



Razonamiento Abductivo en Escolaridad de Educación Básica: El caso de la mediatriz

Paola Andrea Angulo Mosquera

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura Básica con énfasis en Matemáticas
2022



Razonamiento Abductivo en Escolaridad de Educación Básica: El caso de la mediatriz

Paola Andrea Angulo Mosquera

Magister en Ciencias Joan Sebastián Ordoñez

Director(a) Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura Básica con énfasis en Matemáticas

2022

(Dedicatoria)

Llena de mucho agradecimiento a Dios por la perseverancia que ha puesto en mí, por guiarme y llenarme de mucha fortaleza para seguir adelante, quiero dedicar este trabajo de grado: A mi madre Magnolia Mosquera que me educo con buenos valores, quien siempre ha creído en mí, me ha apoyado en todo y es el mayor orgullo que tengo. A mi hija María José el amor más bonito que tengo y fuerza motora para lograr terminar mi carrera. A mis dos hermanos Jorge Mario y Brenda que me han acompañado en este camino. A mis abuelas Verónica y Virginia que siempre me aconsejaron, me brindaron su amor y contribuyeron a que este objetivo se cumpliera. A mi esposo Alexander Lozano por sus inmensos esfuerzos, por su apoyo e incondicional amor. A mis Suegros Félix y

Nayive quienes han hecho parte de este proceso, con su inmenso cariño y apoyo. Y sin dejar atrás a toda mi familia, Mi papá, mi padrastro, mis tías, mis tíos y mis primos, gracias por ser parte de mi vida y por permitirme ser parte de su orgullo. A mis amigas y amigos que han estado a mi lado a lo largo de este camino que con sus consejos y sus gratos momentos de compañía me han llenado de alegría..

Paola Andrea Angulo Mosquera

Agradecimientos

Agradezco a cada uno de mis familiares, amigos y seres queridos por estar presente en todo momento:

A mis profesores del Área de Educación Matemática, por su trabajo y dedicación hicieron parte fundamental de mi proceso de formación profesional.

A mi Tutor Magister Sebastián Ordoñez quien creyó en mí, me dio su apoyo y me direcciono para culminar este trabajo.

En general agradezco a la Universidad del Valle quienes, con su colaboración, su servicio, sus instalaciones, su gran personal administrativo y académico han permitido que se hay logrado el objetivo.

Resumen

La presente investigación pretende mostrar el tipo de razonamiento que son reflejados en los argumentos de los estudiantes, tomando como núcleo de la investigación el razonamiento abductivo y la argumentación colectiva que se evidencia en la resolución de problemas en geometría en la educación básica secundaria, en este estudio se involucran diversos conceptos, investigaciones y teorías que sustentan la importancia del razonamiento abductivo en la construcción de los argumentos dados por lo estudiantes en el aula de clases.

Palabras Claves: Razonamiento, Abductivo, Deductivo, Inductivo, Argumentos, Aula de Clase, Geogebra, Bitácora Digital, Mediatriz de un Segmento, Esquematización de Argumentos, Modelo de Argumentación de Toulmin, Instrumentos, Sobrecodificada, Subcodificada, Dato, Aserción, Garantía, Caso, Resultado, Regla, Analogía.

Abstract

The present investigation intends to show the type of reasoning that is reflected in the arguments of the students, taking as the core of the investigation the abductive reasoning and the collective argumentation that is evidenced in the resolution of problems in geometry in basic secondary education, in this This study involves various concepts, research and theories that support the importance of abductive reasoning in the construction of arguments given by students in the classroom.

Keywords: Reasoning, Abductive, Deductive, Inductive, Arguments, Classroom, Geogebra, Digital Log, Bisector of a Segment, Schematization of Arguments, Toulmin Argumentation Model, Instruments, Overcoded, Undercoded, Data, Assertion, Guarantee, Case , Result, Rule, Analogy.

Tabla de Contenido

Tabla de contenido

Resumen	6
Abstract.....	7
Índice de tablas	10
Índice de figuras.....	11
Introducción	12
1. Capítulo 1: Problema de Investigación	14
1.1. Antecedentes.....	14
1.2. Justificación	20
1.3. Planteamiento del problema	22
1.4. Objetivos	24
2. Marco Teórico.....	26
2.1 Argumentación en Educación Matemática	27
2.1.1 Teoría argumentativa de Toulmin.	27
2.1.2 Abducción y la hipótesis del indicio.	28
2.1.3 Abducción en Educación Matemática.	30
2.1.4 Sobre la esquematización de los razonamientos en Educación Matemática.	32
3. Metodología.....	36
3.1 Investigación cualitativa y estudio de casos.....	36
3.2 Instrumentos de recolección de información.....	38
3.2.1 Bitácora digital	38
3.2.2 Intervención en el aula: instrumentos de recolección de datos	38
3.3 El esquema argumentativo de Toulmin como herramienta para la esquematización de los argumentos.....	40
3.4 Alcances y limitaciones	41
4. Análisis de Resultados	42
4.1 Fase 1: Motivación.....	43
4.2 Durante clase	51
4.3 Después de clase: Actividad reto.....	57
5. Conclusiones.....	63

A. Anexo: Después de clase: Actividad reto	67
B. Anexo: Respuestas Actividad Bitácora Digital	73
C. Anexo: Aplets de Geogebra.....	81
6. Referencias.....	85

Índice de tablas

Tabla 1. Argumento estructurado E1 primera parte: motivación.....	45
Tabla 2. Argumento estructurado E2 primera parte: motivación.....	49
Tabla 3. Argumento estructurado E1 segunda parte: durante clase.....	54
Tabla 4. Argumento estructurado E2 segunda parte: durante clase.....	56
Tabla 5. Argumento estructurado E1 tercera parte: después de clase.....	59
Tabla 6. Argumento estructurado E2 tercera parte: después de clase.....	62

Índice de figuras

Figura 1 Esquema Argumentativo de Toulmin (1984)	28
Figura 2 Relación del núcleo argumentativo del esquema argumentativo de Toulmin y los elementos de Pierce y Conner (2008)	32
Figura 3 Tipos de razonamientos Conner (2014).....	34
Figura 4 Modelo adaptado de Toulmin (2008) y Zhuang et al. (2022).....	41
Figura 5 Esquematización Mediatrix de un segmento E1.....	47
Figura 6 Esquematización de la mediatrix de un segmento E2	50

Introducción

La presente investigación pretende mostrar los tipos de razonamiento que son reflejados en los argumentos de los estudiantes, tomando como núcleo de la investigación el razonamiento abductivo y la argumentación colectiva que se evidencia en la resolución de problemas en geometría en la educación básica secundaria, en este estudio se involucran diversos conceptos, investigaciones y teorías que sustentan la importancia del razonamiento abductivo en la construcción de los argumentos dados por lo estudiantes en el aula de clases.

La característica principal de esta investigación está centrada en determinar los tipos de razonamientos abductivos en el aula de clase y la solución que este tipo de razonamiento infiere en una actividad diseñada en GeoGebra. El instrumento de recolección de datos es el denominado por Trigo (2020) como bitácora digital en el que se trabajan tres momentos: Una actividad de motivación, una actividad durante clase y por último una actividad reto. Para cada uno de los razonamientos desarrollados por los estudiantes se utiliza una adaptación del modelo de argumentación de Toulmin (1984) que presentan Conner (2008), Zuang y Conner (2022).

El trabajo se divide en cinco capítulos:

- Capítulo 1: se abordan los antecedentes, como la formulación del problema en el que se hace una indagación de la literatura alrededor del razonamiento abductivo, así como las investigaciones anteriores en razonamiento abductivo presentes en el campo de la Educación Matemática
- Capítulo 2: en este se abordan las herramientas teóricas que abarcan el marco de investigación, el cual se basa en lo presentado por Toulmin et al. (1984) y Conner (2008); Conner, Singletery, Ryan, Smith, Wagner y Richard (2014)

- Capítulo 3: se muestran los diferentes instrumentos para la recolección de datos, así como el método relacionado para la investigación: cualitativo y un estudio de caso
- Capítulo 4: se determinarán los resultados de la actividad y sus respectivos análisis, tomando dos estudiantes y clasificando la estructura de sus razonamientos durante los tres momentos de la actividad: Motivación, durante clase y actividad reto, todo parte de un mismo instrumento denominado bitácora digital.
- Capítulo 5: se muestran las conclusiones de la actividad alrededor de los objetivos propuestos, exponiendo las expectativas y limitaciones.

1. Capítulo 1: Problema de Investigación

1.1. Antecedentes

Diversas investigaciones en Educación Matemática estudian el razonamiento y la argumentación matemática como rama específica, que entre otros permite potenciar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Algunos investigadores (Cervantes, Ordoñez y Morales, 2020; Rodríguez, 2005) potencian la argumentación en clase de matemáticas desde todos los niveles de escolaridad (Básica-primaria, Secundaria-bachillerato, Superior-universidad). Las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular de la geometría están orientadas a la visualización y comprensión a través de las ideas iniciales o conjeturas, en la teoría de Educación Matemática esto se denomina razonamiento abductivo. Para tener un enfoque acerca de este tema es importante resaltar los estudios previos que han llevado a diversos autores a generar exploraciones e investigaciones que realizaron aportes para el estudio del razonamiento abductivo.

Pedemonte y Reid (2011) infieren la importancia de la abducción en los procesos de prueba. El estudio describe diferentes tipologías alrededor de ella y como estas puede modelarse y utilizarse en un trabajo que involucra la construcción de un teorema de congruencia de triángulos hechos por estudiantes de una escuela secundaria y determinado a través de la metodología conocida como experimentos de enseñanza. Con base en lo descrito por Eco (1983) y Pierce (1956) los autores logran relacionar el concepto de

abducción y combinarlo en la propuesta de Toulmin para poder recurrir al razonamiento hecho por los estudiantes y clasificar los tipos de abducciones presentes. En la investigación se concibe la abducción como aquel proceso que describe los descubrimientos y las conjeturas, además de esto en el estudio se presenta una trayectoria alrededor de la investigación abductiva donde el papel crucial oscila alrededor de la conjetura y la prueba de ese resultado. La propuesta de Pedemonte y Reid (2011) involucra la relación de tres marcos teóricos, el primero concibe lo establecido por Charles Sanders Pierce (1956) donde concibe la abducción como un tercer tipo de razonamiento, diferente al abductivo y el deductivo. Para Pierce (1956) la abducción se concibe como aquella conjetura o descubrimiento factible de establecer de una forma lógica en la que un argumento se interconecta de una regla o un resultado a un caso. Umberto Eco (1983) otro referente de la investigación identifica tres tipos de abducciones, la abducción sobrecodificada la cual refiere cuando el argumentador es consciente que de una sola regla se refiere un solo caso, la abducción subcodificada la cual explicita que de varias reglas se puede referir un caso por último la abducción creativa en la que el argumentador en caso de no conocer causa probable la inventa. Como conclusión del artículo se infiere que las abducciones pueden representar obstáculos en la construcción de pruebas de estudiantes de bachillerato.

La argumentación ha sido un desafío al momento en que los estudiantes se enfrentan a la resolución de un problema, una investigación que evidencia esto es la realizada por Cervantes, Ordoñez y Morales (2020) en donde se identificaron los tipos de razonamientos que intervienen en la construcción de los argumentos (deductivo, inductivo, abductivo o de analogía); se hizo debido a la insuficiencia entre los procesos algebraico-numéricos y las representaciones gráficas para llegar a solucionar problemas de una Ecuación Diferencial

Ordinaria (EDO) por parte de los estudiantes universitarios, teniendo en cuenta que tipo de razonamientos son los que estos realizan cuando se resuelve una EDO. Se divide la investigación en tres fases, la primera es la preparación del experimento, la segunda desarrollo de las tareas y la tercera es donde se analizan los datos con respecto al método de análisis.

De esta manera se destacó en los estudiantes la construcción de argumentos y razonamientos que involucren lo analítico con lo gráfico. Se obtuvieron diversas conclusiones en las que se identificaron argumentos de tipo deductivo, tales como; en la primera tarea, los estudiantes partían del caso (tarea matemática), luego utilizaban una regla matemática para la solución del problema y posteriormente llegaban a un resultado, en la segunda tarea, parten del análisis de las familias de curvas ya dadas, después mediante las reglas matemáticas conocidas previamente por ellos encuentran argumentos que le proporcionan llegar a la solución del ejercicio. También se encontraron argumentos de tipo abductivo que se reconocen dos formas de estos argumentos lo cuales fueron identificados así: tipo A, primero parten de una regla; ya que identifican que las rectas son perpendiculares, entonces llegan al resultado que la familia de curvas encontrada es ortogonal, por último se identifica el caso previamente dado por el profesor; para el tipo B los estudiantes parten de las gráficas de las familias de curvas y sus rectas tangentes para relacionarlas con su regla matemáticas, obteniendo así afirmar lo que visualizaron gráficamente. Es así que Cervantes, Ordoñez, & Morales (2020) resaltan la importancia de tener presente las representaciones gráficas ya que estas facilitan el proceso de razonamiento de los estudiantes.

El artículo presentado por David Reid (2003) relaciona los primeros usos de la abducción en Educación Matemática. La investigación determina un compilado (estado del arte) de las formas lógicas en las que se presenta la abducción, así como ciertos usos sugeridos para lo relacionado con el razonamiento abductivo. La primera consideración que hace el artículo centra el término de abducción en lo establecido por Charles Sanders Pierce (1956) el cual considera a la abducción como la hipótesis del descubrimiento la cual logra esquematizar alrededor de tres elementos los cuales enuncia como caso, regla y resultado, la abducción es concebida en la lectura como una generalización a partir de los hechos observables.

Además del análisis que el documento hace de lo establecido por Pierce, Reid concibe demás autores y explicita la abducción en tipos, desde la postura de Umberto Eco (1983) se comprenden tipos de abducciones. Para este la abducción es la búsqueda general de una regla a partir de un caso específico y, según sea el caso se puede hablar de diferentes tipos. El primer modelo que concibe oscila a partir de lo denominado como hipótesis abductiva o abducción sobrecodificada “hypothesis or overcoded abduction” en la que un argumentador a partir de un caso conoce solo una regla para respaldar ese caso. Si por el contrario el argumentador conoce múltiples reglas que conllevan a ese caso observado la abducción cambia y se relaciona como abducción subcodificada “undercoded abduction” y por último si no se conoce una regla que evidencie el caso determinado, el argumentador inventa una regla esperando coincidir con el mismo (el caso determinado) esto se conoce como argumentación creativa “Creative Abduction”

Referido al contexto de la Educación Matemática el autor identifica abducciones y sus tipos en dos tareas que involucran un contexto matemático en el cual. En la primera de las tareas se involucra la demostración del teorema de Pitágoras y en la segunda se relaciona un problema de la cotidianidad en la que se pregunta cuantos apretones de manos se darán en un grupo de personas con cantidades cualesquiera, los contextos de aula son para chicos de 4 grado de bachillerato en Francia. Entre las conclusiones el investigador refiere la importancia del razonamiento abductivo en el aprendizaje de las matemáticas. La descripción del conocimiento adquirido por el estudiante debe ser capaz de adentrarse desde sus propios términos y no desde estructuras preconcebidas, esto haciendo alusión en poner más atención hacia la ejemplificación de una metodología que no solo relacione lo que se dice, si no que por el contrario que se tenga en cuenta lo que se ve y lo que se interpreta y explicita a través del lenguaje.

