así mismo, se hace una descripción del contexto en donde se elabora, y se habla del desarrollo histórico de la probabilidad junto con Tecnología digital, el desarrollo de la probabilidad en Colombia, definiciones que tienen algunos autores acerca de la probabilidad junto con los lineamientos curriculares y los resultados de las pruebas saber para el grado 5 del año (2017), además los elementos de partida que ayudan a dar respuesta a los objetivos de esta investigación.

2.1. Contexto histórico

Estudios históricos han evidenciado que la probabilidad se remonta a la época antes de Cristo, donde los Sumerios y Asirios usaban como juego de azar elastralago o talus¹ y era considerado precursor del dado. Por otro lado, en la civilización egipcia, encontraron algunas pinturas en las tumbas de los faraones en el cual mostraban el talus como tableros para el registro de resultados.

En los tiempos del Imperio Romano hasta el Renacimiento, el uso del hueso talus, permitió que los juegos con dados se practicaran sin interrupción como "hazard"²(no se conocen registros de las reglas de juego), el cual fue introducido en Europa, da las raíces etimológicas del término y provienen de la palabra árabe "al-azar", que significa "dado" sin embargo, posteriormente en el "Purgatorio" de Dante, el término aparece ya como "azar".

La probabilidad tiene sus raíces en el siglo XVII, aproximadamente el año 1654, cuando Pierre Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623- 1662) comienzan a aplicar métodos matemáticos para resolver problemas de juegos de azar con cartas y dados; no obstante, algunos estudiosos marcan el inicio de la probabilidad con Cardano, cuando escribió en 1520 el libro de los juegos de Azar³,

¹Talus: hueso extraído de animales como: ovejas, ciervos o caballos. y era tallado para que pudiera caer en cuatro posiciones, conocido como el dado más antiguo

²Juego de dados de origen inglés con más de 800 años de antigüedad y que podría ser el antecesor del actual "pase inglés", por el cual ha sido remplazado.

³Aunque no fue publicado hasta más de un siglo después, sobre 1660

ante la publicación de este libro se inicia a elaborar una teoría aceptable sobre los juegos. Permitiendo que el cálculo de probabilidades tuviera un notable desarrollo.

Ahora bien, considerando que el pensamiento aleatorio se fundamenta directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria, es importante conocer que la institucionalización de la estadística y la probabilidad en la educación colombiana es relativamente nueva, tuvo un proceso lento, pero gratificante hoy en día, pues eso da pie al reconocimiento de los aportes de personajes, situaciones y pensamientos en el país; en este sentido, es importante conocer cómo fue ese surgimiento de la estadística y la probabilidad en Colombia, qué fue eso que dio pie a la institucionalización, y cuál es el panorama de la enseñanza de ella en las escuelas.

En este orden de ideas, la estadística en el país se incorpora ante la necesidad de aplicar estrategias estadísticas a otros campos como la industria, los gobiernos, los negocios, etc. Cabe resaltar que, la estadística y la probabilidad han estado presentes en las distintas maneras de organización política y económica a través de tres etapas fundamentales: la pre-conquista, la colonia y la república.

En estas etapas se puede vislumbrar el avance que la estadística ha podido experimentar; en este sentido, el progreso de estas va desde la llegada de los españoles que generó una gran influencia desde el panorama de una sistematización de datos como una necesidad de los diferentes sectores sociales; pues se conoce usaban expolios⁴, alboroto u obtención de bienes; pasando a efectuar registros estadísticos del número de soldados y respectivas identificaciones, impulsando a investigar los primeros censos en Santafé (Bogotá, Colombia); y continuando a crear la primera oficina General de Estadística, lo que posibilita grandes avances en la sistematización de una política pública, ya que empezaron a haber informes probabilísticos anuales en cuanto al comercio exterior, la economía nacional, la organización de datos del transporte ferroviario y marítimo, las estadísticas de salud, y la creación del Departamento Administrativo Nacional De Estadística (DANE) en 1953.

⁴ Expolios: registros que dieran cuenta del cálculo de la quinta parte de los bienes del sacerdote después de su fallecimiento y que respectivamente iban a manos del rey de esa época

En efecto, las sistematizaciones de datos iniciales y los avances en las reformas educativas de otros países, fueron la iniciativa para involucrar la probabilidad y a estadística en la educación superior, la cual puede situarse en varios escenarios, uno de ellos se sitúa con Julio Garavito, en el interés por el cálculo de los seguros de vida; lo que le permitió crear su artículo en el año 1903 titulado: Cálculo de Primas y Reservas según E. Dormoy para la Compañía Colombiana de Seguros. Esto a su vez, da pie en el año 1914 según Charry (1954) a que el Congreso de la República de Colombia exija un curso obligatorio de estadística para la Universidad Nacional en las facultades de Derecho y Ciencias políticas, con el fin de abrir mejor camino a unas estadísticas aplicadas en el país (Notas de clase curso seminario historia de la probabilidad, 2017).

En 1978 se crea el primer programa maestro de estadística, en 1958 Luis Thorin Casas fundó el Instituto de Estadística en la Universidad Nacional, que fue la base para que en 1959 se desarrollara el primer programa de licenciatura en estadística. Seguido a esto, en 1978 se ofrecieron dos programas; además, en la Universidad Nacional De Medellín se ofreció la licenciatura en Matemáticas y Estadística de la Universidad pedagógica y tecnológica de Colombia. Hacia 1998, la Universidad Nacional de Colombia ofrece un programa de doctorado en estadística. Todo esto fue lo que poco a poco pudo impulsar a integrar programas con esta disciplina en muchos lugares del país. Álvaro López Toro fundador del departamento de matemáticas de la Universidad del Valle, contribuye a crear la primera carrera de probabilidad y estadística en Colombia, en la Universidad Nacional, que duraba tres años. Posteriormente ayuda a crear la facultad de Estadística en la Universidad de Medellín en 1962 y en 1979 la creación de la carrera de Estadística de la Universidad del Valle por Daniel Arbeláez (Notas de clase curso seminario historia de la probabilidad, 2017).

Así pues, todo esto contribuyó para incentivar la implementación de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en las escuelas, que fuera siendo cada vez más explícita, con la colaboración de los lineamientos curriculares de 1998; pues estos plantean al pensamiento aleatorio como uno de los conocimientos básicos de los estudiantes, sin embargo, la implementación de actividades que desarrollen este pensamiento, deben tener un seguimiento sigiloso, ya que, algunos de los profesores en matemáticas no cuentan con conocimientos en didáctica de la estocástica, y generalmente, las dificultades y procesos de aprendizaje dentro de las

otras áreas del conocimiento se trasladan a la disciplina de la probabilidad y la estadística, generando más dificultades.

2.2 Contexto matemático

En 1998 un excelente grupo de personas interesadas en la calidad de la educación, produjeron los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas; en los cuales, el pensamiento matemático se dimensionó desde diversos pensamientos, entre el que se encuentra el pensamiento aleatorio acompañado de los sistemas de datos. Por lo que, el carácter sistémico que se les da a las matemáticas, para el caso en particular de los sistemas de datos.

Así pues, en la resolución 2343 de 1996 (5 de Junio), se establece un diseño de lineamientos generales de procesos curriculares del servicio público educativo y los indicadores de logros curriculares para la educación formal; desde este sentido, los lineamientos se organizan de acuerdo a grados de estudio y los pensamientos matemáticos a desarrollar. En las mismas líneas de estudio se genera un gran interés por involucrar en las escuelas una formación estadística teniendo como referente a que ella y la probabilidad van de la mano, pues, para formar personas íntegras y con capacidad crítica de razonamiento, no se debe priorizar una más que otra.

Esto permitió la introducción para la construcción de los Estándares básicos de Competencias en Matemáticas del 2006, los cuales refuerzan los lineamientos curriculares, de ahí que los estándares para el grado escolar como objeto de estudio, centrándose en la probabilidad plantean que:

Grados cuarto a quinto:

- Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
- Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

De acuerdo al interés de este estudio, el plan del grado cuarto y quinto, establece que un estudiante está en capacidad de decidir situaciones que sean posibles de ocurrir, además puede

tener una visión subjetiva que le permita interpretar la realidad de eventos o fenómenos aleatorios los cuales tienen gran trascendencia en la vida cotidiana del hombre.

De ahí que es fundamental que los estudiantes vean en la probabilidad, estrategias que sirvan en la resolución de problemas. Además, los Estándares Básicos de Competencias (2006) propenden por una enseñanza de las matemáticas más cercana a la realidad donde se ofrezca una educación para todo tipo de alumnos. Al mismo tiempo, incorpora fines sociales asociados a un mayor conocimiento y competitividad en un mundo laboral que depende en su mayoría de las nuevas tecnologías. También pretende que los estudiantes se conviertan en sujetos activos frente a las coyunturas político-sociales del país rescatando la formación en los valores democráticos, de tal forma que su conocimiento matemático le permita tomar decisiones amparadas en conceptos formales.

Desde el concepto de la probabilidad Carranza y Fuentealba (2010) plantean la existencia de su dualidad desde el punto de vista de lo epistemológico y de la aleatoriedad. La primera se relaciona con la idea más personal que se tiene, con lo subjetivo; mientras que la segunda responde a la estadística, a las leyes estocásticas, es la que más se emplea; esta estima una visión frecuentista de la probabilidad desde la teoría logicista.

Los actores afirman que la probabilidad desde el significado *frecuencial* es más apropiada a la enseñanza debido a la conexión que tiene con la estadística.

Desde otro ángulo, muchos de los libros de estadística están enfocados en la presentación de fórmulas, el uso del cálculo y el álgebra para los procedimientos estadísticos enfocados en la probabilidad; por lo cual, se puede decir que, en la educación superior la formación estadística ha estado orientada matemáticamente, las situaciones presentadas son ideales para los problemas, es decir, los problemas no corresponden a problemas de la vida real, aunque los especialistas de la disciplina se enfocan en contextos gubernamentales y comerciales y no, en la resolución de problemas, por ello, Gómez, Ortiz y Gea (2014) afirman que Godino, Batanero y Cañizares (1987) aconsejan en la educación primaria usar de forma intuitiva situaciones cotidianas del niño; que vaya asignando valores a las probabilidades, y que posteriormente sean evaluadas de acuerdo con nuevas experiencias.

En este sentido, abordando la probabilidad desde lo *frecuencial*, y coincidiendo como un suceso que está definido como *el cociente del número de casos favorables (cantidad de elementos de un evento) entre el número de casos posibles (cantidad de elementos del espacio muestral)*, es importante reconocer:

- **Experimento aleatorio:** Sucesos que se llevan a cabo a raíz de una observación, donde no es posible conocer con anterioridad que va a suceder, es decir a priori no se puede saber que ocurrirá.
- **Espacio muestral:** La totalidad de resultados posibles de un experimento aleatorio (S)
- **Evento:** Subconjunto del espacio muestral cuyos elementos tienen una característica en común (A).

Probabilidad: Es denotada por $P(A)$

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de } A}{\text{Casos totales } S}$$

Si dados dos eventos A y B disjuntos ($A \cap B = \emptyset$)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si dados dos eventos A y B NO disjuntos ($A \cap B \neq \emptyset$)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por otro lado, el desarrollo del pensamiento matemático se han podido evidenciar en los diferentes grados escolares dificultades que radican en el macro sistema educativo (culturas, religión, Estado, etc.), pero se concretan en el microsistema educativo (estudiante, profesor, materia e institución educativa) tal como lo menciona Socas (1997), así pues, manifiesta que las dificultades pueden ser analizadas desde varias perspectivas: desde el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de las matemáticas, y los métodos de enseñanza. Cabe mencionar que, las dificultades se concretan en forma de obstáculos en la práctica, y en los estudiantes se manifiestan en forma de errores.

Ahora bien, como el objetivo de esta investigación es analizar las condiciones iniciales respecto a algunas características del pensamiento aleatorio de los estudiantes del grado quinto mediante la intervención tecnológica, centrado en lo que planea Martín Socas de estas en el aprendizaje de las

matemáticas, se dice que, su naturaleza es de “diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas” (Socas, 1997); en este sentido, éstas se agrupan en cinco categorías, asociadas a: la complejidad de los objetos matemáticos, los procesos de pensamiento matemático, los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Por lo que Socas establece que, las dos primeras están relacionadas con la misma disciplina, es decir, con los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento; la tercera a los procesos de enseñanza; la cuarta, conectada con los procesos cognitivos de; y la quinta, relacionada con la falta de actitud racional hacia la disciplina de las matemáticas.

Así pues, en las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, se tiene en cuenta que, como la comunicación de los objetos matemáticos se da con el empleo de signos matemáticos con el empleo de un lenguaje natural que favorezca la interpretación, en este sentido, se pueden generar diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, pues su significado se da, “por alusión o asociación”, teniendo en cuenta que el lenguaje de las matemáticas, está sometido a reglas y no expresa significados, excepto por la interpretación de los signos. Cabe mencionar que, otro problema que radica en el lenguaje de las matemáticas, se da con el vocabulario habitual, ya que palabras como: raíz, potencia, producto, factor, integral, etc. tienen diferente significado en el vocabulario matemático, en este sentido, el uso de esas palabras podría generar ciertas dificultades con la “confusión semántica”.

Otra de las dificultades en la complejidad de los objetos matemáticos, se origina con la confusión de los conceptos, por lo que es necesario involucrar transposiciones didácticas de esos conceptos usando un lenguaje diario, cosa que quizás “oscurece” el significado propio del objeto matemático, como, por ejemplo: decir simplificar en vez de reducir fracciones o expresiones algebraicas.

En las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, se tiene en cuenta que, éstas se desarrollan en la “naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático”. Cabe mencionar que, una de las dificultades del aprendizaje en esta disciplina es el “aspecto deductivo formal”, cosa que en la secundaria se deja de lado el pensamiento lógico, lo que origina una de las más grandes

dificultades. Por otro lado, los modelos aplicados en las matemáticas generan ciertas dificultades, en el hecho de que esos modos de pensamiento no son aplicados a modos analógicos.

Respecto a las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, se dice que están desarrolladas con las relaciones de la institución escolar, el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza; esto, en vista de la falta de materiales curriculares, los recursos y estilos de enseñanza; aparte de eso, desde el currículo las dificultades están en las “habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que defienden las competencias de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares”; y desde los métodos de enseñanza, que están relacionados con la organizaciones de las instituciones escolares y las curriculares.

Por el lado de las dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes, se dice que las dificultades son evidenciadas a través de la información acerca de la naturaleza de los procesos de aprendizaje y el conocimiento del desarrollo intelectual; y desde, las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, se dice que esos sentimientos de tensión y miedo hacia las matemáticas, es lo que genera dificultades desde los estudiantes, cosa que se incrementa con la actitud de los profesores de ésta disciplina, sus estilos de enseñanza, y creencias de la misma; añadido a esto, la ansiedad y el miedo.

2.3 Niveles de pensamiento probabilístico

Para Benítez & Sánchez (1997), el concepto de probabilidad puede ser manejado por cualquier persona tenga o no tenga un nivel de escolaridad, aunque llegado el momento de resolver algún tipo de problema, se presentan varios errores, dificultades u obstáculos que no permitirán llevar a cabo la realización del problema.

Sánchez y Benítez (1997), plantean que el pensamiento probabilístico de los estudiantes se clasifica en diferentes niveles que van desde la impredicción hasta el pensamiento formal matemático y de rigor. Sin duda alguna este referente teórico será de gran utilidad para el presente

trabajo, ya que dará la pauta para el diagnóstico y el diseño de actividades didácticas que se pretenden implementar.

Tenemos los siguientes niveles:

a) Impredicción

En este nivel se encuentran los sujetos que en situaciones aleatorias consideran imposible predecir resultados. Por ejemplo, cuando se le cuestiona a una persona si al lanzar simultáneamente dos monedas. ¿Qué es más probable, obtener resultados iguales – dos caras o dos sellos – o diferentes – una cara y un sello? y responde que es imposible saberlo porque es al azar.

b) Determinístico:

En esta categoría corresponden las personas que atribuyen a causas poderosas los resultados de una situación azarosa. Estas causas pueden ser de diferentes tipos: físicas, empíricas o mítico-mágicas. Por ejemplo, al preguntarle a una persona la causa de que en una rifa ganó el primer premio quien tenía el número 1234. Si contesta que por trampa se le considera determinista físico; si dice que nunca salen premiados los números con cifras consecutivas es determinista empírico; si su respuesta es que se debe a la suerte o al destino es determinista mítico-mágico.

c) Mecánico

En este grupo se encuentran las personas que utilizan algoritmos de manera incorrecta como resultado de un aprendizaje memorístico, carente de significado. Por ejemplo, al preguntar a un alumno cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo se obtenga sello y un tres, y un alumno contesta que $\frac{1}{8}$ porque la probabilidad de obtener sello es de $\frac{1}{2}$ y de que caiga un tres en el dado es de $\frac{1}{6}$ entonces,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

En este caso se desconoce la regla del producto y, además, la suma de fracciones es incorrecta, por lo tanto, está contestando mecánicamente.

d) Pre-rigor

En este nivel se encuentran los estudiantes que han desarrollado parcialmente la capacidad para encontrar todos los resultados, ya que aún tienen dificultades en las técnicas de conteo. Por ejemplo, cuando una persona considera que al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, el evento de obtener un cuatro es equiprobable al de obtener un cinco porque las combinaciones que dan estos resultados son las siguientes:

Para cuatro: $1 + 3, 2 + 2$

Para cinco: $1 + 4, 2 + 3$

En este caso, aunque el alumno identifica algunas combinaciones, no logra identificarlas por completo, motivo por el cual se le clasificaría en este nivel de razonamiento.

e) Rigor

En este nivel se agrupan las personas que utilizan eficientemente las diferentes representaciones de un problema, y que además son capaces de argumentar correctamente sus procedimientos de solución. Retomando el ejemplo anterior, se consideraría en el nivel de rigor al individuo que conteste correctamente al identificar todas las combinaciones posibles:

Para cuatro: $1 + 3, 2 + 2, 3 + 1$

Para cinco: $1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1$

y determine que la probabilidad de obtener un cuatro es de $\frac{3}{36}$ o $\frac{1}{12}$ y para un cinco es de $\frac{4}{36}$ o $\frac{1}{9}$.

Además, sería capaz de representar el espacio muestral con un diagrama de árbol o una tabla de dos entradas e identificar el número de casos favorables en el experimento aleatorio.

1.3. Algunos aportes en la resolución de problemas

En el marco de trabajo se recurre a algunos autores que han aportado sus investigaciones en la resolución de problemas, entre ellos se halla el más distinguido y pionero de este estudio; Polya, seguido por Schoenfeld. En cada uno de sus estudios se comparten investigaciones similares.

2.3.1 Aportes de Polya

El trabajo de Polya (1965) constituido en su libro “cómo plantear y resolver problemas” introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas. El primero de estos pasos es denominado como: entender el problema, el segundo de ellos es: Configurar un plan, el tercero: Ejecutar el plan y el último paso es: Mirar hacia atrás.

Según (Benítez, 2006) en el primero de los pasos, el entendimiento del problema se debe esclarecer los datos, las incógnitas y las condiciones del problema, además de resolver interrogantes como ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la solución? ¿Distingues cuáles son los datos?

En la configuración de un plan hay que buscar relaciones entre los distintos datos que presenta el problema, para ello es de vital importancia las estrategias heurísticas, que Polya (citado por Pochulu y Rodríguez, 2015, p.156) define como “el estudio de medios y métodos para la resolución de problemas”. Algunos ejemplos de dichas estrategias son, pensar en un problema similar, particularizar la situación, dividir el tema en sub- temas y usar gráficas que permitan modelar los datos del problema, Usar un modelo, Resolver un problema similar más simple.

En la ejecución del plan Polya establece es poner en marchas el procedimiento que cada individuo ha creado basado en los ítems anteriores, además de Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.

Por último, en el paso conocido como mirar hacia atrás, se busca que el estudiante compruebe su respuesta, encuentre soluciones más sencillas, explore caminos más cortos y lleve sus soluciones a la generalización sus resultados.

2.3.2 Aportes de Schoenfeld

En su trabajo “Mathematical Problem Solving” (Schoenfeld, 1985), se reconocen las características del trabajo de Polya. Pero extiende el componente práctico, es decir tal investigación se apoya en el estudio de otros resolutores de problemas matemáticos. Schoenfeld, en su trabajo manifiesta que la escuela y el aula de clase deben ser una copia de la cultura propia del estudiante.

Schoenfeld (1985) delimita la resolución de problemas en cuatro dimensiones: la primera de ella son las heurísticas, la segunda está relacionada con los recursos, la tercera es el control y por último el sistema de creencias del estudiante.

En este orden, se muestran a continuación cada una de las cuatro dimensiones:

Heurísticas: está relacionado con las estrategias que utiliza cada resolutor al momento de abordar un problema, ejemplo de ello es: particularizar, realizar un diagrama, entre otros. Schoenfeld (1985) (citado por Benítez, 2006) presenta algunas preguntas y sugerencias en torno al desarrollo de heurísticas para llevar a cabo la resolución de un problema, algunas de ellas son:

¿Puedes pensar en un problema análogo, un poco más accesible?

¿Puedes enunciar el problema en forma diferente?

¿De qué manera se pueden cambiar los datos o las condiciones en las que está redactado el problema?

Recursos: según está relacionado con la fusión de conocimientos matemáticos que posee el estudiante, los cuales le pueden servir para la resolución de problemas. Algunas herramientas mencionadas por Schoenfeld (1985) son los teoremas y definiciones, conocimientos informales, algoritmos, entre otros.

Control: se refiere a la forma en que un estudiante examina y encuentra el camino para solucionar su trabajo. Esta se enfatiza en el esquema y las estrategias que pueden servir para la solución de un problema. Dichas estrategias pueden ser mejores en algunos

problemas que en otros, de manera que el estudiante debe estar en la capacidad de elegir el mejor camino para encontrar la respuesta.

Sistemas de creencias: son las ideas que un estudiante tiene de las matemáticas, estas juegan un papel importante a la hora de solucionar un problema. Tales creencias se hacen fuertes en la etapa escolar y en parte se deben al contexto social en que se desarrolla el sujeto, así pues, las creencias determinan la escogencia de una u otra heurística para resolver un problema.

2.4 Tecnologías digitales y su uso en la educación matemática

Las tecnologías de información se definen como un medio electrónico que facilita la creación, distribución y manipulación de datos que permite hacer diversas actividades como lo son resolución de problemas, investigaciones en las distintas disciplinas y la comunicación con otras personas.

Las tecnologías digitales empezaron en la mitad del siglo XIX con el telégrafo eléctrico cuyo contenido eran letras y números, más tarde se desarrolló el teléfono, la revolución electrónica iniciada en la década de los 70 constituye el punto de partida para el desarrollo creciente de la Era Digital. Los avances científicos en el campo de la electrónica tuvieron dos consecuencias inmediatas: la caída vertiginosa de los precios de las materias primas y la preponderancia de las Tecnologías de la Información (Information Technologies) que combinaban esencialmente la electrónica y el software.

Los nuevos contextos tecnológicos y la necesidad de mejorar la calidad de las ofertas educativas en todos los niveles de la enseñanza fundamentan la necesidad de incorporar las TICs a las situaciones educativas, aunque son herramientas con un funcionamiento difícil pero fácil de utilizar. Conforme a cómo pasan los años, cada vez hay muchos recursos electrónicos los cuales facilitan muchos accesos a diversas áreas por lo cual deben de estarse innovando para oferta del público.

Existen diversos factores que tienen una influencia directa sobre el proceso de integración de las Tecnologías Digitales. Políticas y proyectos institucionales que doten de recursos y dinamicen

la integración de las TIC en la educación. Centros facilitadores del proceso que alienten y promuevan la innovación a través de las Tecnologías Digitales. Profesores innovadores formados en Tecnologías Digitales y en su uso pedagógico. Todos estos factores tienen gran importancia, pero para M. Grané (1997) "la importancia del apoyo institucional a los centros escolares debe centrarse cada vez más en el apoyo a maestros y alumnos. Más allá de la dotación de recursos, existen, por un lado, necesidades de formación del profesorado que deben ser resueltas, y, por otro, cuestiones relativas al diseño y la producción de materiales válidos para los procesos de enseñanza y aprendizaje

Actualmente, el uso de la tecnología en la educación se ha vuelto trascendental en lo relacionado a los diferentes sistemas de representación, para Benítez (2006) las herramientas tecnológicas ofrecen un potencial que ayuda a los estudiantes, en la discusión de ideas matemáticas y la edificación de nociones.

En cuanto a las funcionalidades didácticas de las TICs, Poveda y Murillo (2003) afirman que las estas dentro de la educación matemática no solo se refieren a las calculadoras y computadoras; en los cuales se pueden hacer innumerables programaciones y graficaciones de funciones que facilitan la aprehensión del alumno. Programas informáticos como: Sage, Genius, Scilab, Geogebra entre otros, facilita y permiten al estudiante concebir el conocimiento disminuyendo los tiempos de aprendizaje, y ampliando la dimensión de algunos conceptos por medio de la modelación de la realidad.

El presente trabajo incorpora la herramienta tecnológica GeoGebra con el fin de crear un enlace con los fenómenos aleatorios, permitiendo a los estudiantes desenvolverse en un contexto como lo es el tecnológico y que esta les beneficie en la construcción del concepto de probabilidad, a partir de los diferentes sistemas de representación que permite esta herramienta. Además, debido a que GeoGebra es un programa que permite a los estudiantes desarrollar problemas relacionados con la aritmética, álgebra, geometría, entre muchos, también permite la interacción que ayuda al estudiante a organizar sus estructuras cognitivas.

Con la introducción de la tecnología en el currículo, Benítez (2006) menciona dos aspectos importantes cuando se trata de involucrar la tecnología en el aula de clase, tales aspectos son:

- a) Al involucrar la tecnología en un currículo determinado, esta hará el papel de amplificador, logrando una evolución que dará como resultado la reorganización cognitiva.
- b) Cuando la tecnología es aceptada en la edificación de conocimiento, se elabora un vínculo diferente en lo relacionado a las preguntas y la solución de problemas, con lo que será posible pensar en creaciones o transformaciones que sufrirá el currículo a causa de la introducción de la tecnología en la enseñanza.

Benítez (2006) certifica que los ambientes computacionales ofrecen una visualización conceptual, además de ofrecer diversos medios de representación que son asequibles a la observación. A partir de ello el estudiante estará posibilitado a elegir un método de solución de problemas en el cual se desenvuelva mejor y no simplemente en el método del lápiz y papel el cual es un instrumento válido, pero que no ofrece diferentes posibilidades en la construcción de conceptos y conocimientos.

Del mismo modo Galindo y Velazco (2019) mencionan que implementar la tecnología en el aula posibilita la comprensión de conceptos, y además que las herramientas computacionales son de gran ayuda para los docentes y estudiantes, debido a que permiten evidenciar aspectos que no eran posible sin la herramienta.

