

ESTUDIO DE ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES
EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DE SÓLIDOS AL INICIO DE LA
EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

LENNY PATIÑO SANDOVAL

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2017

ESTUDIO DE ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES
EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DE SÓLIDOS AL INICIO DE LA
EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

LENNY PATIÑO SANDOVAL

200742237

Trabajo de grado para optar por el título de:

LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Director

JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

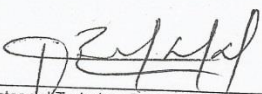
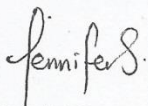
UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2017

ACTAS

 INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección Académica		ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO																			
Programa Académico <u>lic. edu. básica enf. mat.</u>		Fecha																			
Código del programa: <u>3469</u>	Resolución del programa: _____	<table border="1"> <tr> <th>Día</th> <th>Mes</th> <th>Año</th> </tr> <tr> <td><u>25</u></td> <td><u>04</u></td> <td><u>2017</u></td> </tr> </table>	Día	Mes	Año	<u>25</u>	<u>04</u>	<u>2017</u>													
Día	Mes	Año																			
<u>25</u>	<u>04</u>	<u>2017</u>																			
Título del Trabajo o Proyecto de Grado <u>Estudio de algunas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la geometría de sólidos al inicio de la educación básica secundaria.</u>																					
Se trata de:																					
Proyecto ☐		Informe Final ☐																			
Director <u>Jorge S. Galeano C.</u>																					
Nombre del Primer Evaluador <u>Jennifer Salgado P.</u>																					
Nombre del Segundo Evaluador																					
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Nombres y Apellidos</th> <th>Código</th> <th>Plan</th> <th>E-mail</th> <th>Teléfonos de contacto</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="2"><u>Lenny Patino Sandoval</u></td> <td><u>0742237</u></td> <td><u>3469</u></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>				Nombres y Apellidos		Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto	<u>Lenny Patino Sandoval</u>		<u>0742237</u>	<u>3469</u>								
Nombres y Apellidos		Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto																
<u>Lenny Patino Sandoval</u>		<u>0742237</u>	<u>3469</u>																		
Evaluación																					
Aprobado ☒		Meritorio ☐																			
Aprobado con recomendaciones ☐		No Aprobado ☐																			
		Laureado ☐																			
		Incompleto ☐																			
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de (máximo un mes) ante:																					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐		Primer Evaluador ☐																			
		Segundo Evaluador ☐																			
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:																					
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).																					
Firmas																					
																					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador																			
		Segundo Evaluador																			



RESUMEN

El siguiente trabajo de grado se constituyó como un estudio monográfico el cual gira en torno al estudio de las dificultades que presentan los estudiantes de Educación Básica Secundaria, respecto a la representación y visualización de los sólidos geométricos, a partir de un rastreo bibliográfico y un acopio de información basado en otras investigaciones ya realizadas por diferentes autores (Guillen, Linares, Torregosa, etc.) Los resultados de este trabajo se consideran un recurso para que futuros trabajos de investigación lo empleen y que sirva además como referencia para los docentes en formación. Se tomó como referente metodológico un análisis cualitativo de la información recogida, en diferentes investigaciones que abordan el tema central de este trabajo, este permitió establecer criterios de búsqueda, formas de seleccionar y sintetizar la información, y finalmente constituir las rejillas de análisis que sirvieron para el análisis de los datos recogidos en relación con las relaciones entre los estudiantes y sus procesos cognitivos en geometría de sólidos. Finalmente se presenta una descripción de los principales aspectos que se reportan en los diferentes trabajos de investigación en relación con la visualización y la representación de sólidos geométricos.

Palabras clave: Dificultades, Enseñanza, Errores, Aprendizaje de la geometría, Aprendizaje, Visualización, Representación, Sólidos geométricos.

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	4
CAPÍTULO I	8
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN	8
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.2. OBJETIVOS.....	17
1.2.1. Objetivo General.	17
1.2.2. Objetivos Específicos.....	17
1.3 JUSTIFICACIÓN	18
CAPÍTULO II	23
ELEMENTOS TEORICOS	23
2.1 DESDE UN PUNTO DE VISTA CURRICULAR.....	23
2.2 DESDE UN PUNTO DE VISTA COGNITIVO.	25
CAPÍTULO III	30
DESARROLLO DE LAS TEMÁTICAS DE LA INVESTIGACIÓN	30
3.1 PRIMERA PARTE: Análisis de documentos por áreas temáticas.	33
3.1.1. Primera fase: Rastreo bibliográfico.....	35
3.1.2 Segunda fase: Identificación de las temáticas.	41
3.1.3 Tercera fase: Tipificación de los textos seleccionados.	49
3.2 SEGUNDA PARTE: ESTADO DEL ARTE.....	52
3.3 TERCERA PARTE: NARRACIÓN HERMENEUTICA DE LAS CATEGORÍAS.....	56
CONCLUSIONES.....	68
BIBLIOGRAFIA.....	71

Índice de tablas

Tabla 1. Agrupación de textos y palabras clave. Fuente: Propia.	37
Tabla 2: Agrupación de textos por temáticas. Fuente: Propia.	42
Tabla 3. Comentarios de los textos. Fuente: Propia.	45
Tabla 4: Textos seleccionados. Fuente: Propia.	51
Tabla 5: Texto y Rejilla. Fuente: Propia.	60
Tabla 6: Categorías. Fuente: Propia.	61
Tabla 7: Categorías. Fuente: Propia.	61
Tabla 8: Categorías y textos en visualización. Fuente: Propia.	62
Tabla 9: Categorías y textos en representación. Fuente: Propia.	64

Índice de ilustraciones

Ilustración 1. Sólidos geométricos (Poliedros)	18
Ilustración 2. Sólidos geométricos (Cuerpos redondos)	18
Ilustración 3. Sólido geométrico (Tetraedro)	27
Ilustración 4. Requisitos para iniciar un estado del arte. Fuente: Londoño, Maldonado & Calderón (2014)	40

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se realizó para optar por el título de Licenciada en Educación Básica Con Énfasis En Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Área de Educación Matemática, en la línea de Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos.

Se tuvo como objetivo para este trabajo, dar a conocer cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes de Educación Básica Secundaria en el aprendizaje de la geometría, particularmente en el reconocimiento de las propiedades de los sólidos geométricos.

Se utilizó la Hermenéutica como como enfoque metodológico fundamental en el desarrollo de la monografía, puesto que cumple con la idea que se tenía desde el inicio, la cual fue encaminada a la búsqueda de textos referentes a los problemas de aprendizaje en el área de geometría, específicamente en los sólidos geométricos. Se investigaron y leyeron cada uno los textos y posteriormente se realizó el análisis correspondiente, luego se hizo la interpretación y clasificación de acuerdo con la importancia de cada uno, y por último se hizo una organización de acuerdo con las categorías que se tuvieron en cuenta en el trabajo.

La enseñanza de la geometría ha estado ligada a que la mayoría de los estudiantes imiten lo presentado por el profesor, sin tener en cuenta procesos de construcción conceptual de los conceptos geométricos y sus relaciones, y para el caso de la geometría del espacio el panorama se torna más complejo, pues en este campo son incluso menores los

espacios que se dedican en la escuela a su enseñanza, en general esta se limita a la presentación de algunos sólidos y sus propiedades; por otro lado, se podría decir entonces que no se ha prestado suficiente atención a las dificultades con las que los estudiantes se encuentran cuando aprenden geometría del espacio, incluso si se limita la reflexión a las propiedades de las figuras geométricas en el espacio tridimensional. Se tiene así que en muchas ocasiones los estudiantes no logran la comprensión, o el desarrollo del razonamiento necesario para entender los conceptos geométricos inmersos en el trabajo con el espacio tridimensional.

Por tal motivo, el interés principal de este trabajo fue caracterizar, por medio de una investigación monográfica, las dificultades que tienen los estudiantes respecto a la visualización y representación de los sólidos geométricos; se propone así una revisión de la manera en que se manifiestan tales dificultades en las diferentes actividades propuestas a los estudiantes en las aulas de clase.

Para conseguir este objetivo, se hizo necesario enmarcar procesos relevantes para el aprendizaje de la geometría, es decir, se identificaron desde un punto de vista cognitivo aquellos procesos que caracterizan la actividad geométrica, para así tener un punto de partida y de referencia para la revisión. Con lo cual se dio inicio a un proceso de búsqueda y análisis de diferentes textos de varios autores, los cuales presentan los resultados de investigación concernientes al tema de las dificultades en el aprendizaje de la geometría, específicamente de la geometría tridimensional.

Finalmente, el propósito principal se relacionó con señalar la necesidad de realizar una reflexión acerca de lo importante que es la enseñanza de la geometría y por supuesto del aprendizaje de la misma, pues el trabajo que se realiza en el aula de clase no solo consiste en la transmisión de contenidos geométricos, sino que va más allá, y es que los estudiantes conozcan que hay una geometría del espacio que se puede percibir, visualizar y representar.

Con el fin de presentar los resultados del trabajo realizado, este trabajo se ha organizado por capítulos, a continuación, se da la descripción de cada uno de ellos. En el capítulo I se realiza la presentación del problema, en este se muestra el porqué de la propuesta de este trabajo, los objetivos, y la justificación en la que se describe la importancia de realizar una investigación monográfica de las dificultades en la geometría de sólidos.

En el capítulo II, se presentan los elementos teóricos, los cuales están divididos en dos aspectos importantes; el primero de ellos, desde un punto de vista curricular, se tienen en cuenta autores como Howard Gardner, D' Amore (1987), Inés Marazzani (1987), entre otros, que describen algunos elementos teóricos acerca de la geometría y el pensamiento espacial, importantes para el desarrollo de este trabajo; y el segundo, desde un punto de vista cognitivo, se realiza una breve descripción acerca del aprendizaje de la geometría y su influencia en los estudiantes cuando se enfrentan a este tipo de aprendizajes, para ello se tienen en cuenta autores como Socas (1997) y Duval (2007).

El capítulo III, muestra el desarrollo metodológico, en el cual se describen las fases que permitieron realizar la investigación bibliográfica, éstas son tres: el análisis de documentos, la interpretación de documentos de interés y los resultados finales, cada una de ellas determina lo realizado en la investigación monográfica.

Finalmente, se organizó toda la información recogida durante el desarrollo de este trabajo, con el fin de informar a la comunidad interesada, acerca de lo que sucede en las aulas de clase cuando se presentan dificultades en los estudiantes en su proceso de aprendizaje de la geometría, especialmente cuando se trata de geometría de sólidos. Por ello en este trabajo se realizó una presentación de las dificultades encontradas en investigaciones recientes de diferentes autores, referentes de la Educación matemática.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN

En este capítulo se presentan tres aspectos importantes para el desarrollo de este trabajo, los cuales son el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos del mismo. En el primero, se mostró el propósito de esta investigación y se dan algunos elementos que permiten conceptualizarla; en la justificación se expusieron los diferentes argumentos que sustentan el tema de interés de este trabajo y su importancia; y, por último, los objetivos que fueron la guía para la ejecución del trabajo de grado.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La geometría es una rama de la matemática ampliamente reconocida. Por medio de esta se pueden alcanzar objetivos en la formación de los individuos, como aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas presentes en la vida cotidiana, además del uso de diferentes lenguajes y representaciones. Este tipo de aprendizajes es parte fundamental de la cultura del hombre, también ha sido aplicada directa o indirectamente en otras áreas, como por ejemplo el arte, el diseño o la arquitectura; su aprendizaje en las primeras etapas escolares, es de gran importancia, a pesar de que este sea causa de grandes dificultades. Duval (citado por Hernández & Villalba, 2001) piensa que la enseñanza de la geometría es más compleja y con frecuencia

menos exitosa que la enseñanza de las operaciones numéricas o de álgebra elemental. Por esta razón se debería considerar un tiempo suficiente en las aulas de clase para su enseñanza, y darle una mayor importancia, al igual que a los elementos que encierra, los cuales son importantes para el desarrollo del pensamiento espacial.

Teniendo en cuenta lo anterior, la clase de geometría no debe conformarse solo con dar a conocer a los estudiantes las figuras o relaciones geométricas con dibujos, nombrándolos y dándoles su definición, ya que se deja en un segundo plano los procesos de razonamiento que deben realizar los estudiantes, haciendo de esta manera que la enseñanza de los conceptos geométricos se quede en un estudio memorístico, sin llevar al estudiante a descubrir las razones por las cuales aprender geometría.

Una de las razones para aprender geometría es lo que encontramos a nuestro alrededor, por ejemplo, las construcciones que hacen parte de nuestra vida cotidiana, las cuales tienen formas geométricas. Haciendo una mirada desde la antigüedad, se puede ver que desde los griegos la regla y el compás han contribuido a materializar las ideas geométricas, las construcciones que se realizan con este tipo de instrumentos ayuda a una mejor comprensión de las propiedades de los objetos geométricos. La geometría se ha considerado como un pilar fundamental en la formación académica y cultural, por ello juega un papel importante y va desde la antigua geometría griega, donde se desarrolló como un sistema deductivo construido a partir de axiomas, contribuyendo en la formación del razonamiento lógico.

El aprendizaje de la geometría en los distintos niveles de educación es fundamental para el desarrollo del pensamiento espacial, pues los estudiantes aprenden acerca de las formas geométricas y sus estructuras, además este tipo de aprendizajes permite un mejor análisis de sus características y relaciones, entrando en juego la visualización, la cual se puede entender como la construcción y manipulación de representaciones mentales de objetos bidimensionales o tridimensionales (MEN, 2006), igualmente en este pensamiento se tiene en cuenta el desarrollo de la percepción de los objetos desde diferentes perspectivas, así como se ha mencionado en apartados anteriores, este tipo de conocimientos son indispensables en la vida cotidiana, pues enseñan a orientarse adecuadamente en el espacio.

A partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en particular en el desarrollo del pensamiento espacial y desde un contexto institucional, histórico y cultural, se considera a la geometría importante, y se enfatiza en la necesidad de encaminar la enseñanza de la geometría hacia el desarrollo del pensamiento espacial y de las representaciones bi y tri dimensionales de las figuras, sus relaciones y sus propiedades.

Se describe en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que la geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar el mundo, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como:

El desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas, así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzcan al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas, que propicien diferentes miradas desde lo analítico, lo sintético y lo transformacional. (MEN, 1998, p.86)

En los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas “El pensamiento espacial es entendido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas representaciones” (MEN, 2006, p.17), estos plantean que la geometría representa una alternativa para refinar el pensamiento espacial, porque se constituye en una herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio; es por ello que en la Educación Básica Secundaria, se inicia con la comparación y clasificación de objetos tridimensionales y figuras bidimensionales, de acuerdo con sus componentes y características; además, la identificación y justificación de relaciones de congruencia y semejanza entre figuras, construcción y descomposición de figuras y sólidos a partir de condiciones dadas y, por último, la construcción de objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales.