Así mismo Mendo, Castañeda y Tarifa (2017), en su estudio desarrollaron e implementaron una secuencia didáctica de carácter experimental dirigida a estudiantes de primer año de la universidad para el estudio los argumentos matemáticos de tal forma que esos promuevan representaciones espontáneas de tipo verbal y visual, que favorezcan la transición de representaciones algebraica gráfica y numérica en un ambiente tecnológico. Se realizó, debido al fracaso en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes universitarios, basándose en la importancia de analizar y reconocer cómo los estudiantes construyen y justifican sus ideas en el estudio de los conceptos matemáticos y la segunda a la integración de un escenario didáctico experimental que involucre los recursos

tecnológicos, el trabajo colaborativo y el debate, para fortalecer la argumentación en el estudio de la matemática, usando herramientas tecnológicas que permitan la transferencia entre diferentes sistemas de representación.

Los resultados condujeron a reflexiones sobre el papel que tiene el ambiente tecnológico en un trabajo articulado: individual, colaborativo, debate y autorreflexión, en la conformación de los argumentos matemáticos, particularmente en lo que se refiere al soporte de argumentos. Este escenario propició en los estudiantes el tránsito y articulación entre representaciones que permitió obtener los datos y exponer analogías para las justificaciones. El análisis de los cambios observados ayudó a los estudiantes a formular justificaciones matemáticas a través de la inducción y búsqueda de patrones. Por tanto los autores afirmaron que la actividad matemática en un ambiente de trabajo individual, colaborativo, de debate, y autorreflexión permite favorecer un contexto de trabajo matemático en el que los estudiantes exponen sus ideas y razonamientos y desafían las afirmaciones de los demás integrantes para lograr el objetivo de búsqueda de consensos. Este modelo de trabajo se fortalece cuando los estudiantes realizan una transferencia de información entre las representaciones matemáticas, ya que se ven motivados a justificar sus hallazgos y establecer conexiones de ideas.

En otra investigación Conner A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner., P. A. & Franciscor. R. T. (2014), hacen un breve recorrido donde se muestra una combinación entre la regla, el caso y el resultado de Pierce (1956) en conjunto con los datos, la afirmación y la garantía de Toulmin (1958/2003) (que muestra que la validez de los de los argumentos

se debe establecer para garantizar la conclusión de ellos), que permite diferenciar entre razonamiento deductivo, inductivo, abductivo y de analogía dentro de la argumentación colectiva. Se realiza una investigación para un grado noveno en una clase de matemática de un colegio en Inglaterra donde los estudiantes realizan una serie de pruebas en geometría relacionadas con triángulos cuadriláteros y otros polígonos, de los cuales se identifican cuatro elementos que ejemplifican diferentes tipos de razonamiento; para cada ejemplo se examina el contenido matemático en la intención de los investigadores (quienes diseñan la prueba) de cada parte del argumento, para identificarlo como un caso, regla o resultado, de acuerdo a cada uno de los elementos en el diagrama de Toulmin, el cual les permitió distinguir el tipo de razonamiento durante la argumentación en el aula.

En adición a lo anterior se plantea la definición de razonamiento, se describe brevemente las partes y la estructura de los argumentos de Toulmin y conectan esa estructura con la argumentación colectiva de las clases de matemáticas, se revisan las descripciones planteadas por Pierce (1956) de los diferentes tipos de razonamiento y sus elementos, mediante la combinación de las dos perspectivas en un solo diagrama permiten comprender el tipo de razonamiento deductivo, inductivo, abductivo y de analogía presentes en un argumento.

1.2. Justificación

El siguiente trabajo es una propuesta que se tiene como solución a situaciones problemas que se estén generando en estudiantes de educación básica refiriéndose explícitamente a aquellos relacionados con la argumentación en contextos geométricos, en particular con la propiedad de mediatriz de un segmento. El valor de las matemáticas como herramientas para

la construcción del mundo es crucial para el progreso de la raza humana, desde la década del 60 se han planteado diversas reformas para la enseñanza de estas. Desde el desarrollo de un plan de matemáticas modernas hasta la reformulación de las dinámicas en el aula como lo es el modelo por competencias. En el contexto particular colombiano los Estándares Básicos de Competencia (EBC) son criterios claros y públicos creados en conjunto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) El siguiente trabajo de investigación recopila dos de los cinco procesos recomendados por el ministerio, por una parte se presenta la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas el cual se aborda desde el concepto de mediatriz a partir de la secuenciación de patrones conjeturales y representaciones visuales. En palabras del MEN (2016):

la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. (p52)

El segundo cubre la necesidad ligada al razonamiento, predecir eventos, conjeturar, dar interpretaciones coherentes, donde las actividades propuestas en el trabajo de investigación presentado propician el razonamiento inductivo, deductivo y abductivo, en palabras del MEN (2016):

Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos. (p.54)

Desde la Educación Matemática el razonamiento abductivo juega un papel importante y crucial en el desarrollo de pensamiento matemático en investigaciones recientes se habla de la deconstrucción de pruebas matemáticas y su implicación en la comprensión de conceptos y teoremas geométricos tales como la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180 grados. Esta situación se evidencia en la investigación de Saenz-Ludlow (2016) donde se recalca que el proceso de conjeturar y tener ideas alrededor de los indicios lo cual es significativo al momento de desarrollar una demostración matemática esto ayuda a resolver preguntas como ¿de dónde proviene estas pruebas? ¿Cómo se empieza con el desarrollo de un problema?

1.3. Planteamiento del problema

Algunos autores como Peirce (1878), sugieren que la "abducción es el primer paso del razonamiento científico", debido a que desde que sucede un hecho o fenómeno y es

observado por una persona, se puede generar una hipótesis que de explicación a lo acontecido.

Para lograr comprender, entender y dar una explicación a un hecho, se plantea una o más hipótesis sobre lo que pudo haber generado dicho hecho, suceso o fenómeno. En este sentido, se considera que la abducción o razonamiento abductivo, es un pensamiento lógico por medio del cual pueden nacer nuevas hipótesis, para dar explicación a un hecho en particular, con determinados modelos de enseñanza para las matemáticas. Tal y como lo sugieren Zbick y Conner (2006), quienes afirman que “hay perspectivas en las cuales además de considerar los aspectos sociales involucrados en la construcción de modelos, se intenta brindar a los alumnos oportunidades para desarrollar conceptos y procedimientos matemáticos”.

Se pudo identificar en Mendo, Castañeda, & Tarifa, (2017). Ivars & Fernández, (2016) y Cervantes, Ordoñez y Morales (2020) ya descritos en los antecedentes; que algunos estudiantes han presentado dificultades en el momento de la resolución de problemas en matemáticas tales como, ejercicios en álgebra y geometría; es a raíz de ello, que para llegar a la solución de un problema, el estudiante debe realizar una construcción de un argumento utilizando los conocimientos previos que le permitan llegar a tal fin y ese tipo de razonamiento empleado es el razonamiento abductivo.

Lo que fundamenta y justifica esta problemática pueden ser los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), desde el cual se sugiere el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la implementación de cinco procesos, a saber: la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; el

razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la modelación y la comunicación (MEN, 2006). Con base en lo anterior, se puede proponer una inclusión de la argumentación en el aula de matemáticas ya que esta contribuye a fortalecer en los estudiantes la capacidad de comunicar y razonar sus ideas, ya estas competencias que plantea el MEN destaca la capacidad de hipótesis, de discusión y de evidenciar los argumentos con los cuales expresa su razonamiento.

En este sentido, se espera lograr que mediante el desarrollo del presente trabajo, se tome como alternativa en la enseñanza de estudiantes de educación básica, el estudio del razonamiento abductivo enlazado con el modelo de Toulmin para dar una estructura de análisis a los argumentos que estos brindan cuando dan solución a un problema, logrando que la labor del docente sea cada vez más efectiva en el proceso de enseñanza hacia los estudiantes de educación básica, al diseñar herramientas que les faciliten el aprendizaje ayudándoles a entender las diferencias entre los tipos de razonamiento, lo cual podría ser un gran avance para la solución de problemas en geometría. Por lo expuesto anteriormente se interesa profundizar en dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo el razonamiento abductivo contribuye a la resolución de un problema en matemáticas relacionado con la mediatriz de un segmento?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Determinar cómo contribuye el razonamiento abductivo para la solución de problemas de matemáticas relacionados con la mediatriz de un segmento

1.4.2. Objetivos Específicos

- Indagar la literatura alrededor de la solución de problemas en matemáticas en contextos geométricos para la construcción y uso de la propiedad mediatriz de un segmento
- Relacionar los argumentos de los estudiantes con su actividad matemática, por medio de la construcción de una actividad encaminada a resolver problemas con situaciones que involucren el uso de la mediatriz de un segmento
- Clasificar los razonamientos de tipo abductivo de los estudiantes alrededor de una tarea que involucre la mediatriz de un segmento para comprender la manera en la que usa las conjeturas para el desarrollo de la actividad

2. Marco Teórico

En páginas anteriores se ha mencionado que el interés de la presente investigación está relacionado a determinar como la abducción fomenta la resolución de problemas en contextos geométricos en específico los relacionados con la mediatriz de un segmento. Para el estudio de la abducción se eligió la teoría de argumentación de Toulmin (1984) en la que se define la postura alrededor de la argumentación, razonamiento y argumento, Esta distinción es importante y relevante alrededor de los pilares de este trabajo.

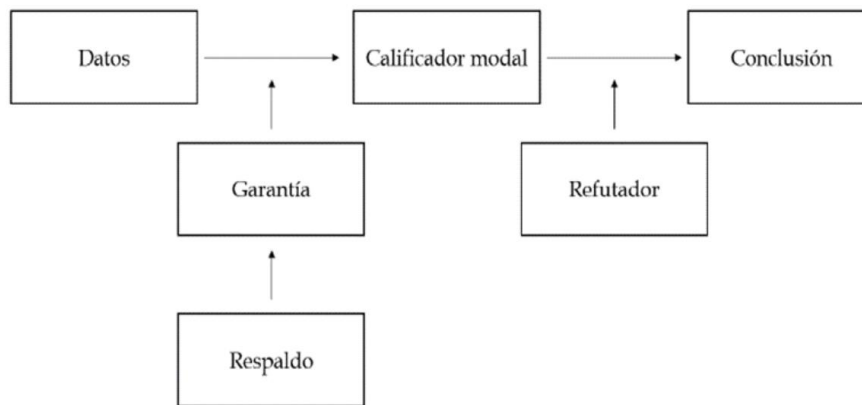
De esta manera, en el presente capítulo se presentará la teoría de Toulmin (1984) donde se presentará un esquema argumentativo el cual es base para la parametrización de la abducción, esto a través de los elementos que compone dicho esquema. Posterior a esto se relacionará las bases de la argumentación abductiva, así como los tipos de abducción que pueden desprenderse del argumento evidenciado por parte de un estudiante. Por último, se presentará la propuesta de Conner (2014) en la que se estructuran diferentes tipos de argumentos entre el que se encuentra el abductivo y así esquematizar la actividad hecha por los estudiantes.

2.1 Argumentación en Educación Matemática

2.1.1 Teoría argumentativa de Toulmin.

En el estudio realizado por Stephen Toulmin (1984) se logran identificar tres conceptos imperantes en la investigación: Argumento, Razonamiento y Argumentación. Los argumentos son cadenas de razonamientos donde las aserciones (afirmaciones) se presentan en modo de secuencia interconectadas que establecen la fuerza y contenido que un hablante establece cuando se está argumentando. Por otro lado, el razonamiento indica aquella actividad central de presentar razones en apoyo a una aserción, a fin de lograr verificar cómo esas razones logran mostrar la fuerza de una aserción. Por último, La argumentación refiere a toda actividad de hacer aserciones, desafiarlas, respaldarlas produciendo razones, criticando las razones, refutarlas, etc. En la teoría de Toulmin además se refiere un argumento a partir de una estructura definida como esquema argumentativo de Toulmin (fig No 1) donde la argumentación es el conjunto global en el que se hallan los argumentos, y en este último inmerso está el razonamiento.

Figura 1 Esquema Argumentativo de Toulmin (1984)



Para Toulmin los argumentos formales y no formales pueden esquematizarse en una estructura argumentativa la cual puede ser evidenciada en la figura No1. Para el caso de esta investigación se utilizarán únicamente algunos elementos que conforman el núcleo del esquema argumentativo, estos son *dato*: evidencia que se enuncia para respaldar una afirmación o aserción, *garantía*: tiene el papel de conectar los datos con la conclusión, por último esta la *aserción*: la cual es aquella afirmación o conclusión a la que llega un argumentador y la *refutación*: el conjunto de posibles objeciones, restricciones, posibles contraejemplos que pueden debilitar el paso de los datos a la aserción que se propone. Con la estructura de la figura No. 1 se pueden estudiar y estructurar todo tipo de razonamientos formales e informales.

2.1.2 Abducción y la hipótesis del indicio.

Existen diferentes perspectivas filosóficas alrededor de la enseñanza una de ellas es la determinada como humanista, en la perspectiva humanista el profesor analiza a fondo lo desarrollado por el estudiante permeando el proceso que este conlleva para así determinar

diversas situaciones que permitan el mejoramiento continuo en el proceso de aprender. Desde esta perspectiva un profesor humanista considerará no solo una respuesta global, si no que por el contrario examinará los procesos de indagación y conjeturas. Sobre los procesos de indagación y conjetura es donde se concentra la abducción. La abducción nace como una posible explicación a un evento o fenómeno que se evidencie, algo que puede o no puede ser. En términos de Pierce:

Se describe la abducción como aquella inferencia en donde la mente indirectamente llega a conocer la existencia de un objeto por medio de la relación activa que tiene esta con el objeto (material o conceptual), esta relación se basa en la intuición. Dicha intuición intelectual considera lo abstracto en formas concretas por la hipótesis de las relaciones. (C.P 1.383)

Es así como Pierce logra determinar una explicación para los indicios, conjeturas y posibles hipótesis explicativas a un suceso a partir de lo observable, junto con el razonamiento inductivo y deductivo.