2.5. Geogebra

The Institute International GeoGebra (2018) reconoce a GeoGebra como un software de matemáticas dinámicas el cual es apropiado en diversos niveles y ramas de la matemática como lo son geometría, calculo, álgebra, estadística. Etc. GeoGebra es el software líder en matemáticas dinámicas y además ha cambiado la manera como se enseña y aprende en todo el mundo, favoreciendo la educación en ciencias, tecnología e ingenierías.

El uso y aplicación de geogebra tiene múltiples utilidades, por ejemplo, en probabilidad GeoGebra permite al estudiante enfrentarse a un mismo problema desde diferentes sistemas de representación como tabulaciones, graficas, funciones, simulación de experimentos, mientras qué de la geometría, permite la construcción de diversas figuras geométricas. Desde un punto, hasta figuras más trabajadas, triángulos, polígonos, entre otros.

CAPITULO III

3.1 METODOLOGÍA

En este capítulo se realizará una descripción de la metodología usada en el trabajo de investigación, los sujetos que hicieron parte del estudio, herramientas e instrumentos usados para la recolección de datos y análisis, materiales, hojas de trabajo y entrevistas clínicas.

Cabe mencionar que, una metodología no necesariamente se lleva a cabo con cada uno de los ítems propuestos, sino que eso varía dependiendo lo que se quiera estudiar y los instrumentos que se tengan para ello. En este sentido, tomando como referencia la propuesta de estudio de Rivas (2009) en su tesis; para esta investigación se plantea:

3.1.1. TIPO DE ESTUDIO

Este estudio se realiza mediante un enfoque mixto, el cual consiste en emplear las metodologías cuantitativas y cualitativas. Desde esta perspectiva, se utilizan las fortalezas de ambos tipos de enfoque combinándolas y tratando de minimizar sus debilidades potenciales. Implica la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos. Realiza inferencias, producto de toda la información recabada logrando un entendimiento del fenómeno bajo estudio.

Con el enfoque mixto se logra una perspectiva más precisa del fenómeno, se involucran varios diseños en el mismo estudio y la multiplicidad de observaciones produce datos más ricos y variados.

Para esto se debe tener en cuenta, la pregunta de investigación, describir diseño mixto apropiado de los instrumentos, realizar un pilotaje de prueba, recoger la información o datos, análisis e interpretación de datos.

3.1.2. Descripción de la institución (PEI)

La aplicación de la propuesta didáctica se realizó en la Institución Educativa Industrial Pedro Antonio Molina sede Vencedores. Se encuentra ubicada en la ciudad de Cali, Valle del Cauca en la comuna 6 más específicamente ubicada en el barrio San Luis II, Carrera 1A 4- No. 72D – 19, La institución cuenta con 7 sedes así: Central, Jorge Eliecer Gaitán, San Jorge, San Luis, Atanasio Girardot, Los Vencedores, Tres de Julio, Inmaculada Concepción. La institución promociona estudiantes técnicos en alguna de las siguientes: Mecánica Industrial, Dibujo Técnico, Química

Industrial, Electricidad- electrónica, Sistemas. La capacidad de atención escolar es de 1200 estudiantes, la cantidad de personal administrativo es 8, y el número de profesores 20.

3.1.2.1. Principios y fundamentos institucionales

La Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina pertenece al sector oficial y ofrece servicios educativos con el propósito de acceder al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura para el desarrollo humano desde la primera infancia hasta grado once. Bajo esta idea es caracterizada como una institución de excelencia, resultado de la eficacia de su política de calidad, de la articulación con el sector productivo, de la gestión de recursos y de las alianzas y convenios con entidades y organizaciones.

El proyecto Educativo de la institución menciona que:

“La IETIPAM se encuentra ubicada en la comuna 6, en el nororiente de la ciudad, en esta comuna habitan 166.906 habitantes que corresponden al 8,2% del total de la ciudad, en un área que corresponde al 4,1% de la misma lo que indica una de las densidades más altas de Cali, el estrato más común es el 2 y presenta una asistencia escolar del 70,1% (Alonso, Solano, Vera & Gallego, 2007)”.

También se procura que los estudiantes y padres de familia atiendan a un modelo cuas-conservador en medio de una sociedad que permite la transgresión de los derechos de algunas personas, basados en la libre expresión y demás cuestiones propias del siglo XXI. Es por eso, que la autoridad (entendida como: Hacer crecer) es un concepto necesario para que se mantenga un orden dentro y fuera de la Institución, así que la familia debe contribuir para que se logre tal fin.

3.1.2.2. Perfil de los estudiantes

La institución se ha convertido en eje transformador de la realidad social. Su principio es fortalecer los valores humanos, éticos y morales de convivencia pacífica y democrática. El estudiante debe caracterizarse por ser una persona líder con valores y conocimientos, responsable, reflexiva, gestora de paz, promotora de actitudes, honesta, creativa, investigadora, comprometida con la protección del Medio Ambiente, y con sentido de pertenencia con la Institución.

3.1.2.3. Enseñanza de las matemáticas en la institución

Se propone la utilización de metodologías activas y constructivistas. Luego se emplean metodologías como Proyectos, Aprendizaje Colaborativo y Aprendizaje basado en problemas.

Ésta última, permea en gran medida la enseñanza de las matemáticas porque permite desarrollar el pensamiento crítico, imaginativo y reflexivo, y desarrollar habilidades cognitivas, metacognitivas y aprendizaje colaborativo.

Algunas ventajas de esta metodología basada en problemas son:

- Desarrolla en los estudiantes actitudes positivas para enfrentar problemas en un contexto real.
- Posibilita la adquisición de un conocimiento integrado.
- Desarrolla habilidades cognitivas para el análisis y la síntesis de la información y habilidades sociales para el trabajo en equipo.
- Desarrolla la capacidad de aprender por cuenta propia.

3.1.3. FASES

3.1.3.1. Diseño

Esta investigación consta de cinco fases: diseño, validación, uso de la tecnología, recolección y análisis. Las cuales son pertinente especificar ya que son útiles para identificar la incidencia de GeoGebra en el avance del razonamiento probabilístico por parte de los sujetos de estudio.

Tabla 2 *Características esenciales en cada una de las etapas de la investigación*

Diseño	Validación	Uso de la tecnología	Recolección	Análisis
- Selección de actividades	-Revisión por parte de expertos	-Descripción de GeoGebra	-Aplicación del diagnóstico	-Cuantitativo
- Diagnóstico	-Rediseño de hojas		-Aplicación de las hojas de trabajo	-Cualitativo
-Hojas de trabajo			-Elaboración de entrevistas clínicas	

Se muestra las características esenciales en cada una de las fases de este proceso de investigación, (diseño, validación, uso de la tecnología, recolección, análisis) especificando las actividades a seguir en ellos.

a. Encuesta diagnóstica

El instrumento de diagnóstico se realizó con el propósito de identificar el nivel de dominio al iniciar el estudio de conocimientos y habilidades sobre el manejo del concepto de probabilidad en estudiantes de quinto grado.

Este estudio permite trazar la línea base, para identificar el estado inicial de los estudiantes, antes de hacer la intervención didáctica.

Las actividades del estudio diagnóstico fueron tomas de dos fuentes:

- b. Los cuadernillos de las pruebas SABER 5°.
- c. El libro electrónico IXL Learning

Las características del instrumento son las siguientes:

- a. Consta de 12 preguntas, de las cuales ocho preguntas son de selección múltiple y con un espacio para justificar cada una de las respuestas.
- b. Se incluyó la opción “No sé” en las primeras seis preguntas, para que los estudiantes en un gesto de honestidad no intenten adivinar la respuesta y eso tenga repercusión en el análisis.
- c. La pregunta 7 y 8 está diseñada para identificar algunas concepciones asociadas a situaciones que requieren la toma de decisiones

- d. Las preguntas 9, 10, 11, 12 son preguntas abiertas que tienen como propósito conseguir información acerca del sistema de creencias que poseen, el uso de amuletos y significado de la suerte.
- e. Para contestar la encuesta, los estudiantes deben tener nociones básicas acerca de la probabilidad.

b. Hojas de trabajo.

Las hojas de trabajo son actividades de mediación entre la enseñanza y el aprendizaje, que promueven la resolución de problemas de probabilidad con la mediación de las tecnologías digitales. Para esto es necesario construir recursos digitales.

Además del recurso digital, las hojas de trabajo contienen un problema, preguntas y espacios en blanco para que los estudiantes los completen con sus respuestas construidas a partir de la interacción con el computador y utilizando diferentes registros semióticos de representación como el lenguaje natural, las tablas y las gráficas.

Características de las hojas de trabajo

c. Las entrevistas clínicas.

De acuerdo a los resultados obtenidos en las hojas de trabajo, se seleccionarán estudiantes para practicarles entrevistas clínicas semi-estructuradas.

Este instrumento se realiza con el propósito de entender las soluciones de los problemas realizadas por los estudiantes y para profundizar y entender de mejor manera dichas soluciones.

Las entrevistas serán practicadas de manera individual en sesiones video-grabadas con la autorización de los padres de familia.

3.1.3.2. Pilotaje

Una vez realizada la encuesta de diagnóstico se pretende proceder a pilotear las siguientes finalidades:

- a. Conocer el nivel de los estudiantes.
- b. Identificar los problemas que pudieron presentarse en la redacción.
- c. Establecer un tiempo determinado para contestar el instrumento.

d. Plantear la manera de analizar la información de manera mixta en cuanto a los resultados obtenidos.

Es necesario mencionar que la mayoría de los problemas propuestos se basaron en preguntas cerradas de selección múltiple con única respuesta y otras se toma la decisión de dejarlas abiertas en las que se les pedía a los estudiantes responder de acuerdo a los conceptos adquiridos.

La encuesta piloto será aplicada al grupo 5-12 en la Institución Educativa Industrial Pedro Antonio Molina, debido a que esta se encontraba en posiciones inferiores a nivel local, según los resultados mostrados por el Icfes (*ver apartado 1.3.3.d*), bajo la dirección del profesor, la encuesta se pretende que sea desarrollada en un tiempo de 30 minutos de manera individual para evitar comunicación entre los estudiantes.

3.1.3.3. Recolección de la información

La recolección de datos es importante, ya que de esta se estudia, se analiza y se procesa la información que se consigue en cada una de las actividades que integran la propuesta didáctica.

Los datos se tomaron de diversas fuentes:

- a.** Las encuestas de diagnóstico y encuesta final, así como las hojas de trabajo.
- b.** Filmaciones de clase, tomas fotográficas las cuales posibilitan analizar las condiciones en las que se desarrolla el trabajo durante la implementación de la propuesta didáctica.
- c.** Entrevistas clínicas videograbadas.

Condiciones de aplicación de hojas de trabajo

Cada una de las hojas de trabajo se aplicará en un tiempo de 70 minutos, dividido en dos partes, primera parte contestada en grupos con la ayuda del lápiz y papel y la segunda parte, de manera individual con la ayuda de la tecnología computacional, la actividad tecnológica de la pirinola fue tomada del trabajo propuesto por Adolfo Galindo Borja (2017) subido a la plataforma de Geogebra, la cual es tomada y modificada a nuestro interés de estudio. La metodología de trabajo en cada una fue la siguiente:

- a.** En el salón de clases se entregará, a cada uno de los estudiantes, una copia de la primera parte de la actividad para ser respondida de manera grupal sin uso de tecnología digital.

- b. Se dará las indicaciones correspondientes para responder la actividad, resaltando en que escribieran con lapicero, con el objetivo de contar con evidencias legibles e ideas fructíferas de los estudiantes.
- c. Mediante un proyector se les explicará el programa para el uso tecnológico.
- d. Los estudiantes, individualmente, contestaran la actividad durante un tiempo suficiente apoyándose en el uso de la tecnología.
- e. Se recogerá la segunda parte de las hojas de trabajo contestadas.

3.1.3.4. Análisis de resultados

Una vez recolectada la información, se analizará en términos mixtos, A partir de estos resultados se posibilitará la oportunidad de contestar las preguntas de investigación que dieron pie a el presente proyecto de grado; además, evaluar el impacto de las actividades didácticas implementadas en el aprendizaje de los estudiantes.

CAPITULO IV

4.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Después de organizar los datos, estos se analizan en términos mixtos para posibilitar la oportunidad de contestar las preguntas de investigación que dieron pie a el presente proyecto de grado, además, determinar si está en condiciones de evaluar el impacto de las actividades didácticas, implementadas en el aprendizaje de los estudiantes de grado quinto. Este capítulo está elaborado de la siguiente manera: en primer lugar, se presentan los resultados del diagnóstico, posteriormente se analizan cada una de las hojas de trabajo, y para cada uno de los casos, la información es presentada en tablas y gráficas, así mismo, se incorporan evidencias de las respuestas de los estudiantes a las actividades planteadas. Por otra parte, se muestra la transcripción de algunos fragmentos de entrevistas clínicas de los estudios de casos considerados.

Finalmente, se realiza un análisis comparativo del diagnóstico y las hojas de trabajo para tener una idea clara del impacto de la propuesta, así como lo pertinente de las actividades a lápiz y papel y del uso de tecnología.

4.1.1 ANÁLISIS DE LA ENCUESTA DIAGNÓSTICA

En esta sección se describen las características presentadas en la encuesta de diagnóstico, y por medio del análisis de algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, se ejemplifican los recursos, estrategias y representaciones que emplearon los estudiantes en su resolución. Además, se hace referencia a los aspectos que se pretenden identificar, tales como la independencia, la equiprobabilidad y el sistema de creencias que poseen los estudiantes con relación al azar. Esto, teniendo en cuenta los objetivos planteados para la encuesta diagnóstica, y las condiciones de aplicación.

Lo anterior, permite realizar tanto un análisis cuantitativo como cualitativo, que son complementados por fragmentos de algunas entrevistas clínicas. Esto, da origen a una serie de comentarios finales.

4.1.1.1 Presentación de la actividad

La encuesta (ver anexo 1) permite explorar las ideas que tienen los alumnos con relación al significado de la probabilidad, la dependencia e independencia de eventos, la equiprobabilidad y la no equiprobabilidad, así como también, el conocimiento del algoritmo para calcular la probabilidad simple o compuesta, el tipo de representaciones que utilizan en la resolución de problemas, y por supuesto, el sistema de creencias involucrado. Para lograr este objetivo, se presentan 12 preguntas, cada una con una finalidad, y agrupadas de la siguiente manera:

- A. Cálculo de la probabilidad simple: preguntas 4 y 6.
- B. Cálculo de probabilidad compuesta (eventos equiprobables y no equiprobables): 1 y 5
- C. Identificar la proporcionalidad (eventos equiprobables) en experimentos aleatorios: 2 y 3
- D. Reconocer eventos independientes: 7 y 8
- E. Sondear las características del sistema de creencias: 9, 10, 11, 12

Hay que aclarar que la clasificación anterior no es limitada, ya que algunas preguntas pueden involucran dos o más propósitos de los anteriores. Para ejemplificar lo anterior, a continuación, se muestran y se analizan algunos de los problemas aplicados en el diagnóstico.

En la sexta pregunta se plantea:

Se lanza un solo dado, Luis gana si saca un número par y Ana gana, si saca un número impar. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

- a) Tiene más probabilidades de ganar Luis.*
- b) Tiene más probabilidades de ganar Ana.*
- c) Los dos tienen la misma probabilidad.*
- d) No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir.*
- e) No sé.*

El propósito esencial de este problema es que, a partir del cálculo de la probabilidad simple de dos eventos y su comparación, se llegue a la conclusión de que se trata de eventos equiprobables.

Una de las estrategias para resolver el problema es calcular la probabilidad de cada uno de los eventos. Por ejemplo, se conoce que el dado tiene seis caras, así que, la probabilidad de sacar un

número par es $\frac{3}{6}$, cuya fracción al ser simplificada da como resultado $\frac{1}{2}$, que es la misma probabilidad de sacar un número impar, por lo tanto, es un evento equiprobable.

Otras preguntas del diagnóstico tienen como propósito fundamental identificar creencias asociadas a la probabilidad. Por ejemplo, en la pregunta número 12 se cuestiona lo siguiente:

Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar. ¿A qué crees que se debe esto?

En esta pregunta se exploran las concepciones que tienen los estudiantes alrededor del concepto de azar, así como las causas a las que atribuyen los resultados de experimentos aleatorios.

OBJETIVOS

Uno de los objetivos fundamentales del diagnóstico es estudiar las características que deben tener las actividades para propiciar el aprendizaje del concepto de probabilidad y así, identificar los errores, dificultades y creencias erróneas que tienen los estudiantes. Unido a esto, y considerando que el proyecto de investigación consiste en identificar algunas características, que debe tener el proceso de enseñanza-aprendizaje para la fundamentación en la resolución de problemas de probabilidad con la mediación tecnológica, en el diagnóstico, es sumamente importante identificar las ideas previas de los estudiantes con relación a las experiencias probabilística.

De esta manera, la encuesta se toma con un punto de partida para el diseño de las hojas de trabajo, además, los resultados obtenidos en el diagnóstico constituyen parámetros de referencia para evaluar el impacto del presente trabajo en el aprendizaje de los estudiantes.

CONDICIONES DE APLICACIÓN

La encuesta de diagnóstico contiene doce preguntas, ocho de los cuales son de selección múltiple. Sin embargo, hay que enfatizar que en cada una de las preguntas se dejó espacio para que los estudiantes justificaran sus respuestas, lo cual se recalcó al momento de explicar las instrucciones para responder el instrumento.

La actividad se contestó de manera individual, en un tiempo de 45 minutos, y fue aplicada al grado 5-12, de la Institución Técnico Educativo Pedro Antonio Molina (Sede Vencedores), el cual está formado 15 hombres (46.875%) y 17 mujeres (53.125%) con edades que oscilan entre los 9 y los 12 años, pero en su mayoría, tienen 11 años.

4.1.1.2 Análisis cuantitativo

La presente encuesta diagnóstica está conformada por ocho preguntas asociados a distintos aspectos de la probabilidad, y también se incluyen cuatro problemas que involucran la concepción acerca de la suerte, los amuletos y situaciones relacionadas con el azar. Estos últimos, tienen como propósito fundamental obtener información referente al sistema de creencias que tienen los estudiantes, pues como lo señala Schoenfeld en Santos (1992), esta es una de las dimensiones que influyen en la forma que los estudiantes resuelven problemas.

En el siguiente esquema se muestra el porcentaje de respuestas correctas en las primeras ocho preguntas de selección múltiple en la encuesta.

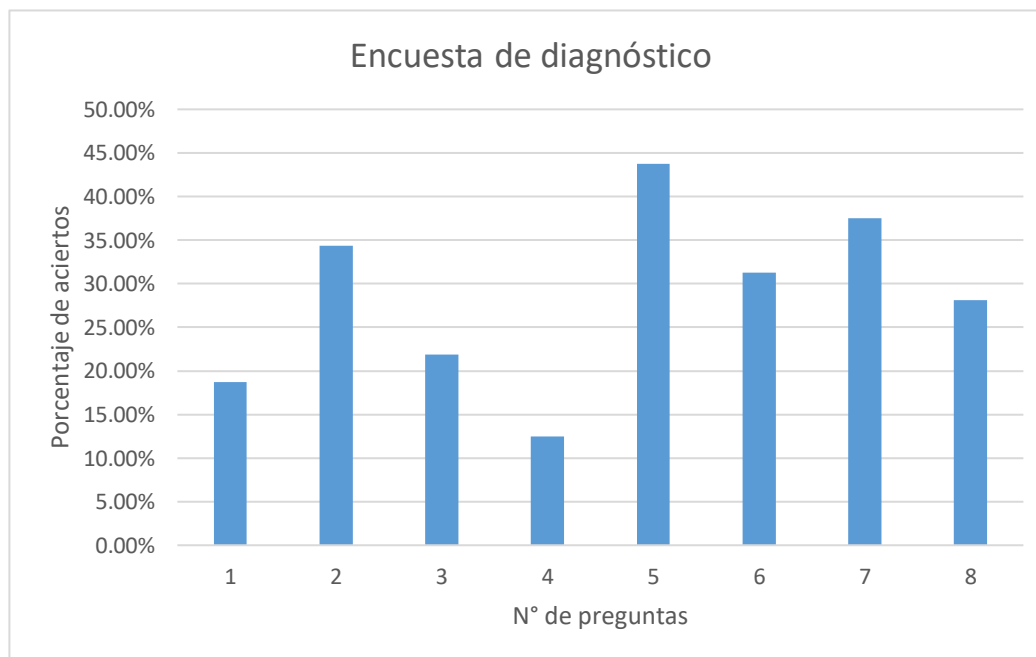


Figura 1: Porcentaje de respuestas correctas en las preguntas de selección múltiple de la encuesta aplicada en el presente trabajo de grado. (Elaboración propia).

Tal como se puede observar, el rendimiento de los estudiantes es extremadamente bajo. Tan solo en las preguntas cinco y siete se obtuvo un porcentaje ligeramente superior al 35% de respuestas correctas (43,75% y 37,50%, respectivamente), mientras que en el resto se logró una proporción inferior al 34%.

Por otro lado, las preguntas con resultados más bajos fueron la uno con un 18,75% y la cuatro con un 12,50%. Para ilustrar esto, a continuación, se muestran y analizan dichas preguntas.

Tabla 3: *Problemas de la encuesta diagnóstica con menor porcentaje de acierto.*

Preguntas	Pregunta con menor porcentaje de respuestas correctas	Porcentaje de aciertos
1	En el juego de parkes se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Juan es un estudiante de grado quinto y está jugando parkes con sus amigos. A Juan le faltan dos fichas para acabar el juego una a 7 puntos de terminar y la otra ficha a 5 puntos de terminar. Al lanzar los dos dados que es más probable que salga:	18,75%
4	Juan juega con una pirinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación: Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO”, “PON DOS”. ¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer girar la pirinola, salga en la cara de arriba “TODOS PONEN”?	12,50%

Se muestran las preguntas con menor porcentaje de respuestas correctas por parte de los estudiantes que realizaron la encuesta

Para contestar la primera pregunta es indispensable conocer el espacio muestral, y, por ende, todas las combinaciones posibles de resultados. Para ello, se puede emplear la regla de producto, un diagrama de árbol, o bien, una tabla de dos entradas como la siguiente:

Tabla 4: posibles resultados para obtener los números planteados en la pregunta de la encuesta

			DADO 2					
			NÚMEROS					
			1	2	3	4	5	6
DADO 1	NÚMEROS	1	1 + 1	2 + 1	3 + 1	4 + 1	5 + 1	6 + 1
		2	1 + 2	2 + 2	3 + 2	4 + 2	5 + 2	6 + 2
		3	1 + 3	2 + 3	3 + 3	4 + 3	5 + 3	6 + 3
		4	1 + 4	2 + 4	3 + 4	4 + 4	5 + 4	6 + 4
		5	1 + 5	2 + 5	3 + 5	4 + 5	5 + 5	6 + 5
		6	1 + 6	2 + 6	3 + 6	4 + 6	5 + 6	6 + 6

A partir de esta información se tiene que el espacio muestral consta de 36 resultados posibles, en cuatro de ellos se obtiene una suma igual a cinco puntos (1+4, 2+3, 3+2, 4+1), con una probabilidad de $\frac{4}{36}$. En seis combinaciones una suma igual a siete puntos (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1), cuya probabilidad es de $\frac{6}{36}$, mayor que la suma de cinco puntos.

No obstante, otra manera de calcular el espacio muestral es utilizando la regla del producto, sabiendo que cada dado tiene 6 caras, entonces los resultados posibles son $6 \cdot 6 = 36$ en total.

En lo que respecta a la pregunta cuatro de la encuesta, basta con identificar la equiprobabilidad de los eventos, ya que todos tiene la misma probabilidad de ocurrir $\frac{1}{6}$, esto debido a que la pirinola tiene seis caras y al lanzarlo solo puede salir una de esas caras.

A continuación, se analizan los problemas que se contestaron con mayor porcentaje de respuestas correctas.

Tabla 5 Problemas de la encuesta diagnóstica con mayor porcentaje de acierto

Pregunta	Pregunta con mayor porcentaje de respuestas correctas	Porcentaje de aciertos
5	En un colegio de Cali, la evaluación de inglés de los estudiantes constan de dos pruebas, una de escritura y otra oral. La evaluación se aprueba si la suma de ambas es mayor que 60, es decir, al sumar los puntos de las dos pruebas, el resultado debe ser mayor a 60.	43,75%
7	Usted va a comprar una rifa y le ofrecen el número 111. ¿Usted compraría ese número?	37,50%

A pesar de que las preguntas cinco y siete no deberían generar ningún grado de dificultad, los resultados fueron poco favorables, pues solo se obtuvo un porcentaje de 43,75%.

Para contestar la pregunta cinco solo basta con saber leer e interpretar un diagrama de barras para así entender que nos trata de decir la gráfica, además, identificar el número de puntos que obtuvo cada estudiante en las pruebas, y al haber identificado esto, se debe sumar los puntos resultantes e identificar quién tenía mayor probabilidad de pasar la evaluación de inglés.

Respecto al problema siete, tuvo un porcentaje de aciertos (37.50%), sin embargo, es un resultado muy bajo. Este problema tiene por objeto identificar ideas erróneas, concretamente en situaciones que requieren la toma de decisiones, como comprar determinado número para una rifa como es en este caso. La solución correcta al problema es que sí se compraría el boleto, ya que todos tienen la misma probabilidad de ganar, es decir, $\frac{1}{1000}$, siendo la probabilidad de obtener el premio, independientemente si las cifras son iguales o consecutivas.

Una vez analizados los problemas con menor y mayor porcentaje de aciertos, y para tener una idea precisa y global de los resultados cuantitativos del diagnóstico, en la siguiente tabla se muestra el resultado de las respuestas, por opción, a los primeros ocho problemas planteados (que abarca selección múltiple). La solución correcta es señalada por medio de un sombreado de la celda correspondiente. En cada celda se muestran dos valores: el número superior indica la cantidad de alumnos en términos absolutos y el inferior en términos porcentuales.

Tabla 6 Resumen de las ocho preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica

Preguntas	Opciones de respuesta para cada pregunta						
	a	b	c	d	e	f	No contestó
1	6 18,75%	10 31,25%	8 25,00%	4 12,50%	4 12,50%		
2	9 28,13%	10 31,25%	11 34,38%	2 6,25%			
3	8 25,00%	14 43,75%	7 21,88%	3 9,38%			
4	2 6,25%	4 12,50%	2 6,25%	2 6,25%	22 68,75%		
5	2 6,25%	2 6,25%	2 6,25%	14 43,75%	2 6,25%	9 28,13%	1 3,13%
6	7 21,88%	5 15,63%	10 31,25%	8 25,00%			2 6,25%
7	12 37,50%	18 56,25%					2 6,25%
8	6 18,75%	8 25,00%	9 28,13%	4 12,50%	4 12,50%		1 3,13%

Es esencial destacar que el sistema de creencias en torno a los resultados de experiencias aleatorias subyace en los estudiantes al momento de resolver problemas asociados a la probabilidad. Por tal motivo, se cuestionó explícitamente a los estudiantes acerca del uso de amuletos (pregunta n° 11), encontrándose que un 37,50% de los estudiantes encuestados admitieron utilizarlos. En la siguiente gráfica se muestran estos resultados.