Esto significa que en este pensamiento se contemplan las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales, para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales; esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y en el espacio geométrico (MEN, 2006, p.17).

Este pensamiento se fundamenta en un aprendizaje de conceptos y relaciones geométricas, pues uno de los conocimientos de mayor dificultad en los estudiantes son los relacionados con los sistemas geométricos. Así, el pensamiento espacial constituye un componente esencial del pensamiento matemático, pues se asocia a la interpretación y comprensión del mundo físico, por lo cual es importante para que los estudiantes experimenten distintas facetas del panorama geométrico, y de esta manera despertar el interés matemático por explorar los elementos que encuentran en su entorno. Al tener en cuenta que la geometría es una parte fundamental de la enseñanza, y que al enseñarla pueden surgir algunas dificultades en los estudiantes, como por ejemplo al momento de aprender conceptos, propiedades, etc.; se encontró la necesidad de realizar una investigación monográfica, la cual buscó identificar las dificultades presentes al momento de enfrentarse con esta asignatura, también determinar qué tipo de dificultades son las que se presentan más a menudo en los estudiantes.

La geometría es una de las claves principales de lo que es la asignatura de matemáticas en los distintos niveles educativos, tanto en primaria como en secundaria. Al inicio de la educación básica la geometría es de gran importancia ya que el estudiante inicia a hacer construcciones geométricas y a utilizar la regla y el compás como instrumentos de construcción; al final de la educación básica los estudiantes continúan desarrollando la habilidad de interpretar, de conjeturar y discriminar visualmente. En la educación media es de gran importancia afianzar conocimientos, de tal forma que los estudiantes puedan experimentar en el contexto geométrico la definición de conceptos, la investigación de

propiedades geométricas y en la profundización de experiencias y conocimientos geométricos.

La geometría como cuerpo de conocimientos es la ciencia que tiene por objetivo analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales. Desde esta mirada, se puede considerar a la “geometría como la matemática del espacio” (Bishop, 1983, p.76). Involucra tres clases de procesos cognitivos, los cuales son: los procesos de *visualización*, que están ligados a las representaciones espaciales; los procesos de *construcción* realizados mediante herramientas; y el *razonamiento* en su relación con los procesos discursivos, para la demostración y para la explicación; la *visualización*, *el razonamiento* y *la construcción* son cruciales para el desarrollo de problemas geométricos y se plantea que estas tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente (Duval, 1998).

Al aprender geometría, los alumnos desarrollan su razonamiento, es decir, aprenden a razonar. En esta instancia el razonamiento va de la mano con la abstracción de características o propiedades de las relaciones y de los conceptos geométricos, las argumentaciones y el seguimiento de una serie de argumentos lógicos; se tuvo en cuenta tres conceptos importantes en este estudio, *las figuras geométricas tridimensionales*, *la visualización* y *las representaciones*, puesto que se consideran importantes para desarrollar el razonamiento geométrico, es por ello que la idea principal radicó en estudiar las dificultades presentes en los estudiantes en el estudio de los conceptos anteriormente mencionados.

En el aprendizaje de la geometría, las figuras se relacionan con las reproducciones o construcciones gráficas que los alumnos hacen de los objetos geométricos. La construcción de figuras no solo es un propósito de la enseñanza de la geometría, sino que, además, constituye un medio para que los alumnos sigan explorando y profundizando en los conocimientos que ya tienen e incluso construyan otros nuevos. En palabras de Duval (citado por Torregosa & Quesada, 2005) se puede decir que:

Un dibujo, puede mostrar una o varias figuras 1D / 2D, es decir de dimensión 1 representada en 2 dimensiones, o 2D / 2D líneas rectas o curvas, o bien figuras en 3D / 2D cubos, esferas, etc. La identificación visual de estas figuras se basa en leyes de organización perceptiva, y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos (p. 39).

Es importante aclarar que al hablar de representaciones de los sólidos se distinguen las representaciones físicas, tales como los objetos del entorno, los modelos y los armazones, al igual que las representaciones planas e imágenes; también es importante resaltar que la representación de los cuerpos tridimensionales se da cuando se ve la necesidad de realizar razonamientos sobre los dibujos de estos cuerpos, ya que entra en juego el proceso de visualización, el cual es requerido para el desenvolvimiento en un mundo tridimensional.

A propósito, Cantoral y Montiel (citados por Blanco & Crespo, 2002) afirman que la visualización no se puede entender como un simple acto de ver, sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y en el lenguaje del que aprende. (p.16). Este tipo de habilidades son

importantes en el aprendizaje en general, puesto que es de vital importancia a lo largo de la vida.

En la representación gráfica de los cuerpos geométricos en el plano, también se pueden enfrentar los estudiantes a dificultades las cuales, van referidas a la comprensión del lenguaje matemático, es decir, el hecho de reconocer términos propios de la materia de geometría y el uso de las distintas notaciones y símbolos.

En la enseñanza de las matemáticas y la geometría, los estudiantes se pueden enfrentar con dificultades, errores y obstáculos. Socas (1997) afirma:

Las dificultades se manifiestan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. En general casi todos los alumnos tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas, aunque no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas. Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, se trata de algo que se conoce positivamente, es decir, está constituyendo un conocimiento; un error va de la mano en la forma como los alumnos interpretan los problemas, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento. (p.152)

Se encuentra a muchos estudiantes con dificultades para aprender matemáticas. Sin lugar a dudas muchos son los aspectos que influyen en este tipo de dificultades, por ejemplo, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas. Puede ser que se necesite enseñar menos directamente y dedicar más tiempo a conocer lo que piensan los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas, para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas (Socas, 1997).

Es importante revisar en el campo de la geometría las dificultades que se presentan para representar en el plano cuerpos geométricos, los cuales corresponden a figuras tridimensionales, es decir que se proyectan en tres dimensiones. Se pueden presentar en los estudiantes dificultades, sobre todo en las actividades donde esté en juego la visualización de las propiedades geométricas inmersas en los cuerpos geométricos representados o también de los cuerpos geométricos que deben imaginar.

Existe la preocupación por la exploración del mundo geométrico en tres dimensiones, es decir por los sólidos geométricos que se pueden representar de manera tridimensional, ya que resulta un estudio interesante, teniendo en cuenta las dificultades que se puedan presentar en los estudiantes, se necesita del desarrollo cognitivo y de la asimilación de ideas abstractas para la construcción del aprendizaje de los estudiantes desde las representaciones concretas.

Es por ello que se encuentra la necesidad de ahondar en las dificultades que encuentran los estudiantes al aprender geometría, poniendo como base la representación y visualización de las figuras tridimensionales, específicamente los sólidos geométricos. Teniendo en cuenta lo anterior, se formula la siguiente pregunta:

¿Cuál es el estado actual de las investigaciones en Educación Matemática, en relación con las representaciones y la visualización de figuras tridimensionales, centradas al inicio de la educación básica secundaria?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo General.

Describir las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la geometría, en relación con la representación y la visualización de figuras tridimensionales, en algunas investigaciones centradas al inicio de la Educación Básica Secundaria.

1.2.2. Objetivos Específicos.

- Seleccionar trabajos relevantes relacionados con las dificultades encontradas en el aprendizaje de la geometría, realizados por varios autores.
- Determinar aspectos importantes relacionados con las dificultades que se presentan con la visualización y la representación de las figuras tridimensionales, en el caso específico de los sólidos geométricos.
- Tipificar las dificultades encontradas en los distintos trabajos relacionados con el aprendizaje de la geometría.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El abordar objetos geométricos en tercera dimensión puede generar en el estudiante dificultades, es por tanto que se desea por medio de una investigación monográfica saber cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes. Teniendo como objeto de estudio los sólidos geométricos, los cuales son figuras geométricas en tres dimensiones, son sólidos¹ que tienen largo, ancho y alto, al igual que volumen y ocupan un lugar en el espacio.

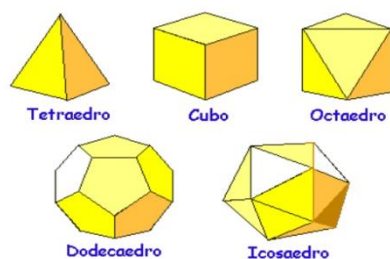


Ilustración 1. Sólidos geométricos (Poliedros)

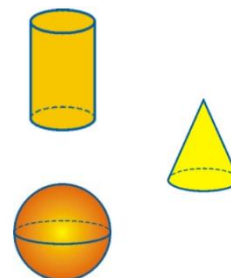


Ilustración 2. Sólidos geométricos (Cuerpos redondos)

Teniendo en cuenta las Ilustraciones 1 y 2 las cuales corresponden a sólidos geométricos, se puede observar que tanto los poliedros como los cuerpos redondos pertenecen a la misma familia de los sólidos, tienen propiedades distintas, pero a pesar de ello hacen parte de la geometría sólida, aquella que es la geometría del espacio tridimensional. Por ello, la necesidad que hay de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar, responde al papel que la geometría desempeña en la vida cotidiana, pues este conocimiento geométrico es de gran utilidad para solucionar problemas y representar

¹ Sólido: Un sólido o cuerpo geométrico es una figura de tres dimensiones, es decir, que tiene largo, alto y ancho y que ocupa un lugar en el espacio y en consecuencia tiene un volumen. Los cuerpos geométricos pueden ser poliedros y cuerpos redondos, los poliedros son sólidos geométricos que contienen caras, aristas y vértices y los cuerpos redondos están compuestos total o parcialmente por figuras geométricas curvas, ejemplo de ellos son el cilindro, la esfera o el cono.

distintos aspectos de la realidad, permite la orientación en el espacio, realizar estimaciones sobre las formas y distancias, al igual que a la realización de apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio.

El estudio de las dificultades en el aprendizaje de la geometría, especialmente en la representación y visualización de los sólidos geométricos en tres dimensiones, partió de la forma como los estudiantes pueden abordar este tipo de conceptos, lo cual puede generar en ellos dificultades para el reconocimiento de las propiedades de dichos objetos. En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas de una posición a otra, al igual que del movimiento con el que las figuras cambian el tamaño o la forma, pero es esencial que los estudiantes puedan realizar representaciones en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad, como se menciona a continuación:

Se encuentran aspectos importantes como es el desarrollo de la percepción espacial y el de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y el uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas, así como el efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones. (MEN, 1998, p.17)

Debido a esto se consideró importante determinar las dificultades que encuentran los estudiantes al realizar este tipo de representaciones al momento de aprender geometría, puesto que las representaciones de los cuerpos geométricos en el plano, las relaciones de los conceptos, como visualización y representación de objetos tridimensionales, son elementos fundamentales en la perspectiva de avanzar en la atención de este problema en la escuela.

Es importante también resaltar el pensamiento espacial, el cual es una exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio. Al respecto el MEN (1998) nos dice lo siguiente:

A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las expresiones matemáticas que proporcionamos a los estudiantes son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los estudiantes, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de “dibujos” de objetos le supone al estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirá siendo representaciones bidimensionales del mundo real. (p.39)

Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales, en articulación con la visualización y el razonamiento, pues esta es la base de toda actividad geométrica.

Al respecto Duval (citado por Torregosa & Quesada, 2001) propone que la formación de los conceptos implica una coordinación de sistemas de representación, entonces es importante en el aprendizaje de las matemáticas no solo la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo) sino también tener en cuenta el aprendizaje de conceptos importantes para la coordinación de los diferentes sistemas de representación.

Por tal motivo el desarrollo del lenguaje geométrico también es importante para la comprensión de conceptos, de aquí parte la necesidad de que los alumnos se enfrenten constantemente a situaciones en que tengan que comunicar información geométrica. Guillén (1997) refiere que la actividad de clasificar es una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental de las matemáticas. Es por tanto que el desarrollo de este trabajo hace un aporte al aprendizaje de las propiedades de los sólidos geométricos, y de igual manera a las dificultades que se presentan en los estudiantes.

Por medio de la geometría tridimensional los estudiantes, pueden realizar un reconocimiento de las propiedades de los sólidos geométricos, pues al hacer tal reconocimiento pueden tener una mirada crítica a cerca de dichos objetos y además de es familiarizarse con este tipo de conceptos.

Por eso a través de una monografía² y, teniendo en cuenta lo mencionado en los apartados anteriores, el objetivo fue realizar una clasificación, por medio de una investigación documental basada en la geometría tridimensional, de las dificultades presentes en el objeto de estudio, en este caso el de los sólidos geométricos.

Se realizó este tipo de investigación porque se consideró importante indagar en las dificultades que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a estos conocimientos geométricos, pues la geometría está presente en la vida cotidiana, es decir está presente en la arquitectura, el arte, la astronomía, el diseño, la topografía, etc.

² Entendemos una monografía como un estudio de problemas de tipo teórico que ayuda a la descripción de una situación problema y facilita la realización de un análisis al establecer posibles causas y consecuencias.

De igual manera es importante el conocimiento geométrico porque es de gran ayuda en la orientación del espacio, además a partir de la ella se llega a la capacidad de visualizar y representar, al igual que a desarrollar habilidades para tener una aproximación de las relaciones geométricas en una figura. Duval (citado por Gómez, 2006) afirma que la visualización es la capacidad o acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido.

La postura que presenta Duval acerca de la visualización se consideró importante en este tipo de estudio, pues incluye dos procesos, el de construir y transformar una figura geométrica teniendo en cuenta sus propiedades. Se puede decir que la geometría es una representación del modelo físico que nos rodea, puesto que esta se ocupa de las propiedades y de las medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o en el espacio euclideo, es por esto que es importante aprender geometría, para comprender las relaciones, las características y las propiedades de los objetos, teniendo en cuenta sus representaciones.

La geometría y sus diversas utilidades deben ser elementos que sirvan a los estudiantes con el fin de que la geometría adquiriera un sentido que contribuya a la estimulación y al desarrollo de sus capacidades de percepción espacial, y de percepción visual, para que de esta manera las dificultades se presentan en su estudio se puedan reducir.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS TEORICOS

En los referentes a tener en cuenta en este trabajo, se abordarán diversas temáticas que comprenden el desarrollo del pensamiento espacial y el aprendizaje de la geometría al inicio de la Educación Básica Secundaria, teniendo en cuenta las dificultades que se le presentan a los estudiantes a la hora de aprender geometría, especialmente la tridimensional. A partir de un punto de vista Curricular y también desde una dimensión cognitiva en la cual la visualización y la construcción serán los aspectos más importantes a desarrollar en este trabajo.