Otro de los teóricos que estudia la abducción es Eco (1983) este logra entrever junto con Pierce (1956) un tipo de razonamiento diferente para los indicios y conjeturas, solo diferencia que este tipo de razonamiento puede presentarse de tres maneras: El primer tipo de razonamiento abductivo que concibe es el que se denomina como abducción sobrecodificada en este tipo de razonamiento el argumentador tiene la opción de relacionar una posible regla a un caso evidenciado, es decir este es consciente de una sola regla que sigue ese caso. La abducción subcodificada por otra parte refiere la posible consecución de muchas reglas del que un argumentador es consciente a la hora de la posible explicación de

un caso, esto sin que la diversidad de reglas a escoger sean equiprobables. La abducción creativa es el tercer tipo de abducción y surge en el caso de que un argumentador no sea consciente de ninguna regla y requiera la invención de una para la explicación posible de un caso.

2.1.3 Abducción en Educación Matemática.

La abducción en Educación Matemática surge como un recurso para estudiar los procesos de prueba y demostración en el aula. Una de las investigaciones que refieren lo anterior se determina en Pedemonte & Reid (2010) en el escrito los principales cuestionamientos oscilan alrededor de si es posible describir tipos de abducciones que hacen más accesibles los procesos deductivos (la demostración matemática) Los investigadores logran hipotetizar que en caso de que la abducción determinada sea de tipo sobrecodificada esta será la más apta para la consecución de una demostración, la distancia entre lo deductivo y abductivo pareciese ser más corta y lo deducible un camino más evidente. Para el caso de la abducción subcodificada se hace necesario una consecución coherente de la diversidad de reglas y estrategias a escoger, en caso de no coincidir ninguna de las reglas una de las posturas que debe asumir el estudiante es el cambio de sus hipótesis para así generar un camino más acertado hacia la resolución de su problema. Cuando ninguna estrategia pueda considerarse y se opta por la creación de una que lleve a determinar la consecuencia de un caso en ese momento la abducción creativa emerge y determina la posible explicación al mismo, es el caso más difícil de evidenciar debido a la necesidad de verificar exhaustivamente para poder consolidar al final un razonamiento deductivo.

Es recurrente el uso de la abducción como una especie de razonamiento hacia atrás, en Saenz-Ludlow (2016) se determinan desconstrucciones de tres demostraciones clásicas del teorema “la suma de los ángulos internos de todo triángulo suman 180° ” en la que el papel del razonamiento abductivo en la fase de análisis y síntesis de la demostración es clave. Por ejemplo, el autor logra evidenciar que para la construcción es factible relacionar varias ideas que son importantes en la determinación de las demostraciones, reglas e indicios conocidos emergen a la hora de generar las aserciones finales. Consideraciones como congruencia de ángulos entre paralelas, desconstrucciones alrededor de un ángulo llano como dos ángulos rectos, construcciones auxiliares sobre los vértices y demás hacen partes de abducciones sobrecodificadas útiles en la construcción de la demostración.

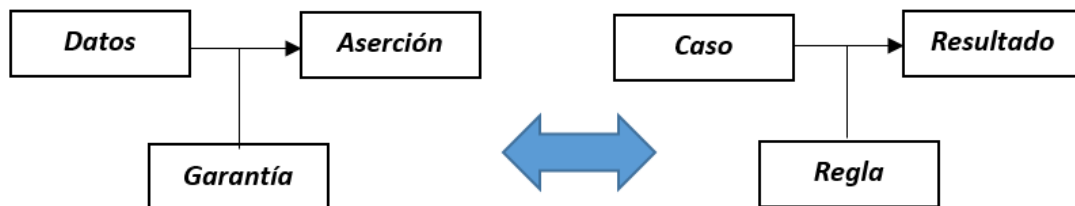
En lo presentado por Cervantes et al. (2020) se evidencia una manera de conectar procedimientos analíticos con lo gráfico en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, esto denota significado a las expresiones algebraicas desde lo algebraico-analítico. Concordante con el cuestionamiento el principal interés del estudio se concentraba en ¿Qué argumentos potencian la conexión entre los enfoques analíticos y algebraicos en la determinación de curvas ortogonales? Lo mostrado en los datos logra evidenciar como el indicio generado por lo visual (grafico de curvas ortogonales) permite a partir de un resultado (ejercicio propuesto por los investigadores) determinar una explicación para la aserción del mismo. Los investigadores logran determinar dos casos de argumentos abductivos a los que llaman de tipo A y tipo B, el de tipo A relaciona un argumento construido alrededor de una hipótesis única referenciando un caso (abducción sobrecodificada) y el de tipo B sobrelleva varias hipótesis que logran concatenar un caso específico (abducción hipercodificada) De las conclusiones más relevantes alrededor del

argumento abductivo es que esta funge de puente entre las facetas algebraica, geométricas y analíticas, es partir de ello y del trabajo relacionado por el estudiante donde se atribuye significado a la graficas de las familias de curvas y la resolución de problemas.

2.1.4 Sobre la esquematización de los razonamientos en Educación Matemática.

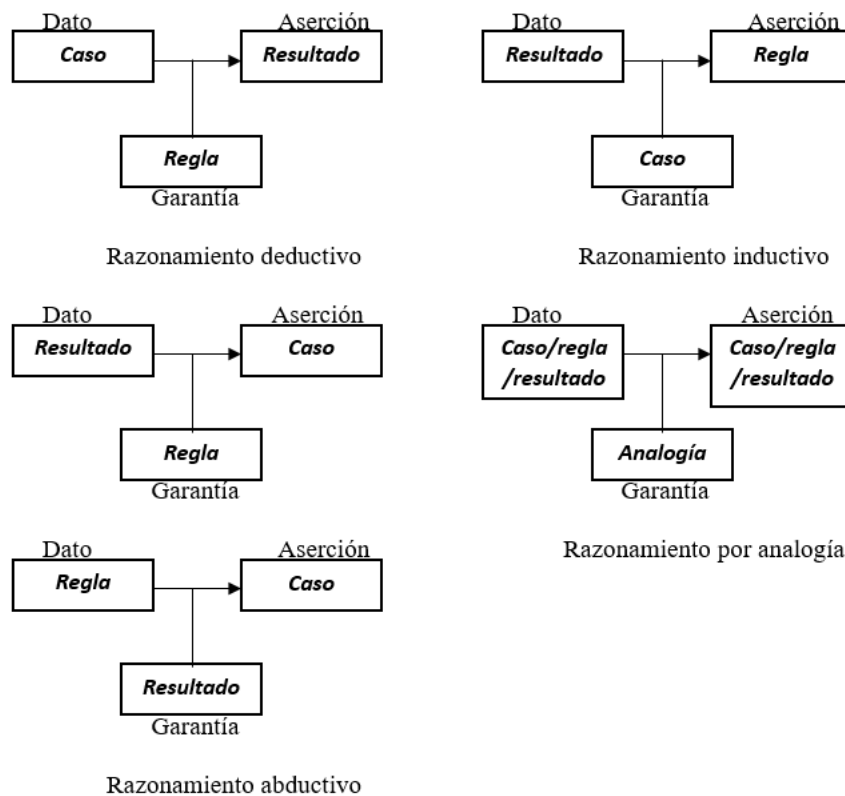
En la teoría expuesta, inicialmente fueron tres los conceptos relevantes: argumentación, argumento y razonamiento. La postura del presente trabajo está asociada a Toulmin (1983) alrededor de su esquematización. Una de las falencias que se determinan del esquema oscila en que no es muy evidente la diferenciación de tipos de argumentos o razonamientos que pueden emerger de una actividad o explicación referencia en el aula. Para el caso de la Educación Matemática Conner (2014) logra identificar estas falencias y partir de la teoría presentada en Pierce (1956) para caso, regla y resultado la cual puede incorporarse y relacionarse con el núcleo del esquema (ver figura No. 2)

Figura 2 Relación del núcleo argumentativo del esquema argumentativo de Toulmin y los elementos de Pierce y Conner (2008)



La figura No. 2 deja entrever una adaptación de los marcos propuestos por Toulmin (1984) y Pierce (1954) para la consecución de un argumento. Los elementos caso, regla y resultados son propuestos por Pierce (1956) los cuales define como se presentan a continuación. *El caso es una observación específica de que se cumple una condición* (p.83), donde la expresión condición determina la asociación entre dos cosas. *El término regla se debe de entender cómo una proposición que establece que, si ocurre una condición, otra también ocurrirá. El Resultado es una observación que mantiene una condición relacionada con otra condición o por una regla.* Es necesario establecer una diferencia entre los términos antes relacionados, por ejemplo, para el caso y resultado se evidencia una distinción a partir de que si bien el resultado necesita una cadena lógica de razonamientos, el caso no. Conner (2014) logra entrelazar los elementos anteriores y establecer una distinción para cuatro tipos de razonamientos: deductivo, inductivo, abductivo y por analogía. Ver figura No. #3

Figura 3 Tipos de razonamientos Conner (2014)



La figura No. 3 muestra el desarrollo que hace Conner (2014) para esto la investigadora toma las teorías de Pierce -Toulmin logrando concatenar cuatro tipos de razonamientos presentes en la actividad argumentativa. El razonamiento de tipo deductivo es aquel construido desde conclusiones o aserciones que son resultados de consecuencias lógicas, supuestos y premisas anteriormente establecidas. El razonamiento inductivo contrario al anterior es aquel que trata de construir aserciones a través de conjeturas basadas en generalizaciones de casos particulares. Por otra parte, está el razonamiento abductivo, el cual es contrario al deductivo, se determina como un razonamiento hacia atrás y se inicia desde la conclusión llegando a comprobar una hipótesis. En el esquema se puede evidenciar

dos maneras de determinarse este tipo de razonamiento en la primera se parte de los resultados y se infiere un caso a través de una regla, mientras que en la segunda se parte desde una regla infiriendo un caso desde los resultados. Por último, el razonamiento por analogía es aquel que se construye a partir de la comparación que se hace de observaciones correspondientes para situaciones similares.

3. Metodología

En los capítulos anteriores se presentaron diversidad de aspectos relacionados a la formulación de la pregunta de investigación, la contextualización del problema y los objetivos de investigación los cuales, se centran en la diversidad de razonamientos que pueden emerger (Toulmin 1984, Pierce 1956, Conner 2014) de una actividad que relaciona la mediatriz de un segmento.

A continuación, se presenta una breve descripción de la metodología empleada en el desarrollo de este estudio. La primera parte se concentrará en el tipo de investigación que se determina, la cual es de carácter cualitativo y es denominada como estudio de casos. Después se aborda la actividad desarrollada en el aula la cual se enmarca en lo que Santos-Trigo (2020) denomina Bitácora digital. Por último, se mencionará la implementación, toma de los datos, la recolección de la información, forma de aplicación del instrumento y análisis a partir del modelo adaptado de Toulmin.

3.1 Investigación cualitativa y estudio de casos.

El carácter de la investigación es cualitativo, es decir a partir de la realidad establecida por la experiencia inmediata se trata de dar una interpretación a las personas entorno a un contexto establecido, para así darle sentido a las diferentes construcciones que estas hagan. Desde Jiménez (2016) se relaciona el estudio de casos como un enfoque metodológico en el que la principal intención es dar solución a preguntas como ¿Por qué ocurren los hechos? ¿Cómo ocurren ciertos hechos?, etc para así orientarlos a su explicación desde múltiples perspectivas. En este sentido en la presente investigación se tratarán temas particulares que

requerirán un estudio más profundo del contexto y del fenómeno, para que de esa forma se pueda recopilar la información de forma descriptiva.

El método que se implementó en la investigación es el enfoque de estudio de casos. La solidez principal del estudio de casos radica en medir y registrar las diferentes conductas que pueden determinarse en el fenómeno a estudiar. Una de las principales fortalezas que están inmersas en el método radica en que a través de unos contextos particulares es posible comprender parte de la realidad singular, permitiéndose conocer, estudiar, profundizar y analizar situaciones específicas. Con respecto a lo anterior Martínez (2006) afirma:

Las investigaciones realizadas a través del método de estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si a través de las mismas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio (p.171).

La investigación en curso aporta alrededor de lo particular la generación de conocimiento alrededor de la teoría de la argumentación, en específico la orientada a la teoría de argumentación en el campo de la Educación Matemática. El contexto de los datos se referenciará sobre dos casos particulares de un grupo de 21 estudiantes de grado octavo de la Institución Nuestra Señora de la Consolación ubicada en la ciudad de Cali, los cuales involucran el acercamiento a través del software geogebra al concepto de mediatriz de un segmento para su posterior uso y la resolución de un problema que involucre el uso de este.

3.2 Instrumentos de recolección de información

3.2.1 Bitácora digital

Una bitácora digital es un instrumento que permite al estudiante registrar y llevar un control de su propio proceso de comprensión de conceptos y resolución de problemas (Santos-Trigo, 2020), el instrumento es factible de dimensionar en tres etapas. La parte inicial de la bitácora consiste en el desarrollo motivacional, se presenta atractiva de tal manera que los conocimientos previos que desarrolla el estudiante por su experiencia pueden emerger para la resolución de esta etapa inicial. La segunda parte el durante, es donde se presenta situaciones modelos en un contexto en el que el concepto matemático se use como herramienta para la toma de decisiones. En la fase conocida como él durante se cuenta con la participación actividad de profesor y estudiante, estudiantes-estudiantes para que entre todos puedan llegar a la solución de un problema en el que se espera se pueda construir el conocimiento estudiado. La última de las etapas es conocida como la actividad reto en esta se relaciona una actividad que es coincidente con la presentada en la fase durante clase, la diferencia radica en que es en esta parte donde los estudiantes deben de llegar a una solución sin intervención de nadie, únicamente los conocimientos adquiridos gracias a la fase motivacional y el durante.

3.2.2 Intervención en el aula: instrumentos de recolección de datos

Uno de los propósitos del trabajo es generar ambientes de aprendizaje significativos que incurran implícitamente en las prácticas de los estudiantes, en particular en el concepto matemático que se conoce como mediatriz de un segmento. En Vega (2012) se mencionan

diversos prerrequisitos que deben de tener los estudiantes como por ejemplo el tener claro los propósitos de la clase, además de presentar problemas que los reten y que llamen la atención para que desde las preguntas y conjeturas que se hagan los estudiantes la interacción entre docente y alumno florezca. En este sentido la actividad que se relaciona a través de la bitácora digital presenta una serie de problemas en contexto y desde allí cumplir con una experiencia significativa en el aula.