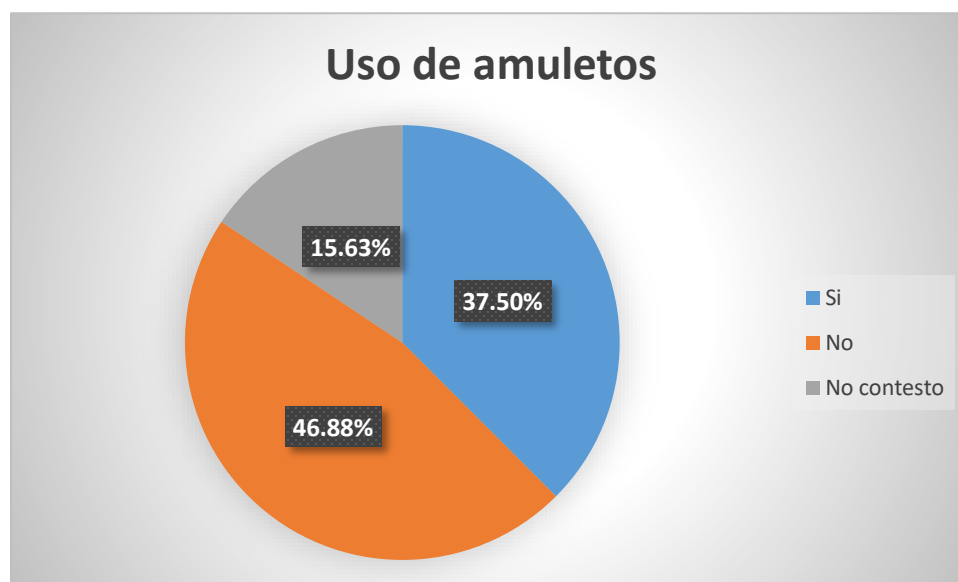


Figura 2 Grafico del uso y creencia de amuletos y/o supersticiones. (Elaboración propia).

A continuación, se muestran algunas de las explicaciones que dieron los estudiantes respecto al uso de amuletos:

Por ejemplo, Hellen comentó lo siguiente:

11) ¿Haz utilizado amuletos?

☒ A. Si

B. No

Explica cuál y para qué:

mi abuela para que a los niños
no les de ojo les pone un cordón negro

En cambio, Erick contestó:

11) ¿Haz utilizado amuletos?

A. Si

☒ B. No

Explica cuál y para qué:

no porque la suerte no la da Dios

Por otro lado, personas que no comprendieron el sistema de creencias.

11) ¿Haz utilizado amuletos?

A. Si

☒ No

Explica cuál y para qué:

La amuleta es cuando una persona le
caloran un yeso y anja con eso

Como se puede observar, no todos los estudiantes han utilizado amuletos, y otros no entendieron el concepto, sin embargo, aquellos que afirmaron usarlo, hacen referencia a diversas supersticiones que influyen notablemente en la resolución de problemas vinculados a la probabilidad.

4.1.1.3 Análisis cualitativo

La información cuantitativa no proporciona datos suficientes para un estudio especificado, así que es indispensable plantear aspectos cualitativos de la investigación. Por esta razón, en este capítulo se realiza una categorización de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes a cada uno de los problemas planteados en el diagnóstico, y se toman como referencia los niveles de razonamiento probabilístico sugeridos por Benítez y Sánchez (1997).

De acuerdo a los resultados globales obtenidos en el diagnóstico, la clasificación de las respuestas formuladas por los alumnos en la escala del razonamiento probabilístico se muestra en la siguiente gráfica:

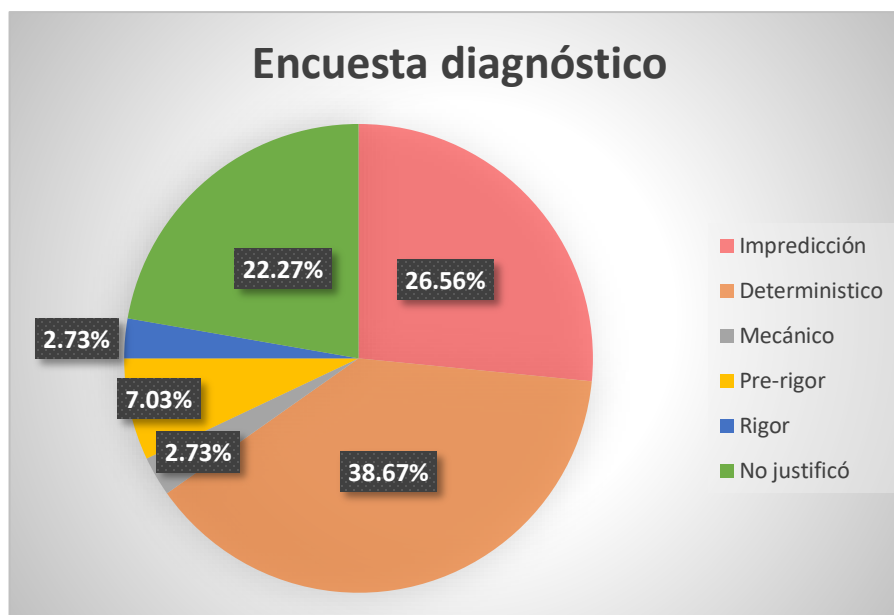


Figura 3 Gráfica general del análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica. (Elaboración propia).

De acuerdo a la información anterior, en el grupo de estudiantes predomina el pensamiento determinista con un (38.67%), le sigue el de impredicción con un (26.56%). Además, un porcentaje muy elevado (22.27%) de las respuestas no se justificaron. El nivel mecánico alcanzó un (2.73%), en tanto, en los niveles de pre-rigor y rigor solo se llegó a un (7.03%) y un (2.73%), respectivamente. Evidentemente, estos resultados reflejan un deficiente desempeño de los estudiantes en materia de probabilidad, lo cual representa una justificación más para la implementación de la propuesta didáctica.

Es preciso señalar que el análisis anterior se obtuvo de las justificaciones de cada una de las respuestas, y se detectó que los argumentos de un mismo estudiante se ubican en diferentes niveles del pensamiento probabilístico, aunque existe tendencia hacia un nivel determinado.

La información presentada en la gráfica anterior muestra resultados generales del pensamiento probabilístico del grupo en su conjunto, sin embargo, para tener datos más precisos, en la siguiente

tabla se muestra la clasificación que se hizo de las respuestas a cada uno de las primeras ocho preguntas

Tabla 7. *Análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica.*

N° de pregunta	Niveles de razonamiento probabilístico					
	Impredicción	Determinístico	Mecánico	Pre-rigor	Rigor	No justificó
1	16 50,00%	7 21,88%	1 3,13%	4 12,50%		4 12,50%
2	14 43,75%	16 50,00%				2 6,25%
3	10 31,25%	17 53,13%	2 6,25%			3 9,38%
4	3 9,38%	1 3,13%	2 6,25%		1 3,13%	25 78,13%
5	1 3,13%	5 15,63%		6 18,75%	5 15,63%	15 46,88%
6	14 43,75%	8 25,00%	2 6,25%	3 9,38%	1 3,13%	4 12,50%
7	10 31,25%	18 56,25%		2 6,25%		2 6,25%
8		27 84,38%		3 9,38%		2 6,25%
Total	68 26,56%	99 38,67%	7 2,73%	18 7,03%	7 2,73%	57 22,27%

De acuerdo al análisis cuantitativo presentado en la sección anterior, la pregunta con mayor porcentaje de aciertos fue el cinco (43.75%), no obstante, al clasificar las justificaciones correspondientes, se tiene que un (15.63%) es de tipo determinista. Esta situación es un claro ejemplo de la importancia que tiene compaginar las investigaciones de corte cuantitativo con las de tipo cualitativo.

Para mostrar al lector un panorama general y objetivo de los diversos niveles de razonamiento probabilístico, a continuación, se presentan algunas evidencias de las respuestas de los alumnos.

En el nivel de impredicción que trata sobre los estudiantes que contestan: no se puede predecir el resultado, se muestran los siguientes dos ejemplos:

1. El estudiante Erick Brando contestó la segunda pregunta de la siguiente manera:

2. Una persona juega con una moneda a cara y sello. Esta persona ha realizado tres lanzamientos y todos han salido en cara. Selecciona una de las siguientes opciones:
- a. En el cuarto lanzamiento es más probable que salga CARA.
 - b. En el cuarto lanzamiento es más probable que salga SELLO.
 - ☒ c. No se puede predecir cuál de las dos opciones anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
 - d. No sé.

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

porque yo no puedo ver el futuro

El 34,38% de estudiantes escogieron esa respuesta y de las justificaciones realizadas, un 43,75% corresponde a un nivel de impredeción. El argumento que emplea el estudiante es característico de las personas catalogadas en este nivel, en el cual atribuyen al azar la imposibilidad de predecir resultados ya que no pueden ver ni saber que pasa en el futuro.

En esta pregunta muchos estudiantes para sus respuestas, se dejaron llevar por el planteamiento del problema y escogieron la opción a, explicando que, si ya había salido cara, nuevamente iba a salir cara.

2. La estudiante Hellen Julieth contestó la tercera pregunta de la siguiente manera:

3. Un estudiante de grado quinto toma un chinche de la cartelera y empieza a jugar con este, lo lanza hacia arriba y quiere ver como cae:

Forma A



Forma B



Selecciona una de las siguientes opciones:

- A. Es más probable que salga de la FORMA A.
- B. Es más probable que salga de la FORMA B.
- ☒ C. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- D. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

porque es probable que caiga de las 2 formas

Un 21,88% de estudiantes escogieron esa respuesta y de las justificaciones realizadas, un 31,25% corresponde a un nivel de impredeción. El razonamiento escrito por la estudiante Hellen, tal parece que vincula a la probabilidad con la seguridad de conocer de antemano el resultado del experimento, ya que no se atreve a decir cómo puede caer el chinche y ve como opción, que cualquiera de las dos puede ser cierta. Esta idea influyó, sin duda alguna, en forma determinante en su respuesta, lo cual pone de manifiesto su sistema de creencias.

En lo relativo al nivel determinista

❖ **En el nivel determinista:** Se puede dividir en varios tipos, conocidos como:

- Mítico: considera la suerte, brujería como respuesta.
- Mágico: Un ser sagrado que influye en el azar.
- Física: Debido a la fuerza, peso, posición.
- Experiencia básica: cuando por cosas que han pasado, creen que nunca puede ocurrir ese evento.

A continuación, se muestra, algunos ejemplos que evidencia este nivel de razonamiento en las respuestas obtenidas por los estudiantes:

1. Jhon Emerson contestó la pregunta tres de la siguiente manera:

3. Un estudiante de grado quinto toma un chinche de la cartelera y empieza a jugar con este, lo lanza hacia arriba y quiere ver como cae:

Forma A



Forma B



Selecciona una de las siguientes opciones:

- ☒ A. Es más probable que salga de la FORMA A.
- ☐ B. Es más probable que salga de la FORMA B.
- ☐ C. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- ☐ D. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Más probable que caiga así por que tiene más peso

El 25,00% de estudiantes escogieron esa respuesta y de las justificaciones realizadas, el 53,13% corresponde a un nivel de determinista. La justificación que expresa el estudiante Jhon Emerson es del tipo determinista físico al considerar el peso como influyente en la forma que caiga el chinche y ve más probable que el chinche caiga de la forma A que la forma B.

2. Nuevamente Jhon Emerson contesta la pregunta 9 de siguiente manera:

8. Si una persona gana el premio mayor del Baloto, y meses después lo vuelve a ganar, es por:

- a) Por suerte.
- b) Bendición del cielo.
- c) Por pura coincidencia.
- d) Porque hubo trampa.
- e) Otro Brugeria

Explicación: Por que no es proboble tanta suerte

El 12,50% de estudiantes tomaron otra opción como respuesta y de las justificaciones realizadas, un 84,38% corresponde a un nivel de determinista. Este argumento es del tipo mítico y es una clara muestra del papel que juega el sistema de creencias en la resolución de problemas ya que no considera la suerte como evento favorable, sino una creencia que se escucha de generación en generación.

3. Juan Sebastián contestó la pregunta siete de la siguiente manera

7. Usted va a comprar una rifa y le ofrecen el número 111. ¿Usted compraría ese número?

SI _____ No X

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

No por que nunca esta el número 111

Un 56,25% de estudiantes escogieron esa respuesta y de las justificaciones realizadas, un 56,25% corresponde a un nivel de determinista. La justificación que expresa el estudiante Juan

Sebastián es considerada en experiencia básica, ya que al decir que nunca está el número 111 lo asocia a que nunca ha visto que una persona gane con ese número y por lo cual considera que no saldrá este.

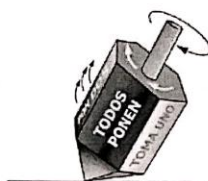
Es importante mencionar que en esta pregunta más del 50% de los estudiantes se ubicaron en el nivel determinista, este nivel se encuentra ubicadas las personas que, en situaciones aleatorias, consideran que los eventos ocurren por causas poderosas que los rigen, lo cual refleja, la influencia del sistema de creencias que en este caso resulta erróneo. Respecto a la solución correcta, la respuesta es la opción SI, es decir, que, si a una persona le ofrecen ese número, si debería comprarlo. Esto se debe a que todos los boletos tienen la misma probabilidad $\left[\frac{1}{1000}\right]$, y además, se trata de eventos totalmente independientes.

En lo relativo al nivel mecánico

- ❖ **El nivel mecánico:** Se presenta cuando se logra visualizar acertadamente el espacio muestral, pero se equivoca, esto se evidencia en el siguiente ejemplo:

1. La estudiante Eliana respondió la pregunta de la siguiente forma:

4. Juan juega con una pirinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación:



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO” y “PON DOS”.

¿Cuál es la probabilidad, de que al hacer girar la pirinola salga en la cara de arriba: “TODOS PONEN”?

(a) $\frac{1}{5}$

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Son seis frases entonces pueden salir seis pero ya salió una entonces quedan cinco opciones

En este ejemplo se muestra cómo la estudiante logra identificar el número de casos posibles, pero al momento de asignar el valor de la probabilidad, asemeja que la cantidad posible son cinco debido que ya obtuvo una al lanzar la pirinola, lo cual es incorrecto.

El 6,25% de estudiantes escogieron esa respuesta y de las justificaciones realizadas, el 6,25% corresponde a un nivel de mecánico, es preocupante que más del 50% no justificaron ni tuvieron idea de cómo responder esta pregunta, entonces debido a esto se ve que es primordial realizar una hoja de trabajo.

La respuesta correcta es la opción b $\left(\frac{1}{6}\right)$, ya que el número de casos favorables es uno y el espacio muestral está compuesto por 6 caras.

❖ **El nivel pre-rigor:** se encuentran ubicadas las personas que, en situaciones aleatorias, dan argumentos matemáticos, pero se equivocan.

1. El estudiante Antuan San Martin contestó la pregunta uno de la siguiente manera

1. En el juego de parqués se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Juan es un estudiante de grado quinto y está jugando parqués con sus amigos. A Juan le faltan dos fichas para terminar el juego, una a 7 puntos y la otra ficha a 5 puntos.
Al lanzar los dos dados, que es más probable que salga:
 - a. Siete puntos
 - b. Cinco puntos
 - c. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir
 - d. Imposible saberlo
 - e. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Juan le faltan para acabar una a 7 la otra ficha a 5 de terminar sumas el 7+5 que sale los dados y son 12 y los dos eventos anteriores tienen la misma.

En este ejemplo a pesar de que la opción es incorrecta, el estudiante quiso argumentar matemáticamente, pero lo hace de forma equivocada, debido a que plantea una suma con las fichas 7 y 5 respectivamente y al sumarlas obtiene 12, por eso dice que tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces se evidencia que no logra visualizar por completo ni tampoco se asigna un valor a la probabilidad.

- ❖ **El nivel rigor:** Se encuentran ubicadas las personas que, en situaciones aleatorias, utilizan eficientemente las diferentes representaciones de un problema, además argumentan correctamente el procedimiento de solución.

1. El Erick contestó la pregunta seis, de tal manera

6. Se lanza un solo dado, Luis gana si saca un número par y Ana gana, si saca un número impar. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

- a) Tiene más probabilidades de ganar Luis
- b) Tiene más probabilidades de ganar Ana
- ☒ c) Los dos tienen la misma probabilidad
- d) No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- e) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA
3 pares , 3 impares , 6 caras del dado 3 y 6 y 3 y 6 los 2 por igual

En este caso la respuesta y la justificación son correctas, ya que el estudiante entiende el problema, tiene un excelente control del mismo y maneja adecuadamente la operación con las fracciones involucradas. Incluso, de alguna manera tiene claridad sobre la proporcionalidad.

El 31,25% de estudiantes escogieron esa respuesta y de las justificaciones realizadas, solo este estudiante se ubicó en este nivel de rigor.

4.1.1.4 Entrevistas clínicas

Debido a que muchas justificaciones no se entendieron y para ampliar la información proporcionada en el diagnóstico por algunos estudiantes, fue pertinente recurrir a las entrevistas clínicas, de las cuales se presenta a continuación la transcripción de algunos fragmentos. Esto tiene como finalidad presentar al lector una muestra de las respuestas más comunes que corresponden a los diferentes niveles del razonamiento probabilístico. Cabe resaltar, que dichas videograbaciones

no fueron realizadas a todos los estudiantes, debido a que no fue posible obtener el permiso de los padres para llevar a cabo tales entrevistas.

Entrevista a Erick:

Entrevistador: *Te voy a hacer algunas preguntas relacionadas a la encuesta que contestaste de probabilidad. En una de ellas se te cuestiona lo siguiente: “ en un juego de parques se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Juan es un estudiante de grado quinto y está jugando parques con sus amigos. A Juan le faltan dos fichas para terminar el juego, una a 7 puntos y la otra ficha a 5 puntos. ¿Al lanzar los dos dados, que es más probable que salga? Tú contestaste lo siguiente: los dos eventos tienen anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir porque tú no puedes predecir el futuro.*

Entrevistador: *¿Esa es tu respuesta?*

Estudiante: *Si*

Entrevistador: *¿Tú crees entonces que al lanzar dos dados no puedes saber que caerá, ¿o tratar de predecir? ¿No se podrá?*

Estudiante: *No, porque puede caer en el cinco o en el siete*

En esta parte de la entrevista la justificación corresponde al nivel de impredeción debido a que el estudiante comenta que no se puede predecir un resultado. A continuación, se muestra otro fragmento de la entrevista.

Entrevistador: *Otra de las preguntas decía que una persona juega con una moneda a cara y sello, esta persona ha realizado tres lanzamientos y todos han salido en cara. ¿qué crees que ocurrirá en el cuarto lanzamiento?*

Estudiante: *Yo puse, que no se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir el resultado, ya que yo no puedo predecir el futuro.*

Entrevistador: *¿Y por qué no puede salir nuevamente cara?*

Estudiante: *Si puede salir, pero también puede salir sello, solo Dios sabe.*

Entrevistador: *¿Por qué razón?*

Estudiante: *Porque Dios sabe que va a pasar y yo no.*

Como podemos observar, el estudiante se sigue ubicando en un nivel de determinismo, pero esta vez en el determinismo mágico, argumentando que hay una causa poderosa que rige el azar.

Entrevistador: *Ahora Erick ayúdame a escribir estos números en el tablero (escribe los números 1111, 3456, 4287). Entonces imagínate que tú quieres comprar un billete de lotería y nada más quedan esos números. ¿Cuál de esos tres comprarías?*

Estudiante: *El 4287*

Entrevistador: *¿Por qué ese y no el 1111?*

Estudiante: *Ese número no existe*

Entrevistador: *¿Qué quieres decir con que no existe?*

Estudiante: *O sea, nunca sale*

Entrevistador: *¿Por qué ese y no el 3456?*

Estudiante: *No, porque son números seguidos y esos menos van a salir.*

En este fragmento del diálogo se observa claramente argumentaciones de tipo determinista considerando en los boletos de lotería que los números con cifras iguales o consecutivas tienen menor probabilidad de ganar que uno que no cumpla con estas características.

Entrevista a Hellen

Entrevistador: *Te voy a hacer algunas preguntas relacionadas a la encuesta que contestaste de probabilidad. En una de ellas se te cuestiona lo siguiente: en un juego de parques se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Juan es un estudiante de grado quinto y está jugando parques con sus amigos. A Juan le faltan dos fichas para terminar el juego, una a 7 puntos y la otra ficha a 5 puntos. ¿Al lanzar los dos dados, que es más probable que salga? Tú contestaste lo siguiente: imposible saberlo porque todo depende de la suerte.*

Estudiante: *Si*

Entrevistador: *¿Por qué razón?*

Estudiante: *No sabría decirte*

Entrevistador: *Pero dijiste que no sabrías porque todo depende de la suerte*

Estudiante: *Si*

Entrevistador: ¿y por qué no puede ser cualquiera de los dos números?

Estudiante: Porque hay personas con mucha suerte, hay gente que sí necesita el 7 le sale el siete, si necesita el 5 le sale el cinco, todo es por suerte.

Entrevistador: Ya que lo mencionas ¿para ti que es la suerte?

Estudiante: ¿Puedo leer lo que puse en la hoja?

Entrevistador: Claro que si

Estudiante: La verdad no sé

Entrevistador: Pero tú dices ahí que la suerte depende si ganas o no alguna competencia o reto.

Estudiante: Sí, pero no sé porque puse eso

Entrevistador: Hay personas que utilizan amuletos, ¿tú has utilizado alguno?

Estudiante: Yo no, pero mi abuela si

Entrevistador: ¿Cuál?

Estudiante: Un cordón negro para que a los niños no le dé mal de ojo.

Entrevistador: Otra pregunta que está en la encuesta es la siguiente: Un estudiante de grado quinto toma un chinche de la cartelera y empieza a jugar con él, lo lanza hacia arriba y quiere ver la forma en cómo cae este objeto. ¿Qué escogiste tú?

Estudiante: Que no se puede predecir ya que puede caer de las dos formas

Entrevistador: ¿Por qué razón?

Estudiante: Porque si

Entrevistador: ¿Podrías regalarme otro argumento?

Estudiante: Pues es como las monedas, la tiras al aire y no sabes que va a caer, muy difícil saberlo, puede ser por la suerte y así

Entrevistador: Ya que mencionas la moneda, si yo la tiro 10 veces y cae cara ¿qué crees que saldrá en el próximo lanzamiento?

Estudiante: No sabría.

Entrevistador: ¿Por qué razón?

Estudiante: No sé.

Como se puede observar la estudiante tiene inconvenientes para manifestar las respuestas oralmente. Además, queda en evidencia su sistema de creencias al admitir que ha utilizado amuletos y referirse a la suerte.

Entrevista a Jhon Emerson

Entrevistador: *Te voy a hacer algunas preguntas relacionadas a la encuesta que contestaste de probabilidad. Si una persona gana el premio mayor del Baloto, y meses después lo vuelve a ganar, es por. Lee lo que tu escribiste.*

Estudiante: *Que es por brujería*

Entrevistador: *¿Por qué brujería?*

Estudiante: *Porque no existe tanta suerte*

Entrevistador: *¿Por qué razón?*

Estudiante: *Imposible o ¿usted ha escuchado de alguien?*

Entrevistador: *Todo es posible. ¿Para ti que es la suerte?*

Estudiante: *Cuando alguien gana un examen sin haber estudiado o que se encuentra monedas en el suelo, ejemplo yo me encontré una vez dos mil pesos*

Entrevistador: *¿Crees que eso fue suerte?*

Estudiante: *Sí, porque me la encontré yo y no otra persona.*

Entrevistador: *¿Y si vuelves y te encuentras dinero?*

Estudiante: *No pasaría porque no tengo tanta suerte, quizás con el pasar del tiempo si me llegue a pasar algo similar, pero con más plata.*

Entrevistador: *Otra pregunta. Usted va a comprar una rifa y le ofrecen el número 1111, 3456 y el 4287. (escríbelos en el pizarrón) ¿Cuál de los tres compraría usted?*

Estudiante: *El 3456*

Entrevistador: *¿Por qué no comprarías el 1111?*

Estudiante: *Porque nunca salen números repetidos*

Entrevistador: *¿y por qué no el 4287?*

Estudiante: *Pues casi siempre salen números variados, pero yo quiero el 3456*

Entrevistador: *Suponiendo que ninguno de esos tres ha salido premiado últimamente, ¿cuál escogerías? ¿Cuál de los tres?*

Estudiante: *El 3456*

Entrevistador: ¿Seguro?

Estudiante: Si.

En esta parte de la entrevista se reflejan algunas de las concepciones erróneas que influyen de manera contundente en la resolución de problemas asociados a la probabilidad, como por ejemplo, la creencia en la suerte y otros factores similares.

4.1.1.5 COMENTARIOS FINALES

Con la aplicación de la prueba diagnóstico fue posible identificar algunas dificultades y concepciones erróneas que tienen los estudiantes de grado quinto alrededor del concepto de probabilidad. Entre los resultados encontrados se pueden mencionar los siguientes:

- a. La mayoría de los estudiantes mostró una gran dificultad para expresar ideas por escrito, lo cual afecta bastante al momento de argumentar una respuesta. Ejemplo de ello es que un **22.27%** de las respuestas no fueron justificadas (incluyendo a quienes eligieron la opción “no sé”).
- b. Muchas de las respuestas son inclinadas por creencias o intuiciones erróneas (condiciones físicas o de tipo mítico-mágicas). Por ejemplo, al plantear que una persona gana el premio mayor del baloto y meses después lo vuelve a ganar (pregunta número 9), un **18.75%** de los estudiantes atribuyen a la suerte como factores que inciden en el resultado.
- c. Una elevada proporción de las respuestas en la prueba diagnóstico se ubicó en el nivel determinista (**38,67%**), le sigue el de impredeción (**26,56%**). Por lo tanto, menos del **65,23%** se encuentra en los tres niveles inferiores de la escala del pensamiento probabilístico.
- d. Ningún estudiante utilizó representaciones como tablas y gráficos.
- e. Existe una gran inclinación al considerar los resultados de todos los eventos como dependientes. Por mencionar un ejemplo, al cuestionar a los estudiantes si comprarían un boleto con el número 111, un **56,25%** contestó que no porque ese número no existía o nunca puede salir.
- f. Un **37,50%** de estudiantes aceptó utilizar amuletos, lo cual refleja la presencia de un equívoco sistema de creencias.