2.1 DESDE UN PUNTO DE VISTA CURRICULAR.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se tiene en cuenta la necesidad del sentido espacial y al respecto afirman:

Se considera una necesidad recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, y muy especialmente en la geometría, es por ello que se plantean temáticas de vital importancia para comprender las dificultades que los estudiantes tienen al aprender geometría, es decir, hacer una mirada como los estudiantes desarrollan el pensamiento espacial e investigar de qué manera representan y describen de forma racional el mundo, teniendo en cuenta las nociones de ubicación y movimientos de los objetos en el espacio, de igual manera el análisis de las formas de dichos de objetos (MEN,1998, p.37).

A propósito del pensamiento espacial, Howard Gardner (1993) refiere en su teoría de las inteligencias múltiples, que una de estas inteligencias es la espacial, además plantea que la visualización espacial es esencial para el pensamiento científico, pues se usa para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas; es decir existe la necesidad de que los estudiantes se relacionen con el mundo que los rodea, que vean la importancia de reconocer la relación entre los objetos de ese mundo y los elementos que los constituyen.

Al hablar de pensamiento espacial, se considera pertinente hacer una referencia, en cuanto al espacio euclidiano, pues Euclides no define el concepto de espacio, pero si da a conocer figuras sólidas que están en tercera dimensión, dando a entender que existe una dimensión superior al plano, ya que define algunos sólidos como figuras contempladas entre dos planos, lo que intuitivamente se podría considerar como el espacio (Puertas, 1996).

D'Amore, Fandiño, Marazzani & Sbaragli (2010) refieren que la geometría debe ser considerada como un instrumento útil para la lectura del mundo que nos rodea, un modelo del espacio material en el que se está inmerso, pero reafirman que un objetivo que se debe alcanzar en el ámbito geométrico es que el estudiante pueda observar un objeto matemático, en su esencia analizando con flexibilidad sus características peculiares. Esto es posible si no se sujeta el aprendizaje a rígidos vínculos espaciales.

Es decir, si se acostumbra a observar y analizar los objetos, independientemente de la posición que asuman, los estudiantes se vuelven más hábiles en reconocer y analizar la

situación, desarrollando de esta manera la capacidad de modelar la realidad y de dominar las situaciones espaciales en toda su complejidad.

Tomando como referencia los autores nombrados anteriormente y su posición frente a la geometría, se inició la búsqueda bibliográfica dando como resultado autores interesados en el aprendizaje de la geometría, por ejemplo, (Gutiérrez, 1998) refiere que hay un problema latente en la geometría cuando se tiene que representar estructuras u objetos geométricos tridimensionales mediante figuras planas, por lo tanto la elección de un buen modelo de representación plana de sólidos es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial.

2.2 DESDE UN PUNTO DE VISTA COGNITIVO.

En este apartado se tuvo en cuenta a algunos autores que describen a qué se enfrentan los estudiantes cuando aprenden geometría. Fue de gran importancia consultar autores que hubiesen realizado investigaciones con respecto al tema de interés, puesto que de esta manera se pudo ampliar un poco más el marco teórico de este trabajo. Con respecto a los autores que hicieron parte del desarrollo de esta investigación, se consideró a: Duval, Socas, Hershkowitz, Guillen Soler; quienes realizan un acercamiento en sus investigaciones al aprendizaje de la geometría, y las dificultades que surgen cuando se enseña en las aulas de clase.

Por tal motivo, al tener en cuenta este tipo de aprendizajes, pueden surgir dificultades en el área de las matemáticas, las cuales son descritas por Socas (1997) el cual afirma que:

El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades en los alumnos, estas son de naturalezas distintas, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según se ponga énfasis, como por ejemplo, el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de matemáticas y métodos de enseñanza. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. (p.98)

Duval (1999) afirma que los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como podrían serlo la mayoría de los objetos de otras disciplinas, tienen la característica de no poder ser asequibles de una forma directa sino a través de sus representaciones. Esto lleva a que en el aprendizaje de las matemáticas los alumnos tengan dificultades y encuentren obstáculos al confundir la representación con lo representado.

En cuanto a la representación de los objetos matemáticos, se tuvo en cuenta un aspecto importante, el cual es una de las preocupaciones expuestas en este trabajo, como lo es la visualización. Hershkowitz (citado por Torregosa, 2002) afirma que es una habilidad que permite representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual.

Guillen Soler (2005) realiza una serie de clasificaciones de los sólidos para la enseñanza de la geometría, lo hace de acuerdo a sus particiones, jerarquías y criterios de

construcción. La investigación que esta autora realiza es un ejemplo en cuanto a los estudios con poliedros y teniendo en cuenta el enfoque de Duval.

A continuación, se muestra un ejemplo (Ilustración 3), del sólido geométrico tetraedro (poliedro de cuatro caras, sus caras son triangulares, encontrándose tres de ellas en cada vértice) con el que se quiso mostrar que la habilidad de la visualización, va de la mano con la imaginación espacial, por ello es de gran importancia que los estudiantes aprendan a interpretar la representación plana de los cuerpos en tres dimensiones.

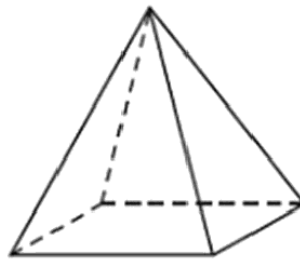


Ilustración 3. Sólido geométrico (Tetraedro)

La geometría tiene como principal finalidad conectar a los estudiantes con el mundo en el que se mueven, por ello la intuición y la relación con la geometría son de gran utilidad en la vida cotidiana, a través de las figuras geométricas la capacidad espacial de los estudiantes es mucho más fácil que la destreza numérica; por tal motivo con los sólidos geométricos se abre una posibilidad para aprender los temas relacionados con la geometría del espacio y, con el análisis propuesto, poder determinar las posibles dificultades que se presenten con este tipo de aprendizajes.

Como se señaló anteriormente, en este trabajo se asume que la actividad geométrica de los estudiantes involucra tres procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la

construcción, presentar una conceptualización inicial de cada uno de estos ha de servir como punto de referencia para las búsquedas que se propone este trabajo.

La visualización se diferencia de la visión, pues no se desarrolla en un espacio tridimensional, sino que se proyecta sobre dos dimensiones. El componente geométrico espacial permite a los estudiantes examinar y analizar las propiedades de los espacios bidimensionales y tridimensionales, así como las formas y figuras geométricas que se hallan en ellos. Desarrollar la habilidad de la visualización es de gran importancia en geometría, pues es posible que al resolver un problema los estudiantes tengan dificultades debido a que no logran estructurar lo que observan. Esta habilidad está relacionada con la imaginación espacial, es importante que los estudiantes aprendan a interpretar la representación de los cuerpos en tres dimensiones.

Por su parte, el razonamiento es considerado como una variedad de acciones que toman los estudiantes para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen (Hershkowitz, citado por Torregosa & Quesada, 2007); se puede decir entonces que se entiende por razonamiento cualquier procedimiento que nos permita desprender nueva información de informaciones previas, ya sean aportadas por el problema o derivadas del conocimiento anterior.

Gutiérrez (citado por Torregosa & Quesada, 2005) piensa que la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior,

cuándo y cómo toman decisiones, etc. Todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p. 28)

Por último, el proceso de construcción se puede describir como la utilización apropiada de ciertos instrumentos que aseguran la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. La construcción geométrica tiene dos aspiraciones básicas, la primera de ellas es asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción necesariamente presentes en el dibujo, y la segunda es reconocer las propiedades fundamentales del mismo, es decir la utilización de instrumentos técnicos como el compás y la regla. Una construcción geométrica se diferencia de un simple dibujo, teniendo en cuenta las conclusiones que puedan sacarse de ellas, pues las propiedades presentes no son resultados al azar, sino que fueron construidas de manera explícita, o son un resultado necesario de esa construcción (MEN, 2006).

Estos elementos iniciales dan lugar al rastreo bibliográfico y los análisis subsiguientes que se presentan en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III

DESARROLLO DE LAS TEMÁTICAS DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo involucra aspectos importantes que determinaron el camino a seguir en el desarrollo de este trabajo de grado. Se tuvo en cuenta las etapas pertinentes en la realización de un rastreo bibliográfico, se utilizó como modelo de escritura un estado del arte, pues este permite dar cuenta hasta dónde ha avanzado una investigación en determinado campo, además ayuda a formalizar la idea de investigación, sus propósitos y alcances, a definir objetivos y metodologías.

Se realizó un rastreo con el fin de buscar antecedentes teóricos e investigaciones en fuentes documentales, con la idea de identificar aportes teóricos y metodológicos al tema de investigación. En esta búsqueda se utilizaron criterios determinados por los propósitos del trabajo, se realizó una revisión de la misma para dar validez a las fuentes consultadas, las cuales fueron principalmente registros virtuales en revistas de investigación en Educación Matemática.

Para elaborar el estado del arte de este trabajo fue necesario tener en cuenta la temática a contextualizar, igualmente la clasificación del tipo de textos, los autores y el área en la que se centró el desarrollo de esta investigación, en este caso la geometría; también se debió determinar el tipo de trabajos que se debían consultar. Por último, establecer la categorización de los mismos, partiendo de las categorías internas de cada uno de los

textos, lo que permitió establecer el aporte que ofrece este tipo de trabajos, pues se deja una puerta abierta para futuras investigaciones.

A continuación, se describen las pautas consideradas al momento de iniciar el desarrollo de este trabajo y se muestra cuál fue la organización que permitió seguir con el rumbo de este trabajo y de esta manera desarrollarlo según el tipo de metodología, usada mencionada anteriormente. El listado que se muestra corresponde a los pasos que se siguieron cuando se inició con el desarrollo de la idea de este trabajo, ya que se debía plantear la manera en la que se iba a realizar y cuáles eran los pasos a seguir para la búsqueda de los textos y posteriormente la lectura y clasificación de los mismos, esto con el fin de saber cuáles iban de acuerdo al tema de investigación.

1. **Temática:** Se planteó la temática a investigar.
2. **Palabras clave:** Para realizar la búsqueda se plantearon palabras claves.
3. **Rastreo bibliográfico:** Se utilizaron las bases de datos, para realizar la búsqueda de los textos teniendo en cuenta la temática en cuestión.
4. **Interpretación:** Análisis de los documentos por áreas temáticas, visualización y representación.
5. **Organización de la información:** Después del análisis de los documentos, se organizaron de acuerdo con las temáticas empleadas en la búsqueda.
6. **Categorías:** Se organizó la información en rejillas y a partir de aquí se obtuvieron las categorías para el análisis final.
7. **Construcción teórica:** Revisión en conjunto de la interpretación de las temáticas propuestas en la interpretación, con el fin de formalizar el estado actual del tema.

A partir de estas pautas, se organizó la información en tres partes que describen como se realizó toda la búsqueda para llegar hasta los textos de interés y sacar de ellos la

información necesaria. La primera de ellas comprende *el análisis de los documentos*, en este apartado se muestra como fue el inicio de la investigación, el cual consistió en el planteamiento de una temática de investigación para realizar la búsqueda documental; de acuerdo con la temática planteada, se determinaron algunas palabras claves que fueron parte importante en el inicio del rastreo bibliográfico, es por eso que en esta primera parte se tuvo en cuenta fases que muestran cómo se realizó el rastreo bibliográfico, la identificación de las temáticas y la tipificación de los textos seleccionados.

En la segunda parte de este trabajo se presenta la *organización de los textos encontrados* por medio del rastreo bibliográfico, se organizaron de acuerdo con el concepto de la búsqueda y con la temática a la cual pertenecía cada uno; estos se organizaron de acuerdo con las definiciones tenidas en cuenta en el planteamiento del problema: *visualización, representación, dificultades y sólidos*, estos conceptos se tomaron como referente, puesto que el campo de trabajo de investigación es en el área de geometría.

Por último, en la tercera parte se presentan *las categorías*, las cuales enmarcan parte importante en el desarrollo de este trabajo, puesto que, después de realizar un análisis de cada uno de los textos seleccionados, se hacía necesario organizar la información para determinar la posición de cada autor frente a la problemática de las dificultades de aprendizaje con sólidos geométricos, esta información se organizó en rejillas, en las cuales se realizó una para cada texto y de aquí se extrajo la información necesaria para la organización de las categorías.

3.1 PRIMERA PARTE: Análisis de documentos por áreas temáticas.

En este apartado se abordarán los aspectos centrales que serán parte de la metodología de este trabajo de grado, con el propósito de dar cuenta de la problemática y dar cumplimiento a los objetivos propuestos.

Parte fundamental de este trabajo se basó en el análisis de las representaciones y la visualización de figuras tridimensionales al inicio de la Educación Básica Secundaria, el propósito es identificar qué dificultades tienen los estudiantes al momento de enfrentarse con la geometría en la escuela y en particular con el estudio las figuras tridimensionales.

Por otro lado, se hace pertinente describir a través de un análisis cualitativo la información de las investigaciones encontradas. Conforme con esto, se tienen en cuenta las dificultades en la visualización y representación de sólidos geométricos; por lo tanto se hizo necesario demarcar fases puntuales para el desarrollo de este trabajo.

Dichas fases se presentan a continuación y cada una se desarrolló con un tiempo determinado. Es de aclarar que estas fases se determinaron a partir de la organización planteada al inicio de la investigación, por esta razón fue fundamental iniciar con una temática de investigación y de igual manera las *palabras clave* con las que se arrancarían la búsqueda, después saber hacia dónde se encaminaría la investigación; se inició con las siguientes pautas que se describen a continuación, estas fueron parte fundamental para la finalización y organización de toda la búsqueda.

1. Rastreo bibliográfico.

2. Identificación de las temáticas.
3. Tipificación de los textos seleccionados.
4. Construcción de rejillas.
5. Determinación de categorías.

Las pautas mencionadas están contenidas en un desarrollo metodológico basado en la hermenéutica, pues como se menciona en apartados anteriores fue base fundamental en la metodología, puesto que por medio de esta se puede dar una explicación, determinando posibilidades y condiciones de una ruta investigativa.

Se tuvo en cuenta este tipo de metodología, ya que por el tipo de trabajo que se realizó, permitió dar una explicación y una interpretación del tema planteado desde el inicio del mismo. Con respecto al tipo de metodología utilizada para dar continuación a esta investigación, Gadamer (1977) refiere que el lenguaje es un medio universal, pues lo que se busca es la comprensión de textos y, a su vez, comprender significa interpretar. Además, es una herramienta que permite seguir el rumbo de una investigación.

