

**MODELO PARA LA EVALUACIÓN DE LA FIABILIDAD DE SISTEMAS
DINÁMICOS REPARABLES DE MÚLTIPLES COMPONENTES**

MARCELA NARVÁEZ VELASCO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y ESTADÍSTICA
INGENIERIA INDUSTRIAL
SANTIAGO DE CALI
2012

**MODELO PARA LA EVALUACIÓN DE LA FIABILIDAD DE SISTEMAS
DINÁMICOS REPARABLES DE MÚLTIPLES COMPONENTES**

Trabajo de grado para optar por el título de:
Ingeniero Industrial

MARCELA NARVÁEZ VELASCO

Director
JUAN CARLOS OSORIO GÓMEZ
MSc. en Ingeniería Industrial

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y ESTADÍSTICA
INGENIERIA INDUSTRIAL
SANTIAGO DE CALI
2012

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del Evaluador

Santiago de Cali, Enero 26 de 2012

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Ante todo, mi agradecimiento a Dios, por derramar su luz en mi conocimiento y dirigir siempre mi trabajo.

A mi familia, Rosario Velasco Rivera, Carlos Narváez Orozco y Marisol Narváez Velasco por su amor, comprensión, consejos y por todos los esfuerzos que han hecho para apoyarme incondicionalmente.

A mi Director de Tesis, Juan Carlos Osorio, por el tiempo dedicado, por su paciencia, su comprensión, su interés y motivación permanente.

Al profesor Oscar Alberto Mejía Echeverri por sus enseñanzas, y sus consejos siempre sabios y acertados.

A Rubén Darío Pérez por su cariño, compañía y colaboración.

Y a todos los familiares, profesores y compañeros que con sus palabras, sus enseñanzas, y su tiempo, permitieron este logro y todos los alcanzados durante estos años.

A todos ellos, muchas gracias.

Marcela Narváez Velasco

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	13
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	15
2. OBJETIVOS.....	19
2.1 Objetivo General.....	19
2.2 Objetivos Específicos.....	19
3. TEORÍA SOBRE LA FIABILIDAD DE SME.....	20
3.1 Sistemas de Múltiples Estados (SME).....	20
3.1.1 Definición de estados de un SME.....	21
3.1.2 Modelo para un componente.....	21
3.1.3 Modelo para un sistema con n componentes.....	22
3.1.4 Función de aceptabilidad.....	22
3.2 Sistemas no reparables.....	23
3.3 Sistemas reparables.....	24
3.3.1 Tipos de mantenimiento.....	25
3.3.2 Grados de restauración	25
3.4 Periodos “uptime” y “downtime”.....	25
3.5 Función de Riesgo $h(t)$	26
3.5.1 Función de tasa de falla $h_a(t)$	28
3.5.2 Función de tasa de reparación $h_b(t)$	28
3.5.3 Funciones características de $h_a(t)$ y $h_b(t)$	28
3.6 Medidas de Fiabilidad.....	30
3.7 Medidas de Sensibilidad.....	30
3.7.1 Medida de Importancia Diferencial MID_{x_i}	32
4.CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO CONTINUO.....	33
4.1 Propiedad markoviana.....	35
4.2 Descripción de una Cadena de Markov de Tiempo Continuo (CMTC).....	35
4.3 Definición de una CMTC.....	36
4.3.1 Matriz de tasas de transición.....	37
4.4 Construcción de una CMTC.....	37
4.5 Ecuaciones de Estado.....	38
4.5.1 Probabilidades en el Límite.....	39
4.6 CMTC Homogéneas.....	39
4.6.1 Definición de CMTC-H.....	39
4.6.2 Consideraciones sobre las CMTC-H.....	40
4.7 Representación gráfica de una CMTC.....	40
4.8 Solución numérica de un CMTC.....	41
4.8.1 Método de Jensen.....	43
4.8.2 Método de Bukowski.....	43

4.8.3 Estimación de límites por intervalos	44
4.8.4 Aproximación por pasos	44
4.8.5 Métodos numéricos	45
4.9 Limitaciones sobre la solución numérica de una CMTC-NH	45
5. CMTC-NH PARA LA MODELACIÓN DE LA FIABILIDAD DE SME	47
5.1 Modelo general	48
5.1.1 Matriz de tasas de transición	48
5.2 Sistemas reparables	49
5.3 Medidas de fiabilidad	49
5.4 Software de fiabilidad	49
6. MODELOS DE DINÁMICA DE SISTEMAS	51
6.1 Caracterización de la Dinámica de Sistemas (DS)	52
6.2 Modelación de Dinámica de Sistemas	53
6.2.1 Objetivos de la modelación de DS	53
6.3 Modelos de Dinámica de Sistemas (DS)	55
6.3.1 Diagramas Causales	55
6.3.1.1 Definición formal de un Diagrama Causal	55
6.3.2 Diagramas de Forrester	56
6.3.2.1 Definición formal de un Diagrama de Forrester	57
6.3.3 Representación matemática	58
6.3.3.1 Ecuación de nivel	58
6.3.3.2 Ecuación de flujo	59
6.3.3.3 Dominio del tiempo	59
6.4 Patrones de comportamiento de un MDS	60
6.5 Simulación de un MDS	61
6.5.1 Métodos de solución	61
6.5.1.1 Error y TIME STEP	63
6.5.1.2 Selección de método de integración	63
6.5.2 Funciones y herramientas de análisis	64
6.5.2.1 Funciones “Lookup”	64
6.5.2.2 Demoras “Delay”	65
6.5.2.3 Análisis de sensibilidad	66
7. MODELO DE DINÁMICA DE SISTEMAS EQUIVALENTE	67
7.1 La DS y los MM	69
7.1.1 Diferencias	69
7.1.2 Similitudes	72
7.1.2.1 Propiedad markoviana en los MDS	73
7.2 Equivalencia entre un MDS y una CMTC	75
7.3 Proceso de construcción de un MDSE	78
7.4 Ejemplo y validación de un MDSE	80
7.5 Ventajas de los MDSE	84
7.6 Desventajas	85

7.7 Cuando emplear un MDSE.....	85
7.8 Aplicación en la Evaluación de la Fiabilidad.....	86
8.MDSE PARA UNA CELDA DE MANUFACTURA FLEXIBLE.....	87
8.1 Sistema de estudio. Celda de Manufactura Flexible.....	88
8.1.1 Caracterización de una CMF.....	89
8.1.1.1 Supuestos sobre el modo de operación.....	89
8.1.1.2 Modelos de SME para una CMF.....	90
8.1.1.3 Función de aceptabilidad.....	91
8.1.1.4 Transiciones de falla de una CMF.....	92
8.1.1.5 Transiciones de reparación de una CMF.....	94
8.1.1.6 Parámetros para los componentes de un CMF.....	94
8.2 CMTC-NH para una CMF.....	95
8.3 MDSE para una CMF.....	99
8.4 Análisis de Fiabilidad de una CMF a través su MDSE.....	99
8.4.1 Parámetros de simulación del MDSE.....	99
8.4.2 Resultados obtenidos con el MDSE.....	100
8.4.2.2 Disponibilidad instantánea $A(t)$	101
8.4.2.3 Función de fiabilidad $R(t)$	101
8.4.2.4 Coeficiente de disponibilidad estacionaria AS	101
8.4.2.5 Tiempo medio hasta la falla $MTTF$	103
8.4.2.6 Rendimiento esperado $RE(t)$	103
8.4.2.7 Rendimiento esperado acumulado $OE(t)$	104
8.4.2.8 Rendimiento esperado ponderado promedio LWE	104
8.4.2.9 Tasa de falla con curva en forma de bañera.....	106
8.4.2.10 Tiempo hasta la reparación con distribución log- logística.....	106
8.4.2.11 Tasa de falla por partes constantes.....	108
8.4.2.12 Análisis de sensibilidad.....	109
8.5 Ventajas y desventajas de los MDSE en el análisis de fiabilidad de SME...111	
9. CONCLUSIONES.....	112
10. ANEXO1.....	115
11. BIBLIOGRAFIA.....	120

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1. Proceso de funcionamiento y falla de un SME.....	24
Figura 3.2. Comportamiento de un SME reparable.....	24
Figura 3.3. Curva de una función de riesgo en forma de bañera.....	29
Figura 3.4. Ejemplo de una función de escala $\alpha(t)$	30
Figura 4.1 Clasificación de los MM.....	33
Figura 4.2 Definición de los elementos de una CMTC.....	38
Figura 5.1. Diagrama de Transición típico para un SME reparable.....	49
Figura 6.1. Etapas del proceso de modelación de Dinámica de Sistemas.....	54
Figura 6.2. Secuencia de cómputo en un software de DS.....	61
Figura 6.3. Aproximación en el método de Euler.....	62
Figura 7.1. Sección de un MDSE correspondiente al estado j de la CMTC.....	77
Figura 7.2. Sección del Diagrama Causal asociado a un MDS.....	77
Figura 7.3. Sección de un Diagrama de Transición correspondiente al estado j	78
Figura 7.4. Diagrama de Transición para una CMTC-NH de dos estados.....	81
Figura 7.5. Diagrama de Forrester de un MDSE para la CMTC-NH de la Figura 7.4.....	81
Figura 7.6. Probabilidad de estado para la CMTC-NH de la Figura 7.4.....	82
Figura 8.1 Sistema de estudio. Celda de Manufactura Flexible.....	88
Figura 8.2. Sección inicial Diagrama de Transición para la CMTC-NH de una CMF.....	96
Figura 8.3. Sección intermedia Diagrama de Transición para CMTC-NH de una CMF.....	96
Figura 8.4. Sección final Diagrama de Transición para la CMTC-NH de una CMF.....	97
Figura 8.6. Sección inicial del MDSE para la CMTC-NH de una CMF.....	97
Figura 8.7. Sección intermedia del MDSE para la CMTC-NH de una CMF ($j=1,2,3$).....	98
Figura 8.8. Sección final del MDSE para la CMTC-NH de una CMF.....	98
Figura 8.8. $USP(t, \chi^*)$ para una CMF.....	102
Figura 8.9. $A(t)$ para una CMF.....	102
Figura 8.10. $R(t)$	102
Figura 8.12. $MTTF$	102
Figura 8.13 $RE(t)$	102
Figura 8.14. $\Pr\{X(t) \in \chi^i\}$	102
Figura 8.11. MDS para estimar $MTTF$	103
Figura 8.17. Diagrama de Forrester para el cálculo de $LWE[U(t)]$	105
Figura 8.15 $OE(t)$	105
Figura 8.16. $U(t)$	105
Figura 8.18. $LWE[U(t)]$	105
Figura 8.19. $h(t)$ con curva en forma de bañera.....	107
Figura 8.20 $A(t)$ con $\lambda_1(t)$ en forma de curva de bañera.....	107
Figura 8.21. $\mu_1(t)$ asociada a una distribución loglogística.....	107
Figura 8.22. $A(t)$ con $\mu_1(t)$ asociada a una distribución log logística.....	107
Figura 8.23. $\lambda_1(t)$ por partes constantes.....	107
Figura 8.24. $R(t)$ con $\lambda_1(t)$ por partes constantes.....	107
Figura 8.25. Análisis de sensibilidad sobre $USP(t, \chi^*)$	109
Figura 8.26. Medidas de importancia diferencial para $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$	110

Figura 8.28. Intervalos de confianza para $A(t)$ cuando $\lambda_1(t)$ es variable.....	110
Figura 8.28. Intervalos de confianza para $A(t)$ cuando $\lambda_2(t)$ es variable.....	110
Figura 10.1. Diagrama de flujo de operación de una CMF.....	118
Figura 10.2. Pasos en el diagrama de operación de una CMF.....	119

LISTA DE TABLA

Tabla 3.1. Medidas de fiabilidad para un SME.....	31
Tabla 6.1. Representación simbólica e interpretación en un Diagrama Causal.....	56
Tabla 6.2. Variables en un Diagrama de Forrester.....	57
Tabla 6.3. Bucles de retroalimentación.....	60
Tabla 7.1. Comparación de resultados numéricos entre la solución analítica y pos medio del MDSE de una CMTC-NH.....	83
Tabla 8.1. Estados posibles para los componentes de una CMF.....	90
Tabla 8.2. Estados para el sistema de una CMF.....	91
Tabla 8.3. Transacciones de falla para el modelo de una CMF.....	93
Tabla 8.4. Transacciones de reparación para el modelo de una CMF.....	94
Tabla 8.5. Parámetros de operación de una CMF.....	95

INTRODUCCIÓN

Es claro que la sociedad moderna depende cada vez más de un conjunto de estructuras artificiales que le permiten el desarrollo de sus actividades. Tales estructuras van desde las redes de distribución de transporte y sistemas de manufactura, hasta productos básicos de consumo, los cuales se espera, desempeñen la función para la que fueron construidas o fabricadas (Liu y Kapur, 2008).

Este tipo de estructuras son identificadas como sistemas. Formalmente, Misra (2008c) define un sistema como una agregación de partes de cualquier tipo conectados mediante alguna forma de interacción para formar un todo complejo y unitario. Dicha agregación es establecida con el fin de garantizar una utilidad deseada en un horizonte de tiempo dado.

Sin embargo, los tipos de componentes, sus cualidades y la manera en que se organizan dentro del sistema tienen un efecto directo sobre su funcionalidad (Distefano y Puliafito, 2007). Como lo señalan Levitin y Lisnianski (2001) esta complejidad se traduce en la capacidad del sistema de realizar sus tareas a niveles diferentes de desempeño, así, cuando el sistema no responde a un indicador de rendimiento definido, se considera incapaz de realizar su función y por tanto ha fallado en su objetivo.

Para Liu y Kapur (2008) esta oportunidad que tiene el sistema de operar en diferentes condiciones mientras se degrada y restaura, genera un conjunto de estados en los que puede desempeñarse, de ahí, que los sistemas con esta cualidad sean conocidos en la literatura como Sistemas de Múltiples Estados (SME). Soro et al. (2010) explican esta característica a razón de los efectos del deterioro de los componentes y los cambios en las condiciones ambientales que pueden conducir a fallas parciales del sistema.

Ahora bien, de acuerdo a Misra (2008b) el atributo más representativo para medir dichos niveles de rendimiento es la fiabilidad. Tradicionalmente, este atributo es definido como la habilidad del sistema de realizar su función requerida bajo condiciones determinadas. Verma et al. (2010) señalan cuatro elementos fundamentales contenidos en esta definición:

- Posibilidad. Expresada cuantitativamente, y referida a la probabilidad de que el sistema o el componente trabaje apropiadamente.
- Función requerida o demanda. Criterio versus el cual se mide la fiabilidad e indica un nivel mínimo requerido de rendimiento.
- Periodo de tiempo. Intervalo de tiempo de operación que es de interés; y
- Condiciones de operación. Estados o modos de funcionamiento.

En la práctica, identificar este tipo de elementos se ha vuelto parte fundamental en todas las etapas de diseño y operación de un sistema. Como lo justifican Liu y Kapur (2008), el aumento en las exigencias de los productos y los servicios requiere reducir sus probabilidades de falla y los efectos de la misma en caso de que ocurra. En dicha necesidad reside la importancia creciente dada a los análisis de fiabilidad de sistemas. En general, un análisis de fiabilidad consiste en la construcción de un modelo que representa las

condiciones de operación y permite evaluar medidas probabilísticas y de rendimiento considerados críticos (Distefano, 2009).

Lo anterior explica que durante los últimos años se hayan propuesto diferentes métodos y técnicas para la evaluación de la fiabilidad. Tal como se señala Dhillon (2005), el uso de cualquiera de estos métodos depende de varios factores, entre ellos, el tipo de sistema y las medidas de rendimiento que interesa evaluar. Sin embargo, a pesar de su desarrollo, cada una de estas técnicas tiene sus propias ventajas y desventajas, de ahí el constante interés por proponer nuevos modelos que respondan antes dichas limitaciones.

La presente investigación se propone desarrollar un modelo para la evaluación de la fiabilidad de SME reparables, que supere algunas de las restricciones fundamentales de los métodos actualmente empleados. Con este objetivo, el trabajo se organiza como sigue:

En el primer capítulo se presentan los métodos actuales empleados para la evaluación de la fiabilidad, identificando las restricciones y limitaciones que justifican la necesidad de proponer nuevos modelos bien desarrollados, y a partir de las cuales se plantean los objetivos de la presente investigación en el capítulo dos.

En el capítulo tres, se describen los conceptos fundamentales sobre la fiabilidad de SME, con especial atención sobre las medidas probabilísticas de operación, de rendimiento y de sensibilidad. El cuarto capítulo desarrolla la teoría de un modelo de estado-transición regularmente empleado en los análisis de fiabilidad. Debido a su complejidad teórica se presentan principalmente los conceptos básicos para su aplicación en el análisis de fiabilidad, la cual es especificada en el capítulo siguiente.

Por su parte, el capítulo seis se concentra en una metodología aparentemente aislada del campo de la fiabilidad. Sin embargo, ésta constituye, junto con el modelo descrito previamente, la base de la formulación del enfoque propuesto en el capítulo siete. Aunque algunas de las características del enfoque son validadas sobre un sistema a pequeña escala, en el capítulo ocho, la propuesta es aplicada para la modelación de la fiabilidad de un sistema de manufactura complejo, a partir de lo cual se ejemplifican las consideraciones relativas al enfoque.

Para terminar, en el último capítulo se presentan las conclusiones relevantes obtenidas durante toda la investigación. Se reconocen y resumen las ventajas y desventajas del modelo propuesto, y con base en sus potencialidades, se identifican oportunidades de aplicación y desarrollo en el campo de la fiabilidad.

Se espera que el trabajo aquí presentado signifique un aporte formal para el ejercicio de la Ingeniería Industrial, específicamente en las actividades de modelación y análisis de sistemas. Así, aunque el enfoque propuesto surge en la necesidad de desarrollar nuevos modelos para la evaluación de la fiabilidad, debería ser extendido y validado a otros problemas de ingeniería de mayor o de menor complejidad, en los cuales se espera tendrá las mismas ventajas aquí identificadas.

1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El aumento en la complejidad de los sistemas y la imperiosa necesidad de garantizar su rendimiento, han valido la importancia dada a los análisis de fiabilidad. Su objetivo es estimar la probabilidad de falla del sistema, con base en las características y relaciones entre sus componentes y otros parámetros de interés (Distefano y Puliafito, 2007).

Distefano (2009) señala dos enfoques básicos para realizar esta tarea. El primero, la medición experimental, consiste en realizar pruebas de vida en las que se recopilan datos empíricos del tiempo de operación del sistema hasta la falla. En este caso, el índice de fiabilidad es el porcentaje de sistemas que se han sometido a la prueba y no han fallado hasta un instante de tiempo determinado. No obstante, hacer dicha prueba resulta complicado y costoso, sino imposible, en la mayoría de los problemas reales, y es necesario el empleo de otro tipo de técnicas (Ajah, et al., 2006).

El segundo enfoque, consiste en la construcción de un modelo del sistema. Como cualquier modelo en una disciplina, éste equivale a una representación abstracta, matemática o gráfica, de las características que determinan la fiabilidad con el fin de estimar ciertas medidas y realizar análisis cuantitativos de interés (Pukite y Pukite, 1998).

Como lo señalan Kuo y Zuo (2003), en años recientes numerosos modelos estadísticos y probabilísticos de este tipo se han desarrollado. Aunque la elección de uno de ellos depende de los objetivos de análisis, los requerimientos de información no son muy diferentes entre ellos. Al respecto, Misra (2008a) señala la necesidad de una caracterización completa del sistema en relación a su estructura y modos de operación, falla y reparación.

Cuando estas características del sistema son definidas, le sigue la selección del modelo a emplear. Esta tarea es igual de importante que la conceptualización misma del sistema, y puede requerir igual o mayor esfuerzo debido a la amplitud de alternativas disponibles y desarrolladas en la literatura.

La primera consideración se refiere a la estructura del sistema en términos del número, tipo y configuración de sus componentes. Aquí, se presentan algunos problemas. La mayoría de los modelos de fiabilidad asumen componentes y sistemas binarios, e ignoran la posibilidad que tienen de realizar su función a diferentes niveles de rendimiento (Liu y Kapur, 2008). Como lo resaltan Levitin y Lisnianski (2001), los problemas de fiabilidad reales requieren considerar un gran número de condiciones de operación, que resultan de los diferentes modos de falla y reparación del sistema y de la relación funcional entre sus componentes.

Los sistemas con esta característica se deben tratar como SME, y las técnicas para su modelación deben ser capaces de tratar con su complejidad estructural y dinámica. Desde la ingeniería de fiabilidad se han desarrollado diferentes enfoques para tratar estos problemas.

Wang y Billinton (2002) dividen dichos enfoques en dos categorías, las técnicas analíticas y las de simulación. Así mismo, agrupa las primeras en dos clases, los modelos

combinatorios y los modelos de estado-transición. De acuerdo a Distefano (2009) en un modelo combinatorio se enumeran todas las formas en que el sistema puede seguir funcionando, mediante una función de estructura que traduce las relaciones entre los eventos indeseados o de falla que puede presentar el sistema. En esta categoría los modelos más empleados son los Diagramas de Bloques de Fiabilidad y los Árboles de Falla.

Los Diagramas de Bloques de Fiabilidad son la forma más común y básica. Consisten en la representación gráfica de las conexiones de los componentes, a partir de las cuales se establecen las relaciones lógicas de operación (Cheol Kim, 2011). Por su parte los Árboles de Falla son una técnica deductiva en la que se considera un evento indeseable, y todas las posibles combinaciones de eventos básicos de falla que conducen a él (Verma et al., 2010).

Respecto a los modelos de estado-transición, se tienen Modelos Markovianos (MM), los procesos de Poisson, las Redes de Petri y sus variantes. Entre ellos, los MM son los más empleados en los estudios de fiabilidad (Distefano, 2009). De acuerdo con Rausand y Hoyland (2004), a pesar de su supuesto básico según el cual la condición futura del sistema solo depende del estado actual y no de lo que ha pasado previamente, su flexibilidad ha permitido la aplicación en diferentes tipos de problemas, que incluyen desde el solo cálculo de medidas de rendimiento, hasta el análisis de estrategias de mantenimiento en sistemas de distribución, generación de energía, de manufactura, entre otros.

Por último, el enfoque de simulación se basa en representar el proceso real y el comportamiento aleatorio del sistema como un diagrama de flujo donde se recrean sus posibles escenarios. En general, estos métodos tratan el problema como una serie de experimentos soportados por computador, y el sistema es evaluado en términos del número de veces que ocurre el evento de interés. La simulación Monte Carlo es la técnica más representativa de este tipo (Verma et al., 2010).

A pesar de esta variedad de técnicas, la modelación de la fiabilidad se encuentra con otros problemas. Por un lado, en los sistemas reales su dinámica depende de la de sus componentes, así, el modelo empleado debería ser capaz de incorporar las interdependencias entre ellos. Por otro, el tiempo y los recursos para resolverlos deberían ser adecuados y permitir su uso eficiente en la práctica (Pukite y Pukite, 1998).

Pese a esto, las técnicas no pueden responder completamente a estas exigencias. A pesar de ser los más conocidos y fáciles de emplear, los modelos combinatorios solo consideran sistemas binarios no reparables, en los que su operación o falla es independiente del resto del sistema (Rausand y Hoyland, 2004). Para Verma et al. (2010), aunque su éxito se debe a la facilidad de verificación visual, estos modelos se limitan a una representación estática del sistema, inútiles en objetivos como la predicción de la fiabilidad.

Algunas de estas restricciones son superadas por los métodos de estado-transición. Los MM permiten describir tanto los eventos de falla como los de reparación, y encontrar la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado dado, en función del de sus

componentes, permitiendo considerar estados de operación degradados con niveles de rendimiento intermedios (Fuqua, 2002).

A pesar de ser aptos para SME con dinámica variable en el tiempo, para Lisnianski (2007), el principal problema de los MM se relaciona con su dimensión. Primero, porque no existe algún proceso formalizado para identificar todo el conjunto de estados y transiciones posibles del sistema, y segundo, porque resolverlos numéricamente puede ser costoso en términos del tiempo y de los recursos computacionales necesarios para hacerlo.

De hecho, Kumar y Jackson (2009) señalan que la utilidad de los MM parece limitarse a sistemas de tamaño relativamente pequeño que contienen entre 10 y 15 componentes. Sin embargo, Misra (2008a) llama la atención en que el desarrollo actual de las herramientas computacionales cada vez de mayor capacidad supera esta dificultad, o en su defecto, es posible emplear técnicas de descomposición del sistema en problemas de tamaño más manejable o combinar el método con otras técnicas de solución.

Entre estos modelos, el más empleado se basa en el supuesto en que las tasas de transición son funciones constantes del tiempo. De acuerdo a Ermolin (2007) el problema radica en que pocos sistemas experimentan exclusivamente tasas de falla y de reparación con este comportamiento. Los sistemas tienden a envejecer como efecto de su operación y de la variación en las condiciones ambientales, mientras que las actividades de reparación también dependen de factores como la disponibilidad de los recursos de mantenimiento, e incluso del instante en que efectivamente ocurre la falla (Wang y Billinton, 2002).

Estas características hacen que sea necesario incluir variaciones en las tendencias de falla y reparación del sistema en función del tiempo global del proceso, lo que implica el empleo de MM no homogéneos (Kumar y Jackson, 2009). En comparación con los modelos homogéneos, los ejemplos que tratan con este caso no son igual de comunes. A excepción de Rolski et al. (1999) y Han et al. (2008), la literatura sobre la teoría de estos procesos implica formulaciones matemáticas complejas y de difícil comprensión, por lo tanto, no es extraño que en realidad pocos trabajos como los de Platis et al. (1998), Sun y Han (2001), Wang y Billinton (2002), Liu et al. (2007), Lisnianski et al. (2008a), Lisnianski et al. (2008b) lo apliquen para la evaluación de la fiabilidad.

Una complicación adicional en la aplicación de MM no homogéneos es su dificultad de solución. Al incluir factores variables en el tiempo, obtener soluciones analíticas o de forma cerrada es complicado, sino imposible (Zhang y Horigome, 2001). Para estos casos se han propuesto algunas técnicas como los métodos de solución analítica por partes o de solución numérica directa. Para Stewart (2009), entre estos, los más eficientes gracias a su flexibilidad son los métodos de integración numérica. Aunque también señala algunas implicaciones respecto a su eficiencia y nivel de precisión.

Frente a esto, Retterath (2004) señala que la simulación Monte Carlo es el método más recomendado para tratar con tendencias de falla y reparación variables. Sin embargo, su aplicación requiere recopilar una gran cantidad de datos, y establecer todas las

combinaciones de eventos que definen el comportamiento del sistema. Además, la precisión de las estimaciones depende del número de experimentos corridos para cada escenario. De hecho, Kumar y Jackson (2009) estimaron que para alcanzar una precisión de 5 a 6 decimales con el método Monte Carlo, se deben realizar por lo menos 10000 replicas por cada escenario. Estas consideraciones se traducen en tiempo de cálculo y memoria computacional excesivos.

Una limitación adicional, es la imposibilidad de permitir análisis de sensibilidad. La mayoría de las medidas de importancia de los componentes están formuladas para sistemas estáticos, mientras que las medidas extendidas para sistemas dinámicos requieren el cálculo de las medidas de rendimiento variando cada parámetro de interés y en simultanea (Do Van et al., 2008). Tarea que puede ser tediosa cuando se emplean técnicas de modelación complejas.

Todas estas dificultades explican la necesidad de desarrollar métodos para la evaluación de la fiabilidad que resulten adecuados y útiles en la práctica. Esta necesidad también fue claramente identificada por Srinivasa Rao y Naikan (2009). De acuerdo con estos autores las técnicas analíticas son muy complicadas y poco realistas para los sistemas modernos debido a su excesiva simplificación, mientras que las técnicas de simulación tradicionales pueden ser poco prácticas, y aun más complicadas que las anteriores. Estas consideraciones los llevaron a sugerir un enfoque que integra ambas formas de modelación y que llamaron Dinámica de Sistemas Markoviana (DSM).

De acuerdo Srinivasa Rao y Naikan (2009) un modelo de DSM combina los MM con el enfoque de Dinámica de Sistemas (DS), al permitir que dicho proceso estocástico sea representado por un Modelo de Dinámica de Sistemas (MDS). Aunque el enfoque se muestra prometedor, Srinivasa Rao y Naikan (2009) no validan ni conceptual ni teóricamente su propuesta. Además de este vacío, en la DSM el modelo es restringido a MM homogéneos, y su ejemplo de aplicación consiste de un sistema de suprema simplicidad con tan solo dos estados de operación.

A pesar de las faltas en su trabajo, la propuesta de Srinivasa Rao y Naikan (2009) presenta los indicios de una metodología, que bien formulada puede efectivamente ser una técnica eficaz en los análisis de fiabilidad. De ahí los objetivos del presente trabajo.

Con el fin de presentar un desarrollo formal de la relación entre los MM y la DS, se estudia la teoría y las consideraciones prácticas relativas a cada enfoque. Esto permite el desarrollo de una equivalencia matemática entre los MM y los MDS, que a su vez conduce a la construcción de un Modelo de Dinámica de Sistemas Equivalente (MDSE) que puede ser empleado para la evaluación de la fiabilidad de SME reparables. Los siguientes capítulos por tanto, introducen los argumentos para dicho modelo, y su utilidad es validada en un sistema de relativa complejidad en términos de sus ventajas, desventajas y potencialidades de aplicación.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo General

Formular un modelo para la evaluación de la fiabilidad que permita analizar sistemas dinámicos reparables de múltiples componentes usando Dinámica de Sistemas.

2.2. Objetivos Específicos

1. Identificar los conceptos fundamentales de los modelos de fiabilidad y de la Dinámica de Sistemas para establecer sus relaciones a través de un Proceso Markoviano de Tiempo Continuo.
2. Construir un modelo de Dinámica de Sistemas equivalente a un Proceso Markoviano de Tiempo Continuo que permita representar las probabilidades de estado de un sistema reparable con múltiples elementos.
3. Aplicar el modelo desarrollado en un sistema prototipo, con el fin de analizar y validar sus resultados.

3. TEORÍA SOBRE LA FIABILIDAD DE SME

Desde el punto de vista de la fiabilidad y tal como lo indican Lisnianski et al. (2010), todos los sistemas son diseñados para realizar sus funciones previstas en un medio determinado. Sin embargo, dependiendo de tales condiciones y de su diseño, el sistema puede realizar sus tareas a niveles diferentes de eficiencia, a cada uno de los cuales se le asocia una tasa de rendimiento conocida. En general, en la medida que aumenta la complejidad estructural del sistema, mayor es el tamaño del conjunto de condiciones de operación a los cuales corresponden niveles de eficiencia diferentes (Xie et al., 2004).

Como se ha dicho, los sistemas están conformados por diversos componentes, cada uno de ellos representando un subsistema, que como tal, puede también realizar funciones en diferentes condiciones de operación. Esto, más las diferentes formas en que el sistema puede fallar y ser reparado, tienen un efecto directo sobre su desempeño (Lisnianski, 2007). Lisnianski et al. (2010) denominan los sistemas con estas características como Sistemas de Múltiples Estados (SME), para los cuales un estado corresponde a una condición de operación. Así, un sistema binario es el caso más simple de SME, al tener solo dos estados de operación diferentes y extremos: funcionamiento perfecto y falla completa.

Sin embargo, los sistemas con múltiples componentes regularmente corresponden al caso general de SME donde se deben formular estados de operación intermedios. De acuerdo con Liu y Huang (2010), estos estados resultan de la degradación y de la reparación de algunos componentes que generan condiciones de operación a tasas de rendimiento reducidas sin dar lugar a la falla completa.

Con estas propiedades, la evaluación de la fiabilidad en el marco de SME se vuelve más complicada en comparación con la de los sistemas binarios para los cuales la teoría está ampliamente desarrollada (Liu y Huang, 2010). A pesar de ello, el enfoque binario no es adecuado cuando se trata con SME, puesto que implica la sobre simplificación del sistema y no permite análisis respecto al rango de niveles de rendimiento necesarios en la práctica (Soro et al., 2010).

En las siguientes secciones se presentan los conceptos fundamentales sobre la fiabilidad de SME. Se presta gran importancia a las medidas de fiabilidad, entre las que se incluyen índices probabilísticos tanto de rendimiento como de sensibilidad. Las consideraciones presentadas aquí son esenciales para las descritas en el capítulo cinco y los que le siguen.

3.1 Sistemas de Múltiples Estados (SME)

Xie et al. (2004) señalan dos condiciones bajo las cuales un sistema se debe tratar como un SME:

- i. El sistema tiene componentes diferentes, cada uno con un conjunto de condiciones de operación como resultado de su deterioro o a causa de los cambios en las condiciones ambientales.

- ii. Los modos de operación de los componentes tienen un efecto acumulativo sobre el rendimiento del sistema entero.

3.1.1 Definición de estados de un SME

De acuerdo con Liu y Kapur (2008), si y_j es una característica de interés relacionada con el desempeño de un componente j , y y_{j0} un valor ideal o deseado de y_j , para un componente binario sus condiciones de operación se pueden clasificar de acuerdo a dicho nivel de desempeño, conformando dos estados diferentes. Así, las condiciones de operación para las cuales se cumple que $y_{j0} - \Delta_{j0} \leq y_j \leq y_{j0} + \Delta_{j0}$, son consideradas estados de operación, y en caso contrario, se tratan como estados de falla. Δ_{j0} es definido de forma exógena y establece los límites de un rango característico para los requerimientos de desempeño del sistema.

De este modo, si v_{ji} , $i = 1, \dots, k_j$ representa la i -ésima condición de operación del componente j , entonces, para un sistema binario se tiene que

$$v_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{Si } y_{j0} - \Delta_{j0} \leq y_j \leq y_{j0} + \Delta_{j0} \\ 0 & \text{De lo contrario} \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde 1 es el estado de funcionamiento perfecto, y 0 el de falla completa.

De forma análoga a (3.1), para un componente j con más de dos condiciones de operación, sus estados v_{ji} pueden ser definidos por rangos en su rendimiento como se indica en (3.2).

$$v_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{Si } y_{j0} \leq y_j \leq y_{j1} \\ 1 & \text{Si } y_{j1} \leq y_j \leq y_{j2} \\ 2 & \text{Si } y_{j2} \leq y_j \leq y_{j3} \\ \vdots & \vdots \\ k_j - 1 & \text{Si } y_j \geq y_{k_j} \end{cases} \quad (3.2)$$

Como se verá más adelante, algunas medidas de fiabilidad se interesan en conocer el rendimiento del sistema en términos de su producción, para lo cual es necesario definir una tasa de rendimiento para cada estado. Para efectos del presente trabajo se asume que siempre es posible asignar un valor discreto de rendimiento $g_{jv_{ji}}$ al estado v_{ji} del componente j . Esta definición, es coherente con el desarrollo de Lisnianski et al. (2010) sobre los SME, quienes presentan la formulación que se resume a continuación.

3.1.2 Modelo para un componente

Un componente j de un sistema puede tener k_j condiciones de operación reunidas en el conjunto $\mathbf{x}_j = \{0, \dots, v_{ji}, \dots, k_j - 1\}$. Así, el estado del componente en cualquier instante de

tiempo $t \geq 0$ se puede representar por una variable aleatoria $X_j(t)$ cuya evolución se puede representar por el proceso estocástico $\{X_j(t), t \geq 0\}$.

Debe tenerse claro que $g_{jv_{ji}}$ y v_{ji} tienen significados diferentes. Mientras $g_{jv_{ji}}$ es un valor arbitrario que representa el rendimiento de j en v_{ji} , v_{ji} es un entero que toma valores en el conjunto $\mathfrak{x}_j$.

3.1.3 Modelo para un sistema con n componentes

Generalizando la definición anterior, un SME puede tener K estados diferentes, cada uno de ellos asociado a un nivel de rendimiento g_{v_i} , $v_i \in \mathfrak{X} = \{0 \dots, v_i, \dots, K - 1\}$. Así, el estado del SME en el instante de tiempo t es una variable aleatoria $X(t)$ que toma valores en $\mathfrak{X}$.

Igualmente, g_{v_i} debe diferenciarse de v_i . g_{v_i} es una característica del desempeño o del rendimiento del SME en el estado v_i , cuya determinación es equivalente a la definición (3.2) haciendo $v_i = v_{ji}$, $y_j = y_{SME}$ y $k_j = K$.

Cuando el SME consiste de n componentes, sus estados son determinados a partir de los de sus componentes. Para ello es necesario establecer el conjunto $L^n = \{v_{10}, \dots, v_{1k_1-1}\} \times \dots \times \{v_{j0}, \dots, v_{jk_j-1}\} \times \dots \times \{v_{n0}, \dots, v_{nk_n-1}\}$ que contiene todas las combinaciones posibles de los estados de los componentes, y definir la transformación $\phi(X_1(t), \dots, X_j(t), \dots, X_n(t)): L^n \rightarrow \mathfrak{X}$ que mapea el espacio de los estados de los componentes en el del sistema. Dicha transformación es llamada función de estructura, y permite definir el proceso estocástico que sigue el sistema como $X(t) = \phi(X_1(t), \dots, X_j(t), \dots, X_n(t))$.

Puesto que $\mathfrak{X}$ resulta de la función de estructura del sistema $\phi(\cdot)$, cualquier estado $v_i \in \mathfrak{X}$ se puede definir como un vector $x_i = (x_{1v_i}, \dots, x_{jv_i}, \dots, x_{nv_i})$ donde x_{jv_i} es el estado del j -ésimo componente que genera el estado v_i del SME y $x_{ji} \in \mathfrak{x}_j$.

Así, $\mathfrak{X}$ puede ser tan grande como $K = \prod_{j=1}^n k_j$, de manera que aún para sistemas con pocos componentes (2 o 3), el número de elementos en el espacio de estados puede ser relativamente grande (4 a 6 como mínimo, asumiendo componentes binarios).

3.1.4 Función de aceptabilidad

Con base en la definición de Liu y Kapur (2008) dada en (3.1), Lisnianski et al. (2010) señalan que $\mathfrak{X}$ puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos, $\mathfrak{X}^A$ y $\mathfrak{X}^I$ que contienen respectivamente, los estados aceptables e inaceptables de operación. La falla es entonces definida a partir del instante en que el sistema entra a algún estado $v_i \in \mathfrak{X}^I$.

Ahora bien, la pertenencia de v_i a $\mathfrak{X}^A$ o $\mathfrak{X}^I$ esta dada por función de aceptabilidad $F(X(t))$, la cual toma valores no-negativos si y solo si el nivel de rendimiento es aceptable. $\mathfrak{X}^I$ contiene los estados en que el sistema debe ser reparado para regresar a una condición de operación satisfactoria.

Soro et al. (2010) señalan que la aceptabilidad de un estado puede definirse como una relación entre su tasa de rendimiento real y la de un nivel deseado, denominada tasa de demanda, y determinada de forma exógena al sistema. En general, la tasa de demanda $W(t)$ también puede ser representada por un proceso estocástico que toma valores en el conjunto $\omega = \{w_1, \dots, w_i, \dots, w_m\}$, y la función de aceptabilidad es de la forma $F(X(t), W(t))$. Sin embargo, al ser $W(t)$ un proceso aleatorio, el conjunto $\mathfrak{X}^A$ puede variar a través del tiempo. Sin embargo, en el presente trabajo se define $W(t)$ mediante una función constante w igual al requerimiento en la tasa de desempeño del sistema.

De acuerdo a lo anterior, Xie et al. (2004) resumen los siguientes criterios:

- i. $X(t) \in \mathfrak{X}^A$ si $F(X(t), w) \geq 0$, y
- ii. $X(t) \in \mathfrak{X}^I$ siempre que $F(X(t), w) < 0$.

Normalmente la función de aceptabilidad se define de la forma $F(X(t), w) = g_{X(t)} - w$, tal que el sistema entra en un estado de falla en el instante t cuando no es capaz de suplir su nivel de demanda (Lisnianski et al., 2010).

3.2 Sistemas no reparables

Un SME no reparable corresponde a uno, que durante todo su tiempo de operación T , puede entrar solo una vez a un estado inaceptable de operación. Sin embargo, también es característico de estos sistemas experimentar procesos de degradación y sufrir fallas parciales representadas por transiciones, cambios de estado, hacia condiciones menos aceptables o con menores niveles de rendimiento (Lisnianski et al., 2010).

Así, la degradación de un SME está representada en su transición por estados intermedios de operación. De manera que si $v_K = K - 1$ representa el estado de funcionamiento perfecto, $v_1 = 0$ el estado de falla completa, y se cumple que $g_{v_{i-1}} \leq g_{v_i} \leq g_{v_{i+1}}$ $i = 1, \dots, K - 2$, un sistema no reparable con degradación puede experimentar los estados $1 \leq v_i \leq K - 2$, de forma que $g_{X(t_1)} \geq g_{X(t_2)}$ para $0 \leq t_1 \leq t_2$ (Lisnianski, 2007).

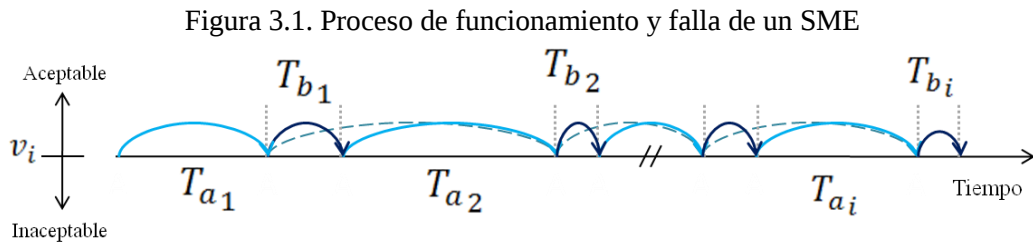
De acuerdo con Xie et al. (2004), un SME puede experimentar dos tipos de fallas. Una falla menor ocurre cuando el sistema pasa de v_i al estado adyacente v_{i-1} que cumple con $g_{v_{i-1}} < g_{v_i}$, siendo la mínima degradación posible. Por su parte, ocurre una falla mayor, cuando pasa de v_i a cualquier estado v_r , $r \neq i$ tal que $g_{v_r} < g_{v_{i-1}} < g_{v_i}$. Este último tipo puede conducir al sistema a una falla total, incluso sin pasar por modos de operación menos deseables.

3.3 Sistemas reparables

Lisnianski et al. (2010) caracterizan un SME reparable, como uno en que son posibles transiciones alternantes entre estados aceptables e inaceptables de rendimiento que pueden ocurrir un número arbitrario de veces.