- g. Un elevado número de estudiante se ubicaron en el nivel determinista en condición mítica ya que creen que la suerte es la causante de todo, pero al momento de preguntarles por ejemplo que entienden por suerte, **más del 50%** no supieron argumentar el significado para ellos, entonces se evidencia que no se tiene una idea clara de lo que es probabilidad.

4.1.2 ANÁLISIS DE HOJAS DE TRABAJO

En este capítulo se describen las características de cada una de las hojas de trabajo aplicadas con los estudiantes, así como los objetivos, condiciones de aplicación y resultados del análisis cuantitativo y cualitativo correspondiente. Por último, se presentan algunos comentarios finales de cada una de las actividades didácticas implementadas.

Es preciso mencionar que, en términos generales, las dos hojas de trabajo comparten un mismo diseño al dividirse en dos partes: la primera de ellas se contesta en forma grupal y sin el uso de tecnología; la segunda se realiza de forma individual con el apoyo del computador. En lo referente a las condiciones de aplicación, en el tercer capítulo del presente trabajo se hizo una descripción detallada al respecto, sin embargo, resulta conveniente retomarlo en este capítulo en forma general.

4.1.2.1 HOJA DE TRABAJO 1

4.1.2.1.1 Presentación de la actividad

Una de las situaciones planteada en esta hoja de trabajo (ver anexo) es la siguiente:

Juan David y Valeria quieren ir a cenar esta noche, Juan quiere comer pizza y Valeria quiere comer hamburguesa, como no están de acuerdo deciden dejarlo al azar lanzando una moneda al aire, si sale cara gana Juan, por lo cual van a comer pizza y si sale sello, gana Valeria e irán a comer hamburguesa. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

El desarrollo de las actividades pretende que los estudiantes determinen el espacio muestral del experimento aleatorio y, además, que reconozcan la existencia de eventos equiprobables. Para ello, la primera parte de la hoja de trabajo se realiza con lápiz y papel, la segunda parte se realiza con ayuda de tecnología. La primera parte de la hoja de trabajo consta de 8 preguntas todas enfocadas

a la equiprobabilidad: en una de ellas se presenta una situación hipotética donde se cuestiona si alguno de las dos personas tiene mayor probabilidad de ganar. Para contestar correctamente, los estudiantes deben darse cuenta de que se trata de eventos independientes, y, por lo tanto, tienen la misma posibilidad de ocurrir.

Luego se les dice que junto al compañero lancen 10 veces la moneda y observen qué cara de la moneda sale y lo apunten en la tabla de la hoja, la idea es que vayan analizando que no importa las veces que se lance la moneda, la probabilidad de salir una de las dos caras será equitativa, luego en la siguiente pregunta se les pide que después de haber lanzado la moneda 10 veces, la lancen una vez más, con esta se quiere que ellos interpreten la cantidad de elementos presentes y cuántos resultados se pueden obtener, al analizar los bajos resultados en la encuesta diagnóstica, se espera que no tenga una buena concepción de la definición de probabilidad.

Después se trabaja con otra situación, planteada en esta hoja de trabajo (ver anexo) como se muestra a continuación:

Juan Carlos, Jhon Emerson, Jean Pierre, Edwin, Erick, Luis son hermanos y el día de hoy le corresponde a uno y solo uno hacer el aseo de la casa entonces deciden jugar con la pirinola y saber a quién le toca realizarlo, para esto cada cara de la pirinola consta de un color entre los cuales se encuentra los colores: amarillo, morado, negro, azul, rojo y verde, un color para cada persona, entonces cada persona escoge un color y si al lanzar la pirinola sale ese color, a esa persona le tocará realizar el aseo.

Juan Carlos escogió el color amarillo, Jhon Emerson el morado, Jean Pierre el negro, Edwin el azul, Erick el rojo y Luis el verde.

¿Quién tiene mayor probabilidad de realizar el aseo?

Al tener muy bajos resultados en la encuesta diagnóstica, se plantea una situación similar donde se les presenta una pirinola con 6 caras, cada una con un color distinto, para contestar correctamente, los estudiantes deben darse cuenta de que se trata de eventos equiprobables, y por lo tanto, todos tienen la misma posibilidad de ocurrir $\frac{1}{6}$, al ser una pregunta con lápiz y papel, muchos se dejaron llevar por el primer lanzamiento, otros razonaron perfectamente quizás al decir que lo lanzaron una vez y les salió un color, pero volvieron a lanzar y les salió otro color, entonces esto fue fundamental para sus decisiones y sus explicaciones.

Como en la situación anterior se les pide que lance 12 veces la pirinola, la intención es que observen que habrá una igualdad en el sentido que cada vez que lance el objeto, saldrá una cara, si lo vuelve a lanzar saldrá otra cara y así vaya afianzando el concepto de equiprobabilidad, luego se plantea una pregunta completamente igual a la encuesta diagnóstica para que vayan contrastando las respuestas que dieron aquella vez, con las que ahora van a contestar.

Se trabaja otro problema donde se evidencia un evento equiprobable, al lanzar un dado y calcular la probabilidad de obtener el número tres, se requiere un análisis fundamental en este evento aleatorio ya que, si manejan bien la concepción de espacio muestral y posibles resultados, la justificación será la indicada.

Una estrategia para contestar correctamente la actividad consiste en visualizar el espacio muestral y los casos favorables de obtener un número. Por otro lado, respecto a la siguiente actividad se pedía que escribieran los posibles resultados que se obtenían al lanzar un dado, se espera que logren analizar que el juego es equiprobable y que todos los números tienen la misma opción de salir.

Más adelante, en la segunda parte de la hoja de trabajo con la ayuda de la tecnología se piensa trabajar con el fenómeno de la pirinola, ya que en la encuesta diagnóstica fue la que más bajos resultados tuvo; los estudiantes interactúan con una hoja electrónica que simula 18 lanzamientos simultáneos de una pirinola, cabe aclarar que a los estudiantes se les muestra lo que es una pirinola, como se conforma y que proyecta cada cara, al ver complicado que cada cara de la pirinola tiene la misma posibilidad de obtenerse, entonces se le asigna un color a cada una de ellas, para explicar mejor el problema azaroso, así pues la actividad consistió en que cada vez que presionará la opción animación, la pirinola giraría hasta caer en un color y también un deslizador donde puede modificar la cantidad de lanzamientos que se desean. Aquí se espera que en el programa Geogebra observen gráficamente que ocurre cada vez que se realiza un lanzamiento de pirinola, y que todos los colores tienen la misma probabilidad de ocurrir, ya que son eventos equiprobables. Para que el lector tenga una idea más precisa, en el siguiente gráfico se muestra una pantalla similar a la que observan los estudiantes en el programa de Geogebra.

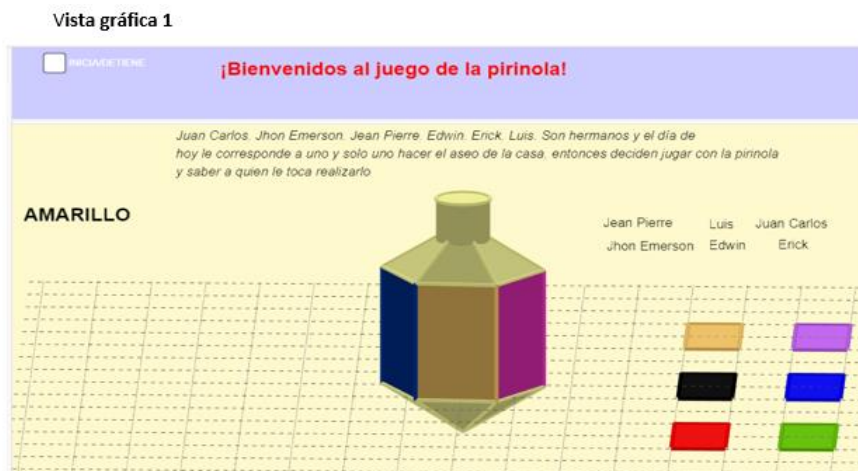


Figura 4. Diseño N°1 “el juego de la pirinola” vista grafica 1. Elaboración propia

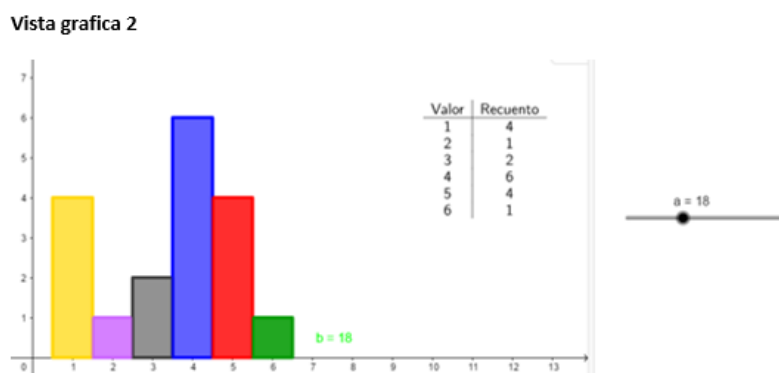


Figura 5. Diseño N°1 “el juego de la pirinola” vista grafica 2. Elaboración propia

En la ilustración anterior se pueden observar dos vistas gráficas, en la primera observamos una situación hipotética, en donde se involucran seis personas y seis colores, cada color para cada persona.

Juan Carlos, Jhon Emerson, Jean Pierre, Edwin, Erick, Luis son hermanos y el día de hoy le corresponde a uno y solo uno hacer el aseo de la casa, entonces deciden jugar con la pirinola y saber a quién le toca realizarlo.

Se observa la pirinola que, al activarse gira, un botón de iniciar animación, una casilla que indica que color ha salido en la pirinola, casillas que indican que colores estamos trabajando.

En la vista gráfica 2, tenemos un deslizador para indicar el número de lanzamientos que se desean, dos columnas que representan los seis colores propuestos y en la otra columna cuántas veces salió cada color (la simulación está supuesta para 18 lanzamientos). Después se tiene una gráfica de barras donde registra las veces que se repite cada color. Es importante subrayar que uno de los propósitos es articular diferentes tipos de representación, en este caso, tabular y gráfica.

La actividad consiste en que ellos primero interactúen con la pirinola, haciéndola girar varias veces y vayan analizando que siempre va a salir un color, solamente uno, luego pasar a vincularse con la actividad que se les propone de escoger un nombre y un color, se espera que ellos comprendan que no importa la persona y el color que escojan, al ser un evento equiprobable, solo podrá salir un color, La finalidad es que los estudiantes identifiquen el espacio muestral y los casos favorables al momento de escoger un color.

En la segunda parte de la hoja de trabajo se requiere que el estudiante razone e identifique que no importa que color escojan, siempre será $\frac{1}{6}$, para eso se le hace la pregunta que *si la pirinola se lanza una vez, que color creen que saldrá*, si tuvieras que apostar por cual color no lo harías, la actividad continua con 2 y 3 lanzamientos respectivamente.

Una de las actividades que se incluyen en la segunda parte de la hoja de trabajo es que tienen que realizar 10, 50, 100, y 1000 lanzamientos de la pirinola, observar qué ocurre en el computador y escribir las cosas comunes presentadas y luego explicar porque hay barras más altas que otras. La idea es que los estudiantes razonen, que utilicen ese pensamiento crítico y aleatorio para deducir y justificar lo observado en el computador.

En la tercera parte se les pregunta qué vieron en común entre la representación gráfica y la tabla, se finaliza con unas preguntas propuestas en la encuesta de diagnóstico que ellos ya habían realizado y vayan analizando los eventos equiprobables.

Objetivos de la actividad

El objetivo primordial de esta hoja de trabajo es que los estudiantes resuelvan un problema en contexto, a partir de distintos usos de representaciones con el fin de determinar el espacio muestral en eventos azarosos, y de esta manera identificar los casos favorables que se puedan obtener. A través de estas actividades se espera que los estudiantes reconozcan los eventos que son equiprobables y los que no lo son.

En otro orden de ideas, es necesario señalar que, debido a la baja productividad en la encuesta diagnóstica por parte de los estudiantes para calcular la probabilidad, se evidenció la incapacidad de distinguir entre eventos equiprobables y no equiprobables, así como las deficiencias en técnicas de conteo. Por esta razón, con esta actividad se pretende superar estas dificultades.

En todas las actividades de las hojas, se espera que la experimentación con lápiz y papel, y el uso de la tecnología ayude a una confrontación de los resultados obtenidos en la simulación con las expectativas iniciales, con la idea de crear un ambiente propicio para la construcción del aprendizaje.

Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo se aplicó en una sesión de dos horas-clase (aproximadamente 70 minutos en total) y se dividió en dos partes: la primera se contestó en grupos en el salón de clases con ayuda de lápiz y papel sin tecnología; la segunda fue individualmente el apoyo de la tecnología computacional.

En lo referente a las características generales de la hoja de trabajo, ésta contiene preguntas de opción múltiple con espacios para justificar cada una de las respuestas. Además, se incluyen algunas tablas en las que se deben escribir los eventos equiprobables al lanzar una moneda, un dado y la interacción con la pirinola, de acuerdo al contexto del problema planteado.

Por último, después de la fase de socialización se lleva a cabo la institucionalización de la actividad por parte del docente.

4.1.2.1.2 Análisis de los resultados

La información recolectada en esta hoja de trabajo se analiza cuantitativa y cualitativamente de manera simultánea. Los datos correspondientes a las preguntas selección múltiple se presentan en una tabla, mientras que en otra se muestran los resultados relacionados a la actividad que es de respuesta abierta. En ambos casos se incluye la categorización de las respuestas en los distintos niveles del razonamiento probabilístico, así como algunas evidencias del trabajo de los estudiantes.

A continuación, se muestran los valores obtenidos en las preguntas de selección múltiple, indicándose la respuesta correcta por medio de un sombreado en la celda respectiva.

Tabla 8. valores obtenidos en la hoja de trabajo N° 1 sin uso de la tecnología.

"Lanzamiento de una pirinola"										
N° de pregunta		Opciones de respuesta								
		A	b	c	d	e	f	g	h	i
Sin uso de la tecnología	1	7	2	6	11	6				
		21,88%	6,25%	18,75%	34,38%	18,75%				
	3	4	5	20	3					
		12,50%	15,63%	62,50%	9,38%					
	4	5	5	6	2	14				
		15,63%	15,63%	18,75%	6,25%	43,75%				
	5	4	1	2	1	4	2	10	3	5
		12,50%	3,13%	6,25%	3,13%	12,50%	6,25%	31,25%	9,38%	15,63%
	6	1	1	2			6	12	5	5
		3,13%	3,13%	6,25%			18,75%	37,50%	15,63%	15,63%
	8	6	9			17				
		18,75%	28,13%			53,13%				
10	6	2	10	5	5	4				
	18,75%	6,25%	31,25%	15,63%	15,63%	12,50%				
Con uso de la tecnología	2	6	14			9				
		18,75%	43,75%			28,13%				
	3	12	2	5	1	10	2			
		37,50%	6,25%	15,63%	3,13%	31,25%	6,25%			

Tabla 9: Valores obtenidos en la hoja de trabajo N° 1 con uso de la tecnología.

"Lanzamiento de una pirinola"							
N° de pregunta		Niveles de razonamiento probabilístico					
		Impredicción	Determinista	Mecánico	Pre-rigor	Rigor	No contestó o no justificó
Sin uso de la tecnología	1	10	14	3	2		3
		31,25%	43,75%	9,38%	6,25%		9,38%
	3	10	12	3		5	2
		31,25%	37,50%	9,38%		15,63%	6,25%
	4	8	14	3	5	2	
		25,00%	43,75%	9,38%	15,63%	6,25%	
	5	9	14	5	2	2	
		28,13%	43,75%	15,63%	6,25%	6,25%	
	6	6	16	6	2	2	
		18,75%	50,00%	18,75%	6,25%	6,25%	
	8	8	9	6	3	3	3
		25,00%	28,13%	18,75%	9,38%	9,38%	9,38%
	10	10	16	2	2		2
		31,25%	50,00%	6,25%	6,25%		6,25%
Con uso de la tecnología	2	7	6	5	4	7	3
		21,88%	18,75%	15,63%	12,50%	21,88%	9,38%
	3	13	7	5	2	5	
		40,63%	21,88%	15,63%	6,25%	15,63%	

La primera pregunta se refiere al lanzamiento de una moneda, a lo cual solamente un 18.75% respondió correctamente al considerar que se tiene la misma probabilidad de obtener resultados iguales o diferentes. En lo relativo al tipo de justificación, en su mayoría fue determinista (43.75%), seguido por el de impredicción (31.25%), aunque también hubo argumentaciones catalogadas en el nivel mecánico (9.38%) y de pre-rigor (6.25%)

1. Sara Lucia se ubica en un nivel de determinismo

1. Juan David y Valeria quieren ir a cenar esta noche, Juan quiere comer pizza y Valeria quiere comer hamburguesa, como no están de acuerdo deciden dejarlo al azar lanzando una moneda al aire, si sale cara gana Juan, por lo cual van a comer pizza y si sale sello, gana Valeria e irán a comer hamburguesa. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?
- a. Juan David
 - b. Valeria
 - c. Los dos tienen la misma probabilidad de ganar
 - ☒ d. Imposible saberlo
 - e. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Ganaria Juan David, por ser hombre y tener mas fuerza que Valeria y tira primero, pero no se sabe

Esta pregunta un (34.38%) contestó que era imposible saberlo y un (43.75%) se ubicó en el nivel de determinismo, argumentando en una posición de tipo determinista físico al considerar la fuerza como influyente para que gane Juan David, por ser hombre, lo cual influye determinadamente en su respuesta

Respecto a la tercera pregunta de la primera parte de la hoja de trabajo, un (62.5%) de respuestas fue acertada, y nuevamente los argumentos son en su mayoría deterministas (37.50%) seguidos por el nivel de impredeción (31.25%). Algunos ejemplos son los siguientes:

Se les pone una situación hipotética donde se deben reunir con un compañero y cada uno va a lanzar 10 veces una moneda y escribirá en una tabla, cuántas veces salió cara y cuántas veces salió sello.

Luego se les hace esta pregunta

1. Melany se ubica en el nivel de impredeción

3. Si lanzan nuevamente la moneda, qué es lo más probable que salga
- a. En el undécimo lanzamiento es más probable que salga CARA
 - b. En el undécimo lanzamiento es más probable que sal SELLO
 - ☒ c. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
 - d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

apesar de toda la probabilidad es compleja, una moneda tiene dos caras, y puede salir cualquiera de las dos, cara o sello, tienen la misma posibilidad de salir.

Esta pregunta un (62.50%) contestó que no se puede predecir el resultado y un (31.25%) se ubicó en el nivel de impredeción argumentando que es difícil saber qué va a salir en la próxima ya que cualquiera de las dos es fácil de salir por tener dos caras, se evidencia que muchos entendieron la idea de la actividad, pero pocos lo expresan adecuadamente.

2. Hellen Julieth, se ubica en el nivel de rigor

3. Si lanzan nuevamente la moneda, qué es lo más probable que salga
- a. En el undécimo lanzamiento es más probable que salga CARA
 - b. En el undécimo lanzamiento es más probable que sal SELLO
 - ☒ c. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
 - d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Es difícil saber pues la moneda tiene 2 caras y puede salir cualquiera.

Esta pregunta (62.50%) contestó que no se puede predecir el resultado y un (15.63%) se ubicó en el nivel de rigor, En este caso la respuesta y la justificación son correctas, ya que la estudiante entiende el problema, tiene un excelente control del mismo y maneja adecuadamente los términos utilizados. Incluso, tiene en cuenta que son eventos equiprobables.

Para la cuarta pregunta se requiere manejar el concepto de probabilidad acerca de los casos favorables y los casos posibles, pero todavía se evidencia el poco análisis que han hecho a este tipo de preguntas como se muestra a continuación:

1. Juan Camilo se ubica en el nivel determinismo

4. Usted tiene una moneda en su mano, al lanzarla va a observar si sale cara o sello. ¿Cuál es la probabilidad que salga cara?

a. $\frac{2}{2}$

b. $\frac{1}{2}$

c. 1

d. $\frac{2}{1}$

e. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Pudo salir sello, pero pudo salir cara, entonces no puede salir.

Esta pregunta un (43.75%) escogieron la opción e, pero un (43.75%) se atrevió a dar una argumentación tipo experiencia básica, justificando que el estudiante al lanzar la moneda, obtuvo sello, eso quiere decir que no salió cara, entonces no se sabe cuál sea la probabilidad, esta respuesta pudo haber sido *no se sabe con exactitud qué va a caer*, pero los estudiantes no se atrevieron a dar una respuesta, debido a su poco conocimiento de la probabilidad.

Como se pudo observar, en esta primera parte se especializaron en solo utilizar una moneda, ahora prosigue utilizar una pirinola. Para esto a cada pareja se le entrega dos pirinolas (una de ellas con las siguientes frases: "todos ponen", "toma uno", "toma dos", "toma todo", "pon uno", "pon dos"; y la otra pirinola con los siguientes colores: azul, rojo, negro, verde, amarillo, morado) y se les pone una situación hipotética, en la cual se espera que analicen que todos los posibles resultados tienen las mismas oportunidades de salir. Muchos de los estudiantes no asimilaban que cualquiera puede salir, se limitaron a decir el nombre de las personas o los colores, mientras que otros si observaron el espacio muestral y razonaron conforme a esto como se mostrará a continuación:

1. Natalia se ubica en el nivel determinista

¿Quién tiene mayor probabilidad de realizar el aseo?

- a. Juan Carlos
- b. Jhon Emerson
- c. Jean Pierre
- d. Edwin
- ☒ e. Erick
- f. Luis
- g. No se puede predecir cuál de las opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- h. Imposible saberlo
- i. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Me cae mal y quiero que haga aseo y
el rojo mi favorito

Para la pregunta 5 y 6, al estar relacionadas, muchos de los estudiantes se ubicaron en un nivel determinista, al decir que ese color no podría salir o que era su color favorito y por tal motivo el chico escogido, iba a ser el responsable de hacer el aseo, como podemos observar, la probabilidad de que ocurra un evento, es mínima con un 16,6 %.

2. Antuan se ubica en el nivel de mecánico

6. ¿Quién tiene menor probabilidad de realizar el aseo?

- a. Juan Carlos
- b. Jhon Emerson
- c. Jean Pierre
- d. Edwin
- e. Erick
- f. Luis
- g. No se puede predecir cuál de las opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- h. Imposible saberlo
- i. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

son seis colores y seis personas, uno para cada uno, no se que pueda caer ya que son 6 distintos opciones y yo no se.

En esta pregunta, este estudiante logra visualizar bien el espacio muestral, pero cuando está argumentando se equivoca, se evidencia que no se atreve a dar una respuesta, se limita a decir que no sabe qué pueda pasar sabiendo que hay seis opciones para salir. Como se ve en la imagen el estudiante tiene problemas para expresar lo que quiere decir, quizás por lo poco que han visto de probabilidad.

Para la pregunta ocho tenemos el siguiente caso:

1. Danna Marcela se ubica en el nivel de rigor mecánico

8. Daniela juega con una pirinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación:



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO”, “PON DOS”.

¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer girar la pirinola, **una sola vez**, salga en la cara de arriba “TODOS PONEN”?

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{2}{3}$
- ☒ No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

No se ... tiene distintas caras en este caso 6, entonces difícil que caiga precisa en esa.

Esta pregunta al ya haber estado en la encuesta diagnóstica, fue muy preocupante el bajo rendimiento recibido por parte de los estudiantes, quizás por la poca relación que han tenido con la probabilidad, pero un (28.13%) lograron visualizar el espacio muestral al decir que puede tener seis diferentes oportunidades y es muy difícil que salga esa cara, entonces cómo nos damos cuenta, tienen ciertas ideas, pero todavía tienen vacíos con respecto a la probabilidad y además no se atreven a escoger una de las cuatro opciones, se limitan a escoger la respuesta “no sé”.

Para la pregunta 10, se involucra un evento independiente como lo es un dado, a lo que se estudian las siguientes evidencias:

1. Juan Camilo se ubica en el nivel de impredeción

10. Si lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga el número tres?

- ☒ a. No se puede predecir el resultado
- b. Depende de la velocidad de lanzamiento
- c. Depende de la suerte
- d. $\frac{1}{3}$
- e. $\frac{1}{6}$
- f. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

No se sabe puede caer el seis, cuatro.

En esta pregunta muchos de los estudiantes hicieron la misma referencia al contestar que no se puede predecir el resultado ya que puede salir otro número, a lo que se evidencia que hubo una mala interpretación de la pregunta y un mal contexto con ella.

2. Melany se ubica en el nivel determinista

10. Si lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga el número tres?

- a. No se puede predecir el resultado
- b. Depende de la velocidad de lanzamiento
- ☒ c. Depende de la suerte
- d. $\frac{1}{3}$
- e. $\frac{1}{6}$
- f. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

No solo el peso también ya que se encuentra entre el uno y el seis.

En esta pregunta muchos estudiantes se ubicaron en el nivel determinismo, escogiendo como opción correcta que para que caiga el número 3 depende de la suerte y argumentaron que también del peso porque estaba entre la mitad del dado con la cara del uno y la cara del seis, lo que evidencia que tienen concepciones erróneas.

Ya con la ayuda de la tecnología, se esperaba unos mejores resultados a lo que tenemos evidencias en la pregunta 2 y sus resultados fueron:

1. Hellen se ubica en el nivel de pre- rigor



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO”, “PON DOS”.

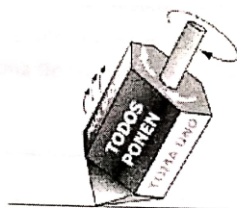
¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer girar la pirinola, una sola vez, salga en la cara de arriba “TODOS PONEN”?

- ☒ a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{2}{3}$
- e) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA					
<table border="1"> <tr> <th>Frases</th><th>Cantidad</th></tr> <tr> <td>6</td><td>1</td></tr> </table>	Frases	Cantidad	6	1	son 6 opciones, cae una, entonces quedan 5. $\frac{1}{6}$ pero ya salió $\frac{1}{5}$
Frases	Cantidad				
6	1				

En el cálculo de la probabilidad correspondiente al lanzamiento de una pirinola, la estudiante recurrió a una tabla de una entrada, lo cual le permitió identificar las combinaciones posibles de resultados y, en consecuencia, determinar el espacio muestral y los casos favorables de cada evento. Sin embargo, la notación que utiliza para representar la probabilidad no es la adecuada. Al no tener muy en cuenta la definición de probabilidad, la respuesta la llevó a situación que lo condujo al error al no identificar la cantidad de elementos del espacio muestral.

1. Jean Pierre se ubicó en el nivel de rigor



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO”, “PON DOS”.

¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer girar la pirinola, **una sola vez**, salga en la cara de arriba “TODOS PONEN”?

- a) $\frac{1}{5}$
- ☒ b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{2}{3}$
- e) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

6 caras o 6 colores y solo cae una y puede caer cualquiera y todos pueden ocurrir.