Por la naturaleza de este tipo de metodología, la idea fue que por medio de la misma se realizara la interpretación de los textos, realizar el análisis e interpretación. Tratando siempre de expresar las ideas de los autores, considerando el contexto en el cual emergieron y así se tuvo en cuenta la clasificación de la información según el grado de interés y la necesidad de la investigación.

3.1.1. Primera fase: Rastreo bibliográfico.

Esta fase tuvo una duración aproximada de un mes, la intención fue desarrollar un rastreo bibliográfico en relación con las investigaciones realizadas y descritas por distintos autores. Para llevar a cabo el rastreo bibliográfico fue necesario se tomó como referencia a Castiblanco (2007) pues este autor define 6 etapas para realizar este tipo de búsquedas, estas se tuvieron en cuenta en esta primera fase.

1. Formulación precisa de un tema de investigación.
2. Establecer un plan de conceptos.
3. La búsqueda documental propiamente dicha.
4. Acopio de la información documental.
5. Análisis de la información compilada.
6. Evaluación general de la investigación documental.

Para dar cumplimiento a la fase 1, se tuvo en cuenta los pasos anteriores. Al realizar esta investigación documental fue de gran importancia relacionar la pregunta problema planteada en este trabajo con las pautas propuestas para realizarlo y la metodología, igualmente estuvo sujeta a los objetivos del mismo.

Al inicio de esta se hizo la formulación precisa de un tema de investigación, la búsqueda de los textos de interés y de igual manera el análisis de cada uno de ellos; posteriormente en la segunda etapa, teniendo en cuenta los procesos realizados en la primera, lo que se buscó fue identificar las temáticas y a partir de aquí establecer un plan de conceptos.

Se realizó la búsqueda de los textos en las bases de datos disponibles en la biblioteca de la Universidad del Valle, de igual manera se utilizó Google Académico. La búsqueda se realizó en español y en inglés, y se encontraron resultados en las bases de datos: Scielo, Dialnet, Redalyc; se utilizaron las siguientes palabras clave:

En español.

- Sólidos geométricos.
- Aprendizaje de la geometría.
- Dificultades en el aprendizaje.
- Dificultades en geometría.
- Representación + visualización.
- Dificultades + geometría + visualización.
- Dificultades + geometría + representación.
- Solidos + dificultades.
- Visualización en geometría.

En ingles.

- Geometry solids
- Learning Geometry
- Learning difficulties
- Representation + Visualization
- Difficulties + geometry + visualization
- Difficulties + geometry + Representation
- Display on geometry

En inglés, fue difícil encontrar información correspondiente al tema de investigación. Debido a que la búsqueda no arrojó los resultados esperados, no se tomó en

cuenta este idioma para este trabajo. Se encontraron algunos textos, pero no correspondían con lo esperado.

Al realizar la búsqueda en español, se encontraron 18 textos relacionados con el tema de interés (Una presentación del resumen, palabras claves y referencias de cada texto se incluye en el anexo 1), se leyó cada uno de ellos con el fin de realizar un análisis y de esta manera determinar cuáles de ellos harían parte de la monografía. A continuación se hace una relación de los textos encontrados y las palabras claves que sirvieron como filtro en las bases de datos.

Realizar este rastreo bibliográfico fue de gran importancia ya que se abordaron tesis, artículos de revista, libros y otras fuentes con temas concernientes al de la investigación.

Tabla 1. Agrupación de textos y palabras clave. Fuente: Propia.

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL	Sólidos geométricos. Sólidos + dificultades
TEXTOS 1. Las representaciones planas de cuerpos 3 – Dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. Gutierrez, Á. (1998). <i>Revista Ema</i>, 3(3), 193-220. 2. ¿Por qué los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de a geometría? ¿y en la investigación? Guillén, G. (2010). En <i>Investigación en educación matemática XIV</i> (pp. 21-68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. 3. El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza / aprendizaje de la geometría del espacio. Velázquez, O. J. R., Ramírez, M. C., Reyes, M. E., Doallo, M. E., & Santiesteban. <i>Acta Latinoamericana de Matemática Educativa</i>, 45.	

4. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. Guillén Soler, G. (2000). <i>Enseñanza de las Ciencias</i>, 18(1), 035-53. 5. Algunos elementos del modelo de competencia inicial para la enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria, análisis de un modelo de enseñanza en el Magisterio. González, E., Guillén, G., & Figueras, O. (2008). 6. Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. Sotomonte, P. S., & Vanegas, G. A. R. (2011). <i>Praxis & Saber</i>, 2(3), 27-60. 7. La enseñanza de la geometría de sólidos. Guillén, S., & Gutierrez, A. (1992). Proyecto de Investigación,	
PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL	Dificultades en el aprendizaje de la geometría. Aprendizaje de la geometría. Dificultades + geometría.
TEXTOS 1. Dificultades de aprendizaje de la geometría, por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO. Roca Cuffí, M. (2014). Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO. 2. Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. Pérez, S., & Guillén, G. (2007). 3. La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la educación secundaria obligatoria. sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. estudio exploratorio. López, L., & Guillén, G. (2009). 4. Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula. Guillén, G., Sáiz, M., Figueras, O., & Corberán, R. M. (2003). 5. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. Rodríguez, A. G. (2006). <i>Geometría para el siglo XXI, Síntesis, Madrid</i>. 6. Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. Barrantes, M., López, M., & Fernández, M. Á. (2015). <i>PNA</i>, 9(2), 107-127.	

7. Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3 – Dimensional. Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2015). <i>PNA</i> , 9(2), 53-83.	
PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL	Representación. Dificultades + geometría + representación. Representación + visualización.
TEXTOS	
1. Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas. Blanco, H., & Crespo, C. (2007). <i>Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México</i> .	
2. Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Araya, R. G., & Alfaro, E. B. <i>Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática</i> , (5).	
PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL	Visualización. Representación + visualización. Dificultades + geometría + visualización. Visualización en geometría.
TEXTOS	
1. Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. Ortega, T., & Pecharromán, C. (2015). <i>Avances de Investigación en Educación Matemática</i> , 1(7).	
2. La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. Fernández, T. (2013).	

Para determinar cuáles de los textos seleccionados se tendrían en cuenta para la investigación, se siguió el método propuesto para realizar un Estado Del Arte. Vargas & Calvo (citados por Londoño, Maldonado & Calderón 2014) afirman que un estado del arte consiste en inventariar y sistematizar la producción en un área del conocimiento, este no se puede quedar solamente en inventarios o listados, sino que es necesario transcender en cada texto, idea o palabra, ya que la razón de ser de esta actividad investigativa es precisamente lograr una reflexión a fondo sobre las tendencias y/o vacíos en un tema específico.

Teniendo esto como referencia se organizaron las ideas de la siguiente manera:

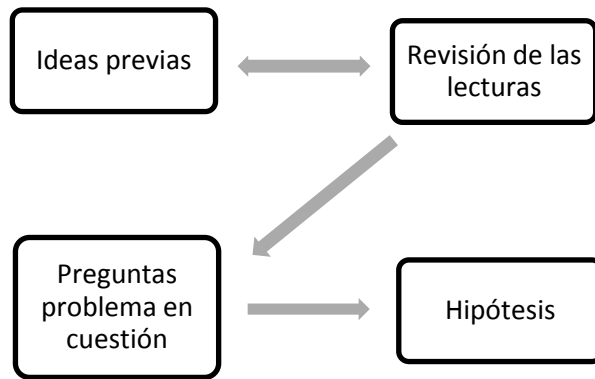


Ilustración 4. Requisitos para iniciar un estado del arte. Fuente: Londoño, Maldonado & Calderón (2014)

El gráfico muestra la secuencia que se utilizó al momento de realizar la búsqueda y clasificación de los textos, las ideas previas son las que se tenían como idea principal de cómo se realizaría la monografía, y lo que se iba a investigar, fue de gran importancia tener este concepto claro para poder determinar las ideas claves con las que se realizaría la búsqueda en las bases de datos.

Después de haber encontrado los textos relacionados con el tema de investigación, lo que se hizo fue realizar una organización, la cual permitió realizar la clasificación de los mismos, teniendo en cuenta los contenidos descritos en el planteamiento del problema, es decir los conceptos como: *representación, visualización, sólidos geométricos y dificultades*, estos fueron utilizados como filtros, que sirvieron para realizar una clasificación, y de esta manera determinar cuáles se tomarían en cuenta para la investigación.

Dichos filtros surgieron desde el inicio de la investigación, puesto que son las mismas temáticas que se utilizaron para la clasificación realizada, pues se debía tener en cuenta lo qué se iba a tomar de cada uno y lo que no; y, por último, las hipótesis surgidas a

partir de la revisión de cada uno de los textos, pues se tuvo en cuenta cada uno para extraer de ellos lo necesario y de esta manera darle una validez de acuerdo al tema de interés.

A continuación, se hace una breve descripción de lo que se encontró y lo que no se encontró en los textos seleccionados, puesto que este análisis llevó a que fuera más fácil la selección de los textos que en realidad se iban a tomar en la investigación.

Cuando se empezaron a leer los textos encontrados en la búsqueda bibliográfica, muchos de ellos no tenían el enfoque hacia la parte geométrica sino que hacían descripciones acerca de qué era y cómo debía enseñarse, de igual manera en algunos de ellos presentaban secuencias de clase con los estudiantes y a partir de estas tomaban decisiones acerca del manejo de las mismas; se tomaron en cuenta aquellos textos en los que su tema estaba enfocado hacia qué dificultades encontraban cuando se presentaban problemas geométricos en los estudiantes, y de igual manera las describían para que fueran más explícitas al lector. Algunos autores coinciden con varias dificultades presentes en los estudiantes cuando estudian sólidos geométricos en el aula de clase.

3.1.2 Segunda fase: Identificación de las temáticas.

Esta fase encierra la identificación de los temas concernientes a la problemática en la cual se direccionó la monografía; la idea en este punto del trabajo fue dar prioridad a las etapas descritas para realizar un rastreo bibliográfico, puesto que en esta etapa del trabajo ya los textos estaban seleccionados, por tal motivo solo se tuvo en cuenta las temáticas abordadas desde el inicio de la investigación, como son la *representación*, *visualización*, *sólidos geométricos* y *dificultades*.

Esto se realizó con el fin de identificar los textos que arrojó dicha búsqueda, para ello se utilizaron las temáticas mencionadas en idioma español, luego se organizaron los textos de acuerdo con la temática con la que se identificaron cada uno, y a partir de aquí se clasificaron; luego se realizó una revisión de cada texto, teniendo como referente las temáticas de interés, de igual manera estas también se utilizaron como filtros para determinar a qué temática pertenecían cada uno.

La siguiente tabla muestra la organización que se realizó de los textos, después de haberlos revisado, por tal motivo está organizada con las temáticas de interés: *representación, visualización, sólidos geométricos y dificultades*. Se buscó hacer un análisis a cada uno de los textos y mostrar parte de su contenido, con el fin de saber por qué hizo parte de la investigación.

Tabla 2: Agrupación de textos por temáticas. Fuente: Propia.

TEMÁTICA	TEXTO
Representación	• Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática. Blanco, H. & Crespo, C. (2002) • Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. Suarez, P. & Ramirez, G. (2002) • La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la educación secundaria obligatoria. sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. estudio exploratorio. López, L. & Guillen, G. (2009) • Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. Barrantes, M, López, M & Ángel, M. (2015)

Visualización	• El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Rojas, O. (2012) • Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. Ortega, T. & Pecharromán, C. (2015) • La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. Fernández, T. (2012)
Dificultades	• Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. ideas erróneas. Guillen, G. (2000) • Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula. Guillen, G. & Corberán, RM. (2001) • Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO. Roca, M. (2014) • Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. Pérez, S. & Guillen, G. (2007)
Sólidos	• Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. Gutiérrez, Á. (1998) • Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Gamboa, R. & Ballester, E. (2009) • ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación? Guillen, G. (2010) • Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio. Gonzales, E & Guillen, G (2004)

	• La enseñanza de la geometría de sólidos. Gutiérrez, Á., Jaime, A & Cáceres, M. (1992)
--	---

La idea de identificar la temática en cada uno de los textos surgió de la necesidad de realizar una tipificación de las mismas y de esta manera organizar la información correspondiente a cada una de ellas, esto con el fin de establecer qué textos relacionaban cada una de las temáticas, puesto que así se facilitaba la realización de las rejillas.

A partir de la tipificación realizada se pudo determinar aspectos importantes en los textos encontrados escritos por distintos autores. Tales aspectos están relacionados con los diferentes tipos de textos, puesto que en cada uno de ellos se encuentran dificultades descritas, pero desde diferentes tipos de vista; por ejemplo, en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el espacio, enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula, los cuales se presentan en condiciones distintas, pero en ambas se encuentran dificultades.

Con esto se determinaron variables importantes, tales como la cantidad de textos en los cuales se abordan las temáticas de interés y desde qué punto de vista, pues teniendo en cuenta el proceso de visualización y representación, fue fundamental en este estudio tener en cuenta un análisis desde lo semiótico, didáctico, cognitivo y geométrico.

Por tal motivo, en esta fase se hace necesario recopilar la información investigada en rejillas (ver anexos) y así de esta manera realizar una clasificación de los aspectos más relevantes para la investigación, estas se realizaron una para cada texto, teniendo en cuenta el título y autor de cada uno de ellos, y las temáticas abordadas a lo largo de la

investigación considerando ventajas y desventajas presentes en cada una de ellas. Se tuvieron en cuenta también observaciones, estas se realizaban a medida que se leía cada texto, con el fin de tener una mejor y más detallada información de lo que se definía en cada uno, es decir se hizo una descripción después de haber leído completamente el texto, este análisis y clasificación de textos se realizó desde el marco de la hermenéutica. La realización de las rejillas fue de gran ayuda, puesto que se organizó mejor la información y fue más fácil al momento de describir las dificultades presentes en cada una de las investigaciones.

Según las temáticas y palabras claves que se utilizaron para realizar la selección de los textos encontrados a través de la búsqueda documental, se encontró pertinente mostrar cada uno de ellos con un pequeño comentario, que muestra de qué trata cada uno.

Tabla 3. Comentarios de los textos. Fuente: Propia.