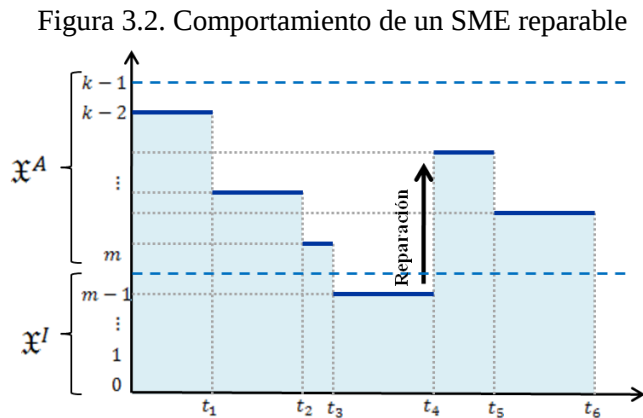
Así, si se observa un sistema reparable durante un periodo de tiempo lo suficientemente grande, es posible guardar una secuencia de etapas consecutivas. Estas consisten en periodos de operación aceptables, seguidos de intervalos de tiempo de ociosidad que transcurren apenas ocurre una falla y en los que se llevan a cabo las actividades de reparación y de mantenimiento necesarias para poner de nuevo el SME en un estado aceptable (Gnedenko y Ushakov, 1995).

Birolini (2007) ilustra este proceso mediante la Figura 3.1, donde T_{a_i} es el tiempo de operación antes de que el SME experimente por i -ésima vez una condición de operación inaceptable, y T_{b_i} es el tiempo de permanencia en dicho estado hasta completar la reparación.



Fuente. Adaptado de Birolini (2007)

De acuerdo con Wang (2004), si los estados del sistema están organizados de forma tal que $\mathfrak{X}^I = \{0, \dots, m-1\}$ y $\mathfrak{X}^A = \{m, \dots, K-1\}$, siendo m un estado límite a partir del cual los estados tienen tasas de rendimiento aceptables, la Figura 3.2 ilustra la posible evolución de un SME reparable.



Fuente. Adaptado de Wang (2004)

Como se muestra, una vez que el sistema cae en un estado inaceptable permanece en él mientras se realiza la reparación, al cabo de la cual hace de nuevo una transición hacia cualquier estado aceptable dependiendo del tipo de mantenimiento efectuado.

3.3.1 Tipos de mantenimiento

Como se dijo, una transición desde un estado a otro con mayor nivel de desempeño, está asociada a actividades de mantenimiento o de reparación. Estas modifican la condición de operación del sistema en diferentes grados a fin de mejorar su rendimiento.

De forma explícita, Rausand y Hoyland (2004) definen el mantenimiento como la combinación de todas las acciones técnicas y administrativas cuya intención es la de garantizar la función requerida del sistema. Según Wang y Pham (2003), dichas acciones pueden tener dos objetivos. Uno, el de controlar el proceso de degradación del sistema; y otro, el de restaurarlo a una condición de operación después de conocida la falla.

De acuerdo a sus objetivos básicos, se pueden identificar dos tipos básicos de mantenimiento: correctivo y preventivo. Para Misra (2008a) el mantenimiento correctivo consiste en las acciones realizadas para restaurar el sistema, que ya ha fallado, a un estado operacional. Para ello se realiza el reemplazo o la reparación de los componentes, o se modifican las condiciones que han causado la falla.

Por su parte, el mantenimiento preventivo comprende las acciones programadas que buscan reducir la posibilidad de falla del sistema, o de prolongar su permanencia en estados de condición aceptables (Wang y Pham, 2003). Estas acciones son llevadas a cabo aún cuando el sistema está en funcionamiento pero se desea mejorar su desempeño y prevenir su falla en el corto y mediano plazo (Liu y Huang, 2010).

De acuerdo con Crespo Márquez (2007) las actividades de mantenimiento preventivo pueden clasificarse en dos categorías. La primera, las que son predeterminadas, y ejecutadas en intervalos de tiempo pre-establecidos sin investigación previa de la condición del sistema; y la segunda, las actividades basadas en la condición, que son realizadas dependiendo del valor de alguna medida del rendimiento del sistema.

3.3.2 Grados de restauración

Además de la clasificación general, tanto el mantenimiento correctivo como el preventivo se pueden clasificar con base en el grado de funcionamiento al que se restaura el sistema. Murthy y Jack (2003) presentan dos clases: reparación “tan bueno como nuevo” y reparación mínima. En el primer caso, el sistema es reparado hasta lograr una condición donde su tasa de rendimiento es igual a la de un sistema nuevo, mientras la reparación mínima, solo realiza el mejoramiento necesario para lograr el mínimo estado aceptable.

Sin embargo, para Soro et al. (2010) el mantenimiento imperfecto, reparación intermedia entre los casos anteriores, se muestra como la opción más realista, al permitir al sistema

oscilar en estados entre el funcionamiento perfecto y la falla, lo cual ocurre cuando se trabaja con sistemas de múltiples componentes, y donde es imposible reemplazarlos por completo para retornar el sistema a la condición de operación inicial.

3.4 Periodos “uptime” y “downtime”

La función de aceptabilidad definida previamente permite dividir $\mathfrak{X}$ en dos subconjuntos disjuntos de estados que se pueden considerar de operación o de falla, según se trate de $\mathfrak{X}^A$ o $\mathfrak{X}^I$. Esta definición es provechada por Brunelle y Kapur (1999), para afirmar que un SME puede ser considerado como un sistema binario donde la falla ocurre cuando $X(t) \in \mathfrak{X}^I$, y el sistema está en operación si $X(t) \in \mathfrak{X}^A$.

Haciendo caso a lo anterior y a la Figura 3.1, en el tiempo total de operación de un SME reparable se pueden identificar condiciones de operación y de falla de forma alternante. Misra (2008b) denomina dichos periodos “uptime” y “downtime”, respectivamente. Como se dijo previamente, durante el periodo uptime T_a , el sistema desempeña su función, mientras que en el periodo downtime T_b , se ejecutan las actividades de mantenimiento y reparación del sistema.

Denominaciones más generales para uptime y downtime, son tiempo hasta la falla y tiempo hasta la reparación, para incluir otras condiciones intermedias que pueden considerarse como estados aceptables e inaceptables respectivamente. Estos se describen como sigue.

- Tiempo hasta la falla T_a : Es el tiempo transcurrido desde el instante en que el SME inicia su operación, hasta el instante cuando entra por primera vez al subconjunto $\mathfrak{X}^I$. Tal como se muestra en la Figura 3.1 y puesto que a cada elemento de $\mathfrak{X}^I$ se le asocia una tasa de rendimiento g_{v_i} , T_a puede definirse como el tiempo transcurrido hasta que $F(X(t), w) \leq 0$ (Xie et al., 2004).
- Tiempo hasta la reparación T_b : Misra (2008b) considera el tiempo hasta la reparación, como la suma del tiempo administrativo, el tiempo logístico y el tiempo de reparación real. El tiempo administrativo corresponde al gastado en planear las actividades de reparación; el tiempo logístico al perdido por condiciones inesperadas como la falta de repuestos; y el tiempo de reparación real en el que se ejecutan como tal las actividades de mantenimiento para corregir la falla.

T_b se puede identificar simplemente como el intervalo de tiempo transcurrido durante el cual $F(X(t), w) \leq 0$ (Xie et al., 2004).

3.5 Función de riesgo $h(t)$

Si es T una variable aleatoria continua, que representa el tiempo hasta la ocurrencia de un evento, ésta es completamente caracterizada por la función $h(t)$ que representa la probabilidad condicional por unidad de tiempo del evento, en el intervalo $(t; t + \Delta t]$ dado

que $T > t$. Esto es, $h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Pr\{t < T \leq t + \Delta t \mid T > t\} / \Delta t$, cuya importancia se debe a que a partir de ella es posible definir las demás funciones de probabilidad asociadas a T (Rausand y Hoyland, 2004).

En el contexto de la fiabilidad, cuando T representa el tiempo hasta la ocurrencia de una falla, $T = T_a$, y $h(t) = h_a(t)$, llamada función de tasa de falla. De forma análoga, si T es el tiempo hasta la reparación, $T = T_b$, y $h(t) = h_b(t)$ representa la función de tasa de reparación (Birolini, 2007). En la práctica, estas funciones se obtienen a partir de métodos estadísticos sobre los datos observados durante una prueba de vida. Los cuales pueden ser de dos tipos:

- Métodos no paramétricos. Derivan una función de riesgo empírica calculando para cada intervalo de una tabla de datos agrupados $h(t) = (n_f(t + \Delta t) - n_f(t)) / \Delta t \cdot n_s(t)$, donde $n_s(t)$ y $n_f(t)$ son el número de elementos que no han experimentado el evento al inicio del intervalo y el número que lo experimentó durante el intervalo respectivamente (Verma et al., 2010).
- Métodos paramétricos. Consisten en ajustar los datos de vida a una distribución de probabilidad teórica. Naikan (2009) identificó dos formas de hacerlo, por métodos analíticos y métodos gráficos. En el primer caso, los más conocidos son la estimación de máxima verosimilitud y de mínimos cuadrados. Mientras que, las técnicas gráficas evalúan la bondad de ajuste visualmente en un papel de probabilidad de una distribución dada y se estiman los parámetros a partir de la función de regresión lineal para los puntos generados en él. Eventualmente, en ambos métodos, se deben evaluar los diferentes tipos de distribución hasta identificar aquella que resulte la más adecuada.

Normalmente, en los análisis de fiabilidad las estimaciones empleadas para $h(t)$ son de tipo paramétrico. Esto se debe principalmente porque:

- Los métodos no paramétricos no permiten hacer inferencias más allá del rango de datos de donde se obtuvo la estimación, y por tanto, no es posible extrapolar o predecir las medidas fuera de dicho rango (Lee, 2003).
- Los procesos de operación de cierto tipo de sistema a menudo ya están asociados a algún tipo de distribución particular, sea por la experiencia o por estudios pasados (Verma et al., 2010).

Aunque la ventaja principal de los métodos no paramétricos es que no requieren ninguna suposición relativa a la identidad o forma de la distribución de probabilidad de los eventos, y no son necesarias restricciones potenciales sobre el comportamiento (Lee, 2003), el enfoque paramétrico es más apropiado en los modelos teóricos de fiabilidad por las razones previamente citadas (Verma et al., 2010).

Por lo anterior, para efectos del presente trabajo se estudian básicamente las funciones paramétricas de $h(t)$. Razón por la que a continuación se presentan algunas características de las funciones $h_a(t)$ y $h_b(t)$ a considerar en el análisis de fiabilidad.

3.5.1. Función de tasa de falla $h_a(t)$

De acuerdo con Lee (2003), $h_a(t)$ evidencia la tendencia a fallar a través su proceso de envejecimiento. Moon et al. (2004) identifican dos tipos de falla que el sistema puede experimentar durante dicho proceso: falla aleatoria y falla por desgaste.

Se dice que ocurre una falla aleatoria cuando su causa no está asociada al tiempo de operación sino a ciertas condiciones ajenas al sistema. Mientras que una falla por desgaste está relacionada a fenómenos con efectos acumulativos sobre el rendimiento a través del tiempo. En este caso, la función de riesgo traduce el patrón de envejecimiento del sistema en función de las variaciones en sus características de diseño y de las condiciones ambientales (Retterath, 2004). Pukite y Pukite (1998) señalan que los factores medioambientales, tales como la temperatura, el estrés, las vibraciones y la humedad tienen efectos importantes sobre la capacidad de los sistemas.

Estos efectos son traducidos por funciones de riesgo variables, que representan el desgaste positivo o negativo si son crecientes o decrecientes respectivamente, o un sistema que no se degrada cuando se trata de una función constante en el tiempo (Lai y Xie, 2003).

3.5.2 Función de tasa de reparación $h_b(t)$

De manera análoga a la tasa de falla, $h_b(t)$ mide la probabilidad con la cual el sistema puede ser reparado en un instante de tiempo, dado que hasta ese momento se han realizado actividades de mantenimiento. Considerando que el tiempo total de reparación incluye el diagnóstico, la corrección y el chequeo de la falla, la tasa de reparación traduce el efecto de la no disponibilidad del equipo de mantenimiento, y de la rapidez y eficacia con la cual estas actividades son ejecutadas (Retterath, 2004).

Por otro lado, tal como lo señalan Wang y Billinton (2002), éste tiempo también puede estar influenciado por condiciones exógenas. Por ejemplo, el tiempo tomado para restaurar un sistema bajo condiciones climáticas desfavorables puede ser considerablemente mayor al tiempo requerido en condiciones normales. Por lo anterior, es natural asignar funciones de riesgo variables a los tiempos de reparación.

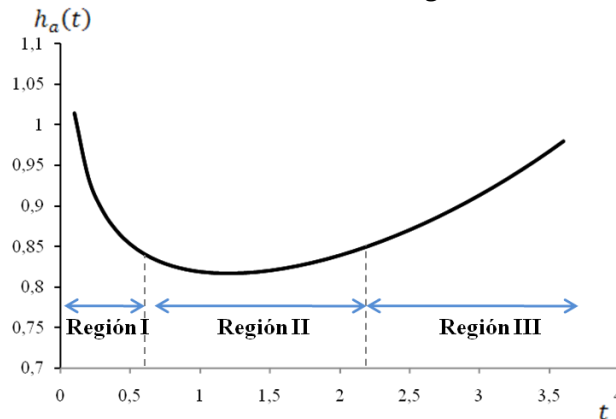
3.5.3 Funciones características de $h_a(t)$ y $h_b(t)$

Reconocida la necesidad de asignar funciones de riesgo dependientes del tiempo, se han identificado ciertos patrones y curvas características para las tasas de falla y reparación. Respecto a las primeras, una de las funciones más conocidas es la llamada “curva en forma de bañera”. De acuerdo a Lai y Xie (2003) corresponde al caso más general de tasas de falla, dado que a partir de ella se pueden especificar otro tipo de funciones. Matemáticamente una curva de este tipo es de la forma:

$$h_a(t) = \theta\lambda\beta t^{\beta-1} + (1 - \theta)bt^{b-1}\alpha e^{\alpha t^b} \quad (3.3)$$

Cuya curva típica se ilustra en la Figura 3.3. Como se señala, el comportamiento de esta función se puede dividir en tres regiones. La primera, la Región I conocida como región de depuración o de mortalidad prematura, se asocia a una función $h_a(t)$ decreciente y las fallas se deben a problemas de diseño o de manufactura que solo se evidencian una vez que el sistema entra en operación. La Región 2, conocida como periodo de vida útil en la cual solo ocurren fallas aleatorias y $h_a(t)$ es constante. Y por último, la Región III, que corresponde al periodo de desgaste debido a las condiciones de operación del sistema, y generan una función $h_a(t)$ creciente. Así, de (3.3) es posible generar funciones de riesgo monótonas según el valor de sus parámetros (Dhillon, 2006).

Figura 3.3. Curva de una función de riesgo en forma de bañera



Fuente. Elaboración propia basada en Dhillon (2006)

Por otra parte, en la teoría de fiabilidad se han identificado algunas distribuciones de probabilidad teóricas que han sido usadas para describir los tiempos de vida de diferentes tipos de sistemas, entre ellas, la distribución exponencial, weibull, log-normal y log-logística (Lee, 2003).

De estas distribuciones, la más empleada es la distribución weibull, principalmente porque permite definir funciones crecientes o decrecientes para $h(t)$, y además porque otro tipo de distribuciones pueden aproximarse a ella (Kumar y Jackson, 2009). Por ejemplo, Dhillon (2005) emplea el método de mínimos cuadrados y otras técnicas de ajustes de curvas para encontrar los parámetros de una distribución weibull que minimizan la diferencia entre una distribución log-normal y su aproximación.

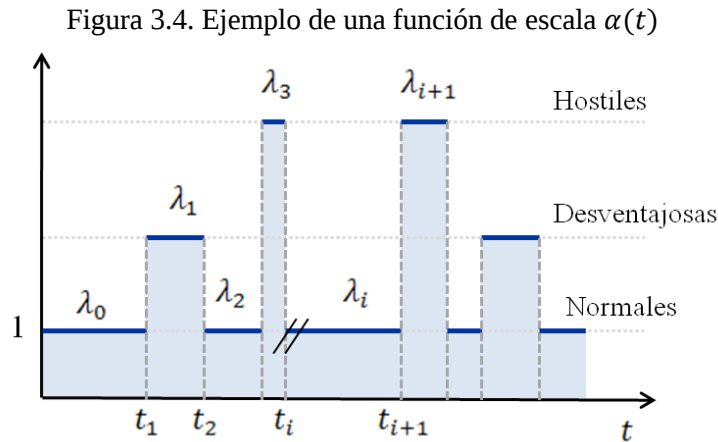
Por otra parte, aunque han sido menos estudiadas, las tasas de reparación también se han asociado a algún tipo de distribución. Aunque la más empleada es la distribución exponencial, Pukite y Pukite (1998) señalan que en los casos prácticos, la tasa de reparación está lejos de ser una constante y en su lugar, indica que regularmente la función de densidad de T_b tiene la forma seguida por las distribuciones weibull y log-logística.

Los casos anteriores de funciones de riesgo, corresponden a curvas continuas en todo el dominio del tiempo. Sin embargo, algunos trabajos han sugerido modelos de funciones por

partes, con el fin de incluir cambios por intervalos en las condiciones del sistema. En este contexto, Wang y Billinton (2002) proponen definir una función de riesgo $h(t)$, sea de falla o de reparación, dependiente de una función de escala variable $\alpha(t)$ como:

$$h(t) = h \cdot \alpha(t) \quad (3.4)$$

Donde $\alpha(t)$ refleja el aumento en $h(t)$ cuando las condiciones exógenas son desfavorables y h la función de riesgo promedio calculada en las condiciones normales del sistema. A manera de ejemplo, la Figura 3.4 ilustra una función tipo de $\alpha(t)$.



Fuente. Adaptado de Wang y Billinton (2002)

Independientemente del tipo de curva asignada, $h(t)$ debería representar la tendencia real del SME a fallar o la rapidez con la cual puede volver a su condición de operación después del mantenimiento.

3.6 Medidas de fiabilidad

Los índices de fiabilidad son básicamente la caracterización cuantitativa de la habilidad del sistema para ejecutar sus tareas. Desde el punto de vista conceptual, deberían reflejar las propiedades operacionales del sistema, ser comprensibles y fáciles de calcular (Gnedenko y Ushakov, 1995). Así, si existe un estado m , tal que $\mathcal{X}^I = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ o hay algún subconjunto de estados $\mathcal{X}^i$ que indican condiciones de falla o alguna otra condición de interés, las medidas de fiabilidad encontradas en la literatura para SME se describen como se hace en la Tabla 3.1.

3.7 Medidas de sensibilidad

Kiureghian et al. (2007) señalan que uno de los principales objetivos en el análisis de fiabilidad es encontrar el modo de mejorar el rendimiento del sistema en términos de su disponibilidad, y que el modo de lograrlo es mejorar el desempeño de los componentes claves que pueden generar un efecto considerable sobre dicha medida.

Tabla 3.1. Medidas de fiabilidad para un SME.

Medida	Formulación	Interpretación
$USP(t, \mathfrak{X}^i)$: Probabilidad de estado superior. (Brunelle y Kapur, 1997).	$USP(t, \mathfrak{X}^i) = \sum_{v_i \in \mathfrak{X}^i} p_{v_i}(t)$ (3.5)	Probabilidad de que el SME se encuentre en un estado que pertenece al conjunto $\mathfrak{X}^i$, el cual se asocia a una diferencia cualitativa o cuantitativa en su rendimiento.
$A(t)$: Disponibilidad instantánea. (Soro et al., 2010)	$A(t) = \sum_{v_i=m}^{K-1} p_{v_i}(t)$ (3.6)	Probabilidad de que el SME se encuentre en un estado aceptable en un instante de tiempo t especificado. No es sólo función del tiempo hasta la falla, sino también del tiempo hasta la reparación.
$R(t)$: Fiabilidad. (Xie et al., 2004)	$R(t) = A(t)$ Con el SME no reparable (3.7)	Probabilidad de que el SME no entre en un estado inaceptable hasta el instante de tiempo t cuando falla por primera vez.
AS : Coeficiente de disponibilidad estacionaria. (Brunelle y Kapur, 1999)	$AS = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ (3.8)	Probabilidad en el largo plazo de que el SME se encuentre en un estado aceptable. Es independiente del estado inicial del sistema.
$MTTF$: Tiempo medio hasta la falla. (Lisnianski et al., 2008b)	$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt$ (3.9)	Tiempo esperado hasta el instante en que el SME entra en el subconjunto de estado inaceptables por primera vez.
$RE(t)$: Rendimiento esperado. (Soro et al., 2010)	$RE(t) = \sum_{v_i} g_{v_i} p_{v_i}(t)$ (3.10)	Productividad (capacidad) promedio del sistema.
$OE(t)$: Rendimiento esperado acumulado. (Brunelle y Kapur, 1997)	$OE(t) = \int_0^t [\sum_{v_i=0}^{K-1} g_{v_i} p_{v_i}(\tau)] d\tau$ (3.11)	Beneficio que se espera recibir del sistema durante el intervalo de tiempo $(0, t]$.
LWE : Rendimiento esperado ponderado. (Brunelle y Kapur, 1997)	$LWE = \int_0^{\infty} U(t) [\sum_{v_i=0}^{K-1} g_{v_i} p_{v_i}(T)] dt$ (3.12) $U(t)$ nivel de impacto o de importancia del rendimiento	Grado al cual las expectativas del sistema son satisfechas durante toda su operación. Si $U(t) = f(t)$, donde $f(t)$ es una función de densidad de probabilidad, entonces $LWE \in [g_0, g_{K-1}]$. Si la distribución de probabilidad es exponencial, la importancia del rendimiento es mayor a inicio de operación del sistema, y si es weibull o gamma, refleja en caso en que ésta crece hasta un máximo y luego decrece con el tiempo.

Fuente. Elaboración propia

Con el objetivo anterior se han desarrollado las medidas de sensibilidad. Estas evalúan el efecto de los cambios en las características de los componentes en las medidas de fiabilidad y permiten clasificar estos componentes en función dicha magnitud (Aven y Nøklund, 2010). Éstas proporcionan información útil sobre los puntos débiles y los puntos de apalancamiento para el rendimiento del sistema (Lisnianski y Levitin, 2003)

Sin embargo, las medidas de sensibilidad han sido tradicionalmente definidas para sistemas estáticos descritos por modelos combinatorios, mientras que los problemas con sistemas dinámicos que incluyen dependencias funcionales entre componentes y múltiples estados de operación, es un campo de investigación relativamente incipiente. Del primer tipo de medidas, las más comunes son la medida de Birnbaum, el Risk Achievement Worth (RAW), el Risk Reduction Worth (RRW), y la medida de Fussell–Vesely (FV) las cuales son descritas en detalle por Rausand y Hoyland (2004).

Estas se basan en las derivadas parciales de la fiabilidad del sistema respecto a la de sus componentes, pero no permiten considerar cambios simultáneos entre ellos. Para los casos en que dichas interacciones son ciertas, Do Van et al. (2008) y Zio y Podofillini (2006) sugieren el empleo de las medidas de importancia diferencial, las cuales se describen a continuación.

3.7.1 Medida de Importancia Diferencial MID_{x_i}

Una medida de rendimiento del sistema O puede ser expresada en función de un conjunto de parámetros $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, los cuales están relacionados con las tasas de falla y de reparación de cada componente. Vinod et al. (2003) propusieron calcular la contribución de cada parámetro a la medida de rendimiento total como $\delta O_{x_i} / \delta O$. Donde δO_{x_i} es el cambio en O (δO) debido al cambio δx_i en el parámetro x_i mientras los otros parámetros se mantienen en su valor de referencia.

Lo anterior supone que MID_{x_i} puede ser estimada calculando:

- 1) $O_o = O(x_{1o}, \dots, x_{io}, \dots, x_{no})$, valor de la medida de rendimiento con todos los parámetros en su valor de referencia.
- 2) $O_{x_i}(x_{1o}, \dots, x_{io} + \delta x_i, \dots, x_{no})$ para todo x_i ,
- 3) $\delta O_{x_i} = O_{x_i} - O_o$.
- 4) $O_1 = (x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_i + \delta x_i, \dots, x_n + \delta x_n)$
- 5) $\delta O = O_1 - O_o$
- 6) $MID_{x_i} = \delta O_{x_i} / \delta O$

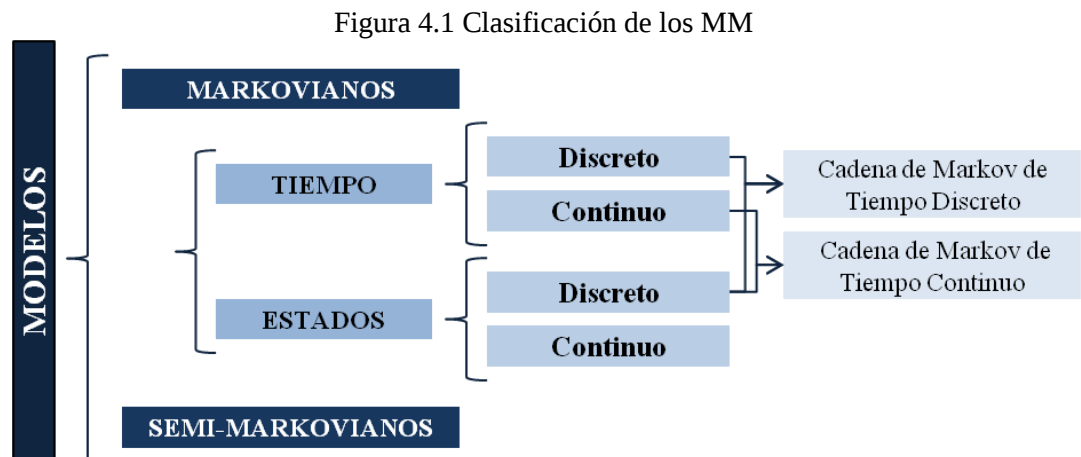
MID_{x_i} mide el porcentaje del cambio total en O que se debe a una variación en el parámetro x_i . Esta medida resulta útil cuando se desea evaluar, por ejemplo, la importancia de ciertas funciones de riesgo, y cuáles de ellas deberían considerarse disminuir o aumentar a fin mejorar la medida de desempeño estudiada (Borgonovo et al., 2003).

4. CADENAS DE MARKOV DE TIEMPO CONTINUO

La noción de lo que es llamado hoy Cadena de Markov fue ideada por el matemático Ruso A.A. Markov a inicios de siglo XX, cuando desarrolló un modelo en el cual los resultados de eventos sucesivos dependían única y exclusivamente del evento inmediatamente anterior (Tijms, 2003). Desde entonces, la teoría de los MM ha sido ampliamente estudiada, y su aplicación comprende una gran variedad de problemas de ingeniería y de otras disciplinas (Kumar y Jackson, 2009).

La conveniencia de estos modelos, tal como lo señalan Fonollosa et al. (2002), es su capacidad de modelar la aleatoriedad en sistemas con características dinámicas, en los que su condición o estado cambia en el tiempo a través de transiciones. Sin embargo, dichos cambios satisfacen un supuesto fundamental. Formalmente, un MM es un proceso estocástico que satisface la propiedad markoviana, según la cual el estado futuro del sistema depende única y exclusivamente de su condición actual, y no es necesario conocer su historia pasada (Stewart, 2009).

La mayoría de los autores clasifican los MM de acuerdo al dominio del tiempo del proceso, y de la naturaleza de su conjunto de estados. Las tipologías generadas se resumen en la Figura 4.1.



Fuente. Elaboración propia basada en Pukite y Pukite (1998) y Gebali (2008).

De acuerdo a Gebali (2008), los MM pueden ser de tiempo discreto o continuo. En el primer caso, las transiciones entre estados solo pueden ocurrir en instantes concretos de tiempo, dígase $T_0, T_1, \dots, T_n$. En el segundo, las transiciones pueden suceder en cualquier instante en un intervalo finito o infinito de tiempo.

Respecto al segundo criterio, el conjunto de estados puede ser discreto o continuo. Un ejemplo de estados discretos es el número de usuarios en espera de un servicio, mientras un conjunto continuo correspondería al tiempo que dichos usuarios esperan hasta que en efecto son atendidos (Stewart, 2009).

Fuqua (2002) señala que la aplicación de estos métodos ha recibido especial atención gracias al desarrollo de las herramientas de software, las cuales facilitan los análisis computacionalmente complejos. Sin embargo, cuando se trata con modelos de estados continuos, aún con dichas herramientas, la solución puede ser compleja en comparación con los otros tipos de modelos y porque la investigación en torno a ellos es mucho más escasa. Algunos detalles de estos procesos son presentados por Kijima (1997).

Respecto a los modelos de estados discretos, su dominio de tiempo también puede ser discreto, o continuo. Ross (2007) denomina estos procesos como Cadenas de Markov de Tiempo Discreto (CMTD) y de Tiempo Continuo (CMTC) respectivamente. Como lo indican Pukite y Pukite (1998), en el campo de la fiabilidad la clase más importante de estos modelos son las CMTC, por lo cual el presente trabajo se concentra en este tipo de métodos.

Por otra parte, y dada la clasificación anterior, Platis et al. (1997) caracterizan una CMTC en tres tipologías. Las más simples y usadas, son las CMTC Homogéneas (CMTC-H) en las que la función de riesgo asociada al tiempo hasta la transición entre cada par de estados permanece constante. En la segunda tipología, las CMTC-No Homogéneas (CMTC-NH), dicha función depende del tiempo global del proceso estocástico. Y finalmente, el tipo más complejo, las Cadenas Semi-Markovianas donde las funciones de riesgo también dependen del tiempo que el proceso ha pasado en el último estado antes de hacer la transición.

Respecto a la clasificación de Platis et al. (1997) se debe señalar: primero, las CMTC-H son en realidad un caso específico de las no homogéneas donde todas las funciones de riesgo se suponen constantes (Kumar y Jackson, 2009). Y segundo, ambos corresponden a sí mismo a casos particulares de Cadenas Semi-Markovianas, al eliminar la dependencia de la probabilidad de transición con el tiempo de permanencia en el estado (Platis et al., 1998).

Aunque los modelos Semi-Markovianos son los de mayor generalidad, se basan en métodos de análisis más complejos, y se encuentran fuera del alcance de los objetivos definidos para la presente investigación. Por tanto, lo que sigue se concentra en las CMTC-NH.

A diferencia de los modelos para el caso homogéneo, cuyo desarrollo teórico y práctico ha sido ampliamente trabajado por autores como Rolski et al. (1999), Tijms (2003), y Ross (2007), y expuesta en casi toda la bibliografía sobre técnicas para la evaluación de fiabilidad de sistema, como Pukite y Pukite (1998), Rausand y Hoyland (2004), Xie et al. (2004) y Lisnianski et al. (2010); la literatura sobre modelos no homogéneos es menos accesible y de mayor complejidad matemática.

A pesar de la dificultad en su tratamiento, en el presente capítulo se presentan los conceptos fundamentales de las CMTC-NH. Así, en las siguientes secciones se presentan definiciones relacionadas a este proceso markoviano, especificando los elementos de modelación, y las medidas probabilísticas principales que se pueden obtener. Por último, se describen los métodos de solución para estos modelos, a fin de presentar y discutir las dificultades matemáticas y computacionales de aplicarlos.

4.1 Propiedad markoviana

Rausand y Hoyland (2004) presentan la siguiente definición: Sea un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ de tiempo continuo y con espacio de estados $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, r\}$, del cual se conoce que su estado en el instante de tiempo $\tau < t$ es $X(\tau) = i$. La probabilidad condicional de que el proceso estará en j en el instante de tiempo t es $Pr(X(t) = j | X(\tau) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau)$, donde $\{x(u), 0 \leq u < \tau\}$ denota la “historia” del proceso hasta, pero sin incluir, el instante τ . Se dice que $\{X(t), t \geq 0\}$ posee la propiedad markoviana si para todos los $x(u)$ $0 \leq u < \tau$, se tiene que

$$Pr(X(t) = j | X(\tau) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau) = Pr(X(t) = j | X(\tau) = i) \quad (4.1)$$

Esta propiedad expresa que la distribución condicional de un estado futuro $X(t) = j$ dado el estado presente $X(\tau) = i$ y los estados pasados $X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau$ de un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ depende solamente del estado presente, y su desarrollo futuro es independiente de cualquier cosa que haya ocurrido en el pasado (Tijms, 2003).

En general, si $\{X(t), t \geq 0\}$ satisface (4.1), es llamado Cadena de Markov de Tiempo Continuo (CMTC).

4.2 Descripción de una Cadena de Markov de Tiempo Continuo (CMTC)

Uno de los primeros trabajos que trataron con casos generalizados de MM corresponde a Singer (1981), cuya descripción de este tipo de procesos es reescrita como sigue:

Sean:

- $X(t)$: Función que representa la evolución estocástica de un sistema a través de una colección finita de estados;
- T_k : Tiempo de espera hasta la k -ésimo transición (cambio de estado). Solo T_1 coincide con el tiempo global del sistema, equivalente al transcurrido desde $t = 0$ cuando se inicia el proceso.

$X(t)$ corresponde a un proceso markoviano, si la evolución ocurre de acuerdo a las siguientes reglas:

- i. El proceso comienza en un estado i - donde i puede ser $0, 1, 2, \dots, r$ en $t = 0$.
- ii. El sistema espera por una longitud de tiempo aleatorio T_1 , antes de hacer la primera transición a otro estado. T_1 se describe por la distribución de probabilidad $Pr\{T_1 > t\} = \exp\left[-\int_0^t q_i(u) du\right]$. Donde $q_i(u)$ es la función de riesgo del tiempo que el sistema permanece en i hasta hacer alguna transición en el instante de tiempo u .
- iii. Al finalizar la estancia en i , justo cuando han transcurrido t_1 unidades de tiempo, el proceso hace una transición al estado j con probabilidad $p_{ij}(0, t_1)$, tal que, $\sum_{j=0}^r p_{ij}(0, t_1) = 1$ con $p_{ii} = 0$.
- iv. Luego, el sistema se mantiene en j por una longitud de tiempo aleatoria T_2 que no depende de los estados previos ocupados, pero sí del tiempo global del sistema justo

antes de hacer la segunda transición. Con $T_1 +$ el instante justo después de T_1 y $X(T_1 +) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X(T_1 + \varepsilon)$, la distribución de probabilidad de T_2 , condicionada por T_1 y el estado $X(T_1 +)$ se define como $\Pr\{T_2 > t | T_1 = t_1, X(t_1 +) = j\} = \exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} q_j(u) du\right]$.

- v. Cuando el sistema termina su estancia en j en el instante de tiempo t_2 , el proceso hace una tercera transición al estado w con probabilidad $p_{jw}(t_1, t_2)$, tal que, $\sum_{j=0}^r p_{ij}(0, t_1) = 1$ y $p_{ii} = 0$.
- vi. De nuevo, aquí el sistema espera por una longitud de tiempo aleatoria T_3 descrito por la distribución de probabilidad $\Pr\{T_3 > t | T_1 + T_2 = t_2, X((t_2) +) = w\} = \exp\left[-\int_{t_2}^{t_3} q_w(u) du\right]$.
- vii. La misma secuencia de pasos se repite para cada una de las siguientes transiciones del sistema.

El proceso estocástico que sigue este comportamiento se describe formalmente a continuación.

4.3 Definición de una CMTC

De acuerdo a Ross (2007), un proceso estocástico de tiempo continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ que toma valores en el conjunto $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, j, \dots, r\}$, es una CMTC si para todo $0 \leq \tau < t$ y estados posibles $j, i, x(u)$, $0 \leq u < \tau$, su función de probabilidad condicional $p_{ij}(\tau, t) = \Pr\{X(t) = j | X(\tau) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau\}$ satisface (4.1).

$p_{ij}(\tau, t)$ es llamada probabilidad de transición e indica la probabilidad de que el proceso, estando en el estado i en un instante de tiempo τ , estará en el estado j , $t - \tau$ unidades de tiempo más tarde, cumpliendo que $0 \leq p_{ij}(\tau, t) \leq 1$ y $\sum_{j=0}^r p_{ij}(\tau, t) = 1$ para todo $i, j \in \mathcal{X}$ y $0 \leq \tau \leq t$.

Para caracterizar completamente una CMTC, Bharucha-Reid (1960) introduce las siguientes funciones:

- i. Función de intensidad $q_i(t)$.
Definida como $q_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1 - p_{ii}(t, t + \Delta t) / \Delta t$, es la probabilidad de que $X(t)$ experimente un cambio en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ cuando $X(t) = i$.
- ii. Función de probabilidad de transición relativa $Q_{ij}(t)$.
Probabilidad condicional de que $X(t + \Delta t) = j$ cuando que $X(t) = i$ y el proceso ha experimentado algún cambio en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. Así, $q_i(t)Q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{ij}(t, t + \Delta t) / \Delta t$ es la probabilidad de que dicho cambio sea hacia el estado j .

Ahora, haciendo:

- i. $a_{ii}(t) = -q_i(t)$, entonces $a_{ii}(t)$ debe entenderse como la función de riesgo del tiempo hasta que $\{X(t), t \geq 0\}$ deja el estado i , y se denomina tasa de partida total de i en t .

- ii. $a_{ij}(t) = q_i(t)Q_{ij}(t)$, entonces $a_{ij}(t)$ es la tasa a la cuál $\{X(t), t \geq 0\}$ dejará el estado i y hará una transición hacia j . Se denomina tasa de transición de i a j en t .

Así, Rausand y Hoyland (2004) señalan que un proceso markoviano puede ser completamente descrito al definir:

- El espacio de estados $\mathcal{X}$, y
- Las $a_{ij}(t)$ para todo par (i, j) con $i, j \in \mathcal{X}$, puesto que

$$a_{ii}(t) = -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r a_{ij}(t) \quad (4.2)$$

La descripción de una CMTC resulta entonces más natural y práctica al definir la tasa de transición asociada a cada cambio de estado posible. Este es el enfoque básico que se emplea en el presente trabajo.

4.3.1 Matriz de tasas de transición

Las tasas de transición $a_{ij}(t)$ se pueden ordenar de forma matricial como sigue:

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \cdots & a_{0r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r0}(t) & \cdots & a_{rr}(t) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$\mathbb{A}(t)$ es una matriz de tasas de transición o generador infinitesimal. En cuanto mayor sea la tasa de transición para ciertos estados, se espera que el sistema permanezca menos tiempo en ellos (Liu y Kapur, 2008).

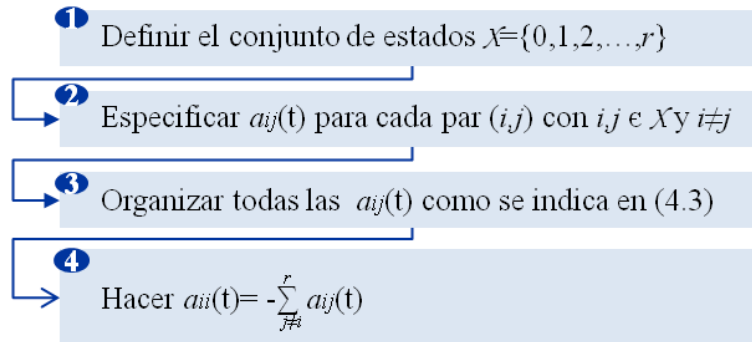
Las entradas en la i -ésima fila de $\mathbb{A}(t)$ representan las transiciones fuera del estado i , mientras que las asociadas a la i -ésima columna representan las transiciones hacia él. De manera que si $a_{ij}(t) \neq 0$ para algún t , se tiene que es posible una transición de la forma $i \rightarrow j$, donde i es el estado de partida y j el de llegada. La transición $i \rightarrow i$ se puede entender como una transición virtual, pero en realidad el sistema continúa en el mismo estado.

4.4 Construcción de una CMTC

Resumiendo lo presentado por Rausand y Hoyland (2004), la Figura 4.2 presenta una secuencia de pasos básicos para definir $\{X(t), t \geq 0\}$. Los pasos enumerados se describen como sigue:

- 1) Definir el conjunto de estados $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots, r\}$. Listar y describir todos los estados relevantes en el proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ analizado. Cada estado debe corresponder a una condición única, razón por la cual, aquellos estados que no sean relevantes deben ser removidos y fusionados con estados equivalentes. Generalmente se

Figura 4.2 Definición de los elementos de una CMTC



Fuente. Elaboración propia basada en Rausand y Hoyland (2004)

emplean enteros de 0 a r para identificar cada estado, aunque se puede asignar cualquier otra secuencia de números o de letras.

2) Especificar $a_{ij}(t)$ para cada par $(i, j) \in X, i \neq j$. $a_{ij}(t)$ puede entenderse como la probabilidad condicional de hacer una transición desde i a j por unidad de tiempo, o en otras palabras, la función de intensidad del tiempo de pertenencia del proceso en el estado i hasta hacer una transición hacia j .

3) Organizar las $a_{ij}(t)$ como se indica en (4.3). Ordenar las tasas de transición entre estados diferentes en la matriz $A(t)$, y dejar las entradas de la diagonal vacías.

4) Hacer $a_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i}^r a_{ij}(t)$. Completar los elementos de la diagonal $a_{ii}(t)$ con la suma de las demás tasas de transición correspondientes a las entradas en la i -ésima fila.

4.5 Ecuaciones de estado

Han (2008) describe la probabilidad de estado $p_j(t)$ como una medida que cuantifica la probabilidad de estar en el estado j en el instante de tiempo t , y que puede ser calculada como $p_j(t) = \Pr\{X(t) = j\} = \sum_{i=0}^r \Pr\{X(\tau) = i\} \Pr\{X(t) = j | X(\tau) = i\}$.

Si $\mathbf{p}(t)_{1 \times (r+1)} = [p_0(t), \dots, p_i(t), \dots, p_r(t)]$, es un arreglo vectorial que contiene todas las probabilidades de estado, $\mathbf{p}(t)$ denota la distribución de probabilidad del proceso markoviano en el instante de tiempo t . Así, cuando se conoce la condición inicial de la CMTC, por ejemplo $X(t_0) = i$, la distribución de probabilidad inicial $\mathbf{p}(t_0)$ queda totalmente determinada y cumple que $p_i(t_0) = 1$ y $p_k(t_0) = 0 \ \forall k \neq i$.

De acuerdo a Poznyak (2009), una implicación importante de la propiedad markoviana es que descrita para sistemas estocásticos, aplica también para las soluciones de problemas de valor inicial que involucran Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). De aquí, que sea natural representar un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ que satisface (4.1) por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial conocida como sigue,

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{p}(t) \cdot A(t) \quad (4.4)$$

Las cuales son denominadas ecuaciones de estado, y deben completarse con la siguiente condición para garantizar su solución única.

$$\sum_{j=0}^r p_j(t) = 1 \quad (4.5)$$

4.5.1 Probabilidades en el límite

A menudo, la probabilidad de que una CMTC estará en un estado j converge a un valor límite independiente de su estado inicial. De acuerdo a Ross (2007), si se llama p_j a dicha probabilidad, ésta se puede encontrar como

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) \quad (4.6)$$

Cuando el proceso markoviano está determinado por las probabilidades de largo plazo, se dice que la CMTC se encuentra en estado estacionario y $dp_{ij}(t)/dt = 0$. De lo contrario, se dice que $\{X(t), t \geq 0\}$ se encuentra en estado transitorio y $\mathbf{p}(t)$ depende del instante de tiempo t .

Las probabilidades de largo plazo p_j se pueden interpretar:

- De acuerdo a Tijms (2003), como la probabilidad de que el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$, se encuentre en el estado j cuando ha alcanzado el equilibrio estadístico, y no se tiene conocimiento alguno acerca de su evolución pasada.
- De acuerdo a Ross (2007) y a Rausand y Hoyland (2004), como la proporción media del tiempo que el sistema permanezca en el estado j . Así, en el largo plazo, el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ estará en j aproximadamente $p_j \times [8760\text{hrs/año}]$.