Después del bajo nivel obtenido en la encuesta diagnóstico, se esperaba que los estudiantes ya tuvieran un buen manejo de cómo diferenciar los eventos equiprobables y no equiprobables, en este caso el (43.75%) de los estudiantes respondieron y justificaron correctamente esta pregunta, muestra un avance significativo ya que muchos estudiantes que en la encuesta diagnóstico no respondieron esta pregunta, esta vez mostraron y argumentaron que al ser un evento equiprobable, solo podrá salir un resultado de los seis posibles.

Para la pregunta 3, su objetivo es el mismo que la pregunta anterior, en la cual ellos identifiquen que son eventos equiprobables y todos tienen la misma probabilidad de ocurrir, a lo que las respuestas obtenidas son las siguientes:

1. Nivel determinismo

3) Si lanzamos una pirinola. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga el color rojo?

- a. No se puede predecir el resultado
- b. Depende de la velocidad de lanzamiento
- ☒ c. Depende de la suerte
- d. $\frac{1}{3}$
- e. $\frac{1}{6}$
- f. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Depende de la suerte y el rojo es de mala suerte
y malas calificaciones.

En esta pregunta muchos de los estudiantes escogieron algunas de las 3 primeras opciones y todo lo adjuntaban a que por experiencia el rojo no podía salir, ya que era un color de mala suerte, o que por experiencia cuando lo lanzaron no salió, esto nos lleva a deducir que para ellos la probabilidad no solo se basa en la relación de casos favorables y casos posibles, sino que hay algo más allá que hace que pasen los eventos.

Por otra parte, al inicio de este apartado se hablaba de dos tablas, habiéndose analizado la primera de ellas hasta el momento, así que a continuación se presentan los resultados de la segunda, la cual contiene la información relativa a las preguntas de respuesta abierta y que se contestaron con y sin la ayuda de la tecnología computacional.

Para una mejor interpretación, las respuestas son clasificadas como correctas, incorrectas, incompletas o sin contestar, y de acuerdo a la justificación de cada una de ellas, fueron categorizadas en la escala del pensamiento probabilístico.

Tabla 10: Resultados segunda tabla, actividades con uso de tecnología

"Lanzamiento de una pirinola"						
	N° Preguntas		Respuesta			
			Correcto	Incorrecto	Incompleta	No contestó
Actividades con uso de tecnología	Identificar eventos equiprobables	2.1.a	12	16	4	
			37,50%	50,00%	12,50%	
	Identificar eventos equiprobables	2.1.b	10	13	9	
			31,25%	40,63%	28,13%	
	Identificar eventos equiprobables	2.1.c	10	13	9	
			31,25%	40,63%	28,13%	
	Identificar eventos equiprobables	2.1.d. 1	8	15	7	2
			25,00%	46,88%	21,88%	6,25%
	Identificar eventos equiprobables	2.1.d. 2	8	14	8	2
			25,00%	43,75%	25,00%	6,25%
	Identificar aspectos de las tablas	2.2.a	16	7	9	
			50,00%	21,88%	28,13%	
	Identificar aspectos de las tablas	2.2.b	6	11	10	5
			18,75%	34,38%	31,25%	15,63%
	Identificar aspectos de las tablas	2.2.c	5	14	6	7
			15,63%	43,75%	18,75%	21,88%
	Identificar relaciones entre tablas	3.1.a	4	12	8	8
			12,50%	37,50%	25,00%	25,00%

Se muestra el porcentaje de respuestas correctas, incorrectas, incompletas o no contestadas de cada estudiante en las preguntas de respuesta abiertas con uso de la tecnología.

Tabla 11: Resultados segunda tabla, actividades con uso de tecnología

"Lanzamiento de una pirinola"									
Actividades con uso de tecnología	N° Preguntas		Niveles de razonamiento probabilístico						
			Impredicción	Determinista	Mecánico	Pre-rigor	Rigor	No contestó	No justificó
	Identificar eventos equiprobables	2.1.a	10	13	5		4		
			31,25%	40,63%	15,63%		12,50%		
	Identificar eventos equiprobables	2.1.b	7	13	3	2	7		
			21,88%	40,63%	9,38%	6,25%	21,88%		
	Identificar eventos equiprobables	2.1.c	7	13	3	2	7		
			21,88%	40,63%	9,38%	6,25%	21,88%		
	Identificar eventos equiprobables	2.1.d.1	9	11	4		6	2	
			28,13%	34,38%	12,50%		18,75%	6,25%	
	Identificar eventos equiprobables	2.1.d.2	9	11	4		6	2	
			28,13%	34,38%	12,50%		18,75%	6,25%	
	Identificar aspectos de las tablas	2.2.a	8	19		5			
			25,00%	59,38%		15,63%			
	Identificar aspectos de las tablas	2.2.b	5	18	3	1		5	
			15,63%	56,25%	9,38%	3,13%		15,63%	
	Identificar aspectos de las tablas	2.2.c	6	11	3	5		7	
			18,75%	34,38%	9,38%	15,63%		21,88%	
	Identificar relaciones entre tablas	3.1.a	2	13	4	5		8	
			6,25%	40,63%	12,50%	15,63%		25,00%	

Se muestra el porcentaje de respuestas correctas, incorrectas, incompletas o no contestadas de cada estudiante en las preguntas de respuesta abiertas con uso de la tecnología categorizadas en la escala del pensamiento probabilístico.

Las preguntas, 2, 7 y 9, tienen como propósito evidenciar los eventos equiprobables como lo son el juego de monedas, la pirinola y los dados, cada una con su espacio muestral y sus opciones de salir, muchos de los estudiantes se limitaron a escribir solamente los números, otros usaron

distintas representaciones de conteos y así contestar respectivamente la pregunta que proseguía, a lo cual se muestran las siguientes evidencias:

2. Junto con uno de tus compañeros, lancen una moneda 10 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió cara y cuántas sello

Cara	Sello
✓ ✓ ✓ ✓ ✓	X X X X X

En la imagen se evidencia que la probabilidad es equitativa con un 50% para cada uno.

7. Junto con uno de tus compañeros, lancen la pirinola 12 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió el color correspondiente.

Color	Veces que se repite
Amarillo	
Morado	
Negro	
Rojo	
Verde	
Azul	

En esta imagen, como observamos hay colores que no salieron y otros que se repitieron, quizás en este ejemplo, si no tienen bien el concepto de la probabilidad los puede llevar a errores, ellos deberán identificar que no se puede predecir qué color va a salir.

9. Junto con uno de tus compañeros, lancen el dado 15 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió el número correspondiente.

Número	Veces que se repite
Uno	1 2 3
Dos	1 2
Tres	1 2 3 4
Cuatro	1 2
Cinco	1
Seis	1 2 3

Como en la respuesta anterior, debemos entender que se trata de la misma probabilidad ya que son 6 eventos totalmente independientes e iguales de ocurrir, a pesar de que den distintos resultados, la probabilidad me indica que para que salga cualquiera de estos números, debemos tener en claro el espacio muestral.

Para tener una idea más clara, de la opinión de los estudiantes, se escogen a unos estudiantes para hacerles unas entrevistas y que den sus puntos de vista con respecto a las respuestas.

4.1.2.1.3 Entrevistas clínicas

Como propósito de ofrecer al lector una muestra de respuestas típicas que corresponden a los diferentes niveles del razonamiento probabilístico, en las preguntas de completar con la información sobre el evento azaroso, se decide cuestionar acerca de porque cree que dichos eventos tienen esos resultados.

Entrevista a Jean Pierre

Entrevistador: Te voy a hacer algunas preguntas relacionadas a la hoja de trabajo que contestaste de probabilidad. Se te pidió que, con uno de tus compañeros, lancen una moneda 10 veces y escribieran en una tabla, cuántas veces salió cara y cuántas veces sello.

Estudiante: si

Entrevistador: ¿Qué resultados obtuvieron?

Estudiante: salió tres caras y siete sellos

Entrevistador: ¿si lanzaras nuevamente la moneda que crees que saldría?

Estudiante: el sello obviamente

Entrevistador: ¿Por qué razón?

Estudiante: porque cuando lo tiré fue el que más veces salió

Entrevistador: entonces ¿Qué ocurriría si cuando la vuelvas a lanzar salga cara?

Estudiante: puede ser que salga, pero es más fácil que salga el sello porque ya salió siete veces y siete le gana a tres.

Entrevistador: ¿Tú crees que alguno de los lados de la moneda caiga más que otro, tendrán diferente probabilidad?

Estudiante: No

Entrevistador: ¿Y por qué crees que hayan caído más sellos que caras?

Estudiante: por la suerte

En esta parte de la entrevista la justificación corresponde al nivel de determinismo, ya que asocia los eventos con la suerte. A continuación, se muestra otro fragmento de la entrevista.

Entrevistador: Para esta pregunta deberían lanzar la pirinola 12 veces y escribieran en la tabla, cuántas veces salió el color correspondiente. ¿Habías jugado antes con una pirinola?

Estudiante: Si, pero no sabía que se llamaba así

Entrevistador: ¿cuáles fueron los resultados que obtuvieron?

Estudiante: cuatro color rojo, tres color negro, tres color verde, uno amarillo y uno azul

Entrevistador: ¿Por qué crees que se obtuvieron estos resultados?

Estudiante: fue porque mi compañero tiró seis veces y yo seis veces, entonces cada uno la tira con una fuerza distinta

Entrevistador: Entonces asocias a que los resultados se dan por la fuerza del lanzamiento

Estudiante: claro, porque él puede tener más fuerza que yo

Entrevistador: ¿y si vuelven a lanzar la pirinola, qué color crees que saldrá?

Estudiante: ¿si la lanzo yo o mi compañero?

Entrevistador: tú

Estudiante: *el azul*

Entrevistador: *¿Por qué razón?*

Estudiante: *Porque salió muy pocas veces y así es la suerte, sale lo que uno a veces quiere.*

Nuevamente en este fragmento vemos, cómo el estudiante hace alusión a la suerte, es decir que está ubicado en un nivel determinista mítico y físico, al considerar la fuerza de su compañero influye en la respuesta.

Entrevista Hellen

Entrevistador: *Te voy a hacer algunas preguntas relacionadas a la hoja de trabajo que contestaste de probabilidad. Se te pidió que, con uno de tus compañeros, lanzaran una moneda 10 veces y escribieran en una tabla, cuántas veces salió cara y cuántas veces sello.*

Entrevistador: *¿Qué resultados obtuvieron ustedes?*

Estudiante: *cinco sellos y cinco caras*

Entrevistador: *¿y si se vuelve a lanzar qué cara saldría?*

Estudiante: *No sabría decirte*

Entrevistador: *¿Por qué razón?*

Estudiante: *Porque es muy raro que nos hayan salido igual número de veces*

Entrevistador: *entonces ¿consideras que no es normal que pase eso?*

Estudiante: *no*

Entrevistador: *¿Por qué razón?*

Estudiante: *No sabría decirte*

Entrevistador: *¿te atreves a decir un lado de la moneda?*

Estudiante: *No, porque no sé qué puede salir*

En esta parte de la entrevista la justificación corresponde al nivel de impredeción debido a que la estudiante comenta que no se puede predecir un resultado, por más de que se le dice que se atreva a decir un lado de la moneda, ella no se arriesga a dar una respuesta. A continuación, se muestra otro fragmento de la entrevista.

Entrevistador: Ahora junto a tu compañero lancen el dado 15 veces y escriban en una tabla, cuántas veces salió el número correspondiente.

Estudiante: si

Entrevistador: ¿obtuviste más números que otros?

Estudiante: ¿cómo así?

Entrevistador: Cuando lanzaron el dado, ¿se obtuvieron más números que otros?

Estudiante: si

Entrevistador: ¿Cuáles?

Estudiante: el cinco salió siete veces, el seis salió tres veces, el dos también tres veces, los demás solo una vez

Entrevistador: ¿a qué crees que se debe esto?

Estudiante: no sé

Entrevistador: ¿Por qué razón?

Estudiante: porque no es lógico que salga el 5 tantas veces

Entrevistador: ¿entonces qué sería lógico?

Estudiante: Es difícil decirlo, porque si yo digo en mi mente ojalá salga el tres, puede salir el cuatro, porque tiene varias opciones para salir

Entrevistador: ¿si se lanza nuevamente el dado qué número saldría?

Estudiante: no tendría ni idea.

Queda absolutamente claro que la estudiante, no se atreve a decir qué número podría salir en el siguiente lanzamiento, se limita a decir que no se puede deducir el próximo resultado, haciendo un claro ejemplo del nivel de impredeción.

Entrevista a Sara

Entrevistador: Te voy a hacer algunas preguntas relacionadas a la hoja de trabajo que contestaste de probabilidad. Se te pide que lancen la pirinola 12 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió el color correspondiente. ¿Habías jugado antes con una pirinola?

Estudiante: si, en el otro colegio que estuve

Entrevistador: ¿y encontraste alguna diferencia con esta pirinola?

Estudiante: no porque es lo mismo, una tiene colores distintos y la otra frase distintas

Entrevistador: cuéntame qué resultados te dieron cuando lanzaste la pirinola

Estudiante: yo pensé que el rojo iba a salir más, pero salía más poquito

Entrevistador: Y ¿porque preciso el rojo?

Estudiante: porque es mi color favorito, está en la sangre, en los cuadernos, en mi manilla.

Entrevistador: ahh ok!!, ¿Y qué colores salieron entonces?

Estudiante: tres morados, dos azules, dos amarillos, dos negros, dos verdes y un rojo

Entrevistador: ¿Por qué crees que salió más veces el morado?

Estudiante: por suerte o porque así lo quiere Dios

Entrevistador: ¿consideras que Dios influye en lo que pueda ocurrir?

Estudiante: Si

Entrevistador: ¿Por qué razón?

Estudiante: porque él todo lo sabe, sabe que va a pasar con nosotros

Entrevistador: ¿si vuelves a lanzar la pirinola, que color crees que saldrá?

Estudiante: El rojo

Entrevistador: ¿Podrías decirme por qué?

Estudiante: el rojo porque yo quisiera, pero saldría el azul porque, dios todo lo ve y el cielo es azul

Entrevistador: tu compañera Daniela, obtuvo 7 veces el color amarillo ¿a qué crees que se debe esto?

Estudiante: no, no sé, por la suerte o porque hizo trampa y también puede ser por la posición de donde tomé la pirinola, porque si cayó en el color rojo entonces usted la lanza desde ese color y no de otro, entonces cambia el resultado, pero si a ella no le cambió esta raro eso, ella siempre hace trampa en todo.

Entrevistador: ¿Cómo así, explícame otra vez eso?

Estudiante: tú lanzas la pirinola y va a dar vueltas y cae en un color, como ya cayo así en esa posición, para tu lanzarlo lo coges desde esa posición y eso influye, porque si lo lanzas desde otro color, obvio cambia el color.

Como pudimos observar hace alusión a tres fenómenos que son bendición del cielo, la trampa y la suerte, se trata de un mismo nivel de determinismo.

Entrevistador: Continuando con las preguntas, teníamos ahora que, con uno de tus compañeros, se te pide que lancen el dado 15 veces y escriban en la tabla, cuántas veces salió cada número.

Estudiante: Si

Entrevistador: ¿Qué resultados obtuvieron?

Estudiante: el uno salió tres veces, el dos salió dos veces, el tres salió cuatro veces, el cuatro dos veces, el cinco una vez y el seis salió tres veces

Entrevistador: ¿Por qué crees que se dieron estos resultados?

Estudiante: por la posición

Entrevistador: ¿cómo así por la posición?

Estudiante: es decir, cuando tu lanzas un dado el cae digamos en el tres y tú lo tomas así y lo vuelves a lanzar y cae otro número, entonces el número cae, dependiendo del lugar que lo tome.

Entrevistador: ¿Cómo en la anterior pregunta?

Estudiante: Si

Entrevistador: ¿encuentras alguna relación entre la pirinola y el dado?

Estudiante: ¿relación, como así?

Entrevistador: Si, ¿encuentras algo similar, algo que tengan en común?

Estudiante: no, son dos cosas distintas

Es evidente que el estudiante no tiene una idea clara de lo que son eventos independientes al considerar que el resultado de un lanzamiento influye en los subsecuentes. Esta creencia errónea es reforzada por los resultados obtenidos en un número reducido de experimentos, es decir, si en una serie de cincuenta lanzamientos se obtuvieron más color azul que otros colores, ¿cómo convencerlo de que en cada lanzamiento se tiene la misma probabilidad de que caiga una de las seis caras, si en la experiencia inmediata no fue así? Esto tiene implicaciones didácticas serias, lo cual sugiere que, en el estudio de la probabilidad, se realicen miles de experimentos aleatorios con la ayuda de las computadoras a través de programas de simulación, como, por ejemplo, con la hoja de cálculo. El potencial de este tipo de recursos permite optimizar el tiempo.

Hasta el momento se han analizado las preguntas que se contestan sin el apoyo de la tecnología. Ahora se examinarán las preguntas que requirieron el uso de las computadoras.

Para la primera parte del desarrollo de la actividad

En la pregunta 2.1.a se cuestiona si la pirinola se lanza una vez ¿Qué color crees que saldrá?, esta hace referencia al lanzamiento de la pirinola una sola vez, un (37.50%) de los alumnos contestó correctamente el problema. Ciertamente hubo un avance en términos cuantitativos, no obstante, las justificaciones siguen siendo en gran proporción del tipo determinista (40.63%) y de impredeción (31.25%). En la pregunta 2.1.d, se relaciona ahora con dos lanzamientos y tres lanzamientos respectivamente de la pirinola, los resultados son muy parecidos, ya que un (25.00%) contestó de manera correcta, pero un (34.38%) dio una explicación de tipo determinista

Algunas de las respuestas que se dieron al respecto son las siguientes

1. Juan se ubica en el nivel de rigor

a) Sí la pirinola se lanza una vez ¿Qué color crees que saldrá?

Difícil saber porque pueden salir los seis.

Esta pregunta un (37.50%) contestó que no se puede predecir el resultado y un (12,50%) se ubicó en el nivel de rigor argumentando que es difícil saber qué va a salir al lanzar la pirinola ya que cualquiera de seis colores puede salir, se evidencia que muchos comprenden la idea de la actividad identificando que tipo de evento se manifiesta.

2. Melany se ubica en el nivel determinista

a) Sí la pirinola se lanza una vez ¿Qué color crees que saldrá?

Imposible saberlo depende con la fuerza que lo tire

Esta pregunta un (37.50%) contestó que era imposible saberlo y un (40.63%) se ubicó en el nivel de determinismo, argumentando en una posición de tipo determinista físico al considerar la

fuerza y el peso de la pirinola como influyente para saber qué color podría salir, lo cual asocia a este nivel.

Para las respuestas 2.1.a y 2.1.b

1. Hellen se ubica en el nivel impredeción

b) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual color **NO** lo harías?

No importa el color, no se sabe que salga

c) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual color **SI** lo harías?

Cualquiera, todos tienen posibilidad de salir.

A pesar de que en la pregunta 2.1.b. y 2.1.c tienen una similitud, contestó correctamente que por cuál color sí apostaría y cuál color no apostaría, ya que opina que no importa el color igual no se sabe que va salir, un (31.25%) contestó esta pregunta adecuadamente y un (21.88%) se ubica en este nivel.

2. Erick se ubica en el nivel determinista

b) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual color **NO** lo harías?

Negro nunca sale

c) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual color **SI** lo harías?

azul bendición de dios - color del cielo

En estas dos preguntas un (40.63 %) justificaron algún color y un (40.63%) se ubican en el nivel determinista, argumentando que puede ser determinismo mítico debido a la suerte del color, mágico por cosas de Dios y experiencia básica ya que ese color nunca va a salir.

Al ser eventos equiprobables o no equiprobables se espera que los estudiantes vean la relación que existe al usar ya sea una moneda, un dado, una pirinola. De esta forma se busca que los alumnos busquen una explicación a la diferencia entre sus ideas previas y la simulación del experimento.

En las preguntas d.1 y d.2 continuamos trabajando con la pirinola, pero ahora deben confrontar los dos resultados que se puede obtener como lo son el no uso de la tecnología y el uso de ella.

Algunas de las respuestas que se dieron al respecto son las siguientes:

1. Melany se ubica en nivel determinista:

d.1. Si lanzaras dos veces seguidas la pirinola ¿Qué colores crees que saldrán para dos lanzamientos?

Todo esta en la suerte

d.2. Si lanzaras tres veces seguidas la pirinola ¿Qué colores crees que saldrán para tres lanzamientos?

*la suerte o lo que Dios quiera, probablemente así
por el color del cielo.*

En esta pregunta se puede realizar un contraste efectivo debido a las dos maneras de enseñar que se está trabajando, ya que como se puede observar hubo estudiantes en este caso el (31.25%) que en su justificación sin tecnología escriben el nombre de un color o en su defecto escogieron el nombre de una persona, explicando que esos colores saldrían porque no sale ese otro, o por

bendición del cielo, ya que el cielo es azul, sus respuestas se basan en causas poderosas, debido a esto se ubican en el nivel determinista.

En su justificación con tecnología, el (34.38%) argumentan que por posición del objeto salieron esos colores, se basan en cómo está posicionada la pirinola en el computador, esta pregunta para algunos estudiantes les causó dudas que se evidencian en las respuestas, por su manera de justificar.

En esta segunda parte de la hoja de trabajo, se indica a los estudiantes que, con ayuda del computador, realicen 10, 50, 100 y 1000 lanzamientos con la pirinola y observen lo que ocurre y contesten las preguntas 2.2.a, 2.2.b y 2.2.c.

3. Camila nivel determinista

2.2 Segunda parte Realiza 10, 50, 100, 1000 lanzamientos de la pirinola, en cada caso observa la zona gráfica de barras y responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué ocurre con el tamaño de las barras a medida que el número de lanzamientos es mayor?

Van cambiando por que las barras suenan a la medida de los numeros de lanzamientos

- b) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro gráficas.

que las barras van suviendo al mismo tiempo o bajavan

El (50.00%) contestó adecuadamente esta pregunta y de esos él (59.38%) de los estudiantes se ubicaron en el nivel determinista, argumentando que, por posición de colores, y números de lanzamientos estas barras van a aumentar de tamaño, ya que, entre más lanzamientos, debe caer en una cara y eso hará que suba el nivel de esta. Se observa que muchos estudiantes se ubican en un determinismo físico como consecuencia de la ubicación de los colores en la pirinola.

1. Hellen se ubica nivel pre-rigor

- c) Después de haber hecho el experimento de lanzar la pirinola muchas veces. Con tus propias palabras explica. ¿Por qué hay barras que tienen más altura que otras?

Fácil, Cuando cae la pirinola cae en un color puede ser que se tire otra vez y caiga el mismo y puede que no, no se sabe, solo se sabe que son 6 colores y queda $\frac{1}{5}$ para que salgan, y si lanza más sube la barra.

Muchos estudiantes en esta pregunta, logran entender que al lanzar la pirinola puede caer en un color pero argumentan mal a decir que solo puede salir un color y quedan cinco $\frac{1}{5}$, como se ve en la justificación, luego argumentan que en la medida que se hacen más lanzamientos, estos deberán subir a un tope determinado.

Para la pregunta 3.1.a, se pregunta que con base a lo que se realizó en la segunda parte conteste lo común que vieron entre la gráfica de barras y la tabla, cabe resaltar que muchos de los estudiantes no entendieron la pregunta y se limitaron a dar características o ejemplos de lo que observaron.

1. Daniela se ubica en el nivel determinista

- a) ¿Qué aspecto tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

que el azul el es mas alto y siempre sale y es el mas alto

Como podemos observar, muchos estudiantes se dejaron llevar por los colores de las barras superiores y al no tener en claro que se trata de eventos iguales de ocurrir, se limitaron a responder que los colores salieron más veces y no buscan un por qué de las cosas.

En otro orden de ideas, es indispensable analizar el impacto del uso de la tecnología en el desempeño de los estudiantes. En la siguiente gráfica se muestra tal información:

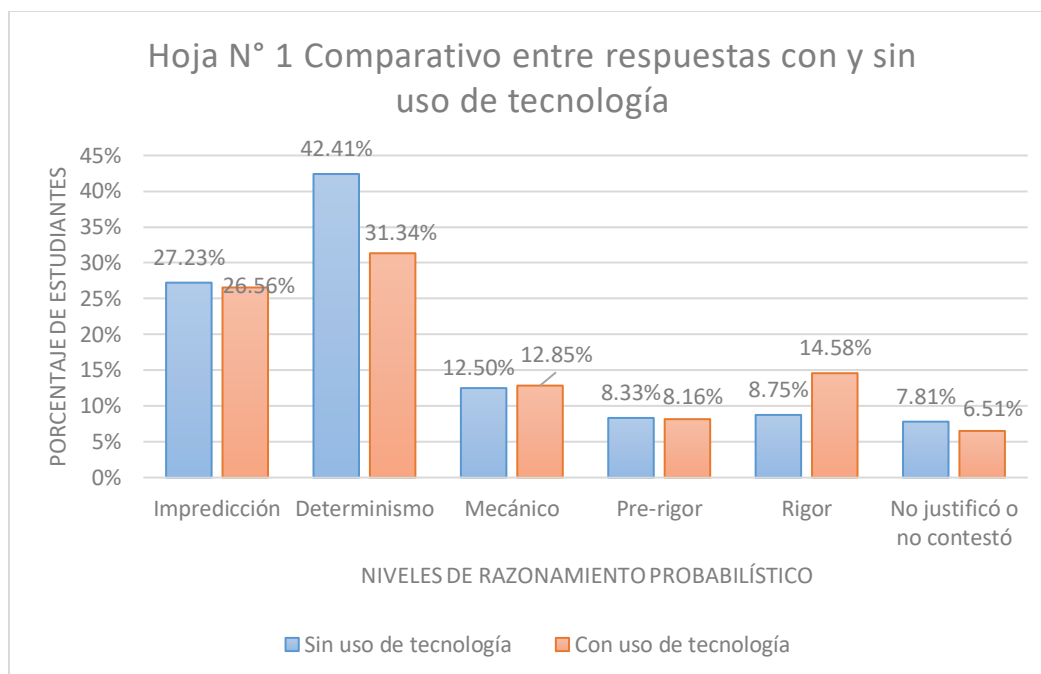


Figura 6: Comparativo entre respuestas con y sin uso de tecnología. Elaboración propia

Haciendo un análisis comparativo entre las respuestas que se dieron con y sin uso de tecnología, se encontraron los siguientes resultados

De acuerdo a la gráfica mostrada anteriormente, se tiene un avance importante en los siguientes aspectos:

- Disminuyó el porcentaje de respuestas en el nivel de impredicción, ya que de un 42.41% se pasó a un 31.34%.
- En el nivel determinista también hubo un notable avance al reducirse de un 67.34% a un 37.24% la cantidad de respuestas clasificadas en este nivel del pensamiento probabilístico.
- Disminuyó la cantidad de preguntas que se dejaron sin justificar o sin contestar, pasan de un 7.81% a un 6.51%.
- El porcentaje de respuestas catalogadas en pre-rigor disminuyó solo un 0.17 %, pasando de un 8.33% a 8.16%.