TEXTO	COMENTARIO
1. Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática. Blanco, H. & Crespo, C. (2002)	Investigación orientada a determinar las dificultades que se observan en la enseñanza y aprendizaje de las representaciones de cuerpos geométricos en el plano en las clases de geometría, también tienen en cuenta las características de las argumentaciones que realizan los estudiantes.
2. Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. Suarez, P. & Ramirez, G. (2002)	En el artículo hacen referencia a algunos resultados de una investigación que realizaron (Aydee Blanco, 2000) implementando una estrategia de enseñanza con el fin de generar ambientes de aprendizaje de sólidos platónicos y arquimedianos con un grupo de

	estudiantes de grado octavo. Tienen en cuenta sistemas de representación desde el enfoque ontosemiótico.
3. La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la educación secundaria obligatoria. sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. estudio exploratorio. López, L. & Guillen, G. (2009)	Es un estudio exploratorio sobre la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos, tales como describir, clasificar, definir y demostrar utilizando como contexto la exploración con espejos, se realiza con estudiantes de séptimo y octavo de básica secundaria.
4. Análisis de las representaciones geométricas en los libro de texto. Barrantes, M, López, M & Ángel, M. (2015)	En esta investigación analizan y clasifican las imágenes gráficas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en los libros de texto, estudian varios aspectos de las representaciones geométricas.
5. El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Rojas, O. (2012)	Tienen en cuenta la geometría del espacio y las dificultades y carencias en su aprendizaje a través de la didáctica de la matemática, la cual está presente en todas las ramas de la matemática y además ayuda a la resolución de problemas.
6. Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. Ortega, T. & Pecharromán, C. (2015)	Presentan una investigación sobre el aprendizaje de definiciones elementales de geometría por alumnos de primaria, consideran importante la visualización y la representación verbal del concepto.
7. La investigación en visualización y razonamiento	Le dan gran importancia a la visualización en al ámbito de la geometría y el razonamiento espacial. En

espacial. Pasado, presente y futuro. Fernández, T. (2012)	la investigación tienen en cuenta las carencias que tienen los futuros maestros en estos temas.
8. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. Guillen, G. (2000)	Investigación acerca del aprendizaje de la geometría de los sólidos, muestran ejemplos de algunas familias de sólidos relacionados con los objetos mentales que los estudiantes construyen y los errores que cometen como consecuencia de las dificultades del contenido matemático.
9. Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula. Guillen, G. & Corberán, R. (2001)	Diseño de un test con el objetivo de obtener información acerca de la geometría que se enseña en las escuelas de primaria en la Ciudad de México.
10. Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO. Roca, M. (2014)	Estudio acerca de los resultados que los estudiantes obtienen con las pruebas diagnósticas o evaluaciones de matemáticas a las que se enfrentan, teniendo como referente el área de geometría, hacen referencia a que los malos resultados son debidos a las dificultades en el aprendizaje de la geometría.
11. Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. Pérez, S. & Guillen, G. (2007)	Presentan un informe de resultados referidos a la geometría y su enseñanza en la educación secundaria, se realizó por medio de encuesta a 19 profesores, teniendo en cuenta datos teóricos y experimentales.
12. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la	Es un artículo donde presentan diversas reflexiones sobre la importancia de utilizar representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales, presentados

geometría espacial. Gutiérrez, Á. (1998)	a estudiantes de diferentes edades, analizan las diferentes formas de objetos en 3 dimensiones y toman como base resultados de algunas investigaciones.
13. Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. Gamboa, R. & Ballesteros, E. (2009)	El artículo presenta la complejidad que tiene el estudio de las figuras geométricas.
14. ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación? Guillen, G. (2010)	Una investigación que se centra en la geometría espacial, muestran el origen y desarrollo de la geometría de sólidos, centrando su observación en los procesos de enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos.
15. Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio. Gonzales, E & Guillen, G (2004)	Es un artículo donde presenten tan resultados acerca de elementos para la enseñanza de la geometría de los sólidos en la enseñanza primaria.
16. La enseñanza de la geometría de sólidos. Gutiérrez, Á., Jaime, A & Cáceres, M. (1992)	Es un proyecto de investigación de experimentación con sólidos geométricos, se realizó esta práctica con grupos de estudiantes de básica primaria, también se realizó un análisis de los experimentos.

En la segunda columna de la tabla se realizó una breve descripción de lo que trata cada texto tomado en cuenta para la monografía, se intentó hacer un acercamiento

mostrando si es un artículo o una investigación, cada uno tiene un contenido distinto, pero todos se encaminan hacia las dificultades presentes en la geometría, tomando como referente las figuras tridimensionales, también se quiso mostrar en que tiempo de escolaridad ocurre esto.

3.1.3 Tercera fase: Tipificación de los textos seleccionados.

Siguiendo con las etapas descritas para realizar un rastreo bibliográfico, en esta última fase el objetivo fue realizar una organización de la información, dando a conocer los resultados finales de los textos que formaron parte de la investigación, es decir aquellos que después de haberles realizado un análisis formaron parte del grupo de textos seleccionados; esto se realizó teniendo en cuenta que en cada uno de los textos se encontraban presentes las temáticas dispuestas para la investigación (*representación, visualización, sólidos geométricos y dificultades*), para saber que de verdad servían para el trabajo se realizó previamente la lectura de cada uno de ellos, luego como se menciona en la fase 2, se organizó la información en rejillas, se hizo una para cada texto.

El siguiente ejemplo muestra la estructura de la rejilla que se utilizó para la organización de la información de los textos seleccionados.

REJILLA No.	Tema del texto (subdivisiones)			Tema del texto (subdivisiones)		
	Texto:					
	Ventajas	Dificultades	Observaciones	Ventajas	Desventajas	Dificultades
VISUALIZACIÓN						
REPRESENTACIÓN						

Ilustración 5. Ejemplo de rejilla. Fuente propia.

A continuación, se muestran los textos seleccionados después de haber realizado un análisis, teniendo en cuenta las temáticas mencionadas en la fase anterior.

Para seleccionar los textos se tuvo en cuenta las siguientes temáticas: *sólidos*, *representaciones*, *visualización*, como se muestra en la tabla 4. Después de tener 18 textos seleccionados al principio de la búsqueda documental, se realizaron los respectivos análisis teniendo en cuenta las áreas temáticas y la identificación de las mismas, quedaron un total de 7 textos seleccionados, pues estos cumplieron las condiciones propuestas desde el principio de la investigación, las cuales fueron identificar dificultades en el aprendizaje de la geometría, específicamente en los sólidos geométricos; no se tomaron en cuenta para el trabajo todos los 18 textos inicialmente encontrados, puesto que al hacer su revisión no se encontró en algunos de ellos información suficiente que permitiera conocer el estado actual de las investigaciones con respecto a las dificultades en geometría.

Los textos que se tuvo en cuenta para el contenido de este trabajo, en este caso los 7 nombrados anteriormente, describían dificultades presentes cuando se enseña geometría, es decir, dan una descripción de lo que pasa con los estudiantes cuando se enseña, por

ejemplo, la representación en el plano geométrico de cubos o pirámides, dando así al lector un acercamiento a la temática de búsqueda planteada.

Luego, cada uno de ellos se organizó en una rejilla, para que de esta manera se pudiera tener un mejor conocimiento de lo que trataba cada uno.

Tabla 4: Textos seleccionados. Fuente: Propia.

TEMÁTICA	TEXTO SELECCIONADO
SOLIDOS	1. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. 2. ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación? 3. Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio.
REPRESENTACIONES	1. Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática. 2. Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación.
VISUALIZACIÓN	1. Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. 2. Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO.

Con esta organización, se buscó tener un orden de la información recogida, mediante el rastreo bibliográfico que se realizó y el análisis de los documentos. Es por ello que se muestra en la tabla qué tipo de texto se seleccionó para cada temática, y a partir de aquí realizar la clasificación de las dificultades encontradas, las cuales fueron descritas por los autores en sus investigaciones, y que se tomaron como referencia para realizar este trabajo.

Posteriormente se analizaron los resultados de las tres fases tenidas en cuenta en esta investigación, dando prioridad a los objetivos planteados al inicio.

3.2 SEGUNDA PARTE: ESTADO DEL ARTE

Para escribir esta segunda parte se escogió de nuevo el proceso seguido para elaborar un Estado Del Arte puesto que se hace referencia a la recopilación de investigaciones fundamentadas alrededor de una temática, también porque se tiene en cuenta la información sobre el conocimiento en un área en especial; además porque muestra de alguna manera el modo en que una investigación puede significar un aporte para estudios posteriores.

Los resultados encontrados con la búsqueda bibliográfica, se organizaron en las rejillas de acuerdo a los textos y a su temática correspondiente, estas fueron determinadas de acuerdo a las *dificultades en representación y visualización de las figuras tridimensionales*, y, por último, se realizó una organización de la información documental.

En 6 de los textos que se tuvo en cuenta para el análisis, se encontró información basada en dificultades presentes sobre conceptos geométricos, especialmente cuando se trabaja en el aula con objetos tridimensionales, por ejemplo; *dificultad en la relación de conceptos con diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico, reconocimiento de propiedades, forma de escritura, manejo de software 3D, etc.* Es de aclarar que, como se muestra en la tabla número 4, se realiza una distinción entre dificultades en representación y dificultades en visualización. En uno de los textos restantes a los que de igual manera se les hizo el análisis, no había evidencia de dificultades presentes en los estudiantes.

Para realizar el análisis de los textos seleccionados fue necesario organizar la información en rejillas, para esto se tuvo en cuenta los filtros como: *ventajas, desventajas, dificultades y observaciones*, y las temáticas *representación y visualización*. De igual manera se hicieron subdivisiones en los textos, considerando los aspectos más importantes que contenían cada uno, dando prioridad a la temática de la monografía. Se realizó la lectura de cada uno de los textos, pues en esta parte del trabajo se le dio prioridad al análisis de los mismos.

Se tuvo en cuenta en las rejillas *ventajas, desventajas, dificultades y observaciones*, porque fue importante saber no solamente las dificultades, sino también que ventajas y desventajas traían estas a los estudiantes, o cuales eran las que encontraban los autores al momento de la enseñanza de conceptos geométricos en el aula, de igual manera las observaciones que como lector se hacían después de realizar la lectura completa del texto. En la página siguiente se muestra un ejemplo de rejilla, las demás están en Anexos:

REJILLA No.1	Interpretación de una figura plana para convertirla en un objeto tridimensional.			Descripciones sobre papel.		
Texto: Las representaciones planas de cuerpos 3 – Dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial						
	Ventajas	Dificultades	Observaciones	Ventajas	Desventajas	Dificultades
VISUALIZACIÓN	Usar métodos gráficos para realizar una descripción.		Tienen en cuenta el objeto de estudio en este caso el cubo soma, llamado por el autor Multicubo.	Plantear varias actividades seguidas, influye en la forma de resolver las siguientes, ya que los estudiantes tienen la tendencia a usar el mismo método de representación.		
REPRESENTACIÓN	La enseñanza específica ayuda a la relación entre los cuerpos espaciales y sus representaciones planas, obteniendo mejores resultados cuando la enseñanza de basa en el uso de materiales manipulativos.	Calcular la cantidad de cubos que se encuentran en un módulo multicubo con formas de prismas rectangulares. Relación de interpretaciones planas. Dibujo de vértices de los sólidos sobre los puntos de la trama isométrica.	Este tipo de dificultades se pueden calificar como conceptuales, según al Autor; pues tienen que ver con la comprensión de las características de la representación.			Algunos estudiantes presentan dificultades para realizar buenos dibujos en perspectiva o en proyección paralela.

Al momento de realizar las rejillas, teniendo en cuenta los filtros antes mencionados y las temáticas relacionadas, se definieron características que dan cuenta de las dificultades de los estudiantes, en cuanto a la descripción de cada texto, se realizó un análisis para identificar si dichas características estaban presentes en las demás rejillas, es decir si aquellas dificultades encontradas en una de ellas, también estaban presentes en las demás rejillas realizadas, y de esta manera tener en cuenta la descripción de las características encontradas en las rejillas.

A continuación, se describen las características encontradas en las rejillas realizadas, a partir de aquí se empiezan a desglosar las dificultades presentes en los textos seleccionados, descritas por cada autor en su investigación.

1. Cálculos de cantidades: cantidad de cubos en un multicubo (cubo soma), suma de ángulos internos de un polígono.
2. Relación de interpretaciones planas, presentación en el plano geométrico (cubos o pirámides)
3. Dibujo de los vértices de los sólidos, dibujo técnico, dibujos irregulares, dibujo de objetos originales (sólidos platónicos), dibujos en perspectiva o en proyección paralela.
4. Propiedades geométricas de cuerpos representados o de cuerpos que deben imaginar, reconocimiento de las representaciones prototípicas, relación de conceptos de diferentes representaciones.
5. Conflictos con las imágenes.

Estas características dan cuenta de las dificultades que los autores de cada texto encuentran en sus estudiantes cuando realizan las investigaciones, según las rejillas y el análisis realizado a los textos se pudo constatar esta información, como se mencionó

anteriormente en 6 de los textos se pudo encontrar esta información, los cuales son presentados a continuación:

1. *Las representaciones planas de cuerpos 3 – dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.*
2. *Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas.*
3. *¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación?*
4. *Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones.*
5. *Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación.*
6. *Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO.*

El texto en el que no se encontraron criterios de búsqueda para las dificultades, fue en el texto: *Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio.*

Lo anterior es el punto de partida para determinar las características que muestran en que tienen dificultades los estudiantes cuando aprenden geometría de sólidos; dichas características se muestran en la tercera parte de este trabajo, puesto que es donde se describen los resultados del análisis de cada texto.

3.3 TERCERA PARTE: NARRACIÓN HERMENEUTICA DE LAS CATEGORÍAS.

En esta parte se presentan las categorías encontradas, después de realizar el análisis a los textos, dichas categorías fueron creadas a partir de las características encontradas, las cuales se mencionan en la segunda parte de este capítulo.

Estas características muestran las dificultades encontradas acerca del aprendizaje de la geometría, dichas dificultades están descritas en cada una de las investigaciones que se escogieron y que ya fueron mencionadas anteriormente.

Después de revisar las rejillas, se coincide con las siguientes dificultades en visualización en algunos de los 7 textos seleccionados, por tal motivo se hace una lista de las dificultades que los autores consideran se presentan en el aprendizaje de la geometría.

Estas dificultades se identificaron para el trabajo como características, pues fueron las que permitieron hallar las categorías en los textos seleccionados, se realizó un listado, el cual se muestra a continuación.

3.3.1 Características: Dificultades en Visualización:

- a.** Propiedades geométricas de cuerpos representados o de cuerpos que deben imaginar.
- b.** Conflictos con parte de la imagen.
- c.** Definición del concepto que puede entrar en conflicto con otras partes cuando son evocados juntas, generando un conflicto cognitivo.
- d.** De tipo visual, debido a los prototipos.
- e.** Representación de las ideas geométricas.
- f.** Comprensión de símbolos de quienes aprenden.
- g.** Al expresar construcciones externas verbales a partir de las internas.
- h.** Visualizaciones incompletas, coordinación de representaciones consideradas.
- i.** Vocabulario inadecuado.
- j.** Dibujos irregulares.
- k.** Falta de claridad en la visualización de un objeto en el espacio.
- l.** Falta de visión espacial.
- m.** Identificación de triángulos dentro de un polígono plano.
- n.** Cálculo de la suma de ángulos internos del polígono.