Cuando $\mathbf{p}_{1 \times (r+1)} = [p_0, \dots, p_i, \dots, p_r]$ existe, $\{X(t), t \geq 0\}$ es llamada CMTC regular, y es ergódica si además $p_j \neq 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, r$ (Fonollosa et al., 2002).

4.6 CMTC Homogéneas

En lo explicado anteriormente, las probabilidades de transición $p_{ij}(\tau, t)$ son funciones del par (τ, t) y no solo de la diferencia $t - \tau$. Esto corresponde al caso más general, y representa una CMTC No-Homogénea (CMTC-NH). Sin embargo, cuando $p_{ij}(\tau, t)$ depende solo de $t - \tau$, se trata con un caso específico y se denomina CMTC Homogénea (CMTC-H) (Rolski et al., 1999).

4.6.1 Definición de CMTC-H

Una CMTC Homogénea $\{X(t), t \geq 0\}$ es una CMTC, en la cual las probabilidades de transición $p_{ij}(\tau, t) = \Pr\{X(t) = j | X(\tau) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau\}$ cumplen que,

$$p_{ij}(\tau, t) = p_{ij}(t - \tau) = \Pr\{X(t - \tau) = j | X(0) = i\} \quad (4.7)$$

Lo cual se traduce en que las probabilidades de transición solo dependen de la separación en el tiempo entre transiciones $t - \tau$, y no del tiempo avanzado por el proceso τ . En este sentido, se puede decir que en una CMTC-H, el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ se “reinicia” completamente en τ si $X(\tau)$ es conocido (Aalen et al., 2008).

En este caso la función de riesgo $a_{ii}(t)$ es independiente de t e igual a a_{ii} , y la matriz de tasas de transición $\mathbb{A}(t)$ es igual a $\mathbb{A}$, la cual tiene todas sus entradas constantes. Sin embargo, las relaciones y condiciones especificadas en las secciones anteriores, correspondientes a CMTC-NH, son también válidas en el caso de CMTC-H una vez se realizan las respectivas modificaciones haciendo $p_{ij}(\tau, t) = p_{ij}(t - \tau)$ y $a_{ij}(t) = a_{ij}$.

4.6.2 Consideraciones sobre las CMTC-H

En la práctica, las CMTC-H son las más empleadas. Esto se debe a que su solución es relativamente fácil comparada con el caso no homogéneo. De hecho, cuando se trata con cadenas homogéneas existe la probabilidad de que el sistema de EDOs definido en (4.4), tenga solución analítica. Lo contrario ocurre con las CMTC-NH donde ha sido necesario el desarrollo de métodos de simplificación para lograr una solución numérica (Liu y Kapur, 2008).

Sin embargo, como se verá posteriormente, en algunos problemas las tasas de transición entre estados son en realidad funciones del tiempo o de otras variables, en cuyo caso el supuesto de homogeneidad no se satisface.

4.7 Representación gráfica de una CMTC

De acuerdo a Fonollosa et al. (2002) según la teoría de grafos, toda matriz cuadrada tiene asociado un grafo, cuya representación contiene vértices y flechas dirigidas. Para los MM, dicha matriz corresponde al generador infinitesimal, y su representación es conocida como Diagrama de Transición de estados.

Básicamente, en un Diagrama de Transición:

- Cada estado i es representado por un vértice llamado “ i ”. De manera que se tienen $r + 1$ vértices.
- Cada transición de la forma $i \rightarrow j$ es representada por una flecha dirigida desde el vértice i hacia el vértice j , la cual es etiquetada con la tasa “ $a_{ij}(t)$ ” correspondiente, siempre que $a_{ij}(t) \neq 0$.
- Las transiciones de la forma $i \rightarrow i$, puede ser representada por un arco dirigido desde el vértice i hacia sí mismo. Sin embargo, este puede ser obviado si las demás transiciones ya han sido completamente determinadas, dado que por (4.2) se puede inferir $a_{ii}(t)$.

Desde estos diagramas se pueden identificar los tipos de estados de una CMTC. Así, un estado i es temporal si no tiene flechas dirigidas a él; es transitorio, si tiene flechas hacia y fuera de él, y puede ser visitado en cualquier momento; es recurrente, si sus flechas de

salida y de entrada forman un ciclo, tal que una vez que visitado lo seguirá haciendo de forma indefinida; y es absorbente si no tiene flechas dirigidas fuera de él (Stewart, 2009)

Para Pecht (2009), desde el punto de vista práctico, la representación gráfica de un MM es un paso recomendado en la interpretación y el análisis del sistema, cuya observación permite hacer consideraciones cualitativas sobre las características de los estados y la posible evolución del proceso.

4.8 Solución numérica de una CMTC

La solución de una CMTC consiste básicamente en resolver el conjunto de ecuaciones definidas en (4.4) y (4.5) que pertenece a la familia de EDOs lineales de primer orden y describen completamente el sistema estocástico (Poznyak, 2009).

De acuerdo a Han et al. (2008) su solución, desde la serie de Peano-Baker para sistemas lineales es de la forma,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0)\mathbb{P}(t, t_0) \quad (4.8)$$

$$\text{Donde } \mathbb{P}(t, t_0) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t \mathbb{A}(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^t \mathbb{A}(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbb{A}(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \dots$$

Bukowski (2006) llama la atención en que si las componentes de $\mathbb{A}(t)$ son funciones constantes, la solución anterior se simplifica considerablemente, puesto que $\mathbb{P}(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \mathbb{A}d\tau \right]$ tal que

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0)e^{\mathbb{A}(t-t_0)} \quad (4.9)$$

donde $e^{\mathbb{A}t}$ es la exponencial de matrices definida por $e^{\mathbb{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{A}^k t^k / k!$.

Sin embargo, (4.9) no es cierto para el caso de CMTC-NH, donde la matriz de tasas de transición tiene componentes funciones del tiempo global del proceso, y en general no es posible definir una solución de forma cerrada para el conjunto de EDOs (Arns et al., 2010). Atendiendo a estas consideraciones, se han desarrollado diferentes técnicas para la solución numérica de estos procesos.

Stewart (2009) clasifica dichas técnicas en dos tipos básicos, métodos de solución iterativa y de solución directa. Los métodos iterativos comienzan con una aproximación inicial al vector solución y proceden a modificarla de modo que cada paso o iteración se acerca a la solución real. Sin embargo, a veces estos métodos fallan en el intento de converger a la solución. Por su parte, los métodos directos intentan ir directamente a la solución final a través de una serie de cálculos definidos. No obstante, también pueden carecer de precisión debido a la propagación de los errores de redondeo cuando el número de cálculos requeridos es relativamente grande.

Por su parte Tombuyses y Devooght (1995) y Chatelet et al. (1996) comparten la división de estos métodos en tres categorías, de acuerdo al tipo de cálculo requerido para su desarrollo: Solución analítica, analítica por partes y numérica directa.

En esencia, la solución analítica consiste en desarrollar (4.8) para el sistema de EDOs del MM analizado. Cuando $A(t)$ contiene funciones relativamente sencillas es posible hacerlo mediante alguno de los métodos establecidos en la teoría de ecuaciones diferenciales, y obtener soluciones algebraicas implícitas o explícitas (Zill, 2006). Dentro de esta categoría, la técnica más empleada es la transformada de Laplace, cuya solución consiste en transformar las ecuaciones de estado a su contraparte laplace, resolverlas, y luego invertirlas de forma analítica o mediante las técnicas de inversión numérica aproximada para encontrar las soluciones en el dominio del tiempo (Pukite y Pukite, 1998).

Aunque la existencia de una solución única está garantizada para toda EDO lineal con coeficientes continuos, en algunos casos la búsqueda de una solución analítica es inútil o poco eficiente (Zill, 2006). De hecho, Chatelet et al. (1996) investigaron diferentes técnicas de solución para CMTC-H, encontrando que los métodos basados en la transformada de Laplace están limitados a sistemas relativamente pequeños, normalmente de un tamaño inferior a 100 estados; y señalan que incluso con el empleo de software matemático, la necesidad de almacenamiento crece rápidamente en función del número de estados especificados en el proceso.

Respecto a los métodos de solución analítica por partes, éstos consisten en la simplificación del modelo, y del empleo de expresiones teóricas establecidas para los casos sencillos obtenidos bajo el supuesto de homogeneidad. En general, tales técnicas se basan en la uniformización y en la discretización del tiempo (Chatelet et al., 1996). De acuerdo con Stewart (2009), este tipo de técnicas han sido especialmente desarrolladas para las CMTC-H, puesto que son simples de programar y útiles cuando sólo se necesita la solución en un punto cercano al origen del proceso.

Por último, la solución numérica directa se basa en la integración del sistema de EDOs empleando métodos de aproximación paso a paso como los algoritmos Runge-Kutta (Chatelet et al., 1996). Este tipo de técnicas han sido ampliamente investigadas desde la teoría de ecuaciones diferenciales y son, en comparación con las técnicas anteriores, más fáciles de aplicar cuando se trata con cadenas no homogéneas (Arns et al., 2010).

Arns et al. (2010) hacen una consideración importante en relación con todas las tipologías anteriores. Señalan que a diferencia de las CMTC-H donde se puede encontrar una literatura extensiva sobre técnicas de análisis numérico, pocas investigaciones se han concentrado en las CMTC-NH, y por tanto, no han sido bien estudiadas o comparadas.

De Souza e Silva y Gail (2000) confirman lo anterior y aseveran que la mayoría de las técnicas mejor desarrolladas se concentran en la distribución de probabilidad de estado estacionario. Sin embargo, es claro que las probabilidades de largo plazo pueden diferir

considerablemente de las transitorias, y en algunas aplicaciones conocer el comportamiento del sistema en un periodo próximo puede incluso ser más necesario que el de largo plazo.

Haciendo caso a estas observaciones, las siguientes secciones resumen algunas de las técnicas de solución analítica por partes y de aproximación numérica encontradas en la literatura para CMTC-NH en estado transitorio, entendiendo que el caso estacionario y homogéneo puede ser derivado fácilmente. Las técnicas analíticas no son presentadas aquí puesto que son ampliamente desarrolladas en la teoría matemática aplicada a diferentes campos y disciplinas. Algunas de estas técnicas son presentadas por Zill (2006).

4.8.1 Método de Jensen

Pocos trabajos se encuentran sobre éste método aplicado a CMTC-NH, uno de estos es el presentado por Arns et al. (2010), quien desarrolla la variante de la uniformización para el caso homogéneo. Básicamente éste método consiste en definir una función $\beta(t_0, t) \geq 0$ que determina el comportamiento de las componentes de $\mathbb{A}(t)$, y de una matriz $\mathbb{R}(i, j)$ independiente de t , de manera que $\mathbb{A}(t) = \beta(t_0, t)\mathbb{R}(i, j)$ y $\max_i |\mathbb{R}(i, j)| = 1$. Ahora, dada $\mathbf{p}(0)$ y $\mathbf{P} = \mathbb{R} + \mathbb{I}$, entonces $\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\bar{\beta}(0,t)t} \left((\bar{\beta}(0,t)t)^k / k! \right) \mathbf{P}^k$, donde $\bar{\beta}(0, t) = \int_0^t (\beta(u)/t) du$ (Arns et al., 2010).

4.8.2 Método de Bukowski

Bukowski (2006) propone la estimación de la distribución de probabilidad de una CMTC-NH a partir de la función de densidad de los tiempos de permanencia en cada estado. Para ejemplificar, si se tiene un $\{X(t), t \geq 0\}$ con un espacio de estado $\chi = \{0, 1\}$, un tiempo de permanencia en el estado 0 igual a T_0 distribuido exponencialmente con tasa de transición a_{01} , y de permanencia en el estado 1 igual a T_1 con una función de densidad de probabilidad empírica $f(T_1)$ especificada en n intervalos de tiempo. Se puede construir un proceso $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ con tasas de transición constantes con el siguiente procedimiento.

1. Por cada intervalo de tiempo $i = 1, 2, \dots, n$ con $f(T_{1_i}) \neq 0$ crear un estado 1_i .
2. Hacer la tasa de transición desde el estado 0 a cada estado 1_i igual a $f(T_{1_i})a_{01}$.
3. Hacer la tasa de transición desde cada estado 1_i al estado 0 igual a $a_{1_i0} = \frac{1}{T_{1_i}}$.

De manera que $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ es una CMTC-H cuya solución se puede obtener de (4.9). Bukowski (2006) señala que:

- $\{X(t), t \geq 0\}$ y $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ tiene la misma tipología,
- Si $\mathbf{p}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ son respectivamente las distribuciones de probabilidad de estado estacionario de $\{X(t), t \geq 0\}$ y $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$, se cumple que $\bar{\mathbf{p}} \approx \mathbf{p}$, y
- Si $\mathbf{p}(t)$ y $\bar{\mathbf{p}}(t)$ son respectivamente las distribuciones de probabilidad de estado transitorio de $\{X(t), t \geq 0\}$ y $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$, se cumple que $\bar{\mathbf{p}}(t) \leq \mathbf{p}(t)$. Por tanto, su aplicación depende del nivel de precisión requerido en la aproximación numérica.

4.8.3 Estimación de límites por intervalos

Propuesto por Lisnianski et al. (2008a), consiste en determinar límites superior e inferior por intervalos para la distribución de probabilidad transitoria. El horizonte de tiempo del proceso T es dividido en N intervalos, cada uno de longitud $\Delta t = T/N$. La tasa de transición $a_{ij}(t)$ en cada intervalo $[\Delta t.(n-1), \Delta t.n]$, $1 \leq n \leq N$ puede ser aproximado por a_{ij}^{n-} y a_{ij}^{n+} , tal que $a_{ij}^{n-} = a_{ij}(\Delta t.(n-1))$ y $a_{ij}^{n+} = a_{ij}(\Delta t.n)$.

Estos valores a_{ij}^{n-} y a_{ij}^{n+} representan respectivamente los límites inferior y superior de la función continua $a_{ij}(t)$ en el n -ésimo intervalo de tiempo. Con estas funciones se determinan $p_j^{n-}(t)$ y $p_j^{n+}(t)$, los límites inferior y superior para la probabilidades de estado $p_j(t)$ con base en el siguiente desarrollo de la ecuación (4.4)

$$\frac{dp_j^{n-}(t)}{dt} = \sum_{i=0}^r p_i^{n-}(t) a_{ij}^{n-}, j = 0, 1, \dots, r \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{dp_j^{n+}(t)}{dt} = \sum_{i=0}^r p_i^{n+}(t) a_{ij}^{n+}, j = 0, 1, \dots, r \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Si el sistema se encuentra en el estado k en $t = 0$, para las distribuciones de probabilidad inicial en el intervalo $[0, \Delta t]$ se tiene que $p_k^{1-}(0) = p_k^{1+}(0) = 1$ y $p_j^{1-}(0) = p_j^{1+}(0) = 0$ para todo $j \neq k$. Para el resto de intervalos $[\Delta t.(n-1), \Delta t.n]$, $n = 2, 3, \dots, N$ se tiene que $p_j^{n-}(\Delta t.(n-1)) = p_j^{(n-1)-}(\Delta t.(n-1))$. Con esto, se determinan los límites $\mathbf{p}^{n-}(t) = [p_0^{n-}(t), \dots, p_j^{n-}(t), \dots, p_r^{n-}(t)]$ y $\mathbf{p}^{n+}(t) = [p_0^{n+}(t), \dots, p_j^{n+}(t), \dots, p_r^{n+}(t)]$ para la distribución de probabilidad transitoria.

4.8.4 Aproximación por pasos

Sun y Han (2001) tratan aquellos sistemas cuya variación en las tasas de transición es significativa solo cuando se analiza en escalas de tiempo relativamente grandes. Ejemplo, el cambio en la tasa de falla de un sistema durante un día o una semana es insignificante si se compara con su variación durante algunos meses o años. Para estos casos, se puede realizar una aproximación por intervalos de tiempo muy cortos durante los cuales se puede asumir tasas de transición constantes.

Si se puede definir un valor a_{ii_n} constante, igual al valor promedio o algún valor considerado representativo de la función de riesgo del estado i en el intervalo de tiempo n , la aproximación por pasos consiste en hacer

$$a_{ii}(t) = \begin{cases} a_{ii_1} & t \leq T_1 \\ q_{ii_n} & T_{n-1} < t \leq T_n \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Y encontrar una solución para cada intervalo de t empleando (4.9)

4.8.5 Métodos numéricos

Los procedimientos de aproximación para calcular la solución de sistemas de EDOs, consisten en intentar seguir una curva de solución única, desde un valor inicial especificado t_0 hasta otro de interés t , lo cual involucra un procedimiento de discretización del intervalo $(t_0, t]$ y aproximaciones a la solución pasando por puntos intermedios en él (Stewart, 2009).

Como señalan De Souza e Silva y Gai (2000), las técnicas más ampliamente usadas para CMTC son los métodos Runge-Kutta. Éstos consisten en evaluar la serie de Taylor en el instante de tiempo t hasta el orden L , y usa en cada paso un conjunto de K etapas. Así, el error con un paso de longitud Δ es proporcional a Δ^L . Arns et al. (2010) caracterizan estos por una tabla de Butcher de la forma,

$$\begin{array}{c|cccccc}
 0 & 0 & & & & \\
 c_2 & a_{21} & 0 & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
 c_K & a_{K1} & a_{K2} & \dots & a_{KK-1} & 0 \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_K
 \end{array} \tag{4.10}$$

la cual incluye los parámetros apropiados que permiten el cálculo de siguiente término con base en los primeros L de la serie de Taylor. Entonces un método Runge-Kutta para el cálculo de $\mathbf{p}(t)$ está dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{p}(t)\mathbb{A}(t) \\ \mathbf{v}^{(2)} = (\mathbf{p}(t) + a_{21} \mathbf{v}^{(1)}) \mathbb{A}(t + c_2\Delta) \\ \dots \\ \mathbf{v}^{(K)} = (\mathbf{p}(t) + \sum_{k=1}^{K-1} a_{Kk} \mathbf{v}^{(k)}) \mathbb{A}(t + c_K\Delta) \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{p}(t + \Delta) = \mathbf{p}(t) + \sum_{k=1}^K b_k \mathbf{v}^{(k)} \tag{4.12}$$

Desde esta formulación básica se derivan métodos numéricos específicos dependiendo del orden L con que se trabaje. El más empleado para CMTC es el método Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Esta y otras técnicas derivadas se describen con precisión en el capítulo 6.

4.9 Limitaciones sobre la solución numérica de una CMTC-NH

Aunque las CMTC-NH sean más indicadas para modelar muchos sistemas, la limitación respecto a su solución puede ser tan fuerte como para desmotivar su aplicación.

La mayoría de las técnicas proponen la conversión del proceso en uno homogéneo, ya sea por uniformización o por la discretización del tiempo. Eventualmente, si los parámetros con los cuales se realiza dicha conversión no son adecuados, se obtienen los mismos errores ocurridos cuando se supone un MM homogéneo.

Sin embargo, aún con dicha simplificación, estos métodos pueden tener problemas. En el método de Jensen, la partición de $A(t)$ en $\beta(t_0, t)$ y $R(i, j)$ no es clara y puede ser difícil de conseguir. El método de Bukowski genera subestimaciones en las probabilidades de estado transitorio, que pueden ser indeseadas. La estimación de límites por intervalos implica la solución de dos sistemas de ecuaciones diferenciales, cada uno con $r + 1$ variables por cada división de t , lo cual puede ser substancialmente impráctico. Por último, la aproximación por pasos no es adecuada cuando $a_{ii}(t)$ presenta cambios abruptos y puede generar sub o sobre estimación cuando esta función es creciente o decreciente respectivamente.

Por otra parte, las técnicas iterativas como los métodos numéricos, constan de algoritmos de cálculos que han demostrado ser los más convenientes cuando se tratan con MM no homogéneos. Sin embargo, para hacerlos eficientes, dichos cálculos deben ser soportados por computador. La mayoría de programas matemáticos de propósito general comercialmente disponibles como Maple[®] y Matlab[®] contienen códigos para resolver sistemas de EDOs a través de varios métodos de aproximación numérica. Sin embargo, ellos requieren formular explícitamente dicho conjunto de ecuaciones, lo cual puede ser tedioso cuando el espacio de estados tiene más de 10 o 15 elementos.

Adicionalmente, su precisión puede ser afectada por los errores de integración, especialmente cuando se trata con EDOs rígidas en las que las rápidas variaciones en la solución pueden volver el método numéricamente inestable. Sin embargo, comparados con las demás técnicas, los métodos Runge-Kutta se caracterizan por su flexibilidad en tratar casi con cualquier tipo de EDOs. De forma que, reduciendo los intervalos de integración, y elevando el orden de la técnica, se pueden obtener soluciones satisfactorias.

5. CMTC-NH PARA LA MODELACIÓN DE LA FIABILIDAD DE SME

Debido a que el mecanismo de ocurrencia de las fallas puede ser incierto en sistemas complejos, surge la necesidad de observar su comportamiento en términos estocásticos. Como lo resalta Dhillon (2005), esto ha motivado el amplio rango de aplicaciones de los MM en el campo de fiabilidad, específicamente hablando, de la aplicación de las CMTC.

Para Bao y Cui (2010) la posición que ha ganado esta técnica se debe a su capacidad de modelar SME reparables, y tratar con la dinámica del sistema en términos probabilísticos. En este caso, las tasas de transición equivalen a las funciones de riesgo del tiempo hasta la falla y la reparación de los componentes, dependiendo de los cambios en el estado del sistema.

No obstante su limitación, las CMTC-H siguen siendo las más populares. Idealmente, tratan con sistemas que satisfacen la propiedad markoviana y en los que la tasa de falla y reparación son funciones constantes del tiempo (Platis et al., 1998). Sin embargo, tal como se presenta en la sección 3.5, los sistemas y sus componentes pueden perfectamente exhibir tasas de falla y reparación variables en el tiempo, ya sea funciones con curvas en forma de bañera, funciones de intensidad de alguna distribución probabilística, o funciones constantes por partes (Sun y Han, 2001).

De acuerdo a Liu y Kapur (2007) cuando la tasa de falla es constante, se asume por defecto que el sistema no sufre ningún proceso de degradación a causa de su edad o alguna condición especial que pueda incrementar su tendencia hacia la falla. En otras palabras, si la falla ocurre, lo hace como un evento aleatorio sin dependencia alguna del tiempo global de operación. En forma análoga, cuando se suponen tasas de reparación constantes, el modelo ignora los posibles efectos de la disponibilidad de los recursos, y de la eficiencia misma de las actividades de mantenimiento sobre los tiempo hasta la reparación del sistema (Platis et al., 1998).

A pesar de estas consideraciones, en la práctica generalmente se prefieren asumir funciones de riesgo constantes y conocidas, estimadas bajo el supuesto de estacionariedad a fin de aprovechar la claridad y simplicidad matemática de los modelos homogéneos (Ermolin, 2007). No obstante, muchos autores cuestionan repetidamente la validez de esta práctica. Para Zhang y Horigome (2001), Retterath (2004), Bukowski (2006), Liu y Kapur (2007), Birolini (2007), Han et al. (2008), Kumar y Jackson (2009), Liu y Huang (2010), entre otros, las CMTC-H presentan un serio inconveniente.

La hipótesis de que las intensidades de transición son funciones constantes en el tiempo solo aplica a sistemas que no envejecen con la edad, o son completamente independientes a cualquier otro tipo de fenómenos. El problema es que en realidad el estado del sistema y la cantidad de tiempo que permanece en él no sólo dependen de la condición actual, sino también de cuánto tiempo el sistema ha estado en uso u operación (Liu y Huang, 2010).

Para Liu y Kapur (2008) estos casos exigen el empleo de CMTC-NH. Esta técnica aplica para sistemas cuyas tasas de riesgo dependen del tiempo global del proceso al tratar con tasas de falla y reparación variables. Pero, tal como se indico en la sección 4.9, a la solución numérica de esto modelos subyacen grandes esfuerzos y limitaciones, lo que explica porque no han sido usadas con suficiente frecuencia en el campo de la fiabilidad. De hecho, en comparación con el caso homogéneo pocas investigaciones se arriesgan a trabajar con esta técnica. Platis et al. (1998), Liu y Kapur (2007), Ermolin (2007), Cui et al. (2007), Liu y Kapur (2008), Lisnianski et al. (2008a), y Liu y Huang, (2010) presentan algunos de los trabajos bien formulados que tratan con CMTC-NH para la evaluación de la fiabilidad.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, en este capítulo se presenta cómo las CMTC-NH, cuya teoría fue explicada en el capítulo anterior, son empleadas para la construcción de un modelo de fiabilidad de un SME.

5.1 Modelo general

Como se describió en la sección 3.1.3, el estado de un SME puede ser representado por la variable aleatoria $X(t)$ que toma valores en el conjunto $\mathfrak{X} = \{0, \dots, v_i, \dots, K - 1\}$. Si $p_{v_i v_j}(\tau, t)$, la probabilidad de que el SME cambie su estado a v_j en el instante de tiempo t cuando se encontraba en v_i en τ satisface la ecuación (4.1), la evolución de un SME a través de sus estados puede ser representado por una CMTC-NH $\{X(t), t \geq 0\}$ con el espacio de estados $\mathcal{X} = \mathfrak{X}$ (Xie et al., 2004). En este caso, los elementos de la CMTC-NH tienen el siguiente significado:

- Los estados representan diferentes condiciones de operación del SME. Puesto que $\mathfrak{X}$ resulta de la función de estructura del sistema, cualquier estado $i \in \mathcal{X}$ se puede definir como un vector $x_i = (x_{1v_i}, \dots, x_{jv_i}, \dots, x_{nv_i})$ donde x_{jv_i} es el estado del j -ésimo componente correspondiente al estado v_i del sistema.
- Las transiciones pueden representar un proceso de degradación o de reparación. Si $g_{x_i} > g_{x_j}$ una transición de la forma $i \rightarrow j$ constituye una falla, menor o mayor dependiendo del número de estados que tienen niveles de rendimiento intermedios. Y si, $g_{x_i} < g_{x_j}$ dicha transición es considerada una reparación (Cui et al., 2007)

5.1.1 Matriz de tasas de transición

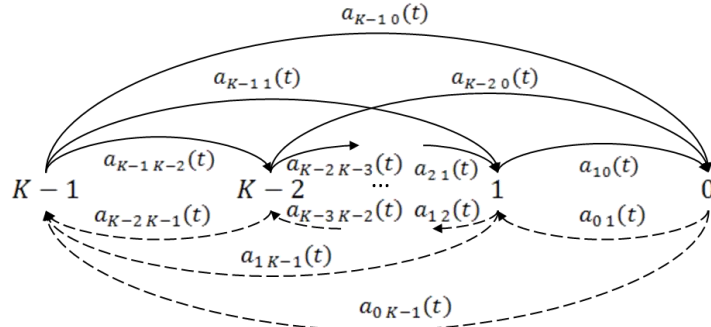
La matriz de tasas de transición $A(t)$ para el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ definida en (4.3), está compuesta por las funciones de riesgo de los tiempos hasta la falla ($h_{aj}(t)$) y reparación ($h_{bj}(t)$) de los componentes cuando se modela un SME reparable. Si $i = (x_{1v_i}, \dots, m, \dots, x_{nv_i})$ y $j = (x_1, \dots, m - 1, \dots, x_n)$ tal $g_{jm} > g_{jm-1}$, entonces $a_{ij}(t) = h_{aj}(t)$ donde g_{jm} es el nivel de rendimiento del j -ésimo componente en el estado m y $h_{aj}(t)$ su tasa de falla; y viceverso, si $i = (x_1, \dots, m - 1, \dots, x_n)$ y $j = (x_1, \dots, m, \dots, x_n)$ tal $g_{jm} > g_{jm-1}$, entonces $a_{ij}(t) = h_{bj}(t)$ (Bao y Cui, 2010).

Puesto que se está tratando con cadenas no homogéneas, las tasas de transición pueden ser cualquier función del tiempo. Es decir, los tiempos hasta la falla o la reparación pueden seguir cualquier distribución de probabilidad, o en efecto, cualquier función característica de las especificadas en la sección 3.5.

5.2 Sistemas reparables

El MM más general es el que representa un SME con fallas y reparaciones mínimas o mayores. Una falla o reparación mínima, implica una transición entre estados sucesivos, mientras una falla o reparación mayor implica un cambio a un estado no adyacente, cuando estos son ordenados en orden creciente o decreciente de su rendimiento (Lisnianski et al., 2010). La Figura 5.1 muestra el Diagrama de Transición para un SME de este tipo donde las líneas punteadas representan las transiciones de reparación.

Figura 5.1. Diagrama de Transición típico para un SME reparable.



Fuente. Adaptado de Lisnianski et al. (2010)

5.3 Medidas de fiabilidad

El desarrollo completo del modelo implica el cálculo de la distribución de probabilidad para la CTMC-NH que representa el sistema. Para ello se plantea el sistema de EDOs definidas en (4.4) y (4.5) y se emplean cualquiera de las técnicas descritas en la sección (4.8) para obtener su solución.

Una vez se conocen todas las probabilidades de estado en condición transitoria o estacionaria del proceso, es posible calcular cualquiera de las medidas de fiabilidad descritas en 3.6, excepto la función de fiabilidad $R(t)$. Como lo indican Xie et al. (2004) para estimar esta medida se debe construir un MM equivalente al SME original, en el que se asume que el sistema es no reparable, lo que equivale a agrupar todos los estados de falla en uno solo que corresponde a un estado absorbente y representa una falla catastrófica (falla total), lo cual se logra al hacer $h_{bj}(t) = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

5.4 Software de fiabilidad

Hay algunos software comercialmente disponibles para la evaluación de la fiabilidad que incluyen módulos para MM. Ejemplos de estos son:

- Reliability Workbench V10.3 (Isograph)
- RAM Commander (Advanced Logistic Development)
- MEADEP - Measurement - Based Dependability Analysis Tool (Reliass)
- Windchill Markov (PTC)
- ITEM ToolKit Module (Itemsoft)

Todos contienen una interfaz para la construcción del Diagrama de Transición, reportes gráficos y numéricos, y el cálculo automático de medidas de fiabilidad predeterminadas como la disponibilidad y el *MTTF*.

Entre la lista señalada de software, sólo en el primero de ellos es posible incluir tasas de transición variables. El modulo Markov Analysis de Reliability Workbench V10.3 emplea técnicas de integración Runge-Kutta, genera gráficas de los resultados transitorios y estacionarios del proceso, y permite la exportación de datos a hojas de cálculo y documentos de texto. Sin embargo, requiere la compra de licencia, una vez que la versión de prueba libre ha caducado.

El resto de software son comparativamente limitados, y se limitan al caso de cadenas homogéneas.

6. MODELOS DE DINÁMICA DE SISTEMAS

En términos generales, la Dinámica de Sistemas (DS) tiene el siguiente objetivo: capturar las características de los sistemas dinámicos por medio de la modelación y la simulación (Schwaninger y José Pérez Ríos, 2008). Nuhoglu y Nuhogu (2007) la definen como una metodología para analizar los componentes de un sistema que incluye relaciones de causa-efecto, con formulaciones lógicas, demoras en el tiempo y bucles de retroalimentación

El origen de la DS data de la publicación del libro “Industrial Dynamics” de Jay W. Forrester en 1961, donde fue definida como el estudio de las características de los procesos de retroalimentación de información y materiales en la actividad industrial, llevado a cabo con el fin de evidenciar el cómo la estructura, las políticas, y las demoras afectan su comportamiento (Chen y Jeng, 2002). Aunque sus primeras aplicaciones se dan en las ciencias de la administración, se ha desarrollado gradualmente como una herramienta útil en el análisis de problemas sociales, económicos, físicos, biológicos y ecológicos donde se trata en general con sistemas suaves (Nuhoglu y Nuhogu, 2007).

Desde el punto de vista teórico, la DS tiene sus raíces en la ingeniería de control (Lane, 2000). De acuerdo a Richardson (2011), esto explica la importancia de los efectos de la retroalimentación como fuertes determinantes del comportamiento de los sistemas. A estas características se refieren Chen y Jeng (2002), para explicar el por qué la DS es usualmente considerada una teoría de estructuración de sistemas de bucle cerrado, a través de la cual es posible construir y analizar un modelo mediante un procedimiento sistemático.

Un modelo de DS (MDS) equivale entonces una representación de un elemento complejo como una estructura de retroalimentación, donde el efecto de la interacción y la interdependencia entre sus elementos es definido por bucles, generalmente no lineales, y es medido o acumulado por un conjunto de variables desde las cuales se define la condición del sistema (Größler et al., 2008).

Se han propuesto diversas formas para construir un MDS. Las más generales y empleadas son los Diagramas Causales y los Diagramas de Forrester (o Diagramas de Flujo y Niveles). Ambos consisten de un conjunto de símbolos para representar varios componentes del sistema, y las relaciones lineales o no lineales existentes entre ellos.

Matemáticamente, dicha simbología se traduce en un conjunto de EDOs, normalmente no lineales, que son resueltas recursivamente como funciones del tiempo (Jiménez et al., 2004). Estas ecuaciones contienen variables de nivel que definen el estado del sistema y tasas de cambio para cada una de ellas (Macal, 2010).

La solución numérica de este sistema de ecuaciones, equivale a una simulación del modelo, la cual, ejecutada bajo diversos valores de sus parámetros, permiten analizar la dinámica del sistema, identificar políticas óptimas y mejorar su comportamiento a través de cambios

en su estructura (Pfahl y Lebsanft, 1999). Para Schwaningera y José Pérez Ríos (2008) estas capacidades se han fortalecido gracias al desarrollo del software y a las herramientas computacionales que incluyen aplicaciones para la evaluación y el análisis de los modelos.

Bajo estas consideraciones no es de sorprender que la mayoría de los trabajos sobre DS se concentren en aplicaciones y problemas prácticos. Sin embargo, esto ha sido a expensas del desarrollo teórico de la metodología. Como lo indican Kulhavy (2007), las pocas publicaciones que tratan la teoría de los MDS se preocupan en el estudio de las estructuras o patrones de comportamiento típicos, más que en su fundamentación teórica.

Evidencia de ésto, es que las pocas excepciones que se han preocupado por presentar las formulaciones lógicas y matemáticas para la DS, no tienen menos de una década de haberse publicado. Entre ellos, el trabajo de Toyoda y Mawatari (1991) que además de llamar la atención en las críticas de la metodología, se preocupan por presentar sus conceptos y principios matemáticamente a través de definiciones y estudiar las características estructurales de los modelos usando la topología combinatoria.

Respecto a las técnicas de representación, las reglas de construcción para los Diagramas Causales y de Forrester tienen las mismas dificultades desde el punto de vista teórico. Aunque su empleo en la modelación se ha vuelto imprescindible, en la mayoría de los casos no son estructuralmente validados. Burns (1977, 2001), Burns et al. (1979), Dolado y Torrealdea (1988), y Burns y Ulge (2002a, 2002b) se preocuparon por presentar algunos de los fundamentos conceptuales detrás de la construcción y significado de estos diagramas.

A pesar de las dificultades, en las siguientes secciones se describe la metodología de DS, haciendo caso tanto a sus formulaciones teóricas como prácticas. Por tanto, se incluye la descripción del proceso y las formas de modelación, así como algunas características del software de DS los cuales son empleados para la construcción y análisis de los MDS.

6.1 Caracterización de la Dinámica de Sistemas (DS)

En términos generales, las diferentes definiciones encontradas en la literatura para la DS exponen el mismo conjunto de características, relacionadas con los conceptos de retroalimentación, estados y flujos. Para el enfoque del presente trabajo se considera pertinente citar la definición dada por Richardson (2011), para quien “la DS es el uso de mapas informales y modelos formales soportados por simulación en computador para descubrir y comprender fuentes endógenas del comportamiento de los sistemas”. Esta definición considera las tres características fundamentales en la modelación con DS, las cuales son descritas por Lane (2000) como sigue:

- Los modelos se basan en bucles de retroalimentación, los cuales corresponden a una secuencia cerrada de causas y efectos entre los elementos del sistema y definen su progreso a través del tiempo.
- Simulación por computador. Los comportamiento de las variables relacionadas sólo puede ser explorado por simulación con soporte tecnológico.

- Evaluación de políticas. Es tal vez la característica más diferenciadora respecto a otras técnicas al permitir que el sistema sea analizado a través de diferentes escenarios para cada uno de los cuales se ejecuta una simulación.

6.2 Modelación de Dinámica de Sistemas

Las características señaladas por Lane (2000) están relacionadas con el proceso de modelación propiamente dicho. Sin embargo, Aracil (1995) desarrolla una mejor descripción en la cual se distinguen tres etapas.

1. Conceptualización del sistema. Comprende la descripción clara del sistema, y de cuán adecuado es para ser descrito desde el enfoque de DS. Con base en dicha descripción se construye un Diagrama Causal.
2. Construcción del modelo. Implica la conversión del Diagrama Causal en el Diagrama de Flujo, y la definición del conjunto de ecuaciones que relacionan las variables en este último. La mayoría de los software para la modelación de DS permiten escribir dichas expresiones directamente desde el entorno gráfico y ejecutar la simulación, la cual consiste en la resolución numérica del sistema de EDOs relacionado.
3. Análisis. El modelo se somete a una serie de ensayos y simulaciones con el fin de analizar la sensibilidad del sistema en relación con los patrones y valores numéricos de sus parámetros.

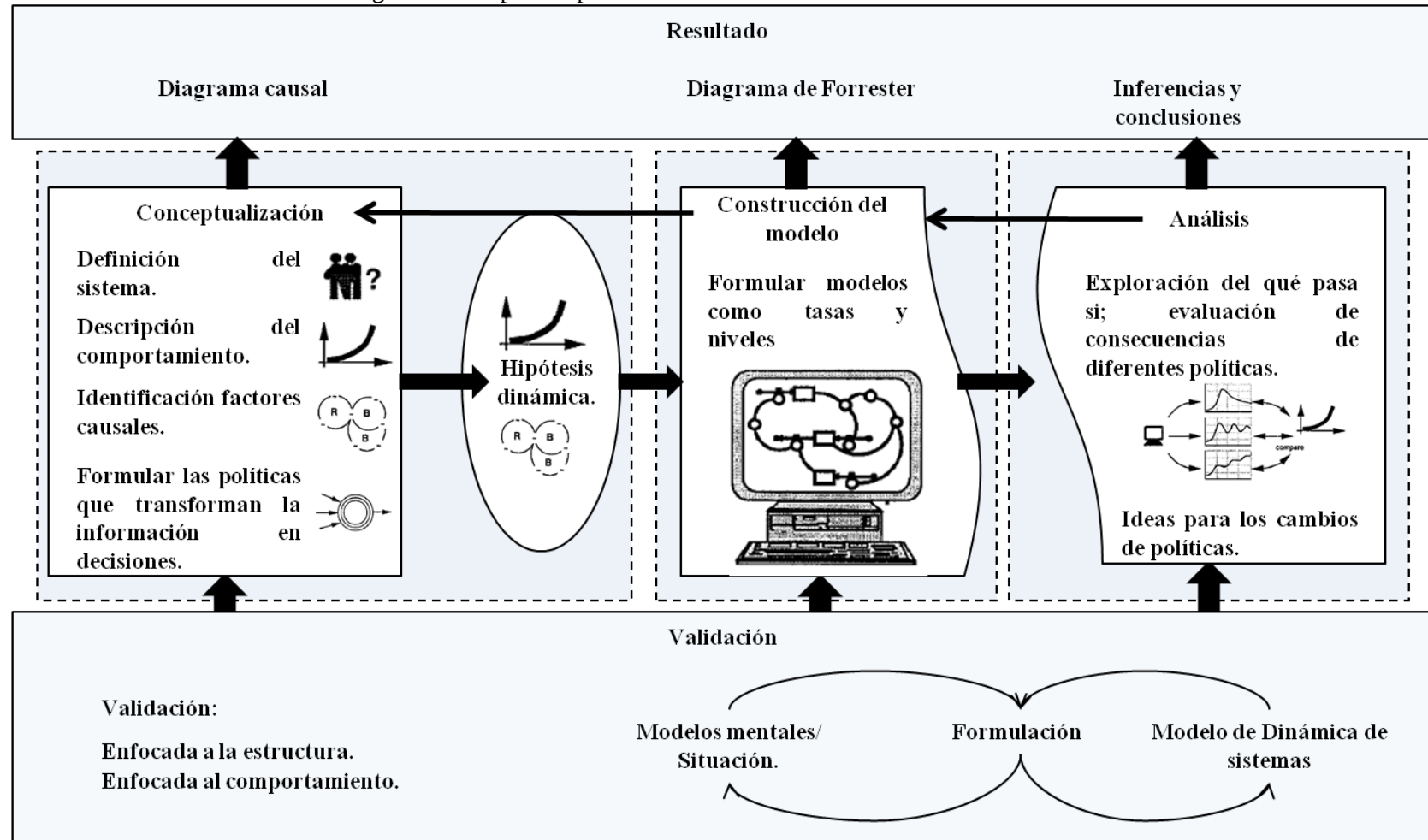
La Figura 6.1 ilustra la secuencia de pasos descritos previamente. Las flechas indican pasos hacia atrás en el proceso, indicando que la modelación no consiste en recorrer secuencialmente estas etapas por orden correlativo, sino que en algunas ocasiones es necesario repetir una de ellas para reconsiderar algunos supuestos o variables. Es por tanto, un proceso de modelado iterativo que combina elementos conceptuales y operativos de la DS.

6.2.1 Objetivos de la modelación de DS

En la literatura es posible encontrar diferentes motivaciones para el empleo de los conceptos y herramientas de la DS. Sin embargo, detrás de estas aplicaciones normalmente se puede asociar un objetivo: realizar predicciones.

En algunos casos, especialmente en problemas relacionados con las ciencias físicas, el nivel de precisión numérica necesaria en los resultados pueden ser elevados y deben permitir predecir con exactitud qué valores tomarán algunas magnitudes en un instante de tiempo futuro. Este enfoque supone que el modelo es prácticamente exacto, tanto respecto a los valores de los parámetros, como a las relaciones funcionales entre las variables. Sin embargo, en la mayoría de los casos no interesan los valores numéricos precisos, sino más bien los patrones o tendencias de evolución de las variables. Aquí el modelo se emplea más como una herramienta de previsión que de predicción (Aracil, 1995).

Figura 6.1. Etapas del proceso de modelación de Dinámica de Sistemas



Fuente. Basado en Lane (2000).

En otros casos, los modelos son empleados como instrumentos para analizar los distintos modos de comportamiento que puede mostrar el sistema. Aquí no se trata de anticipar o prevenir, sino más bien de suministrar información sobre el efecto de cambios o acciones sobre el sistema (Bianchi, 2002).

6.3 Modelos de Dinámica de Sistemas (DS)

En la DS se emplean tres formas complementarias de construcción de modelos: verbal, gráfica y matemática, los cuales resultan de etapas diferentes del proceso de modelación ilustrado en la Figura 6.1.