- Con el uso de la tecnología fue posible impactar positivamente en el desarrollo de la actividad, lográndose un avance significativo en el nivel de rigor pasando de un 8.75% a 14.58%.

Entre los puntos que no se mejoró es el siguiente

- Se registró un 12.85% de respuestas catalogadas en el nivel mecánico, a diferencia del 12.50% que se tenía en las preguntas que se contestaron sin el uso de la tecnología.

4.1.2.1.4 Comentarios finales de la actividad

Un dato relevante es que con el uso de la tecnología se incrementó notablemente el número de respuestas correctas, ya que se obtuvo un porcentaje de aciertos en la pregunta número ocho sin el uso de la tecnología con un (28,13%) en comparación con la pregunta número dos con el uso de la tecnología con un (43,75%). Pese a esta información, resulta preocupante que el uso de tecnología computacional no impactó de manera importante el desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes, ya que el tipo de justificaciones siguen siendo en su mayoría deterministas (40.63%). Esto se debe principalmente a que las argumentaciones que dieron se restringían a mencionar la gráfica o los porcentajes mostrados en el programa de Excel, sin llegar a realizar un auténtico análisis de la información.

4.1.2.2 HOJA DE TRABAJO 2

4.1.2.2.1 Presentación de la hoja de trabajo

Supongamos que estamos en una competencia y ustedes deben escoger cada uno, un número entre el 2 y el 12, excepto el siete, que fue escogido por la profesora Irene. Van a lanzar dos dados diez veces y deben sumar los puntos obtenidos. Si la suma de los dos dados es el número que usted escogió y salió más veces, gana.

El desarrollo de las actividades pretende que los estudiantes determinen el espacio muestral del experimento aleatorio y, además, que reconozcan la existencia de eventos equiprobables y no equiprobables. Se parte de una situación hipotética donde ellos son los participantes de un juego y dependiendo del número que escojan, analizan quién tiene mayor probabilidad de ganar. Esto, de acuerdo a la respuesta que se dio a un problema similar en el diagnóstico, aquí se espera que vean las posibilidades que tiene cada número para salir en la suma de los dos dados, para que después entren en conflicto cognitivo al realizar la segunda parte del trabajo y comprobar que el juego no es equitativo.

Una estrategia para contestar correctamente la actividad consiste en visualizar el espacio muestral y los casos favorables de cada participante

En la siguiente actividad que se pide que escriban las distintas combinaciones que se obtienen al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, se espera que logren analizar que el juego anterior no es equiprobable y habrá un número que se obtiene más fácil que otros.

Más adelante, en la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes interactúan con una hoja electrónica que simula 60 lanzamientos simultáneos de dos dados cada vez que presionan la opción animación y un cuadro de lanzamientos, donde pueden modificar la cantidad de lanzamientos que se desean. Aquí, se espera que en el programa de Geogebra observen gráficamente que no es así, ya que el número siete es el que tiene más probabilidades de ganar, y, además, que identifiquen los eventos que son equiprobables (obtener un 2 ó 12, 3 ó 11, etc.). Para tener una idea más precisa, en el siguiente gráfico se muestra una pantalla similar a la que observan los estudiantes en el programa de geogebra.



Figura 7: Diseño N°2 “lanzamientos de dados”. Elaboración propia

En la ilustración anterior, se puede observar una casilla para introducir el número de lanzamientos que se desean, dos columnas que representan los resultados obtenidos al lanzar los dos dados, en una la suma de puntos y en la otra las veces que se repite (la simulación está supuesta para 60 lanzamientos). Después se tiene una gráfica de barras donde registra las veces que se repite cada suma. Es importante mencionar, que uno de los propósitos es articular diferentes tipos de representaciones, en este caso, tabular y gráfica.

Una de las actividades que se incluyen en la segunda parte de la hoja de trabajo es que deben realizar 100, 200, 500 y 1000 lanzamientos de los dados, observar que ocurre en el computador y escribir las cosas comunes presentadas y luego explicar por qué hay barras más altas que otras. El objetivo, es que los estudiantes identifiquen el espacio muestral y los casos favorables, así mismo, utilicen esta información para que vayan sacando conclusiones de los eventos presentados.

En la segunda parte de la hoja de trabajo se requiere que el estudiante razone e identifique qué números son los más probables de salir y qué números no, para eso se le hace la pregunta que, si tuviera la opción de apostar, por qué número lo haría y porque número no, esto para determinar el sistema aleatorio del evento.

En la tercera parte, se pregunta ¿qué tuvieron en común la representación gráfica y la tabla?, se finaliza, con una pregunta propuesta en la encuesta de diagnóstico que ellos ya habían realizado y vayan analizando los eventos no equiprobables.

OBJETIVO

En la encuesta diagnóstico, al plantear un problema similar al propuesto en la hoja de trabajo, se obtuvo un desempeño muy bajo de respuestas correctas **(18,75%)**. Esto es debido a un escaso conocimiento de técnicas de conteo relativamente sencillas, al poco trabajo de probabilidad en la institución, así como la ausencia de la noción de la equiprobabilidad, entre otros temas. Esta situación planteó la necesidad de aplicar una actividad didáctica que permitiera el aprendizaje de estrategias para determinar el espacio muestral y los resultados favorables de un experimento aleatorio y al mismo tiempo, manejar los conceptos de eventos equiprobables y no equiprobables, de una forma que pueda llamar la atención a los estudiantes.

Además de lo anterior, otro de los objetivos es contribuir al desarrollo de algunas competencias establecidas en los Planes y Programas de Estudio de secundaria (2006), para lo cual se emprendieron las siguientes acciones

- Solucionar un problema, en un contexto hipotético.
- Manifestar por escrito las justificaciones a cada una de las actividades propuestas.
- Comparar sus ideas previas con el uso sistemático de la tecnología computacional.
- Trabajar con diferentes formas de representación.
- Discutir en torno a la actividad (por equipo y en plenaria), favoreciendo con ello la interacción y la comunicación verbal.

CONDICIONES DE LA APLICACIÓN

La hoja de trabajo se lleva a cabo en una sesión de dos horas-clase (aproximadamente 70 minutos en total) y dividida en dos partes: la primera, de manera grupal en el salón de clases con ayuda de lápiz y papel sin tecnología; la segunda individualmente, con el apoyo de la tecnología computacional.

En lo referente a las características generales de la hoja de trabajo, ésta contiene preguntas de selección múltiple con espacios para justificar cada una de las respuestas. Además, se incluyen algunas tablas en las que se deben escribir los eventos equiprobables después de lanzar los dados, las combinaciones posibles de resultados, así como también el cálculo de la probabilidad de ganar el juego, de acuerdo al contexto del problema planteado

Es preciso mencionar que la actividad por sí misma, no garantiza la consecución de los objetivos establecidos, sino que es necesario establecer una dinámica de clase en que los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje, debido a que se evidencia que unos estudiantes captaron la idea más rápido que otros.

En el desarrollo de la actividad, se explica varias veces los ejemplos para que estuviera claro y no quedaran dudas, en la primera parte de la hoja de trabajo se tiene un acercamiento grupal a la situación problemática con la idea de fomentar la discusión de las nociones matemáticas involucradas, y la segunda se contesta de manera individual.

Al finalizar la actividad se socializa, discutiendo con ellos la confrontación de ideas y la puesta en común a partir de la interacción entre los estudiantes, luego se cierra con la presentación de las ideas relevantes por parte de la docente, señalando los errores y explicando los conceptos estudiados en la clase. Esto último con el propósito de formalizar el conocimiento.

4.1.2.2.2 Análisis de resultados

Para los objetivos del presente estudio, es primordial contrastar la respuesta que dan los estudiantes a la situación problema con y sin uso de la tecnología. De igual manera, es importante clasificar sus argumentos dentro de los niveles del razonamiento probabilístico. El análisis de esta información se hace simultáneamente desde dos perspectivas, cuantitativa y cualitativamente. Los datos recolectados son presentados en dos tablas con el propósito de mostrar por separado las preguntas que son de selección múltiple y las que son de respuesta abierta.

A continuación, se muestra la tabla que contiene las respuestas por opción, señalando la correcta en cada caso por medio de un sombreado en la celda correspondiente.

Tabla 12: Opción por respuesta de cada pregunta con y sin uso de la tecnología

"Lanzamiento de dos dados"							
N° de pregunta		Opciones de respuesta					
		a	b	c	d	e	f
Sin uso de la tecnología	1	7 21,88%	12 37,50%	8 25,00%	5 15,63%		
	2	7 21,88%	7 21,88%	7 21,88%	6 18,75%	3 9,38%	2 6,25%
Con uso de la tecnología	3.b	22 68,75%	5 15,63%	2 6,25%	3 9,38%		
	3.c	2 6,25%	3 9,38%	14 43,75%	4 12,50%	6 18,75%	3 9,38%
	3.d	15 46,88%	3 9,38%	6 18,75%	5 15,63%	3 9,38%	

Se muestra el porcentaje de las opciones de respuestas de cada estudiante en el lanzamiento de dados con y sin uso de la tecnología.

Tabla 13: Opción por respuesta de cada pregunta con y sin uso de la tecnología

"Lanzamiento de dos dados"								
N° de pregunta		Niveles de razonamiento probabilístico						
		Impredicción	Determinista	Mecánico	Pre-rigor	Rigor	No contestó	No justificó
Sin uso de la tecnología	1	12 37,50%	17 53,13%	1 3,13%	2 6,25%			
	2	9 28,13%	13 40,63%	4 12,50%	4 12,50%			2 6,25%
Con uso de la tecnología	3.b	7 21,88%	10 31,25%	5 15,63%	8 25,00%	2 6,25%		
	3.c	7 21,88%	9 28,13%	6 18,75%	8 25,00%	1 3,13%		1 3,13%
	3.d	6 18,75%	11 34,38%	5 15,63%	6 18,75%	2 6,25%		2 6,25%

Se muestra el porcentaje de las opciones de respuestas de cada estudiante en el lanzamiento de dados con y sin uso de la tecnología categorizadas en los niveles de razonamientos probabilístico.

De acuerdo a la tabla anterior, se observa que en la primera pregunta el (37.50%) de los estudiantes considera justo el juego, lo cual indica que existe un problema para identificar la existencia de eventos no equiprobables y así sus justificaciones no son las indicadas y carecen de sustento matemático. Como se evidencia en la tabla, el (53.13%) de los estudiantes se ubicó en un nivel determinista, un (37.50%) se ubica en el nivel de impredeción. Para ilustrar lo anterior, a continuación, se muestran algunas evidencias de las respuestas que se dieron sin el uso de tecnología

1. En esta pregunta Jhon Emerson se ubica en un nivel de impredeción

1. ¿El juego anterior es justo?

☒ No

b. Sí

c. Es imposible saberlo

d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Puede caer cualquier número y todos pueden ganar

Esta pregunta un (21,88%) contestó esa opción y un (37.50%) se ubicó en el nivel de impredeción, argumentando que puede caer cualquier número y todos pueden ganar, se evidencia que no tiene muy clara la noción de eventos equiprobables y no equiprobables, lo cual la lleva a cometer errores y no justifica adecuadamente.

2. La estudiante Melany se ubica en el nivel determinista

1. ¿El juego anterior es justo?

☒ No

b. Sí

c. Es imposible saberlo

d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

si el siete ya lo escogieron es porque ya saben que va a salir
estarian haciendo trampa y no es justo

En esta pregunta un (21.88%) contestó la opción no, siendo la opción correcta y un (53.13%) se ubicó en el nivel determinista, argumentando que debe haber trampa y por eso no se puede escoger el siete ya que va a salir, la justificación no se considera adecuada ya que se hace alusión a un factor físico de hacer trampa y por ello no ganaran el juego.

Respecto a la segunda pregunta de la primera parte de la hoja de trabajo sin uso de la tecnología, solamente un 21.88% de respuestas fue acertada, y nuevamente los argumentos son en su mayoría deterministas (40.63%) seguidos por el nivel de impredeción (28.13%). Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Sofía se ubica en el nivel determinista

2. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar el juego?

- ☒ a. Usted
- b. Su compañero
- c. La profesora Irene
- d. Todos tienen la misma probabilidad de ganar
- e. Imposible saberlo
- f. No se

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Porque el 12 es más grande que el siete y el 5

En esta pregunta se evidenció que muchos de los estudiantes escogieron números entre 10, 11 y 12, argumentando que son los números más altos que hay, el (21.88%) escogió la respuesta a y b respectivamente, indicando que tanto él como su compañero tienen la probabilidad de ganar. Evidentemente esta respuesta es equivocada y el argumento es determinista al referirse a una característica física.

2. Melany se ubica en el nivel pre-rigor

2. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar el juego?

- a. Usted
- b. Su compañero
- ☒ c. La profesora Irene
- d. Todos tienen la misma probabilidad de ganar
- e. Imposible saberlo
- f. No se

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

son los dos compañeros $12 + 2 = 14$, la maestra lo divide entre 2, $14 \div 2 = 7$ y por eso es 7.

En esta pregunta un (12.50%) se ubica en el nivel de pre-rigor, entre estos se caracteriza la justificación de Melany que argumenta que son dos compañeros y la profesora hace $12 + 2$ y lo divide entre 2 y le da 7, por eso escoge ese número, aunque la respuesta es correcta, la explicación es algo confusa, a pesar de que opera correctamente, no se evidencia como concluye de esta manera, es evidente la dificultad que tiene para expresar sus ideas por escrito.

Hasta el momento se han mostrado algunas evidencias de respuestas que dieron los estudiantes sin ayuda de la tecnología. Ahora se analizan algunos resultados que se obtuvieron a partir del uso de la computadora en la resolución de las actividades.

En la pregunta número 3.b, después de haber leído el juego se cuestiona nuevamente si el juego es justo, a lo cual un **(68.75%)** de respuestas fue correcta en comparación a las obtenidas sin uso de tecnología. Indudablemente este resultado es consecuencia del fenómeno de la tecnología con el programa de simulación.

Para la pregunta 3.c se cuestiona nuevamente si alguno de los participantes tiene mayor probabilidad de ganar el concurso, a lo cual un (43.75%) de respuestas fue correcta en comparación del (21.88%) obtenido inicialmente (sin uso de la tecnología). Evidentemente este resultado es consecuencia de la información presentada tabular y gráficamente en el programa de simulación, motivo por el cual los argumentos siguen siendo en su mayoría del tipo determinista (un 28.13%) al considerarse los datos presentados en el computador como una justificación válida, sin asumir

la responsabilidad de buscar una explicación personal a partir del análisis correspondiente. Sin embargo, hubo un ligero avance en el nivel de pre-rigor al pasar de un (12.5%) al (25%). Una evidencia es mostrada a continuación:

1. Sara se ubica en el nivel de pre-rigor

b) ¿El juego anterior es justo?

- ☒ (a.) No
- b. Sí
- c. Es imposible saberlo
- d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Vi que el siete se repite mas y de razon no lo puedo escoger. porque ese sale mas veces

En esta pregunta un (25%) se ubicó en este nivel y la opción contestada fue no, siendo la opción correcta, argumentando que el siete es la suma que más se repite y por eso no se puede escoger, ya que ese va a salir, hace alusión posiblemente a las combinaciones que se pueden obtener, aunque no las especifica.

Para la pregunta 3.c se muestra el siguiente resultado:

1. Juan nivel pre-rigor

c) ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar el juego?

- a. Usted
- b. Su compañero
- ☒ c. La profesora Irene
- d. Todos tienen la misma probabilidad de ganar
- e. Imposible saberlo
- f. No se

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Porque sale mas el 7 por su suma que lleva.

Aunque la explicación de Juan es un poco confusa, en su justificación hace referencia a las sumas, posiblemente de las combinaciones que se pueden obtener, aunque no se atreve a decir cuáles son. Cabe mencionar que en la primera parte de la hoja de trabajo su argumento fue de impredeción, por lo que este estudiante en particular tuvo un avance importante. No obstante, es evidente la dificultad que tiene para expresar sus ideas por escrito.

El caso de la pregunta 3.d es curioso, ya que, ya había salido en la encuesta diagnóstica y muchas de las respuestas fueron de tipo impredeción con un (50%), esta vez un (46.88%) escogió la respuesta correcta pero sus justificaciones varían, como se mostrará a continuación:

1. Erick se ubica en el nivel mecánico

En el juego de parkés se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Olga es un estudiante de grado quinto y está jugando parkés con sus amigos. A Olga le faltan dos fichas para acabar el juego una a 7 puntos de terminar y la otra ficha a 5 puntos de terminar. Al lanzar los dos dados que es más probable que salga:

- a. Siete puntos.
- b. Cinco puntos.
- ☒ c. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- d. Imposible saberlo
- e. No sé.

por que los dos tienen 3 posibilidades de salir	ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA
--	---

En este caso se observa que el estudiante no tiene control sobre la situación planteada, ya que consideró que el cinco y el siete tienen las mismas posibilidades de salir, cosa que es un error, debido a que el siete tiene más combinaciones.

2. Antuan nivel pre-rigor

En el juego de parqués se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Olga es un estudiante de grado quinto y está jugando parqués con sus amigos. A Olga le faltan dos fichas para acabar el juego una a 7 puntos de terminar y la otra ficha a 5 puntos de terminar. Al lanzar los dos dados que es más probable que salga:

- a. Siete puntos.
- b. Cinco puntos.
- c. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- d. Imposible saberlo
- e. No sé.

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

por que $4+3=7$ $6+1=7$ $5+2=7$

La respuesta es correcta y se observa que el estudiante ya tuvo un avance significativo al identificar que el siete tiene más posibilidades, aunque en forma incompleta, las distintas combinaciones que se pueden obtener al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, un (18.75%) se ubica en este nivel de pre-rigor.

Por otra parte, al inicio de este apartado se hablaba de dos tablas, habiéndose analizado la primera de ellas hasta el momento, así que a continuación se presentan los resultados de la segunda, la cual contiene la información relativa a las preguntas de respuesta abierta y que se contestaron con y sin la ayuda de la tecnología computacional.

Para efectos de interpretación, las respuestas son clasificadas como correctas, incorrectas, incompletas o sin contestar, y de acuerdo a la justificación de cada una de ellas, fueron categorizadas en la escala del pensamiento probabilístico.

Tabla 14: Opción por respuesta de cada pregunta abierta con y sin uso de la tecnología

Lanzamiento de dos dados						
Actividades	N° de pregunta		Respuesta			
			Correcto	Incorrecto	Incompleta	No contestó
	Identificar combinaciones de resultados	3				
s sin uso de tecnología	Identificar número de mayor probabilidad	4	12 37,50%	20 62,50%		
actividades con uso de tecnología	Identificar aspectos en las tablas	1.a				
	Identificar aspectos en las tablas	1.b				
	Identificar eventos no equiprobables	2.a	5 15,63%	10 31,25%	9 28,13%	8 25,00%
	Identificar número de menor probabilidad	2.b	7 21,88%	18 56,25%	7 21,88%	
	Identificar número de mayor probabilidad	2.c	15 46,88%	13 40,63%		4 12,50%
	Identificar relaciones entre tablas	3.a				
	Determinar la equiprobabilidad de los eventos	3.e	22 68,75%	10 31,25%		

Se muestra los porcentajes de las respuestas abiertas ubicadas como correcto, incorrecto, incompleta o no contestada, con y sin uso de tecnología computacional

Tabla 15: Opción por respuesta de cada pregunta abierta con y sin uso de la tecnología

Lanzamiento de dos dados									
Actividades	N° de pregunta		Niveles de razonamiento probabilístico						
			Impredicción	Determinista	Mecánico	Pre-rigor	Rigor	No contestó	No justificó
	Identificar combinaciones de resultados	3			11 34,38%	21 65,63%			
Actividades con uso de tecnología	Identificar número de mayor probabilidad	4	6 18,75%	14 43,75%	3 9,38%	6 18,75%			3 9,38%
	Identificar aspectos en las tablas	1.a	1 3,13%	13 40,63%	4 12,50%	1 3,13%		9 28,13%	4 12,50%
	Identificar aspectos en las tablas	1.b	3 9,38%	15 46,88%	5 15,63%	3 9,38%		6 18,75%	
	Identificar eventos no equiprobables	2.a	5 15,63%	12 37,50%	2 6,25%	5 15,63%		8 25,00%	
	Identificar número de menor probabilidad	2.b	2 6,25%	10 31,25%	2 6,25%	4 12,50%	4 12,50%		10 31,25%
	Identificar número de mayor probabilidad	2.c	2 6,25%	8 25,00%	3 9,38%	5 15,63%	3 9,38%	4 12,50%	7 21,88%
	Identificar relaciones entre tablas	3.a	2 6,25%	10 31,25%	2 6,25%	3 9,38%		15 46,88%	
	Determinar la equiprobabilidad de los eventos	3.e	5 15,63%	13 40,63%	4 12,50%	6 18,75%	4 12,50%		

Se muestra los porcentajes de las respuestas abiertas ubicadas como correcto, incorrecto, incompleta o no contestada, con y sin uso de tecnología computacional y categorizada según los niveles de razonamiento probabilístico

Sin el uso de la tecnología respecto a la pregunta tres de la hoja de trabajo, se pedía que escribieran las distintas combinaciones que se obtienen al lanzar dos dados y sumar los puntos

resultantes, cabe resaltar que la pregunta tocó explicarla varias veces ya que muchos no entendían que había que realizar.

En el caso de la pregunta cuatro, un (37.50%) de los estudiantes logró identificar que el número siete es el que tiene mayor probabilidad de obtenerse al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, sin embargo, un (46.88%) de los argumentos son del tipo deterministas, y tan solo un (21.88%) corresponden al nivel de pre-rigor, cabe resaltar que se hace una pregunta similar, pero ya deben contestar con apoyo de la tecnología

Para la actividad tres, se tiene las siguientes apreciaciones:

1. Erick nivel de pre-rigor

Suma de puntos de los dados	Opciones
2	1+1
3	1+2
4	1+3 , 2+2
5	2+3 , 4+1
6	3+3, 6+1 , 4+2
7	4+3 , 5+2 , 6+1
8	4+4 , 5+3 , 6+2
9	5+4 , 6+3
10	5+5 , 6+4
11	5+6
12	6+6

Hubo un notable progreso al registrarse un 65.63% de estudiantes que se ubican en el nivel de pre-rigor. Se observa que el estudiante ya tuvo un avance significativo al identificar, aunque en forma incompleta, las distintas combinaciones que se pueden obtener al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes.

2. Jhon Emerson nivel mecánico

Suma de puntos de los dados	Opciones
2	1 + 1
3	1+2 2+1 2 + 1
4	2 + 2 3 + 1
5	4 + 1 3 + 2 4 +
6	4 + 2 3 + 3 5 + 1
7	4 + 3 5 + 2 6 + 1
8	4 + 4 5 + 3 7 + 1
9	8 + 1 7 + 2 6 + 3
10	5 + 5 9 + 1 8 + 2
11	5 + 6 10 + 1 9 + 2
12	11 + 1 10 + 2 9 + 3

En este caso se observa que el estudiante no tiene control sobre la situación planteada, ya que expone que un dado puede tener valores superiores a seis, lo cual es incorrecto. Lo sorprendente de la situación es que no fue la única persona que cometió este error, ya que un 34.38% utilizó una justificación similar.

Como último, se les preguntaba a los estudiantes si algún número obtenido tiene mayor probabilidad que los demás al lanzar dos dados. Algunas respuestas son las siguientes

1. Jhon Emerson Nivel de impredeción

¿Algún número obtenido tiene mayor probabilidad que los demás? (En caso de ser así, escribe cuál es el número y justifica tu respuesta).

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Dificil decir que numero

En este caso, el estudiante ha dicho que no se puede predecir el número, lo cual lo lleva a caracterizarse en el nivel de impredeción, se evidencia que el estudiante al no haber realizado correctamente el anterior ejercicio, este se le dificulta un poco ya que no se atreve a decir un número. Cabe mencionar que un (18.75%) de las respuestas quedaron en este mismo nivel del razonamiento probabilístico, y un (9.38%) que no supieron argumentar.

2. Frank se ubica en el nivel de pre-rigor

¿Algún número obtenido tiene mayor probabilidad que los demás? (En caso de ser así, escribe cuál es el número y justifica tu respuesta).

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Si el 7 porque tiene más sumas o sea que más números al sumarse son 7

Frank proporciona un argumento correcto, pero al no mencionar las combinaciones de resultados posibles, su justificación se considera en el nivel de pre-rigor.

En la segunda parte, usando la tecnología computacional se le pide realizar 100, 200, 500, 1000 lanzamientos de los dados, en cada caso observa la zona gráfica de barras, para así en las preguntas 1.a y 1.b, explique qué fue lo común que observó en las gráficas y comente porque hay unas barras que tienen mayor tamaño que otras. En este caso la mayoría de los estudiantes afirman que las barras suben debido a que cada vez se hacen más lanzamientos, pero en su defecto hay distintos tipos de argumentaciones, se muestran algunas a continuación.

1. Danna Marcela se ubica en el nivel de determinismo

a) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro graficas.

la cosas comunes que vi en el cuadro fueran las cosas son es que hay suma de puntos que se repiten más que otros

El (40.63%) es considerado en el nivel de determinismo, ya que dicen que, por experiencia básica, entre más lanzamientos hagas, las barras van a incrementar, este tipo de respuestas se esperan ya están respondiendo lo que están observando en el computador.

2. Olga nivel mecánico

a) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro graficas.

las cosas comunes que yo vi
fue que el uno no puede salir
ni el 13.

Como se observa, el estudiante entiende que el espacio muestral está entre el 2 y el 12, a pesar de que su argumentación es correcta, no corresponde a lo que se le pide, ya que se sale del rango de medida.

Para la pregunta 1.b, la mayoría de las personas concluyó lo mismo, pero ninguno se atrevió a decir que era el siete por tener más combinaciones para salir.

1. Maria Camila se ubica en el nivel mecánico

b) Con tus propias palabras explica ¿por qué hay barras que tienen más altura que otras?

Las barras altas fue porque se repetían mas veces
y la barras bajas fueron las que se repitieron menos
veces

La estudiante hace referencia a la repetición de números, pero no a la repetición de combinaciones, ya que el número siete al tener más posibilidades, su barra será más alta que las demás.

Continuando con la segunda parte, se les pide nuevamente que realicen 100,200,500 y 1000 lanzamientos y debe responder las preguntas 2.a ,2. b y 2.c, la cuales se les pide justificar por qué

cree que hay sumas que se repiten más que otras, y porque número apostarías y por cual no. Se muestran algunas respuestas a continuación

1. María Camila se ubica en nivel de determinismo

2. Nuevamente realiza los siguientes números de lanzamientos: 100, 200, 500 y 1000, en cada caso observa la tabla y contesta los siguientes puntos.