- o. Identificación de ángulos opuestos por el vértice.
- p. Percepción de elementos geométricos o figuras planas.

Las siguientes son las dificultades que se encontraron en la representación, estas también coincidían en algunos de los textos seleccionados.

3.3.2 Características: Dificultades en la representación.

- a. Representación en el plano geométrico (cubos o pirámides)
- b. Comprensión del lenguaje matemático.
- c. Reconocimiento de términos.
- d. Uso de notaciones, símbolos. Etc.
- e. Dificultades para el reconocimiento de las representaciones prototípicas.
- f. Relación de conceptos de diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico.
- g. Al codificar o decodificar dibujos de sólidos.
- h. Dibujo técnico.
- i. Interacción profesor – alumno.
- j. Recolección de datos de forma escrita, a través de cuestionarios.
- k. Formación de representaciones internas de un ángulo.
- l. Representaciones externas como la verbal.
- m. Elaboración de figuras a través de plegados.
- n. Dibujo de objetos originales (sólidos platónicos)
- o. Nociones de perpendicularidad y paralelismo.
- p. Software 3D.
- q. Calculo de cantidad de cubos.
- r. Relación de interpretaciones planas.
- s. Dibujo de vértices de los sólidos.
- t. Dibujos en perspectiva o proyección paralela.

Estas categorías muestran las dificultades encontradas en el aprendizaje de la geometría, descritas desde diferentes puntos de vista y desde autores diferentes. Por tal motivo se muestra a continuación un listado con las categorías encontradas.

3.3.3 Identificación de Categorías

1. Categorías de acuerdo con la visualización.

- a. Propiedades geométricas y vocabulario inadecuado.
- b. Conflicto con imágenes, definición de conceptos y comprensión de símbolos.
- c. Representación de ideas, de prototipos y coordinación de representaciones.
- d. Construcción de representaciones y percepción de elementos geométricos. Dibujos irregulares.
- e. Identificación de triángulos dentro de un polígono y de ángulos opuestos por el vértice.
- f. Visión espacial y visualización de un objeto en el espacio.

2. Categorías de acuerdo con la representación.

- a. Representación en el plano geométrico y relación de conceptos de diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico.
- b. Comprensión del lenguaje matemático, reconocimiento de términos y uso de notaciones y símbolos.
- c. Reconocimiento de representaciones prototípicas
- d. Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela.
- e. Forma de escritura.
- f. Formación de representaciones internas de un ángulo y representaciones externas (verbal) y relación de interpretaciones planas.
- g. Cálculo de las cantidades de cubos y nociones de perpendicularidad y paralelismo.
- h. Software 3D.

Para tener una mejor claridad acerca de las rejillas y para saber con cual se relaciona cada texto se organizaron en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que cada texto pertenece a una rejilla, por tal motivo se encuentran enumeradas. Se realizó esta organización para tener un mejor control al momento de realizar el análisis para hallar las categorías y de esta manera determinar las dificultades existentes.

Tabla 5: Texto y Rejilla. Fuente: Propia.

Texto	Número de la Rejilla
1. Las representaciones planas de cuerpos 3 – Dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.	1
2. Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas.	2
3. ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?	3
4. Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones.	4
5. Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el Magisterio.	5
6. Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación.	6
7. Dificultades de aprendizajes de la geometría por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO.	7

Después de identificar las categorías en la **Visualización**, se organizaron en la siguiente tabla, en la cual se mostró la categoría y el texto en el que se hace referencia de dicha dificultad, teniendo en cuenta que se pudo identificar 6 categorías.

Tabla 6: Categorías. Fuente: Propia.

Categoría	Rejilla 1	Rejilla 2	Rejilla 3	Rejilla 4	Rejilla 5	Rejilla 6	Rejilla 7
a							
A	x			X			
B		x	X				
C		x	X	X		X	
D				X			x
E							x
f							x

Con esta tabla se pudo constatar que ninguna de las categorías tiene relación con la rejilla 5, tal y como se mencionó anteriormente, hubo un texto en el cual no se encontraron dificultades existentes, es decir que el texto que no aborda este tipo de dificultades es: Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio. Se pudo observar que dicho texto no tiene contenido que pueda interesar con las dificultades existentes con la visualización.

Lo mismo se realizó con las categorías en la Representación, de igual manera se organizaron en una tabla igual, con el fin de mostrar la categoría y el texto que hace referencia a cada dificultad, aquí se identificaron 8 categorías.

Tabla 7: Categorías. Fuente: Propia.

Categoría	Rejilla 1	Rejilla 2	Rejilla 3	Rejilla 4	Rejilla 5	Rejilla 6	Rejilla 7
A		x	X				
B		x					
C		x					
D	x		X			X	
E				X			
f	x			X			
G	x					X	
H						X	

Al realizar la tabla de las categorías referentes a la representación, se puede ver que ninguna de las categorías tiene relación con las rejillas 5 y 7, estos textos corresponden al nombre de: *Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio y Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO*. Se pudo constatar entonces que en estos textos no hay contenido que pueda interesar con las dificultades existentes con la representación.

De acuerdo con las características y a las categorías aquí descritas, se puede decir que hay autores que coinciden con algunas de las dificultades presentes en el aprendizaje de la geometría, tanto en *visualización* como en *representación*. El listado obtenido permite delimitar las dificultades encontradas y descritas por distintos autores alrededor del aprendizaje de la geometría.

3.3.4 Presentación de las Categorías

Respecto a la visualización.

Tabla 8: Categorías y textos en visualización. Fuente: Propia.

<i>Nombre</i>	<i>Descripción de la dificultad</i>	<i>Autor y texto</i>
----------------------	--	-----------------------------

Categorías a, c y d Rejilla 4.	Propiedades geométricas. Representación de ideas, de prototipos y coordinación de representaciones y en la construcción de representaciones y percepción de elementos geométricos. Dibujos irregulares.	Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. <i>Tomás Ortega del Rincón, Universidad de Valladolid (España)</i> <i>Cristina Pecharromán Gómez, Universidad de Valladolid (España)</i>
Categorías b y c Rejillas 2 y 3.	Conflicto con imágenes, definición de conceptos y comprensión de símbolos. Representación de ideas, de prototipos y coordinación de representaciones.	<i>Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas.</i> <i>¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?</i> <i>Haydeé Blanco, Cecilia Crespo Crespo.</i> <i>Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín. V. González"</i> <i>Ciudad de Buenos Aires. (Argentina)</i> <i>Guillén, G.</i> <i>Universidad de Valencia</i>
Categorías d, e y f Rejilla 7	Construcción de representaciones y percepción de elementos geométricos. Dibujos irregulares. Identificación de triángulos dentro de	<i>Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO.</i>

	un polígono y de ángulos opuestos por el vértice. Visión espacial y visualización de un objeto en el espacio.	<i>Marta Roca Cuffí</i>
Categoría a Rejilla 1.	Propiedades geométricas y vocabulario inadecuado.	<i>Las representaciones planas de cuerpos 3 – Dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial</i> <i>Ángel Gutiérrez</i> <i>Revista Ema</i> <i>1998, vol. 3, n° 3, 193-220</i>

Existen algunas dificultades en la visualización presentes en los estudiantes en el aprendizaje de la geometría, los autores de las distintas investigaciones describen dichas dificultades, en las cuales coinciden con algunas de ellas.

Se pudo observar también que en la categoría (*dificultad en: Propiedades geométricas y vocabulario inadecuado*) solamente hay un autor que habla al respecto, se tuvo en cuenta esta categoría en el trabajo, puesto que es una dificultad presente.

- **Respecto a la representación.**

Tabla 9: Categorías y textos en representación. Fuente: Propia.

Nombre	Descripción de la dificultad	Autor y texto
Categorías a, b y c Rejilla 2.	Representación en el plano geométrico y relación de conceptos de diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico.	<i>Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas.</i>

	Comprensión del lenguaje matemático, reconocimiento de términos y uso de notaciones y símbolos.	Haydeé Blanco, Cecilia Crespo Crespo. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín. V. González" Ciudad de Buenos Aires. (Argentina)
Categorías a y d Rejilla 3	Representación en el plano geométrico y relación de conceptos de diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico. Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela.	<i>¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?</i> Guillén, G. Universidad de Valencia
Categorías d, g y h Rejilla 6	Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela. Calculo de las cantidades de cubos y nociones de perpendicularidad y paralelismo. Software 3D.	<i>Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación.</i> Publio Suarez Sotomonte Magister en Educación. Universidad pedagógica y tecnológica de Colombia. Guillermo Alfonso Ramirez Vanegas. Especialista en evaluación pedagógica.

Categoría e y f Rejilla 4.	Forma de escritura. Formación de representaciones internas de un ángulo y representaciones externas (verbal) y relación de interpretaciones planas.	Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. Tomás Ortega del Rincón, Universidad de Valladolid (España) Cristina Pecharromán Gómez, Universidad de Valladolid (España)
Categoría d, f y g Rejilla 1.	Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela. Formación de representaciones internas de un ángulo y representaciones externas (verbal) y relación de interpretaciones planas. Cálculo de las cantidades de cubos y nociones de perpendicularidad y paralelismo.	Las representaciones planas de cuerpos 3 – Dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial Ángel Gutiérrez Revista Ema 1998, vol. 3, n° 3, 193-220

Al organizar las categorías con su texto y autor respectivo en la tabla, se encontró que, a diferencia de las dificultades en visualización, en la representación solo hay un autor

que describe varias dificultades en su investigación con respecto al aprendizaje de la geometría.

Se tuvo en cuenta hasta el final la visualización y la representación, puesto que desde el principio de la investigación estas dos temáticas fueron las más importantes para tener en cuenta, igualmente los sólidos geométricos, pues estos determinaron el camino de la investigación, por tal motivo es pertinente aclarar que las dificultades se debían encontrar respecto a las temáticas teniendo como dirección las figuras tridimensionales.

CONCLUSIONES

En el siguiente apartado se evidenciarán los resultados obtenidos a lo largo de la realización de esta investigación monográfica, con el fin de esclarecer y ampliar los aspectos relacionados con el problema del cual se investigó, los objetivos específicos, la metodología y los análisis realizados a las lecturas correspondientes, quienes fueron las que arrojaron los resultados que aquí se presentaran.

En cuanto a la pregunta problema formulada al inicio de esta investigación ***¿Cuál es el estado actual de las investigaciones en educación matemática, en relación con la representación y la visualización de figuras tridimensionales, centradas al inicio de la educación básica secundaria?*** Se puede decir que a través de la búsqueda realizada de textos correspondientes a la pregunta problema y al tema de investigación, se encontraron diferentes textos relacionados con la educación matemática, en vista de que el tema de interés fue el estado actual de las investigaciones, las dificultades en relación con el aprendizaje de la geometría con respecto a la visualización y representación de las figuras tridimensionales, hay investigaciones que hablan de ello y que presentan las dificultades presentes en los estudiantes, es de aclarar que por el suficiente material que hay en escritos publicados en educación matemática, fue necesario realizar filtros, los cuales son mencionados a lo largo del desarrollo de este trabajo, estos arrojaron los resultados de las investigaciones de interés en el tema correspondiente de la búsqueda bibliográfica.

Por tanto, se puede afirmar que la búsqueda bibliográfica realizada arrojó los resultados esperados para este trabajo, puesto que en cada texto que se tuvo en cuenta y que se analizó se encontraron respuestas acerca de las incógnitas planteadas acerca de las

dificultades presentes en los estudiantes cuando aprenden geometría basada en figuras tridimensionales, además se pudo ver en qué estado está este tipo de investigaciones en educación matemática. Esta búsqueda bibliográfica también permitió dejar abierta una puerta para futuros Licenciados en matemáticas, puesto que es un trabajo para seguir indagando acerca de esta problemática y así lograr encontrar soluciones en las aulas de clase con los estudiantes.

Según las lecturas realizadas de los textos utilizados en este trabajo, es evidente que existen dificultades presentes en los estudiantes en cuanto al aprendizaje de la geometría, tomando en cuenta las rejillas de análisis realizadas y las tablas en las que se organizó la información, se pudo observar que hay dificultades en las cuales coinciden los autores de los distintos textos tanto en la visualización como en la representación, esto se evidenció al momento de organizar la información en las tablas (9 y 10) tal es el caso de las siguientes dificultades en visualización:

- *Propiedades geométricas. Representación de ideas, de prototipos y coordinación de representaciones y en la construcción de representaciones y percepción de elementos geométricos. Dibujos irregulares.*
- *Conflicto con imágenes, definición de conceptos y comprensión de símbolos; Representación de ideas, de prototipos y coordinación de representaciones.*
- *Construcción de representaciones y percepción de elementos geométricos. Dibujos irregulares; Identificación de triángulos dentro de un polígono y de ángulos opuestos por el vértice; Visión espacial y visualización de un objeto en el espacio.*
- *Propiedades geométricas y vocabulario inadecuado.*

También se pudo evidenciar el mismo caso presente en las dificultades en visualización, con respecto a las dificultades en la representación, las cuales fueron las siguientes:

- *Representación en el plano geométrico y relación de conceptos de diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico; Comprensión del lenguaje matemático, reconocimiento de términos y uso de notaciones y símbolos.*
- *Representación en el plano geométrico y relación de conceptos de diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico; Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela.*
- *Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela; Calculo de las cantidades de cubos y nociones de perpendicularidad y paralelismo; Software 3D.*
- *Forma de escritura; Formación de representaciones internas de un ángulo y representaciones externas (verbal) y relación de interpretaciones planas.*
- *Dibujos de sólidos y sólidos platónicos, dibujo técnico, elaboración de figuras a través de plegables, dibujo de los vértices de los sólidos y en perspectiva o en proyección paralela; Formación de representaciones internas de un ángulo y representaciones externas (verbal) y relación de interpretaciones planas; Cálculo de las cantidades de cubos y nociones de perpendicularidad y paralelismo.*

El haber identificado este tipo de dificultades presentes en los estudiantes cuando se aprende geometría tridimensional, es una muestra de que la búsqueda bibliográfica si dio el resultado esperado para la realización de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

- Andrade, M., & Cantoral, R. (2013). Sobre las habilidades espaciales y la dimensión sociocultural del aprendizaje de “lo geométrico” *Comité latinoamericano de matemática educativa (México)*, 1123 – 1132.
- Barrantes, M., López, M., & Ángel, M. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107 - 127.
- Crespo, C., & Blanco, C. (2002). Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas. *Centro de Investigaciones en ciencia aplicada y tecnología avanzada CICATA (México)* , 15 - 23.
- D' Amore, B., & Marazzani, I. (1987). Análisis de los antecedentes histórico - filosóficos de la paradoja cognitiva de Duval. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 4(8), 71 - 84.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *PMME - UNISON*, 6 - 12.
- Dal Maso, S. (2004). Dificultades en las demostraciones en geometría. *Facultad de humanidades y Ciencias (Argentina)*, 26 -36.
- Fernández, T. (2012). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. *Investigación en educación matemática*, 10(7), 19 - 42.

- Gamboa, R., & Ballester, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática*, 4(5), 113-136.
- Gardner, H. (1993). La teoría de las inteligencias múltiples. *The Cambridge Handbook of Intelligence*, Cambridge University Press, 485-503.
- Guillen, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? *Investigación en educación matemática*, 10(4), 21 - 68.
- Guillen, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. Departamento de didáctica de la matemática. Enseñanza de las ciencias, 18(1), 35 - 53.
- Guillen. (1997). Citado por: Amador, M. (2013). *El uso de tres tipos de material didáctico en la solución de una situación problema con objetos tridimensionales*. Tesis de pregrado, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- Guillen, G., & Gonzales, E. (2004). Algunos elementos del modelo de competencia inicial para la enseñanza de la geometría de sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en magisterio. *Departamento de matemática educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN*.
- Guillen, G., Gutiérrez, A., Jaime, A., & Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la geometría de sólidos (Memoria final de proyecto de Investigación). Universidad de Valencia.
- Guillen, G., & López, L. (2009). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la educación secundaria obligatoria. Sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. *Investigación en Educación matemática*, 10(3), 273 - 283.

- Guillen, G., & Pérez, S. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y la enseñanza. *Departamento de didáctica de la matemática*, 295 - 305.
- Guillen, G., Sáiz, M., Figueras, O., & Corberán, R. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula. En E. Castro (Coordinadora), *Investigación en educación matemática. Simposio llevado a cabo en el VII Congreso de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Granada, España*.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-Dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193 - 220.
- Linares, S. (2003). *Matemáticas escolares y competencia matemática*. Citado en Carmen Chamorro (coord.), *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Editorial Pearson Prentice Hall.
- Londoño, O., Maldonado, L., & Calderón, L. (2014). Guía para construir estados del arte. *International Corporation of networks of knowledge*, 1 - 34.
- Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24 (3), 7 - 32.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogota, D. C: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogota, D. C: Ministerio de Educación Nacional.
- Montecino, A., & Andrade, M. (2013). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo espacial. *Comité latinoamericano de matemática educativa*, 418 - 488.

- Ortega, T., & Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de investigación en educación matemática AIEM*, 1(7), 95 - 117.
- Roca, M. (2014). Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de los alumnos de la ESO (Tesis de Maestría). Centro de educación para el profesorado.
- Rojas, O., Cruz, M., Escalona, M., & Estrada, M. (2009). El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza - aprendizaje de la geometría del espacio. *Comité Latinoamericano de matemática educativa*, 1(25), 45 - 53
- Socas, M. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. *Cuadernos de formación del profesorado*. Barcelona: Editorial Horsori.
- Sandoval, C. (2002). Investigación cualitativa. *Programa de especialización en teoría, métodos y técnicas y técnicas de investigación social*. Colombia: ARFO Editores e impresores Ltda. Recuperado de <http://contrasentido.net/wp-content/uploads/2007/08/modulo4.pdf>
- Sotomonte, P., & Ramirez, G. (2002). Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. *Grupo de Investigación Piramide*, 2(3), 27-60.
- Torregosa, G. (2002). *Visualización y aprendizaje de la geometría*. España: Universidad de Alicante.
- Torregosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275 - 300.

Anexos

Anexos 1: Rastreo bibliográfico

En los anexos 1, se presentan los textos que se encontraron cuando se realizó el rastreo bibliográfico, es decir los 18 textos que se tuvieron como base para elegir entre ellos los textos que sirvieron para el desarrollo de la monografía.

Se describe en cada uno de ellos la parte inicial de su contenido de igual manera el autor, esto fue fundamental a la hora de elegir los textos que harían parte del trabajo, puesto que ya se tenía una idea de su contenido.

A continuación se presentan cada uno de ellos, se organizaron de acuerdo a la tabla 1, la cual aparece en el contenido de este trabajo.

1. LAS REPRESENTACIONES PLANAS DE CUERPOS 3-DIMENSIONALES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ESPACIAL

ANGEL GUTIÉRREZ

Revista EMA 1998, Vol. 3, No. 3, 193 – 220.

En este artículo se presentan algunas reflexiones sobre la importancia de utilizar representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales adecuadas a los estudiantes de diferentes edades. Se analizan diversas formas usuales de representación plana de objetos 3-dimensionales y, tomando como base los resultados de algunas investigaciones, se describen varias dificultades observadas cuando los estudiantes dibujan o interpretan representaciones planas de sólidos, incluyéndose algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes. También se hacen sugerencias a los profesores acerca de la capacidad de los estudiantes de diversos grados para utilizar las distintas representaciones y se plantean algunos ejercicios que pueden proponerse para mejorar la habilidad de los estudiantes para dibujar y leer representaciones planas de cuerpos espaciales.

2. ¿POR QUÉ USAR LOS SÓLIDOS COMO CONTEXTO EN LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA? ¿Y EN LA INVESTIGACIÓN?

Guillén, G.
Universidad de Valencia

Este trabajo centra su atención en geometría espacial. Se contemplan dos grandes líneas con sus ramificaciones correspondientes. Por un lado, se muestra el origen y desarrollo de una de ellas, referida a la geometría de los sólidos, que centra su atención en la observación de procesos de enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos. Por otro lado, al considerar la representación de los sólidos y ‘el problema de visualización’, nos introducimos en otra línea que ha despertado gran interés en los investigadores en Educación Matemática, como muestra la revisión realizada en revistas y congresos de carácter internacional.

Palabras clave: Geometría de los sólidos, procesos matemáticos, investigación en geometría espacial, visualización, representación.

3. EL PRINCIPIO HEURÍSTICO DE LA VISUALIZACIÓN Y SU CARÁCTER RECTOR PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, Miguel Cruz Ramírez, Miguel Escalona Reyes, Mario Estrada
Doallo, José Luís Sánchez Santiesteban
Universidad de Ciencias Pedagógica “José de la Luz y Caballero” Cuba
scmc@ucp.ho.rimed.cu

La naturaleza de la geometría del espacio, las dificultades y carencias en su aprendizaje, revelan la existencia de un principio que enriquece la Didáctica de la Matemática, que está presente en todas las ramas de la Matemática y ayuda a la resolución de problemas. En la investigación se ofrecen los presupuestos epistémicos que sustentan el principio heurístico de la visualización, sus potencialidades axiológicas y su papel rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Se exponen los factores que justifican y viabilizan la presencia del principio, sus acciones y reglas. Su concreción favorece un proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador.

Palabras clave: principio heurístico, visualización, geometría del espacio

4. SOBRE EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS RELATIVOS A LOS SÓLIDOS. IDEAS ERRÓNEAS

GUILLÉN SOLER, GREGORIA

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València. 46071 València.

En este informe indicamos una investigación relacionada con el aprendizaje de la geometría de los sólidos, que muestra algunos ejemplos de las familias de sólidos que los estudiantes incluyan en los objetos mentales que construyen para estas familias y algunos errores que cometen como consecuencia de las dificultades que de contenido matemático (conceptos,

propiedades, relaciones, etc.) presentes en la estudiantes. Esto se puede impulsó o alentado por la enseñanza de la asignatura. Resultados aquí reportados se obtienen a través de los análisis de la información solicitada a partir de entrevistas y sesiones de trabajo llevado a cabo con dos grupos de estudiantes de 12 años. También analizamos las respuestas que Escuela de Magisterio estudiantes dieron por escrito a algunas de las actividades que se les pidió que hacer antes de ser tratado en clase.

5. ALGUNOS ELEMENTOS DEL MODELO DE COMPETENCIA INICIAL PARA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS EN PRIMARIA. ANÁLISIS DE UN MODELO DE ENSEÑANZA EN EL MAGISTERIO.

Edna Gonzales, Gregoria Guillén.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia

Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Resumen: *en este trabajo presentamos resultados que se refieren a elementos de una conducta competente para la enseñanza de la geometría de los sólidos a nivel de enseñanza Primaria. Estos se han obtenido al analizar un plan de formación para la enseñanza de la geometría de los sólidos en Magisterio y la puesta en práctica del mismo. Indicamos también observaciones que han permitido precisar estos elementos y que hacen referencia, por un lado, a la actividad matemática asociada a los procesos matemáticos de describir, generalizar y particularizar que desarrolló la profesora en su clase a partir de diferentes contextos. Por otro, a “su manera” de dirigir la clase, considerando respuestas de los estudiantes o tareas que un futuro maestro tiene que realizar, como es la planificación de las clases.*

6. EXPLORACIÓN DE SÓLIDOS A PARTIR DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Publio Suarez Sotomonte y Guillermo Alfonso Ramirez Vanegas
Educación matemática 2011, Vol. 3, No3, 27 – 60.

Resumen: El artículo hace referencia a algunos de los resultados de una investigación que implementó una estrategia de enseñanza para generar ambientes de aprendizaje de sólidos platónicos y arquimedianos en un grupo de estudiantes de octavo grado; estrategia fundamentada en el enfoque de aprendizaje significativo y en el manejo de los sistemas de representación desde el enfoque ontosemiótico de la educación matemática, como soporte para la construcción de conceptos matemáticos. La estrategia de enseñanza de la geometría

adopta las etapas de exploración, representación-modelación, construcción formal y estudio de las aplicaciones, y usa materiales concretos, físicos y tangibles, relativos al origami, troquelado y estructuras, como opciones de construcción de los sólidos tridimensionales, considerados sistemas de representación externostangibles; al igual que herramientas educativas informáticas para diseñar ambientes de geometría dinámica, como sistemas de representación externos intangibles, que junto con los anteriores son el soporte para el desarrollo de la imaginación y de los sistemas internos de representación, fundamentales en la comprensión de conceptos geométricos.

Palabras clave: Sólidos platónicos y arquimedianos, Ambientes de aprendizaje, Geometría dinámica, Sistemas de representación.

7. LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA DE SÓLIDOS

Gregoria Guillen Soler, Ángel Gutiérrez Rodríguez, Adela Jaime Pastor, María Cáceres Sansaloni.

Resumen: Es un proyecto de investigación aprobado en la convocatoria del Concurso Publico de ayudas a la Investigación de 1998 dentro del área de Ciencias Sociales, este es una memoria del informe final realizado.

8. DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA POR PARTE DE ALUMNOS DEL PRIMER CICLO DE LA ESO

Marta Roca Cuffí

Tesis de maestría.

Todos conocemos los preocupantes resultados que nuestros alumnos están obteniendo en todas las pruebas diagnósticas o de evaluación de matemáticas a las que se enfrentan, y más en concreto en el área de geometría (llamada también Espacio y Forma). No sólo estamos hablando de las mundialmente conocidas como pruebas PISA, sino también a las pruebas de competencias que la “Generalitat de Catalunya” lleva a cabo en varios cursos de la educación obligatoria. Estos malos resultados provienen de las dificultades de aprendizaje en geometría por parte de nuestros alumnos, tal y como hemos analizado en alguna de las asignaturas de este máster. Así lo he podido constatar durante mis prácticas de observación en el aula de la materia cuatrimestral de geometría en el centro asignado, durante el primer cuatrimestre del curso 2013-14, con alumnos que cursan 2º de la ESO.

9. ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA Y SU ENSEÑANZA.

Sergio Pérez y Gregoria Guillén
Departamento de la Didáctica de la Matemática

Resumen: en este informe presentamos resultados referidos a la geometría y su enseñanza en la Educación Secundaria Obligatoria, obtenidos en un estudio exploratorio al administrar una encuesta a 19 profesores, elaborada utilizando datos teóricos y experimentales. Las respuestas de estos profesores han informado sobre diferentes visiones de geometría; sobre si se considera o no que esta materia gusta a los profesores y/o a los estudiantes, que facilita la interdisciplinariedad y que los compañeros de dan importancia en sus clases. Las respuestas aportan también información sobre los bloques de contenidos en el curriculum. Se tratan también cuestiones sobre su enseñanza (introducción, recursos utilizados) y la formación y aprendizaje de los estudiantes (conocimientos previos, dificultades y errores)

10. LA EXPLORACIÓN CON ESPEJOS Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. SOBRE COMPETENCIAS DE LOS ALUMNOS Y SUS PROCESOS COGNITIVOS. ESTUDIO EXPLORATORIO

Laura López Iborra, IES Camp de Morvedre
Gregoria Guillén Soler, Univesitat de València

RESUMEN

Este trabajo presenta un estudio exploratorio sobre la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir y demostrar utilizando como contexto la exploración con espejos. El estudio toma como ámbito de estudio estudiantes de 2º y 3º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la Comunitat Valenciana y como marco de referencia investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València y en el Instituto de Freudenthal. Se determina la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de la exploración con espejos; realizamos un análisis teórico de investigaciones sobre las problemáticas planteadas; elaboramos un Modelo de enseñanza para la experimentación y para el examen de los datos obtenidos se interroga la actuación de los alumnos centrando la atención en las competencias que desarrollan y en sus procesos cognitivos.

11. TRANSFERENCIA DE RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN EL AULA.

Gregoria Guillén
Rosa María Corberán
Mariana Sáiz
Olimpia Figueras

RESUMEN: En este trabajo presentamos algunos ítems del test que hemos diseñado con objeto de obtener información sobre la geometría que se enseña en las escuelas de primaria de algunos estados de México y así poder, por un lado, valorar si la geometría que se

contempla en el curriculum de primaria mexicano se corresponde con la que imparten estos maestros y, por otro, determinar las posibles causas que han llevado a la enseñanza de la geometría a la situación actual. En este informe hacemos también referencia a un estudio que estamos realizando en el que analizamos algunos libros de texto de primaria mexicanos y algunos de los test utilizados en este país para la evaluación de los estudiantes de este nivel.

12. LA INVESTIGACIÓN SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA.

Ángel Gutiérrez

Está dedicado a revisar la situación actual de la investigación en didáctica de las matemáticas que tiene que ver con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. El capítulo está dividido en varias secciones dedicadas a temas importantes en los que se investiga actualmente, resultados destacados de las investigaciones, los marcos teóricos más utilizados y problemas de investigación abiertos. La primera sección describe el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, sin duda el marco teórico más usado actualmente para organizar la enseñanza de la geometría.

13. ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO

Manuel Barrantes, Marco López y Manuel Ángel Fernández

La investigación analiza y clasifica las imágenes gráficas relacionadas con la enseñanza aprendizaje de la Geometría en libros de texto. Se estudian varios aspectos de las representaciones geométricas a lo largo de las unidades de geometría de los libros. Algunos de estos aspectos son la variedad de representaciones al introducir conceptos geométricos, los elementos de las imágenes que puedan derivar en dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, la representación plana de figuras tridimensionales y las imágenes reales que se utilizan para aludir a elementos geométricos abstractos. Se realiza una categorización que sirve como instrumento de análisis de los textos.

Términos clave: Aprendizaje; Enseñanza; Errores; Geometría; Imágenes; Libros de texto

14. ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA ESPACIAL EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3-DIMENSIONAL

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

El creciente uso de software de geometría dinámica 3-dimensional plantea nuevas cuestiones a los investigadores en Educación Matemática. Para aportar información sobre el aprendizaje de geometría espacial en esta disciplina mediante entornos de geometría dinámica 3-dimensional, y sobre posibles fortalezas y debilidades de tales entornos, presentamos resultados de una investigación experimental en la que se analiza cómo un estudiante de altas capacidades matemáticas aprende conceptos relativos a paralelismo entre rectas y/o planos en el espacio mediante la resolución de actividades en un entorno de Cabri 3d.

Términos clave: Estudiantes con talento matemático; Geometría espacial; Procesos de aprendizaje; Programa de geometría dinámica; Razonamiento matemático

15. REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS Y ARGUMENTACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Haydeé Blanco, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín. V. González"
Ciudad de Buenos Aires. (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada CICATA
(México)
fblanc@fibertel.com.ar crccrespo@gmail.com

Este trabajo presenta los resultados de una investigación en curso, orientada a determinar las dificultades que se observan en la enseñanza y aprendizaje de las representaciones de cuerpos geométricos en el plano, en las clases de geometría de escuela media y las características de las argumentaciones geométricas que realizan los alumnos. Se propone relacionar el concepto de visualización y las representaciones gráficas de objetos tridimensionales en el plano. Los alumnos presentan serias dificultades para representar en el plano cuerpos geométricos (por ejemplo: cubos o pirámides). Estas dificultades también se reflejan en actividades en las que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar. La Geometría Proyectiva introdujo un cambio de la visión del espacio en Matemática y en el Arte.

16. ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad

Gustavo Adolfo Marmolejo

Resumen. Este artículo llama la atención sobre la complejidad que suscita ver en las figuras geométricas, asunto que está lejos de ser obvio y espontáneo para nuestros estudiantes, aún para algunos de sus educadores. Igualmente, propone resaltar las oportunidades que en el

aprendizaje de las matemáticas tienen los alumnos que han estudiado las posibilidades heurísticas que brindan las figuras.

Palabras Clave. Visualización, Figuras, Operaciones, Áreas, Fracciones.

17. APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS A TRAVÉS DE VISUALIZACIONES

Tomás Ortega del Rincón, Universidad de Valladolid (España)
Cristina Pecharromán Gómez, Universidad de Valladolid (España)

En este trabajo, se presenta una investigación sobre el aprendizaje de varias definiciones elementales de Geometría por los alumnos del Grado de Educación Primaria. Se considera que en estos aprendizajes es muy importante la visualización y la interpretación verbal del concepto. En los procesos de docencia se enfatiza la lectura de las figuras geométricas construidas por los propios alumnos de forma interactiva, utilizando GeoGebra. A pesar de todo, comprobamos que los alumnos tienen serias dificultades en la adquisición de estos conceptos y, en suma, del lenguaje matemático y en la adquisición de las competencias implícitas.

Palabras clave: visualización; GeoGebra; ángulo; circunferencia; tangente; mediatriz.

18. LA INVESTIGACIÓN EN VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL. PASADO, PRESENTE Y FUTURO

Teresa Fernández Blanco
Universidad de Santiago de Compostela

En este trabajo intentaré poner de manifiesto que la visualización sigue siendo un tema de interés para futuras investigaciones en el ámbito de la geometría y el razonamiento espacial. Un breve recorrido por los antecedentes recordará aquellos tópicos que han sido objeto de estudio en este campo y aquellas líneas de investigación que permanecen abiertas. Para terminar expondré los resultados de una investigación reciente que pone de manifiesto las carencias de los futuros maestros en este tema y la importancia de planificar y desarrollar acciones formativas.

Palabras clave: investigación, visualización, razonamiento espacial y geometría.

Anexos 2: Rejillas de los textos

Las rejillas que se presentan a continuación, son las que se presentan en la tabla 5, la cual se muestra en el contenido de este trabajo. Se realizó una por cada texto seleccionado, donde se tuvo en cuenta las ventajas y desventajas, dificultades y por ultimo las observaciones de cada una de las temáticas, visualización y representación. De igual manera se hizo una subdivisión teniendo en cuenta los temas presentes en cada uno de los textos.

REJILLA No.1	Texto: Interpretación de una figura plana para convertirla en un objeto tridimensional.			Descripciones sobre papel.		
Texto: Las representaciones planas de cuerpos 3 – Dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial						
	Ventajas	Dificultades	Observaciones	Ventajas	Desventajas	Dificultades
VISUALIZACIÓN	Usar métodos gráficos para realizar una descripción.		Tienen en cuenta el objeto de estudio en este caso el cubo soma, llamado por el autor Multicubo.	Plantear varias actividades seguidas, influye en la forma de resolver las siguientes, ya que los estudiantes tienen la tendencia a usar el mismo método de representación.		
REPRESENTACIÓN	La enseñanza específica ayuda a la relación entre los cuerpos espaciales y sus representaciones planas, obteniendo mejores resultados cuando la enseñanza de basa en el uso de materiales manipulativos.	Calcular la cantidad de cubos que se encuentran en un módulo multicubo con formas de prismas rectangulares. Relación de interpretaciones planas. Dibujo de vértices de los sólidos sobre los puntos de la trama isométrica.	Este tipo de dificultades se pueden calificar como conceptuales, según al Autor; pues tienen que ver con la comprensión de las características de la representación.			Algunos estudiantes presentan dificultades para realizar buenos dibujos en perspectiva o en proyección paralela.

REJILLA No.2	Imagen del concepto y definición del concepto			Dificultades para representar e interpretar representaciones		
Texto: Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemáticas						
	Ventajas	Dificultades	Observaciones	Ventajas	Dificultades	Observaciones
VISUALIZACIÓN	La imagen se forma a través de un grupo de ideas y a diferentes estímulos la persona evoca distintas partes de la imagen. Se define entonces la imagen evocada de un concepto. Los conflictos surgirán sólo en caso que partes contradictorias de la imagen del concepto sean evocadas en simultáneo.	Visualización de propiedades geométricas, de cuerpos representados o de cuerpos que se deben imaginar. Se definen los factores potenciales de conflicto a la parte de la imagen o definición de un concepto que pueden entrar en conflicto con otras partes cuando son evocadas juntas generando un factor de conflicto cognitivo.	La visualización se puede ver como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y en el lenguaje del que aprende. La imagen del concepto: se refiere al conjunto de estructuras cognitivas que se relacionan con el concepto, que incluyen imágenes mentales,		También señalan dificultades de tipo visual, debidas principalmente a los <i>prototipos</i> .	Los <i>prototipos</i> ofrecen una visión más o menos completa del concepto, el riesgo que se corre es considerar a los mismos como único ejemplo válido del objeto tratado, si no se logra una apropiada abstracción de las características del objeto matemático que se está construyendo. Algunos ejemplos clásicos: triángulos isósceles apoyados en el lado desigual,
REPRESENTACIÓN	La importancia de las representaciones de cuerpos tridimensionales es necesaria para realizar razonamientos sobre	Se encuentran dificultades para representar en el plano geométrico, como por ejemplo: cubos o pirámides	propiedades asociadas y procesos asociados. Se construye a lo largo de los años a través de experiencias de		Referente a las dificultades en la representación, se observa una gran cantidad de dificultades no sólo	triángulos rectángulos cuya base es siempre uno de los catetos (siempre desiguales), el cuadrado siempre

REJILLA No.3	Observación de procesos de enseñanza/aprendizaje, de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar, probar.			Representación de los sólidos y otras formas tridimensionales y en el problema de visualización al considerar su enseñanza y aprendizaje.		
Texto: ¿por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza / aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?						
	Ventajas	Dificultades	Observaciones	Ventajas	Dificultades	Observaciones
VISUALIZACIÓN			86	Usando representaciones planas de los sólidos como Contexto en la resolución de problemas, se fijan en la transferencia que hacen los estudiantes de los procedimientos y estrategias usados por el profesor así como en dificultades relativas a visualización y/o representación.	Los obstáculos que se encuentran para representar las ideas geométricas dado que existe un vocabulario visual muy complejo, con muchas convenciones y símbolos que deben comprender quienes aprenden, si se espera que les den sentido a las figuras geométricas.	Para hablar de objetos tridimensionales se tienen que representar o describir, y para comprender lo que se dice se tiene que comprender la representación o descripción. Dado que cualquier representación bidimensional de objetos tridimensionales implica la distorsión de alguna de las propiedades del objeto, en el paso del espacio al plano, la comprensión de las representaciones requiere visión
REPRESENTACIÓN	Las representaciones pueden considerarse para favorecer el razonamiento (éste se apoya en las	Dificultad para relacionar conceptos con diferentes representaciones				

REJILLA No.4	Del espacio al plano.		
Texto: Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones			
	<i>Ventajas</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Observaciones</i>
VISUALIZACIÓN		Se observan dificultades de expresión del alumno, es decir, dificultades en la construcción de representaciones externas verbales a partir de las internas, que están fundamentadas en visualizaciones incompletas, no coordinan las representaciones consideradas, y no usan el vocabulario adecuado.	La investigación tiene su origen al observar las grandes dificultades que tienen los alumnos de 2º curso de Grado de Educación Primaria en la asignatura “Fundamentos de la forma y el volumen.
REPRESENTACIÓN	En el proceso de enseñanza-aprendizaje, la comunicación es más fluida y más precisa, y se observa que el alumno tiene menos dificultades para construir representaciones externas, tanto verbales como gráficas, ambas más precisas.	Se presentan los errores y dificultades de aprendizaje de los alumnos cuando se han recogido los datos en el aula de forma verbal, en interacción del profesor con los alumnos. Se presentan los errores y dificultades de aprendizaje de los alumnos cuando se han recogido los datos de forma escrita a través de un cuestionario implementado tras la docencia.	

REJILLA No.5	Reflexiones de la enseñanza.		
Texto: Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio.			
	<i>Ventajas</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Observaciones</i>
VISUALIZACIÓN			Centran la atención en las dificultades que enfrentan los estudiantes en relación con determinados contenidos geométricos que les lleven a aplicar ideas que se tienen que revisar y corregir. Este reporte centra su contenido en la geometría de Sólidos, y en labor docente como formador de profesores. La información que aportamos se refiere a los procesos matemáticos de describir, generalizar y particularizar.
REPRESENTACIÓN			

REJILLA No. 6	Representaciones semióticas y mentales, la representación en educación matemática				
Texto: Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación.					
	Ventajas	Dificultades	Observaciones		
VISUALIZACIÓN	En la construcción de los sólidos se destaca la idea de reproducir fielmente las instrucciones para que la figura sea lo más precisa. Se puede evidenciar como una ventaja la adecuada destreza de los estudiantes para dibujar en perspectiva, lo cual permite entender mejor los procesos de visualización espacial con los que cuentan para hacer representaciones 3D. Visualizan cada uno de los sólidos, desde diferentes puntos de mira; son capaces de realizar diferentes rotaciones y giros en el plano y en el espacio.	En cuanto a la visualización presentan dibujos que son irregulares frente a los que se les piden que dibujen, lo que significaría que no hay claridad en la visualización del objeto en el espacio.	Duval (1999), manifiesta que no puede haber comprensión en matemáticas sino se distingue un objeto de su representación, dicha confusión provoca pérdida de aprendizaje. Son muy pocos los estudiantes que presentan dificultades en el manejo del ambiente dinámico, las superan luego de manipularlos sucesivamente.		
REPRESENTACIÓN	Las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. Buscan colocar diversas figuras en el mismo plano, para hacer figuras más grandes, con el propósito de diseñar	Presentan gran dificultad en la elaboración de las figuras a través de los plegados (Tabla 4) Teniendo en 88 cuenta la representación gráfica de los sólidos, elaborada por los estudiantes en esta investigación, es notable la dificultad para dibujar los objetos			

REJILLA No.7	Dificultades de aprendizaje de la Geometría.			
Texto: Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO.				
	Ventajas	Dificultades	Observaciones	Desventajas
VISUALIZACIÓN		La falta de visión espacial es vista por los docentes como una dificultad grande, pues tiene su base en la percepción visual; afirman que difícilmente los estudiantes tendrán visión espacial si antes fallan en procesos de visualización. Algunas dificultades van relacionadas en el aprendizaje de la geometría, como por ejemplo cuando el estudiante debe detectar triángulos dentro de un polígono plano para calcular la suma de ángulos internos del polígono o detectar ángulos opuestos por el vértice, así como ángulos complementarios y suplementarios, etc. La mayoría de estas dificultades provienen en la percepción de ciertos elementos geométricos o figuras planas	Aseguran que los malos resultados de las pruebas en los colegios, provienen de las dificultades de aprendizaje en geometría por parte de los alumnos, según estudios realizados durante esta investigación. Razón por la cual la idea de la investigación es medir dichas dificultades de aprendizaje de la geometría e incidir para ayudar a los estudiantes a minimizarlas o superarlas. Para medir estas dificultades diseñaron unos ejercicios con indicadores, que les permitirán cuantificar las dificultades en cada uno de los procesos de conceptualización de la geometría.	Dejar la geometría para el final del curso, sin darle mayor importancia. Una de las consecuencias en las pruebas que presentan los estudiantes, es la redacción de las pruebas en cuanto a la ilustración, redacción de enunciados o dibujos o figuras, que en ocasiones puede llevar al estudiante a confusiones. La falta de comprensión lectora por parte de los estudiantes, que en ocasiones puede dificultar la correcta comprensión del enunciado del problema que deben resolver. La falta de motivación sobre todo en matemáticas y geometría.
REPRESENTACIÓN				