Los modelos verbales corresponden a las descripciones escritas o expresiones orales del sistema que reflejan las ideas explícitas e implícitas de su estructura y comportamiento. Los modelos gráficos están formados por diagramas que proporcionan un nexo de unión entre los modelos verbales y los matemáticos (Drew, 1995). Los más usados son los Diagramas Causales y de Forrester en diferentes niveles de abstracción. Estos diagramas usualmente consisten de un conjunto de iconos gráficos para denotar la semántica de varios componentes del sistema de manera que son especialmente útiles para conceptualizar y comunicar el modelo (Chen y Jeng, 2002) Por último, los modelos matemáticos permiten hacer la caracterización numérica de dichos sistemas, necesaria para la simulación en computador. En los literales siguientes se describen estos modelos y el lenguaje correspondiente a cada uno de ellos.

6.3.1 Diagramas Causales

De acuerdo a Sterman (2000) un Diagrama Causal es una representación gráfica de un conjunto de variables conectadas de acuerdo a las influencias causales entre ellas. Está compuesto de elementos y flechas. Estas últimas son llamadas vínculos causales y relacionan los elementos en función del tipo de dependencia entre ellos y se marcan con los signos (+) y (–), siguiendo las siguientes reglas:

- Un vínculo causal desde un elemento X a otro elemento Y es positivo (+), si: a) X incrementa a Y , o b) un cambio en X produce un cambio de Y en la misma dirección en cualquier instante de tiempo t .
- Un vínculo causal desde un elemento X a otro elemento Y es negativo (–), si: a) X disminuye a Y , o b) un cambio en X produce un cambio de Y en la dirección opuesta en cualquier instante de tiempo t .

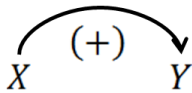
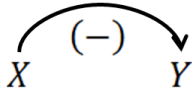
La Tabla 6.1 resume la representación simbólica e interpretación matemática de cada tipo de vínculo causal.

6.3.1.1 Definición formal de un Diagrama Causal

Burns (1997) define un Diagrama Causal como la representación gráfica de una tupla $D = (Q; C; m)$ donde cada par $(Q; C)$ es un gráfico dirigido, con Q y $C \in Q \times Q$ los

conjuntos de elementos y de vínculos causales entre ellos, respectivamente. De ahí que cualquier $c_{ij} = (q_i, q_j) \in C$ es una pareja ordenada de elementos q_i y q_j indicando que el vínculo causal entre ellos comienza en q_i y termina en q_j . Además hay una función $m: C \rightarrow \{\pm 1, 0\}$ la cual asigna a cada relación c_{ij} , $(+1)$ para una dependencia positiva, (-1) para una negativa, y 0 si no existe vínculo entre los elementos i, j . Las dependencias representadas por $(+1)$ y (-1) corresponden a los tipos de vínculos causales caracterizados previamente, y se definen para cada par (q_i, q_j) asumiendo todas las demás relaciones constantes.

Tabla 6.1. Representación simbólica e interpretación en un Diagrama Causal.

Símbolo	Interpretación
	En términos de variables acumulativas, X adiciona a Y .
	En términos de variables acumulativas, X resta a Y .

Fuente. Basado en Sterman (2000).

6.3.2 Diagramas de Forrester

Una característica importante de los Diagramas Causales, es que ellos describen el qué pasa si hay un cambio de un elemento, pero no lo que realmente pasa como resultado de dicho cambio. Cuando se desea conocer el comportamiento del sistema y lo que sucede, se deben analizar todos los elementos interactuando simultáneamente, por lo cual se debe identificar acudir a la simulación por computador (Sterman, 2000). Estas últimas características le corresponden a los Diagramas de Forrester.

Como un Diagrama Causal, un Diagrama de Forrester muestra las relaciones entre elementos de un sistema, sin embargo, éste último diferencia estos elementos de acuerdo a sus características en diferentes tipos de variables, a cada una de las cuales se asocia una representación gráfica particular. Estas variables son básicamente niveles, flujos, auxiliares y conectores (Kirkwood, 1998).

Sin embargo, regularmente se considera la construcción de un Diagrama Causal como un paso fundamental en la etapa de conceptualización del proceso de modelación en DS ilustrado en la Figura 6.1. Por lo tanto, un Diagrama Causal que va a ser empleado para la construcción de un Diagrama de Forrester debe estar en la forma apropiada y atender a las siguientes formulaciones no permitidas (Burns, 2001):

- Bucles de retroalimentación con un único elemento.
- Más de un vínculo que relacione dos elementos diferentes en el mismo sentido.
- Vínculos que tienen más de dos elementos de origen o más de dos elementos de destino.

Teniendo en cuenta lo anterior, Burns y Ugle (2002a) establecen que en un Diagrama de Forrester los elementos del sistema pueden ser modelados por medio de una de las categorías de variables y de conectores identificados en la Tabla 6.2. Así, en un sistema que es representado por un Diagrama Causal $D = (Q; C; m)$, se tiene que $Q = Y \cup R \cup V$ y $C = F \cup I$, y además, un bucle de retroalimentación es representado por un conjunto de variables y conectores, el cual tiene por lo menos, un elemento de cada tipo.

6.3.2.1 Definición formal de un Diagrama de Forrester

Formalmente, Dolado y Torrealdea (1988) caracterizan un Diagrama de Forrester como una tupla $DF = (Q; C; ES; TC)$ donde:

- $Q = \{q_1, \dots, q_j, \dots, q_{|Q|}\}$, y q_j representa un elemento de los $|Q|$ (cardinalidad de Q) identificados en el sistema.
- $C = \{b_1, \dots, b_k, \dots, b_{|C|}\}$, donde $b_k = c_{ij}$ es una pareja ordenada (q_i, q_j) con $1 \leq i, j, k \leq |C|$, $i \neq j$, el número total de vínculos causales en el sistema. Cada q_j debe aparecer como mínimo una vez en alguna pareja b_k .
- $ES = \{TV, NA, NE\}$, el conjunto de características que describen los elementos del sistema como sigue:
 $TV = \{(q_j, tv_j), 1 \leq j \leq |Q|\}$, donde tv_j toma valores en los subconjuntos $\{Y, R, V\}$ y se asigna de acuerdo al tipo de variable que representa q_j , como se indica en la Tabla 6.2.
 $NA = \{(q_j, na_j), 1 \leq j \leq |Q|\}$, donde $na_j \in \mathbb{N}^+$ representa el número de elementos q_i , $i \neq j$ que influyen a q_j .
 $NE = \{(q_j, ne_j), 1 \leq j \leq |Q|\}$, donde $ne_j \in \mathbb{N}^+$ es el número de elementos q_i , $i \neq j$ que son influenciados por q_j .
- $TC = \{(b_k, tc_{ij}), 1 \leq i, j, k \leq |Q|, i \neq j\}$ describe los vínculos causales del sistema. Donde tc_{ij} toma valores en los conjuntos $\{F, I\}$ y se asigna de acuerdo al tipo de conector que representa b_k como se indica en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2. Variables en un Diagrama de Forrester

Variable	Conjunto	Símbolo	Descripción
Nivel	Y	$Y(t)_j$	Valor en el tiempo del elemento q_j . Cantidad dinámica.
Flujo	R	$\sum r_{ij}(t)$	Elemento que controla la velocidad de transferencia de una cantidad desde el elemento q_i hasta el q_j . Cantidad dinámica.
Auxiliar	V	$C_{ij}(t)$	Elemento exógeno o intermedio entre variables que establece la relación que controla el flujo $r_{ij}(t)$.
Conector de flujo	F	$i \xrightarrow{b_k} j$	Canal de transferencia de una cantidad entre variables de nivel.
Conector de información	I	$i \xrightarrow{b_k} j$	Canal de transferencia de una cantidad entre variables auxiliares y de flujo, o desde una variable de nivel a una auxiliar o de flujo.

Fuente. Basado en Burns (2001).

6.3.3 Representación matemática

Ossimitz y Mrozek (2008) resumen dos formas matemáticas equivalentes para un Diagrama de Forrester:

1. Ecuaciones integrales. La variable de nivel en un instante dado, es definida como su valor inicial, más la diferencia entre el flujo de entrada y de salida durante el tiempo transcurrido hasta el tiempo de interés.
2. Ecuaciones diferenciales. El cambio neto de la variable de nivel en un instante dado, es igual a la diferencia entre el flujo de entrada y de salida.

Jiménez et al. (2004) describen el significado de estas representaciones como sigue: Las variables de nivel corresponden al estado del sistema y acumulan una cantidad dada desde un conector que es controlado por las variables de flujo. Estas variables de flujo definen cómo se comporta el sistema debido a que determinan la velocidad a la que dicha cantidad entra o sale de la variable de nivel. Esta velocidad depende de la información transmitida instantáneamente sobre el valor de otras variables.

Como lo indica Fuchs (2006a), la forma matemática de un MDS es equivalente al sistema de ecuaciones integrales o diferenciales que representan estas relaciones para todas las variables de nivel. Formalmente, Macal (2010) define la representación matemática de un MDS como $SS = \{Y(t), R(t, Y(t),)\}$, donde $Y(t)$ es el vector de las variables de nivel en el instante de tiempo t y $R(t, Y(t))$ el de las variables de flujo. En su forma estándar esta definición incluiría el conjunto de ecuaciones de las variables auxiliares, sin embargo estas son eliminadas al incorporarlas directamente en la función $R(t, Y(t))$.

Esta definición permite construir modelos continuos basados en sistemas de ecuaciones no lineales, multivariados, y dependientes del tiempo (Jiménez et al., 2004). Las secciones siguientes describen el tipo de ecuaciones que constituyen estos sistemas.

6.3.3.1 Ecuación de nivel

De acuerdo a Fuchs (2006b), si se conocen los flujos instantáneos de entrada y de salida, el valor de una variable de nivel se puede estimar como:

$$Y(t)_j = Y(\tau)_j + \int_{\tau}^t R(u, Y(u))_j du \quad j = 1, 2, \dots, |Q| \quad (6.1)$$

Donde $0 \leq \tau < t$, $Y(t)_j$ es el valor de q_j , $q_j \in Y$ en el instante de tiempo t , y $R(t, Y(t))_j$ el flujo neto instantáneo hacia q_j en t . Para efectos de interpretación y de solución, Ossimitz y Mrozek (2008) consideran más adecuada la representación diferencial. En este caso, el sistema se define en términos de los cambios instantáneos y no sobre algún intervalo de tiempo $(\tau, t]$. Así, derivando (6.1) se tiene que

$$\frac{dY(t)_j}{dt} = R(t, Y(t))_j \quad j = 1, 2, \dots, |Q|. \quad (6.2)$$

6.3.3.2 Ecuación de flujo

La ecuación de flujo que controla la transferencia desde y hacia q_j , $q_j \in Y$, puede ser función de cualquiera de las variables del sistema, tanto de las auxiliares como las de nivel, de aquí que sea expresado en la forma $\mathbf{R}(t, \mathbf{Y}(t))_j$. Este flujo neto total hacia q_j , es la diferencia entre sus flujos de entrada y de salida, $\mathbf{R}_e(t, \mathbf{Y}(t))_j$ y $\mathbf{R}_s(t, \mathbf{Y}(t))_j$ respectivamente (Forrester, 1999).

De acuerdo con Sterman (2000), una forma básica para la ecuación de flujo es definirla como una combinación lineal de los niveles que se relacionan con él. De manera que,

$$\mathbf{R}_e(t, \mathbf{Y}(t))_j = \sum_{i=1}^{|\mathcal{Q}|} r_{ij}(t) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{R}_s(t, \mathbf{Y}(t))_j = \sum_{i=1}^{|\mathcal{Q}|} r_{ji}(t) \quad (6.4)$$

Donde:

$$r_{ij}(t) = c_{ij}(t)Y(t)_i \quad (6.5)$$

Representa el valor de la variable de flujo que va desde q_i a q_j , con $q_i \neq q_j$. Cuando lo esto es cierto, SS consiste en un sistema de EDOs de primer orden lineales.

6.3.3.3 Dominio del tiempo

De acuerdo a Ossimitz y Mroczek (2008) las ecuaciones anteriores, aunque son formuladas tradicionalmente para el caso de tiempo continuo, son compatibles cuando t se considera discreto. Sin embargo, las interpretaciones y correspondencias son diferentes en cada caso.

Cuando t es discreto, se considera que para notar algún cambio en $q_j \in Y$, es necesario que pase una cantidad de tiempo al término del cual se especifica la variable de estado. En este caso, los cambios se relacionan a intervalos de tiempo, y el valor $Y(t)_j$ puede ser calculado conociendo $\bar{\mathbf{R}}(\tau, t, \mathbf{Y}(t))_j$ el flujo neto promedio durante $(\tau, t]$, y el valor al inicio de dicho intervalo $Y(\tau)_j$, calculando:

$$Y(t)_j = Y(\tau)_j + (t - \tau) \cdot \bar{\mathbf{R}}(\tau, t, \mathbf{Y}(t))_j \quad (6.6)$$

Por otro lado, cuando t es continuo, el cambio no se refiere a un intervalo de tiempo. En su lugar, el flujo es una medida de la velocidad a la cual cambia la variable de nivel y es definida para cualquier instante de tiempo, de acuerdo a la ecuación (6.2).

Es claro que los cambios promedios y relativos por unidad de tiempo no son iguales durante un intervalo. Además, (6.2) sólo aplica cuando $\mathbf{R}(t, \mathbf{Y}(t))_j$ es diferenciable, y por tanto, una función continua en todo el intervalo. Sin embargo, cuando $t \rightarrow \tau$, el intervalo de tiempo se hace lo suficientemente pequeño, y el flujo promedio se aproxima al flujo instantáneo en τ . Esta aproximación es la base de los métodos para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen un MDS.

El problema es que mientras dicho limite no sea cierto, y se trata el sistema en el dominio de tiempo discreto, el resultado numérico puede tener importantes diferencias respecto al sistema continuo. Como lo ejemplifica Barlas (2002), un sistema discreto con una variable de nivel puede oscilar e incluso tener una dinámica caótica, mientras su equivalente continuo puede no hacerlo. Esto obliga a que si el modelo es continuo, sea necesario garantizar un valor $dt = t - \tau$ lo suficientemente pequeño. Si no lo es, el comportamiento dinámico generado puede tener diferencias considerables debido a los errores numéricos en la solución.

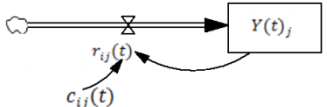
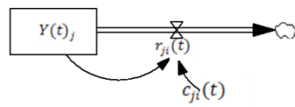
6.4 Patrones de comportamiento de un MDS

Como se señaló en la introducción, uno de los conceptos fundamentales en la DS es el de retroalimentación. De acuerdo con Größler et al. (2008), un bucle está compuesto por relaciones causales entre elementos de un sistema, de manera que cualquier actividad de un elemento tendrá un efecto futuro sobre sí mismo. Esto es así después de una sucesión de relaciones de causa efecto que empiezan y terminan en la misma variable.

Representados en un Diagrama Causal, a cada bucle de retroalimentación se le puede asociar un signo o una polaridad, igual al producto algebraico de todos los vínculos que lo componen. Si el signo resultante es (+) el bucle es positivo o de refuerzo, si es (−) es un bucle negativo o de compensación (Drew, 1995)

En un bucle positivo, una variable se realimenta a sí misma continuamente reforzando su tendencia. Mientras un bucle negativo actúa para contrarrestar la dirección del cambio inicial, haciendo que su comportamiento tienda a equilibrarse (Barlas, 2002). La Tabla 6.3 resume el Diagrama de Forrester y la representación matemática de ambos tipos de bucle.

Tabla 6.3. Bucles de retroalimentación

Tipo	Diagrama de Forrester	Ecuación diferencial
Positivo		$\frac{Y(t)_i}{dt} = c_{ij}(t)Y(t)_i$
Negativo		$\frac{Y(t)_j}{dt} = -c_{ji}(t)Y(t)_j$

Fuente. Elaboración propia basada en Sterman (2000)

6.5 Simulación de un MDS

En general, la presencia de procesos de retroalimentación y demoras en los MDS hacen que estos resulten en modos de comportamiento complejos. Cuando es así, es necesaria la simulación para cuantificar y analizar el comportamiento del sistema (Größler et al., 2008).

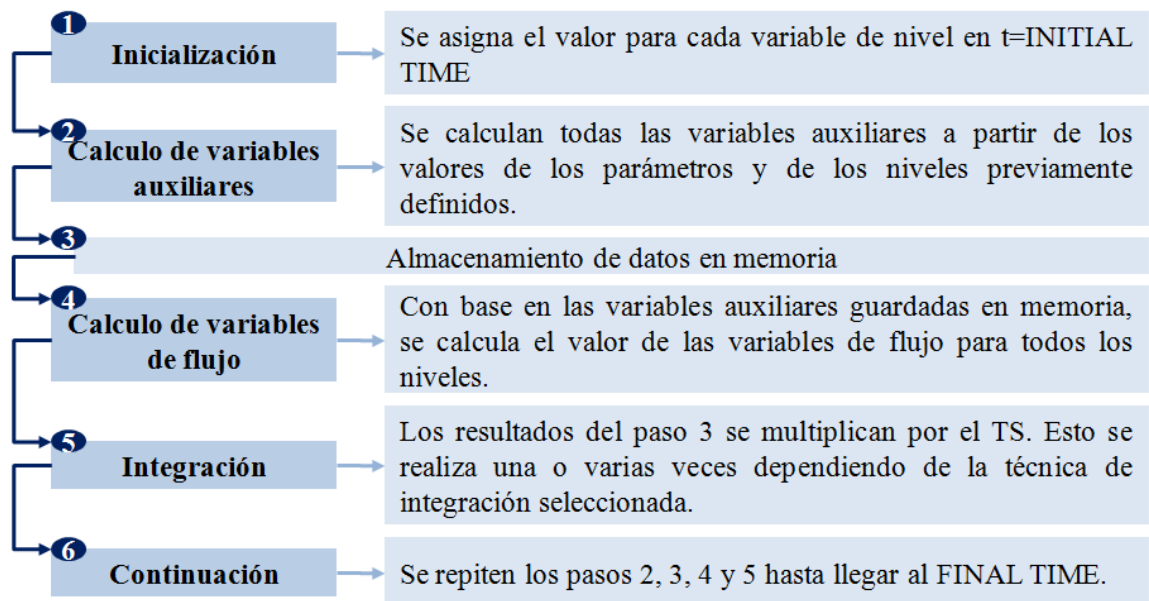
Como lo indica Macal (2010) la simulación de un MDS consiste básicamente en la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales $SS = \{Y(t), R(t, Y(t))\}$, cuyas variables son funciones continuas del tiempo. Para esto, se han desarrollado algunos software especiales para soportar la construcción y la simulación de estos modelos. Los más populares son Stella, Powersim, Optisim y Vensim (Pugh, 2002). Por su disponibilidad, en el presente trabajo se emplea el software Vensim Professional 32 versión 5.3

Al investigar las características de estos software se encuentra que todos tienen la posibilidad de emplear diferentes procedimientos de integración e incorporan herramientas para facilitar el análisis gráfico y numérico de los resultados. A continuación se presentan algunas de estas características.

6.5.1 Métodos de solución.

Como se indicó, los software de DS ofrecen varias técnicas de aproximación numérica para la simulación de los modelos. Para ello realizan una secuencia de cómputo que se puede resumir en los pasos descritos en la Figura 6.2., donde el INITIAL TIME es el instante inicial de la simulación, FINAL TIME el de la finalización y el TIME STEP (TS) el tamaño de paso de la integración.

Figura 6.2. Secuencia de cómputo en un software de DS

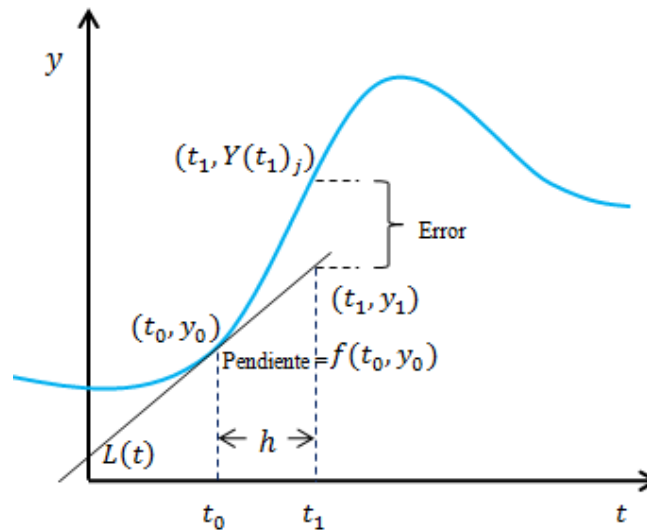


Fuente. Elaboración propia basada en Ventana Systems Inc., (2002).

El paso 5 de la Figura 6.2 requiere haber definido previamente la técnica de simulación. Para ello, Vensim Professional 32 presenta técnicas basadas en los métodos Runge-Kutta. Puesto que los métodos de Euler son en realidad un caso particular de éstos, ambos pueden ser perfectamente definidos a partir de la tabla de Butcher definida en (4.10) y consisten en los cálculos sucesivos de (4.11) y (4.12) hasta llegar al instante t de interés (Zill, 2006). Conceptualmente estas técnicas se basan en la siguiente descripción:

Si $Y(t)_j$ es una solución al problema de valores iniciales $dY(t)_j/dt = f(t, Y(t)_j)$ con $Y(t_0)_j = y_0$, se puede usar la linealización $L(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$, la cual representa una recta tangente a la gráfica $Y(t)_j$ en el punto (t_0, y_0) como se ilustra en la Figura 6.3.

Figura 6.3. Aproximación en el método de Euler



Fuente. Adaptado de Zill (2006)

Ahora si h es un incremento en t , entonces haciendo $t_1 = t_0 + h$, se obtiene $y_1 = L(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)h$, de manera que t_1 es una aproximación al punto $(t_1, Y(t_1)_j)$ sobre la curva solución. Este procedimiento es repetido usando una nueva recta tangente en el punto (t_1, y_1) , obteniendo una aproximación para $Y(t_2)_j$ como $y(t_2) = y_1 + f(t_1, y_1)h$. Continuando, las aproximaciones consecutivas de y_{i+1} se pueden definir recursivamente mediante la fórmula general

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h \quad (6.7)$$

En el software de DS, h es equivalente al TS definido para la simulación.

Basado en variantes del caso anterior, Vensim Professional 32 presenta los siguientes métodos numéricos de integración (Ventana Systems Inc, 2002):

- Euler. Descrito previamente.

- RK2 Auto y RK2 Fijo. Emplean la integración Runge-Kutta de segundo orden (RK2) con TS variable y TS fijo respectivamente.
- RK4 Auto y RK4 Fijo. Realizan la integración Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) con TS variable o TS fijo respectivamente.

En los métodos RK2, conociendo las variables en un instante de tiempo t , se actualizan en el punto medio del TS y se emplean los nuevos valores para calcular las variables en $t + TS$. Mientras en los métodos RK4, la integración es realizada en tres evaluaciones intermedias entre $[t, t + TS]$ que son ponderadas para dar el resultado final.

Por su parte, los métodos RK Auto ajustan automáticamente el tamaño de paso. Para ello calculan las variables en $t + TS$ y en $t + TS/2$. Si para alguna de ellas la diferencia entre los dos cálculos es mayor que la tolerancia absoluta o relativa definida para el método, TS se considera no adecuado. Cuando esto ocurre, el TS se hace igual a la mitad del anterior y se repite el proceso. En su lugar, si se cumplen las tolerancias, TS se duplica y se realizan las mismas evaluaciones. Estos pasos se ejecutan hasta encontrar el mayor tamaño de paso que cumpla con las condiciones de error. Vensim Professional 32 emplea por defecto un error absoluto y relativo iguales a 0.001, aunque se pueden especificar valores menores si se desea (Ventana Systems Inc , 2002).

6.5.1.1 Error y TIME STEP

Los errores en las estimaciones obtenidas por los métodos anteriores están directamente relacionados con el tamaño de paso TS seleccionado. El procedimiento de trazar líneas tangentes en un punto y emplear su linealización para estimar otro punto, implica que $f(t, y)$ es una función constante lo cual no es estrictamente cierto (Zill, 2006).

Si el TS es lo suficientemente pequeño, la solución puede considerarse adecuada para el caso continuo, aunque ello implica desviaciones en su solución. De hecho, los errores de integración local y global para el método de Euler son proporcionales a TS^2 y TS respectivamente. En los métodos RK2 a TS^3 y TS^2 . Mientras que en los métodos RK4 son proporcionales a TS^5 y TS^4 respectivamente (Ventana Systems Inc , 2002).

Sin embargo, otra fuente de imprecisión se debe a los errores de redondeo y truncamiento. Estos son independiente de TS y simplemente surgen porque las computadoras funcionan con aritmética de precisión finita (Zill, 2006). De acuerdo con Sterman (2000) la selección de TS requiere comparar el nivel de precisión en los resultados versus el tiempo y el costo computacional asociado. Esta selección debe ir a la par con la del método de integración cuyas consideraciones se describen a continuación.

6.5.1.2 Selección de método de integración

En general, la elección de una técnica de integración sobre las demás depende del propósito del modelo. Normalmente, si solo interesa conceptualizar el sistema o se trata de modelos

con amplia agregación y vacíos de información, la integración de Euler es apropiada. Sin embargo, cuando se trata con sistemas que contienen relaciones exactas basadas en leyes físicas, la mejor técnica son los métodos Runge-Kutta de alto orden (Sterman, 2000).

No obstante, Pfahl y Lebsanft (1999) señala que ninguno de éstos son del todo adecuados cuando se usan para aproximar sistemas rígidos donde se presentan características dinámicas lentas y rápidas de forma simultánea. Una posible solución a este problema es la utilización de los métodos de paso variable, los cuales ajustan el paso de integración disminuyéndolos cuando se perciben cambios rápidos en el comportamiento de la variable. Para estos casos, se tienen las técnicas RK2 y RK4 Auto. Sin embargo esto tiene un costo extra en comparación con los métodos de paso fijo por la necesidad de efectuar evaluaciones intermedias del conjunto de ecuaciones.

Por su parte el orden del método de integración, aunque eleva el nivel de precisión, adiciona debilidades en el manejo de sistemas con elementos discontinuos (como las funciones PULSE() y STEP() en Vensim que no son derivables en algún instante de tiempo. Estos problemas se manejan mejor con la integración de Euler al tomar en consideración solo el cambio promedio durante el TS y no puntos intermedios en los cuales puede ocurrir la discontinuidad (Ventana Systems Inc , 2002).

Como lo indica Sterman (2000), la selección de la técnica de integración y del TS debería procurar el equilibrio entre la precisión, el tiempo y los recursos computacionales para su solución. Si por alguna razón se percibe algún tipo de inconsistencia o error en los resultados generados por la integración de Euler, debería probarse, primero reduciendo el tamaño de paso de la simulación, y luego escogiendo métodos de mayor orden e ir comparativamente evaluando los efectos sobre la aproximación.

En los casos más exigentes, Vensim Professional 32 permite un tamaño de paso mínimo de 0.0078125 unidades de tiempo, de manera que si el sistema así lo exige, la mayor precisión debería obtenerse empleando el método RK4 Auto con $TS = 0.0078125$.

6.5.2 Funciones y herramientas de análisis

La mayoría de los software de DS incorporan algunas funciones y herramientas de análisis especiales. Comparados con los software matemáticos de propósito general, éstos integran un conjunto de aplicaciones en un solo paquete, facilitando análisis de diferentes tipos.

6.5.2.1 Funciones “Lookup”

Con el fin de hacer los modelos más flexibles, los software de DS generalmente incluyen funciones llamadas “lookup”. Estas son funciones no lineales que mapean los valores de entrada en un valor de salida correspondiente que es empíricamente determinado (Sonnessa, 2004). Matemáticamente, si $Y(X)$ es el efecto de X sobre Y , entonces

$$Y = (x_1, y_1), \dots (x_i, Y(x_i)) \dots (x_n, Y(x_n)) \quad (6.8)$$

Donde $(x_i, Y(x_i))$ es el par de puntos que definen dicha relación. De acuerdo a Größler et al. (2008) esta función es útil, por ejemplo, cuando se trata con variables fuzzy o difíciles de cuantificar, pero que son necesarias incorporarlas en el modelo. Sin embargo, debido a que los software usan interpolación lineal entre puntos especificados, es importante usar un TS pequeño para incrementar la precisión (Moffatt, 1991).

6.5.2.2 Demoras “Delay”

En DS, las demoras representan una acumulación del flujo en un nivel durante un periodo de tiempo, al cabo del cual es completamente transferido en otro elemento del sistema (Ossimitz y Mrotzek, 2008).

Vensim Professional 32 incorpora tres tipos de funciones de demora: DELAY FIXED, DELAY MATERIAL y DELAY INFORMATION. En el primer tipo, el valor del flujo de salida es exactamente igual a de entrada corrida T unidades de tiempo. En las demoras de material (DELAY MATERIAL) todos los flujos de salida se acumulan, hasta que pasa una longitud de tiempo T y se adiciona al flujo de salida; y por último, en las demoras de información (DELAY INFORMATION) los valores de los flujos de entrada más antiguos se descartan, y se da mayor importancia a los valores recientes en los flujos de salida. El empleo de cualquiera de estas funciones depende de las características de los elementos del sistema en particular (Ventana Systems Inc , 2002).

Formalmente, Roy (2000) caracteriza una demora de material por los parámetros T y k . T es el tiempo promedio transcurrido entre algún cambio en el flujo de entrada y su reflejo en el flujo de salida, mientras k indica el modo en que dicho ajuste es logrado a través del tiempo. Ejemplo, dos demoras con $k_1 = k_2$ y $T_1 < T_2$, implica que la demora 2 tomará más tiempo para absorber el cambio, mientras que si $T_1 = T_2$ y $k_1 < k_2$, la demora 2 tendrá una respuesta más tardía, y la mayor parte de su ajuste se logra cerca de T_2 . Teniendo esto en cuenta, el flujo de salida de una demora de material de orden k , puede calcularse como,

$$R_s(t, Y(t))_j^k = Y(0)_j (k/T)^k t^{(k-1)} e^{-kt/T} / (k-1)! \quad (6.9)$$

Barlas (2002) señala que el efecto descrito en (6.9) es equivalente al generado por un conjunto de demoras de primer orden ($k = 1$) exponenciales dispuestas en cascada, donde el flujo de entrada a un nivel es igual al flujo de salida del anterior. Una demora exponencial se logra haciendo $R_s(t + TS, Y(t))_j = Y(t)_j / T$.

Por otra parte, la estructura de las demoras de información es una versión del método de suavización exponencial, donde el flujo de salida del nivel j para $k = 1$, se puede representar como

$$R_s(t + TS, Y(t))_j^k = R_s(t, Y(t))_j + \left((R_e(t, Y(t))_j - R_s(t, Y(t))_j) / T \right) \quad (6.10)$$

Para otros valores de k , $R_s(t + TS, Y(t))_j^k$ también es determinado recursivamente. Básicamente, este mecanismo de demora realiza un proceso de ponderación exponencial por un factor $1/T$, que le da importancia a los valores recientes a expensas de los valores más antiguos (Barlas, 2002).

6.5.2.3 Análisis de sensibilidad

Bianchi (2002) define el análisis de sensibilidad en el contexto de la DS como el procedimiento para determinar la respuesta y la variación de los valores de salida, a cambios alternativos en sus parámetros. Estos últimos corresponden usualmente a aquellos cuya medida puede conducir a errores importantes en el modelo y en la simulación, o los cuales son posibles modificar cuando se evalúan políticas o acciones de interés.

Este tipo de análisis soportan la última etapa en la modelación de DS, de manera que los software disponibles incorporan algunas herramientas para realizarlo. Vensim Professional 32 permite dos modos de análisis de sensibilidad. Uno, en que se realizan cambios sobre varios parámetros del sistema, se corre el nuevo escenario, y los resultados son representados simultáneamente con los del escenario base. El segundo método, consiste en la simulación Monte Carlo, que a diferencia del método anterior en que los cambios en los parámetros y la simulación son realizados manualmente, éste procedimiento es realizado automáticamente un número especificado de veces, cambiando cada vez los valores constantes mediante una técnica de muestreo aleatoria (Dhawan, 2005).

Vensim Professional permite tres modos de muestreo, el univariable, el multivariable y Latin Hipercubico, asignando diferentes distribuciones de probabilidad como la uniforme, la normal, la weibull e incluso distribuciones triangulares. Los resultados sobre las variables de salida se muestran en dos formatos gráficos, donde se distinguen los límites de confianza a través del tiempo para las variables de interés o el número de simulaciones ejecutadas por rango de valores en un instante de tiempo especificado. Estas técnicas de análisis son útiles para entender los límites del comportamiento (Ventana Systems Inc , 2002).

Estas herramientas son empleadas en el capítulo 8.

7. MODELO DE DINÁMICA DE SISTEMAS EQUIVALENTE

Como se señaló en la introducción del capítulo 5, la DS como metodología práctica ha cobrado importancia en el análisis de problemas de diferente naturaleza. Tal como lo señalan Chen y Jeng (2002) el uso de la DS ha trascendido fronteras disciplinarias. Hoy sus aplicaciones van desde las ciencias formales y naturales a las ciencias humanas, cubriendo un amplio espectro de situaciones prácticas y académicas.

De acuerdo con Schwaninger y José Pérez Ríos (2008) lo anterior se debe principalmente a la flexibilidad conceptual de los principios de la DS. Por un lado, porque los elementos de retroalimentación, niveles y flujos se pueden identificar en casi todos los sistemas, y otro porque puede tratar con una gran cantidad de estos elementos sin perder su significado ni el de sus relaciones.

A pesar de esta multidisciplinariedad, matemáticamente la DS se fundamenta en la teoría de sistemas dinámicos no lineales, los cuales son típicamente desarrollados en la matemática, la física y ciencias de la ingeniería (Lane, 2000). Esto es claro cuando un MDS es definido con base en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden definidas por (6.1), para los cambios infinitesimales en cada una de sus variables de nivel.

Sin embargo, en comparación con su aplicación en los campos sociales, económicos y biológicos, los trabajos de la DS que tratan con sistemas técnicos de ingeniería o de las ciencias básicas se encuentran en un número reducido. Algunos de ellos son los trabajos de Fuchs (2006a, 2006b), quién ofrece la siguiente explicación al por qué la DS parece haberse desentendido de estas áreas.

Desde la perspectiva de las ciencias básicas, usar una herramienta de DS parece no ofrecer algo adicional. Por un lado, la modelación matemática formal, con o sin las computadoras, ha tenido una tradición importante en el ejercicio de la ciencia y la ingeniería. En este sentido, podría pensarse que el uso de una metodología, que esta naturalmente relacionada con la modelación de sistemas suaves, representa un retroceso en los enfoques bien desarrollados en las ciencias para sistemas duros.

Por otro lado, Fuchs (2006a) indica que los problemas de modelación pueden resolverse fácilmente, una vez que sus ecuaciones se han definido, y que es posible usar cualquier software matemático de propósito general para resolverlas analítica o numéricamente. En este paso, herramientas tales como Matlab® o Maple® parecen ser intuitivamente mucho más poderosas que los programas de DS desarrollados hasta ahora.

A pesar de lo anterior y a la aparente confinación de la DS a cierto tipo de problemas, no se le ha restado reconocimiento como una técnica flexible para la modelación y simulación de sistemas. Esto se ve reflejado en el reciente interés por compararla con otros métodos más o menos desarrollados. Chen y Jeng (2002), por ejemplo, estudiaron las similitudes entre los MDS y las Redes Neuronales Artificiales, mientras Macal (2010) describió cómo

transformar un MDS en un modelo equivalente de simulación estocástica basada en agentes.

Estos estudios han estimulado discusiones sobre la capacidad de la DS de integrarse con otro tipo de técnicas. De hecho, Kulhavy (2007) habla de la necesidad de estudiar las diferencias metodológicas entre la DS y los métodos estadísticos, con el fin de incorporar características aleatorias a los estados del sistema, en contraste a la práctica actual en que los MDS contienen relaciones determinísticas, y sólo es posible incluir incertidumbre mediante funciones de ruido más que con elementos probabilísticos.

A pesar de esta necesidad, la literatura sigue ofreciendo poca evidencia de aplicaciones de la DS con la teoría de procesos estocásticos. El trabajo más sobresaliente hasta ahora al respecto, es el presentado por Mosekilde y Rasmussen (1983). Estos autores presentan modelos básicos de sistemas con realización aleatoria. Sin embargo, su propuesta no es formalmente desarrollada y carece de la sustentación matemática subyacente.

Uno de los procesos tratados por Mosekilde y Rasmussen (1983) son las CMTC. Basándose en el supuesto de homogeneidad, discuten sobre la propiedad markoviana en los MDS. Aunque aseveran que en efecto esta se cumple, tampoco lo demuestran formalmente. De hecho, su afirmación se basa en lo expuesto por Sahin (1979a) algunos años antes cuando habla de las “oscuridades y ambigüedades” de la DS. Según su descripción los MDS satisfacen la propiedad markoviana gracias al modo en que operan los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales asociadas.

Adicionalmente, y en un trabajo simultáneo, Sahin (1979b) se basó en dicho supuesto para proponer la equivalencia entre un MDS y una CMTD. En este caso, el proceso estocástico se asume homogéneo y estacionario, suposiciones bajo las cuales se demuestra que es algebraicamente equivalente a un MDS lineal. Sahin (1979b) expresa la necesidad de extender la demostración matemática de dicha equivalencia a procesos estocásticos de mayor complejidad, y estudiar formalmente sus implicaciones teóricas y prácticas.

A la par con Mosekilde y Rasmussen (1983), Wood (1983) también habla de representar procesos aleatorios de tiempo discreto, como las Cadenas de Markov mediante la DS. Sin embargo, no es sino hasta el trabajo de Mohapatra y Roy (1991) que se plantean consideraciones adicionales sobre este tipo de modelación. De nuevo, la equivalencia entre las CMTD y los MDS se hace bajo el supuesto de homogeneidad, pero a diferencia de los trabajos previos, incluye un esfuerzo por validarla al comparar la solución obtenida, con los valores teóricos encontrados para sistemas markovianos discretos relativamente sencillos.

Después del trabajo anterior, transcurre casi una década antes de que la equivalencia entre los MDS y los MM fuese nuevamente citada en la literatura. Srinivasa Rao y Naikan (2009) retoman este resultado para proponer lo que llaman Dinámica de Sistemas Markoviana (DSM). Este enfoque consiste en modelar una CMTC como un MDS, y simularlo para hallar la distribución de probabilidad. Aunque su desarrollo incluye el empleo de las herramientas propias de la DS, su trabajo tiene las siguientes restricciones. Primero, e igual

que los anteriores, se concentra en los procesos markovianos homogéneos; segundo, no presenta consideraciones respecto a los supuestos o a la construcción misma del MDS; y tercero, su ejemplo de aplicación se limita a un sistema específico de solo dos estados no reparable, sin hacer las generalizaciones pertinentes a sistemas de mayor complejidad.

Aun con sus limitaciones, estos trabajos plantean las premisas fundamentales de un enfoque que aún ha sido pobremente explorado, la equivalencia matemática y conceptual de los MM a una especie de MDS, la cual se llamará en lo que sigue como Modelo de Dinámica de Sistemas Equivalente (MDSE).

Como se muestra en las siguientes secciones, dicha equivalencia puede ser demostrada también para el caso general de CMTC-NH. Así, reconociendo la potencial aplicación de este enfoque para la solución de los procesos markovianos, en el presente capítulo se precisan las razones que hacen verdadera la equivalencia, y el procedimiento sistemático para la construcción de un MDSE.

7.1 La DS y los MM

A partir de los capítulos previos donde se realiza una descripción detalla de los MDS y de las CMTC, es posible identificar algunos factores en los que ambas formas de modelación convergen o se diferencian. A manera de comparación, a continuación se presentan las discrepancias y similitudes encontradas entre los MDS y los MM.

7.1.1 Diferencias

- Como se señaló en la introducción del capítulo, la DS es tradicionalmente relacionada con la modelación de sistemas blandos propios de las ciencias sociales. Aunque sus raíces se enmarcan en la teoría de servomecanismos y la ingeniería de control, su aplicación en las ciencias básicas y la ingeniería ha sido muy limitada. Por su parte, la aplicación de los MM comprende una gran variedad de problemas en casi todas las disciplinas, desde las ciencias humanas y económicas, hasta problemas que tratan con sistemas técnicos de ingeniería.
- Desde el punto de vista teórico, existe una gran brecha entre los niveles de desarrollo de la DS y los MM. Mientras que la teoría de los procesos estocásticos, especialmente la de las CMTC-H, es bien estudiada tanto desde el campo estadístico como de otras ciencias, los trabajos que tratan con la DS se concentran en su mayor parte en casos aplicados a sistemas del mundo real y pocos sobre los fundamentos teóricos y conceptuales de la metodología. Aunque la DS fue propuesta por primera vez en 1966, seis décadas después de que los MM, las razones para dicha brecha también subyacen en que la DS implica otros modos de tratamiento de un sistema, en los que predomina la conceptualización más que la de solución misma.
- Dado que la DS es regularmente asociada con la construcción de mapas informales contruidos a partir de observaciones empíricas, se consideran más modelos descriptivos

que normativos, cuyos elementos dependen exclusivamente del sistema y del propósito de análisis. Por su parte los MM se encajan dentro de una teoría matemática y estadística bien formulada, cuyos elementos están casi prácticamente normalizados.

- Tradicionalmente, se considera que los MDS tratan con sistemas determinísticos dado que los elementos y sus relaciones de interés son conocidos. Por lo tanto, los valores de $Y(t)_i$ y $c_{ij}(t)$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, |Q|$ están definidos, y son calculados a partir de la función que les es asignada. Por su parte, los MM se refieren a sistemas estocásticos cuya evolución es descrita por una variable aleatoria $X(t)$ que toma valores en un espacio especificado, pero cuyo valor exacto no es conocido y solo se tiene conocimiento de la distribución de probabilidad en un instante de tiempo t .
- La simulación de un MDS se realiza bajo el supuesto de que el dominio del tiempo es continuo. Así, y a pesar de que para efectos de cálculo la línea de tiempo se divide en intervalos de longitud iguales a TS, se supone que el sistema evoluciona de forma continua y los cambios ocurren instantáneamente. Por su parte, los MM como se describió en la introducción del capítulo cuatro, se pueden dividir en modelos de tiempo discreto o continuo. Aunque no se estudia en este trabajo, el primer tipo de modelo es incluso más empleado en la práctica que el de caso continuo.
- En la DS la condición global del sistema se define en términos de los valores y la trayectoria seguida por las variables, especialmente las de nivel. Dicha trayectoria es descrita por las funciones $Y(t)_j$, $j = 1, 2, \dots, |Q|$ que se asumen continuas en todo su dominio. Esta restricción de continuidad no se presenta en los MM. Si el proceso así lo permite, su condición puede ser definida en términos de estados discretos que son previamente identificados como ocurre para las CMTC. Desafortunadamente, los MM con conjunto de estados continuo, son mucho más complejos y costosos, razón por la que son poco conocidos y estudiados incluso en el campo estadístico.
- En la DS, el concepto de retroalimentación es fundamental. Se considera que las relaciones de causa efecto en bucles positivos o negativos son las que determinan la evolución del sistema. Hasta el momento, éste concepto no ha encontrado lugar en los MM.
- Cuando se analizan MDS son tan importantes las condiciones dinámicas como las de equilibrio (cuando los flujos de entrada y de salida en todas las variables de nivel son iguales). Sin embargo, como se señaló en el capítulo cuatro, debido a la dificultad matemática en su solución analítica, la mayoría de los análisis de MM se concentran en estado estacionario del sistema, donde encontrar una solución es relativamente fácil.
- Uno de los principales objetivos de la DS es realizar previsiones respecto al comportamiento de las variables, más que predecir con exactitud sus valores futuros. De aquí, que en la mayoría de los casos no sea tan importante la precisión numérica, como lo es estudiar los comportamientos esperados o dominantes de dichas variables. Esto se

debe porque es permisible la incertidumbre y la simplificación de algunos de los parámetros y de algunas relaciones incluidas en el modelo, cuyo efecto es conocido pero de magnitud vagamente estimada. Lo contrario ocurre en la solución de MM, donde interesa conocer las probabilidades de estado en cualquier instante de tiempo, con el mayor nivel de precisión posible. Así, los valores numéricos son tan importantes como su comportamiento para hacer conclusiones sobre la evolución del sistema.

- Otro de los principales objetivos de la modelación de DS es el realizar análisis de sensibilidad. De hecho, algunos software incluyen herramientas para realizar simulaciones sucesivas variando los parámetros de entrada y obtener automáticamente las estimaciones para las variables de salida. Este análisis del qué pasa sí, no es tan tratado en la modelación de procesos estocásticos, principalmente porque hacerlo requeriría cantidades de tiempo y de recursos computacionales considerables. Así, en la mayoría de los casos, se supone que los parámetros del MM, es decir, sus tasas de transición, son definidas y conocidas con certeza, y solo interesa conocer la distribución de probabilidad para un problema determinado.
- La elaboración de un MDS es soportada a través de la construcción de tres formas de representación: el Diagrama Causal, el Diagrama de Forrester, y el sistema de ecuaciones diferenciales adyacentes. En general, la mayor importancia durante la modelación se le da a las dos primeras formas, que corresponden a las representaciones gráficas del sistema. Esto se debe a que guardan el significado conceptual de los elementos, y porque la mayoría de los software se basan en los Diagramas de Forrester para correr la simulación. Por su parte, aunque un MM puede ser representado por su Diagrama de Transición, en la práctica su solución normalmente se encuentra por software matemáticos de propósito general, en los que se requiere la formulación explícita del sistema de EDOs. Si bien los software que contienen aplicaciones específicas para MM se basan en el Diagrama de Transición, la mayoría solo permite tratar con CMTC-H.
- Aunque simbólicamente un Diagrama Causal es semejante a un Diagrama de Transición, el significado de las flechas dirigidas son diferentes. Mientras que un vínculo causal de la forma $c_{ij} = (q_i, q_j)$ representa que q_i tiene algún efecto sobre q_j , con influencia positiva o negativa, en un Diagrama de Transición una flecha dirigida $i \rightarrow j$ representa un camino posible para la evolución del sistema, y no que el estado i influye de alguna manera al estado j .
- En general, la representación matemática de un MDS puede contener ecuaciones diferenciales no lineales, es decir, las ecuaciones de flujo no satisfacen (6.5). Lo contrario ocurre para los MM cuyo sistema de EDOs definido en (4.4) está compuesto siempre de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Los software para la solución de MDS permiten incorporar casi cualquier tipo de función matemática para definir los valores de las variables de flujo y de nivel, algunos

incluso incluyen herramientas para el análisis de sensibilidad. En cambio, la mayoría de los paquetes con aplicaciones para la solución de MM, limitan la formulación de los parámetros a funciones constantes y de los resultados a un conjunto de medidas predeterminadas.

7.1.2 Similitudes

- La principal similitud entre los MDS y los MM corresponde a su objeto de aplicación, ambos tratan con sistemas dinámicos más o menos complejos. En ambos enfoques la variable independiente es el tiempo t , y el comportamiento del sistema es definido a partir de los valores que toman las variables de nivel en el caso de los MDS y las probabilidades de estado para los MM, a lo largo de un horizonte de tiempo dado.
- Como se señaló en la sección anterior, conceptualmente se entiende que en un MDS el comportamiento está determinado por las funciones exactas establecidas para las variables de nivel y de flujo. Mientras que en un MM dicho comportamiento es estocástico y en consecuencia, no se puede conocer con exactitud el valor futuro del estado del sistema. Sin embargo, aunque un MM represente el camino estocástico que sigue el sistema, el proceso como tal es determinístico, los valores de la distribución de probabilidad para cualquier instante de tiempo pueden ser estimados con exactitud una vez que se han especificado las tasas de transición entre estados. En otras palabras, la solución como tal de un MM constituye un problema totalmente determinístico.
- La afirmación anterior se comprueba cuando se analiza una CMTC-NH a partir del sistema de EDOs definido por (4.4) y (4.5), y se compara con la representación matemática de los bucles de retroalimentación dada en la Tabla 6.3. Ambos casos corresponden a ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes variables.
- En la práctica, cuando se emplean MM la solución numérica que es obtenida a través de software matemático o por las aplicaciones especializadas, se basan en el uso de técnicas numéricas como el método Runge-Kutta. Este algoritmo también es el empleado por los software de DS, los cuales permiten escoger métodos de diferente orden.
- Tanto en los MDS como en los MM, existe un tipo de variable para medir alguna característica del sistema. En el primer caso, las variables de nivel pueden tratarse, por ejemplo, del número de personas, el nivel de ventas o la cantidad de dinero, mientras en un MM dicha medida corresponde a las probabilidades de estado.
- Un segundo tipo de variable está presente en ambos modelos. Las variables de flujo y las probabilidades de transición, ambas son velocidades a las cuales cambia una medida del sistema, y sus dimensiones se relacionan con la unidad de medida del tiempo. Por ende, pueden esperarse funciones de flujo que midan el número de personas por año que nacen, las ventas semanales en una bodega o los gastos diarios de un estudiante. Mientras que en el caso de los MM, se tienen probabilidades de cambio condicional por unidad de tiempo.

- De acuerdo a los trabajos de Sahin (1979a, 1979b), Mohapatra y Roy (1991), y Srinivasa Rao y Naikan (2009) una de las similitudes más importantes, es que en la solución de ambos modelos subyace la propiedad markoviana, de acuerdo a la cual el valor de una variable, sea $Y(t)_j$ o $X(t)$, se puede calcular conociendo únicamente el valor $Y(\tau)_j$ y $X(\tau)$ con $\tau < t$, respectivamente. Macal (2010) señala, sin darle mayor importancia, que esto es cierto, dado que la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales tanto en el caso de MDS como para los MM se pueden calcular recursivamente.

Esta última similitud es una de las más importantes. El hecho de que un MDS satisfaga la propiedad markoviana, sugiere que de alguna manera, un MM puede ser representado mediante DS. Sin embargo, ninguno de los autores que aseveran dicha propiedad demuestra en detalle la razón de su afirmación. Esta es la razón por la cual en la siguiente sección se presenta la demostración formal que hace verdadera estas afirmaciones.

7.1.2.1 Propiedad markoviana en los MDS

La primera sugerencia implícita sobre la propiedad markoviana es presentada por Forrester en su libro *Industrial Dynamics* de 1961, cuando se refiere a que “una variable de flujo puede ser respuesta a la información disponible en algún otro punto particular del sistema”. Esta afirmación implica que la magnitud de una variable de flujo en un instante de tiempo dado puede depender del valor de una o más variables justo en ese instante.

Esto es equivalente a decir que la tasa de cambio instantáneo en el sistema sólo depende de la condición actual, y es independiente de la trayectoria particular a través del tiempo por la cual se llegó a ella. Así, por ejemplo, si hay varias trayectorias para los mismos valores de una variable de nivel en un instante dado, el modelo es insensible a la trayectoria y no interesa cuál de ellas siguió. En otras palabras, si se desea conocer $c_{ij}(t)$ que depende de la variable de nivel del elemento q_i y cuya función puede seguir dos trayectorias $Y(\tau)_{1i}$ y $Y(\tau)_{2i}$, se tiene que no importa si $Y(\tau)_{1i} \neq Y(\tau)_{2i}$ para todo $\tau < t$, siempre y cuando $Y(t)_{1i} = Y(t)_{2i}$.

Para hacerlo más claro, considérese la Figura 6.3 en la que se ilustra la forma en que opera el método de aproximación numérica de Euler, que se emplea para la solución de MDS. Como se ilustra en la sección 6.5.1 el problema de valor inicial $dY(t)_j/dt = f(t, Y(t)_j)$ con $Y(t_0)_j = y_0$, puede resolverse recursivamente por la ecuación (6.7).

Ahora bien, si se tiene un Diagrama de Forrester para un bucle de retroalimentación positiva simple como el ilustrado en la Tabla 6.3, cuya formulación en ecuación diferencial es de la forma $dY(t)_j/dt = c_{ij}(t)Y(t)_j$, una aproximación a su curva solución se puede obtener calculando consecutivamente $y_{k+1} = y_k + c_{ij}(t_k)y_k h$.

Puesto que y_{k+1} y y_k son aproximaciones para $Y(t+h)_j$ y $Y(t)_j$ respectivamente, es evidente que el valor de una variable de nivel de un MDS en el instante tiempo t puede ser calculado sólo conociendo su valor en un instante de tiempo previo. Esto coincide con la

ecuación (4.1) y la definición de Tijms (2003) para la propiedad markoviana que fue descrita en la sección 4.1.

Pese a lo anterior, esta demostración podría ponerse en duda por lo expresado por Größler et al. (2008), quien afirma que la historia acumulada influencia el futuro del sistema cuando éste es afectado por las demoras de tiempo. En efecto, las demoras pueden generar la percepción de que los valores actuales de un nivel dependen de los flujos de entrada pasados, pero estas demoras pueden manejarse de manera tal, que el sistema siga cumpliendo con la propiedad markoviana.

Por un lado, como se describió en la sección 6.5.2.2, los efectos en las demoras de material de tiempo T y orden k son equivalentes a los generados por k demoras exponenciales de primer orden dispuestos en cascada. Puesto que este tipo de demora es de la forma $\mathbf{R}_s(t + h, \mathbf{Y}(t))_j = Y(t)_j/T$, es claro que un MDS que incluye una función del tipo DELAY MATERIAL puede ser modificado al incorporar k niveles en los que el flujo de salida es directamente proporcional a él mismo por un factor igual a $1/T$, y por lo tanto, la propiedad markoviana es satisfecha.

Con respecto a las demoras de información, si se considera la ecuación (6.10), queda demostrado que el efecto de una función DELAY INFORMATION en un instante de tiempo $t + h$ es calculado recursivamente a partir de los flujos de entrada y salida en el instante de tiempo t , al ponderar el flujo neto en t por un factor $1/T$. Como resultado, se considera que este tipo de funciones responden matemáticamente a la propiedad markoviana.

Por otro lado, deben tenerse en cuenta las observaciones hechas en la sección 6.3.3.3 respecto al dominio del tiempo. Como se señaló, es importante hacer que h sea lo suficientemente pequeño para garantizar la calidad de la solución, pues de lo contrario, la aproximación de $y_{i+1} \approx Y(t + h)_j$ adyacente a la discretización del tiempo no es adecuada debido a los errores de integración local y global especificados en 6.5.1.1.

Barlas (2002) llama la atención en que si se asume dominio de tiempo discreto para un sistema que es continuo, tanto el comportamiento como la aproximación pueden presentar serios errores. De acuerdo a la ecuación (6.6), la discretización asume un flujo neto promedio $\bar{\mathbf{R}}(\tau, t, \mathbf{Y}(t))_j$ durante $(\tau, t]$, cuando en realidad se experimenta un flujo neto instantáneo es $\mathbf{R}(t, \mathbf{Y}(t))_j$ que puede variar en dicho intervalo. Los errores de integración y de truncamiento que sobrevienen a esta aproximación harían inválida la propiedad markoviana.

En conclusión, un MDS típico cumple con el supuesto markoviano, siempre que h , es decir el TS definido para la simulación, reduzca los posibles errores debido a la discretización. Habiendo demostrado esto, es posible pensar que un MDS puede ser equivalente a

cualquier otro sistema que posea dicha propiedad, como es el caso de los MM. La siguiente sección establece dicha equivalencia entre los MDS y las CMTC-NH.

7.2 Equivalencia entre un MDS y una CMTC

Como se presentó en la sección 4.8, la solución de una CMTC consiste en encontrar su distribución de probabilidad para algún instante de tiempo t , sea en estado transitorio o estacionario. Para ello se debe solucionar el sistema de EDOs de primer orden lineales definidas por las ecuaciones (4.4) y (4.5) las cuales se reescriben como sigue:

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=0}^r a_{ij}(t)p_i(t) \quad j = 0, 1, \dots, r \quad (7.1)$$

$$\sum_{j=0}^r p_j(t) = 1 \quad (7.2)$$

Donde j es un estado de la CMTC, $a_{ij}(t)$ la tasa de transición de i a j , y $p_j(t)$ la probabilidad de que el sistema se encuentra en el estado j en el instante de tiempo t .

Desarrollando parcialmente (7.1) se tiene que

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^r a_{ij}(t)p_i(t) + a_{jj}(t)p_j(t) \quad j = 0, 1, \dots, r \quad (7.3)$$

Ahora, de acuerdo a (4.2) se hace

$$a_{jj}(t) = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^r a_{ji}(t) \quad (7.4)$$

Que reemplazando en (7.3) genera la siguiente expresión para (7.1)

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^r a_{ij}(t)p_i(t) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r a_{ji}(t)p_j(t) \quad j = 0, 1, \dots, r \quad (7.5)$$

Por otro lado, recordando la representación en ecuaciones diferenciales para un MDS, dada en la ecuación (6.2), ésta se puede reescribir como

$$\frac{dY(t)_j}{dt} = R_e(t, Y(t))_j - R_s(t, Y(t))_j \quad (7.6)$$

Donde $Y(t)_j$ representa el valor de la variable $q_j \in Y$ en el instante de tiempo t , y $R_e(t, Y(t))_j$ y $R_s(t, Y(t))_j$ los flujos totales de entrada y salida a dicho nivel respectivamente. Cuando se permite que estos flujos sean combinación lineal de las demás variables de nivel, tal como se definió en (6.3) y (6.4), se tiene que:

$$R_e(t, Y(t))_j = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{|Q|} c_{ij}(t) Y(t)_i \quad (7.7)$$

$$R_s(t, Y(t))_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{|Q|} c_{ji}(t) Y(t)_j \quad (7.8)$$

Con $c_{ji}(t)$ el valor de la función auxiliar que controla el flujo desde q_j a q_i , y $q_j, q_i \in Y$.

Reemplazando (7.7) y (7.8) en (7.6) se obtiene que

$$\frac{dY(t)_j}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{|Q|} c_{ij}(t) Y(t)_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{|Q|} c_{ji}(t) Y(t)_j \quad j = 1, 2, \dots, |Q| \quad (7.9)$$

Al comparar (7.5) y (7.9), resulta claro que ambos son sistemas de EDOs de primer orden lineales, para los cuales resultan las siguientes equivalencias:

- $p_j(t) = Y(t)_j$. Esto significa que la probabilidad de que una CMTC se encuentre en algún estado j , $j = 0, 1, \dots, r$ es igual al valor de una variable de nivel en un MDS. Así, un estado j de una CMTC puede ser representado por una variable de nivel q_j , cuyos valores corresponden a la probabilidad de estado.
- $a_{ji}(t) = c_{ji}(t)$. Esta igualdad significa que la tasa de transición entre dos estados j e i en una CMTC puede ser representada por una variable auxiliar en un MDS.
- $\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^r a_{ji}(t) p_j(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{|Q|} c_{ji}(t) Y(t)_j$. Indica que la densidad de probabilidad del tiempo hasta la transición $j \rightarrow i$, es equivalente a una variable de flujo de salida desde q_j , que depende de su propio valor $Y(t)_j$ y de la suma de variables auxiliares $c_{ji}(t)$ que controlan los flujos de salida de q_j hacia el resto de elementos q_i .
- $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^r a_{ij}(t) p_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{|Q|} c_{ij}(t) Y(t)_i$. Semejante a la equivalencia anterior, significa que la densidad de probabilidad del tiempo hasta la transición $i \rightarrow j$ es igual a la suma de los flujos de entrada hacia q_j desde q_i , cada uno de los cuales depende del valor de la variable de nivel q_i del cual se originan y son controlados por la variable auxiliar $c_{ij}(t)$ correspondiente.

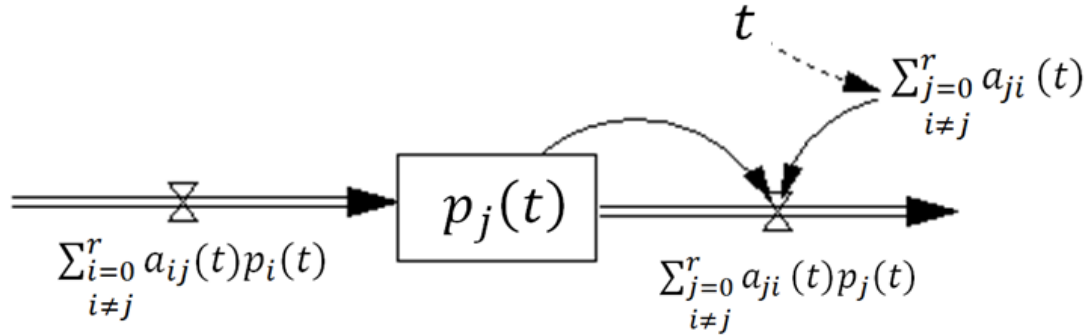
La conclusión más importante, es que una CMTC puede ser representada y resuelta a través de un MDS. Este modelo es denominado aquí Modelo de Dinámica de Sistemas Equivalente (MDSE), llamado así, porque trata de la construcción de un modelo en el lenguaje de DS cuya simulación corresponde a la solución numérica de las probabilidades de estado de la CMTC. Además de las correspondencias previas, un MDSE incluye las siguientes consideraciones:

- La distribución de probabilidad inicial $\mathbf{p}(t_0)$ de la CMTC, contiene los valores iniciales de las variables de nivel en el MDSE. Debe recordarse que la suma de las probabilidades de estado es conservativa y por tanto debe cumplir (7.2).

- Puesto que en una CMTC-NH, $a_{ij}(t)$ son funciones explícitas del tiempo global del proceso t , el MDSE debe incluir un variable " t " igual al tiempo corrido de simulación. Esta puede representarse por una variable de nivel, tal que $dY(t)_{t^n}/dt$ es igual a 1 y cuyo valor inicial es igual a 0. Este tipo de función no es común en los MDS, en los cuales el tiempo es tratado regularmente como una variable implícita.

Así, si se tiene una CMTC, a cada estado j se le puede asociar un Diagrama de Forrester, como el que se ilustra en la Figura 7.1.

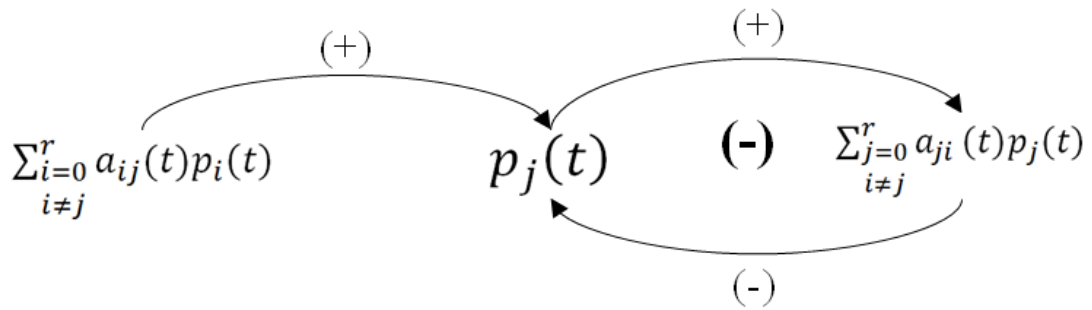
Figura 7.1. Sección de un MDSE correspondiente al estado j de la CMTC



Fuente. Elaboración propia

Al comparar la Figura 7.1 con los bucles descritos y representados en la Tabla 6.3, resulta claro que los flujos de salida responden siempre a un bucle de retroalimentación negativa. Así, a mayor escala, un MDS está compuesto por una serie de bucles de compensación como el ilustrado por la Figura 7.2, los cuales hacen que la ecuación (7.2) sea siempre verdadera.

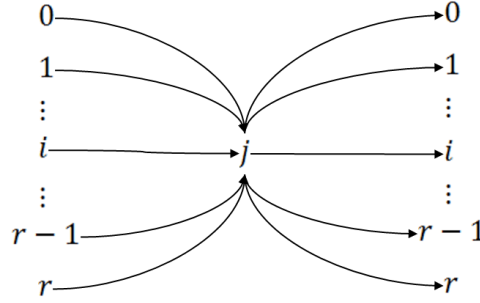
Figura 7.2. Sección del Diagrama Causal asociado a un MDS



Fuente. Elaboración propia

Este diagrama resume las relaciones causales que se asocian a un estado j en un Diagrama de Transición. Por consiguiente, las transiciones de j hacia i , $j \neq i$ representadas en la Figura 7.3 se pueden modelar cada una mediante un bucle de retroalimentación negativa, cuyas representaciones matemáticas son equivalentes a las presentadas en la Tabla 6.3 haciendo $Y(t)_j = p_j(t)$ y $c_{ji}(t) = a_{ji}(t)$.

Figura 7.3. Sección de un Diagrama de Transición correspondiente al estado j



Fuente. Elaboración propia

Con base en las correspondencias gráficas y matemáticas anteriores, el procedimiento de construcción de un MDSE puede ser perfectamente normalizado como se describe a continuación.

7.3 Proceso de construcción de un MDSE

1. Definir la CMTC-NH $\{X(t), t \geq 0\}$ que representa el proceso estocástico de interés.

Los pasos para hacerlo se describen en la sección 4.4. Básicamente se trata de:

- Especificar el conjunto de estados $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots, r\}$, y
- Definir la matriz de tasas de transición $\mathbb{A}(t)$.

Luego, con la información anterior, construir el Diagrama de Transición como se indica en la sección 4.7.

2. Realizar la conversión gráfica del Diagrama de Transición en un Diagrama de Forrester.

Teniendo en cuenta la definición en 6.3.2.1, un MDSE se caracteriza por una tupla $DF = (Q; C; ES; TC)$, donde:

- $Q = \{p_i(t) \forall i \cup a_{ij}(t) \forall i, j \cup a_{ij}(t)p_i(t) \forall i, j \cup t\}$, de manera que las probabilidades de estado, las tasas de transición, las funciones de densidad del tiempo entre transiciones y el tiempo global del proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ son representados cada uno por un elemento q_j .
- Cada pareja $c_{ij} \in C$ representa un vínculo entre $p_i(t)$ y $p_j(t)$, entre $p_i(t)$ y $a_{ij}(t)p_i(t)$, entre $a_{ij}(t)$ y $a_{ij}(t)p_i(t)$, y entre t y $a_{ij}(t)$.
- $tv_j = Y$ si $q_j \in \{p_i(t) \forall i \cup t\}$, $tv_j = V$ si $q_j \in \{a_{ij}(t) \forall i, j\}$ y $tv_j = R$ si $q_j \in \{a_{ij}(t)p_i(t) \forall i, j\}$.
- $na_j \leq r$ si $q_j \in \{p_i(t) \forall i\}$, $na_j = 0$ si $q_j = t$, $na_j = 1$ si $q_j \in \{a_{ij}(t) \forall i, j\}$ y $na_j = 2$ si $q_j \in \{a_{ij}(t)p_i(t) \forall i, j\}$.
- $ne_j \leq r$ si $q_j \in \{p_i(t) \forall i\}$, $ne_j \leq rxr$ si $q_j = t$, $ne_j = 1$ si $q_j \in \{a_{ij}(t) \forall i, j\}$, y $ne_j = 1$ si $q_j \in \{a_{ij}(t)p_i(t) \forall i, j\}$.

- $tc_{ij} = F$ si c_{ij} representa un vínculo entre $p_i(t)$ y $p_j(t)$, $tc_{ij} = I$ si c_{ij} representa la relación entre $p_i(t)$ y $a_{ij}(t)p_i(t)$, entre $a_{ij}(t)$ y $a_{ij}(t)p_i(t)$, y entre t y $a_{ij}(t)$.

Teniendo esto en cuenta, si se tiene un Diagrama de Transición de $\{X(t), t \geq 0\}$ la construcción del Diagrama de Forrester consiste en:

1. Convertir cada vértice j en una variable de nivel $Y(t)_j$ etiquetada con " $p_j(t)$ ".
2. Representar cada flecha dirigida $j \rightarrow i$ como un conector de flujo que empieza en $Y(t)_j$ y termina en $Y(t)_i$, controlado por la variable de flujo $r_{ji}(t)$ etiquetada como " $p_j(t)a_{ji}(t)$ ".
3. Convertir la tasa $a_{ji}(t)$ en una variable auxiliar $c_{ji}(t)$ que puede seguir siendo etiquetada como " $a_{ji}(t)$ ".
4. Crear un conector de información desde $c_{ji}(t)$ hasta $r_{ji}(t)$
5. Adicionar una variable de nivel etiquetada como " t ", y crear conectores de información desde ella a cada variable $c_{ji}(t)$.

3. Definir las ecuaciones de nivel y de flujo para el Diagrama de Forrester.

El diagrama resultante del paso anterior debería construirse en un software de DS para poder ser simulado. Para ello, es necesaria la definición de las ecuaciones adyacentes al modelo, como sigue:

- Para toda variable de nivel $Y(t)_j$ hacer:

$$Y(t)_j = INTEG \left\{ \left(\sum_{i \neq j}^r r_{ij}(t) - \sum_{i \neq j}^r r_{ji}(t) \right), p_j(t_0) \right\} \quad (7.10)$$

Donde $f(t) = INTEG\{f'(t), f(t_0)\}$ representa la integral de la función $f'(t)$ con valor inicial $f(t_0)$.

- Para cada variable de flujo $r_{ji}(t)$ hacer:

$$r_{ji}(t) = c_{ji}(t)Y(t)_j \quad (7.11)$$

- Para la variable de nivel t hacer:

$$t = INTEG\{1, t_0\} \quad (7.12)$$

- Para cada variable auxiliar $c_{ji}(t)$ escribir la función de la tasa de transición $a_{ji}(t)$ asociada con t la variable definida en (7.12).

4. Simulación

El resultado obtenido de los pasos previos corresponde al MDSE propiamente dicho, y la etapa siguiente corresponde a su solución numérica. Ésta se obtiene mediante la simulación del modelo en el software de DS en el que se construyó.

Inicialmente la simulación debe ser ejecutada con el TS mayor y la técnica de de integración más simple. Si se evidencian comportamientos caóticos, se procede a reducir TS, y si aún se presentan errores de algún tipo, probar con técnicas de mayor orden. Si se desea la mayor precisión en los resultados, la simulación debería realizarse empleando el menor TS permitido por el software, y la técnica de integración de mayor orden disponible.

Respecto a los parámetros de la simulación, se tiene que:

INITIAL TIME: t_0 . Instante inicial de $\{X(t), t \geq 0\}$

FINAL TIME: T . Periodo de tiempo durante el cual se desea estudiar $\{X(t), t \geq 0\}$.

Sin embargo, para tipicar la CMTC, el FINAL TIME debe hacerse inicialmente grande (por ejemplo, 100 unidades de tiempo), con el fin de notar el comportamiento del proceso en el largo plazo. Así, si las curvas de $Y(t)_j \forall j$ se vuelven constantes a partir de algún instante de tiempo, la CMTC es regular, y ergódica si ninguna tiende a cero.

Aunque la construcción de un Diagrama Causal D es una etapa importante en la modelación normal de DS, no es posible hacer una correspondencia conceptual clara entre éstos y los Diagramas de Transición. La relación causa-efecto en cada pareja $c_{ij} = (q_i, q_j)$ en D y el tipo de dependencias descritas en la Tabla 6.1 no se pueden establecer de inmediato desde un Diagrama de Transición donde la flechas dirigidas que representan $i \rightarrow j$ sólo expresa un posible camino de $\{X(t), t \geq 0\}$ y no establece algún tipo de relación entre i y j . De aquí, que la conversión se haya planteado directamente desde un Diagrama de Transición a uno de Forrester.

7.4 Ejemplo y validación de un MDSE

Con el fin de demostrar numéricamente la equivalencia encontrada en forma analítica en la sección 7.2, considérese un sistema como el de la Figura 5.1 con sólo dos estados de operación. Los pasos para la construcción del MDSE para este proceso se describen como sigue:

1. Definir la CMTC-NH $\{X(t), t \geq 0\}$ que representa el proceso estocástico de interés.

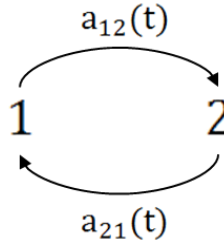
- El conjunto de estados esta dado por $\{1,2\}$. 1 es el estado de operación y 2 el de falla.
- Puesto que se trata de un sistema reparable, son posibles las transiciones $1 \rightarrow 2$ y $2 \rightarrow 1$.
- Las funciones de intensidad matricial son funciones lineales del tiempo, dadas por $a_{12}(t) = t/10$ y $a_{21}(t) = t/20$. Por (4.2), se tiene que $a_{11}(t) = -t/10$ y $a_{22}(t) = -t/20$. Cuya forma matricial definida en (4.3) se presentan como:

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} -t/10 & t/10 \\ t/20 & -t/20 \end{bmatrix}.$$

- La distribución de probabilidad inicial es $\mathbf{p}(0) = (1,0)$.

El diagrama de transición se muestra en la Figura 7.4.

Figura 7.4. Diagrama de Transición para una CMTC-NH de dos estados

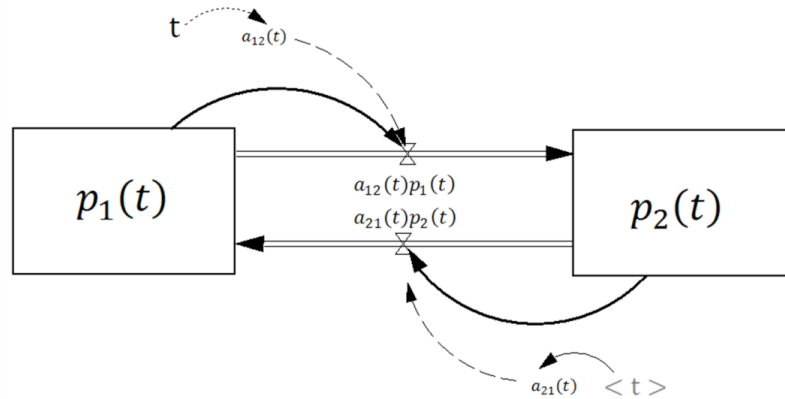


Fuente. Elaboración propia

2. Realizar la conversión gráfica del Diagrama de Transición en un Diagrama de Forrester.

La Figura 7.5 presenta el Diagrama de Forrester resultante de desarrollar cada uno de los pasos descritos en el numeral 2 de la sección anterior.

Figura 7.5. Diagrama de Forrester de un MDSE para la CMTC-NH de la Figura 7.4.



Fuente. Elaboración propia

3. Definir las ecuaciones de nivel y de flujo para el Diagrama de Forrester.

El conjunto de ecuaciones que componente el sistema SS para el Diagrama de Forrester de la Figura 7.5, es como sigue:

$$\text{De (7.10)} \quad Y(t)_1 = \left\{ \text{INTEG} \left((r(t)_{21} - r(t)_{12}), 1 \right) \right\}$$

$$Y(t)_2 = \left\{ \text{INTEG} \left((r(t)_{12} - r(t)_{21}), 1 \right) \right\}$$

$$\text{De (7.11)} \quad r(t)_{12} = Y(t)_1 * c_{12}(t)$$

$$r(t)_{21} = Y(t)_2 * c_{21}(t)$$

$$\text{De (7.12)} \quad t = \text{INTEG}\{1, 0\}$$

$$c_{12}(t) = t/10;$$

$$c_{21}(t) = t/20$$

Donde se emplean las etiquetas " $p_j(t)$ " para $Y(t)_j$, " $p_j(t) * a_{ji}(t)$ " para $r(t)_{ji}$ y " $a_{ji}(t)$ " para $c_{ji}(t)$.

4. Simulación

La simulación del MDSE construido se realiza en el software de DS Vensim Professional 32 con los siguientes parámetros:

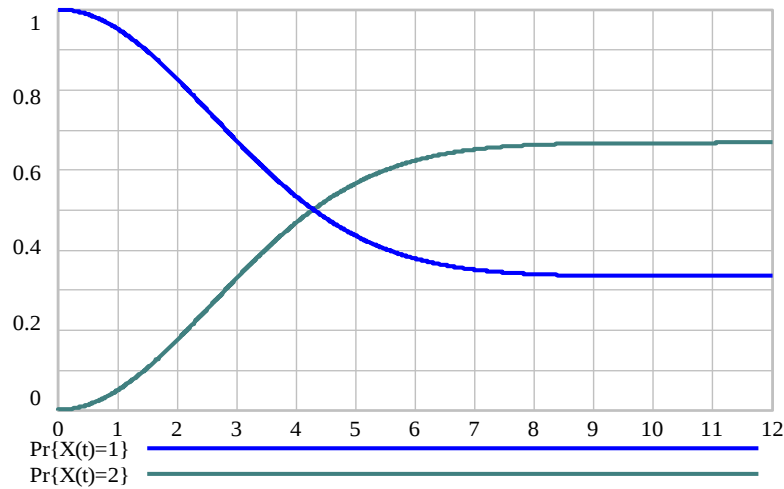
INITIAL TIME: 0
 FINAL TIME: 20
 TIME STEP: 0.0078125
 Técnica de simulación: RK4 Auto.

Así, haciendo caso a la ecuación (4.6), y considerando $t = 20$ un instante de tiempo lo suficientemente grande, dicho periodo de tiempo corresponde a las probabilidades de estado estacionario, de forma que éstas se estiman como:

$$p_1 = p_1(20) = 0.333333;$$

$$p_2 = p_2(20) = 0.666667.$$

Figura 7.6. Probabilidad de estado para la CMTC-NH de la Figura 7.4.



Fuente. Elaboración propia

Ahora, dado que el sistema es relativamente sencillo, es posible encontrar una solución de forma analítica. Se emplea el software Maple® para resolver el siguiente sistema, el cual corresponde a las ecuaciones (4.4) y (4.5) desarrollas para el ejemplo,

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -(t/10)p_1(t) + (t/20)p_2(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = (t/10)p_1(t) + (-t/20)p_2(t) \\ p_1(t) + p_2(t) = 1 \\ p_1(0) = 1, p_2(0) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución corresponde a

$$p_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{3t^2}{40}\right) \quad (7.13)$$

$$p_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{3t^2}{40}\right) \quad (7.14)$$

La Tabla 7.1 presenta las probabilidades de estado $p_1(t)$ y $p_2(t)$ para 20 valores de t , estimadas a partir de la simulación del MDSE y de la solución especificada por las ecuaciones (7.13) y (7.14). Igualmente se presentan los errores absolutos y relativos de los resultados de la simulación respecto al valor teórico, en este caso el generado por la solución analítica.

Tabla 7.1. Comparación de resultados numéricos entre la solución analítica y pos medio del MDSE de una CMTC-NH

	SOLUCIÓN				ERROR ABSOLUTO		ERROR RELATIVO (%)	
	ANALÍTICA		MDSE					
t	P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2
0	1.000000	-	1.000000	-				
1	0.951829	0.048171	0.951829	0.048171	0.000000	0.000000	0.0000	0.0000
2	0.827212	0.172788	0.827211	0.172788	-0.000001	0.000000	-0.0001	-0.0001
3	0.672771	0.327229	0.672770	0.327229	-0.000001	0.000000	-0.0001	-0.0001
4	0.534129	0.465871	0.534129	0.465870	-0.000001	-0.000001	-0.0001	-0.0001
5	0.435570	0.564430	0.435569	0.564429	-0.000001	-0.000001	-0.0002	-0.0002
6	0.378137	0.621863	0.378137	0.621862	0.000000	-0.000001	-0.0001	-0.0001
7	0.350233	0.649767	0.350232	0.649766	-0.000001	-0.000001	-0.0002	-0.0002
8	0.338820	0.661180	0.338819	0.661179	-0.000001	-0.000001	-0.0002	-0.0002
9	0.334866	0.665134	0.334866	0.665133	-0.000001	-0.000001	-0.0001	-0.0001
10	0.333702	0.666298	0.333701	0.666297	-0.000001	-0.000001	-0.0002	-0.0002
11	0.333410	0.666590	0.333409	0.666589	-0.000001	-0.000001	-0.0002	-0.0002
12	0.333347	0.666653	0.333346	0.666652	-0.000001	-0.000001	-0.0001	-0.0001
13	0.333335	0.666665	0.333334	0.666662	-0.000001	-0.000002	-0.0003	-0.0003
14	0.333334	0.666666	0.333334	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0006	-0.0006
15	0.333333	0.666667	0.333334	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0007	-0.0007
16	0.333333	0.666667	0.333333	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0007	-0.0007
17	0.333333	0.666667	0.333333	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0007	-0.0007
18	0.333333	0.666667	0.333333	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0007	-0.0007
19	0.333333	0.666667	0.333333	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0007	-0.0007
20	0.333333	0.666667	0.333333	0.666662	0.000000	-0.000004	-0.0007	-0.0007

Fuente. Elaboración propia.

Como se observa desde los errores absolutos, las diferencias en la estimación se da a partir de la sexta cifra decimal, sin superar un error relativo del -0.0007%. Esta diferencia se explica en el error de integración del método numérico y de los errores de truncamiento. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, esta precisión en las probabilidades de estado es adecuada. Claro está que dependiendo del sistema y del análisis, debe siempre considerarse estos errores y definir en qué medida son aceptables para el fin con el que se construyó el modelo.

7.5 Ventajas de los MDSE

La principal ventaja del desarrollo y simulación de un MDSE es la posibilidad de obtener una solución numérica para las probabilidades de estado de las CMTC-NH. A lo largo de capítulo 5 se hizo énfasis en las dificultades adyacentes a la solución del sistema de EDOs que describen un proceso markoviano de este tipo, y en los problemas presentes en algunas de las técnicas desarrolladas para tratarlos. El hecho de que los software de DS se basen en métodos numéricos, proporciona la flexibilidad necesaria para tratar casi con cualquier tipo de sistemas. Así, siempre que el método de integración y el TS definido para la solución satisfagan los errores permitidos en los resultados, el MDSE proporcionará una precisión aceptable en las estimaciones.

Además, aunque los métodos numéricos presenten errores de integración y de truncamiento, algunas veces el desarrollo de (4.8) es imposible. Por lo que se debe acudir a otros métodos de solución, entre los cuales, los de aproximación numérica son afectivamente los más apropiados, y se pueden ejecutar en software matemáticos de propósito general.

Una diferencia sustancial entre dichos software como Maple® o Matlab® y los software de DS, es que los primeros requieren el planteamiento explícito del sistema de EDOs a solucionar. Esta tarea puede resultar tediosa en la medida que se incrementa la complejidad del proceso markoviano, ya sea por el número de estados, o por el tipo de funciones asociadas a las tasas de transición. En su lugar, los software de DS como Vensim proporcionan una interfaz donde el usuario puede asignar las funciones matemáticas a las variables, lo que resulta más fácil cuando las relaciones ya se han establecido por medio de los conectores de flujo y de información.

De hecho, los software de DS permiten análisis que requieren pasos adicionales o que no son posibles en los software matemáticos. Ejemplo de esto son las herramientas de análisis gráfico, de exportación e importación de datos, y de análisis de sensibilidad como las señaladas en la sección 6.5.2.3. En otro tipo de software, las variaciones en los parámetros implican incluso resolver el problema como si se tratara de uno diferente.

Por otra parte, en comparación con los programas que contienen aplicaciones especiales para la solución de MM, por ejemplo, para los análisis de fiabilidad, la mayoría de ellos solo permiten modelar CMTC-H. Esta condición no está presente en los MDSE. El uso de variables auxiliares permite asignar casi cualquier tipo de función a estas tasas, incluso empleando las funciones “look up” revisadas en 6.5.2.1.

Lo anterior, y el hecho de que las estimaciones de las probabilidades de estado se obtienen para todo el horizonte de tiempo de interés, permiten realizar análisis de los MM tanto en estado transitorio como estacionario. Esto es importante, porque la mayoría de los trabajos procuran concentrarse en el estado de equilibrio simplemente porque la solución del problema se puede obtener más fácilmente. Sin embargo, es cierto que los índices instantáneos de un sistema pueden diferir sustancialmente a los calculados para el largo

plazo. El desarrollo de un MDSE ofrece la posibilidad de estudiar la dinámica del proceso en cualquier instante de tiempo sin limitaciones y sin necesidad de especificar puntos concretos de solución.

La equivalencia planteada puede tener otra implicación práctica. La modelación de procesos estocásticos por MDS permitirá enriquecer los modelos tradicionales en los cuales la dinámica del sistema está completamente definida por funciones determinísticas, e incorporar componentes probabilísticos que pueden ser simultáneamente función de otras características del sistema.

En general, se puede decir que un MDSE incorpora dos características de las metodologías y teorías en las que se fundamenta: La flexibilidad para modelar sistemas complejos y dinámicos de diferente naturaleza, y la precisión requerida en sus resultados para evaluar y predecir el comportamiento de estos sistemas.

7.6 Desventajas

Se pueden citar dos objeciones principales para el empleo de un MDSE:

La primera, relacionada a los problemas conceptuales de modelar procesos estocásticos mediante una herramienta tradicionalmente empleada para sistemas determinísticos. No obstante, como se señaló en 7.1.2, una CMTC en efecto representa el desarrollo de una variable aleatoria en el tiempo, sin embargo, su solución está completamente dada cuando sus elementos (los estados y las intensidades de transición) son definidos. Eventualmente, la dificultad radica en que si las equivalencias entre una CMTC y un MDS no son bien entendidas, podría generar errores tanto en la estructura como en las funciones del MDSE.

La segunda objeción, se refiere a los errores de integrar dos metodologías con niveles de desarrollo teóricos tan diferentes. Como se señaló en la introducción del capítulo, los fundamentos teóricos detrás de la DS no han sido ampliamente estudiados, y casi todo el trabajo se concentra en aplicaciones prácticas. Lo contrario ocurre para los MM en los cuales la teoría está bien desarrollada y aplicada en un sin número de problemas en todas las disciplinas. Así, podría pensarse que la modelación de procesos estocásticos mediante una metodología que aun carece de principios normalizados, implica restarle formalidad a métodos que ya han sido bien formulados.

Adicional, debe tenerse claro que el empleo de un MDSE presenta los mismos supuestos teóricos adyacentes a los MM, especialmente los asociados con la dimensión y el tamaño del espacio de estados. De hecho, los resultados numéricos obtenidos por el MDSE solo serán válidos si se conoce que el sistema satisface los supuestos markovianos.

7.7 Cuando emplear un MDSE

Una inquietud natural que surge del desarrollo de un MDSE, como de cualquier otra técnica, es la pregunta respecto al cuándo debería ser usada. La respuesta debe darse en

función de las ventajas y desventajas del enfoque, de donde se concluye que, desarrollar un MDSE sólo tiene sentido cuando:

- Cuando las tasas de transición son funciones complejas del tiempo, y se necesita tratar con modelos no homogéneos.
- Cuando es necesario incorporar en algún MDS características probabilísticas a los sucesos o relaciones.

En otras palabras, si la CMTC corresponde a un caso simple, para algunos de los cuales se puede encontrar solución analítica o de forma cerrada ya desarrollada, el esfuerzo de construcción puede no ser justificado. Si en cambio, la solución analítica no sirve como es el caso de la mayoría de CMTC-NH, la aproximación numérica y los análisis posibles desde un MDSE facilitarán considerablemente la solución de estos problemas.

Por otro lado, si en un MDS común se ha identificado que uno o varios de sus elementos siguen un comportamiento probabilístico que puede ser representado por un MM, la función de “ruido” como es generalmente tratado en estos casos, puede ser reemplazada por un MDSE de dicho proceso. Claro está, sólo cuando en el objetivo del modelo es pertinente dicha consideración.

7.8 Aplicación en la Evaluación de la Fiabilidad

Algunos de los primeros trabajos que se refirieron a la equivalencia entre los MM y los MDS, presentaron ejemplos de componentes simples que experimentaban falla y reparación. Ejemplo, Wood (1983) se refirió a un sistema de bombeo de 3 maquinas en paralelo, mientras Srinivasa Rao y Naikan (2009) tratan con un solo componente no reparable. Sin embargo, ambos casos asumen solo estados binarios con tasas de falla y reparación constantes.

No obstante, y como se demostró en el capítulo 3, los sistemas complejos se alejan considerablemente de estos supuestos. Se tienen componentes de múltiples estados con interacciones e interdependencias entre ellos, que pueden experimentar tasas de falla y reparación variables con el tiempo de operación. Esto es consistente con lo señalado en la introducción del capítulo 5 sobre las razones de emplear CMTC-NH.

Esto último sugiere el potencial de aplicación de los MDSE para la evaluación de la fiabilidad de SME. En 7.5 se indico que una de sus principales ventajas es el poder tratar con CMTC-NH, casi sin ninguna restricción sobre el tipo función para las tasas de transición. En este sentido, resulta claro que si se tiene un sistema, cuyas condiciones de operación y de falla pueden ser modelados por una CMTC-NH, su solución, si así lo amerita, puede ser encontrada al construir un MDSE y simularlo en alguno de los software de DS disponibles.

En el siguiente capítulo se hace clara esta aplicación al desarrollar un MDSE para una Celda de Manufactura Flexible, y demostrar cómo las herramientas de la DS pueden ser empleadas para facilitar el proceso de solución y de análisis.

8. MDSE PARA UNA CELDA DE MANUFACTURA FLEXIBLE

La construcción de un MDSE para una CMTC-NH facilita y hace conveniente muchos análisis que son arduos o poco prácticos con cualquiera de los métodos de solución presentados en 4.8. Considerando la importancia que tienen los MM en la evaluación de la fiabilidad, resulta claro que el empleo de metodologías y herramientas que faciliten su uso eliminarían algunas limitaciones.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que un MDSE para la fiabilidad comparte los mismos supuesto teóricos de los MM en general, y además comparte las desventajas relativas a su dimensión. No obstante, si se ha comprobado que el sistema modelado satisface la propiedad markoviana, se pueden emplear diferentes técnicas para la reducción de estados, con el fin de disminuir su complejidad, y hacerlo más manejable para efectos de análisis.

Con el fin de ilustrar el potencial y concluir sobre las ventajas y desventajas de su aplicación en la modelación de la fiabilidad de un SME, en el presente capítulo se estudia y desarrolla el MDSE para una Celda de Manufactura Flexible (CMF). En general, una CMF consiste de dos o tres estaciones de trabajo compuestas de máquinas de control numérico, más un sistema de transporte y manejo de materiales, que contiene robots para la carga y descarga de las piezas transportadas por un conjunto de pallets automatizados (Maheshwari et al., 2010).

De acuerdo a Groover (2008), las dos características fundamentales de estos sistemas de producción son el nivel de automatización y su flexibilidad. Como consecuencia y tal como lo indican Savsar (2010) y Maheshwari et al. (2010), la mayoría de la investigación relacionada con CMF se han interesado en métodos y algoritmos de programación con el objetivo mejorar los índices de utilización.

Pero Dasa (2007) señala el impacto de otras características sobre el rendimiento de estos sistemas de manufactura, entre ellas la fiabilidad. Como lo indica, tradicionalmente los estudios y trabajos asumen que las máquinas o robots son 100% fiables, pero el hecho de que esto no sea así, además de afectar otros criterios de productividad genera problemas importantes de programación en la producción.

Lo anterior es más crítico en sistemas como las CMF. Usualmente, una CMF puede operar a índices de utilización entre el 70-80%, mientras que en otros sistemas las máquinas puede alcanzar un nivel de utilización tan bajo como el 20% (Vineyard y Mered, 1992). Así, se debería esperar que los componentes de una CMF experimenten tasas de falla variables, como resultado de su uso acelerado. Savsar (2006) resalta que a pesar de esta característica, los factores que influyen la falla en este tipo de sistema han sido poco estudiados debido a las complejidades prácticas y matemáticas de hacerlo.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, en años recientes algunos autores han prestado atención en el análisis de fiabilidad de CMF. Sin embargo la literatura al respecto sigue siendo limitada. Algunos ejemplos son los trabajos presentados por Savsar (2000), Han

(2006), Savsar (2006), Khodabandehloo y Sayles (2007), Dasa (2007), Maheshwari (2010) y Savsar (2010) quienes emplean diferentes métodos como los Árboles de Fallas, las Redes de Petri y los MM para la evaluación de la fiabilidad de CMF.

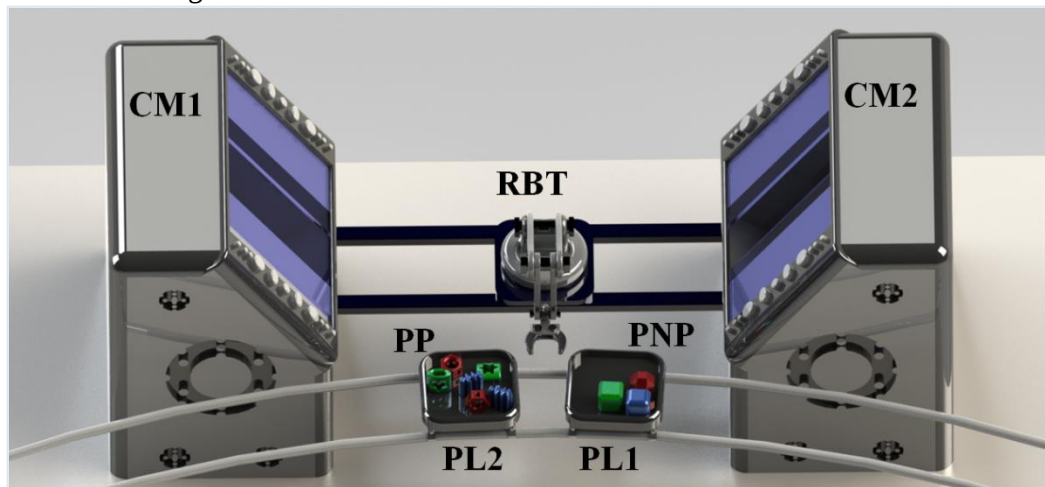
Otro de estos trabajos es el desarrollado por Savsar y Aldaihani (2008), quienes formulan un MM de tiempo continuo homogéneo para la operación de una CMF con dos máquinas, un robot y un sistema de pallets. Su interés fue obtener una solución de forma cerrada para las distribuciones de estado estacionario y generalizar expresiones para las medidas de rendimiento. Su análisis se concentra en modelos homogéneos, de manera que no considera la importancia señalada sobre los efectos de desgaste en estos sistemas.

Así, debido a la complejidad de una CMF, su capacidad de ser modelado como un proceso markoviano y por su pertinencia en el campo de la ingeniería industrial, el análisis que sigue se basa en la construcción de un MDSE para el MM presentado por Savsar y Aldaihani (2008) generalizado para el caso no homogéneo. A continuación se presenta la descripción del sistema bajo estudio, y los resultados obtenidos a partir de su MDSE.

8.1 Sistema de estudio. Celda de Manufactura Flexible.

Como se indicó previamente, el modelo presentado a continuación se basa en la descripción dada por Savsar y Aldaihani (2008) para una CMF compuesta por dos centros de maquinado (CM), un robot para operaciones de la carga y descarga (RBT), y por un sistema de transporte ayudado por dos pallets (PL), tal como se ilustra en la Figura 8.1.

Figura 8.1 Sistema de estudio. Celda de Manufactura Flexible.



Fuente. Elaboración propia con base en Tolio (2009) y Savsar y Aldaihani (2008).

Donde:

PNP: Pieza No Procesada por la CMF

PP: Pieza Procesada por la CMF

CM1: Centro de Maquinado 1

CM2: Centro de Maquinado 2

RBT: Robot

PL1: Pallet para PNP

PL2: Pallet para PP

La descripción de su modo de operación se presenta en el diagrama de flujo y la secuencia de imágenes del Anexo 1, en los cuales, n es la capacidad de PL1 y PL2, y j la etiqueta asignada a cada pieza $j = 1, 2, \dots, n - 1, n$.

8.1.1 Caracterización de una CMF

8.1.1.1 Supuestos sobre el modo de operación

- Las PP pertenecen a una familia de partes cuyos tiempos de procesamiento se pueden suponer prácticamente iguales.
- PL1 y PL2 tienen una capacidad máxima igual a $n = 5$.
- RBT atiende tan pronto como le sea posible el CM que lo requiera, y en el orden en que terminan su operación.
- Los CM inician operación inmediatamente después de que son cargadas.
- CM1 y CM2 son exactamente del mismo tipo, y funcionan de forma independiente.
- Los CM pueden fallar, pero sólo mientras se encuentran en operación.
- Una vez un CM es reparado, es inmediatamente puesto en operación.
- El recurso de mantenimiento se limita a una instalación, de manera que solo puede repararse un CM a la vez, así ambos hallan fallado.
- Los pasos en la Figura 9.1 se reinician una vez que CM1 y CM2 se encuentren ociosos y PL2 esté completo.

Atendiendo a esta descripción, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- i. Los CM y RBT tienen diferentes modos de operación. Los CM además de la falla y la operación, pueden estar ociosos en espera por ser atendido y cargado por RBT. Estos pueden además experimentar envejecimiento y desgaste, por lo que su tendencia a la falla varía con el tiempo de operación. Por su parte, aunque se considera RBT totalmente fiable, puede estar ocioso o en operación, en cuyo caso interesa si el trabajo implica atender CM1 o CM2.
- ii. La condición del sistema obedece a la de los componentes y a la pieza procesada. De hecho, la tasa de producción total depende del número de CM que se encuentran operando. Así, el rendimiento máximo se logra cuando CM1 y CM2 están simultáneamente funcionando. Cuando sólo uno de ellos lo está, el sistema tiene una tasa de producción intermedia, que eventualmente puede ser cero cuando ambas se encuentran ociosas o han fallado. Además, considerando el sistema completo, este puede diferenciarse por la pieza que está procesando en un momento dado.

De acuerdo a las dos consideraciones anteriores, la CMF descrita satisface las condiciones dadas en 3.1, razón por cuales debería considerarse como un SME cuyos modelos se describen a continuación.

8.1.1.2 Modelos de SME para una CMF

La medida de rendimiento del sistema es su tasa de producción. Puesto que los CM son idénticos, realizan las operaciones al mismo nivel de eficiencia, y los tiempos de procesamiento de piezas diferentes se consideran prácticamente iguales, se asume que CM1 y CM2 tienen la misma tasa de producción $\nu = 2$ PP/Hr.

Con base en sus modos de operación, los estados de los componentes se especifican en el Tabla 8.1.

Tabla 8.1. Estados posibles para los componentes de una CMF

j	i	ν_{ji}
CM1	1	0 Ocioso
	2	1 Operando
	3	2 En espera de RBT
	4	3 En reparación
CM2	1	0 Ocioso
	2	1 Operando
	3	2 En espera de RBT
	4	3 En reparación
RBT	1	0 Ocioso
	2	1 Cargando/descargando CM1
	3	2 Cargando/descargando CM2

Fuente. Elaboración propia basada en Savsar y Aldaihani (2008)

Ahora, conforme a la forma en que opera la CMF, la función de estructura L^n establece los estados $x_{v_i} = (x_{PNP\ v_i}, x_{CM1\ v_i}, x_{CM2\ v_i}, x_{RBT\ v_i})$ a partir de las siguientes posibilidades:

- Hay $0 \leq j \leq 3$ PNP en el sistema, ambos CM están operando y RBT se encuentra ocioso.
- Hay $0 \leq j \leq 4$ PNP en el sistema, un CM está operando mientras el otro se encuentra ocioso, y RBT puede estar atendiéndolo o estar ocioso.
- Hay $0 \leq j \leq 5$ PNP en el sistema, ambos CM están ociosos o en espera de RBT, el cual puede estar atendiendo a uno de ellos o estar ocioso.
- Hay $0 \leq j \leq 3$ PNP en el sistema, un CM ha fallado mientras el otro está operando y RBT se encuentra ocioso.
- Hay $0 \leq j \leq 4$ PNP en el sistema, un CM ha fallado, mientras el otro se encuentra ocioso, y RBT lo está atendiendo o también está ocioso.
- Hay $0 \leq j \leq 3$ PNP en el sistema, y ambos CM ha fallado y por tanto RBT está ocioso.

Las combinaciones de los estados identificados en la Tabla 8.1 que cumplen con estas condiciones forman el espacio de estados posibles $\mathcal{X}$ de la CMF, cuyos elementos son los x_{v_i} especificados en la Tabla 8.2.

En total se tienen 51 estados. Esto comprueba lo que se señaló en la sección 3.1.3 respecto al tamaño de $\mathcal{X}$. El hecho de que con tan solo 3 componentes el sistema contenga 51

estados, se explica por las dependencias entre las funciones y operaciones de los CM y el RBT cada vez que se procesa una nueva pieza.

Tabla 8.2. Estados para el sistema de una CMF

$x_{PNP\ i}$	$x_{CM1\ i}$	$x_{CM2\ i}$	$x_{RBT\ i}$	i	v_i	g_{v_i}	x_{v_i}	χ^i
5	0	0	1	1	0	0	(5,0,0,1)	χ^3
4	1	0	2	2	1	2	(4,1,0,2)	χ^2
	2	0	2	3	2	0	(4,2,0,2)	χ^3
	3	0	2	4	3	0	(4,3,0,2)	χ^5
$j = \begin{cases} 3 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$	0	1	1	5 : 34	4 : 33	2	(j,0,1,1)	χ^2
		2	1			0	(j,0,2,1)	χ^3
		3	1			0	(j,0,3,1)	χ^5
	1	0	2			2	(j,1,0,2)	χ^2
		1	0			4	(j,1,1,0)	χ^1
		3	0			2	(j,1,3,0)	χ^4
	2	0	2			0	(j,2,0,2)	χ^3
		0	2			0	(j,3,0,2)	χ^5
		1	0			2	(j,3,1,0)	χ^4
	3	3	0			0	(j,3,3,0)	χ^6
	0	0	0	35	34	0	(0,0,0,0)	χ^3
			1	36	35	0	(0,0,0,1)	χ^3
			2	37	36	0	(0,0,0,2)	χ^3
		1	0	38	37	2	(0,0,1,0)	χ^2
			1	39	38	2	(0,0,1,1)	χ^2
			2	40	39	0	(0,0,2,1)	χ^3
		3	0	41	40	0	(0,0,3,0)	χ^5
			1	42	41	0	(0,0,3,1)	χ^5
		1	0	43	42	2	(0,1,0,0)	χ^2
			2	44	43	2	(0,1,0,2)	χ^2
			1	45	44	4	(0,1,1,0)	χ^1
		3	0	46	45	2	(0,1,3,0)	χ^4
	2	0	2	47	46	0	(0,2,0,2)	χ^3
	3	0	0	48	47	0	(0,3,0,0)	χ^5
			2	49	48	0	(0,3,0,2)	χ^5
		1	0	50	49	2	(0,3,1,0)	χ^4
		3	0	51	50	0	(0,3,3,0)	χ^6

Fuente. Elaboración propia basada en Savsar y Aldaihani (2008)

8.1.1.3 Función de aceptabilidad

La tasa de producción asignada g_{v_i} a cada estado x_{v_i} en la Tabla 8.2 corresponde a:

$$\blacksquare \quad \text{si} \quad \begin{cases} x_{CM1\ i} = 1 \text{ y } x_{CM2\ i} = 0 \\ x_{CM1\ i} = 0 \text{ y } x_{CM2\ i} = 1 \\ x_{CM1\ i} = 3 \text{ y } x_{CM2\ i} = 1 \\ x_{CM1\ i} = 1 \text{ y } x_{CM2\ i} = 3 \end{cases}$$

- 2ν si $x_{CM1i} = x_{CM2i} = 1$.

Para este caso, la aceptabilidad de un estado depende de dos condiciones:

- i. $g_{v_i} \geq \omega$, con $\omega \geq 2$ PP/Hr
- ii. $x_{CM1i} \neq 3$ o/y $x_{CM2i} \neq 3$

La condición (ii) se adiciona a la definición dada en la sección 3.1.4, dado que en el sistema analizado puede ocurrir que $g_{v_i} < \omega$ aún cuando los dos CM están disponibles. Esto ocurre para x_{v_i} en los ambos CM están ociosos, o en los que uno de ellos está siendo atendido por RBT y el otro está en espera de serlo. Por esto, para efectos de análisis, los estados del sistema se agrupan en los siguientes conjuntos.

$$\begin{aligned}
 \chi^1: & \{(j, 1, 1, 0), j = 0, 1, 2, 3\} \\
 \chi^2: & \{(j, 1, 0, 2), j = 0, 1, 2, 3, 4 \cup (j, 0, 1, 1), j = 0, 1, 2, 3 \cup (0, 1, 0, 0) \cup (0, 0, 1, 0)\} \\
 \chi^3: & \{(j, 2, 0, 2), j = 0, 1, 2, 3, 4 \cup (j, 0, 2, 1), j = 0, 1, 2, 3 \cup (0, 0, 0, 1) \cup (0, 0, 0, 2) \cup \\
 & (0, 0, 0, 0) \cup (5, 0, 0, 1)\} \\
 \chi^4: & \{(j, 1, 3, 0), j = 0, 1, 2, 3 \cup (j, 3, 1, 0), j = 0, 1, 2, 3\} \\
 \chi^5: & \{(j, 3, 0, 2), j = 0, 1, 2, 3, 4 \cup (j, 0, 3, 1), j = 0, 1, 2, 3 \cup (0, 0, 3, 0) \cup (0, 3, 0, 0)\} \\
 \chi^6: & \{(j, 3, 3, 0), j = 0, 1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

Para los cuales, generalizando la ecuación (3.2), se tiene que:

$$x_{v_i} \in \begin{cases} \chi^1 & \text{Si } 2 < g_{v_i} \leq 4 \\ \chi^2, \chi^4 & \text{Si } 0 < g_{v_i} \leq 2 \\ \chi^3, \chi^5, \chi^6 & \text{Si } g_{v_i} = 0 \end{cases}$$

Donde χ^1 contiene los x_{v_i} con ambos CM trabajando, y por tanto representa la máxima tasa de producción; χ^2 los x_{v_i} donde uno de los CM esta operando, y el otro está ocioso; y χ^3 los x_{v_i} en que ambos CM son ociosos y la tasa de producción es cero.

Aunque los elementos de χ^3 son estados de no operación, no son estados de falla. En un sentido estricto, la falla se entiende aquí como un evento que interrumpe la operación y se requiere de algún tiempo para la reparación y su puesta en funcionamiento. De esta manera, aunque los $x_{v_i} \in \chi^3$ tienen $g_{v_i} = 0$, su condición es tal que uno de los CM puede iniciar operación en cualquier instante en el que RBT esté disponible para atenderlo y halla piezas a ser procesadas.

Por su parte, χ^4 contiene los x_{v_i} en los que un CM está operando y el otro en reparación, mientras χ^5 los que implican un CM ocioso y el otro en reparación. Estos estados tienen $g_{v_i} = \nu$ pero no pueden considerarse aceptables dado que uno de los CM no está disponible. Por último, los estados en los cuales ambos CM han fallado se reúnen en χ^6 , y

en ellos, así RBT estuviera disponible y hubiesen PNP, el sistema no podría seguir procesándolas.

La Tabla 8.2 identifica la pertenencia de cada x_{v_i} a alguno de estos subconjuntos χ^i $i = 1, 2, \dots, 6$. En conclusión, la razón de esta clasificación es que si los estados solo se agruparan con base en la tasa de demanda, podrían catalogarse como estados inaceptables aquellos, que si bien representan tasa de producción 0, los componentes están disponibles para operar en cualquier momento, lo que no ocurre cuando alguno de los CM ha fallado.

De acuerdo con lo anterior, el conjunto de estados aceptables χ^4 de la CMF está compuesto por los subconjuntos χ^1 , χ^2 y χ^3 . Los cuales contienen los estados en que ambos CM se encuentran operando u ociosos, pero ninguno ha experimentado ha fallado.

8.1.1.4 Transiciones de falla de una CMF

En este caso, no cualquier transición entre conjuntos χ^i , $i = 1, 2, \dots, 6$ es posible, ni equivale a una falla. Normalmente, se considera que el sistema se degrada cuando pasa a un estado en que alguno o ambos de los CM se encuentra en reparación, sin embargo, debido a la manera en que se definieron los estados ello no es cierto en este caso. Por ejemplo, la transición de la forma $(j, 3, 0, 2) \rightarrow (j - 1, 3, 1, 0)$, $j = 1, 2, 3, 4$ no es una falla, así en el estado de llegada CM1 se encuentre en 3. Como se describe más adelante tampoco corresponde una reparación aunque la tasa de producción aumenta por la operación del CM2.

Bajo esta observación, las transiciones por tipo de falla son de las formas presentadas en la Tabla 8.3.

Tabla 8.3. Transacciones de falla para el modelo de una CMF

Tipo	Transición	Dominio
Catastrófica	$\{(j, 3, 1, 0) \rightarrow (j, 3, 3, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$ $\{(j, 1, 3, 0) \rightarrow (j, 3, 3, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$	$\chi^4 \rightarrow \chi^6$
Parcial I	$\{(j, 1, 1, 0) \rightarrow (j, 1, 3, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$ $\{(j, 1, 1, 0) \rightarrow (j, 3, 1, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$	$\chi^1 \rightarrow \chi^4$
Parcial II	$\{(j, 1, 0, 2) \rightarrow (j, 3, 0, 2) \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$ $\{(j, 0, 1, 1) \rightarrow (j, 0, 3, 1) \quad j = 0, 1, 2, 3$ $\{(0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 3, 0, 0)$ $\{(0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 3, 0)$	$\chi^2 \rightarrow \chi^5$

Fuente. Elaboración propia

Las fallas parciales corresponden a aquellas transiciones en que fallan solo uno de los CM. Las diferencias entre tipos es la tasa de producción del sistema después de ocurrida. Mientras en la falla parcial tipo I el sistema aún sigue produciendo a una tasa ν , en el tipo II esta es igual a 0. Por su parte, la falla catastrófica implica la no disponibilidad completa del sistema, y la única transición posible es una reparación. En todos los casos, estas transiciones corresponden a fallas menores.

8.1.1.5 Transiciones de reparación de una CMF

Análogo a las fallas, en este modelo en particular, una transición que equivale a un incremento en la tasa de producción del SME no se está obligatoriamente relacionada con una reparación. Un ejemplo donde esto es cierto, se dio previamente. La transición $(j, 3, 0, 2) \rightarrow (j - 1, 3, 1, 0)$, $j = 1, 2, 3, 4$ implica la puesta en funcionamiento del CM2 por lo que la tasa de producción incrementa, pero CM1 sigue en su condición de falla, y por tanto, no se ha ejecutado ningún reemplazo o mantenimiento. El cambio se debió a la secuencia de operación de la CMF donde el CM2 es cargado y empieza a procesar la pieza $j - 1$.

En este sentido, una reparación ocurre cuando alguno de los CM pasa del estado 3 al 1, y puede ser cualquiera de los tipos descritos en la sección 3.3.1 y 3.3.2. En el modelo se supone que la condición crítica es la de falla catastrófica, por lo tanto, la transición que repara esta condición corresponde a una de mantenimiento correctivo. En su lugar, las reparaciones realizadas aun cuando el sistema satisface la tasa de demanda pueden considerarse de mantenimiento preventivo basado en la condición con límite de falla. La Tabla 8.4. presenta esta clasificación

Tabla 8.4. Transacciones de reparación para el modelo de una CMF

Mantenimiento	Transición	Dominio
Correctivo	$\{(j, 3, 3, 0) \rightarrow (j, 1, 3, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$ $\{(j, 3, 3, 0) \rightarrow (j, 3, 1, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$	$\chi^6 \rightarrow \chi^4$
Preventivo basado en la condición con límite de falla igual a ν .	$\{(j, 3, 1, 0) \rightarrow (j, 1, 1, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$ $\{(j, 1, 3, 0) \rightarrow (j, 1, 1, 0) \quad j = 0, 1, 2, 3$	$\chi^4 \rightarrow \chi^1$
Preventivo basado en la condición con límite de falla igual a 0.	$\{(j, 3, 0, 2) \rightarrow (j, 1, 0, 2) \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$ $\{(j, 0, 3, 1) \rightarrow (j, 0, 1, 1) \quad j = 0, 1, 2, 3$ $\{(0, 3, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0)$ $\{(0, 0, 3, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0)$	$\chi^5 \rightarrow \chi^2$

Fuente. Elaboración propia

Si se clasifican por el grado de restauración, las transiciones por el mantenimiento preventivo cuando la tasa de producción del SME es ν equivalen a una reparación perfecta, dado que lleva al sistema al estado de producción máxima. Las demás transiciones equivalen a reparaciones mínimas. Esto es así, porque el modelo restringe el número de instalaciones de mantenimiento disponibles.

8.1.1.6 Parámetros para los componentes de un CMF

La Tabla 8.5 presenta los valores de los parámetros de operación de la CMF. En las siguientes secciones, estos corresponden a los parámetros de un escenario base que se compara frente a cambios en las tasas de falla y reparación de los CM.

En su modelo original, Savsar y Aldaihani (2008) imponen una restricción importante: los tiempos de carga/descarga, de procesamiento, hasta la falla y hasta la reparación se distribuyen exponencialmente.

Tabla 8.5. Parámetros de operación de una CMF

Parámetro		Valor base [Unidad tiempo] ¹
l	Tasa de carga de RBT	2
u	Tasa de descarga de RBT	2.5
z	Tasa combinada de descarga/carga	4.5
d	Velocidad de P1 y P2	1
v	Tasa de producción de los CM	2
$\lambda_1(t)$	Tasa de falla CM2	1
$\lambda_2(t)$	Tasa de falla CM2	1
$\mu_1(t)$	Tasa de reparación de CM1	2
$\mu_2(t)$	Tasa de reparación del CM 2	2

Fuente. Elaboración propia

Sin embargo, como se menciona en la introducción del capítulo y a lo largo de la sección 3.5, el supuesto de tasas de falla y de reparación constante no es válido en sistemas de este tipo. Aunque lo mismo aplica para las tasas de carga/descarga y de procesamiento, a efecto de claridad en los análisis, para estos parámetros el supuesto se considera verdadero.

8.2 CMTC-NH para una CMF

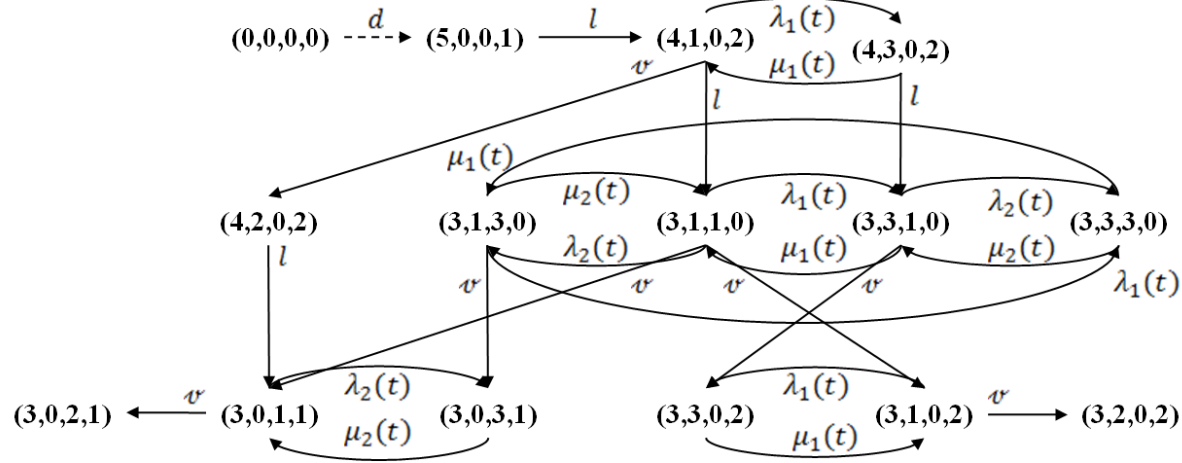
Con la caracterización previa en estados y transiciones hecha para una CMF, la CMTC-NH que representan su operación queda casi completamente determinada. El conjunto de estados $\mathcal{X}$ contiene todos los x_{v_i} listados en la Tabla 8.2, y las transiciones con su respectiva tasa se muestran en las Figuras 8.2, 8.3 y 8.4, las cuales representan las secciones iniciales, intermedias y finales del Diagrama de Transición completo. La condición inicial del sistema es (0,0,0,0) cuando la CMF espera por los pallets con las piezas a procesar.

En este punto debe de llamarse la atención sobre las ventajas de la modelación markoviana en el caso de estudio. Por un lado, hace posible incluir de forma lógica y secuencial las operaciones del sistema, creando un estado para cada posible paso de operación que resulte de interés. Estos pasos a su vez, son función de las dependencias entre componentes. Por ejemplo, ninguno de los CM puede operar si RBT no está disponible para atenderlo y cargar una PNP. Estos eventos de espera, en los cuales el sistema está disponible, no pueden ser incluidos en los modelos combinatorios.

Sin embargo, aunque en un MM es posible captar este tipo de dependencias, es también necesario considerar el nivel de detalle deseado. Si alguna condición es irrelevante, debería ser eliminada, o en defecto incluida dentro de una condición más general. Esto es así, porque como se demostró, el conjunto de estados puede ser representativamente mayor al número de componentes, lo que puede volver al modelo difícil de desarrollar e incluso de comprender.

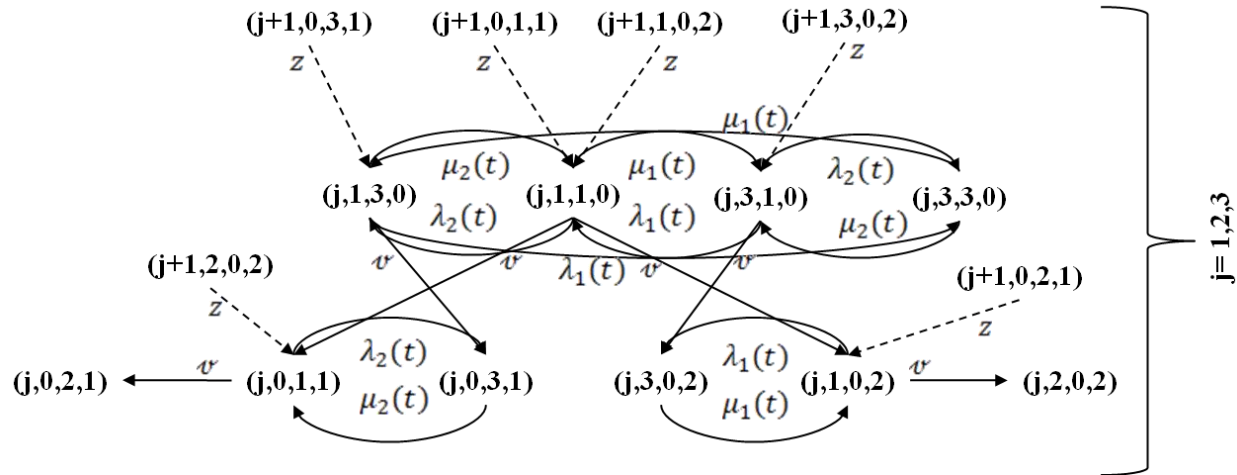
En las siguientes secciones se desarrolla el MDSE correspondiente para el modelo descrito.

Figura 8.2. Sección inicial del Diagrama de Transición para la CMTC-NH de una CMF



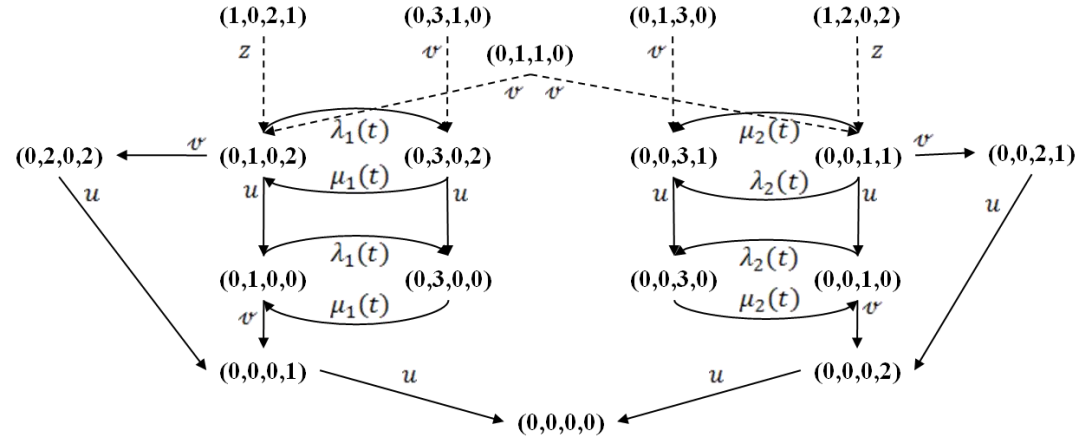
Fuente. Elaboración propia

Figura 8.3. Sección intermedia del Diagrama de Transición para la CMTC-NH de una CMF



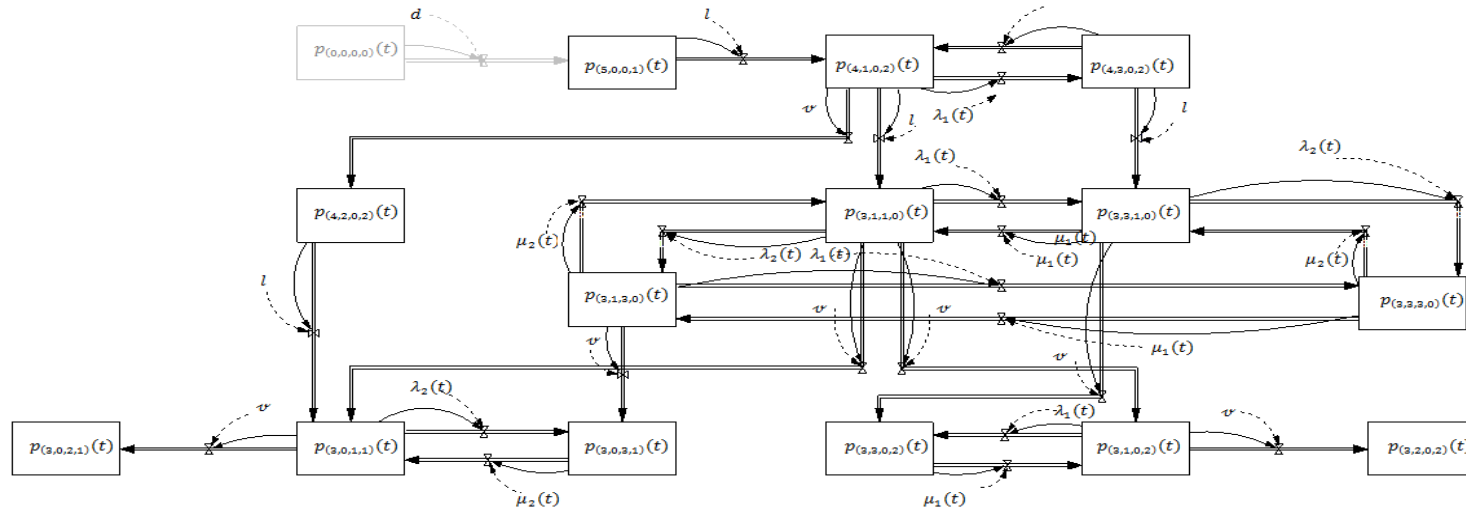
Fuente. Elaboración propia

Figura 8.4. Sección final del Diagrama de Transición para la CMTC-NH de una CMF



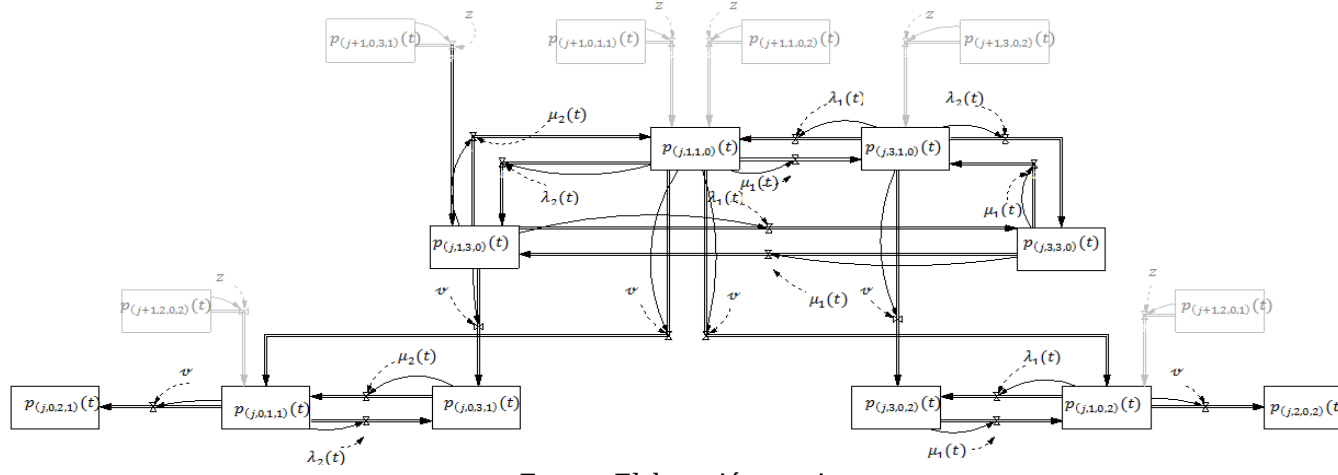
Fuente. Elaboración propia

Figura 8.6. Sección inicial del MDSE para la CMTC-NH de una CMF



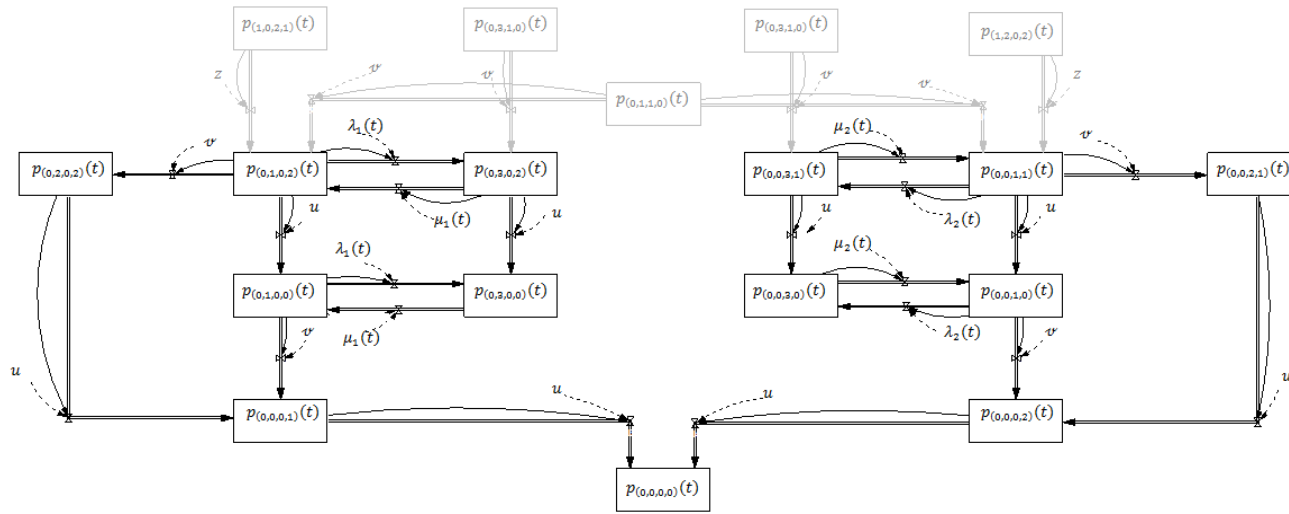
Fuente. Elaboración propia

Figura 8.7. Sección intermedia del MDSE para la CMTC-NH de una CMF ($j=1,2,3$)



Fuente. Elaboración propia

Figura 8.8. Sección final del MDSE para la CMTC-NH de una CMF.



Fuente. Elaboración propia

8.3 MDSE para una CMF

Con el Diagrama de Transición, la conversión del MM a un MDS consiste en seguir el procedimiento detallado 7.2. Esta serie de pasos tienen como resultado las Figuras 8.5, 8.6 y 8.7 las cuales corresponden al MDSE de las Figuras 8.2, 8.3 y 8.4.

Estos Diagramas de Forrester se construyen en el software de DS Vensim Professional 32, sobre el cual se realizan las simulaciones y se obtienen los datos y gráficas presentadas en la siguiente sección.

8.4 Análisis de Fiabilidad de una CMF a través su MDSE

Con el objeto de ilustrar una de las ventajas de la construcción de un MDSE, se presentan a continuación algunos tipos de medidas y análisis que son posibles desde el software de DS. Puesto que interesa caracterizar la CMF desde el punto de vista de la fiabilidad, se calculan cada una de las medidas descritas en la sección 3.6. Para ello se emplean las siguientes herramientas disponibles en Vensim Professional 32:

- Herramientas de gráfico.
- Objetos de entrada y salida.
- Importación y exportación de datos.
- Simulación Monte Carlo.

Estas herramientas permiten presentar gráficas comparativas entre simulaciones, e incluso observar y estimar el grado de sensibilidad del sistema respecto a sus parámetros. Adicionalmente, el software permite construir diversos tipos de funciones matemáticas asociadas a variables auxiliares, a través de las cuales se pueden incorporar cálculos adicionales al modelo.

A continuación se presenta la configuración de la simulación y sus resultados.

8.4.1 Parámetros de simulación del MDSE

Para enseñar los posibles efectos de los errores de integración descritos en la sección 6.5.1.1, el modelo es inicialmente corrido con los siguientes parámetros de simulación:

INITIAL TIME:	0
FINAL TIME:	100
TIME STEP:	1
Técnica de Integración:	Euler

Pero la simulación se interrumpe automáticamente, y se genera el mensaje “Floating point overflow saving to time 37”. Este y otros mensajes pueden aparecer como consecuencia de los errores de integración, los cuales generan que los valores de una o más variables sean demasiado grandes o algún argumento se encuentre por fuera del rango definido. Cuando esto ocurre la simulación es detenida y las gráficas evidencian un comportamiento errático

tomando valores supremamente altos (millones). El error es evidente puesto que los resultados no satisfacen la condición natural dada en (7.2).

Identificados estos errores, el modelo es finalmente simulado con:

INITIAL TIME:	0
FINAL TIME:	20
TIME STEP:	0.0078125
Técnica de Integración:	RK4-Auto

8.4.2 Resultados obtenidos con el MDSE

A continuación se describe cómo cada uno de índices descritos en la sección 3.6 pueden ser estimados directamente desde el software de DS creando variables auxiliares y de nivel separadas del MDSE.

Primero se presentan los resultados del modelo base, al cual le corresponden los parámetros de la Tabla 8.5, en este caso el sistema se trata como una CMTC-H. Este escenario y el de una CMF no reparable, es decir una en la que $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ son comparados en términos de cada índice usando las herramientas gráficas de Vensim Professional 32. Posteriormente, se ilustra cómo cada uno de los modelos para las tasas de transición presentados en 3.5.3 se pueden incluir en el MDSE, lo que equivale a tratar la CMF mediante una CMTC-NH, con tasas de falla y reparación funciones del tiempo.

Por último, se realiza análisis de sensibilidad a través del cálculo de la medida especificada en 3.7.1, y empleando la simulación Monte Carlo con el fin de mostrar cómo las herramientas disponibles en los software de DS facilitan estos análisis.

8.4.2.1 Probabilidad de estado superior $USP(t, \chi^*)$

Esta medida consiste en calcular la probabilidad de que el sistema se encuentre en algún subconjunto de estados específico. Para una CMF puede ser de interés, por ejemplo, conocer la probabilidad de que se encuentren operando uno o ambos CM. Esto corresponde a la probabilidad de que el sistema se encuentre en $\chi^* = (\chi^1 \cup \chi^2 \cup \chi^4)$.

Para realizar tal calculo desde un MDSE, se debe crear una variable auxiliar etiquetada “ $USP(t, \chi^*)$ ” y unir todos los elementos $p_{x_i}(t) \forall x_i \in \chi^*$ con $USP(t, \chi^*)$ mediante un conector de información. La ecuación de dicha variable auxiliar se hace igual a la suma las variables previamente relacionadas.

Como es de esperarse, la Figura 8.8 muestra que la probabilidad de que la CMF no reparable se encuentre produciendo, es siempre menor o igual a la una celda reparable. De hecho, en el escenario base donde $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 2$, $USP(t, \chi^*)$ alcanza un valor máximo

de 0.5 en el instante de tiempo 2.1, mientras que la CMF no reparable alcanza su máximo en 1.6 con una probabilidad de 0.34.

Como se observa, $USP(t, \chi^*)$ converge hacia 0.39, valor que puede ser entendido como la probabilidad de estado estacionario del proceso, y de acuerdo a lo señalado en la sección 4.5.1, se puede concluir que la CMF estará produciendo a una tasa ν o 2ν aproximadamente 7.8 unidades de tiempo durante toda su operación.

8.4.2.2 Disponibilidad instantánea $A(t)$

Esta medida es equivalente a $USP(t, \mathfrak{X}^i)$ cuando $\mathfrak{X}^i$ contiene los estados aceptables del sistema, tal que puede ser calculada por el mismo procedimiento de $USP(t, \mathfrak{X}^i)$ cuando se trabaja en un MDSE, haciendo $\mathfrak{X}^i = \mathfrak{X}^A = (\chi^1 \cup \chi^2 \cup \chi^3)$.

La Figura 8.9 presenta esta medida en la CMF base. Su comportamiento es oscilatorio durante las primera 7 unidades de tiempo, en las cuales experimenta un mínimo en 2.6 con una probabilidad de 0.72, y un máximo diferente al inicial de 0.78 en el instante 4.9. Lo anterior, da indicios de que el sistema tiende a experimentar fallas cerca de 2.6, y ser reparado cerca a 4.9.

Se debe notar la diferencia entre $A(t)$ y $USP(t, \chi^*)$. Mientras la disponibilidad tiene un valor inicial de 1, para $USP(t, \chi^*)$ éste es igual a 0. Ello es así, porque en los primeros pasos de operación de la CMF ambos CM se encuentran ociosos pero disponibles para ser cargados. Luego, la CMF opera regularmente hasta que tienden a aparecer las fallas, las cuales hacen que la posibilidad de que al menos un CM se encuentre disponible disminuya.

8.4.2.3 Función de fiabilidad $R(t)$

En la sección 5.3 se indicó que para medir la fiabilidad de un sistema reparable, su modelo debe ser convertido a uno donde los estados de falla se tratan como estados absorbentes. Por su estructura, en el modelo de la CMF esto es posible al hacer simplemente $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$, y $R(t) = A(t)$.

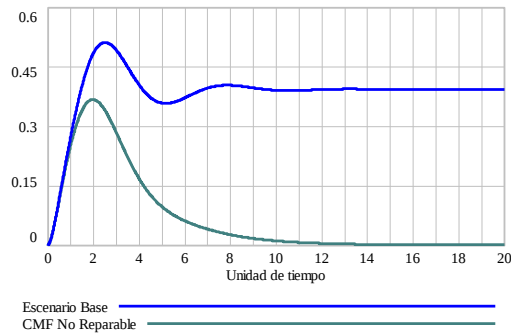
La Figura 8.10 ilustra la función de fiabilidad, cuyo valor se vuelve prácticamente 0 después de 10 unidades de tiempo, mientras un valor de 0.5 se logra tan solo después del instante de tiempo 2. Esto indica que la CMF tiende a experimentar transiciones de degradación o de falla con una mayor probabilidad durante las primeras dos unidades de tiempo, que en instantes posteriores.

8.4.2.4 Coeficiente de disponibilidad estacionaria AS

De acuerdo con la ecuación (3.8), AS es la suma de las probabilidades en el límite de los $x_i \in (\chi^1 \cup \chi^2 \cup \chi^3)$. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que esta medida sólo es posible

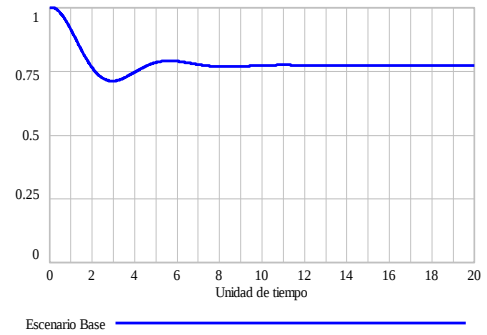
cuando la CMTC es regular, propiedad que puede ser visualmente inspeccionada a partir de la simulación del MDSE.

Figura 8.8. $USP(t, \chi^*)$ para una CMF



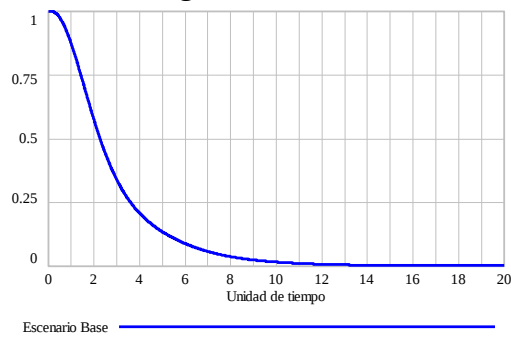
Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.9. $A(t)$ para una CMF



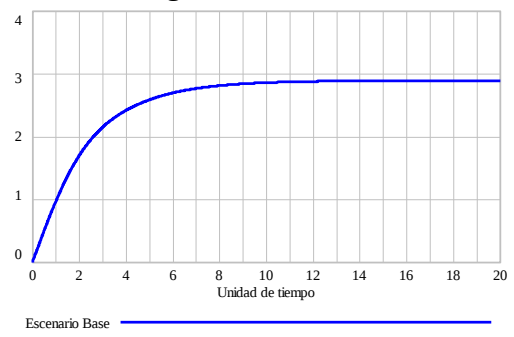
Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.10. $R(t)$



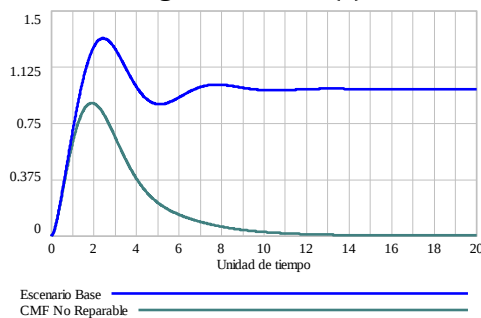
Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.12. $MTTF$



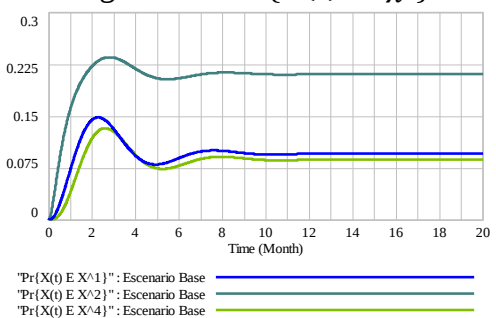
Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.13 $RE(t)$



Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.14. $\Pr\{X(t) \in \chi^i\}$



Fuente. Software Vensim Profesional 32.

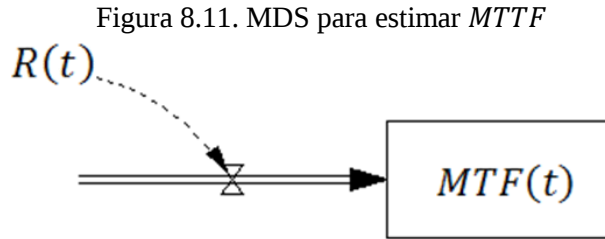
Como se señaló en la sección 7.3, se debe hacer una primera simulación del MDSE con un FINAL TIME relativamente grande, y si se observan tendencias de equilibrio al final de dicho periodo, se recomienda ir acotándolo. En el caso tratado, todas las probabilidades de

estado tienden a algún valor diferente de cero, de manera que proceso markoviano de la CMF consiste en una CMTC ergódica.

Con un FINAL TIME de 20 unidades de tiempo, es posible evidenciar el modo en el cual la función de disponibilidad instantánea se estabiliza al término de la simulación (Figura 8.9). Si estos valores se conservan para todo $t > FINAL TIME$, entonces $t = FINAL TIME$ puede considerarse como una condición límite, y por tanto, $AS = A(FINAL TIME) = 0.77$, e indica la proporción en el largo plazo de que ninguno de los CM de la CMF hayan fallado.

8.4.2.5 Tiempo medio hasta la falla $MTTF$

Para calcular $MTTF$ desde el MDSE se requiere construir un MDS como el ilustrado en la Figura 8.11, donde $MTF(t) = INTEG\{R(t), 0\}$. Puesto (3.9) es una integral impropia, $MTTF$ es igual al límite infinito de $MTF(t)$. Dado además, que $t = FINAL TIME$ se ha definido como un instante lo suficientemente grande, se obtiene que $MTTF = MTF(FINAL TIME)$.



Fuente. Elaboración propia.

A través de este procedimiento, se obtiene que la CMF tiene un $MTTF = 2.9$ unidades de tiempo (Figura 8.12). Este indicador representa el tiempo esperado hasta que el sistema falla por primera vez, lo cual es coherente con los resultados de los indicadores previos. Al analizar, por ejemplo, $USP(t, \chi^*)$ y $A(t)$ se encuentra que ambos experimentan algún grado de desmejora en instantes de tiempo próximos a $MTTF$.

8.4.2.6 Rendimiento esperado $RE(t)$

Expresada en la ecuación (3.10), esta medida se calcula creando una variable auxiliar etiquetada con " $RE(t)$ ", a la cual se conectan por un canal de información, todas las variables de nivel $p_{x_i}(t)$, y su ecuación consiste en sumar el producto de cada una de ellas con el nivel de rendimiento asociado g_{x_i} .

La Figura 8.13 presenta el resultado para la CMF del escenario base y una CMF no reparable. Las tasas de producción esperada divergen desde el primer periodo. Mientras el valor máximo para la celda reparable es de 1.3 PP/Unidad de tiempo, el máximo para la CMF no reparable solo llega al 66% de ese valor.

En el largo plazo, la productividad esperada de la CMF reparable es de 0.98 PP/Unidad de tiempo, lo que equivale al 24% de su capacidad nominal. El valor relativamente bajo de este indicador se debe a que en el modelo se han incluido las condiciones de operación ociosa de los CM, lo cual implica que sólo uno de ellos se encuentra operando o en efecto ninguno lo está. Las probabilidades de estas últimas dos condiciones son mayores a las del estado cuando CM1 y CM2 están operando. Esto se muestra en la Figura 8.14.

8.4.2.7 Rendimiento esperado acumulado $OE(t)$

Una ventaja del empleo del software de DS es la facilidad de tratar con funciones integrales como la expresada en la ecuación (3.11) que calcula la producción total esperada del sistema en un intervalo de tiempo dado. Para ello, se debe construir un Diagrama de Forrester igual al indicado en la Figura 8.11, haciendo $OE(t)$ la variable de nivel y $RE(t)$ la de flujo, de manera que $OE(t) = INTEG\{RE(t), 0\}$

Los resultados para la tasa de producción de la CMF se ilustran en la Figura 8.15, e indican que bajo las condiciones totalmente fiables, la CMF base producirá aproximadamente 19.22 PP al cabo de 20 unidades de tiempo, mientras la producción acumulada de la no reparable solo alcanza las 3.18 PP antes de fallar completamente.

Aunque pareciera que $OE(t)$ sigue una función lineal, las oscilaciones de $RE(t)$ al principio de la operación se manifiestan en una pequeña variación que no es fácilmente visible, por lo que el análisis de esta medida debe naturalmente estar asociada a la de $RE(t)$ simultáneamente.

8.4.2.8 Rendimiento esperado ponderado promedio LWE

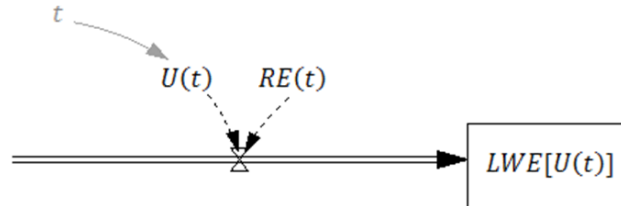
Definida en (3.12), ésta medida pondera el rendimiento esperado del sistema con la función $U(t)$ que representa el grado de importancia de su capacidad de producción a través del tiempo.

Aunque $U(t)$ puede ser cualquier función continua, en el caso de la CMF, se asume que las expectativas de su rendimiento son bajas al comienzo del periodo de operación o en la fase de arranque, mientras se realizan los ajustes en las variables de producción. Cuando esto se logra, las expectativas se incrementan hasta un máximo donde se espera que el sistema alcance su máxima eficiencia, y posteriormente disminuye de nuevo durante un periodo de ajustes para detener la operación. Con este supuesto, una función para el requerimiento de la CMF es de la forma $U(t) = \lambda\gamma(\lambda t)^{\gamma-1}\exp(-(\lambda t)^\gamma)$ con $\lambda = 0.1$ y $\gamma = 2$ cuya curva se muestra en la Figura 8.16.

Normalmente, la estimación de esta medida implicaría conocer la forma analítica de $p_{v_i}(t)$ lo cual, como se indicó repetidamente en 4.8, no es siempre posible. Sin embargo, el empleo de un MDSE permite estimar estos indicadores con relativa facilidad. Para ello, se crea un MDSE como el presentado en la Figura 8.17. Donde se crea una variable de nivel

" $LWE[U(t)]$ " con flujo de entrada $U(t)R(t)$, con $U(t)$ una variable auxiliar. Puesto que $U(t)$ es función del tiempo global de operación del sistema, y por tanto, equivalente al tiempo de simulación, debe crearse una variable " t " con la formula dada en (7.12) y relacionada a $U(t)$ por un canal de información.

Figura 8.17. Diagrama de Forrester para el cálculo de $LWE[U(t)]$

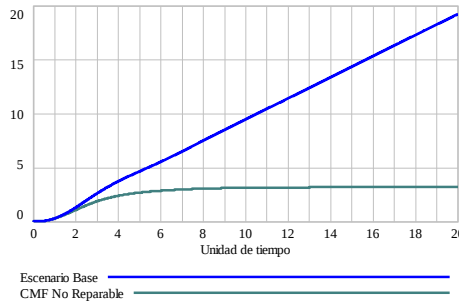


Fuente. Elaboración propia

Igual que en el caso de $MTTF$, LWE incluye una integral impropia equivalente al límite infinito de $LWE[U(t)]$ e igual a $LWE = LWE[U(\text{FINAL TIME})]$.

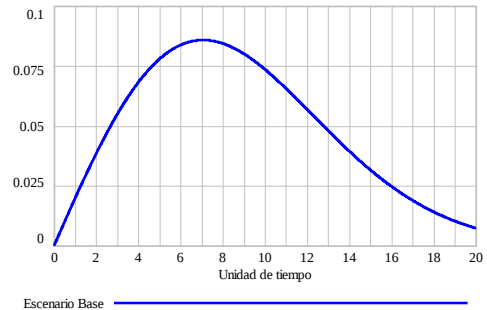
Las funciones de $LWE[U(t)]$ para el escenario base y para la celda no reparable se presentan en la Figura 8.18. Como se observa, esta medida converge a aproximadamente 1 en el primer caso, y a 0.16 en el segundo. Esto significa que la CMF reparable proporcionara niveles de rendimiento más altos cuando en realidad son requeridos.

Figura 8.15 $OE(t)$



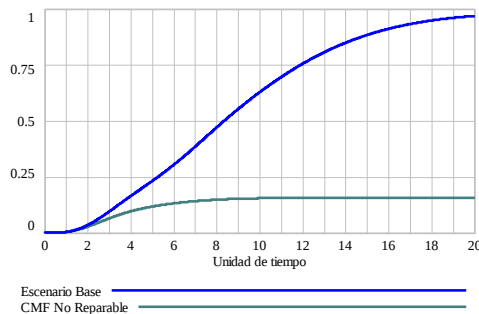
Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.16. $U(t)$



Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.18. $LWE[U(t)]$



Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Cuando se desea conocer el valor de cualquiera de estas medidas en un punto exacto, que no se muestra en las tablas generadas por el software, se puede emplear algún método de interpolación a partir de los datos de la simulación. Esto ocurre en el caso en que el valor a evaluar no es múltiplos de TS.

Los cálculos previos se han realizado bajo el supuesto de tasas de falla y reparación constante. Sin embargo, como se ha dicho, una de las principales ventajas del desarrollo de un MDSE es la posibilidad de solucionar CMTC con tasas de transición variables en el tiempo. Esto permite incorporar en un modelo de fiabilidad, tasas de falla y reparación que siguen cualquiera de las curvas características descritas en la sección 3.5.3. A continuación se presenta cómo este tipo de funciones pueden ser incluidas en un MDSE y calcular cualquiera de las medidas de fiabilidad ya explicadas.

8.4.2.9 Tasa de falla con curva en forma de bañera

La ecuación (3.3) identifica la función típica de la curva en forma de bañera. De la misma manera en que se definió $U(t)$ en el cálculo de LWE , ésta puede ser simplemente tratada como una variable auxiliar $h(t)$ que depende de los parámetros θ , λ , β , b y α , y de una variable de nivel " t ". Para la CMF se asumen los valores $\theta = 0.85$, $\lambda = 2$, $\beta = 0.7$, $b = 0.5$ y $\alpha = 0.95$, lo cual generan una función de riesgo de la forma ilustrada en la Figura 8.19.

El modelo de la CMF es corrido en el escenario base en el que ambas tasas de falla son constantes, y otro en el que $\lambda_1(t)$ corresponde a la Figura 8.19. Comparando los resultados, se encuentra que la disponibilidad de la CMF no es muy sensible al periodo de mortalidad prematura, y aunque aumenta su sensibilidad en los periodos finales donde sufre desgaste, al termino del instante de tiempo 20, la diferencia es solo del 6.2% del valor base (Figura 8.20).

Sin embargo, la tasa de falla variable genera que las probabilidades de estado no converjan a algún valor, por lo que se estaría tratando con una CMTC no ergódica. No obstante, esta característica no genera dificultad alguna cuando si se está trabajando con un MDSE.

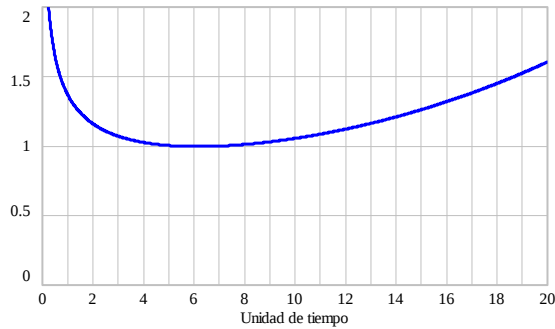
8.4.2.10 Tiempo hasta la reparación con distribución log-logística.

Como se indico en 3.5.3, los tiempos hasta la falla y la reparación también pueden asociarse a algún tipo de distribución de probabilidad. La forma de proceder es igual que el caso anterior, en el que se crea una variable auxiliar $h(t)$ en función de otros parametros y de la variable " t ". A manera de ejemplo, en la Figura 8.22 se compara la disponibilidad en el escenario base de la CMF, con el caso en el cual $\mu_1(t) = c + (\alpha\gamma(t^{\gamma-1}))/ (1 + \gamma t^{\gamma})$ con $c = 2$, $\alpha = 1$ y $\gamma = 2$ cuya forma se muestra en la Figura 8.21.

En este caso, el incremento en la función de tasa de reparación durante los primeros dos periodos de tiempo de operación tienen un efecto positivo en la disponibilidad del sistema,

sin embargo, dicho mejoramiento no es más del 3% del caso base. Puesto que $\mu_1(t)$ se acerca a 2 en el infinito es de esperar que se obtengan disponibilidades estacionarias aproximadas.

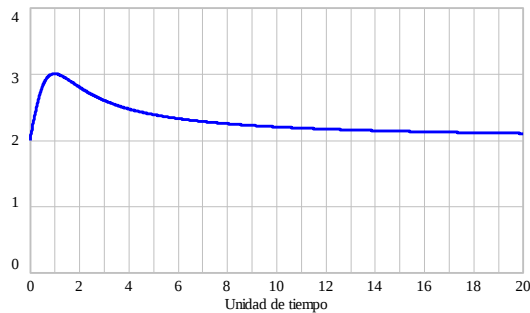
Figura 8.19. $h(t)$ con curva en forma de bañera



Curva en forma de bañera

Fuente. Software Vensim Profesional 32.

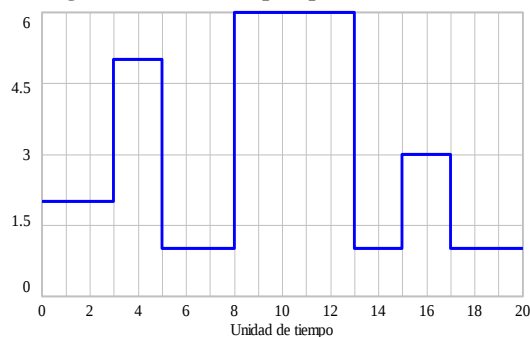
Figura 8.21. $\mu_1(t)$ asociada a una distribución loglogística



Tasa de reparación loglogística

Fuente. Software Vensim Profesional 32..

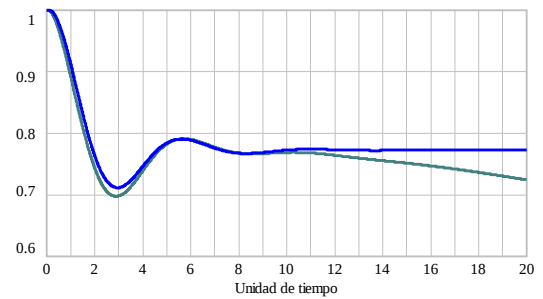
Figura 8.23. $\lambda_1(t)$ por partes constantes



Tas de falla por tasa constanted

Fuente. Software Vensim Profesional 32.

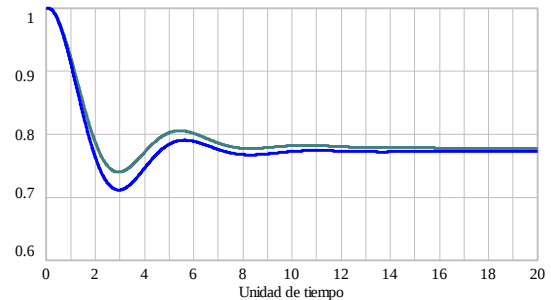
Figura 8.20 $A(t)$ con $\lambda_1(t)$ en forma de curva de bañera



Escenario Base
TfCM1 CB

Fuente. Software Vensim Profesional 32.

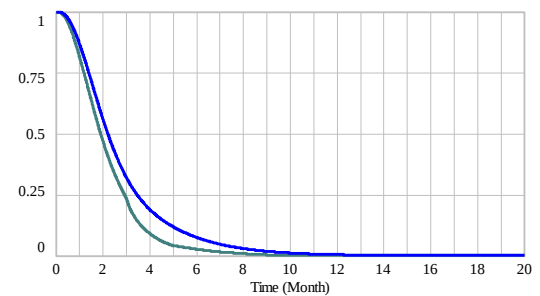
Figura 8.22. $A(t)$ con $\mu_1(t)$ asociada a una distribución loglogística



Escenario Base
TrCM1 Log

Fuente. Software Vensim Profesional 32.

Figura 8.24. $R(t)$ con $\lambda_1(t)$ por partes constantes



Escenario Base
TfCM1 por partes

Fuente. Software Vensim Profesional 32.

De la misma forma se pueden tratar los casos en que los tiempos hasta la falla o reparación siguen algún tipo de distribución de probabilidad, como la exponencial o weibull, donde las funciones de riesgo $h(t)$ también son expresiones explícitas t . Por otra parte, si es necesario emplear las distribuciones normal o log-normal, donde $h(t)$ depende de la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, pueden emplearse, los métodos de aproximación de estas distribuciones a una weibull que son descritas por Dhillan (2005), o en su defecto, emplear funciones de importación de datos como las disponibles en Vensim Professional 32 como GET XLS DATA(). Tal que primero se calcula $h(t)$ en una hoja de cálculo para cada $t = n \cdot \text{TIME STEP}$, $n \geq 0$ hasta $t = \text{FINAL TIME}$. Esto permite incluir prácticamente cualquier tipo de función como tasa de falla o de reparación

8.4.2.11 Tasa de falla por partes constantes

En la sección 3.5.3 se presentó el modelo de Wang y Billinton (2002) en el cual las funciones de riesgo se pueden considerar funciones por partes constantes como la ilustrada en la Figura 3.4. Este tipo de funciones también se pueden representar en un MDSE mediante el empleo de las funciones “lookup” definidas en (6.8). Para ello, usando Vensim Professional 32 se crean las siguientes variables:

t : Formulada como en (7.12).

$\alpha(t)$: Variable auxiliar con Lookup.

$\alpha(t) = \text{WITH LOOKUP}(t)$

Look up: $[(t_0, 0), (t_0, \lambda_0), \dots, (t_{i+1}, \lambda_i), (t_{i+1}, \lambda_{i+1}), \dots, (t_n, \lambda_{n-1}), (t_n, \lambda_n)]$

Otra forma de definir $\alpha(t)$ es empleando las funciones PULSE() o PULSE TRAIN() integradas Vensim Professional 32 cuando su patrón puede ser fácilmente representada por ellas. Así, una función $\lambda_1(t)$ con factores de escala constantes, es equivalente a una variable auxiliar con ecuación $\lambda_1(t) = \lambda_1 \alpha(t)$ como se define en la ecuación (3.4), donde λ_1 es una función auxiliar que contiene el valor de la función de riesgo en las condiciones normales de operación del sistema.

Aunque ya se ha señalado la importancia de definir un intervalo de integración lo suficientemente pequeño, con el empleo de estas funciones pueden surgir algunos problemas. Si $h(t)$ definida es por partes y presenta importantes variaciones, la interpolación lineal usada para la estimación en puntos intermedios de TS podría generar errores representativos de integración. Pero además, como se indicó en 6.5.1.2, pueden resultar otros errores debido a que la función no es derivable en los puntos t_{i+1} . Si esto ocurre, debe modificarse el TS o la técnica de integración procurando de conservar los niveles de precisión deseados.

Para el caso de la CMF, se hace la función $\alpha(t)$ como la ilustrada en la en la Figura 8.23. La fiabilidad bajo estas condiciones y en el escenario base se presentan en la Figura 8.24, de donde se observa que el efecto de la tasa entre los periodos 3 y 5 efectivamente genera

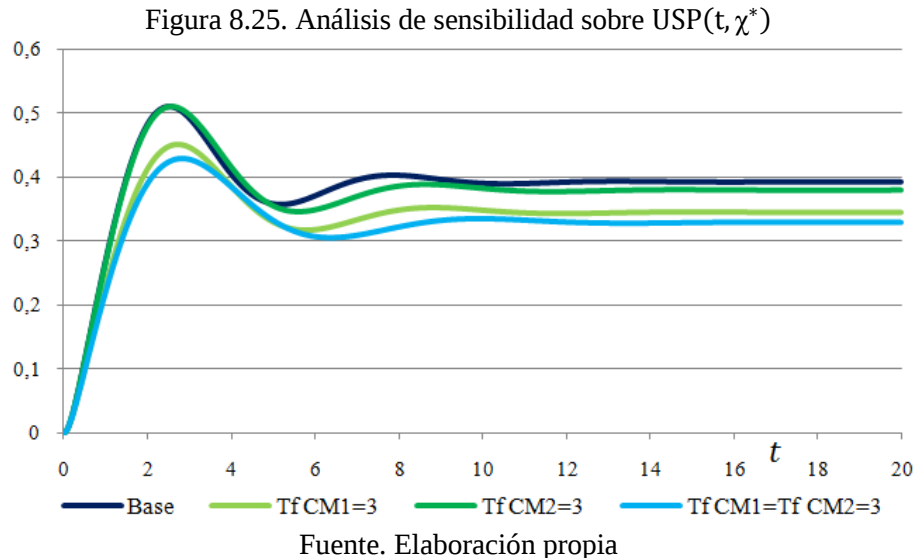
una disminución mayor en la fiabilidad del sistema, en comparación con los periodos previos.

8.4.2.12 Análisis de sensibilidad

En la sección 6.5.2.3 se señaló que los software de DS permiten hacer dos tipos de análisis de sensibilidad, el primero en el que los parámetros se cambian y se ejecuta la simulación manualmente, y otro por medio de la simulación Monte Carlo.

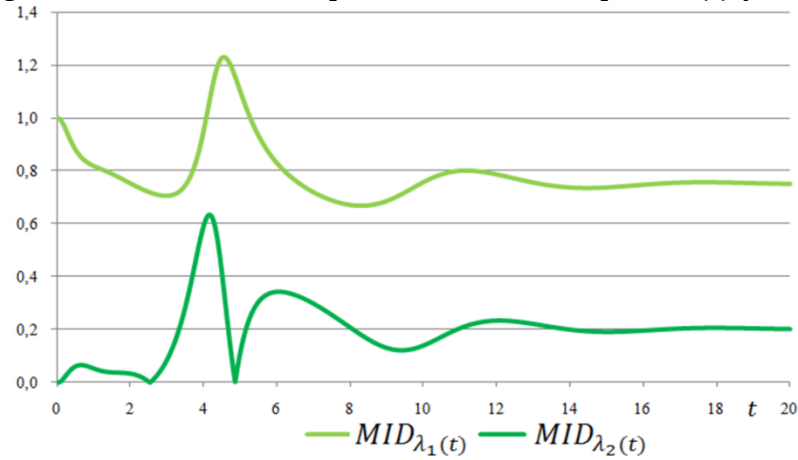
El primer procedimiento puede ser empleado para hallar las medidas de importancia diferencial definidas en 3.7.1. Esto se hace realizando una primera simulación con el escenario base de donde se obtiene O_0 , una segunda donde se modifica el primer parámetro de interés (tasa de falla o de reparación) $h(t)_1$ por un porcentaje α , una tercera donde se modifica el segundo parámetro $h(t)_2$ por el mismo porcentaje α y así sucesivamente con cada uno de los parámetros $h(t)_i$ de comparación. Cada una de estas simulaciones corresponden a $O_{h(t)_i}$. La última simulación se ejecuta realizando todos los cambios previos y de donde se obtiene O_1 . Estos resultados permiten se exportados por el software de DS, y en una hoja de cálculo seguir los pasos especificados en 3.7.1 encontrando la $MID_{h(t)_i}$ para cada parámetro $h(t)_i$.

Como ejemplo, la Figura 8.25 ilustra los cambios en $USP(t, \chi^*)$ como consecuencia de variaciones en las tasas de falla de cada CM. Incluso visualmente es posible observar que ante una misma variación (de 1 a 3) en las tasas de falla, el efecto del $\lambda_1(t)$ es representativamente mayor.



Lo anterior se corrobora en la Figura 8.26 que muestra los valores de $MID_{\lambda_1(t)}$ y $MID_{\lambda_2(t)}$ y donde efectivamente se corrobora el nivel de importancia que tiene el parámetro de falla de CM1 durante todo el periodo de simulación.

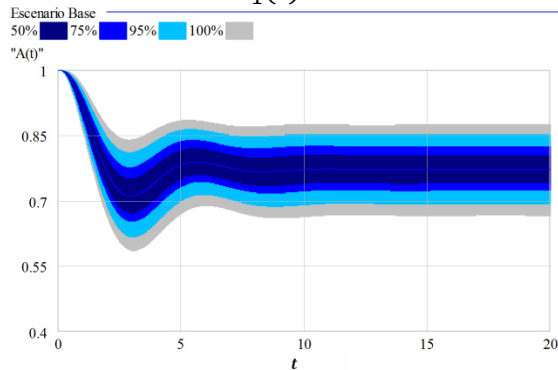
Figura 8.26. Medidas de importancia diferencial para $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$



Fuente. Software Vensim Profesional.

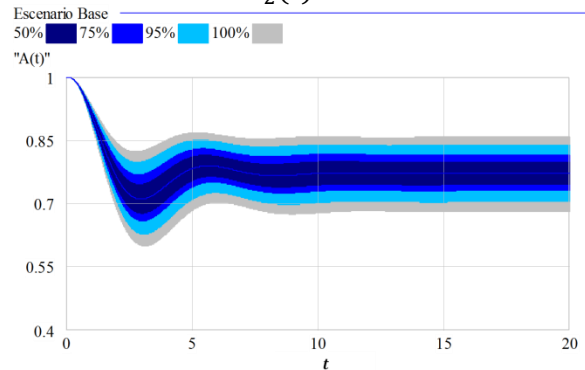
El segundo método de análisis de sensibilidad, corresponde a la simulación Monte Carlo. Seleccionando un número de simulaciones igual 300, semilla igual a 1234 y la técnica de muestreo multivariable, se evalúa el efecto de los cambios de $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ sobre $A(t)$ de la CMF. Asignando una distribución normal con media 1, distribución estándar 0.5, valor mínimo 0 y máximo igual a 3 se obtienen la Figura 8.27 y 8.28.

Figura 8.28. Intervalos de confianza para $A(t)$ cuando $\lambda_1(t)$ es variable



Fuente. Software Vensim Profesional

Figura 8.28. Intervalos de confianza para $A(t)$ cuando $\lambda_2(t)$ es variable



Fuente. Software Vensim Profesional

De lo anterior se concluye que, a pesar de los cambios aleatorios en las tasas de falla de los CM, el mínimo de la disponibilidad de estado transitorio es aproximadamente 0.6, mientras que la disponibilidad estacionaria no podrá ser mayor que 0.85 ni menor a 0.65 aproximadamente. Estos límites pueden ser empleados para identificar el efecto esperado, por ejemplo, de políticas de mantenimiento que reducen la tasa de falla de los componentes.

Este tipo de análisis se puede realizar para cualquier parámetro que sea de interés en el análisis.

8.5 Ventajas y desventajas sobre los MDSE en el análisis de fiabilidad de SME

Como se ilustró en las secciones anteriores, una de las principales ventajas de desarrollar un MDSE para una CMTTC que representa la operación de un SME, es la posibilidad de hallar su solución numérica sin la necesidad de plantear explícitamente el conjunto de EDOs del sistema markoviano. Estas soluciones se calculan para cualquier intervalo de tiempo de interés, y no se restringen a un instante concreto o a las probabilidades de estado estacionario.

Adicionalmente, el empleo de software de DS permiten otros cálculos y análisis que no son posibles en la mayoría de los software de fiabilidad indicados en 5.4. Primero, las tasas de transición pueden ser de cualquier naturaleza y no se limitan al caso homogéneo. Segundo, se pueden hacer cálculos para cualquier tipo de medida, y no solo indicadores predeterminados; y tercero, las herramientas de gráficos y de sensibilidad permiten evaluar el efecto de las variaciones en los parámetros, lo cual no es posible en los software de fiabilidad.

Sin embargo, debe recordarse que un MDSE se basa en los MM, y por tanto, si el SME no satisface los supuestos de estos procesos, cualquiera de los resultados anteriores sería incorrecto. Además, lo más indicado sería tratar de simplificar el sistema tanto como sea posible, puesto que la construcción del MDSE puede volverse complicada cuando se tienen muchos estados y transiciones. Naturalmente, es posible modelarse sin dicha simplificación, pero el análisis y los cálculos pueden hacerse más simples cuando se agrupan estados equivalentes en términos de alguna característica.

9. CONCLUSIONES

En general el análisis de fiabilidad de sistemas dinámicos de múltiples componentes, implica la creación de un modelo que representa las condiciones de operación del sistema con base en todos los estados posibles en los que pueden operar sus componentes. En la mayoría de sistemas de ingeniería, se trata con unidades complejas cuyos elementos están interrelacionados y tienen funciones dependientes entre ellos, de aquí que deban ser tratados como Sistemas de Múltiples Estados (SME).

Las técnicas actualmente bien desarrolladas y empleadas en la evaluación de la fiabilidad, presentan varios inconvenientes al tratar con este tipo de sistemas. Mientras los modelos combinatorios asumen componentes independientes, binarios y no reparables, las técnicas de simulación, como la simulación Monte Carlo, requiere esfuerzo por detallar el sistema y el tiempo computacional para su solución puede hacerlo poco práctico. Los Modelos Markovianos (MM), se pueden considerar en un nivel intermedio entre los dos anteriores, pero, aunque permiten incorporar diferentes relaciones entre los componentes y especificar casi cualquier modo de operación del sistema, no presentan la misma flexibilidad de los métodos de simulación en los cuales dichas relaciones pueden ser de cualquier tipo. Los MM usualmente empleados tratan con tiempos hasta la falla y la reparación distribuidos exponencialmente.

Lo anterior se traduce en que los sistemas son modelados a través de Cadenas de Markov de Tiempo Continuo Homogéneas (CMTC-H), en las que las tasas de transición son funciones constantes del tiempo. Sin embargo, se ha demostrado que este supuesto no es cierto en la mayoría de los sistemas. Por un lado, porque la tendencia hacia la falla de un componente puede incrementarse a través del tiempo como consecuencia de su envejecimiento y del impacto de ciertas condiciones ambientales, y por otro, porque el tiempo tomado para la reparación de un sistema depende de la disponibilidad del equipo de mantenimiento e incluso de las condiciones ambientales que pueden afectar la eficiencia con la cual se realizan las actividades de reparación o reemplazo.

Esto requiere el empleo de técnicas de modelación que permitan considerar SME reparables, y tasas de falla y de reparación como funciones variables en el tiempo. El MM que cumple con estas necesidades son las Cadenas de Markov de Tiempo Continuo-No Homogéneas (CMTC-NH). Sin embargo, a pesar de corresponder al caso más general, son poco empleadas en la práctica debido a las dificultades en su solución.

Dicha solución implica resolver un sistema de EDOs lineales. Sin embargo, dependiendo de la naturaleza de sus coeficientes, la solución analítica puede ser difícil, sino imposible de obtener. De ahí, que se hayan propuesto los métodos analíticos por partes o se empleen los métodos de integración numérica. Los últimos se consideran los métodos más flexibles y eficientes para resolver este tipo de problemas.

No obstante, para que los métodos de aproximación numérica sean eficientes, estos requieren ser programados por computador. De hecho, la mayoría de los software matemáticos de propósito general incorporan funciones para la solución numérica de EDOs

con diferentes técnicas numéricas, entre ellas las más conocidas y empleadas son los métodos Runge-Kutta. No obstante, dichos software requieren que el conjunto de ecuaciones sea explícitamente formulado lo cual puede ser complejo cuando se modelan SME con más de 10 a 15 estados.

Lo anterior, y el hecho de que la teoría detrás de los MM no homogéneos sigue siendo matemáticamente compleja, explica que sean poco empleados en los análisis de fiabilidad de sistemas a pesar de sus ventajas.

Versus lo anterior, el enfoque desarrollado en el presente trabajo supera algunas de las limitaciones que ha restringido el empleo de las CMTC-NH. Como se demostró, la construcción de un Modelo de Dinámica de Sistemas Equivalente (MDSE) permite modelar estos procesos mediante el lenguaje de la Dinámica de Sistemas (DS) y solucionarlo a través de las herramientas computacionales desarrolladas para esta metodología.

Un MDSE se basa en la equivalencia matemática encontrada entre las ecuaciones de estado de una CMTC-NH, y un caso especial de ecuaciones de nivel y de flujo en los Modelos de Dinámica de sistemas (MDS). Como se demostró, cada probabilidad de estado del proceso markoviano puede ser representada por una variable de nivel en un MDS, mientras las tasas de transición total desde dicho estado, son representadas por medio de una variable auxiliar que controla el flujo de salida desde dicho nivel. En términos de bucles, cada probabilidad de estado y función de densidad del tiempo hasta una transición forman un bucle de retroalimentación negativa.

A diferencia de los trabajos previos, se presenta el desarrollo formal de dicha equivalencia. Aunque se identifican diferencias sustanciales entre los MDS y los MM, especialmente relacionadas con los aspectos conceptuales y metodológicos, se demostró que los MDS satisfacen la propiedad markoviana y que sus formulaciones matemáticas coinciden con la de los MM, al ser ambos descritos por sistemas de EDOs.

Así, la solución numérica de una CMTC-NH se puede obtener al simular su MDSE a través de un software de DS. La mayoría de ellos, se basan en métodos numéricos para estimar los valores de cada variable. Por ejemplo, el empleo del software Vensim Profesional 32, permite emplear métodos Runge-Kutta de diferente orden con tamaño de paso fijo o variable. Una diferencia de los MDSE con los modelos normales de DS, es que su simulación debe realizarse con el tamaño de paso más pequeño y con la técnica de integración de mayor orden, a fin de garantizar el máximo grado exactitud posible. Sin embargo, estos parámetros deben evaluarse para lograr un equilibrio entre la precisión y los requerimientos computacionales en función de las necesidades del problema formulado.

Adicionalmente, el empleo de los software de DS, permite incorporar cualquier tipo de función a las variables auxiliares, y por tanto, definir funciones de diferente naturaleza a las tasas de transición del MM. Así, además de las funciones continuas, se pueden asignar funciones por partes constantes u otras de mayor complejidad, ya sea por el empleo de las herramientas de importación de datos o de las funciones “lookup”.

Lo anterior sugiere el desarrollo de un MSDE para las CMTC que representan un modelo para la evaluación de la fiabilidad. La oportunidad de incluir funciones de transición variables permite modelar un SME donde los componentes tienen tasas de falla y de transición funciones del tiempo. Además desde el mismo modelo se pueden calcular las medidas de fiabilidad que sean de interés, cuya estimación no se limita a un punto en el tiempo o en estado estacionario, sino que se pueden obtener medidas instantáneas y dinámicas, sobre las cuales se pueden incluso realizar análisis de sensibilidad.

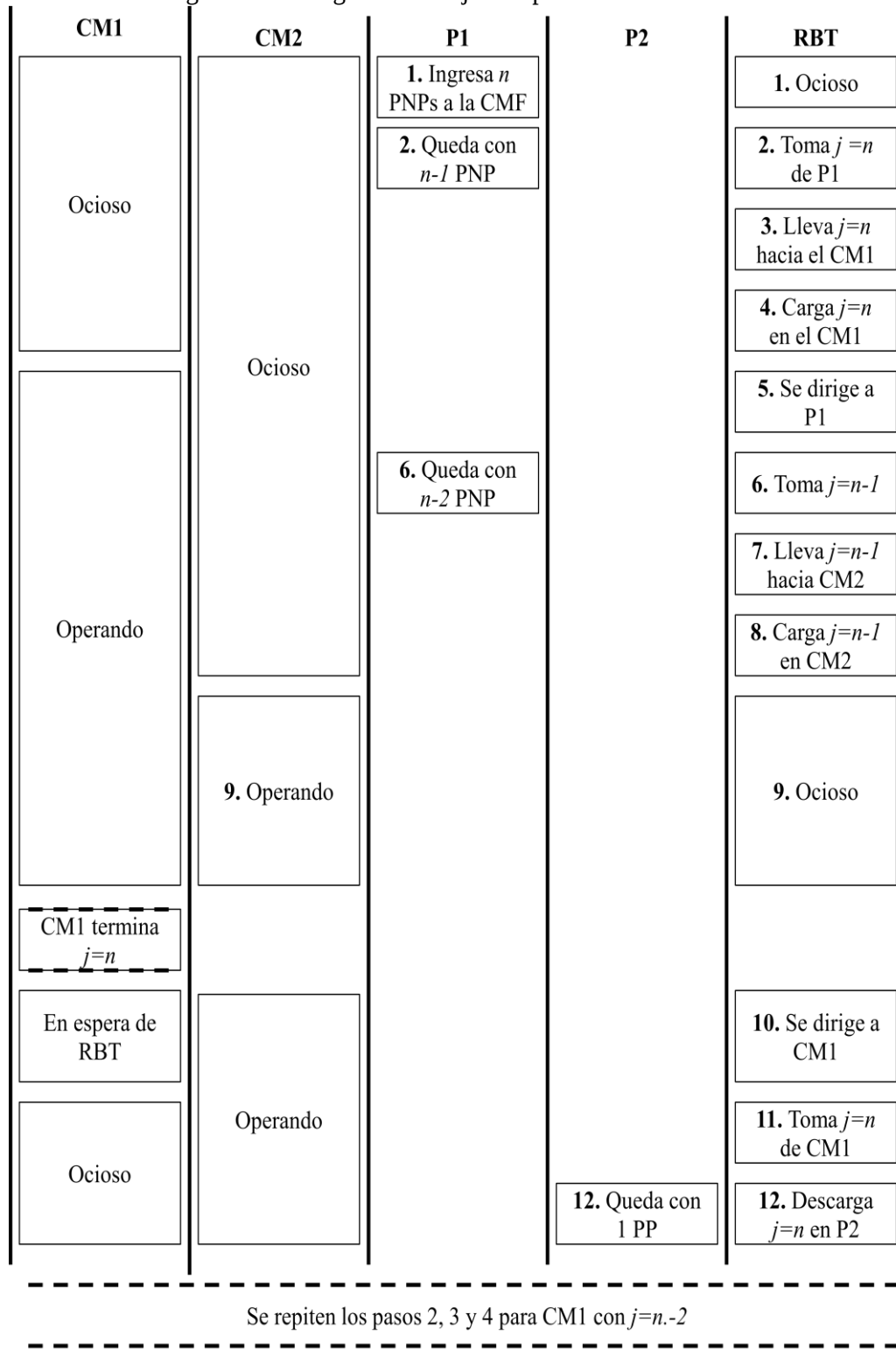
Debe recordarse, que el MDSE no supera los supuestos propios de los MM, ni vence las dificultades relacionadas a la dimensión del problema. Aunque facilita su solución, en cualquier caso, el modelo de estado y transición debería simplificarse en la medida que sea posible.

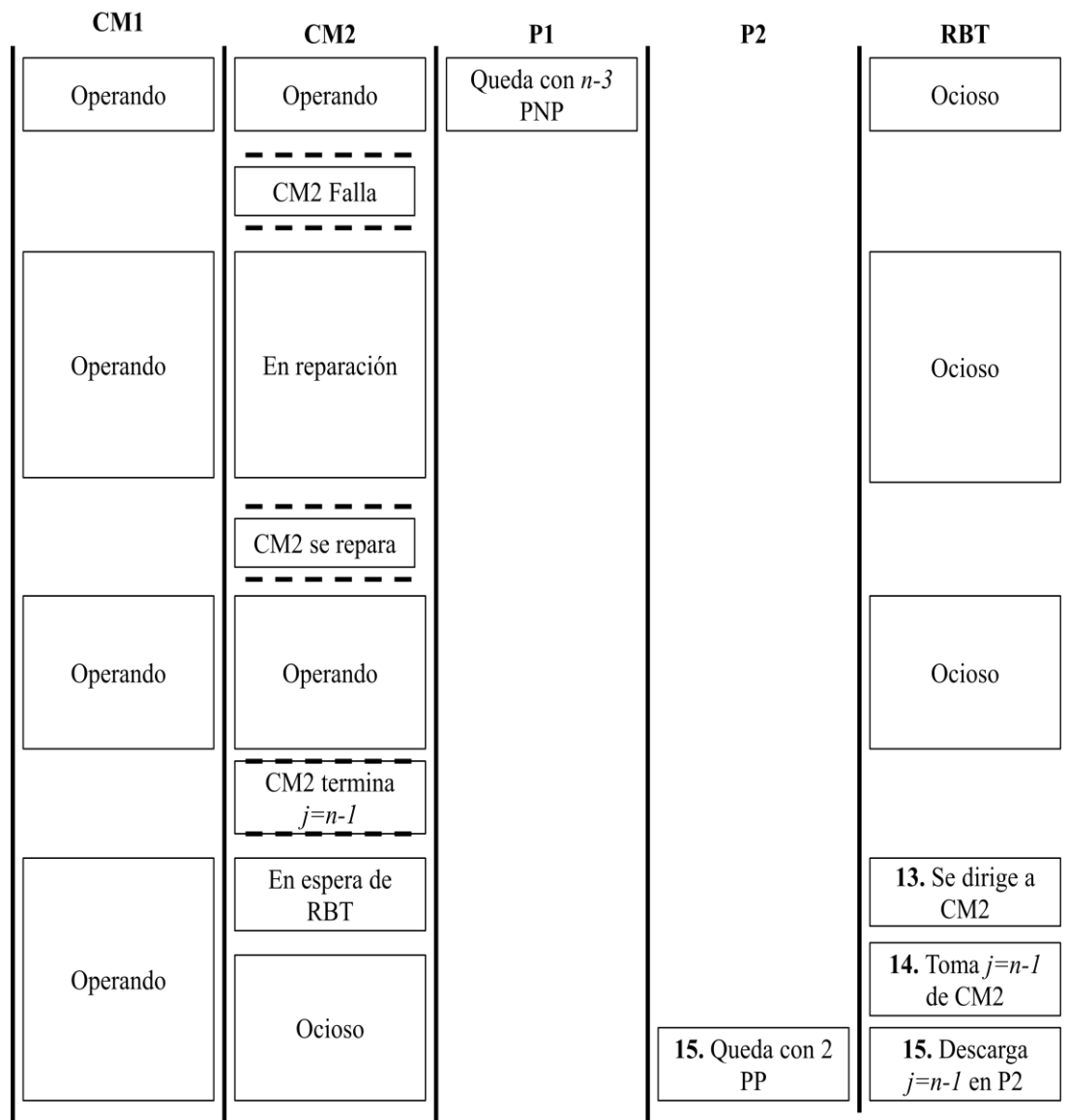
Aunque la propuesta de un MDSE surge en el interés de plantear un modelo alternativo para la modelación de la fiabilidad de sistemas, el concepto puede ser empleado a cualquier problema que trate con CMTC. Dentro del campo de la fiabilidad, debería evaluarse la oportunidad de emplear las herramientas de los software de DS a otro tipo de problemas, como los de optimización, o simplemente modelar SME con tasa de demanda aleatoria. Mientras que los modelos normales de DS pueden ser enriquecidos con elementos probabilísticos a través del proceso markoviano.

Para la investigación futura, se deja planteada la posibilidad de hallar formulaciones semejantes entre la DS y otros tipos de modelación estocástica.

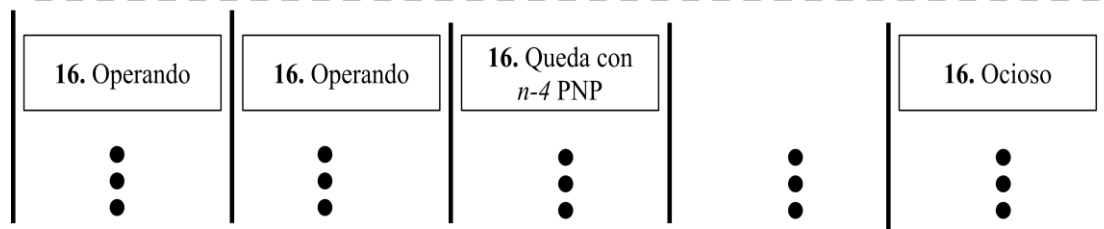
10. ANEXO 1

Figura 10.1. Diagrama de flujo de operación de una CMF

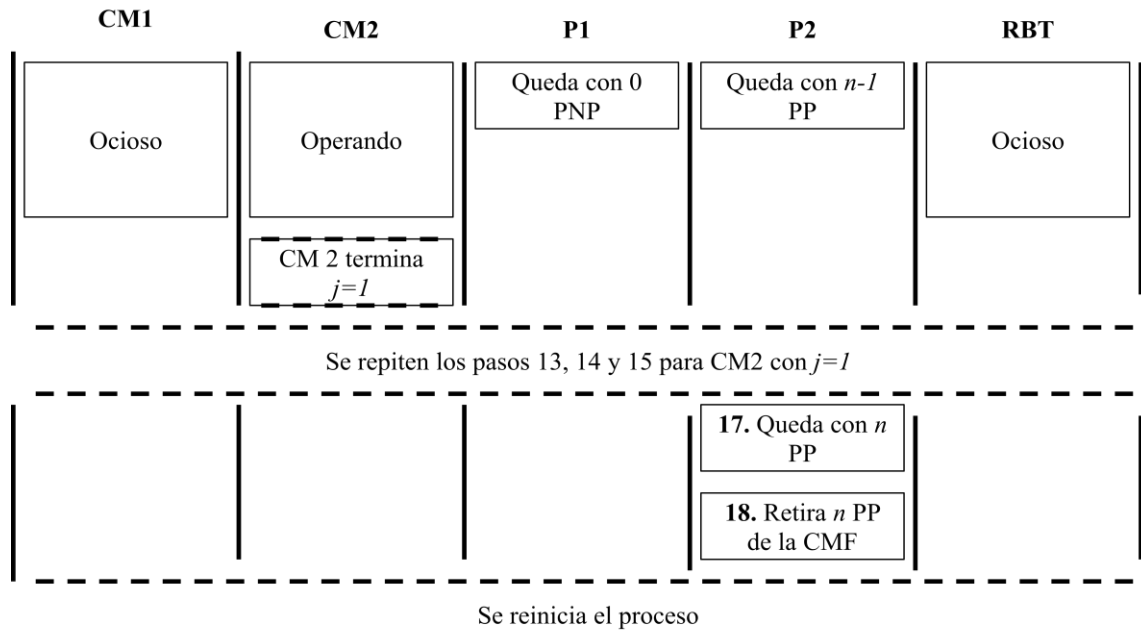




Se repiten los pasos 5,6,7 y 8 para CM2 con $j=n-3$

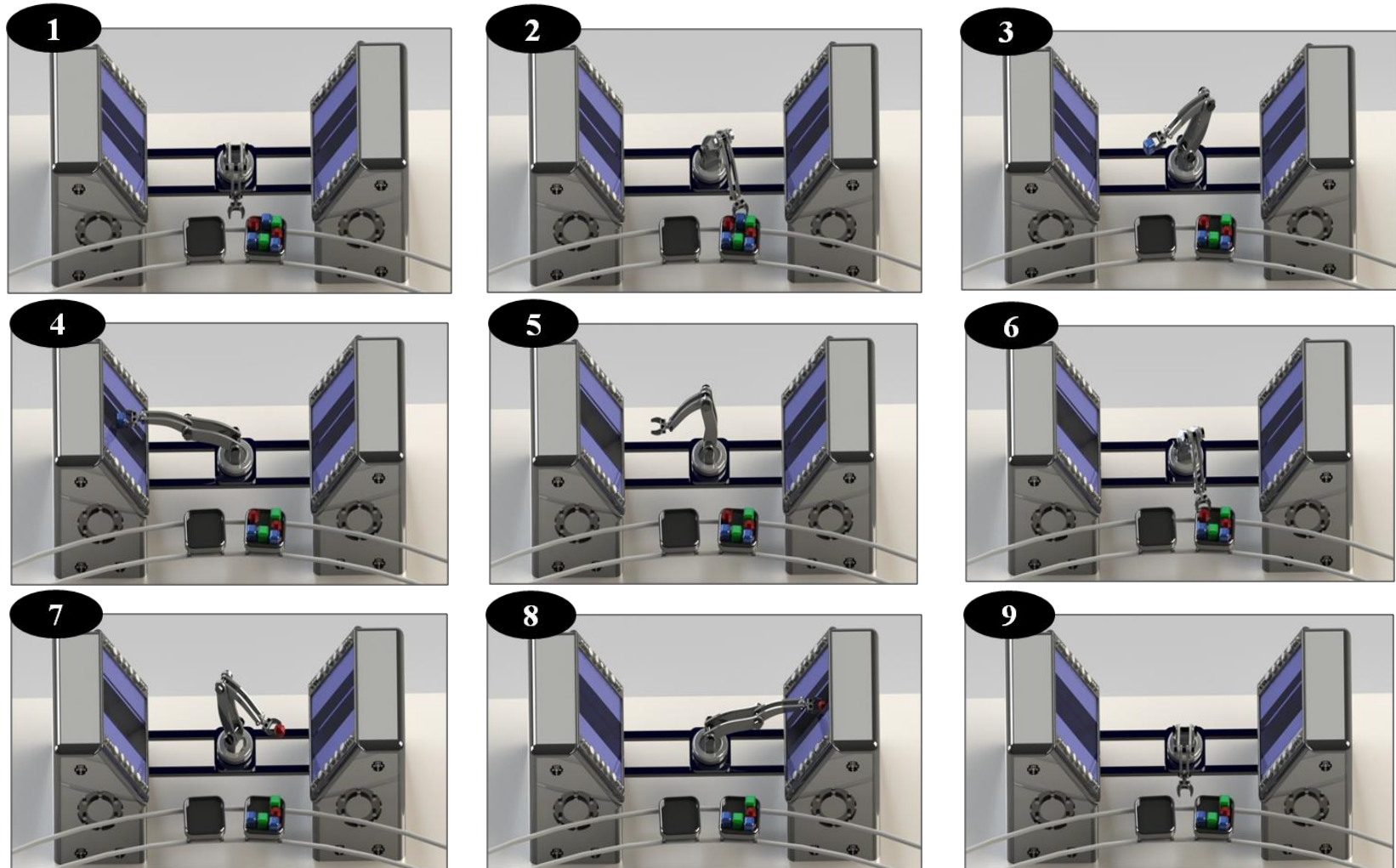


Se repiten los pasos 10, 11 y 12 para CM 1 con $j=2$



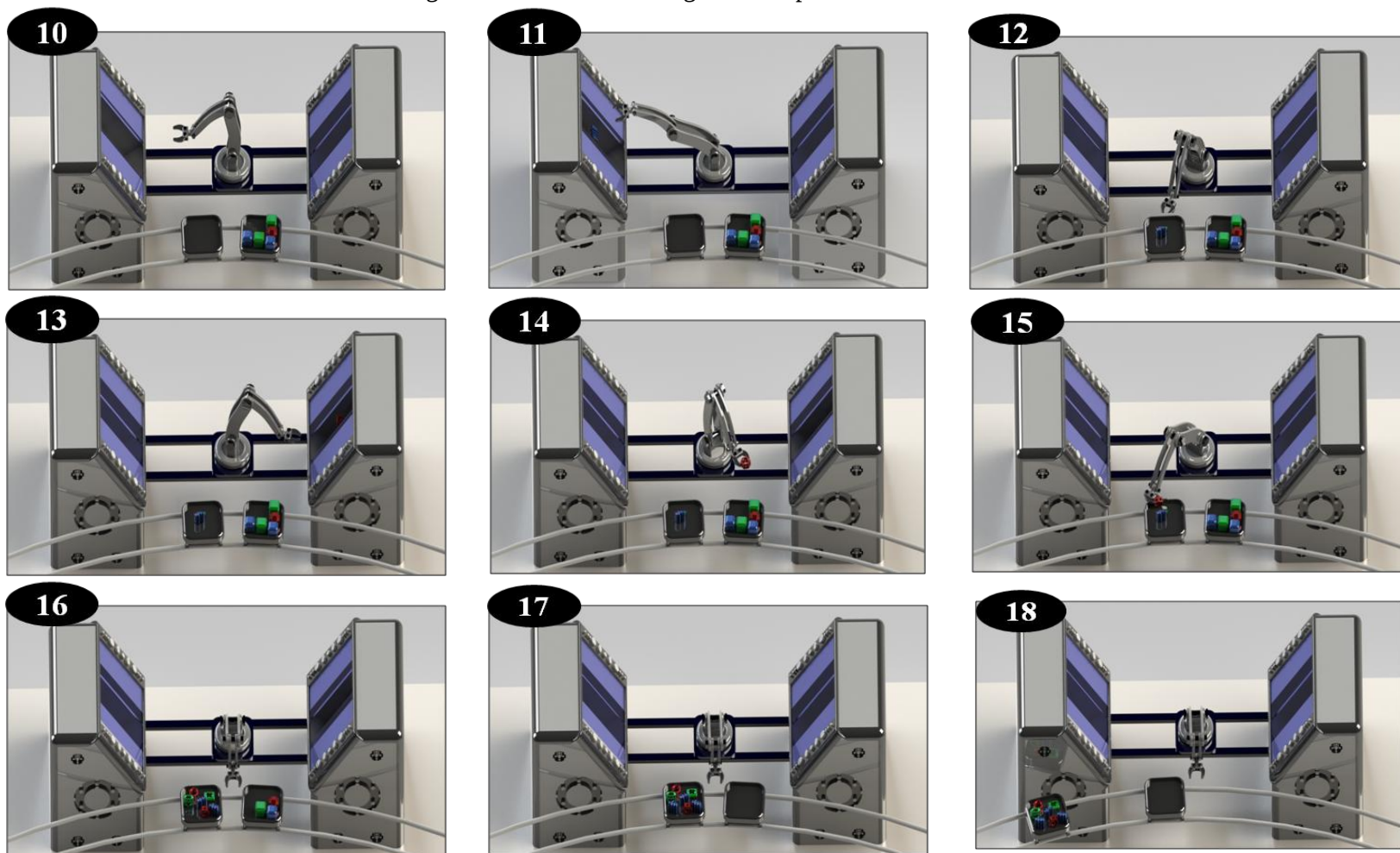
Fuente. Elaboración propia con base en Tolio (2009) y Savsar y Aldaihani (2008)

Figura 10.2. Pasos en el diagrama de operación de una CMF



Fuente. Elaboración propia

Figura 10.3. Pasos en el diagrama de operación de una CMF



Fuente. Elaboración propia

11. BIBLIOGRAFIA

AALEN, Odd O. et al. Survival and event history analysis: a process point of view. 1 ed. New York, USA: Springer Science+Business Media, LLC., 2008. 540 p.

ARACIL, J. Dinámica de Sistemas. Publicaciones de Ingeniería de Sistemas. 4 ed. Madrid, España: Isdefe, 1995. 87 p.

ARNS, M. et al. On the Numerical Analysis of Inhomogeneous Continuous-Time Markov Chains. En: INFORMS Journal on Computing. 2010. Vol. 22, p. 416-432.

AJAH, A.N. et al. Hierarchical Markov Reliability / Availability Models for Energy & Industrial infrastructure Systems Conceptual Design. En: 16th European Symposium on Computer Aided Process Engineering and 9th International Symposium on Process Systems Engineering. 2006. Vol. 21, p. 1753-1758.

AVEN, T. NØKLAND, T.E. On the use of uncertainty importance measures in reliability and risk analysis. En: Reliability Engineering and System Safety. 2010. Vol. 95, p. 127-133.

BAO, Xinzhuo. CUI, Lirong. An Analysis of Availability for Series Markov Repairable System With Neglected or Delayed Failures. En: IEEE Transactions On Reliability. 2010. Vol. 59, p. 734-743.

BARLAS, Yaman. System dynamics: systemic feedback modeling for policy analysis. En: Encyclopedia of Life Support Systems. 1 ed. Oxford, UK: UNESCO Publishing - Eolss Publishers. 2002. P. 1131- 1175.

BHARUCHA-REID, Albert T. Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. 1 ed. Mineola, New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1960. 468 p.

BIANCHI, Carmine. Introducing SD modelling into planning and control systems to manage SMEs' growth: a learning-oriented perspective. En: System Dynamics Review. 2002. Vol. 18, p. 315-338.

BIROLINI, Alessandro. Reliability Engineering Theory and Practice. 5 ed. New York, USA: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 593p.

BORGONOVO, E. et al. Comparison of global sensitivity analysis techniques and importance measures in PSA. EN: Reliability Engineering and System Safety. 2003. Vol. 79, p. 175-185

BRUNELLE, Russell. KAPUR, Kailash. Customer-centered reliability methodology. En: Reliability and Maintainability Symposium Proceedings. 1997. p. 286 - 292.

BRUNELLE, Russell. KAPUR, Kailash. Review and classification of reliability measures for multistate and continuum models. En: IIE Transactions. 1999. Vol 31, p. 1171-1180.

BUKOWSKI, Julia V. Using Markov Models to Compute Probability of Failed Dangerous When Repair Times Are Not Exponentially Distributed. En: RAMS '06. Annual Reliability and Maintainability Symposium. 2006. p. 273-277.

BURNS, James R. Converting Signed Digraphs to Forrester Schematics and Converting Forrester Schematics to Differential Equations. En: IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1977. 695 – 707.

BURNS, James R. Simplified Translation of CLD's into SFD's. En: Proceedings of the 2001 System Dynamics Conference. 2001. p. 1-28.

BURNS, James R. ULGEN, Onur. Component Strategy for the Formulation of System Dynamics Models. En: Proceedings of the International Conference of the System Dynamics Society. 2002a. p. 1-25.

BURNS, James R. ULGEN, Onur. A Matrix Architecture for Development of System Dynamics Models. Proceedings of the System Dynamics Conference. 2002b. p. 1-19.

BURNS, James R. et al. An Algorithm for Converting Signed Digraphs to Forrester Schematics. En: IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1979. p. 115 – 124.

CHATELET, E. et al. A comparison between two indirect exponentiation methods and O.D.E. integration method for RAMS calculations based on homogeneous Markovian models. En: Reliability Engineering and System Safety. 1996. Vol. 51, p. 1-6.

CHEN, Yao-tsung. JENG, Bingchiang. Yet another Representation for system Dynamics Models, and its Advantages. En: Proceeding of the 20th International Conference of the System Dynamics Society. 2002. p. 57-58.

CHEOL KIM, Man. Reliability block diagram with general gates and its application to system reliability analysis. En: Annals of Nuclear Energy. 2011. Vol. 38, p. 2456–2461.

CRESPO MÁRQUEZ, Adolfo. The Maintenance Management Framework. 1 ed. London, UK: Springer-Verlag London Limited, 2007. 333 p.

CUI, Lirong. et al. Markov repairable systems with history-dependent up and down states. En: Stochastic Models. 2007. Vol. 23. p. 665–681.

DASA, K. et al. Reliability consideration in the design and analysis of cellular manufacturing systems. En: Int. J. Production Economics. 2007. Vol. 105, p. 243–262.

DE SOUZA E SILVA, Edmundo. GAIL, Richard. Transient solutions for markov chains. En: Computational Probability. 1 ed. Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 43-81.

DHAWAN, Rajat. Usefulness of Probabilistic System Dynamics in Dynamic Decision Making. En: Proceedings of System Dynamics Conference. 2005. p. 1-13.

DHILLON, B.S. Reliability, Quality, and Safety for Engineers. 1 ed. Florida, USA: CRC Press, 2005. 217 p.

DHILLON, B.S. Maintainability, Maintenance, and Reliability for Engineers. 1 ed. Boca Raton, United States of America: Taylor & Francis Group, LLC., 2006. 214 p.

DISTEFANO, Salvatore. Reliability and Dependability Modeling and Analysis of Dynamic Aspects in Complex Systems. En: IEEE International Conference on Dependable, Autonomic and Secure Computing. 2009. p. 43 – 48.

DISTEFANO, Salvatore. PULIAFITO, Antonio. Dependability Modeling and Analysis in Dynamic Systems. En: IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium. 2007. p. 1 – 8.

DOLADO, J.J. TORREALDEA, F.J. Formal Manipulation of Forrester Diagrams by Graph Grammar. En: IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1988. Vol. 18, p. 981-996.

DO VAN, Phuc. et al. Reliability importance analysis of Markovian systems at steady state using perturbation analysis. En: Reliability Engineering and System Safety. 2008. Vol. 93, p. 1605–1615.

DREW, D. Dinámica de Sistemas Aplicada. 4 ed. Madrid, España: Isdefe. 1995. 209 p.

ERMOLIN, Yuri A. Reliability calculation under seasonally varying failure rate. En: ISA Transactions. 2007. Vol. 46, p. 127–130.

FONOLLOSA, Joan B. et al. Métodos cuantitativos de organización industrial II. 1 ed. Barcelona, España: Ediciones de la Universidad Politécnica de Catalunya, SL., 2002. 144 p.

FORRESTER, Jay Wright. Industrial dynamics. Boston, USA: Pegasus Communications. 1999. 464 pag.

FUCHS, Hans U. System dynamics modeling in science and engineering. En: System Dynamics Conference at the University of Puerto Rico. 2006a. P. 1-21.

FUCHS, Hans U. System Dynamics Modeling in Fluids, Electricity, Heat, and Motion. En: Proceeding of GIREP Conference on Modeling in Physics and Physics Education. 2006b. P. 166 – 187.

FUQUA, Norman B. The Applicability of Markov Analysis Methods to Reliability, Maintainability, and Safety. En: Selected Topics in Assurance Related Technologies. 2002. Vol. 20, p. 1-8.

GEBALI, Fayez. Analysis of Computer and Communication Networks. 1 ed. New York, USA: Springer Science+Business Media, LLC., 2008. 669 p.

GNEDENKO, Boris V. USHAKOV, Igor A. Probabilistic Reliability Engineering. 1 ed. New York, USA: John Wiley & Son, Inc. 1995. 514 p.

GRÖßLER, Andreas. et al. System Dynamics as a Structural Theory in Operations Management. Production and Operations Management. 2008. Vol. 17, p. 373–384.

GROOVER, Mikell. P. Automation, Production System, and Computer-Integrated Manufacturing. 3 ed. New Jersey, USA: Pearson Education Inc., 2008. 815 p.

- HAN, B. T. et al. Reliability Analysis of Flexible Manufacturing Cells Based on Triangular Fuzzy Number. En: Communications in Statistics-Theory and Methods. 2006. Vol. 35, p. 1897-1907.
- HAN, Tingting. et al. Compositional Modeling and Minimization of Time-Inhomogeneous Markov Chains. En: Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC). 2008. Vol 4981, p. 244–258.
- JIMÉNEZ, E. et al. Relaxed Continuous Views of Discrete Event Systems: considerations on Forrester Diagrams and Petri nets. IEEE International Canfemnce on Systems, Man and Cybernetic. 2004. p. 4897-4904.
- KHODABANDEHLOO, K. SAYLES, R. S. Production Reliability in Flexible Manufacturing Systems. En: Quality and Reliability Engineering International. 2007. Vol. 2, p. 171-182.
- KIJIMA, Masaaki. Markov processes for stochastic modeling. 1 ed. Fairford, UK: Chapman and Hall/CRC. 1997. 341 p.
- KIRKWOOD, Craig W. System Dynamics Methods: A Quick Introduction. 1 ed. Arizona, USA: Ventana Systems, Inc, 1998. 117 p.
- KIUREGHIAN, Armen Der. et al. Availability, reliability and downtime of systems with repairable components. En: Reliability Engineering and System Safety. 2007. Vol. 92. p. 231–242.
- KULHAVY, Rudolf. Bayesian Analysis of Stochastic System Dynamics. En: Proceedings of International Conference of the System Dynamics Society. 2007. p. 1-26.
- KUMAR, Rajendra. JACKSON, Alazel. Accurate Reliability Modeling using Markov Analysis with Non-Constant Hazard Rates. En: IEEE Aerospace conference. 2009. p. 1 – 7.
- KUO, Way. ZUO, Ming J. Optimal reliability modeling: principles and applications. 1 ed. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2003. 544 p.
- LAI, C. D. XIE, M. Multi Concepts and Applications of Stochastic Aging in Reliability. En: Handbook of Reliability Engineering. 1 ed. New Jersey, USA: Springer-Verlag London Limited, 2003. p. 305- 315.
- LANE, D. Should System Dynamics be Described as a Hard or Deterministic Systems Approach. En: Systems Research and Behavioral Science. 2000. Vol. 17, p. 3-22.
- LEE, Elisa T. Statistical methods for survival data analysis. 3 ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2003. 513 p.
- LEVITIN, Gregory. LISNIANSKI, Anatoly. New approach to solving problems of multi-state system reliability optimization. En: Quality and Reliability Engineering International. 2001. Vol. 17, p. 93–104.
- LISNIANSKI, Anatoly. Extended block diagram method for a multi-state system reliability assessment. En: Reliability Engineering & System Safety. 2007. Vol. 92, p. 1601–1607.

LISNIANSKI, Anatoly. et al. Maintenance Contract Assessment for Aging Systems. En: Quality and Reliability Engineering International. 2008a. Vol, 24. P. 519–531.

LISNIANSKI, Anatoly. et al. Multistate System Reliability Assessment by Using the Markov Reward Model. En: Statistical Models and Methods for Biomedical and Technical Systems. 2008b. Vol 2, p. 153-168.

LISNIANSKI, Anatoly. et al. Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers. 1 ed. New York, USA: Springer-Verlag London Limited 2010, 2010. 393 p.

LISNIANSKI, Anatoly. LEVITIN, Gregory. Multi-state system reliability: assessment, optimization and applications. 1 ed. London, UK:World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003. 361 p.

LIU, Yu. HUANG, Hong-Zhong. Optimal Replacement Policy for Multi-State System Under Imperfect Maintenance. En: IEEE Transactions On Reliability. 2010. Vol. 59, p. 483- 495.

LIU, Yung-Wen. KAPUR, Kailash. Customer's Cumulative Experience Measures for Reliability of Non-Repairable Aging Multi-State Systems. En: Quality Technology & Quantitative Management. 2007, Vol. 4, p. 225-234.

LIU, Yung-Wen. KAPUR, Kailash. New Models and Measures for Reliability of Multi-state Systems. En: Handbook of Performability Engineering. 1 ed. London: U.K. Springer-Verlag London Limited. 2008. p. 431-445.

MACAL, Charles M. To Agent-Based Simulation From System Dynamics. En: Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference. 2010. p. 86-98.

MAHESHWARI, S. et al. Unreliable Flexible Manufacturing Cell with Common Cause Failure. En: International Journal of Engineering Science and Technology. 2010. Vol. 9, p. 4701-4716.

MISRA, Krishna B. Maintenance Engineering and Maintainability: An Introduction. En: Handbook of Performability Engineering. 1 ed. London: U.K. Springer-Verlag London Limited. 2008a. p. 755 - 772.

MISRA, Krishna B. Reliability Engineering: A Perspective. En: Handbook of Performability Engineering. 1 ed. London: U.K. Springer-Verlag London Limited. 2008b. p. 253- 288.

MISRA, Krishna B. Engineering Design: A Systems Approach. En: Handbook of Performability Engineering. 1 ed. London: U.K. Springer-Verlag London Limited. 2008c. p. 13-24.

MOHAPATRA, Pratap. ROY, Rahul Kumar. System Dynamics Models for Markov Processes. En: Proceedings of the International System Dynamics Conference. 1991. p. 10-30.

MOFFATT, Ian. Casual and Simulation Modelling Using System Dynamics. 1 ed. Casuarina, Australia: Environmental Publications .1991. 52 p.

- MOON, Jong-Fil. et al. Reliability Evaluation of Distribution System through the Analysis of Time-Varying Failure Rate. En: Power Engineering Society General Meeting. 2004. Vol.1, p. 668 – 673.
- MOSEKILDE, Erik. RASMUSSEN, Steen. Random Processes in System Dynamics. En: Dynamica. 1983. Vol. 9, p. 33-39.
- MURTHY, D. N. P. JACK, N. Warranty and Maintenance. En: Handbook of Reliability Engineering. 1 ed. New Jersey, USA: Springer-Verlag London Limited, 2003. p. 305- 315.
- NAIKAN, V.N.A. Reliability Engineering and Life Testing. 1 ed. New Delhi, USA: PHI Learning Private Limited, 2009. 371 p.
- NUHOGLU, H. NUHOGLU, M. System Dynamics Approach In Science and Technology Education. En: Journal of Turkish Science Education. 2007. Vol. 4, p 91-108.
- OSSIMITZ, Günther. MROTZEK, Maximilian. The Basics of System Dynamics: Discrete vs. Continuous Modelling of Time. En: Proceedings of the 26th System Dynamics Conference. 2008. 1-8.
- PECHT, Michael. Product reliability, maintainability, and supportability handbook. 1 ed. USA: Taylor & Francis Group LLC., 2009. 480 p.
- PFAHL, D. LEBSANFT, K. Integration of system dynamics modelling with descriptive process modelling and goal-oriented measurement. En: The Journal of Systems and Software. 1999. Vol. 46, p. 135-150.
- PLATIS, A.N. et al. Asymptotic Availability of Systems Modeled by Cyclic Non-Homogeneous Markov Chains. En: Annual Reliability and Maintainability Symposium Proceedings. 1997. p. 293 – 297.
- PLATIS, Agapios. et al. Dependability analysis of systems modeled by non-homogeneous Markov chains. En: Reliability Engineering and System Safety. 1998. Vol. 61, p. 235–249.
- POZNYAK, Alex. Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Stochastic Systems. 1 ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Ltd. 2009. 538 p.
- PUGH, Alexander L. Simulation software and numerical issues. En: Knowledge for Sustainable Development, An Insight into the Encyclopedia of Life Support Systems. 1 ed. Oxford, UK: UNESCO Publishing – Eolss Publishers. 2002. P. 1131- 1175.
- PUKITE, Paul. PUKITE, Jan. Modeling for reliability analysis: Markov modeling for reliability, maintainability, safety, and supportability analyses of complex systems. 1 ed. New York, USA: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1998. 258 p.
- RAUSAND, Marvin. HOYLAND, Arnljot. Sytem Reliability Methods, and Applications. 2 ed. Hoboken, New Hersey, USA: Jhon Wiley & Sons, Inc., 2004. 636 p.
- RETTERTH, Brad. Impact of Time-Varying Failure Rates on Distribution Reliability. En: 8' International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems. 2004. p. 953 – 958.

- RICHARDSON, George P. Reflections on the foundations of system dynamics. En: System Dynamics Review. 2011. Vol. 27, p. 219–243
- ROLSKI, Tomasz. et al. Stochastic processes for insurance and finance. 1 ed. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1999. 654 p.
- ROSS, Sheldon M. Introduction to Probability Models. 9 ed. Berkeley, California, USA: Elsevier Inc., 2007. 782 p.
- ROY, Rahul. Bulk Delays in System Dynamics Model. En: Proceedings of the 18th International Conference of the System Dynamics Society. 2000. p. 177-178.
- SAHIN, Kenan E. Equivalence of Markov Models to a Class of System Dynamics Models. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1979a. Vol. 9. p. 378-402.
- SAHIN, K. System Dynamics Models: Some Obscurities. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1979b. Vol. 9, p. 91 - 93.
- SAVSAR, Mehmet .Reliability analysis of a flexible manufacturing cell. En: Reliability Engineering and System Safety. 2000. Vol. 67, p. 147–152.
- SAVSAR, Mehmet. Effects of maintenance policies on the productivity of flexible manufacturing cells. En: Omega. 2006. Vol. 34, p. 274 – 282.
- SAVSAR, Mehmet. Reliability modeling and analysis of flexible manufacturing cells. En: Future Manufacturing Systems. 2010. p. 65-94.
- SAVSAR, Mehmet. ALDAIHANI, Majid. Modeling of machine failures in a flexible manufacturing cell with two machines served by a robot. En: Reliability Engineering and System Safety. 2008. Vol. 93, p. 1551–1562.
- SCHWANINGERA, Markus. PÉREZ RÍOS, José. System dynamics and cybernetics: a synergetic pair. En: System Dynamics Review. 2008. Vol. 24, p. 145–174.
- SINGER, Burton. Estimation of Nonstationary Markov Chains from Panel Data. En: Sociological Methodology. 1981. Vol. 12, p. 319-337.
- SONNESSA, Michele. Modelling and simulation of complex systems. Tesis de PhD en Cultura e impresa. Italy: University of Torino, 2004. 136 p.
- SORO, Isaac W. et al. Performance evaluation of multi-state degraded systems with minimal repairs and imperfect preventive maintenance. En: Reliability Engineering and System Safety. 2010. Vol. 95, p. 65–69.
- SRINIVASA RAO, Meesala. Achuta NAIKAN. A Novel Markov System Dynamics Framework for Reliability Analysis of Systems. En: Economic Quality Control. 2009. Vol. 24, p. 101-116.

STERMAN, John D. Business Dynamics. Systems Thinking and Modeling for a Complex World. 1 ed. Boston, USA: McGraw-Hill Companies, Inc, 2000. 1008 p.

STEWART, William J. Probability, Markov chains, queues and simulation: the mathematical basis of performance modeling. 1 ed. New Jersey, USA: Published by Princeton University Press, 2009. 758 p.

SUN, Hairong. HAN, James J. Instantaneous Availability and Interval Availability for Systems with Time-varying Failure Rate: Stair-step Approximation. En: Proceedings. Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing. 2001. p. 371 – 374.

TIJMS, Henk C. A First Course in Stochastic Models. 1 ed. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd., 2003. 478 p.

TOMBUYES, B. DEVOOGHT, J. Solving Markovian systems of O.D.E. for availability and reliability calculations. En: Reliability Engineering and System Safety. 1995. Vol. 48, p. 47-55.

TOLIO, Tullio. Design of flexible production System. Methodologies and Tools. 1 ed. Berlin, Alemania: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 299 p.

TOYODA, Y. MAWATARI, S. Mathematical Formulation of System Principles in System Dynamics. En: The 9th International Conference of the System Dynamics Society. 1991. p. 608-617.

VENTANA SYSTEMS INC. Vensim® ambiente de simulación Ventana® DSS, Professional, Standard, PLE Plus, PLE con Causal Tracing®, Reality Check® y SyntheSim™. Guía del Usuario Versión 5. 1988-2002. 290 p.

VERMA, Ajit Kumar. et al. Reliability and Safety Engineering. 1 ed. London, U.K: Springer-Verlag London Limited. 2010. 557 p.

VINEYARD, M. MEREDITH J. Effect of maintenance policies on FMS failures. En: International Journal of Production Research. 1992. Vol. 30, p. 2647–57.

VINOD, Gopika et al. Importance measures in ranking piping components for risk informed in-service inspection. En: Reliability Engineering and System Safety. 2003. Vol. 80, p. 107–113.

WANG, Jin-Long. Markov-chain based reliability analysis for distributed systems. En: Computers & Electrical Engineering. 2004. Vol 30, p. 183-205.

WANG, Peng. BILLINTON, Roy. Reliability Cost/Worth Assessment of Distribution Systems Incorporating Time-Varying Weather Conditions and Restoration Resources. En: IEEE Transactions on Power Delivery. 2002. Vol. 17, p. 260 – 265.

WANG, Hongzhou. PHAM, Hoang. Optimal Imperfect Maintenance Models. En: Handbook of Reliability Engineering. 1 ed. New Jersey, USA: Springer-Verlag London Limited, 2003. p. 397 – 414.

WOOD, William. Modeling Stochastic Processes with System Dynamics. Proceedings of System Dynamics Conference. 1983. p. 370-377.

XIE, Min. et al. Computing System Reliability Models and Analysis. 1 ed. New York, USA: Kluwer Academic Publishers, 2004. 308 p.

ZHANG, Tieling. Horigome, Michio. Availability and Reliability of System With Dependent Components and Time-Varying Failure and Repair Rates. En: IEEE Transactions on Reliability. 2001. Vol. 50, p. 151-158.

ZILL, Dennis G. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en modelado. 9 ed. México, D.F.: Thomson Editores, S.A., 2006. 451 p.

ZIO, Enrico. Podofillini, Luca. Accounting for components interactions in the differential importance measure. En: Reliability Engineering and System Safety. 2006. Vol. 91, p. 1163–1174.