- a) Ahora observa la tabla. Encontrarás que hay suma de puntos que se repiten más que otros. ¿Cómo puedes explicar eso?

A medida que van cambiando los números van cambiando se van sumando las veces que sacaron y por eso hay barras altas y barras bajas

Un (37.5%) de los estudiantes justificó de manera similar esta pregunta, argumentando que la suerte influye mucho, ya que es difícil saber qué número va a salir, este tipo de justificación se clasifica en un nivel determinista mítico, ya teniendo presente el apoyo de la tecnología se esperaba justificaciones más matemáticas y con mejores argumentos.

2. Antuan se ubica en nivel de pre-rigor

- a) Ahora observa la tabla. Encontrarás que hay suma de puntos que se repiten más que otros. ¿Cómo puedes explicar eso?

El 7 Porque hay mas formas de sumarlo

Como se evidencia, los estudiantes tienen tendencia a escribir lo que, para ellos está bien, a pesar de que involucran el número siete en sus justificaciones, se nota la falta de conceptos e ideas erróneas que tienen, ya que creen que el siete tiene más nivel por estar en medio del 2 y el 12.

Para la pregunta 2.b y 2.c tenemos las siguientes justificaciones:

1. Olga se ubica en el nivel determinismo

b) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual número **NO** lo harías?

por el 1 porque ese numero
cuando sale en la grafica sale
muy bajito.

c) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual número **SI** lo harías?

por el 6 y por el 4 porque
son mis numeros preferidos.

Un tanto (31.25%) y (56.255) respectivamente dieron respuestas equivocadas como la que observamos, ya que entienden bien el espacio muestral pero al explicarlo se equivocan, cabe resaltar que muchos estudiantes argumentaron similarmente escogiendo el número 1 y el 13, quizás esto se deba a la falta de atención con la dinámica o el poco conocimiento que tienen de los eventos no equiprobables, para la respuesta 2.c, observamos que el nivel determinismo está presente, ya que para ellos no vale las combinaciones y los eventos, escogen números por gustos.

2. Erick se ubica en el nivel rigor

b) ¿Si tuvieras que apostar, por cual número **NO** lo harías?

12 Por que solo lo se puede sumar con pocos números. con 6 y 6

c) ¿Si tuvieras que apostar, por cual número **SI** lo harías?

7 Por que hay mas formas de sumarlo con 3 y 4 4 y 3 2 y 5 5 y 2 y así

A pesar de que en la pregunta 2.b. y 2.c tienen una similitud, el estudiante contestó correctamente que por cual número no apostaría y cuál número si apostaría, tuvo en cuenta el espacio muestral y las posibles combinaciones, aunque no las menciona, demostrando un avance en cuanto a los eventos no equiprobables, cabe resaltar que muy pocos estudiantes tienen respuestas similares.

Para la tercera parte, se les pide que analicen los aspectos que tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla, se presentan el siguiente caso.

1. Maria Camila se ubica en el nivel determinismo

De acuerdo con la primera y segunda parte de la actividad, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aspectos tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

Los numeros que estan en la tabla son las veces que a salido en las barras

Así como en la hoja de trabajo N° 1, observamos que esta pregunta muchos de los estudiantes no comprenden bien lo que se les pregunta, muchos llegaron a responder que las dos tienen en común que estaban en el computador, pero esta respuesta fue una de las que sobresalió ya que encuentra algo en común, argumentando que la tabla muestra cuántas veces salió el número y la altura de la gráfica refleja la cantidad de repeticiones que tuvo.

Para la pregunta 3.e, se pretendía identificar si los estudiantes ya manejan el concepto de los eventos equiprobables y los que no, para esto se muestra lo siguiente:

1. Melany se ubica en el nivel de determinismo

- e) En el juego de parques se lanzan los dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

Si _____ No X

¿Por qué?:

el 7 sale más de 10 000 000 veces.

En el caso de la pregunta 3.e, un (68.75%) de los estudiantes logró identificar que el número siete es el que tiene mayor probabilidad de obtenerse al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, sin embargo, un (40.63%) de los argumentos son del tipo deterministas, y tan solo un 18.75% corresponden al nivel de pre-rigor. No obstante, se considera un gran progreso respecto a los resultados de la primera parte de la hoja de trabajo y la encuesta diagnóstica. Por otro lado, si bien es cierto que, para contestar correctamente esta pregunta, simplemente basta con interpretar la gráfica expuesta en el programa de simulación y así identificar que la barra más alta será la del número siete.

2. Jhon Emerson se ubica en el nivel de impredeción

SI _____ No X

¿Por qué?:

Hay unos que tienen muy poca probabilidad de salir

Se puede observar que, a pesar que la respuesta es correcta, el estudiante toma como referencia un caso particular para contestar la pregunta ya que dice que hay unos que van a salir muy poco, pero no se atreve a decir cuáles son esos números.

Ya para finalizar, es importante hacer un estudio comparativo de los resultados globales de esta hoja de trabajo respecto al uso de la tecnología, para así evaluar el impacto de la utilización de este recurso, así que en las siguientes gráficas se muestra tal información.

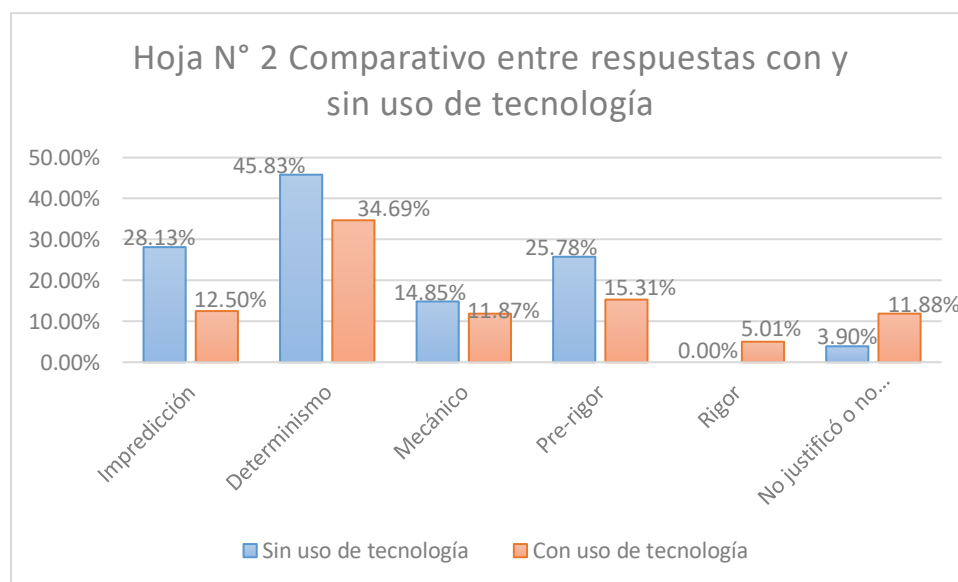


Figura 8: Comparativo de los resultados globales con el uso de tecnología computacional y sin el uso de la misma. Elaboración propia

De acuerdo a la gráfica mostrada, se tiene un avance importante en los siguientes aspectos:

- Disminuyó el porcentaje de respuestas en el nivel de impredeción, ya que de un 28.13% se pasó a un 12.50%.
- En el nivel determinista también hubo un notable avance al reducirse de un 45.83% a un 34.69% la cantidad de respuestas clasificadas en este nivel del pensamiento probabilístico.
- Se incrementaron las justificaciones en el nivel de rigor al pasar de un 0.00 % a un 5.01%.
- Para el nivel mecánico, a pesar de que hubo una pregunta sin uso de tecnología donde muchos se ubicaron en este nivel, disminuye al pasar de un 14.85% a un 11.87%.

Entre los puntos en que no se mejoró son los siguientes:

- Se registró un 15.31% de respuestas catalogadas en el nivel pre-rigor, a diferencia del 25.78% que se tenía en las preguntas que se contestaron sin el uso de la tecnología.
- Aumentó de un 3.90% a un 11.88% la cantidad de preguntas sin contestar o justificar.

4.1.2.2.3 Comentarios finales de la actividad

En la aplicación de la segunda hoja de trabajo se obtuvieron progresos significativos al incrementarse la cantidad de respuestas en el nivel de pre-rigor, además, disminuir el índice de justificaciones de corte determinista e impredeción.

Otras conclusiones importantes son las siguientes:

- Menos del 20% de los estudiantes logró calcular la probabilidad correctamente o las combinaciones posibles de los eventos, esta dificultad radica en el hecho de no visualizar por completo el espacio muestral ni los resultados favorables que se pueden obtener.
- El uso de la tecnología motivó a que muchos estudiantes (alrededor del 37%) justificaran sus respuestas en función de la gráfica y las tablas mostradas en el programa de simulación, es decir, no asumen el compromiso personal de encontrar una explicación al resultado del fenómeno aleatorio en cuestión.
- En términos generales se puede decir que la aplicación de esta actividad permitió un avance en el desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes.

4.1.3 ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LA ENCUESTA DE DIAGNÓSTICO Y LAS HOJAS DE TRABAJO

La información presentada en este capítulo es de suma importancia para evaluar el impacto de las actividades didácticas en el aprendizaje de los estudiantes. Para esto, se hace un estudio comparativo entre los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica y los recolectados en las hojas de trabajo, y con ello determinar el nivel de apropiación de las nociones de probabilidad, así como el desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes.

De esta manera, se obtuvieron resultados significativos que permiten afirmar que las actividades propuestas influyeron positivamente en el aprendizaje de la probabilidad. Para ilustrar lo anterior, en la siguiente gráfica se muestran los resultados globales correspondientes a la categorización de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes, tanto en la encuesta de diagnóstico como en las hojas de trabajo.

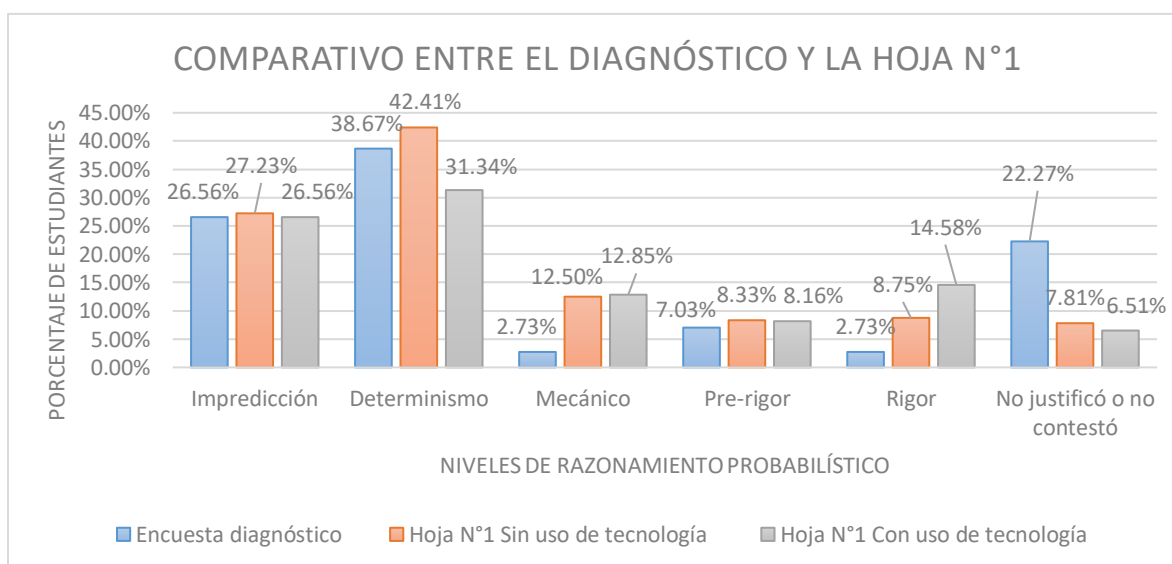


Figura 9: Comparativo de los resultados globales de la encuesta diagnóstica con la hoja n° 1, sin uso y con uso de tecnología. Elaboración propia

Tal como se puede percibir en la figura anterior, en términos cualitativos se presentaron avances muy importantes, entre los cuales se mencionan los siguientes:

- Se redujo el porcentaje de respuestas en el nivel de determinismo al pasar de un 38,67% a 31,34%, a pesar de que sin el uso de tecnología no se realiza un avance, se evidencia como con el recurso tecnológico se da un gran paso.
- Se incrementaron las justificaciones en el nivel de pre-rigor al pasar de un 7,03% en la encuesta diagnóstica a un 8,33% y 8,16% en las justificaciones sin y con uso de la tecnología respectivamente.
- Aumentaron las argumentaciones de rigor al pasar de un 2,73% a un 8,75% y 14,58% respectivamente.
- Disminuyó la cantidad de preguntas sin contestar o sin justificar.

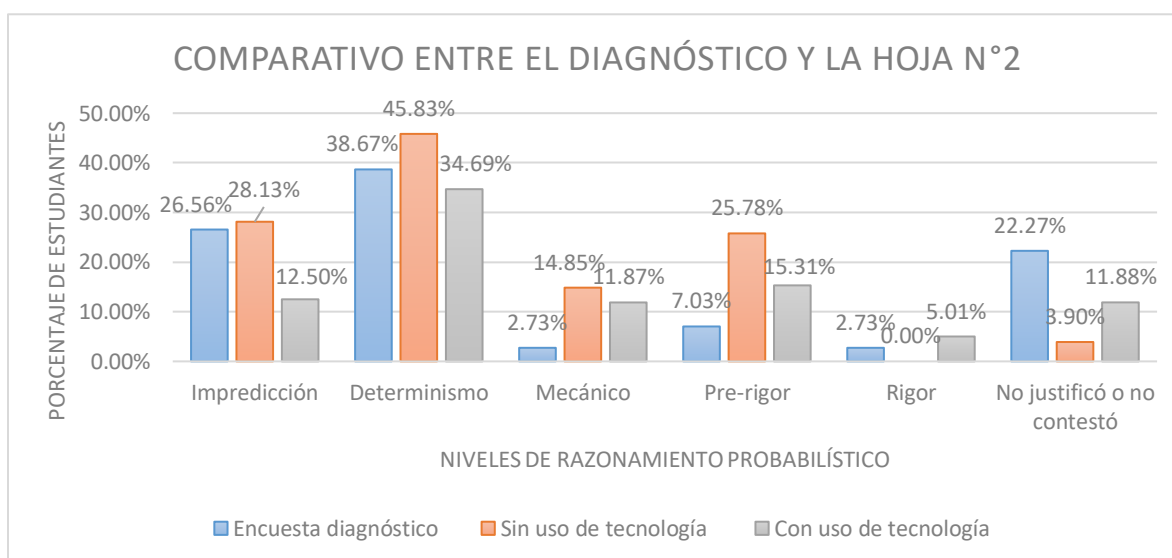


Figura 10: Comparativo de los resultados globales de la encuesta diagnostica con la hoja n° 2, sin uso y con uso de tecnología. Elaboración propia

Como en la figura anterior, se observan mejoras en términos cualitativos, entre los cuales se mencionan los siguientes:

- Disminuyó el porcentaje de respuestas en el nivel de impredicción pasando de un 26,56% en la encuesta diagnostica a un 12,50% con el uso de la tecnología.

- Se puede observar un mínimo avance en el nivel determinismo con respecto a la encuesta diagnóstica y la hoja de trabajo con uso de la tecnología pasando de un 39,67% a 34,69, a pesar del aumento de las justificaciones sin el recurso tecnológico 45,83%.
- Se incrementaron las justificaciones en el nivel de pre-rigor al pasar de un 7,03% en la encuesta diagnóstica a un 25,78% y 15,31% en las justificaciones sin y con uso de la tecnología respectivamente.
- Aumento significativamente el nivel rigor obteniéndose primeramente un 2,73% en la prueba diagnóstica a un 5,01% en la hoja con uso de la tecnología.
- Se redujo la cantidad de preguntas sin contestar o sin justificar

En conclusión, el presente análisis comparativo muestra un importante desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes con quienes se trabajó, así que la evaluación de las actividades didácticas es satisfactoria

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Este trabajo enfocado en la línea de investigación de las Nuevas Tecnologías en la Educación Matemática (TICEM), particularmente en el aprendizaje de la probabilidad, en estudiantes de grado quinto de primaria; permitió el diseño de un conjunto de secuencias didácticas entorno a problemas contextualizados de su cotidianidad. Esto, con el objetivo de dar cuenta acerca de las condiciones iniciales respecto a algunas características del pensamiento aleatorio de estudiantes del grado quinto con la intervención tecnológica.

Desde este punto, el trabajo realizado permite determinar que entre las características que favorecen el desarrollo del pensamiento probabilístico, se resalta la manera dinámica que se debe establecer al interior de la clase; la instrucción de un ambiente escolar en el que los estudiantes contribuyan activamente en la construcción de su aprendizaje, y donde el cambio de roles del docente y el estudiante los aleje de una enseñanza tradicional. En este sentido, es importante entonces, propiciar las condiciones necesarias para dar la oportunidad a los estudiantes de interactuar con sus compañeros a través de la discusión de ideas probabilísticas.

Así pues, concluimos que las actividades llevadas al aula de clases deben partir de problemas reales, alrededor de los cuales los estudiantes formulen conjeturas para luego validarlas o refutarlas; para ello, los estudiantes oportunamente deben tener un acercamiento individual a la situación problemática en la que emerjan sus concepciones previas. Posteriormente, se ejecuten trabajos en equipos en los que, a partir de la interacción y el contacto con numerosos experimentos aleatorios relacionados al problema, se comparen las expectativas de solución con los resultados obtenidos. Enseguida se discuta la actividad para confrontar ideas y llegar a una puesta en común. Finalmente, el docente debe formalizar la actividad, indicando los errores y expresando las nociones que la actividad pone en juego.

En efecto se debe destacar que, en el estudio de la probabilidad, un limitado número de experimentos aleatorios fomentan la concepción de ideas erróneas; un ejemplo concreto se muestra en la entrevista realizada en el diagnóstico a una estudiante (ver apartado 4.1.2.1.3) que lanzó una pirinola en doce ocasiones y que, debido a los resultados obtenidos, no fue capaz de identificar la equiprobabilidad. Por tal motivo, es preciso incorporar la tecnología computacional para simular

una gran cantidad de experimentos aleatorios en poco tiempo, de manera que la probabilidad frecuencial se aproxime a la probabilidad clásica, de acuerdo a la ley de los grandes números. Este tipo de recursos contribuye a erradicar las concepciones equivocadas de los estudiantes en torno a la probabilidad.

En consecuencia, en un proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad se debe producir un espacio de discusión, de intercambio de ideas, además, utilizar los recursos tecnológicos al alcance para propiciar un conflicto cognitivo entre las concepciones erróneas de los estudiantes y los resultados obtenidos a partir de la experimentación o simulación de situaciones aleatorias. Al respecto, estas condiciones favorecen la construcción de las nociones básicas de la probabilidad, lo que promueve el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Ahora bien, en lo que respecta a las características iniciales del proceso de pensamiento probabilístico en estudiantes de 5 grado, y de acuerdo con los resultados del diagnóstico, se encontró una categorización del razonamiento probabilístico similar al propuesto por Benítez y Sánchez (1997) y De Las Fuentes (2008), la cual comprende cinco dimensiones: niveles de impredeción, determinista, mecánico, pre-rigor y rigor.

En la investigación que reportó De las Fuentes (2008) en el nivel de bachillerato, la mayoría de los estudiantes encuestados se ubicó en los niveles de impredeción y determinista. Así pues, con el presente estudio se obtuvieron resultados semejantes con alumnos de quinto grado de primaria al aplicarles una encuesta diagnóstica, obteniendo la siguiente información:

- a. Un 26.56% de las respuestas fueron clasificadas en el nivel de impredeción y un 38.67% en el determinista.
- b. Solamente un 7.03% de las respuestas son del tipo de pre-rigor y 2.77% en el nivel de rigor.

Tal como se puede observar, un alto porcentaje de estudiantes se ubicó en los niveles inferiores del razonamiento probabilístico. Estos resultados negativos se deben posiblemente a la persistencia de creencias equivocadas, como, por ejemplo, la confianza en el uso de amuletos (un 37.50% de los alumnos admitieron utilizarlos). Otra idea errónea que se manifestó es considerar que los resultados de todos los experimentos aleatorios son dependientes entre sí, y, además, que la totalidad de eventos de una situación azarosa son equiprobables. Así mismo, se encontró la falta de recursos cognitivos, tales como el conocimiento del algoritmo para calcular la probabilidad, el

manejo adecuado de la proporcionalidad. Además, en ningún caso se emplearon otras formas de representación para resolver los problemas propuestos.

En conclusión, los factores mencionados en el párrafo anterior afectan de manera significativa el desempeño de los estudiantes, debido al erróneo sistema de creencias asociado a la probabilidad. Estas ideas son relacionadas con los planteamientos de Schoenfeld (1985) relativos a las dimensiones que influyen en la resolución de problemas.

Ahora bien, las actividades didácticas que se deben implementar tienen diversas características y distintos propósitos que pueden ser descritas desde dos perspectivas: la estructura y la metodología de trabajo. Respecto a la estructura, es indispensable plantear problemas que involucren el concepto de probabilidad en diferentes contextos, como lo son reales e hipotéticos, y beneficiar el uso de múltiples representaciones como elemento fundamental en el proceso de la resolución de problemas.

Como sugerencia, consideraremos que otro aspecto que se debe tener en la estructura de las actividades didácticas es la incorporación de preguntas de selección múltiple, con espacios para que los estudiantes justifiquen cada una de sus respuestas. De esta manera, a través de los argumentos de los estudiantes es viable analizar las características de su pensamiento aleatorio.

En lo referente a la metodología de trabajo, hay algunos aspectos que deben ser tomados en cuenta, y entre los cuales se mencionan los siguientes:

- a) **Condiciones de aplicación:** un aspecto fundamental en el diseño de las actividades didácticas es que los contenidos a estudiar deben ser acordes a lo que plantea el currículo oficial.

Otro aspecto importante a considerar es el tiempo necesario para la aplicación de cada una de las actividades de enseñanza-aprendizaje en función de los momentos de la clase: trabajo individual, en equipos, socialización e institucionalización. De esta forma, se debe considerar el tiempo requerido para que los estudiantes compartan y discutan las ideas asociadas a las actividades implementadas en su momento.

- b) Instrumentos:** la creación de las actividades didácticas requiere del uso de diversas herramientas como las siguientes: encuesta de diagnóstico, hojas de trabajo, archivos electrónicos de simulación y entrevistas clínicas.
- c) Fases de trabajo:** es necesario dar a conocer que los instrumentos mencionados anteriormente no solucionan por sí mismos los problemas vinculados al aprendizaje de la probabilidad, sino que es absolutamente indispensable instaurar una secuencia didáctica apropiada, tal como se describe a continuación:
- *Etapa diagnóstica:* en primer lugar, se debe aplicar un diagnóstico que permita identificar las concepciones erróneas de los estudiantes, así como las dificultades relacionadas con el dominio de conocimientos asociados a la probabilidad. También es útil reconocer la habilidad que tienen algunos estudiantes de quinto grado de primaria en la utilización de diferentes registros de representación del concepto de probabilidad.
 - *Tratamiento didáctico:* para superar las dificultades y concepciones erróneas encontradas en el diagnóstico, se deben diseñar y aplicar hojas de trabajo centradas en la resolución de problemas en contexto, e incluir preguntas adecuadas que promuevan en el estudiante las competencias comunicativas y argumentativas.
 - *Evaluación del aprendizaje de los estudiantes:* después de la aplicación de las hojas de trabajo, es pertinente evaluar los logros alcanzados para determinar el impacto de las actividades en el aprendizaje de los estudiantes.

Por consiguiente, las actividades que apoyan el desarrollo del pensamiento probabilístico deben partir de un diagnóstico que posibilite indagar las dificultades y creencias erróneas de los estudiantes, y cuyos resultados sirvan para diseñar y aplicar hojas de trabajo que confronten las ideas equivocadas de los alumnos. Además, es preciso ejecutar un gran número de experimentos aleatorios, por lo que el uso de tecnología se instruye en un excelente apoyo para optimizar el tiempo. Por último, se debe evaluar el impacto de las actividades didácticas aplicadas, haciéndoles preguntas que les permitan usar ese pensamiento crítico probabilístico.

De hecho, un estudiante puede emplear distintas representaciones para mostrar el concepto de probabilidad, como, por ejemplo, el numérico a través de porcentajes, decimales o fracciones, el

verbal a partir del planteamiento de problemas; el tabular; el gráfico; los diagramas de árbol; el algebraico por medio de los algoritmos vinculados al cálculo de probabilidades. En fin, se dispone de una extensa escala de representaciones para resolver problemas probabilísticos.

Con todo lo anterior, concluimos que actualmente se vive en una sociedad en constante cambio, y el uso de la tecnología computacional adquiere mayor presencia en varios espacios de la actividad humana, abarcando la educación. Prueba de ello es que en las políticas educativas se fomentan explícitamente como uno de los objetivos “impulsar el desarrollo y utilización de tecnologías de la información y comunicación” (Programa Sectorial de Educación 2007-2012). Bajo estas circunstancias, la educación ha incorporado la utilización de computadoras en el diario vivir.

De ahí que, la implementación de herramientas pedagógicas fundamentadas en el uso de las tecnologías de la informática y la comunicación, utilizando hojas de trabajo para la enseñanza del razonamiento probabilístico, generó muy poco avance de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del tema. Esto lo demuestra el resultado de las hojas de trabajos, aplicada a los estudiantes en la institución educativa Pedro Antonio Molina Sede Vencedores del curso 5-12. Entre las ventajas de utilizar la tecnología computacional se pueden encontrar los siguientes resultados:

- Con la aplicación de esta propuesta se han establecido unas estrategias didácticas fundamentadas en el uso de las tecnologías de la informática y la comunicación, que han fortalecido nuestro conocimiento sobre el uso pedagógico de las mismas, además de mostrar las grandes posibilidades que brindan para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.
- La simulación de fenómenos estocásticos por medio de computadores permite un acercamiento lúdico, en la resolución de problemas de probabilidad. Además, la transición de lo informal a lo formal se traduce en motivación e interés de los estudiantes por la realización de las actividades propuestas.
- Utilizando las TIC aplicadas a la probabilidad, se mejoró el nivel de aprendizaje del grupo. La enorme capacidad de cálculo de las computadoras permite hacer una elevada cantidad de simulaciones electrónicas cada vez que se oprime una tecla, lo cual posibilita percibir que la probabilidad frecuencial se aproxima a la probabilidad clásica, de acuerdo a la teoría de los

grandes números. Esto se puede observar al momento de ubicarse en los distintos niveles de razonamiento probabilístico, ya que pasaron de tener creencias erróneas a dar argumentos estocásticos.