Alrededor del diseño de las actividades que se presentan en el aula la primera fase tal como se mencionó en la bitácora digital motivaba a los estudiantes a la apreciación de nociones básicas presentes en estos, de tal manera que se permitiera reconocer en estos, algunos elementos imperantes en el concepto de mediatriz. El ejercicio inicial consistía en una serie de applets en Geogebra con preguntas orientadoras que a partir de conjeturas dadas por los indicios de la experimentación digital se llevaba al estudiante a propiedades que reconocían como la del punto medio, la perpendicularidad entre rectas, los ángulos entre rectas, las distancia entre segmentos y situaciones recurrentes que llevaran a la propiedad de mediatriz.

Para la segunda fase en el durante, la actividad consistió en relacionar la construcción en el programa geogebra el clásico problema de los tres pueblos (ver anexo #2). En este, se pretende capturar las significaciones que hace el estudiante a partir de las observaciones que pueda plantear, además se pide que a través de una aproximación intuitiva este pueda verificar donde se ubica un tinaco de agua a igual distancia de los mismos. Posterior a esto y con la intervención del docente se realiza una construcción guiada donde se hace preguntas como ¿Qué figura se construye al unir los tres pueblos? ¿Qué le sucede a cada uno de los

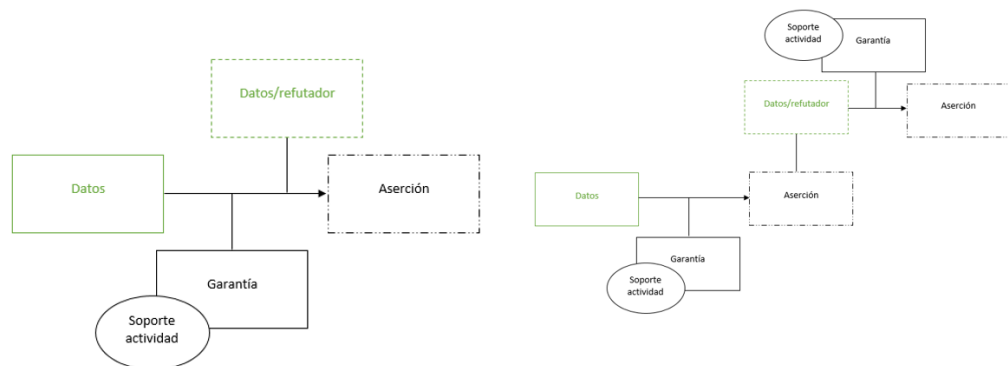
segmentos cuando se ubican los puntos medios? ¿Es posible la construcción de una circunferencia que contenga los tres pueblos? (Está en particular fue una construcción que se guió con el docente)

En la segunda fase era muy común recibir respuestas cortantes por parte de los estudiantes y es sobre esta situación donde el docente exploraba diversos recursos como el análisis colectivo sobre la pantalla, las preguntas orientadoras ¿Cómo llegaste a esa respuesta? Buscando contribuir a la construcción de las garantías. En la actividad reto se plantea una situación problema en la cual a partir de un mito común “el triángulo de las bermudas” se pide que el estudiante logre relacionar el punto por el cual el barco no encalle y el lugar donde encalla en caso de que transite por esa zona. Convenientemente el punto de encalle y la zona de tránsito está relacionada con la mediatriz de un segmento.

3.3 El esquema argumentativo de Toulmin como herramienta para la esquematización de los argumentos

Es factible afirmar que el modelo argumentativo de Toulmin permite estructurar los diferentes tipos de razonamientos que pueden emerger, para esto es importante que cuando se reconoce la manera de argumentación a partir de la interacción del estudiante con la actividad se pueda determinar una forma de esquematizar esto, es a partir de lo anterior y como primera situación que como herramienta se tomó dicho modelo de Toulmin y se modeló toda la interacción del estudiante con el instrumento para a partir de ello clasificar los tipos de razonamientos y la relación de esto con las conclusiones esperadas en la bitácora. La estructura relacionada involucra el modelo de Toulmin expuesto por Conner (2008) y Zhuang, Y. & Conner, A (2022) el cual se presenta en la adaptación de la figura No. 4

Figura 4 Modelo adaptado de Toulmin (2008) y Zhuang et al. (2022)



En la figura No. 4 se puede determinar dos esquemas, el primero relaciona una estructura simple del modelo de argumentación de Toulmin, compuesta por datos, garantía, aserción y refutador el cual puede relacionar datos para un razonamiento entrelazado con el anterior como se puede ver en la figura.

3.4 Alcances y limitaciones

Dentro de las limitaciones de la clase se pueden evidenciar consideraciones como la virtualidad la cual repercutía en la participación de los estudiantes durante las diversas sesiones de clase. La actividad mostrada a los estudiantes permite la construcción de un concepto matemático como el de la mediatriz de un segmento y su uso en situaciones en un contexto determinado. Es importante aclarar que esta propuesta no puede ser generalizada ni mucho menos tomarse como un ejemplo absoluto que representa a todos los estudiantes.

4. Análisis de Resultados

El enfoque con el cual fueron analizados los datos es de corte cualitativo, con un énfasis determinado a partir de los argumentos dados por los estudiantes. El principal referente de la investigación se utilizó de la propuesta dada por Conner (2014). A partir de esta propuesta se determinó esquematizar los argumentos que emergían de las actividades propuestas en la bitácora digital, en la que se tomaron los argumentos dados por dos estudiantes escogidos de forma aleatoria. Posterior a esto se examinaron las respuestas dadas y se esquematizaron en regla, caso y resultado para así determinar el tipo de razonamiento que predomina en estos.

El análisis se hizo con principal énfasis en la bitácora digital donde se analizaron las tres partes de estas: motivación, durante clase y actividad a partir de esta premisa se realizó el desarrollo de la investigación. El concepto matemático en el que giró la actividad fue el de mediatriz de un segmento, en un primer momento se evidencia una construcción guiada que determinaba conceptos previos por parte de los estudiantes, nociones de punto medio, perpendicularidad, ángulos rectos y demás emergieron en esta etapa haciendo vislumbrar todas las ideas previas para la apropiación del concepto mediatriz. Después se espera que el concepto sea desarrollado y trabajado de una manera que pueda ser utilizado para la solución de un problema en esta etapa se muestra la forma de acceder a un problema de carácter social con la instalación de un tinaco de agua y posterior a ello se accede la actividad reto a través

del mito del triángulo de las bermudas y la “zona de naufragio” que convenientemente utilizan información de la actividad de motivación

Referido al análisis, la primera situación que se determinó para el comienzo de este fue la organización de la información, es en ese sentido que cada argumento dado por los estudiantes alrededor de las actividades fue dispuesto en una tabla cuya segmentación estuvo generada a partir de tres columnas, en la primera se indica el número de la respuesta (R1 o L1) conforme a las preguntas que se presentan en esta sección de la bitácora. En la segunda columna se muestra la evidencia escrita hecha por el estudiante conforme la pregunta relacionada en la bitácora. En la tercera columna se indica el tipo de elemento (Regla, Caso o resultado)

4.1 Fase 1: Motivación

En la primera fase se logró modelar los razonamientos de dos estudiantes a partir de la actividad de motivación. En esta se utilizaron tres applets que coordinados con el instrumento de recolección (bitácora digital) lograron evidenciar razonamientos interconectados que permitían que se construyera el concepto de mediatriz desde su propia experiencia. En la tabla uno se logra mostrar el caso al que llega el estudiante a partir de la actividad en el software geogebra.

Los datos recolectados para el estudiante E1 logran evidenciar una apropiación del concepto de mediatriz a partir de los hechos observados sobre el caso propuesto. El primer razonamiento que evidencia es la división del segmento presentado a partir de las reglas recurrentes R1.4 y R1.5 las cuales logra entrelazar a la evidencia de otro hecho que se

repercute de la pregunta orientadora en la bitácora, además se sugiere si la regularidad vista cambia al moverse el segmento determinado RF/D2 el estudiante argumenta que en el caso

De que el segmento se mueva (lo cual experimenta a partir del software Geogebra) la situación no cambiaría para su caso R1.2 esto fundamentado en una regla que expresa en R 1.3. Es importante también mencionar como las actividades potenciaron las reglas determinadas en el razonamiento W1 y W2

No.	Respuesta	Tipo
D1	segmentos presentados en la actividad generada en el primer applet geogebra	Resultado
W1	Preguntas orientadoras de la actividad del applet 1	Soporte de la actividad
W2	Preguntas orientadoras de la actividad del applet 2	Soporte de la actividad
W3	Preguntas orientadoras de la actividad del applet 3	Soporte de la actividad
RF/D2	¿La inclinación del segmento hace que la relación entre ellos cambie?	Regla
D3	¿Qué sucede con los puntos que se encuentran sobre la recta perpendicular al segmento AB?	Regla
R1.1	Se genera una división en partes iguales, en un grado de 90	caso
R 1.2	No, se sigue formando el mismo ángulo, en el mismo lugar: el medio	caso
R 1.3	La recta G nunca se mueve de lugar, y sirve como referencia para las medidas.	resultado

R 1.4	La distancia entre C y A es de 2.18, la distancia entre B y C es de 2.18. El punto donde se intersectan se llama C, como podemos observar según las medidas, justo en la mitad del segmento.	regla
R 1.5	AC y BC siempre conservan una igual medida sin que la posición las afecten, es decir, pese a todos los movimientos, que se acerquen o alejen, las dos tendrán idéntica distancia	regla
R 1.6	Los puntos siempre atraviesan la mitad, creando dos partes simétricas, y nunca cambian de posición. Además, como dije antes, sirven para definir las medidas de AC y BC	caso
C3	Construcción del applet 3	resultado
R 1.7	Mediatriz, es una línea que divide a otra justa en la mitad, para que ambos lados conserven igual medida. En el triángulo del ejercicio, atravesaba la base y también el vértice de la altura.	Resultado
Razonamiento abductivo (A): <pre> graph TD D1[Resultado: D1] --> R14_15[Regla: R1.4 y R1.5] R14_15 --- W1((W1)) D1 --> C11[Caso: R1.1] D1 --> R13[Resultado: R.1.3] R13 --- W2((W2)) R13 --> C12[Caso: R1.2] R13 --> R13_2[Regla: RF/D2] R13_2 --- W2 </pre> Razonamiento abductivo (B): <pre> graph TD C3[Resultado: C3] --- W3((W3)) C3 --> D3[Regla D3] C3 --> C16[Caso: R1.6] </pre>		

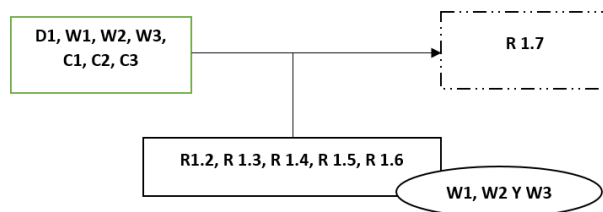
Tabla 1. Argumento estructurado E1 primera parte: motivación

La construcción de la actividad para la mediatriz del segmento deja entrever dos tipos de estructuras que muestran como inferir a partir de la observación y trabajo con el objeto esto alrededor de las instrucciones de la actividad plasmada en la bitácora, en el primer tipo de razonamiento (A) se observan dos abducciones entrelazadas a través de una refutación/ dato que emerge en la actividad que acompaña el applet, se determina además que las nociones recurrentes para las reglas en uno fungen como garantías del argumento y en el razonamiento que sale a partir de refutar la generalidad determina el dato de la generalidad buscada en la mantener el ángulo recto. El razonamiento de tipo A deja entrever un camino para el cual la generalidad recurre a organizar dos ideas iniciales que al principio se hace necesaria para la consecución de la aserción que permita relacionar que a pesar de la actividad siempre el patrón será recurrente, estas ideas entrelazadas en el razonamiento de tipo A se conocen como abducciones subcodificadas ya que permiten alcanzar de una manera más factible el camino a la deducción de la mediatriz de un segmento.

En la misma actividad se pedía la construcción de hechos básicos planteados en los applets y contrastados con las preguntas de la actividad. Para esto se pidió construir puntos sobre la perpendicular que permitieran de alguna manera recurrir a otra generalidad consecuente y a partir de los cuestionamientos hechos en la bitácora. A partir de esto el estudiante logra entrever la recurrencia en el caso (R 1.6) generando una regla cimentada en la construcción de la actividad y el suplir muchos casos. Este tipo de abducción (ya que conserva lo establecido por conner 2014) es una abducción de tipo sobrecodificada.

Al final puede esquematizarse a partir de estos hechos la idea que posee el estudiante alrededor de sus argumentos y que relaciona el concepto de mediatriz de un segmento ver figura No.5

Figura 5 Esquematización Mediatriz de un segmento E1



La figura No. 5 muestra la construcción que relaciona el concepto de mediatriz que asocia el estudiante E1 a la fase de motivación y que es exclusiva de su proceso de aprendizaje, ideas como perpendicular al punto medio, segmentos iguales al medirse sobre la perpendicular y la generalidad de esta propiedad sobre cualquiera sea el tamaño del segmento son apropiados directamente por la interacción del estudiante, la construcción y las preguntas alrededor de estas.

El estudiante E2 deja entrever en la construcción de la bitácora una primera aserción L1.1 basado en un caso, en esta se puede relacionar un primer acercamiento a través de la perpendicularidad y su posterior consecución de ángulos rectos (L1.3 y L1.4) todo esto a través de los segmentos presentados en la actividad de la construcción (D1), a razón de esto la actividad al relacionar la generalidad involucra una refutación que hace al mismo tiempo las veces de dato y permite seguir obteniendo estas ideas que pueden surgir y fundamentarse en el conocimiento previo del estudiante. Para el caso en particular, se relaciona que el movimiento no afecta la noción de perpendicularidad y de los ángulos rectos (L1.2) el cual

fundamenta en el dinamismo del applet (W1) este recurso permite entrever que el estudiante se fundamenta fuertemente en aspectos visuales. A partir de la construcción guiada se genera otra esquematización del razonamiento en la que se busca que se logre relacionar la congruencia de medidas a través del corte en el punto medio (L1.5) esta se corrobora a partir de medir dicha situación con la herramienta que el software brinda (L1.6). Al preguntársele por la dinamización de la situación al mover el segmento (RF/D4) la aserción que infiere (L1.9) se fundamenta en la observación al dividir el segmento y la noción que conoce de perpendicularidad (L1.7 y L1.8) tal como se ve en la tabla No. #2

No	Respuesta	Tipo
D1	segmentos presentados en la actividad generada en el primer Applet geogebra	Resultado
W1	Preguntas orientadoras de la actividad del applet 1	Soporte de la actividad
W2	Preguntas orientadoras de la actividad del applet 2	Soporte de la actividad
W3	Preguntas orientadoras de la actividad del applet 3	Soporte de la actividad
RF/D2	¿Qué pasa si el segmento en la construcción de la actividad uno se mueve?	regla
D3	Construcción guiada dos	Resultado
RF/D4	¿Qué pasa si el segmento de la construcción guiada dos se mueve?	Regla
L1.1	Cuando se corta el segmento y la recta formamos 4 ángulos de 90 grados	Caso

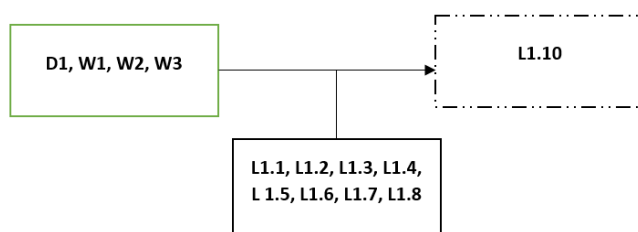
L1.2	no, ya que si el segmento está inclinado al mover la perpendicular mantenemos los 4 ángulos rectos.	Caso
L1.3	El ángulo que se forma es recto de 90 grados.	Regla
L1.4	La recta g es perpendicular al segmento AB.	Regla
L1.5	la distancia entre el punto c y el segmento AC es 3.21 y BC es 3.21, el punto donde se intersectan es la mediatriz.	Caso
L1.6	La particularidad es si lo divide una mediatriz el segmento se divide en dos partes iguales formando ángulos de 90 grados.	Resultado
L1.7	Es una línea recta perpendicular que pasa por la mitad del segmento.	Resultado
L1.8	La distancia entre el punto AD y el punto BD son iguales.	Resultado
L1.9	Lo que sucede con los puntos es que cortan la línea AB en dos partes iguales y al mover la figura se siguen manteniendo en el centro.	Caso
L1.10	La mediatriz de un segmento es la línea que lo divide en dos partes iguales.	Regla
Razonamiento E2 (A*) <pre> graph TD D1[Resultado: D1] --> L11[Caso: L1.1] D1 --> L134[Regla: L1.3 y L1.4] L11 --> RF2[Regla: RF/ D2] RF2 --> W1[W1] W1 --> L12[Caso: L1.2] </pre>		Razonamiento E2 (B*) <pre> graph TD D3[Regla: D3] --> L15[Caso: L1.5] L15 --> L16[Resultado: L1.6] L16 --> RF4[Regla: RF/D4] RF4 --> L178[Resultado: L1.7 y L1.8] L178 --> L19[Caso: L1.9] </pre>

Tabla 2. Argumento estructurado E2 primera parte: motivación

Las estructuras de los razonamientos evidenciados por el estudiante (E2) muestran cómo las actividades presentadas logran que el estudiante razone de manera abductiva, más aún logra determinar la idea de mediatriz a partir de secuencias que en principio pareciesen separadas, para A* los tipos de abducciones son subcodificadas y en un momento inicial se encargan de relacionar la perpendicularidad y sus propiedades alrededor de lo que la actividad busca con las ideas iniciales y las observaciones que hace en la interacción con el software. En el Tipo B* se instaure la noción de que la línea perpendicular corta al segmento en partes iguales y que esta línea es invariante cualquiera sea el segmento y su orientación, la tabla No. #2 amarra esta situación en dos ideas que se pueden esquematizar en razonamiento abductivos de tipo subcodificada.

Las actividades de la bitácora dejan entrever que contrario al estudiante E1, el estudiante E2 en un primer momento logra construir dos razonamientos abductivos sobre codificados de la actividad de motivación relacionada con la mediatriz de un segmento, al final es plausible esquematizar su idea de mediatriz ver figura No. 6

Figura 6 Esquematización de la mediatriz de un segmento E2



En la estructura del argumento mostrada en la figura No. 6 puede establecerse la idea que el estudiante logra relacionar del concepto mediatriz de un segmento, para ello no solo muestra la generalidad sobre la línea perpendicular y sus cuatro ángulos rectos sino que

además la división del segmento como consecuencia del corte sobre este de la línea perpendicular y una noción que dejaría entrever que cualquier punto sobre la perpendicular conserva la misma distancia L19, aunque no es tan explícita esta noción.

4.2 Durante clase

La fase dos consistió en la aplicación del concepto mediatriz de un segmento en una situación de contexto el cual planteaba un problema de agua potable denominado el problema de los tres pueblos (ver anexo No. # 1) A partir de esto se forzaba a que los estudiantes relacionaran la aplicación en un contexto real del concepto y ver los esquemas de sus argumentaciones a través del trabajo desarrollado en la bitácora digital, El estudiante E1 ante la actividad W1 logra relacionar algunas nociones geométricas alrededor de la situación como la de construir un triángulo R1 que es la figura geométrica que permite modelar la distancia que existe entre los tres pueblos, posterior a esto logra evidenciar una construcción que involucra el concepto mediatriz y una de sus propiedades como es que la línea perpendicular que se construye corta al segmento en dos partes iguales R2, finalmente al observar lo que ocurre al realizar este procedimiento con los tres segmentos del triángulo logra concluir un punto de corte que justo está en el centro del triángulo R3. Buscando generalidad sobre el procedimiento se pide relacionar una circunferencia la cual esta consignada en una segunda parte de la actividad W2, realmente esa generalidad funge de manera en que se determina una refutación y dato a la vez que permite explorar las ideas del estudiante y desde ese punto permitirse una explicación al punto de intersección donde debe estar el garrafón de agua R5. Concordante con lo anterior se puede establecer tres reglas que ayudan a fortalecer el caso presentado en W1 y W2, la primera acude a una situación en la

que se afirma que el centro del triángulo es el punto donde se debe de establecer el tinaco de agua R4, se fortalece su cuestionamiento alrededor de que si se traza una circunferencia desde ese centro los pueblos van a tener una igual distancia R6, esto fundamentado en que son radios de la circunferencia. Además de que si se mueven los pueblos desde el centro seguirán siendo radio sin importar esa ubicación, confrontando esta respuesta el estudiante E1 logra fundamentar la importancia de esta situación reconociendo la generalidad del punto de igual distancia sin importar su ubicación fundamentando la propiedad de la mediatriz R7. La tabla No. #3 evidencia lo anteriormente dicho.

No.	Respuesta	Tipo
W1	Actividad orientadora de construcción 1.1	Resultado
W2	Actividad constructora de orientación 1.2	Resultado
R.1	Se construye un triángulo.	Regla
R.2	Los segmentos se dividen en partes iguales.	Regla
R.3	. Podemos observar que las rectas perpendiculares atraviesan los diferentes lados del triángulo, formando diferentes ángulos diferentes. Además, hay un punto en donde todas estas rectas perpendiculares se juntan, el centro del triángulo.	Caso

R.4	A ojo, considero que donde todas las rectas perpendiculares se juntan es el centro de la circunferencia, y a su vez la del triángulo.	Regla
R. 5	. Se llama centro, y la distancia a cada uno de los pueblos deben ser la misma.	Caso
R. 6	Debe estar ubicado en el centro de la circunferencia, porque si se ubica ahí todos los pueblos estarán a la misma distancia del acueducto. En la posición actual de los pueblos es el único punto donde están a la misma distancia. Pero si la ubicación de los pueblos cambia, el acueducto también se ubicara en otro lugar, buscando el centro, donde volverán a quedar a la misma distancia de todos los pueblos.	Regla
R.7	La mediatriz es aquella recta perpendicular que corta un segmento justo en la mitad, por lo tanto, los extremos del segmento están a la misma distancia de aquella línea. En el caso del triángulo, cuando las tres	Regla

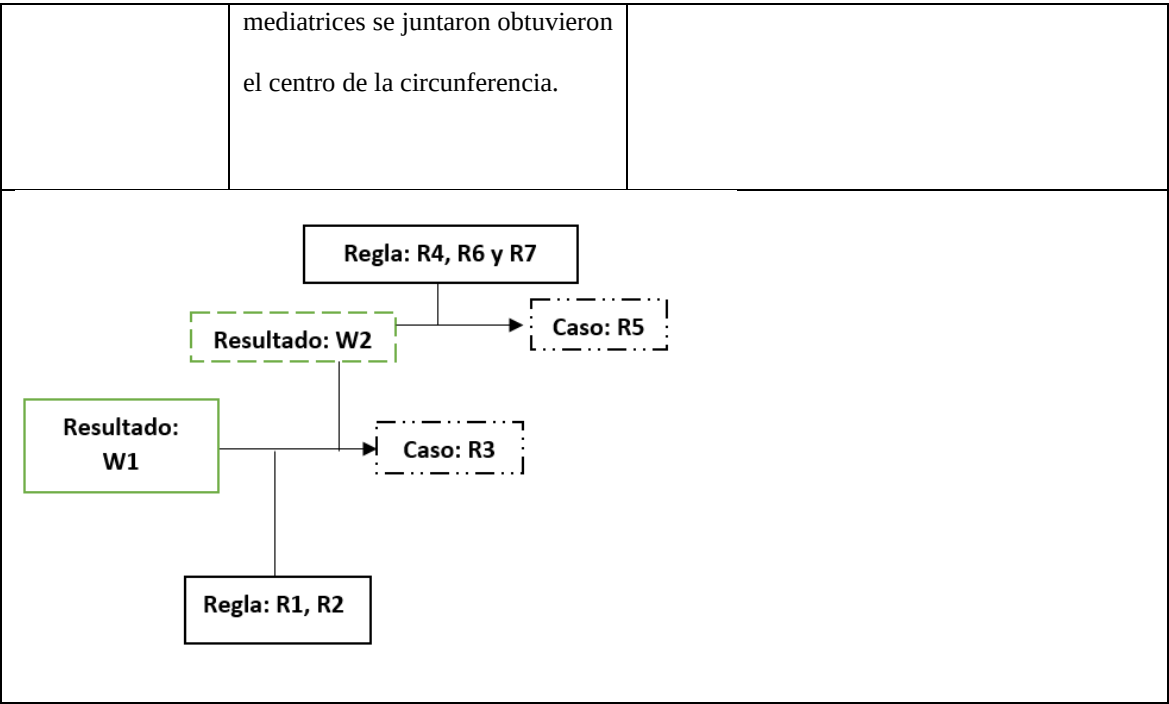


Tabla 3. Argumento estructurado E1 segunda parte: durante clase

Las ideas construidas del estudiante permiten relacionar una desconstrucción hacia atrás alrededor de lo que se evidencia de las tareas propuestas (actividad durante clase) las aserciones permiten establecer los casos a los que el estudiante logra llegar, pero todas fundamentadas en resultados y reglas que esta evidencia de la actividad de motivación y de sus saberes previos. Es importante notar que la estructura del argumento del estudiante E1 se enmarca en la abducción y en particular del tipo subcodificado donde logra determinar dos razones entrelazadas que sugieren un camino hacia la resolución del problema de los tres pueblos.

En el caso del estudiante E2 se puede relacionar tres reglas alrededor de su argumento y gracias a la actividad que se plantea en W1. Las reglas repercuten en la construcción de un triángulo dado tres puntos L1, la bisección de un segmento en la mitad L2, la noción de perpendicularidad y los ángulos rectos L3 esto lleva al lugar geométrico

que plantea las condiciones del tinaco de agua y en particular con el expuesto en la actividad, así se puede inferir en su argumento que efectivamente el punto es el lugar donde al medir respecto a los tres pueblos su distancia equidista L5. La fundamentación del razonamiento repercute en las determinadas como resultados de la actividad, Por ejemplo, para el caso del punto encontrado la justificación se determina sobre dos propiedades de la circunferencia, la primera alrededor del centro (L6) y la segunda en función del radio de la misma (L4) ver tabla No. # 4

No	Respuesta	Tipo
W1	Actividad de construcción 1.1	
W2	Actividad de construcción 1.2	
L1	al unir los tres pueblos se construye una figura de triángulo.	Regla
L2	Cuando se ubican los puntos medios el segmento queda dividido a la mitad, es decir en dos partes iguales.	Regla
L3	Las rectas que formamos son perpendiculares a los segmentos, por lo tanto, forma ángulos de 90 grados.	Regla
L4	al trazar la circunferencia podemos observar que pasa perfectamente por los tres pueblos.	caso

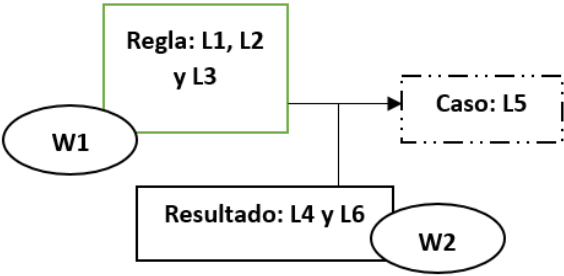
L5	El lugar donde se cortan las rectas recibe el nombre de centro, la distancia de este lugar hasta cada uno de los pueblos es exactamente igual.	Resultado
L6	El acueducto debe estar ubicado en el centro, ya que en ese punto sería equidistante a cada uno de los pueblos.	resultado
L7	la mediatriz es una línea que pasa por la mitad de un segmento.	Regla
 <pre> graph LR W1((W1)) --> Regla[Regla: L1, L2 y L3] Regla --> Caso[Caso: L5] Regla --> Resultado[Resultado: L4 y L6] Resultado --> W2((W2)) </pre>		

Tabla 4. Argumento estructurado E2 segunda parte: durante clase

La estructura del razonamiento del estudiante sugiere como las actividades (W1 y W2) influyen en los datos y la garantía del razonamiento dado por el estudiante, de esta manera la abducción sugiere un camino y este se esquematiza en lo que se conoce como abducción sobrecodificada. Es de resaltar que, aunque se menciona la regla de la mediatriz no es muy claro el uso que E2 le da a la misma siendo consecuencia toda la construcción alrededor de esta.

4.3 Después de clase: Actividad reto

En la tercera fase de la actividad se dejó como reto resolver un problema alrededor de un mito conocido como el triángulo de las bermudas. En la actividad se pregunta por un posible camino y una zona aparente donde al transitar cualquier embarcación esta puede naufragar a esto se le denomina triángulo de las bermudas. Para la actividad se pide constatar el punto exacto de naufragio siendo este el corte de las tres mediatrices, este punto se denomina circuncentro. El primero de los estudiantes E1 utiliza la misma forma de razonamiento que ha venido desarrollando, en un momento inicial concibe el caso presentado, dado por la construcción que hace de la actividad W1 y a partir de este logra inferir el punto considerado K1 fundamentándose principalmente en la construcción que hace de las mediatrices de los tres segmentos del triángulo determinado en el applet y la propiedad centro de una circunferencia que usa para fortalecer el razonamiento que este concibe. Ante esta situación la actividad logra extrapolar un cuestionamiento más al preguntar acerca del lugar de navegación que deberían tener estos barcos y que hace seguro el camino K2, situación que el estudiante logra fundamentar expresamente en lo determinado por la construcción R2 y que relaciona expresamente en la regla del circuncentro y la medida de este a la figura determinada en el applet R2. En la tabla No. # puede verse parte del dialogo y la esquematización del razonamiento hecho por E1.

No	Respuesta	Tipo
W1	Construcción de la actividad reto	Resultado
K1	Conclusión posible punto de naufragio	caso

K2	¿Dónde debería navegar entonces?	Resultado: Refutación/Dato
R1	El punto se obtuvo debido al cruce de las diferentes mediatrices entre cada isla. Luego, sabemos que aquel punto es el centro del triángulo de las Bermudas, por a) la circunferencia que se realizaba (demostrando que aquel punto es el centro, y b) porque se encuentra a la misma distancia entre cada territorio. Al formarse un triángulo acutángulo el centro queda dentro del mismo triángulo.	Regla
R2	Recomiendo que se vaya por la costa oriente de EE. UU, o al menos, por la semirrecta que se forma entre la isla de Bahamas y Florida, o puede pasar debajo de Puerto Rico. Recomendando que opte por el camino que brinda la circunferencia, para evitar más riesgos.	Caso
R3	El sitio donde naufragan los barcos es el centro del triángulo y de la circunferencia que forman las islas (punto F), cuya distancia	Regla

	entre los diferentes territorios y él es de 4.07	
R4	Claro que sí, porque gracias a ella pudimos determinar el punto centro de la circunferencia que se formaban entre las islas (cuando las mediatrices se cruzaron y obtuvieron un punto en común), y por eso consideramos que es ahí donde ocurre los accidentes	Regla
<pre> graph TD R3[Regla: R3] --> R2[Caso: R2] K2[Resultado: K2] --> R2 K2 --> R1R4[Regla: R1 y R4] W1[Resultado: W1] --> K1[Caso: K1] W1 --> R1R4 R1R4 --> K1 </pre>		

Tabla 5. Argumento estructurado E1 tercera parte: después de clase

El esquema del razonamiento evidenciado por el estudiante E1 es de tipo abductivo y en particular el que se encierra bajo la categoría de subcodificado, es decir que a través de sus argumentos expuestos y generados por la actividad el estudiante logra determinar dos ideas consecuentes que relacionan una aserción general alrededor del sitio de naufragio y el lugar que sería más seguro para la navegación. En esta respuesta se puede ver el uso del concepto mediatriz de un segmento para la consecución de punto de naufragio y la zona segura.

Para el caso del estudiante E2 se puede ver como empieza a razonar y a conectar sus razonamientos alrededor del caso, es a partir del caso L1 donde florece la aserción K1 alrededor del punto de naufragio y como reafirma su postura alrededor de una propiedad matemática que logra inferir a partir de lo denominado como circuncentro L3, la construcción empieza a determinar como el argumento del estudiante logra emerger pasa a paso al mejor estilo del razonamiento deductivo. Ante esta situación la actividad cuestionaba alrededor de si existía una zona segura de navegación K2 situación que logra describir el estudiante alrededor de la construcción dada en el caso L2 y utilizando para esta afirmación a importancia de la construcción a partir de la mediatriz de un segmento.

No.	Respuesta	Tipo
W1	Construcción de la actividad reto	Datos
K1	Punto de naufragio	Resultado
K2	¿Dónde entonces debería navegar el barco?	Caso: Refutador/ dato
L1	Primero unimos los tres puntos y se nos forma un triángulo. calculamos los puntos medios de cada segmento y por ahí se traza la línea perpendicular que forma ángulo de 90° y divide el segmento en dos partes iguales. Luego las tres líneas perpendiculares se deben cortar	Caso

	en un punto y es ahí donde trazamos nuestra circunferencia.	
L2	Para que no corra riesgo debe pasar por fuera del triángulo, más allá de la circunferencia, nunca hacia adentro del triángulo porque podría naufragar.	Resultado
L3	El sitio donde naufragan es exactamente en todo el centro del triángulo. se llama Circuncentro.	Regla
L4	Claro que si, ya que es la base que tomamos para determinar los puntos medios de los segmentos, por donde van a trazarse las líneas perpendiculares y de esa forma es que hallamos el punto donde se cortan las tres mediatrices, y este dato es súper importante a la hora de saber por dónde no deben pasar los barcos ya que correrían peligro.	Regla

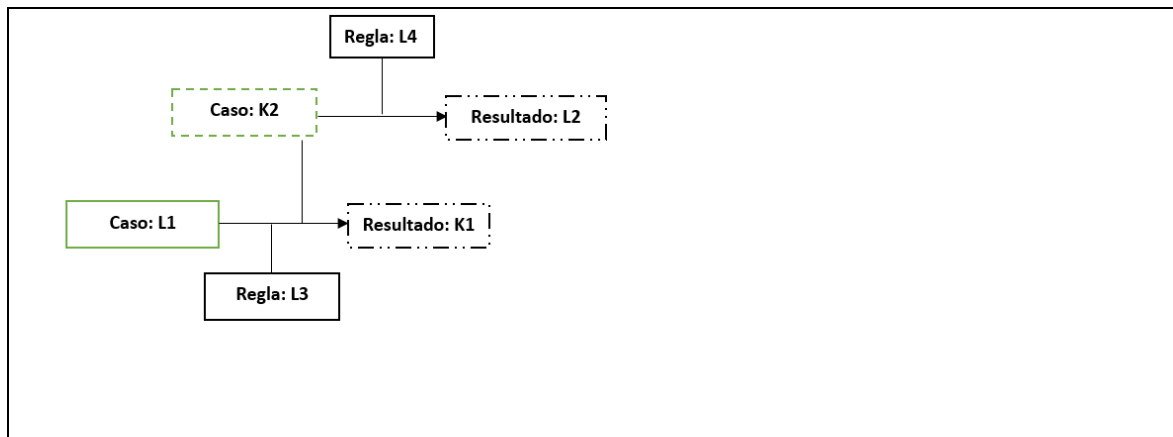


Tabla 6. Argumento estructurado E2 tercera parte: después de clase

La estructura del razonamiento del estudiante E2 logra determinar dos razonamientos de tipo deductivos entrelazados por una refutación surgida de la misma actividad, con esto se logra determinar el cambio que ha tenido el estudiante E2 al relacionar sus argumentos como consecuencias de ideas ya determinadas y construidas por el mismo a partir de la actividad.

5. Conclusiones

Como conclusiones del trabajo final puede relacionarse que la bitácora digital en la que se relacionó la mediatriz de un segmento permitió incentivar la argumentación y experimentación, fortaleciendo el uso de las tecnologías como respaldo a una situación de aprendizaje con mayor responsabilidad por parte del estudiante. Alrededor de lo anterior el uso del applet desarrollado para este trabajo logra evidenciar varias conjeturas determinadas que ayudaron a solucionar los cuestionamientos iniciales. En una primera parte del trabajo se pudo evidenciar la trayectoria investigativa que existe en el campo de la abducción matemática, se determinó con algunos antecedentes cómo se habla de un tipo de razonamiento que permite relacionar dichas ideas iniciales alrededor de los indicios, situación fortalecida con la experimentación que hicieron los estudiantes en el applet.

En un primer momento las ideas alrededor de las observaciones que hace los estudiantes dejan entrever como a partir de la experimentación van generando una idea alrededor de la mediatriz, estos (E1 y E2) logran construir generalidades que se mantienen a pesar de los cambios que puedan hacerse de la manipulación del applet, de esta manera logran construir su idea determinada en un razonamiento de tipo deductivo, todo esto alrededor de las abducciones que se logran construir antes y que pueden verse esquematizadas en el capítulo anterior. Es importante resaltar como evidente que alrededor

de los tipos de abducciones que logran emerger en la fase de motivación se encuentran abducciones sobrecodificadas y subcodificadas, permitiendo sugerencias sobre una multiplicidad de ideas que permiten la solución del problema presentado o sobre un indicio que logra mantenerse como único ante el caso que se presente.

En lo referente al uso del concepto mediatriz, la actividad durante clase y la actividad reto fueron cruciales. En una primera parte con la actividad durante puede observarse la mediación del concepto mediatriz para ambas esquematizaciones que presentan los estudiantes, es en ese sentido puede verse nociones pertenecientes a la mediatriz, tales como perpendicularidad, punto medio, congruencias de medidas y bajo estas se entrelaza el concepto construido. Es importante relacionar que las construcciones cuentan además con otras ideas matemáticas como la de circunferencia y sus propiedades las cuales refuerzan las construcciones y permiten establecer cómo estas ideas se entrelazan llevando a la aserción del problema presentado. A partir de lo anterior es factible ver la relación de estas ideas las cuales emergen en función del caso y logran concluirse en la aserción establecida, esto se determina alrededor de los razonamientos abductivos que hacen los estudiantes con las ideas que finalmente enlazan.

En la actividad de reto se plantea si al final el concepto pudo emerger y ser utilizado, situación que puede exponerse en los esquemas que se muestran en el capítulo anterior, en un primer análisis puede determinarse que uno de los estudiantes razona alrededor de los hechos construidos, pero al final logra concluir el punto de naufragio y la zona de no tránsito a través de la cual los barcos podrían encallar, de esta situación la abducción subcodificada se logra ramificar a partir de las abducciones que emergen de la construcción paso a paso que hace el estudiante E1. Para el estudiante E2 se puede ver la relación de dos argumentos

deductivos entrelazados donde se expone el uso de la mediatriz, además de que los casos se sitúan sobre las construcciones y cómo los datos del argumento se relacionan sobre los casos que se logran formar, es importante resaltar que la naturaleza de los razonamientos es de tipo deductivo, además que logran interpelarse el uso del concepto mediatriz de un segmento, la definición de circunferencia y sus propiedades que lograron concluir el objetivo de la tarea propuesta por el investigador.

Para el caso global por estudiantes se muestra cómo la bitácora genera una construcción compartimentada, coherente y estructurada de una relación que en una primer análisis muestra resultados comprometedores que podrían ser seguidos para mejorar algunos procesos educativos centrados en el aprendizaje, la relación de los razonamientos deconstruidos dejan entrever cómo una construcción guiada hace que los estudiantes relaciones sus propias ideas alrededor del razonamiento abductivo, además de que no solo emerge un camino (abducción sobrecodificada) si no por el contrario el abanico de ideas recurrentes y ya construidas (abducciones subcodificadas) También es importante sobresaltar que aunque los estudiantes logran adaptar los hechos observados con el applet, para el desarrollo matemático es importante que emerjan razonamientos deductivos para un uso posterior en cualquier situación en el concepto logre generar un camino para la resolución de un problema de cualquier tipo, en el caso particular de las actividades en contexto que se proponen por parte del investigador y que logran desarrollarse por los estudiantes fuentes de análisis de este trabajo.

El uso de la tecnología (Geogebra) fue crucial para el desarrollo de la investigación, en primera medida permitía acercar de una forma experimental al razonamiento esperado en función del concepto mediatriz. También fue evidente para que se recordaran a través de la

manipulación algunos conceptos desencadenados de dicha propiedad y además de que pudieran ser corroborados en el instante. Alrededor de esto la observación o el paso de lo particular a lo general es una de los grandes beneficios que se determinan con el software, el cambio de tamaño del segmento, su orientación, la comprobación con un comando y las relaciones observables de propiedades intrínsecas en conceptos matemáticos como circunferencia o perpendicular. Es pertinente aclarar que, aunque el trabajo de investigación es prometedor, este no se puede tomar como generalización y mucho menos como afirmación de que las prácticas educativas deberían girar alrededor de esta propuesta educativa.

Por último, es importante reconocer que el enfoque argumentativo presenta un paradigma a través del cual los conceptos matemáticos pueden ser aceptados de una manera más natural, cimentada esta afirmación en la construcción de estos a partir de un propio aprendizaje. La metodología expuesta permite ver a las abducciones como bastión importante en el afianzamiento de un concepto, pero que alrededor del uso general es el razonamiento deductivo el que debe permitir establecer las conexiones y solucionar problemas en contextos o situaciones que permitan escoger la mejor de las decisiones. Resuma los datos recopilados y el análisis de los datos más relevantes para justificar las conclusiones, relacione el enfoque investigativo con los hallazgos referidos en la aplicación de los instrumentos de investigación.

A. Anexo: Después de clase: Actividad reto

Figura 7 Bitácora digital

Bitácora digital		Eje temático. Mediatriz de un segmento
Método: Elaboración conjunta	Medio tecnológico, Lápiz, Papel, Regla, Escuadra, Compás, software educativo GeoGebra.	
INSTRUCCIONES		
Competencias. - Habilidades cognitivas, destrezas en el uso y manejo del lenguaje de recursos y de tecnologías. Así mismo para resolver problemas geométricos que impliquen los conceptos y las propiedades de la mediatriz de un segmento Resultado de aprendizaje. - Que los estudiantes puedan utilizar los conceptos de recta, segmento, semirrecta; perpendicular y punto medio. - Elaboren definiciones de mediatriz de un segmento y busquen maneras de trazarla. - Realicen un correcto uso de la herramienta tecnológica aplicándola con los conceptos matemáticos y que sea útil para la solución de estos. - Resuelvan problemas geométricos que impliquen la mediatriz de un segmento. Estrategias metodológicas. - Lee cuidadosamente la sección de motivación. - En cada actividad se debe responder y debes de argumentar tus respuestas - Debes de exponer tus resultados ante tus compañeros cuando el maestro lo indique		

Actividad de Motivación

1. Se tienen los siguientes segmentos, traza una recta perpendicular a cada uno, de tal manera que los divida en dos partes iguales. Señala con un punto el lugar donde se cortan los dos segmentos.

- ¿Qué sucede cuando se cortan el segmento y la recta?
- ¿la inclinación del segmento hace que la relación entre ellos cambie?

2. En el siguiente applet aparecen representados un segmento AB y una recta g que mantienen una relación especial. ¡Vamos a recordarlo!

Ve variando la posición de los extremos del segmento AB, con la ayuda del ratón. Observa todo lo que en la figura aparece. En tu cuaderno de trabajo haz un dibujo de una de las situaciones representadas, sin olvidar ninguno de los elementos que allí se encuentran y responde.

- ¿Qué ángulo es el formado entre la recta y el segmento?
- Pon varios puntos en la recta purpura y mide la distancia de los segmentos
- ¿La recta g como es con respecto al segmento AB?
- ¿Cuál es la distancia entre el punto de intersección C (entre el segmento AB y la recta g) y los extremos del segmento AB? ¿Qué nombre recibe el punto donde estos se interceptan?
- De acuerdo a tus respuestas, ¿qué particularidad encuentras entre AC y BC?
- Conoces la regla

- define “mediatriz de un segmento”.

3. En el aplet siguiente se observarán nuevos elementos, con la ayuda del ratón ve variando la posición de los extremos del segmento AB y modifica la posición del punto D, observa todo lo que representa y responde:

- ¿Las distancias de AD y BD como son entre sí?
- ¿Qué sucede con los puntos que se encuentran sobre la recta perpendicular al segmento AB?
- Da una definición de “mediatriz de un segmento” con lo observado.

Actividad durante la clase**-Suplemento de Agua**

Se tiene un acueducto que suple de agua a tres poblaciones (pueblo A, pueblo B y pueblo C), las cuales están en direcciones distintas y se encuentran a la misma distancia de dicho lugar; para poder suplirse de este preciado líquido, los pobladores deben llevar sus mangueras desde el acueducto hasta el tanque que almacena el agua para suministrar el líquido en cada uno de los pueblos.

- ¿Se observan los tres pueblos?
- Coloquemos un lugar donde puede estar ubicado el acueducto (punto) que a nuestra percepción sea equidistante a los tres pueblos
- Coloquemos la opción de distancia para verificar si se cumple
- ¿Siempre se conserva la distancia al mover los otros pueblos?

Realicemos la construcción:

Ubica los tres pueblos según tu preferencia, une los puntos trazando segmentos, ubica los puntos medios y las rectas perpendiculares a cada segmento, pon las distancias correspondientes.

Responde:

- ¿Qué figura se construye al unir los tres pueblos?
- ¿Qué le sucede a cada uno de los segmentos cuando se ubican los puntos medios?

- ¿Cómo son cada una de las rectas representadas, respecto a los lados correspondientes del triángulo?

Ahora tracemos una circunferencia que una los tres pueblos

- ¿Qué se puede observar al trazar la circunferencia?
- ¿El lugar donde se cortan las rectas que nombre recibe? ¿Cómo es la distancia de dicho lugar a cada uno de los pueblos?
- ¿En qué lugar deberá estar ubicado el acueducto de tal manera que sea equidistante a cada uno de los pueblos? ¿Es en la única parte?
- De acuerdo a tus respuestas define “mediatriz de un segmento”.

Reto en Clase

-El misterio del triángulo de las Bermudas

Figura 8 Triángulo de las Bermudas



El Triángulo de las Bermudas es una zona ubicada en el océano Atlántico entre Miami (U.S.A), Puerto Rico y las Bahamas, tiene forma de triángulo equilátero . Al unir estos tres puntos con una línea imaginaria se forma un triángulo de unos 1600 a 1800 km de lado,

y una superficie de 1,1 millones de km^2 aproximadamente la superficie de Colombia. El término fue creado en 1953 por varios escritores que publicaron artículos en revistas acerca de la presunta peligrosidad de la zona. Sin embargo, el área circundante, ya era conocida por sus numerosos naufragios hasta el punto de ser llamada "El cementerio del Atlántico". El sitio queda a la misma distancia de los tres puntos.

1. ¿Qué propiedad matemática opera?
2. ¿Por dónde podría pasar el barco? Realiza la construcción correspondiente, teniendo en cuenta lo visto en la clase
3. ¿Encontrar cuál es el sitio donde naufragan los barcos y que nombre recibe este lugar?
4. ¿Consideras que la Mediatriz de un segmento es importante a la hora de encontrar este lugar donde naufragan los barcos?

B. Anexo: Respuestas Actividad Bitácora Digital

Cada una de las filas representa un estudiante que realizó la actividad, para el desarrollo de este estudio se tomaron solo dos

Motivación

a. ¿Qué sucede cuando se cortan el segmento y la recta?	b. ¿La inclinación del segmento hace que la relación entre ellos cambie?	a. ¿Qué ángulo es el formado entre la recta y el segmento?	b. Pon varios puntos en la recta purpura y mide la distancia de los segmentos. ¿La recta g como es con respecto al segmento AB?	c. ¿Cuál es la distancia entre el punto de intersección C (entre el segmento AB y la recta g) y los extremos del segmento AB? ¿Qué nombre recibe el punto donde estos se intersectan?	d. De acuerdo con tus respuestas, que particularidad encuentras entre AC y BC. ¿Conoces la regla?	e. define "mediatriz de un segmento".	a. ¿Las distancias de AD y BD como son entre sí?	b. Que sucede con los puntos que se encuentran sobre la recta perpendicular al segmento AB?	c. Da una definición de "mediatriz de un segmento" con lo observado.
---	--	--	---	---	---	---------------------------------------	--	---	--

Se genera una división en partes iguales, en un grado de 90°	No, se sigue formando el mismo ángulo, en el mismo lugar: el medio	90° , un ángulo recto.	La recta G nunca se mueve de lugar, y sirve como referencia para las medidas.	La distancia entre C y A es de 2.18, la distancia entre B y C es de 2.18. El punto donde se intersecan se llama C, como podemos observar según las medidas, justo en la mitad del segmento.	AC y BC siempre conservan una igual medida sin que la posición las afecten, es decir, pese a todos los movimientos, que se acerquen o alejen, las dos tendrán idéntica distancia	Línea que divide a otra justo en la mitad, creando dos partes iguales.	Son idénticas, en mi caso, 5.95, aunque lo mueva, siguen compartiendo una igual medida.	Los puntos siempre atraviesan la mitad, creando dos partes simétricas, y nunca cambian de posición. Además, como dije antes, sirven para definir las medidas de AC y BC	Mediatriz, es una línea que divide a otra justa en la mitad, para que ambos lados conserven igual medida. En el triángulo del ejercicio, atravesaba la base y también el vértice de la altura.
---	--	-------------------------------	---	---	--	--	---	---	--

el segmento se divide en dos partes iguales y forma una mediatriz.	si cambiamos la inclinación no cambia su relación.	90 grados	la recta g es perpendicular al segmento AB Y Forma un ángulo de 90°. distancias calculadas: FD:3.05, CE: 2.24, EG:3.31 Y CD: 1.83	distancia entre el segmento AB y la recta g: 1.86 y segmento AB:3.71. el PUNTO donde se intersectan se llama punto medio del segmento.	que su medida es igual	Es una línea que divide un segmento en dos partes iguales	sus medidas son iguales si se acercan disminuyen y si se alejan se aumenta su valor	el punto c queda intacto no se modifica, mientras que el punto D si se modifica, a medida que se acerca al punto c disminuyen las distancias, y a medida que se aleja del punto c aumenta su valor de distancia	Es una línea perpendicular a un segmento que forma un ángulo de 90°, y lo divide en partes iguales.
Cuando se corta el segmento y la recta formamos 4 angulos de 90 grados	no, ya que si el segmento está inclinado al mover la perpendicular mantenemos los 4 ángulos rectos.	El ángulo que se forma es recto de 90 grados.	La recta g es perpendicular al segmento AB.	la distancia entre el punto c y el segmento AC es 3.21 y BC es 3.21, el punto donde se intersectan es la mediatriz.	La particularidad es si lo divide una mediatriz el segmento se divide en dos partes iguales formando ángulos de 90 grados.	Es una linea recta perpendicular que pasa por la mitad del segmento.	La distancia entre el punto AD y el punto BD son iguales.	Lo que sucede con los puntos es que cortan la línea AB en dos partes iguales y al mover la figura se siguen manteniendo en el centro.	La mediatriz de un segmento es la línea que lo divide en dos partes iguales.

Se forma la mediatriz de un segmento ya que tomamos una recta y el segmento	No, ya que es una línea que lo cruza y al inclinarlo la mediatriz se inclina también	Se forma un Angulo de 90°	La recta g es perpendicular al segmento AB	La distancia entre la intersección C y el extremo del segmento AB es de 3.32 y el punto donde se interceptan es la mediatriz.	Los segmentos AC Y BC al variar la longitud de AB siempre es la misma, porque C representa la intercepción con la mediatriz.	La mediatriz de un segmento es la línea perpendicular que pasa por el medio de un segmento	Las distancia AD y BD al mover el punto D, son iguales.	El punto C que se encuentra sobre el segmento AB es el punto medio del segmento.	Es la línea recta perpendicular a ese segmento trazada por el medio
Pues lo que yo observo es que se hace una línea en el punto medio	Yo creo que no cambia	se forma un ángulo de 90 grados	es perpendicular	2,30 y el punto que esta ahí o la intersección C se llama el punto medio	yo pienso que son iguales	la mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el punto medio del segmento y pues es perpendicular a el	Que tienen el mismo valor de acuerdo cuando movemos el punto	lo que observo es que si muevo AB su distancia se conserva pero cambia la distancia de CD si muevo el punto y si muevo AB la distancia cambia si solo muevo el punto D	la mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el punto medio del segmento y pues es perpendicular a el

Durante clase: Suplemento de agua

1. ¿Qué figura se construye al unir los tres pueblos?	2. ¿Qué le sucede a cada uno de los segmentos cuando se ubican los puntos medios?	3. ¿Cómo son cada una de las rectas representadas, respecto a los lados correspondientes del triángulo?	4. ¿Qué se puede observar al trazar la circunferencia?	5. ¿El lugar donde se cortan las rectas que nombre recibe? ¿Cómo es la distancia de dicho lugar a cada uno de los pueblos?	6. ¿En qué lugar deberá estar ubicado el acueducto de tal manera que sea equidistante a cada uno de los pueblos? ¿Es en la única parte?	7. De acuerdo a tus respuestas define "mediatriz de un segmento"
Se construye un triángulo.	Los segmentos se dividen en partes iguales.	Podemos observar que las rectas perpendiculares atraviesan los diferentes lados del triángulo, formando diferentes ángulos diferentes. Además, hay un punto en donde todas estas rectas perpendiculares se juntan, el centro del triángulo.	A ojo, considero que donde todas las rectas perpendiculares se juntan es el centro de la circunferencia, y a su vez la del triángulo.	Se llama centro, y la distancia a cada uno de los pueblos deben ser la misma.	Debe estar ubicado en el centro de la circunferencia, porque si se ubica ahí todos los pueblos estarán a la misma distancia del acueducto. En la posición actual de los pueblos es el único punto donde están a la misma distancia. Pero si la ubicación de los pueblos cambia, el acueducto también se ubicara en otro lugar, buscando el centro, donde volverán a quedar a la misma distancia de todos los pueblos.	La mediatriz es aquella recta perpendicular que corta un segmento justo en la mitad, por lo tanto, los extremos del segmento están a la misma distancia de aquella línea. En el caso del triángulo, cuando las tres mediatrices se juntaron obtuvieron el centro de la circunferencia.
un triángulo	el segmento se parte en dos partes iguales	son rectas perpendiculares al segmento que forman ángulo de 90°	que el triángulo queda dentro de la circunferencia.	circuncentro, la distancia es exactamente igual a cada uno de los pueblos.	debe estar ubicado exactamente donde nos dio el circuncentro. Y si es la única parte donde se debe ubicar.	Es una línea perpendicular a un segmento que forma un ángulo de 90° , la cual divide a dicho segmento en dos partes iguales.

al unir los tres pueblos se construye una figura de triángulo.	Cuando se ubican los puntos medios el segmento queda dividido a la mitad, es decir en dos partes iguales.	La rectas que formamos son perpendiculares a los segmentos, por lo tanto forma ángulos de 90 grados.	al trazar la circunferencia podemos observar que pasa perfectamente por los tres pueblos.	El lugar donde se cortan las rectas recibe el nombre de centro, la distancia de este lugar hasta cada uno de los pueblos es exactamente igual.	El acueducto debe estar ubicado en el centro, ya que en ese punto sería equidistante a cada uno de los pueblos.	la mediatriz es una línea que pasa por la mitad de un segmento.
Se forma un triángulo	Al ubicar los puntos medios cada segmento es separado por la mitad	Cada uno de los segmentos es cortado por la mitad por las rectas	Puedo observar que se cortan las rectas	El nombre que recibe es circunferencia	el centro de la circunferencia está a la misma distancia de los pueblos y así se puede repartir equitativamente el acueducto	Es una línea recta perpendicular a el segmento trazada por el medio
Un triángulo al revés	que se encuentra la mitad de los segmentos	pues era una recta que tenía un punto en común	Yo observo que la circunferencia pasa por cada uno de los pueblos	el lugar donde se cortan las rectas se le llama centro y la distancia debe de ser igual	el acueducto debe de estar en la mitad de los pueblo y debe de tener la misma distancia	la mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio

Actividad reto: Triangulo de las Bermudas

1. ¿Qué propiedad matemática opera?	2. ¿Por dónde podría pasar el barco?	3 ¿Encontrar cuál es el sitio donde naufragan los barcos y que nombre recibe este lugar?	4. ¿Consideras que la Mediatriz de un segmento es importante a la hora de encontrar este lugar donde naufragan los barcos?
El punto se obtuvo debido al cruce de las diferentes mediatrices entre cada isla. Luego, sabemos que aquel punto es el centro del triángulo de las Bermudas, por a) la	Recomiendo que se vaya por la costa oriente de EE. UU, o al menos, por la semirrecta que se forma entre la isla de Bahamas y Florida, o puede pasar	El sitio donde naufragan los barcos es el centro del triángulo y de la circunferencia que forman las islas (punto F), cuya	Claro que si, porque gracias a ella pudimos determinar el punto centro de la circunferencia que se formaban entre las islas (cuando las mediatrices se cruzaron y obtuvieron un punto en común), y por eso consideramos que es ahí donde ocurre los accidentes

circunferencia que se realizaba (demostrando que aquel punto es el centro, y b) porque se encuentra a la misma distancia entre cada territorio. Al formarse un triángulo acutángulo el centro queda dentro del mismo triángulo.	debajo de Puerto Rico. Recomiendo que opte por el camino que brinda la circunferencia, para evitar más riesgos.	distancia entre los diferentes territorios y él es de 4.07	
Primero unimos los tres puntos y se nos forma un triángulo. calculamos los puntos medios de cada segmento y por ahí se traza la línea perpendicular que forma ángulo de 90° y divide el segmento en dos partes iguales. Luego las tres líneas perpendiculares se deben cortar en un punto y es ahí donde trazamos nuestra circunferencia.	Para que no corra riesgo debe pasar por fuera del triángulo, más allá de la circunferencia, nunca hacia adentro del triángulo porque podría naufragar.	El sitio donde naufragan es exactamente en todo el centro del triángulo. se llama Circuncentro.	Claro que sí, ya que es la base que tomamos para determinar los puntos medios de los segmentos, por donde van a trazarse las líneas perpendiculares y de esa forma es que hallamos el punto donde se cortan las tres mediatrices, y este dato es súper importante a la hora de saber por dónde no deben pasar los barcos ya que correrían peligro.
la propiedad matemática que opera es el área, para hallar el área del triángulo se utiliza la fórmula de $(\text{base} \times \text{altura})/2$.	El barco podría pasar a una distancia con un radio de 2,66 km desde el centro del triángulo de las bermudas.	El sitio donde naufragan los barcos es el centro del triángulo y recibe el nombre de baricentro.	si es importante, porque nos ayuda a encontrar el centro del triángulo.
La operación matemática que se utiliza es el área porque se habla de la superficie y esta viene dada en kms cuadrados.	El barco podría pasar rodeando por el área del triángulo de las bermudas.	El sitio donde naufragan los barcos es en el área, llamado el cementerio del atlántico.	yo considero que si ya que así podríamos saber dónde se puede naufragar y en que lugar no se podría, de cierta manera esto también nos ayuda para realizar más fácil estos procesos. Profe hago el recuerdo de que yo no pude realizar los 2 quizes anteriores de este tema, entonces me dijiste que con este me calificabas los otros.
Pues cuando hice todos los puntos y las líneas perpendiculares se hace un punto F que tiene la misma	Puede pasar por fuera de la circunferencia como rodeándola	Mediatriz	Si , sería mucho más fácil

distancia con Florida , Bahamas y Puerto Rico			
--	--	--	--

C. Anexo: Aplets de Geogebra

A continuación, se presentan los pantallazos de los aplets de geogebra utilizados en las fases de la bitácora digital que fueron presentados a los estudiantes en cada una de sus fases:

Fase de motivación:

En esta fase fueron presentados tres aplets los cuales involucraba la interacción con segmentos que permitían relacionar las propiedades de la mediatriz y que se complementaban con la fase de motivación, estas se relacionan a continuación:

Figura 9 Aplet 1 de fase de motivación

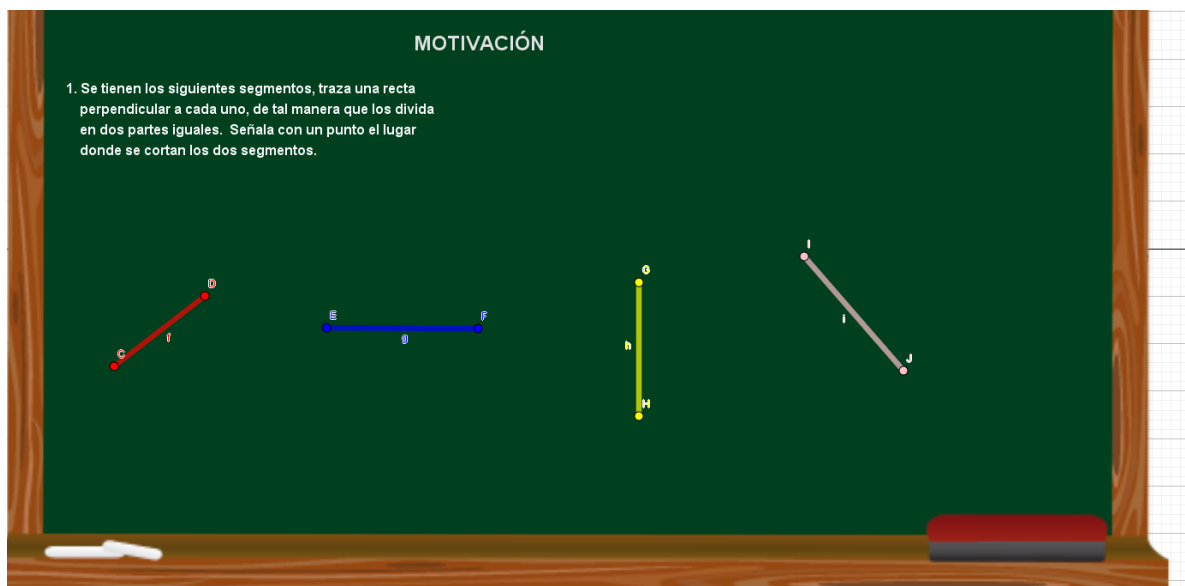


Figura 10 Aplet 2 fase de motivación

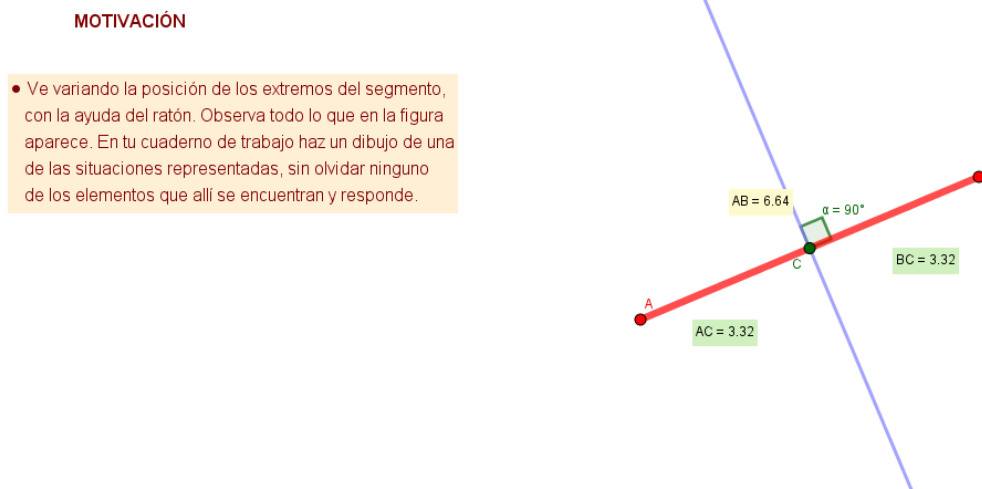
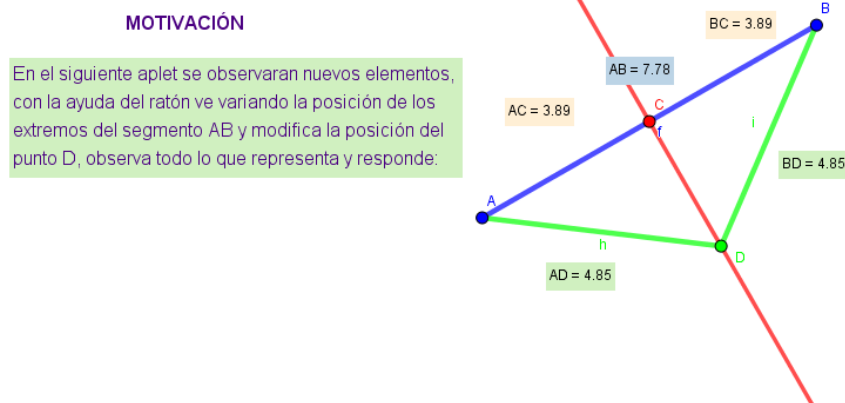


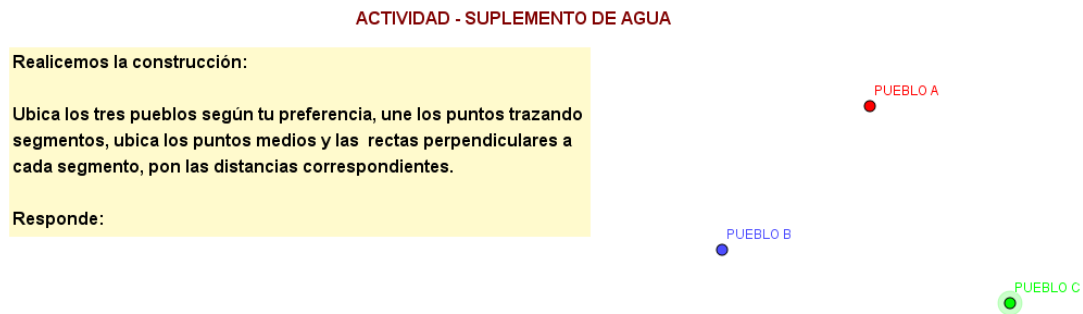
Figura 11 Aplet 3 fase de motivación



Fase 2: Durante clase

Al abrir el aplet se veía un enunciado que permitía relacionar la actividad en términos geométricos con una situación en contexto denominada el problema de los tres pueblos. En esta actividad los estudiantes interactuaban con la medida existente entre punto y punto buscando que se coincidiera en medidas y que se utilizara para ello la propiedad geométrica de mediatriz

Figura 12 Aplet fase durante clase



Fase 3: Actividad reto

En la fase de la actividad reto la experimentación era clave para relacionar lo aprendido en las dos facetas anteriores y lo establecido con un mito muy común en el contexto cultural como el triángulo de las bermudas. La actividad al igual que lo mostrado durante clase pedía que el estudiante experimentara alrededor de lo presentado en el aplet, midiera y contrastara con los comandos de circunferencia y demás el área de naufragio que coincidentemente podía resolverse con la propiedad de mediatriz. El aplet se muestra a continuación

Figura 13 Aplet fase de Actividad reto

El misterio del triángulo de las Bermudas

El Triángulo de las Bermudas es una zona ubicada en el océano Atlántico Miami (U.S.A), Puerto Rico y las Bahamas, tiene forma de triángulo equilátero. Al unir estos tres puntos con una línea imaginaria se forma un triángulo de unos 1600 a 1800 km de lado, y una superficie de 1,1 millones de km² aproximadamente la superficie de Colombia. El término fue creado en 1953 por varios escritores que publicaron artículos en revistas acerca de la presunta peligrosidad de la zona. Sin embargo, el área circundante, ya era conocida por sus numerosos naufragios hasta el punto de ser llamada "El cementerio del Atlántico". El sitio queda a la misma distancia de los tres puntos.



- FLORIDA
- PUERTORICO
- BAHAMAS

6. Referencias

- Bunge, M. (1965). *Intuición y ciencia*. Buenos Aires: EUDEBA.
- Cervantes, J., Ordoñez, J. M., & Armando. (2020). Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) *Innovación Educativa*. México, ISSN: 1665-2673 vol. 20, número 82, 83-103. Recuperado el 2020, de https://www.researchgate.net/publication/339627964_Los-argumentos-de-estudiantes-universitarios-en-la-solucion-de-problemas-sobre-ecuaciones-diferenciales-ordinarias-EDO
- Conner, A. (2008). Expanded Toulmin diagrams: A tool for investigating complex activity in classrooms. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 32 and the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XXX* (Vol 2, pp. 361–368). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH
- Crespo, C. (2011). *Acerca de la lógica de la construcción del conocimiento matemático*. Recuperado el 2020, de <http://funes.uniandes.edu.co/4868/1/CrespoAcercaALME2011.pdf>
- Eco, U. (1983). Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction. In U. Eco & T. Sebeok (Eds.), *The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce* (pp. 198–220). Bloomington, IN: Indiana University Press
- González, M., & García, M. (2020). *Lengua castellana y Literatura 2º ESO*. Madrid: Editiex.
- Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años.

- Jiménez, M. J., Medrano, J. L., García, C. G., Peñas, A. M., & Ruiz, F. A. (2020). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II 2º*. Editex.
- Jiménez, M. J., Medrano, J. L., García, C. G., Peñas, A. M., & Ruiz, F. A. (2020). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II 2º*.
- Lucero, S. (2005). Descubrimiento e inferencia a la mejor explicación. G. Klimovsky (Ed.), *Los enigmas del descubrimiento científico*. (81-97). Buenos Aires: Alianza.
- Márquez, N. E. (2019). *Razonamiento Lógico Matemático para la toma de decisiones*. México D.F.: Universidad Autónoma Nacional de México.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de casos: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*. (5), 165-193
- Martínez, C. C., Arzac, . M., & Aceña, . L. (2020). *Lengua castellana y Literatura II 2º Bachillerato*. Editex.
- Mendo, L., Castañeda, A., & Tarifa, L. (2017). El desarrollo de argumentos matemáticos en estudiantes universitarios. *Atenas, Cuba*, vol. 3, núm. 39. Recuperado el 2020, de <https://www.redalyc.org/jatsRepo/4780/478055149001/478055149001.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, 76(3), 281-303.
- Peirce, C. (1878). Deducción, inducción e hipótesis. Recuperado el 2020, de <https://www.unav.es/gep/DeducInducHipotesis.html>
- Peirce, C. S. (1931–1935). *Collected Papers (CP)* (Vol. 1–6 edited by Charles Hartshorne & Paul Weiss; Vol. 7–8 edited by Arthur Burks). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pierce, C. S. (1956). Sixth paper: Deduction, induction, and hypothesis. En M. R. Cohen (Ed.), *Chance, Love, and Logic: Philosophical Essays* (pp. 131-153). Nueva York, NY: G. Braziller (Original publicado en 1878).
- Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction. In *Proceedings of the CERME 3 international conference* (pp. 1-10).

- Rodríguez, R. (2005). Abducción en el contexto del descubrimiento científico. *Revista de Filosofía Universidad Costa Rica*. San José, Costa Rica, XLIII Número doble (109/110), 87-97. Recuperado el 2020, de https://www.researchgate.net/publication/237487822_Abduccion_en_el_contexto_del_descubrimiento_cientifico.
- Sáenz-Ludlow, A. Abduction in proving: A deconstruction of the three classical proofs of “The angles in any triangle add 180° ”. En *Semiotics as a Tool for Learning Mathematics*. Brill, 2016. p. 155-179
- Sadornil, D. d., & González, . d. (2020). Orientación educativa y tutoría. Madrid: Sanz y Torres.
- Santibáñez, C. (2020). Emociones, argumentación y argumentos. Perú: Palestra Editores.
- Tarrío, J. M. (2020). Historia de la Filosofía 2º Bachillerato. Madrid: Editex.
- Toulmin, S., Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. Nueva York, NY: Macmillan.
- Trigo, S. (2020). <https://www.revistac2.com/bitacora-digital-y-oportunidades-de-aprendizaje/>.
- Vega, V., Sevilla, Y. O. (2012). Estrategias de intervención con maestros centradas en la construcción de espacios educativos significativos para el desarrollo de competencias matemáticas. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 30 (1), 93-107.
- Zbiek, R., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modeling as a context for deepening students’ understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63 (1), pp. 89-112.
- Zhuang, Y., & Conner, A. (2022). Secondary mathematics teachers’ use of students’ incorrect answers in supporting collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24.