En pocas palabras, el uso sistemático de la tecnología computacional se manifestó en un avance muy importante en la resolución de problemas asociados a la probabilidad. Sin embargo, para la instrucción de las actividades se sugiere que el docente de hoy debe estar dispuesto y preparado para asumir los retos, que en materia educativa le impone este mundo cambiante. Pues, la actualización a los avances le permite estar en capacidad de re-conceptualizar los procesos de formación, especialmente para la enseñanza de temas de aplicación cotidiana como el pensamiento estocástico.

Así mismo, se sugiere que las tecnologías de la informática y la comunicación deben ser importantes en el proceso educativo; esto, en la medida en que el docente sea capaz de integrarlas como herramientas facilitadoras del quehacer pedagógico que motiven a los estudiantes en el aprendizaje. De ahí que, una primera tarea en la enseñanza consiste en descubrir las creencias de los estudiantes a partir de un diagnóstico apropiado, y tomarlas como punto de partida en cualquier acción didáctica.

Por último, se propone la utilización de otro tipo de recursos didácticos manipulables como dados, ruleta, perinolas, loterías, etc. además implementar diferentes herramientas, tales como encuestas de diagnóstico, hojas de trabajo, programas de simulación electrónica y objetos manipulables.

Ahora bien, aunque este trabajo no es concluyente, abre la posibilidad de acercar a los estudiantes desde la probabilidad, al mundo tecnológico de manera más contextualizada. La invitación es a implementar, esta propuesta en las instituciones, extendiendo la temática y dedicándole el doble del tiempo que se utilizó para este experimento, con el principal objetivo de mejorar el quehacer pedagógico de los docentes, que seguramente servirá para aumentar el nivel de aprendizaje de los estudiantes, para así obtener resultados más satisfactorios en las pruebas estandarizadas.

BIBLIOGRAFÍA

- Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, Modelización, Simulación. Obtenido de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Jaem2001.pdf>.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Benitez, D., y Sánchez, E. (1997). Pensamiento de probabilidad y estadística. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México.
- Benítez, D. (2006). La importancia que tiene percibir la estructura superficial o profunda de los problemas matemáticos en el proceso de solución. (Trabajo de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N, México.
- Bonilla, F. M. (2009). *Evolución de la historia de las TIC*. (D. Cubillos, Editor) Obtenido de Tecnología de la información y comunicación-Yopal: <https://sites.google.com/site/ticsyopal5/assignments>
- Brousseau, G. (Abril de 2000). Educación y Didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, 12(1), 5-38.
- Cabero, J. (1994). Nuevas tecnologías, comunicación y educación. *Comunicar*, 14-25.
- Cabero, J. (1998). Impacto de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en las organizaciones educativas.
- Carranza, P., y Fuentealba, J. (Dicimbre de 2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(24), 57-68.
- De las fuentes, J. (2008). *Niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría.
- Galindo, B. A. (2017). La pirinola. Geogebra. <https://www.geogebra.org/m/ZR34VcuM>
- Galindo, J. y Velasco, K., (2019). Un estudio sobre el Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali (Trabajo de grado). Universidad del Valle, Colombia.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.
- Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 5(1), 49-71.
- Grané, M. (1997) “¿Informática Infantil?”. *Aula de Innovación Educativa*, dic. 97. <http://www.doe.d5.ub.es/te/any97/grane>
- Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

- ICFES. (2017). Resultados nacionales saber 3o-5o-y-9o. Obtenido de <http://www.icfes.gov.co/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber3579/documentos/informes-saber-3-5-y-9/2323-resultados-nacionales-saber-3o-5o-y-9o2009-2014/file?force-download=1>.
- Institute International GeoGebra. (2018). Geogebra . Obtenido de Geogebra : <https://www.geogebra.org/about>
- Inzunza, S. (2014). Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad, (pág. 4). Buenos Aires: OEI.
- Kanobel, M. C. (2010). Entornos virtuales como apoyo a la enseñanza presencial: el caso de probabilidad y estadística en la UTN-FRA. *V Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*. España. Obtenido de <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/18437>
- Lara, A. C. (1954). Desarrollo histórico de la estadística Nacional en Colombia. *imprennta nacional*, 22-33.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Colombia: Ministerio de educación nacional. Obtenido de <http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf>
- Mera, B. y Santana, A., (2018). La mediación computacional de Geogebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de noveno grado (Trabajo de grado). Universidad del Valle, Colombia.
- Mercado, M. (2013). Actas de las primeras Jornadas de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra (págs. 309- 318). Granada: Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Ortiz, J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos em los libros de texto de bachillerato*. Tesis Doctoral de la Universidad de Granada.
- Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2015). Educación Matemática Aportes a la formación de docentes desde distintos enfoques teóricos. Buenos Aires: Editorial Univesitaria Villa María.
- Pólya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?* . Mexico: Trillas.
- Poveda, R., & Murillo, M. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Dialnet*, 20(1), 125-133. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5381427>
- Rivas, A. (2009). *Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundario*. Tesis posgrado de maestro de matemáticas recreativas, Hula, Colombia.

- Ruiz, B., Albert, A. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. Salvador (Bahía,) Brasil: International Association for Statistical Education.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Florida: Academic Press.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de conceptos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis Doctoral de la Universidad de Granada, España.
- Serrano, L., Batanero, C., & Ortiz, J. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 10(1), 7-25.
- Socas, M. (1997). Dificultades Obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Obtenido de <https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificultades-errores-y-obstaculos-en-el-aprendizaje-de-la-matematica.pdf>
- Tauber, L., Batanero, C., & Sánchez, V. (2005). Diseño, implementación y análisis de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario. *EMA*, 9(2), 82-106.
- Torrez, E. G., Ortiz, J., & Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de la probabilidad en los libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación matemática (Funes)*(5), 49-71. Obtenido de <http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/63/31>

Anexo 1: Encuesta diagnostica



ENCUESTA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA GRADO QUINTO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PEDRO ANTONIO MOLINA SEDE VENCEDORES



Nombre del estudiante: _____ Edad: _____
Fecha: _____ Grupo: _____

Encuesta de diagnóstico

Importante: El presente documento es parte de un proyecto de investigación, que tiene como fin caracterizar el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado quinto. Por lo tanto, te sugerimos que:

- Leas detenidamente cada pregunta.
- Justifique cada respuesta en el espacio en blanco.
- En caso de que no sepas, selecciona la opción: No sé
- Escribe con lapicero preferiblemente negro.

1. En el juego de parqués se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Juan es un estudiante de grado quinto y está jugando parqués con sus amigos. A Juan le faltan dos fichas para terminar el juego, una a 7 puntos y la otra ficha a 5 puntos.

Al lanzar los dos dados, que es más probable que salga:

- a. Siete puntos
- b. Cinco puntos
- c. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir
- d. Imposible saberlo
- e. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

2. Una persona juega con una moneda a cara y sello, esta persona ha realizado tres lanzamientos y todos han salido en cara.

Selecciona una de las siguientes opciones:

- a. En el cuarto lanzamiento es más probable que salga CARA
- b. En el cuarto lanzamiento es más probable que salga SELLO
- c. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

3. Un estudiante de grado quinto toma un chinche de la cartelera y empieza a jugar con el, lo lanza hacia arriba y quiere ver la forma en como cae este objeto:

Forma A



Forma B



Selecciona una de las siguientes opciones:

- A. Es más probable que salga de la FORMA A
- B. Es más probable que salga de la FORMA B
- C. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- D. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

4. Juan juega con una pirinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación:



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “**TODOS PONEN**”, “**TOMA UNO**”, “**TOMA DOS**”, “**TOMA TODO**”, “**PON UNO**” y “**PON DOS**”.

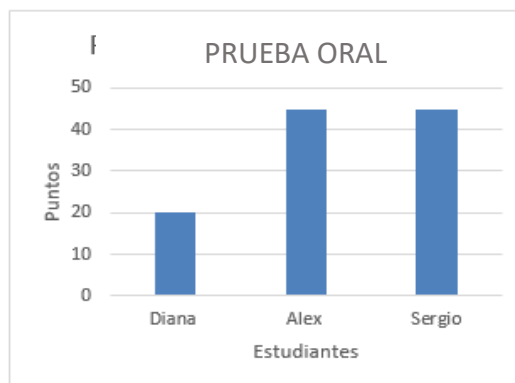
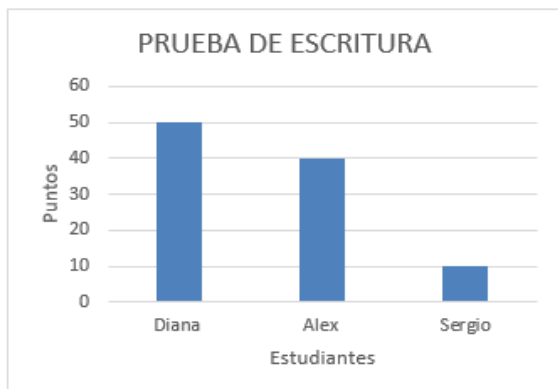
¿Cuál es la probabilidad, de que al hacer girar la pirinola salga en la cara de arriba: “**TODOS PONEN**”?

- a) $\frac{1}{5}$
- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

5. En un colegio de Cali, la evaluación de inglés de los estudiantes consta de dos pruebas, una de escritura y otra oral. La evaluación se aprueba si la suma de ambas es mayor que 60, es decir, al sumar los puntos de las dos pruebas, el resultado debe ser mayor a 60.

Las siguientes graficas muestran los resultados de Diana, Alex y Sergio en las pruebas.



¿Quién tiene más posibilidades de ganar la prueba?, Señale la respuesta correcta

- a) Tiene más probabilidad Diana
- b) Tiene más probabilidad Sergio
- c) Tiene más probabilidad Alex
- d) Solo Diana y Alex tienen probabilidades de ganar el examen
- e) Todos tienen las mismas probabilidades de ganarlo
- f) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

6. Se lanza un solo dado, Luis gana si saca un número par y Ana gana, si saca un número impar. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

- a) Tiene más probabilidades de ganar Luis
- b) Tiene más probabilidades de ganar Ana
- c) Los dos tienen la misma probabilidad
- d) No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- e) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

7. Usted va a comprar una rifa y le ofrecen el número 111. ¿Usted compraría ese número?

SI _____ No _____

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

8. Si una persona gana el premio mayor del Baloto, y meses después lo vuelve a ganar, es por:

- a) Suerte
- b) Bendición del cielo
- c) Pura coincidencia
- d) Porque hubo trampa
- e) Otro _____

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

9. Un estudiante de quinto grado, esta semana ha tenido muchos problemas: ha perdido exámenes, la profesora lo ha regañado, ha tenido problemas en su casa, se ha enfermado. Todas estas dificultades cómo se pueden explicar:

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

10. Explica qué significa para ti la palabra SUERTE:

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

11. ¿Haz utilizado algún amuleto?

- A. Si
- B. No

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

12. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar.
¿A qué crees que se debe esto?

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Anexo 2: Hoja de trabajo #1



ENCUESTA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA GRADO QUINTO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PEDRO ANTONIO MOLINA SEDE VENCEDORES



Hoja de trabajo #1

Nombre del estudiante: _____ Edad: _____ Fecha: _____
 _____ . Grupo: _____

Primera parte

Instrucciones: tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo. (Primera y segunda parte)

1. Lee detenidamente la situación que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
2. Una vez que entiendas la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
3. Hay preguntas que no tienen opciones de repuesta. No dejes de contestarlas.
4. Justifica detalladamente tus respuestas en el espacio correspondiente.
5. En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.
6. Contesta con lapicero negro.
7. Sigue cada una de las indicaciones mencionadas en cada actividad.

1. Juan David y Valeria quieren ir a cenar esta noche, Juan quiere comer pizza y Valeria quiere comer hamburguesa, como no están de acuerdo deciden dejarlo al azar lanzando una moneda al aire, si sale cara gana Juan, por lo cual van a comer pizza y si sale sello, gana Valeria e irán a comer hamburguesa. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?
 - a. Juan David
 - b. Valeria
 - c. Los dos tienen la misma probabilidad de ganar
 - d. Imposible saberlo
 - e. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

2. Junto con uno de tus compañeros, lancen una moneda 10 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió cara y cuántas sello

Cara	Sello

3. Si lanzan nuevamente la moneda, qué es lo más probable que salga
- e. En el undécimo lanzamiento es más probable que salga CARA
 - f. En el undécimo lanzamiento es más probable que sal SELLO
 - g. No se puede predecir cuál de las dos opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
 - h. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

4. Usted tiene una moneda en su mano, al lanzarla va a observar si sale cara o sello. ¿Cuál es la probabilidad que salga cara?

a. $\frac{2}{2}$

b. $\frac{1}{2}$

c. 1

d. $\frac{2}{1}$

e. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

5. Juan Carlos, Jhon Emerson, Jean Pierre, Edwin, Erick, Luis son hermanos y el día de hoy le corresponde a uno y solo uno hacer el aseo de la casa entonces deciden jugar con la pirinola y saber a quién le toca realizarlo, para esto cada cara de la pirinola consta de un color entre los cuales se encuentra los colores: amarillo, morado, negro, azul, rojo y verde, un color para cada persona, entonces cada persona escoge un color y si al lanzar la pirinola sale ese color, a esa persona le tocará realizar el aseo.
- Juan Carlos escogió el color amarillo, Jhon Emerson el morado, Jean Pierre el negro, Edwin el azul, Erick el rojo y Luis el verde.
- ¿Quién tiene mayor probabilidad de realizar el aseo?

- a. Juan Carlos
- b. Jhon Emerson
- c. Jean Pierre
- d. Edwin
- e. Erick
- f. Luis
- g. No se puede predecir cuál de las opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- h. Imposible saberlo
- i. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

6. ¿Quién tiene menor probabilidad de realizar el aseo?

- a. Juan Carlos
- b. Jhon Emerson
- c. Jean Pierre
- d. Edwin
- e. Erick
- f. Luis
- g. No se puede predecir cuál de las opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir
- h. Imposible saberlo
- i. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

7. Junto con uno de tus compañeros, lancen la pirinola 12 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió el color correspondiente.

Color	Veces que se repite
Amarillo	
Morado	
Negro	
Rojo	
Verde	
Azul	

8. Daniela juega con una pirinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación:



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: **“TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO”, “PON DOS”**.

¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer girar la pirinola, **una sola vez**, salga en la cara de arriba **“TODOS PONEN”**?

- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{1}{6}$
- d) $\frac{1}{3}$
- e) $\frac{2}{3}$
- f) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

9. Junto con uno de tus compañeros, lancen el dado 15 veces y escriban en la siguiente tabla, cuántas veces salió el número correspondiente.

Número	Veces que se repite
Uno	
Dos	
Tres	
Cuatro	
Cinco	
Seis	

10. Si lanzamos un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga el número tres?

- a. No se puede predecir el resultado
- b. Depende de la velocidad de lanzamiento
- c. Depende de la suerte
- d. $\frac{1}{3}$
- e. $\frac{1}{6}$
- f. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Segunda parte (apoyo tecnología)

Abre el archivo de Geogebra llamado “Pirinola”. En este archivo te encontraras con dos ventanas que contiene los siguientes elementos: (i) Vista gráfica 1 y (ii) Vista gráfica 2

1. Descripción de las vistas gráficas

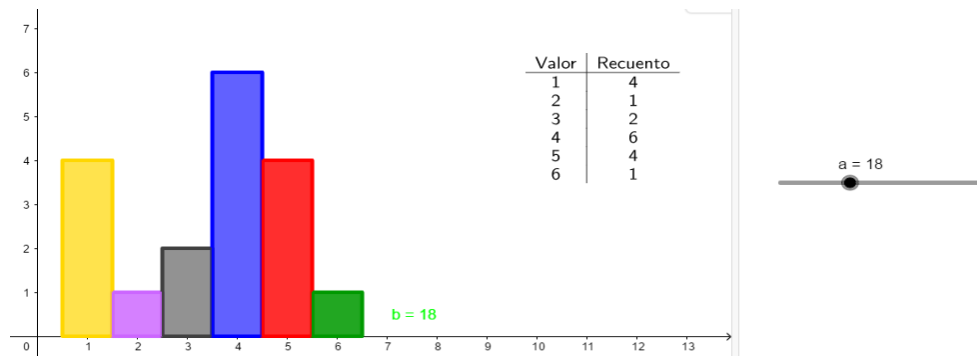
1.1. A continuación, se muestra un ejemplo. La **Vista gráfica 1** tiene una interface como la siguiente:



puedes ver hay un juego de pirinola. **Vista gráfica 1** que contiene los siguientes elementos:

- **Botón Inicia/detiene:** Este botón se encuentra en la parte superior izquierda de la pantalla, este a su vez activa la animación, es decir hace girar la pirinola.
- **Botón Pausa:** Este botón se encuentra debajo del botón de animación y como su nombre lo indica detiene la animación.
- **Gráfico de la pirinola:** Se podrán encontrar con la imagen de la pirinola, el cual muestra el color donde se detuvo el giro.
- **Casilla de color:** Esta casilla se encuentra en el lado izquierdo de la pantalla, muestra el color que salió al girar la pirinola.
- **Casilla de los nombres:** Esta casilla se encuentra en la parte derecha de la pantalla, muestra cada uno de los participantes.
- **Cuadros de colores:** Este cuadro se encuentra ubicado en la parte inferior derecha de la pantalla, muestra cuales son los colores que hay en la pirinola.

- 1.2. Mientras que la vista gráfica 2 contiene un gráfico de barras y una tabla de frecuencias con el conteo del número de veces que aparece cada color después de haber lanzado la pirinola varias veces.



Especificaciones de la vista grafica 2 :

- **Gráfico de barras:** se encuentra a la izquierda de su pantalla.
- **Tabla:** se encuentra al lado del gráfico de barras. Describe la cantidad de lanzamientos y el color que cae la pirinola.
- **Deslizador:** Se encuentra en la parte derecha de la pantalla, sirve para modificar el número de lanzamientos.

Nota:

Se realizaron 18 lanzamientos, puede observarse que la gráfica muestra las distintas veces que salieron los colores, al igual se puede verificar con la tabla.

2. Desarrollo de la actividad

2.1. Primera parte

- a) Sí la pirinola se lanza una vez ¿Qué color crees que saldrá?

- b) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual color **NO** lo harías?

- c) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual color **SI** lo harías?

- d. Primero contestas las siguientes preguntas y luego dirígete al juego de la pirinola y haz los lanzamientos

d.1. Si lanzaras dos veces seguidas la pirinola ¿Qué colores crees que saldrán para dos lanzamientos?

d.2. Si lanzaras tres veces seguidas la pirinola ¿Qué colores crees que saldrán para tres lanzamientos?

2.2 Segunda parte Realiza 10, 50, 100, 1000 lanzamientos de la pirinola, en cada caso observa la zona gráfica de barras y responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué ocurre con el tamaño de las barras a medida que el número de lanzamientos es mayor?

- b) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro gráficas.

- c) Después de haber hecho el experimento de lanzar la pirinola muchas veces. Con tus propias palabras explica. ¿Por qué hay barras que tienen más altura que otras?

3. Tercera parte

1) Teniendo en cuenta la segunda parte conteste la siguiente pregunta:

a) ¿Qué aspecto tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

b) Con lo visto anteriormente trata de responder las siguientes preguntas.

2) Juan juega con una pirinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación:



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases:
“TODOS PONEN”, “TOMA UNO”, “TOMA DOS”, “TOMA TODO”, “PON UNO”,
“PON DOS”.

¿Cuál es la probabilidad de que, al hacer girar la pirinola, **una sola vez**, salga en la cara de arriba **“TODOS PONEN”**?

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{2}{3}$
- e) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

3) Si lanzamos una pirinola. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga el color rojo?

- a) No se puede predecir el resultado
- b) Depende de la velocidad de lanzamiento
- c) Depende de la suerte
- d) $\frac{1}{3}$
- e) $\frac{1}{6}$
- f) No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA



Anexo 3: Hoja de trabajo #2
ENCUESTA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA GRADO QUINTO DE
LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PEDRO ANTONIO MOLINA SEDE
VENCEDORES



Hoja de trabajo #2

Nombre del estudiante: _____ Edad: _____ Fecha: _____
_____. Grupo: _____

Primera parte

Instrucciones: tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar todas las actividades de la hoja de trabajo. (Primera y segunda parte)

1. Lee detenidamente la situación que se te propone, así como las preguntas que se hacen.
2. Una vez que entiendas la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
3. Hay preguntas que no tienen opciones de repuesta. No dejes de contestarlas.
4. Justifica detalladamente tus respuestas en el espacio correspondiente.
5. En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.
6. Contesta con lapicero negro.
7. Sigue cada una de las indicaciones mencionadas en cada actividad.

Lee atentamente la siguiente información

Supongamos que estamos en una competencia y ustedes deben escoger cada uno, un número entre el 2 y el 12, excepto el siete, que fue escogido por la profesora Irene. Van a lanzar dos dados diez veces y deben sumar los puntos obtenidos. Si la suma de los dos dados es el número que usted escogió y salió más veces, gana.

Los datos obtenidos, deben ser consignados en la siguiente tabla.

Jugador 1:

Jugador 2:

Dado 1	Dado 2	Suma de puntos resultantes

1. ¿El juego anterior es justo?
 - a. No
 - b. Sí
 - c. Es imposible saberlo
 - d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

2. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar el juego?
 - a. Usted
 - b. Su compañero
 - c. La profesora Irene
 - d. Todos tienen la misma probabilidad de ganar
 - e. Imposible saberlo
 - f. No se

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

3. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que debes escribir las diferentes opciones de puntos que te de la suma indicada del lanzamiento de los dos dados.

Suma de puntos de los dados	Opciones
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

4. ¿Al lanzar dos dados y sumar sus puntos resultantes, algún número obtenido tiene mayor probabilidad que los demás? (En caso de ser así, escribe cuál es el número y justifica tu respuesta).

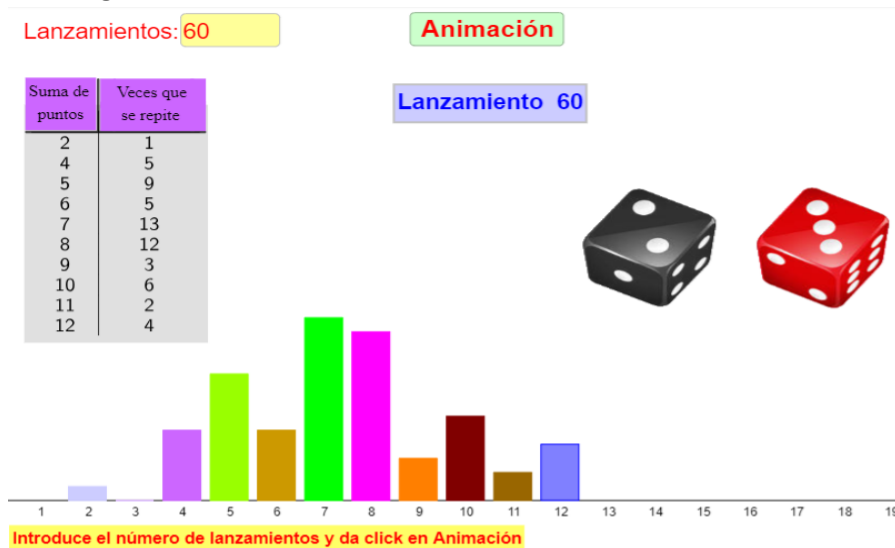
ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Segunda parte (apoyo tecnología)

Abre el archivo de Geogebra llamado “Dados”. En este archivo te encontraras con una ventana que contiene los siguientes elementos:

4. Descripción de la vista gráfica

1.1 A continuación, se muestra un ejemplo. La Vista gráfica 1 tiene una interface como la siguiente



Se realizaron 60 lanzamientos, puede observarse que la gráfica muestra que la suma de puntos que más se repitió fue el número 7, al igual que se puede verificar con la tabla.

Como puedes ver hay un juego de dados, Vista gráfica 1 que contiene los siguientes elementos:

- **Cuadro de lanzamientos:** se encuentra al lado izquierdo superior de la pantalla, en el cual se puede escribir el número de lanzamientos que se desea realizar.
- **Tabla:** esta se encuentra al lado izquierdo de la pantalla y muestra la suma de los puntos y la cantidad de veces que se repitió esa suma en una cantidad determinada de lanzamientos.
- **Botón Animación:** este botón se encuentra en la parte superior de la pantalla, este a su vez activa la animación, es decir los lanzamientos.
- **Grafica de dados:** en la parte derecha de la pantalla se podrán encontrar con la imagen de dos dados, los cuales muestran el puntaje de cada lanzamiento.
- **Grafica de barras:** estas se encuentran al lado inferior izquierdo y muestran la suma de puntos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Primera parte

1. Realiza 100, 200, 500, 1000 lanzamientos de los dados, en cada caso observa la zona grafica de barras y responde las siguientes preguntas:

a) Escribe las cosas comunes que viste en las cuatro gráficas.



b) Con tus propias palabras explica ¿por qué hay barras que tienen más altura que otras?



Segunda parte

2. Nuevamente realiza los siguientes números de lanzamientos: 100, 200, 500 y 1000, en cada caso observa la tabla y contesta los siguientes puntos.

a) Ahora observa la tabla. Encontrarás que hay suma de puntos que se repiten más que otros. ¿Cómo puedes explicar eso?

b) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual número **NO** lo harías?

c) ¿Sí tuvieras que apostar, por cual número **SI** lo harías?

Tercera parte

De acuerdo con la primera y segunda parte de la actividad, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aspectos tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla?

Lee atentamente la siguiente información y responde las preguntas b y c.

Supongamos que estamos en una competencia donde participan tres personas, usted, un compañero y la profesora Irene, usted debe escoger un número entre el 2 y el 12, excepto el siete, que fue escogido por la profesora Irene y el dos que lo escogió su compañero. El presidente de la competencia lanza dos dados y se suman los puntos. Los dados se lanzan tantas veces sean necesarias para que uno de los participantes gane.

b) ¿El juego anterior es justo?

- a. No
- b. Sí
- c. Es imposible saberlo
- d. No sé

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

c) ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar el juego?

- a. Usted
- b. Su compañero
- c. La profesora Irene
- d. Todos tienen la misma probabilidad de ganar
- e. Imposible saberlo
- f. No se

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

- d) En el juego de parkes se lanzan dos dados y se suman los puntos resultantes. Olga es una estudiante de grado quinto y está jugando parkes con sus amigos. A Olga le faltan dos fichas para acabar el juego una a 7 puntos de terminar y la otra ficha a 5 puntos de terminar. Al lanzar los dos dados que es más probable que salga:
- a. Siete puntos.
 - b. Cinco puntos.
 - c. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
 - d. Imposible saberlo
 - e. No sé.

ESPACIO PARA JUSTIFICAR LA RESPUESTA

- e) En el juego de parkes se lanzan los dados y se suman los puntos resultantes. Las opciones de sumas son: **2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**. ¿Estos números tienen la misma probabilidad de salir?

SI _____ No _____

¿Por qué?:
