



Una Caracterización de los Procesos Semióticos y Cognitivos Desarrollados en la Resolución de Problemas por Estudiantes de Grado Undécimo en el Contexto de la Noción de Derivada

Mario Raúl Gómez Cerón

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática

Santiago de Cali

2022



Una Caracterización de los Procesos Semióticos y Cognitivos Desarrollados en la Resolución de Problemas por Estudiantes de Grado Undécimo en el Contexto de la Noción de Derivada

Mario Raúl Gómez Cerón

Informe Final Presentado Como Requisito Parcial Para Optar al Título de Magister En Educación, Énfasis en Educación Matemática

Dirigido por Myriam Belisa Vega Restrepo
Codirector: Jorge Enrique Galeano Cano

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática
Santiago de Cali

2022

Dedicatoria

A Dios y a mi esposa Cecilia por

ser parte fundamental en este

proceso de mi vida

Agradecimientos

Gracias al profesor Marco Correa por su tiempo, motivación, apoyo y orientación.

A los profesores Jorge Galeano y Myriam Vega por sus enseñanzas.

A mis compañeros de maestría por sus correcciones y aportes.

Al Liceo Mixto La Milagrosa por los permisos otorgados.

A Diego Medina, psicólogo y amigo, por sus aportes.

Resumen

En este informe de trabajo final se propone un estudio para el desarrollo del pensamiento variacional; en particular, sobre la caracterización de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas relacionados con la noción de derivada. Se identifican como procesos cognitivos fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional: la conceptualización, la resolución de problemas y el razonamiento. Cada uno de ellos presenta condiciones particulares y características que establecen su lugar en el desarrollo del conocimiento del cálculo. Requieren aprendizajes independientes y actividades que den cuenta de su estructuración. Estos aspectos se coordinaron en el diseño de actividades de clase de cálculo en grado undécimo, que constituyen un diseño experimental que se fundamenta en la metodología de los Experimentos de Enseñanza y que fueron implementadas y analizadas por el autor del presente trabajo de investigación.

Se determinaron algunas características para el diseño de situaciones de aprendizaje que favorecen la formación del pensamiento variacional, mediante las actividades cognitivas de construcción y razonamiento, al finalizar el nivel de media vocacional de la educación secundaria; lo cual puede promover el planteamiento de propuestas de trabajo en clase de cálculo a partir de la divulgación de los resultados en escenarios de formación de maestros, tanto en las licenciaturas como en diversos programas de cualificación.

Palabras Claves: Semiótico, cognitivo, razonamiento, derivada, resolución de problemas, argumentación, pensamiento variacional.

Abstract

In this final paper report, a study is proposed for the development of variational thinking, in particular, on the characterization of the semiotic and cognitive processes developed by eleventh grade students in solving problems related to the notion of derivative. They are identified as fundamental cognitive processes for the development of variational thinking: conceptualization, problem solving and reasoning. Each of them presents particular conditions and characteristics that establish their place in the development of calculus knowledge. They require independent learning and activities that account for their structuring. These aspects were coordinated in the design of calculus class activities in eleventh grade, which constitute an experimental design based on the Teaching Experiments methodology and which were implemented and analyzed by the author of this research work.

Some characteristics were determined for the design of learning situations that favor the formation of variational thinking, through cognitive activities of construction and reasoning, at the end of the vocational middle level of secondary education; which can promote the approach of work proposals in calculus class based on the dissemination of the results in teacher training scenarios, both in bachelor's degrees and in various qualification programs.

Keywords: Semiotic, cognitive, reasoning, derivative, problem solving, argumentation, variational thinking.

Tabla de Contenido

	Pág.
Resumen	iii
Abstract	iv
Índice de Tablas.....	vii
Índice de Figuras	viii
Introducción.....	1
Capítulo 1. Aspectos Generales del Problema	5
1.1 Contextualización y Planteamiento del Problema.....	5
1.2 Justificación.....	9
1.3 Antecedentes	11
1.3.1 Investigaciones Relacionadas con Aspectos de la Enseñanza y/o Aprendizaje del Cálculo.....	12
1.3.2 Investigaciones que Abordan el Enfoque Semiótico Cognitivo del Aprendizaje de las Matemáticas.....	17
1.3.3 Investigaciones que Registran Adelantos Frente a la Noción y/o el Trabajo (Resolución de Problemas) con Derivada	19
1.4 Objetivos	21
1.4.1 Objetivo General	21
1.4.2 Objetivos Específicos.....	22
Capítulo 2. Referentes Teóricos	22
2.1 Perspectiva Curricular	23
2.1.1 Lineamientos Curriculares en Matemáticas	26
2.1.2 Estándares Básicos de Competencias.....	29
2.1.3 Derechos Básicos de Aprendizaje	31
2.2 La Resolución de Problemas.....	38
2.3 La Noción de Derivada	47
2.4 Algunos Elementos Semióticos y Cognitivos Frente al Trabajo con la Noción de Derivada	53

2.4.1 Registros de Representación Semiótica (Lengua Natural, Registro Gráfico, Registro Algebraico, Registro Auxiliar, Tabulación)	54
2.4.2 Semiosis y Noesis.....	65
2.4.3 Transformaciones, Tratamientos y Conversiones	67
2.5 Aspectos Relacionados con el Discurso y la Argumentación para Fomentar en Estudiantes	76
Capítulo 3. Fundamentos Metodológicos	99
3.1 Experimentos de Enseñanza.....	100
3.1.1 Generalidades de Los Experimentos de Enseñanza y las Trayectorias de Aprendizaje	102
3.1.2 Las Conjeturas y el Desarrollo de los Experimentos de Enseñanza	109
3.1.3 El Análisis de los Datos	116
3.2 Diseño de Actividades.....	117
3.2.1 La Situación 1	124
3.2.2 La Situación 2.....	131
3.2.3 La Situación 3.....	137
3.2.4 Implementación del experimento	140
Capítulo 4. Análisis de Resultados y Conclusiones	144
4.1 Resultados del Análisis Local	148
4.1.1 Construcción e Identificación.....	149
4.1.2 Conceptualización, Razonamiento, Resolución de Problemas y Argumentación	154
4.2 Análisis Retrospectivo	160
4.3 Conclusiones	177
A. Anexo: transcripción de los videos e introducción a las actividades	183
B. Anexo: explicaciones y gráficas.	184
Referencias.....	194

Índice de Tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Diferentes formas de concebir la derivada.....</i>	54
Tabla 2. <i>Rejilla del tipo de tareas y modelos para cada situación y actividad planteadas.....</i>	117
Tabla 3. <i>Rejilla de análisis de la implementación.....</i>	167

Índice de Figuras

Figura 1. <i>Pendiente de una función.....</i>	31
Figura 2. <i>Gráficas de una función $f(x)$ y de la derivada de $f(x)$.....</i>	32
Figura 3. <i>Vuelo de un avión a una altitud H descendiendo a una pista de aeropuerto.....</i>	36
Figura 4. <i>Representación cartesiana de la recta secante de una función.....</i>	61
Figura 5. <i>Representación cartesiana de la derivada como la pendiente de la recta tangente.....</i>	62
Figura 6. <i>Gráfica de la función x^2 y su derivada $2x$, con sus respectivas expresiones algebraicas.....</i>	73
Figura 7. <i>Relaciones entre los componentes del sentido.....</i>	80
Figura 8. <i>Máximos y mínimos en el punto c.....</i>	90
Figura 9. <i>Instrumentos de recogida de la información.....</i>	115
Figura 10. <i>Situación 1, actividad 1.....</i>	124
Figura 11. <i>Situación 1, actividad 2.....</i>	125
Figura 12. <i>Situación 2, actividad 1.....</i>	129
Figura 13. <i>Situación 2, actividad 2.....</i>	131
Figura 14. <i>Situación 3, actividad 1.....</i>	134
Figura 15. <i>Situación 3, actividad 2.....</i>	135
Figura 16. <i>Construcción de la gráfica de una función.....</i>	145
Figura 17. <i>Dos maneras de representar el objeto matemático función.....</i>	146

Figura 18. <i>Formulación de hipótesis relativa a una gráfica.....</i>	149
Figura 19. <i>Construcción de las gráficas de la situación 1, actividad 1.....</i>	159
Figura 20. <i>Construcción de las gráficas, situación 2, actividad 1.....</i>	161
Figura 21. <i>Justificaciones situación 2, actividad 2.....</i>	164
Figura 22. <i>Construcción e identificación de gráficas, situación 3, actividades 1 y 2.....</i>	165

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la *Línea de lenguaje, razonamiento y comunicación de saberes y conocimientos matemáticos* del Programa de Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Este trabajo se desarrolla tomando como referentes teóricos elementos de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje Badillo (2003), la comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, Sánchez et al. (2008) y el requerimiento epistemológico para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, Calderón y León (2012). Los dos primeros referentes permitieron aportar desde lo teórico las dimensiones analítica y gráfica de la derivada, así como su noción. En particular, la noción de derivada se retomó desde la definición de Apóstol (1979), la cual aporta al objeto matemático desde la parte conceptual, además acompaña, desde lo teórico, la caracterización de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por alumnos de grado undécimo de una institución educativa privada de la ciudad de Cali (Valle del Cauca), en la resolución de problemas en el contexto de la noción de la derivada.

Por otro lado, el trabajo de Calderón y León (2012) aporta al estudio de la argumentación, como una forma de razonamiento y se caracteriza por usar un discurso con enunciados cuyo objetivo, por lo general, es lograr la adhesión al punto de vista que posee el locutor respecto a un tópico en especial (León, 2005). Desde el punto de vista de este enfoque, se plantea que por medio de la argumentación se pueden tener avances significativos en la comprensión de un objeto o conocimiento matemático determinado, como lo puede ser la derivada.

Como este trabajo centra su mirada en la caracterización de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas en el contexto de la noción de la derivada, es necesario establecer algunas dificultades que ellos presentan cuando se enfrentan a la resolución de problemas sobre dicho objeto matemático. Estas dificultades radican en que los significados analítico y gráfico que construyen no están relacionados, pues ven esas maneras de representación como elementos aislados, pero en esencia son modos de presentar la misma información, solo que unos registros ofrecen mayor potencialidad que otros para “decir” información o sacar conclusiones, entre otros.

Para este planteamiento, los capítulos se dividieron de la siguiente manera:

En el *Capítulo 1* se contextualiza y plantea el problema de investigación, referido fundamentalmente a la contextualización y justificación del problema, apoyado por los referentes utilizados en el trabajo, que se relaciona con los elementos de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia, Badillo (2003), la comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) y el requerimiento epistemológico para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, Calderón y León (2012). También se presentan el objetivo general y los específicos del trabajo.

En el *Capítulo 2* se presentan los referentes teóricos. Además, se expresa que la validación y argumentación de lo matemático en el aula (Calderón y León, 2001), argumentar y validar en matemáticas (Calderón y León, 2003), así como los requerimientos didácticos y competencias argumentativas en matemáticas (Calderón y León, 2003) representan los adelantos teóricos

adecuados relativos a la argumentación, que permiten establecer un marco de referencia para caracterizar lo que los estudiantes argumentan. También, se menciona que el referente teórico relativo al Aprendizaje de la argumentación razonada (Martínez, 2001), tiene como parte fundamental la enunciación en la práctica de la argumentación. Desde el punto de vista de la derivada, el análisis desde una perspectiva cognitiva (Gavilán, 2010) representa un aporte teórico del concepto de derivada. Como elementos teóricos para establecer la noción de derivada, se toman en cuenta los planteamientos de la definición de la derivada a partir de la utilización de límites (Apostol, 1979). La perspectiva curricular para la derivada se fundamenta en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006); finalmente, la argumentación y el discurso (León y Calderón, 2001).

En el *Capítulo 3* se presenta la metodología del trabajo, que corresponde a experimentos de enseñanza, a partir de una descripción general dentro del enfoque de la investigación de diseño; en particular, se centra en aquellos denominados Teacher Development Experiment (TDE), se describen los principios que los fundamentan y sus características centrales (Soto, 2014). Lo anterior, permitió justificar el diseño y aplicación de una secuencia didáctica para desarrollar con los estudiantes la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada, para lo cual se establece una contextualización y sistematización del diseño.

En el *Capítulo 4* se presenta los análisis de los resultados y las conclusiones de la investigación desde los referentes teóricos y prácticos planteados, relativos a la caracterización de los procesos semióticos y cognitivos que desarrollaron los alumnos en la resolución de problemas en el contexto de la noción de la derivada y, así, generar un aporte al desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y, a manera de *Anexos*, los grupos de gráficas y extractos de diálogos de los protocolos de observación que son producto del trabajo que se realizó con los estudiantes para representar los procedimientos realizados por ellos frente a la resolución de problemas sobre derivadas.

Capítulo 1. Aspectos Generales del Problema

Este capítulo tiene como propósito presentar los componentes que permitieron mostrar que existe una problemática que soporta este trabajo de investigación; por lo que, en un inicio, se elabora un recuento de algunas características que debería tener una investigación que se funda en el marco de la educación matemática, para después resaltar las condiciones particulares que implica pensar un trabajo que centra su interés en comprender los procesos semióticos y cognitivos, y en particular, el estudio de la noción de derivada de la formación de la educación media en estudiantes de grado undécimo. En particular, en cuanto a los educandos de la Institución Educativa donde se aplicará el trabajo, algunos presentan un desempeño escolar bueno, mientras que otros no tanto, esto pensando en que todos tengan oportunidades en el aprendizaje.

Asimismo, se presentan la pregunta de indagación y la justificación; luego los antecedentes que respaldaron y orientaron las razones por las cuales desarrollar este trabajo. Para finalmente cerrar con los objetivos, los cuales se constituyeron como los ejes conductores de este trabajo de investigación.

1.1 Contextualización y Planteamiento del Problema

La comprensión de la noción de derivada presenta dificultades en estudiantes de secundaria, más precisamente en el último año de estudio de bachillerato. Desde este punto de vista, este trabajo revisa y propone caracterizar los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas en el contexto de la noción de la derivada, con el fin de mostrar los procesos argumentativos que se desarrollan en el aula de clase, con lo que se pretende tener una mejor comprensión y aprendizaje de la noción de derivada en ese nivel de formación escolar.

A partir de la necesidad de fomentar en los estudiantes competencias argumentativas que les permitan desarrollar pensamiento matemático, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) promueve desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) dichos procesos, pero dentro de la práctica pedagógica se evidencia que al estudiante, en la mayoría de los casos, le cuesta dar explicaciones sobre lo que un problema le plantea y más aún dar explicaciones o argumentar sus alternativas de solución a dicho problema.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, estas dificultades de los estudiantes, despiertan un interés por abordar una propuesta que se centre en la caracterización de los procesos semióticos y cognitivos que ellos desarrollan en la resolución de problemas relacionados con la derivada. Estos procesos muchas veces se asocian con los argumentativos, que los estudiantes expresan en diversas situaciones. Aquí, vale la pena detenerse a analizar la interpretación y comprensión de los registros de representación semióticos, pues los procesos de adquisición del conocimiento matemático son muy complejos y no son procesos que se desarrollan de manera espontánea, por lo que es necesario tener diferentes enfoques como lo son el epistemológico y el educativo, los cuales permiten ver la noción de representación como un estudio en común, con el propósito de caracterizar los fenómenos que se presentan en diversos procesos donde se lleva a cabo el conocimiento o procesos que lo establecen (Duval, 2016). El enfoque educativo radica su importancia en el mejoramiento en el aprendizaje de las matemáticas, lo que puede promover el razonamiento y la adquisición del conocimiento matemático en los estudiantes.

La Educación Matemática, como campo de investigación, centra su mirada en los procesos de adquisición del conocimiento. Por ende, su estudio trata sobre problemáticas que se relacionan con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o de la adquisición cultural del

saber matemático, desde diversas perspectivas tales como las epistemológicas, didácticas, cognitivas, sociopolíticas y socioculturales. Esto, en particular, se ha realizado desde varias perspectivas, grupos o líneas de investigación como lo son la didáctica de las matemáticas, la historia y epistemología de las matemáticas, las tecnologías de la información y comunicación en Educación Matemática y el lenguaje, razonamiento y comunicación de saberes y conocimientos matemáticos, por ejemplo, Rincón (2009), expresa la historia y epistemología de la función derivada; Font (2005) comenta algunas investigaciones sobre la didáctica de la derivada; y Gutiérrez (2017) propone un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) para la enseñanza de la derivada. Estos trabajos e investigaciones muestran algunos aportes a la Educación Matemática, desde diferentes líneas de investigación.

En este caso, este trabajo se enfoca en el posicionamiento semiótico cognitivo, correspondiente al trabajo que desarrolla la línea de lenguaje, razonamiento y comunicación de saberes matemáticos asociada a la Universidad del Valle, lo que permite centrar la mirada hacia un punto de vista del análisis de procesos semióticos que se planteen frente al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el marco de las dificultades que los estudiantes han presentado con respecto a la resolución de problemas en el contexto de la noción de la derivada.

El estudio del cálculo implica dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular, respecto a la derivada que, junto con sus propiedades, les brinda a los estudiantes oportunidades para incrementar el conocimiento frente al pensamiento variacional y los saberes relativos al análisis de situaciones problema, cuyos componentes varían y dependen de diversas condiciones. Estos análisis pueden tratar de temáticas como la optimización, la razón de cambio y trazo de curvas, con las cuales se puede indagar acerca de particularidades no tan

evidentes en distintos contextos que son aspectos del entorno natural de los individuos. Adentrarse en la noción de derivada, al introducir el concepto de límite, puede tener diversas dificultades Flores (2014), pues los estudiantes que tengan ciertos dominios y habilidades van a realizar los procesos de derivación y a aplicar conceptos en la solución de problemas, pero esto no ocurre con todos, de hecho, los estudiantes que sobresalen en cuanto a su conocimiento presentan dificultades en las explicaciones sobre los conceptos relativos con el límite y la derivada, por lo que se evidencian concepciones que no coinciden con las versiones propias de las matemáticas.

Esta problemática se puede encontrar en los estudios de las formaciones básica y media en matemáticas, porque en muchos casos, más no en todos, los estudiantes también presentan dificultades en la resolución de preguntas de las pruebas de Estado ICFES (López, 2005) como requerimiento en el ingreso a la Educación Superior. Además, es posible que muchos estudiantes al realizar los procesos de ingreso a la universidad no alcancen las mínimas competencias requeridas en el área y, por esto, no pueden ingresar, mientras que muchos de los que lo han hecho presentan bajos rendimientos académicos debido a que no tienen las competencias requeridas, esto es, por la poca relación de la conceptualización en relación con la introducción al cálculo, lo que constituye grandes brechas en el aprendizaje del cálculo y otros aspectos directamente relacionados con las matemáticas. Respecto a esto, es bueno considerar que las metodologías o estrategias didácticas que los docentes llevan a cabo en las clases, pueden generar en los estudiantes experiencias que pueden ser positivas o negativas, como por ejemplo que la explicación de un tema se resuelva solamente con dos o tres ejemplos explicados en clase. El estudio de un tema determinado también requiere de una planeación y otros aspectos como saber la forma en que los estudiantes explican, trazan gráficas, argumentan ideas, solucionan problemas,

resuelven preguntas. Pensar y analizar estos aspectos puede alimentar las estrategias para llevar a cabo en el aula de clase y brindar más herramientas para mejorar el aprendizaje y la comprensión de un objeto matemático.

Por lo tanto, lo que se pretende en este trabajo es caracterizar los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas en el contexto de la noción de la derivada, para lo cual se tienen en cuenta preguntas como ¿por qué los estudiantes no identifican la gráfica de una derivada?, ¿qué dificultades presentan los educandos en la deducción de una derivada, dada la gráfica de una función? Estas preguntas han generado la hipótesis central del presente trabajo, en la cual se desea comprender los procesos semióticos y cognitivos, lo que puede aportar o mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Por eso, la pregunta que orienta este trabajo es:

¿Cuáles son las características de los procesos cognitivos y semióticos desarrollados por estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada?

1.2 Justificación

La comunicación es de los aspectos más relevantes entre las personas, pues permite, por ejemplo, intercambiar ideas e interpretaciones sobre el entorno en que se vive. En las aulas de clase se desarrollan diversas formas de la comunicación de una idea, concepto o término, con el fin de que la adquisición de conocimiento alcance su meta. La interpretación de cómo se comprenden las cosas es lo que determina el enriquecimiento de saberes en el aula, lo cual despierta el interés por analizar los enunciados que se dan en dicho contexto. En particular, en la clase de matemáticas, se

pueden plantear situaciones que impliquen la discusión de un saber, en procura de que este pueda interpretarse de formas diferentes para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes.

Las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje variacional y el cálculo diferencial en derivada (Sánchez-Matamoros, 2004)⁰⁰; (Mendoza, Alemán & Ariza, 2017) en funciones y García y Llinares, (1996), así como la experiencia de profesores de educación secundaria da la posibilidad de verificar ciertas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos en mención. Teniendo en consideración estos aspectos, en este trabajo se realizó un estudio que intenta caracterizar lo que se ha observado respecto a las dificultades que presentan estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas relativos con la noción de derivada, las cuales radican en la incomprensión de las propiedades de los límites, la incongruencia que realizan entre la representación gráfica de una deriva y la representación algebraica de su función. También se pueden considerar los siguientes elementos: los bajos desempeños en pruebas estandarizadas en la Institución Educativa, respecto al componente numérico variacional; los jóvenes presentan dificultades con el tratamiento de expresiones algebraicas que necesitan ser aplicadas en contextos matemáticos; las interpretaciones de la derivada de una función son un asunto de gran complejidad por su nivel de abstracción (pendiente de la recta tangente, interpretaciones desde el contexto de la física con el Movimiento Uniformemente Acelerado); no se suele abordar la enseñanza de este contenido teniendo en cuenta la conversión de registros de representación semiótica conscientemente, haciendo que se desaproveche la interpretación del estudio de la variable; en el campo, aún falta ahondar en investigaciones que centren su atención en analizar los razonamientos, en particular los de tipo argumentativo en matemáticas para este contenido.

En este sentido, el desarrollo de habilidades de orden comunicativo como lo son el planteamiento de hipótesis y establecimiento de condiciones y/o regularidades, generadas por preguntas abiertas desligadas de cualquier algoritmo predominante; implica la necesidad de usar y perfeccionar habilidades argumentativas en cualquier situación que esté relacionada con las matemáticas, y que a su vez le permita al estudiante dar cuenta de forma más coherente y significativa acerca de los objetos y conceptos matemáticos que habitualmente maneja, muchas veces, bajo un esquema de representaciones semióticas que por sí solas o sin ser contextualizadas no son lo suficientemente comprensibles. Teniendo en cuenta lo anterior, se hará un análisis de las características de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada, donde también se dé cuenta de las descripciones, explicaciones y argumentaciones que los estudiantes realicen frente al contenido en discusión.

1.3 Antecedentes

Hay diversas investigaciones cuya preocupación ha sido brindar a la enseñanza de los sistemas analíticos el estatus que le corresponde en los currículos escolares, como punto cumbre de los estudios escolares, de tal manera que esto ha generado la existencia de diferentes miradas sobre cómo se puede impulsar su enseñanza. También, establecer factores que dificultan su aprendizaje en los estudiantes, esto sería reconocer y analizar los elementos curriculares, didácticos y cognitivos.

De esta forma, diversos estudios han considerado las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la noción de derivada, a causa de la carga cognitiva representada a través de la coordinación de los registros semióticos y los procesos que equivalen a desarrollar

razonamientos matemáticos; han expresado que existe una problemática en general, punto clave de las investigaciones llevadas a cabo, por consiguiente, ha habido motivación en investigadores como Gutiérrez (2017), Álvarez (2013) y Sánchez-Matamoros (2008), entre otros frente a la indagación sobre estas dificultades que la afectan. Finalmente, los siguientes apartados hacen referencia explícita y breve sobre algunas investigaciones que se han encargado de estudiar el campo de interés mencionado.

1.3.1 Investigaciones Relacionadas con Aspectos de la Enseñanza y/o Aprendizaje del Cálculo

Las matemáticas han representado conocimientos esenciales en diferentes formaciones de carácter profesional como la tecnológica, así como en áreas relativas a los aspectos económicos y administrativos. Al examinar los ambientes laborales de las personas graduadas en diferentes carreras afines a lo financiero y computacional, los problemas sobre optimización y previsión son de carácter fundamental, por lo tanto, en estas carreras, es necesario la enseñanza del cálculo. En los trabajos de Kent & Noss (2002) y Dorier (2010) se explica por qué y cómo el cálculo es importante en el quehacer de las diversas profesiones en campos laborales. Aquí, se hace referencia a algo indispensable en la formación profesional de las ramas, que cada vez crecen, y es al empleo de la tecnología, en concreto, de los programas de computación. Lo referente a los manipuladores simbólicos, hojas de cálculo, graficadores o procesadores de texto representa requisitos de diversas actividades de nivel profesional. En lo que corresponde a las matemáticas, el cómputo es un soporte de la exploración de conceptos matemáticos, su visualización y la experimentación con dicha ciencia (Monzoy 2002). No obstante, los desarrollos en cuanto al material didáctico a veces son inherentes a la implementación en el aula y validación; por esto, el hecho de que haya un

equilibrio entre los dos aspectos será de vital trascendencia en el campo de la educación matemática.

Para citar un trabajo sobre las dificultades que los estudiantes han presentado en el cálculo, en el ámbito internacional, por ejemplo en México, se puede hablar del Centro Universitario Valle de Chalco, entidad de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), donde en el 2002 se llevó a cabo un proyecto que buscaba mejorar los resultados en la enseñanza y aprendizaje en la introducción al cálculo, esto se realizó de manera conjunta con investigaciones del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) (e. g. Martínez 2005; Cuevas, Moreno & Pluinage 2005). Diversos factores han sido los que en esta universidad han representado el poco éxito con estudiantes nuevos en cursos de cálculo, aunque esto se ha dado constantemente en muchas universidades en México. Las deficiencias más importantes analizadas son: serias faltas de prerrequisitos relacionados con el álgebra, programas de estudio desactualizados, mal uso de la tecnología, entre otras. Como conclusión trascendental en estos estudios, se tiene que son necesarios los conceptos que anteceden al cálculo para direccionar de mejor manera su comprensión en niveles superiores, lo cual no quiere decir que se requieran cursos que ayuden a remediar la situación. Se puede decir que un factor importante en el alcance de la conceptualización de función real fue que, en el inicio del curso, se promovió un pensamiento caracterizado como funcional.

Algo que se consideró en la experiencia es que los estudiantes tienen una formación académica caracterizada por la heterogeneidad, pues corresponden a diferentes competencias y planes de estudio. De hecho, muestran que pudieron o no haber realizado un curso de cálculo en

el nivel medio superior. En suma, un factor a tener en cuenta es el económico, pues muchos alumnos requieren tener un trabajo que no tiene que ver con sus estudios porque la situación económica en la región donde se llevó a cabo la experiencia es precaria, lo cual conlleva a que muchos alumnos dediquen medio tiempo en la institución a sus estudios.

A pesar de todo, el cálculo variacional es una herramienta esencial en las ingenierías y profesiones afines, no es suficiente con la graficación en la representación de la variación, por lo que es también muy importante que los conceptos se comprendan y que el alumno los analice en función de llegar a las posibles soluciones de los problemas determinados. Por tanto, es necesaria la modelación matemática y los métodos heurísticos con el fin de que los estudiantes comprendan, interpreten y analicen los problemas partiendo de razones de diferencias entre magnitudes infinitamente pequeñas; por ejemplo, entre algunos métodos se puede decir el que utiliza representaciones a partir de gráficas, datos numéricos o el uso de diagramas Polya (Campos, 2001), para alcanzar estructuras sencillas y, así, poder lograr la posible interpretación y solución.

En particular y teniendo en cuenta lo anterior, las representaciones numéricas tratan sobre datos medidos realizando una tabulación en relación con las magnitudes que se refieren al fenómeno físico o experimental estudiado. En cuanto a las representaciones gráficas, se puede decir que se realizan a partir de curvas en el plano cartesiano o polar, teniendo en cuenta los registros de datos de las magnitudes que se involucran en la situación. Finalmente, las representaciones algebraicas se producen mediante registros numéricos, donde se pueden escribir ecuaciones que satisfacen el comportamiento de las variables relacionadas.

En relación con lo expresado anteriormente, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y algunos trabajos de investigación, uno de ellos llamado Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial (Cabezas & Mendoza, 2016); y otro llamado Estrategias didácticas para el fortalecimiento del pensamiento matemático variacional (Sánchez, 2019), así como la caracterización y categorización de las producciones de los estudiantes, reconociendo algunas particularidades de ellas, evidenciando las diferentes maneras de manifestación del pensamiento variacional; proponen nuevos enfoques en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático variacional. Así como se ha dicho, el concepto de variación es fundamental en la formación de los estudiantes de ingeniería, porque brinda posibilidades frente a la modelación, interpretación, comprensión y análisis de fenómenos de constante cambio, como por ejemplo el flujo de corriente, los fenómenos periódicos, las magnitudes en el cálculo de áreas y perímetros. No obstante, la fundamentación de aquello que se está estudiando implica dificultades de aprendizaje y obstáculos que encuentra el estudiante en el alcance de una óptima conceptualización y que ésta llegue a tener éxito dentro del campo formativo determinado.

Ahora bien, al hablar del concepto de infinitesimal, que se refiere a la diferencia entre dos valores de la misma variable, de magnitud muy pequeña tendiente a cero sin llegar a serlo, y sus aplicaciones a gran variedad de fenómenos, es algo difícil de comprender y conceptualizar en los estudiantes. Sin embargo, visto a partir de los diversos campos de aplicación, este concepto es utilizado para establecer costos y materiales mínimos, evaluar velocidades, aceleraciones, fuerzas, entre muchas otras aplicaciones.

Como colofón, en su investigación, López (2005) afirma que el desempeño académico en matemáticas en estudiantes de ingeniería, es significativamente bajo, lo que establece dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial y ha generado altos índices en la deserción escolar, pero además expresa que esta problemática se halla tanto en la universidad privada como pública. Esto se comparte en trabajos como el de Gutiérrez, Buitrago & Ariza (2017) sobre las dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada, cuya aplicación se realizó con estudiantes de la Universidad Militar Nueva Granada de Bogotá, Colombia; investigación que expresó dificultades cognitivas y procedimentales de los educandos respecto a los conceptos. En efecto, algunas universidades se han encargado de diseñar estrategias de aprendizaje que fortalezcan las competencias, por ejemplo, algunas desarrollan cursos complementarios de precálculo con el fin de que los estudiantes se nivelen, como lo hace la Universidad de los Andes. Asimismo, la Escuela de Ingeniería Julio Garavito dicta cursos donde prima la resolución de problemas mancomunados con trabajos en laboratorios de informática, en tanto que otras instituciones implementan tutorías, talleres de refuerzo que acompañan las clases magistrales, o utilizan metodológicamente el aprendizaje que se basa en problemas y también el manejo de las nuevas tecnologías que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En su mismo trabajo, López (2005) afirma que algunas causas sobre las dificultades frente al aprendizaje de las matemáticas corresponden a la desmotivación que los estudiantes tienen en esta área, los índices de reprobación de los cursos, la repetición de la asignatura y la falta de entendimiento en los conceptos estudiados. Dicho esto, el concepto de derivada es muy difícil de comprender a partir del límite de una función, por lo cual es adecuado investigar y desarrollar metodologías que ayuden a su adecuado aprendizaje.

1.3.2 Investigaciones que Abordan el Enfoque Semiótico Cognitivo del Aprendizaje de las Matemáticas

La importancia de los sistemas de representación radica en dotar de significado los conceptos estudiados, lo que ha llevado a que algunas investigaciones centren su mirada en la forma en que los estudiantes utilizan diversas representaciones como antecedente en la comprensión del tema dado. Así, las representaciones y su coordinación tienen primordial relevancia en el sentido de que son instrumentos o herramientas conceptuales que el estudiante piensa para enfrentarse a la resolución de problemas.

En suma, tal importancia del uso de las representaciones se refiere a que se acepta que los significados de los conceptos son contruidos mediante la utilización de los signos (D'Amore, 2006; Radford, 2000). En relación con lo anterior, se ha dado gran interés al estudio sobre la función que ejercen las representaciones en la construcción de los significados de la noción de derivada y en el abordaje de la misma, a través del estudio de la variación utilizando inicialmente contextos numéricos.

El aspecto epistemológico particular de las matemáticas relativo a otros campos de estudio conlleva a dotar a las representaciones semióticas de un rol esencial (Duval, 2016). Éstas se componen como un único medio de acercamiento a los objetos matemáticos; lo que muestra el problema cognitivo del paso de la representación de un objeto a otra representación del mismo objeto. Por consiguiente y no menos relevante, las estrategias matemáticas incluyen, intrínsecamente, que en las representaciones semióticas haya transformación de las mismas. Para esto, es suficiente revisar la historia del desarrollo de las matemáticas, en donde se puede comprobar que lo correspondiente a las representaciones semióticas ha sido fundamental en el pensamiento matemático. Además, la posibilidad del tratamiento matemático, en cuanto al cálculo

se refiere, es dependiente del sistema de representación utilizado; pues el aspecto primordial de los signos no equivale a reemplazarse por objetos matemáticos, sino a brindar la facultad de sustituir algunos signos por otros.

Ahora bien, al hablar de transformación, en su investigación Morales (2016) afirma que en el análisis acerca de los procesos de pensamiento de los estudiantes al realizar una actividad matemática, se establecen dos tipos de transformaciones: tratamientos y conversiones, y que se presentan algunas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Además, Duval (2006) plantea que, en general, estas dificultades se encuentran en todos los niveles de la enseñanza y contextos relacionados con las matemáticas y que utilizar el lenguaje natural es inevitable, pues se vive en todas las áreas del conocimiento. Es menester aclarar que, la complejidad cognitiva de los tratamientos, amerita analizar, independientemente, la forma en que los tratamientos se trabajan, respectivamente, en los registros discursivo y gráfico, incluso si se encuentran en igual proceso matemático.

Así, pues, las dificultades que se generan, dada la conversión en la actividad matemática, son analizadas a partir de los pares de registros, los cuales son intercambiados en esta transformación; donde se puede mencionar el ejemplo de cuando se da una sencilla “traducción” de términos de cierto problema literal para convertirlo en determinada expresión algebraica, frente a lo cual los estudiantes tienen poco éxito en su realización. Al respecto la conversión tiene la característica que puede o no ser congruente, y además que posee orientación o sentido, lo que proporciona al registro el carácter de partida como de llegada.

De la misma manera, se han encontrado trabajos de investigación anteriores, donde se han estudiado las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y están muy relacionadas con el

planteamiento de Raymond Duval. Por ejemplo, Guzmán (1998) establece el papel tan importante de los registros de representación en las soluciones que presentan los estudiantes, dado que instaurar la distinción y coordinación de diferentes registros, es tanto necesario como natural en matemáticas. Es preponderante que, en la enseñanza de las matemáticas, estas actividades se conviertan en objetos pedagógicos. De otro lado, distinguir y coordinar registros se configura como un papel esencial en el desarrollo del pensamiento, lo que, en didáctica de las matemáticas, ha representado un punto central de estudio.

Finalmente, el trabajo de Morales (2016), muestra que los estudiantes utilizan los monorregistros, escaseando la coordinación explícita entre dos registros o varios. Las soluciones permanecen en el registro de donde proviene el cuestionamiento, también acuden a los registros de tipo algebraico que muchas veces se encuentran de manera extraordinaria en la clase. Es adecuado tener presente que no se trata de únicamente el uso de los registros, sino también del tratamiento y conversión entre ellos, lo cual se puede impulsar en diversas actividades que permitan el mejoramiento en la comprensión de los mismos, así como el aprendizaje del objeto tratado que este caso es la noción de derivada, en la cual se presenta con frecuencia el manejo de las representaciones gráficas y algebraicas.

1.3.3 Investigaciones que Registran Adelantos Frente a la Noción y/o el Trabajo (Resolución de Problemas) con Derivada

De acuerdo con Londoño, Kakes & Decena (2013), la derivada representa un objeto principal de estudio en el diseño curricular de programas sobre cálculo diferencial en ingenierías, licenciaturas en matemáticas, física o afines. A nivel de la educación secundaria, la derivada es un tema que se estudia finalizando el bachillerato. Es tarea de los docentes, tanto en la universidad

como en la educación secundaria, establecer metodologías en la adquisición de conocimiento, impulsar habilidades y afianzar la aptitud que presenta el estudiante, en el sentido de que éste obtenga un abanico de opciones con el que pueda confrontar la resolución de problemas.

En el ámbito general y en forma pública es conocida una diversidad de dificultades relativas al aprendizaje de las matemáticas y en particular, a la noción de la derivada que, frente a la resolución de problemas en diferentes contextos, requieren ciertos aspectos propios y concretos al objeto de estudio en este caso y que se refieren a las reglas de derivación, el conocimiento de funciones a trozos, la interpretación geométrica de la derivada, así como los criterios de la primera y segunda derivada.

A nivel internacional, por ejemplo, las reformas educativas en países como México, plantean que la resolución de problemas debe corresponder a un principio clave en la adquisición de conocimiento y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Schoenfeld (1992) expresa que quien se enfrenta a la resolución de problemas matemáticos, no va a encontrar un camino muy sencillo de resolver, por lo que se necesita pasar por ciertos niveles de dificultades, es decir, confrontar varios obstáculos que, de hecho, no son tan simples de sobrepasar en el planteamiento de la solución del problema en cuestión. En los trabajos de Selden y Mason (1994), así como el de Orton (1983), se ha mostrado la dificultad que tienen los estudiantes en resolver con habilidad problemas rutinarios de cálculo, lo que no sucede cuando se enfrentan a problemas no rutinarios. Se dice que esto es a causa de la poca comprensión sobre el concepto de función; también que lo común del aprendizaje y el reordenamiento del conocimiento, puede generar falsas construcciones matemáticas que se llevan en un prolongado lapso.

En suma, Schoenfeld (1992) y Polya (1965), muestran la importancia de dos aspectos, el primero, referente a proveerse de conocimientos acerca de la derivada, en particular saber sobre reglas de derivación, comprender cuándo una función es derivable o no, reconocer los extremos de una función, entre otros. El segundo, son las estrategias heurísticas que se pueden llevar a cabo en la enseñanza de la derivada como establecer preguntas sobre la incógnita, trazar la gráfica, expresar el problema planteado en forma diferente y buscar particularidades. Por esto, si se pretende alcanzar la comprensión de un problema, es adecuado establecer los datos, incógnitas y condiciones dadas. Se debe poner en práctica estrategias cognitivas como particularizar, enfrentarse a problemas sencillos, repasar casos con aspectos especiales, la utilización del ensayo y el error. Asimismo, es imprescindible usar en la resolución de problemas el dominio en diferentes conocimientos tales como extremos, intervalos, trazo de gráficas y límites en funciones.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Analizar las características de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo, en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada

1.4.2 Objetivos Específicos

- Reconocer los elementos semióticos y cognitivos presentes en tareas que aborden los estudiantes de grado undécimo en relación con la noción de derivada.
- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes de grado undécimo al interpretar un enunciado de problema en relación con la noción de derivada.
- Describir las dificultades que presentan estudiantes de grado undécimo al trazar la gráfica de la derivada de una función a partir de la gráfica de dicha función.
- Determinar las maneras en que los estudiantes de grado undécimo coordinan representaciones semióticas y cognitivas para resolver problemas en relación con la noción de derivada.

Capítulo 2. Referentes Teóricos

El desarrollo de este trabajo requirió de la articulación de distintos referentes teóricos. En primer lugar, se dará una mirada a lo que ha planteado el Ministerio de Educación Nacional sobre el objeto matemático estudiado y la forma en que se han planteado los alcances de los estudiantes frente a los aprendizajes al respecto; por medio de la perspectiva curricular, vista a partir de lo que ha propuesto los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), en adelante EBC, y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), en adelante

DBA. Después, el trabajo de Schoenfeld (1992) apoya lo relacionado a la resolución de problemas como aspecto importante en el aprendizaje de las matemáticas. Luego, se establece la noción de derivada a través de la definición por límites (Apostol, 1979). Seguidamente, se estudia algunos elementos semióticos frente al trabajo con la noción de derivada a partir de la propuesta de Duval (1999, 2004). Y, finalmente, los aspectos relacionados con el discurso y la argumentación para fomentar en estudiantes en el aula de matemáticas, cuya propuesta corresponde a los planteamientos de las autoras Calderón y León Corredor (2012), sobre el requerimiento epistemológico para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría.

2.1 Perspectiva Curricular

La ley General de Educación, ley 115 de febrero 8 de 1994 se instaure bajo los principios de la Constitución Nacional acerca del derecho a la educación que tiene toda persona, es por esto que ella define la organización y prestación de la educación formal, no formal e informal en los diferentes niveles de estudio. Este proceso ha dejado interrogantes sobre el papel de la pedagogía en nuestros tiempos, lo que ha llevado a reflexiones referentes al currículo, plan de estudios y evaluación de los estudiantes. Ahora bien, el MEN ha desarrollado documentos que pretenden atender estas necesidades para orientar y señalar criterios curriculares acerca de la función de las áreas, en el sentido de mejorar la comprensión de ellas e impulsar su enseñanza.

Los Lineamientos Curriculares, documento elaborado por el Ministerio de Educación Nacional y publicado en el año 1998, tienen como propósito compartir algunos conceptos que los sustentan por áreas, con el objetivo de promover su estudio y apropiación. Por su parte, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), plantean argumentos de tipo curricular frente a la importancia de la formación matemática en cuanto a su relación con las

visiones de la naturaleza de las matemáticas. Esto, atendiendo a las investigaciones en educación matemática, las cuales se han comprometido a tener presentes aspectos relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como la formación de ciudadanos con competencias necesarias en el desempeño de sus derechos y deberes democráticos. En este sentido, los EBC (2006) recogen los constructos teóricos que plantean los Lineamientos Curriculares referentes al concepto de *competencia*, señalándola como una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, en la que se aplicaban estructuras matemáticas que hacían el papel de instrumentos que se utilizaban para desarrollar clases de pensamiento lógico y matemático en cualquier contexto (p. 48). También cabe destacar sobre los planteamientos de competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak & Gowik, 1983; en el cual el papel de la significatividad del aprendizaje radica en el sentido que se le otorgue a las prácticas sociales aplicadas. Además, la enseñanza para la comprensión de Wiske (2003), en donde las tareas, actividades y proyectos fundamentan el fortalecimiento de la comprensión.

En los Siete retos de la educación colombiana para el periodo 2006 a 2019, Vasco hace referencia al concepto de *competencia*, expresando que la apuesta por la calidad ha fijado su mirada en el planteamiento de Estándares Básicos de Competencias y en la aplicación de pruebas para medir competencias. El Ministerio de Educación procura que el llamado “círculo de calidad” se cierre en estándares, pruebas y planes de mejoramiento. Los desempeños respecto a las pruebas serán bajos sin planes de apoyo a los planes de mejoramiento de los colegios, sin dotación adicional y sin formación continuada de los docentes. Las pruebas deben transformarse en concordancia con los estándares y el Ministerio debe publicar estándares conforme el ICFES cambie las pruebas. En cuanto a las competencias, se requiere desarrollar un buen marco teórico, que puede tener en cuenta

la propuesta de Chomsky (las personas con cerebro normal tenemos la competencia lingüística); el trabajo de Dell Hymes sobre las competencias comunicativas; y los modelos alemanes, ingleses y norteamericanos en sus competencias laborales. Lo que se puede complementar con los estudios sobre cómo evaluar por competencias. El examen del ICFES y las pruebas ECAES pueden aportar en algo a dicho marco teórico pero no todo en cuanto a la evaluación por competencias. En suma, habría algo más en el aporte a este marco teórico y se trata de saber cómo enseñar para el desarrollo de competencias y formar a profesores al respecto.

Los aspectos anteriores dejan en concreto, el concepto de competencia al cual se refiere en este trabajo, por lo tanto, teniendo en cuenta lo expresado en los párrafos anteriores, los Estándares Básicos expresan que las competencias matemáticas son logradas a partir de situaciones problema significativas, lo que puede conllevar al alcance de competencias de más alto nivel. Por lo tanto, en la actividad matemática inherente a las competencias matemáticas, se constituyen cinco procesos generales, que también trajeron los Lineamientos Curriculares, que son formulación y resolución de problemas; modelación de fenómenos de la realidad; comunicación; razonamiento y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos. Ahora bien, ser matemáticamente competente se circunscribe en el pensamiento lógico y matemático, en el cual se presentan cinco pensamientos planteados por los Lineamientos Curriculares y que retoman los Estándares Básicos, que son el numérico, el variacional, el espacial, el métrico y el aleatorio. Es a través de estos cinco pensamientos que los Estándares Básicos abordan las competencias y conocimientos que los estudiantes deben alcanzar en cada uno de los niveles de estudio de primero a undécimo grado.

Finalmente, el MEN publica en 2015 un primer volumen de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), definidos como un conjunto de saberes y habilidades fundamentales que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, de primero a undécimo en Lenguaje y Matemáticas. En el segundo volumen, se agrega las áreas de ciencias naturales y ciencias sociales, además del grado de transición. Los DBA se definen como un complemento en el desarrollo de planteamientos curriculares en el sentido del apoyo a la planeación, enseñanza y gestión en el aula, sin embargo, en ellos se aclara que no agotan los contenidos implícitos en los Estándares Básicos, por lo que el mejoramiento en las competencias también depende de la calidad de educación que reciban los estudiantes. En los siguientes apartados se verá de qué forma los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos y Derechos de Aprendizaje, plantean las orientaciones correspondientes a la derivada, la cual, por su naturaleza, está directamente relacionada con el pensamiento variacional.

2.1.1 Lineamientos Curriculares en Matemáticas

El inicio y desarrollo del pensamiento variacional planteado como un logro en la educación básica, sobrepasa la enseñanza de contenidos matemáticos fraccionados para ubicarse en dominar conceptos y procedimientos que se relacionan uno con el otro, en el sentido de analizar y modelar situaciones prácticas y matemáticas. Así, el estudio de la variación pretende cuantificarla a través de magnitudes y cantidades, como se señala en la Serie Lineamientos Curriculares, en el apartado 2.3 una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela, donde se aborda el pensamiento variacional desde diversos desarrollos:

Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación

de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional. (MEN, 1998, p. 17)

Ahora bien, desde el punto de vista histórico, la variación inicia con las tablas babilónicas, gráficas de variación y fórmulas algebraicas renacentistas. Ya, en la edad media, la variación proporcional era con lo que se contaba para modelar situaciones de variación. No obstante, el cálculo logra configurarse en el estudio del movimiento visto desde el contexto matemático, donde hay una construcción matemática de la variación. Este vistazo histórico permite observar algunos núcleos conceptuales que se relacionan con la variación: continuo numérico, la función, las magnitudes, el álgebra (en el sentido simbólico y siendo clave la noción de variable), modelos matemáticos de tipos de variación (la proporcionalidad es de relevante significado). En la vida cotidiana y en la científica, la variación se ubica como la relación entre variables, lo que promueve en los estudiantes la observación, el registro y el uso del lenguaje matemático. De esta manera, el desarrollo del pensamiento variacional genera estructuras conceptuales que evolucionan con el tiempo, y su aprendizaje aborda cada día situaciones innovadoras, en cuya exigencia prevalezca aquello que se ha aprendido para aproximarse a conceptos propios de las matemáticas.

En el abordaje del pensamiento variacional, se encuentran sistemas de representación como enunciados verbales, representaciones tabulares, gráficos cartesianos o sagitales, representaciones pictóricas e icónicas, fórmulas y expresiones analíticas. Estas representaciones son herramientas muy valiosas a la hora de crear situaciones problema, donde confluyan fenómenos de cambio, pues involucran al estudiante en procesos aritméticos, solución de problemas y estimación. En este sentido, por ejemplo, el uso de tablas permite al estudiante un buen inicio en el estudio de la función, dado que es una herramienta esencial en la comprensión del concepto de variable, pues aquí, se afianza el hecho de que una variable tenga un número infinito de valores de reemplazo y se promueve la escritura de expresiones algebraicas.

Hay otra herramienta que se utiliza en primaria respecto a la variación, que es el patrón y cuyo estudio implica el uso de representaciones pictóricas e icónicas. Es aquí donde la geometría permite reconocer patrones y regularidades que se presentan en transformaciones, en las que el estudiante puede describir verbalmente relaciones entre cantidades determinadas. En este punto se puede utilizar las tabulaciones para graficar situaciones, identificando variables dependientes e independientes y estudiando en profundidad el sistema cartesiano, el cual puede estudiarse desde los primeros años de escolaridad, porque permite dinamizar el concepto de variación. Por ejemplo, es posible plantear situaciones donde la relación entre variables sea cualitativa, describiendo los ejes de coordenadas y aportando en el conocimiento de las cantidades proporcionales, en las cuales es muy adecuado promover el razonamiento multiplicativo, que caracteriza la obtención de un valor a través del producto de otros. Por lo tanto, el uso de gráficas posibilita formas de ver la dependencia entre variables, permitiendo así, el estudio de la noción de función.

Conceptos como el de función, en el que la variación predomina, pueden desarrollarse utilizando las representaciones expresadas anteriormente, en las que también se permite el conocimiento de conjuntos y de sus relaciones entre sí. Luego de esto, vienen los tipos de funciones, donde las características de los mismos serían el punto de rigor para comprender los patrones dados. Es aquí, donde las calculadoras gráficas y el uso de las tecnologías similares, aportan al mejoramiento de la comprensión de la variación y, por lo tanto, de la conceptualización de aspectos como el de función.

Los lineamientos curriculares presentan de esta manera el pensamiento variacional, haciendo énfasis en que el significado y sentido de la variación se puede acentuar con el uso de situaciones problema, además, la utilización de representaciones gráficas, algebraicas y tablas, permite referirse con mayor precisión a fenómenos de cambio relacionados con la vida cotidiana o áreas del conocimiento en general. De esta manera y, particularmente, los Lineamientos Curriculares (1998) afirman que la *“organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas”*. (p. 50)

2.1.2 Estándares Básicos de Competencias

La noción de derivada aparece en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en los grados décimo y undécimo, desde el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

“Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.” (p. 89)

Pero la derivada también aparece en los Estándares desde el punto de vista de la velocidad media:

“Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.” (MEN 2006, p. 89)

Podemos ver que la derivada aparece en los estándares como modelo de situaciones: Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Además, para los grados octavo y noveno, la derivada aparece en forma de variación y por medio de la definición de pendiente de una recta, de la siguiente manera:

Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. (MEN, 2006, p. 87)

Teniendo en cuenta las indicaciones generales y los contenidos, la noción de derivada, se plantea a partir de la derivada de una función en un punto, utilizando tanto el significado gráfico, como analítico. Posteriormente, se pasa a la función derivada y al cálculo de funciones derivadas.

En este sentido, observamos que la derivada aparece en el currículo de matemáticas, a partir de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, desde los grados octavo y noveno como una definición explícita de pendiente de una recta. En los grados anteriores, la derivada no aparece explícitamente sino por medio de otros términos como razón de cambio (MEN, 2006).

2.1.3 Derechos Básicos de Aprendizaje

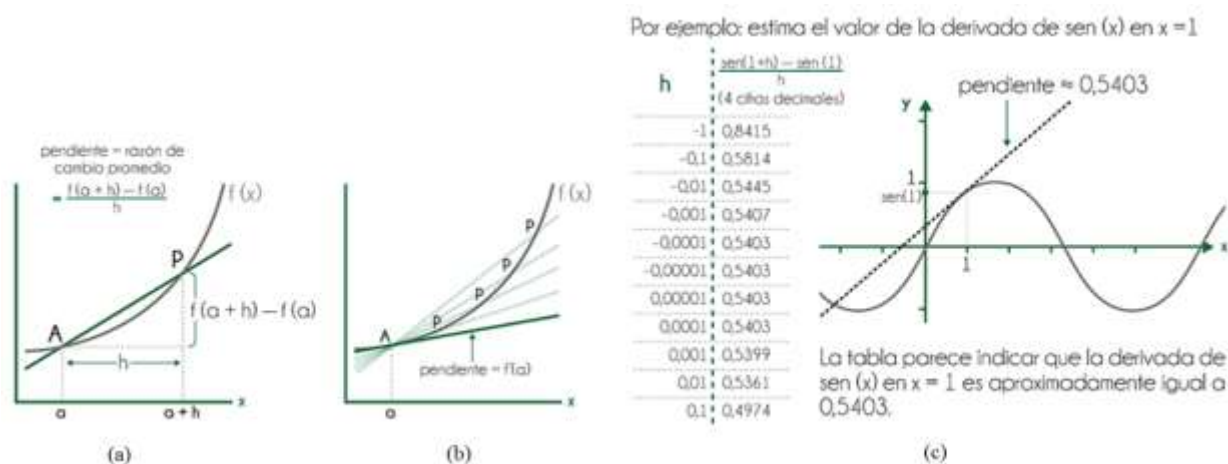
En 2015 el MEN plantea los Derechos Básicos de Aprendizaje, en adelante DBA, como un conjunto de saberes fundamentales dirigidos a las comunidades educativas que, al incorporarse en los procesos de enseñanza, promueven condiciones de igualdad educativa a todos los niños, niñas y jóvenes del país. Además, expresa que se plantean en concordancia con los Lineamientos Curriculares y Los Estándares Básicos de Competencias, estableciendo una posible ruta de aprendizajes para que los estudiantes alcances lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias. En el caso de grado undécimo, los DBA presentan 17 saberes fundamentales, en particular, respecto a la derivada se relacionan los saberes 3, 4 y 5 de la siguiente manera:

3) Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $A = (a, f(a))$ como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto A y puntos sobre la gráfica que se acercan a A . Es decir, como:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Utiliza esto para estimar la razón de cambio instantáneo $f'(a)$ para un valor particular de a .

$$\text{razón de cambio instantáneo de } f \text{ en } a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{pendiente de la tangente en } A$$



- (a) Pendiente de una función. La pendiente de la función $f(x)$ se puede definir a través de la secante que pasa por los puntos A y P; también se llama razón de cambio promedio.
- (b) Forma en que el segmento AP se hace cada vez tangente a la curva $f(x)$. Cada vez que el punto P se acerca al punto A, la distancia h tiende a cero y, por lo tanto, se puede definir la pendiente de $f(x)$ en el punto a, llamada $f'(a)$.
- (c) Ejemplo de la pendiente de la función $\sin(x)$ en un punto dado.

Figura 1. El punto P de la gráfica (a) se acerca al punto A a través de $f(x)$, gráfica (b). En la tabla de la gráfica (c) h tiende a 0 cuando $f(x)$ tiende a 0,5403, dado el punto $(1, \sin(1))$. Tomado de Ministerio de Educación Nacional, 2015. Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá: MEN.

4) Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo.

Dada la gráfica de una función, dibuja de manera aproximada la gráfica de la derivada, identificando claramente los ceros de la derivada y los intervalos donde ésta es negativa y positiva.

Por ejemplo, como lo muestra la figura 2:

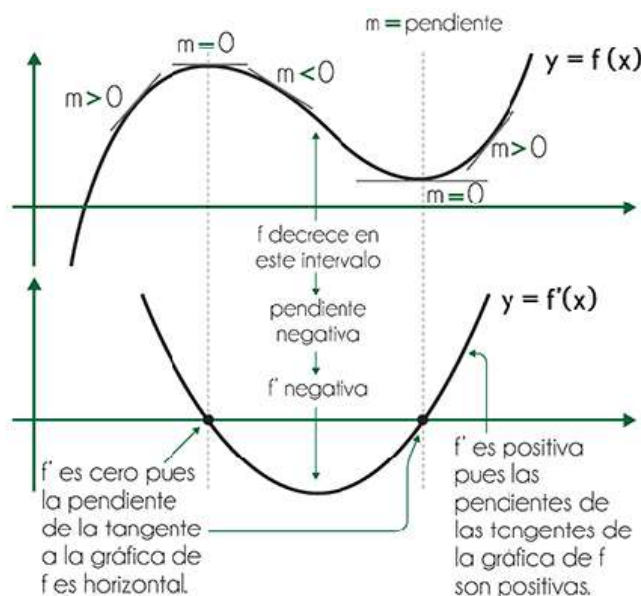


Figura 2. Gráficas de una función $f(x)$ y de la derivada de $f(x)$. La gráfica de $f(x)$ muestra el signo de la pendiente y la derivada de $f'(x)$ indica los ceros de la misma. Tomado de Ministerio de Educación Nacional, 2015. Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá: MEN.

5) Conoce las fórmulas de las derivadas de funciones polinomiales, trigonométricas, potencias, exponenciales y logarítmicas y las utiliza para resolver problemas. Por ejemplo, ¿cuál es el radio de un círculo cuando su área crece a una razón instantánea de $20 \text{ cm}^2/\text{cm}$?

$$A = \pi r^2 \rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

Si $dA/dr = 20 \text{ cm}^2/\text{cm}$ entonces $2\pi r = 20$, lo cual quiere decir que $r = 3,18 \text{ cm}$. Es decir, cuando r es aproximadamente $3,18 \text{ cm}$ el área del círculo crece a una razón (instantánea) de 20 cm^2 de área por cada centímetro que crece el radio.

La razón de cambio instantáneo del área es mayor cuando el radio es mayor. Es decir, entre mayor es el radio del círculo, mayor es el cambio en el área al incrementar el radio un centímetro.

En estos tres saberes fundamentales, se pretende, en primer lugar que el estudiante interprete la pendiente de la recta a la gráfica de una función en un punto dado; en segundo lugar, que dibuje la gráfica de la derivada de una función, sabiendo que la derivada de la función es la función de razón de cambio instantáneo. Y, en tercer lugar, que conozca las fórmulas de las derivadas de varias funciones para utilizarlas en la resolución de problemas.

Ahora bien, en el 2016 el MEN publica los Derechos Básicos de Aprendizaje en una segunda versión como un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once. Es menester aclarar que, este documento del MEN expresa que los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular y que deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos de los establecimientos educativos. De otro lado, en esta versión cada uno de los aprendizajes estructurantes trae un nuevo elemento llamado *evidencias de aprendizaje*, las cuales expresan indicios claves que muestran a los profesores si se está alcanzando el aprendizaje indicado en el enunciado. A excepción de las evidencias de aprendizaje, la estructura de los DBA conserva una forma similar a su versión en 2015: enunciado, evidencias de aprendizaje, ejemplo.

En el caso de grado undécimo, los DBA generaron 10 aprendizajes estructurantes, de los cuales, tres de ellos se refieren a la derivada y expresan lo siguiente:

3) Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo al contexto.

Evidencias de aprendizaje:

- Reconoce magnitudes definidas como razones definidas como razones entre otras magnitudes.
- Interpreta y expresa magnitudes como velocidad y aceleración, con las unidades respectivas y las relaciones entre ellas.
- Utiliza e interpreta la derivada para resolver problemas relacionados con la vinculación y la razón de cambio de funciones que involucran magnitudes como velocidad, aceleración, longitud, tiempo.
- Explica las respuestas y resultados en un problema usando las expresiones algebraicas y la pertinencia de las unidades utilizadas en los cálculos.

Ejemplo: Desde la terraza de un edificio con una altura (h_0) de 40 metros, se lanza un balón verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial (V_0) de 19 m/s. La altura H que alcanza el balón en un tiempo t (en segundos) se puede calcular con la expresión: $H = -4,9t^2 + v_0t + h_0$

Discute el significado y las unidades del número -4,9. Explica la relación entre las unidades de las magnitudes involucradas en la expresión para calcular la altura, de manera que ésta quede expresada en metros. Explica por qué la velocidad se expresa en m/s y la aceleración en m/s^2 . Explica el sentido de la afirmación “la expresión para H representa la gráfica de una parábola en el sistema de coordenadas H contra t , pero el movimiento de caída libre puede ser vertical cuando se suelta un objeto desde cierta altura”

5) Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Evidencias de aprendizaje

- Relaciona la noción de derivada con características numéricas, geométricas y métricas.
- Utiliza la derivada para estudiar la covariación entre dos magnitudes y relaciona características de la función.
- Halla la derivada de algunas funciones empleando métodos gráficos y numéricos.

Ejemplo: Cuando un atleta recorre cierta distancia se puede suponer que su velocidad no es constante, que a partir del momento en que sale empieza a aumentar su velocidad hasta un pico máximo y que disminuye progresivamente hasta el final. Si se admite que la ecuación

$$F(t) = 0,00192t(250 - t)$$

Representa la distancia recorrida por el atleta en metros en t segundos. Averigua la distancia que ha recorrido cuando alcanza la mayor velocidad. Usa la derivada para construir un argumento.

8) Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.

Evidencias de aprendizaje

- Utiliza la derivada para estudiar la variación y relaciona características de la derivada con características de la función.
- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.
- Calcula derivadas de funciones.

*Ejemplo*¹: Un avión vuela a una altitud H cuando comienza su descenso a una pista de aeropuerto que está a una distancia L del avión, con respecto al suelo, como se muestra en la figura 3. Asume que la trayectoria de aterrizaje se representa con la gráfica de una función polinomial cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $y(-L) = H$, $y(0) = 0$. Encuentra el valor de $\frac{dy}{dx}$ en $x = 0$ y el valor de $\frac{dy}{dx}$ en $x = -L$. Utiliza los valores de $\frac{dy}{dx}$ en $x = 0$ y en $x = -L$ junto con $y(0) = 0$ y $y(-L) = H$ para mostrar que $y(x) = H \left(\frac{2(x)^3}{L} + \frac{3(x)^2}{L} \right)$

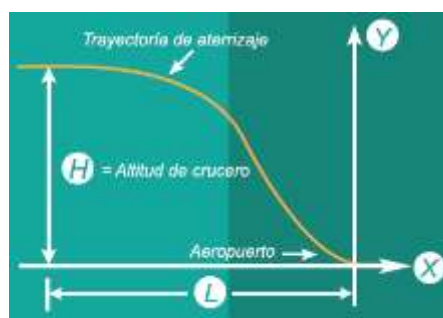


Figura 3. Vuelo de un avión a una altitud H descendiendo a una pista de aeropuerto. Tomado de Ministerio de Educación Nacional, 2016. Derechos Básicos de Aprendizaje, Volumen 2. Bogotá: MEN.

Se puede observar que tanto en los Lineamientos curriculares, como en los Estándares Básicos y en los DBA, la resolución de problemas es considerada como parte integral del aprendizaje de las matemáticas, además que los estudiantes deben ser preparados en la construcción de nuevos conocimientos matemáticos utilizando la resolución de problemas en contextos matemáticos y en otros ámbitos, adaptando estrategias, reflexiones y análisis en dichos procesos. En la resolución de problemas un concepto muy importante es el de heurística, que alude a los métodos exploratorios y se conoce como la ciencia del descubrimiento, pues permite

¹ Tomado de Cálculo de una variable. Finney, Demana, Waits y Kennedy. Prentice Hall Segunda Edición, 2000

desarrollar procesos de razonamiento que ayudan a la comprensión del objeto o tema estudiados. Este concepto es uno de los principales protagonistas en la elaboración de este trabajo, pues lo que se busca a la hora de la elaboración de los diseños que se van implementar con los estudiantes es, justamente, trabajar el objeto matemático derivada con registros de representación que, como se dijo anteriormente, permiten una mayor comprensión del objeto estudiado con un tratamiento acorde a lo que exigen los elementos curriculares presentados, la teoría de Duval, la resolución de problemas, entre otros elementos teóricos. Este sería un diseño novedoso que aporta al campo de la Educación Matemática, porque usualmente las entradas clásicas se realizan siempre desde la parte algebraica y luego la analítica, dejando de lado la parte de la interacción y las representaciones visuales. Lo dicho anteriormente se interpreta en el sentido en que el estudiante pueda también analizar los enunciados en lenguaje natural, algebraico, gráfico y que dicho análisis le permita obtener una variedad de elementos, como las propiedades del objeto en cuestión, para resolver la situación dada, a través de la variación. Esta parte nos es útil para analizar los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por los estudiantes y para ello, será vital el uso de representaciones semióticas en la aplicación de situaciones problema a resolver. Se ampliará lo concerniente a la resolución de problemas en el siguiente apartado con los trabajos de De Faria (2008) y Alonso & Martínez (2003), donde se realizan reflexiones al respecto y se establecen algunas características históricas de su aplicación como vía eficaz en la enseñanza de las matemáticas; desde las propuestas de Pappus (300 D.C.), Schoenfeld (1985), entre otros.

2.2 La Resolución de Problemas

En la actualidad, uno de los retos en las matemáticas es continuar en la contribución del progreso cultural, por esto, es necesario conservar y difundir el legado matemático desarrollado a través del tiempo, lo cual infiere gran esfuerzo muy bien organizado de la comunidad matemática.

En suma, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que son inherentes a los aspectos sociales y culturales, han mostrado muchas dificultades en los estudiantes, por lo que se han presentado estudios acerca de procesos de comunicación, adquisición y comprensión de las matemáticas, realizados por una extensa comunidad científica que desde hace muchos años continua en investigaciones al respecto.

Teniendo en cuenta lo anterior, y tomando como referente la resolución de problemas, se pueden citar los trabajos de G. Polya, Descartes, Leibniz, Euler, Poincaré, Hadamard, que han contribuido a otras investigaciones. No obstante, una de las dificultades que se continúan presentando en los estudiantes frente a la enseñanza de las matemáticas es la resolución de problemas, lo que ha llamado la atención en fijar la mirada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, que pueden impulsar en los estudiantes potencialidades y dotar de significado los fenómenos de la vida cotidiana. Desde este punto de vista, se considera en el presente trabajo, la resolución de problemas como una actividad fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para el cual se traerá a colación algunos breves elementos históricos que lo caracterizan y que contienen conceptos tales que permiten mejorar el pensamiento y razonamiento matemático de los estudiantes.

La resolución de problemas destaca aspectos esenciales en el quehacer matemático. Sin embargo, según Rico (1988), es en la década de los 70 en la que esta actividad se establece como un campo autónomo en el que se puede investigar sistemáticamente. Autores como Brown (1983) la han considerado, dentro de las matemáticas, como una gran innovación en la década de los 80; así mismo se agregan investigaciones al respecto por filósofos como Descartes y Dewey, psicólogos como Newel, Simon, Hayes y Vergnaud, matemáticos como Hadamard y Polya,

educadores matemáticos como Steffe, Nesther, Kilpatrick, Bell, Fishbein y Greer, quienes con enfoques diferentes han dejado ver que no existe una caracterización universal de la resolución de problemas (A. Tortosa, 1999).

Según Schoenfeld (1985), hay cuatro enfoques que sintetizan los trabajos sobre resolución de problemas a nivel internacional: problemas presentados en forma escrita, sencillos pero la Matemática siempre vista en el contexto del “mundo real”; matemáticas aplicadas o modelos matemáticos, tratamiento de problemas que reflejan el “mundo real”; el estudio de los procesos cognitivos de la mente, es decir, aspectos del pensamiento matemático relacionados con problemas relativamente complejos; finalmente, la determinación y enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos, basado en el trabajo de Polya (1945).

Desde el punto de vista de Schoenfeld, (1985) la resolución de problemas se define como el uso de problemas o proyectos difíciles por medio de los cuales los estudiantes aprenden a pensar matemáticamente. La palabra “difícil” se refiere a la dificultad intelectual o el desconocimiento de un algoritmo que lleve a la persona o resolutor a la solución. De aquí, que la dificultad de un problema sea relativa, pues depende del conocimiento del resolutor. De otro lado, se asume el pensar matemáticamente como el ejercicio de habilidades para formar categorías coherentes, utilizar procesos de cuantificación, para construir representaciones simbólicas del entorno y desarrollar las competencias para resolver situaciones problemas cotidianos (Cruz, 1995). Finalmente, es bueno referirse al resolutor como al estudiante que se encuentra resolviendo cierto problema.

Puesto que la resolución de problemas no es una tendencia nueva, debido a las investigaciones que los científicos han presentado y que se refieren al tratar de comprender y

enseñar habilidades frente a dicha cuestión, según R. Delgado (1999) se han clasificado en dos etapas delimitadas por el trabajo de G. Polya (1945). La primera etapa, desde la antigüedad hasta 1945, destaca los siguientes tres aportes: el primero, del filósofo griego Sócrates, siglo V a.C., en el Diálogo de Platón, donde dirigió con preguntas a un esclavo para llegar a la solución de un problema que consistía en la construcción de un cuadrado de área doble a la de un cuadrado dado. El segundo, del filósofo francés René Descartes, siglo XVII, con los modelos del pensamiento productivo o consejos para aquellos que quisiesen resolver problemas con facilidad. El tercero, del matemático suizo Leonard Euler, siglo XVIII, quien introdujo reflexiones de técnicas utilizadas por él y aplicó la educación heurística en sus estudiantes. No obstante, estos trabajos no reflejaron cambios en el proceder educacional equivalentes a ver la resolución de problemas como una vía en la enseñanza de las matemáticas, Delgado (1999).

La segunda etapa, desde 1945 a la actualidad, tiene como autor principal a G. Polya (1945) con sus obras *How to solve, Mathematical and Plausible Reasoning* (1954) y *Mathematical Discovery* (1965), siendo la primera un importante estímulo para los autores posteriores quienes han investigado al respecto. En suma, un momento relevante en esta etapa es la vuelta hacia lo básico como salida a la crisis planteada por la Matemática moderna, que, según Schoenfeld (1985), transforma a la resolución de problemas en el núcleo central de las matemáticas de los 70. Otro aspecto que no puede pasar inadvertido es la creación de los Estándares Curriculares por el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos, 1980, donde se considera esta actividad como eje central del currículo. En la década de los 80, el autor Allan Schoenfeld estudia y critica el método de G. Polya, mostrando subestrategias más alcanzables al trabajo con

estudiantes, y planteando categorías que permiten reflejar formas de solucionar problemas; también publica en 1985 su obra *Mathematical Problem Solving*.

En esta etapa tenemos autores como L. Fridman y E. Turetski, Unión Soviética, quienes en 1989 traen su libro *Cómo aprender a resolver problemas*, donde ubican elementos teóricos, desarrollando estrategias de resolución. En esta década, el Informe Cockcroft (1985), muestra un análisis comprensivo de la matemática de Inglaterra y País de Gales, donde en el capítulo 6 expresa que la resolución de problemas es consustancial a las matemáticas, las cuales son útiles aplicándolas en una situación concreta, los estudiantes lograrán cierta experiencia en la aplicación de las matemáticas en la resolución de problemas que no necesariamente comprendan repeticiones de ejercicios vistos, Tortosa (1999).

Llegados los años 90, la resolución de problemas se convierte en un tema central en diferentes espacios de investigación, constituyéndose en una actividad trascendental de estudio en el campo de la Educación Matemática. Por ejemplo, podemos ver que en universidades como Granada, Valencia y Barcelona, en España, se destacan los trabajos de L. Rico y J. Gascón sobre resolución de problemas; así como en México, con los aportes de Santos Trigo (1993) como *Learning Mathematics: A perspective base don problems solving*. También en Cuba, se pueden citar los trabajos del grupo BETA, en el que la Dra. H. Hernández, ha desarrollado investigaciones en el nivel superior, así como en los niveles de enseñanza primaria donde encontramos autores como A. Labarrere, L. Campistrout y C. Rizo. Asimismo, se puede mencionar los trabajos de tesis doctorales de Delgado, R. (1999), Llivina, M. (1999), Jiménez, M. (2000), Ferrer, M. (2000), Rebollar, A. (2000) y Alonso, I. (2001), entre otros.

Ahora bien, una forma de describir el papel importante que juega la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, es mostrando diferentes paradigmas o formas ideales de abordar los problemas, que se presentan en la práctica docente real y que están basados en los trabajos de J. Gascón (1994) y Chevallard (1992). El paradigma *teoricista*, considera a la resolución de problemas como un aspecto secundario en el proceso didáctico global, dejando de lado las tareas dirigidas, convirtiendo problemas en aspectos triviales y rutinarios. El paradigma *tecnicista*, hace énfasis en las técnicas simples, teniendo el conductismo como base principal. El paradigma *modernista* pretendería superar los anteriores, en el sentido de brindar primacía al momento exploratorio, preservando la descontextualización de los problemas y basándose en la psicología genética. El paradigma *constructivista*, elabora nuevos conocimientos y relaciona el momento teórico con el exploratorio, otorgándole importancia a la actividad de resolución de problemas en la génesis de los conceptos; deja de lado la técnica y presenta los problemas de manera aislada. El paradigma *procedimental*, orienta al alumno en las técnicas utilizadas pero descuida el momento teórico, pues proporciona problemas prefijados. El paradigma de la *modelización*, construye un modelo para un sistema determinado, buscando conocimientos relativos a los sistemas modelados; presenta limitaciones en los momentos de la técnica y deja los problemas aislados. El paradigma de los *momentos didácticos* reúne los problemas en función de las técnicas con el fin de estudiarlas, utilizarlas y producirlas; relacionándose con la técnica, la teoría, los aspectos procedimentales y de modelización.

De acuerdo con los autores Alonso & Martínez (2003), en su artículo sobre resolución de problemas, donde se realiza una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de las matemáticas, este último paradigma es el que se debe implementar, desarrollar y

aplicar en los procesos de enseñanza, pues integra actividades matemáticas, alcanzando cierta estabilización de los procesos didácticos. De otro lado, se puede señalar las funciones de la resolución de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, Branca (1980), como objetivo, proceso y destreza básica. Como objetivo, es bueno indicar su aplicación y utilidad en la cotidianidad. Como proceso del pensamiento, aplica conocimientos previos a situaciones nuevas, reorganizando datos, construyendo estructuras en forma de secuencia, priorizando en procedimientos y métodos empleados. Finalmente, como destreza básica, plantea objetivos específicos, organizando tipos de problemas y métodos, haciendo énfasis en los conceptos e impulsando habilidades. Esta última función genera el sistema de habilidades matemáticas, Hernández (1984), con base en la teoría psicológica de la actividad en los niveles secundario y terciario de la educación, donde se analizan tareas matemáticas llevadas a cabo en estos niveles y, además, aplicando habilidades básicas como interpretar, identificar, recodificar, calcular, algoritmizar, graficar, definir y demostrar. Esto no fue suficiente en la formación de estudiantes, por lo que se ha realizado una apertura a trabajos basados en habilidades como modelar (Rodríguez, T., 1991), fundamentar (Valverde, L., 1990), comparar (Delgado, R., 1995), controlar (Hernández, H., 1997), resolver, aproximar y optimizar (Delgado, R., 1999) y representar (Alonso, I., 2001).

Según Santos Trigo (1994), las tendencias predominantes en la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas serían:

- La existencia de un apartado, identificado al final de un tema, donde se discuten algunas estrategias y su papel.

- El uso de problemas seleccionados para aplicar los contenidos, después que los mismos han sido presentados de forma abstracta a los estudiantes. A partir de aquí se discuten los pasos en el modelo de G. Polya, proceso que puede ser rígido y rutinario, en el sentido de que se obliga a seguir las fases cuando puede resolver el problema directamente.
- El inicio del estudio de un determinado contenido matemático a través de la resolución de algún problema, donde la solución del mismo justifica la necesidad de estudiar el contenido.
- La resolución de problemas presentada, a través de todo el curso, espacio para discutir diversidad de problemas, presentar ideas, realizar conjeturas, utilizar ejemplos, contraejemplos y plantear diferentes métodos en la actividad de resolver problemas.

De igual manera, se menciona lo planteado por Kilpatric (1998), que caracteriza el uso de la resolución de problemas como vía para enseñar matemáticas:

- Análisis de problemas como vehículo para tener alcances a nivel curricular, como la motivación, recreación, justificación o práctica.
- Resolución de problemas como una de habilidades que se debe enseñar en el currículo.
- Resolución de problemas tomada como un arte, simulando la actividad matemática en el aula.

Para finalizar este apartado sobre resolución de problemas, se mostrará algunos aspectos del enfoque Open-Ended, por Becker & Shimada (2005), utilizado por Japón en las aulas y que lo expresa De Faria (2008), en su artículo sobre algunas reflexiones en la resolución de problemas. En la década de los 70 se impulsó en Japón la investigación en el tema, centrando los problemas

tradicionales de respuesta única como completos o cerrados; y los de variedad de métodos como abiertos. El enfoque Open-Ended consiste en los siguientes aspectos:

- Presentar un problema abierto a los estudiantes.
- Brindar el tiempo adecuado, individual o grupalmente, en búsqueda de innovaciones en los procesos.
- Comparar las soluciones obtenidas, argumentando, discutiendo y estableciendo preguntas.

Generalmente, en las escuelas japonesas, los procedimientos corresponden a una única idea central, desarrollada y extendida. En el enfoque mencionado anteriormente, el profesor orienta la clase motivando la participación de nuevas ideas, promoviendo los aportes y conceptualizando respecto del tema. Las ventajas atribuidas al enfoque serían el incremento de la participación activa, expresión de ideas propias, utilización del conocimiento propio y habilidades matemáticas, impulso de la creatividad y el trabajo colaborativo, ganancia de experiencias cognoscitivas e incremento de la autoestima. Una desventaja puede ser el diseño de problemas abiertos interesantes y que se puedan desarrollar en una lección. En suma, se puede expresar que las características de una lección de matemáticas en la escuela japonesa son: relación explícita entre los temas tratados, es decir, la coherencia e integración cognoscitivas; mayor tiempo a temas matemáticos importantes; mayor tiempo de trabajo en actividades no rutinarias, nuevas soluciones, aplicaciones; más conceptos desarrollados que aquellos solo establecidos.

La resolución de problemas se convierte así, en una actividad muy importante en el trabajo con los estudiantes frente a los procesos de enseñanza de las matemáticas, pues como se ha

expresado, ocupa ya un lugar primordial de investigación desde diversas ciencias como la psicología, y con mayor razón en el campo de la Educación Matemática, donde se le ha dado relevancia a los procesos curriculares y la utilización de herramientas como las representaciones semióticas, en búsqueda de mejorar los procesos y las técnicas empleadas, apoyando así, la comprensión de los temas u objetos matemáticos que, para muchos estudiantes son de gran dificultad en su aprendizaje.

En el siguiente apartado veremos la noción de derivada, desde el punto de vista matemático, es decir, teniendo presente su definición como factor importante para este objeto matemático que se estudia en este trabajo. Esta definición de derivada nos muestra, además, una mirada a la forma en que se utiliza la expresión algebraica y la utilización de simbología matemática necesaria en el discurso en el aula referente al objeto en estudio.

2.3 La Noción de Derivada

El objeto matemático involucrado en este trabajo de profundización es la derivada, el cual implica un vasto y riguroso tratamiento en cuanto a su definición se refiere; pero para los objetivos que se pretenden, se requiere acoger simplemente a la noción de derivada.

El concepto de derivada en matemáticas es fundamental en el cálculo (Apostol, 1979), pues permite establecer elementos que caracterizan el comportamiento de una función. La noción de derivada de una función, es un concepto clave del cálculo, el cual conlleva diversos aspectos: su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental; su carácter puntual o global –es decir, en intervalos– y, según exija la resolución de una determinada tarea, se puede utilizar aspectos que relacionan a f' y f'' , que

representan los símbolos de la primera y segunda derivada de una función. En conclusión, se puede mostrar la derivada desde una perspectiva analítica y gráfica.

Apostol (1979) define la derivada de una función en un punto c como un límite de la siguiente manera:

Sea f una función definida por lo menos, en un intervalo abierto (a, b) del eje x . Se elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x+h$ pertenezca también a (a,b) . El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x+h$. El cociente representa la *variación media* de f en el intervalo que une x a $x+h$.

Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$ (se lee « f prima de x »). Con lo que la definición formal de $f'(x)$ puede establecerse del siguiente modo:

La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x .

Para llegar a esta definición de derivada ha sido necesario un largo camino, que comienza en la Grecia clásica (con los primeros problemas de tangentes y cálculo de áreas) y termina en el siglo XIX cuando se formula el concepto en forma de límite con la definición epsilon-delta. Hasta Newton y Leibniz no se considera realmente el comienzo del cálculo. A continuación, veremos brevemente el desarrollo histórico de la derivada.

Desde el punto de vista histórico, Alesandrov et al. (1988) señalan que hay varios tipos de problemas que llevaron a los conceptos del cálculo infinitesimal (derivadas e integrales), el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas. Dentro de cada uno de estos tipos hay diferentes clases, así están los problemas de movimientos, y los propiamente referidos a trazar la tangente a una curva, entre los del primer tipo (derivadas) problemas de áreas y de volúmenes entre los segundos (integrales). Para González (1992) desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades.

Sin entrar en un análisis exhaustivo de la noción, estos problemas relativos a tangentes y cuadraturas se venían abordando desde la antigüedad (Grecia clásica) pero lo que existía era una colección de métodos particulares, no existían algoritmos generales (Katz, 1993). Disponer de métodos generales para resolver estos problemas es una de las características del cálculo infinitesimal, la otra característica de la fundación del cálculo es la de tomar conciencia de la reciprocidad entre el cálculo de cuadraturas y la determinación de tangentes y de su importancia (Durán, 1996; Katz, 1993).

Edwards (1979) señala que los trabajos de Arquímedes relativos a tangentes de la espiral, son de los pocos trabajos de naturaleza “diferencial” en la antigüedad; a pesar de que también

obtiene áreas y volúmenes no se le considera descubridor del cálculo ya que sus métodos no son suficientemente generales y no relaciona los problemas de áreas y tangentes.

Entre los predecesores de Newton y Leibniz podemos citar a Cavalieri con sus indivisibles, a Descartes y Fermat. Fermat que introduce un método para el cálculo de máximos y mínimos basado en la tangente a una curva, denominado “adigualdades” consistente, esencialmente, en calcular la derivada e igualar a 0 (Sean, 1994; González, 1992). También hacen aportaciones por las que son más conocidos como es la geometría analítica, en la que la ecuación $f(x,y)=0$ es una curva, este descubrimiento jugará un papel importante en los trabajos de Newton y Leibniz.

Para Kleiner (2001), Newton y Leibniz inventan el concepto general de derivada e integral, reconocen la diferenciación e integración como operaciones inversas, desarrollan notaciones y algoritmos que hacen del cálculo un potente instrumento computacional. La notación de Leibniz ha llegado hasta nuestros días, se siguen utilizando los diferenciales dx , dy , y el cociente dy/dx .

Newton parte de plantear el problema de calcular la velocidad (fluxión, $\dot{x}$) de un movimiento x (fluente), su notación pervive aún en los libros de física.

Newton calcula “fluxiones” de curvas dadas por $f(x, y)=0$, utilizando la idea de momento infinitamente pequeño de tiempo (momento de un fluente) que se describe como “razón última de las cantidades evanescentes”, de forma intuitiva se corresponde con la idea de límite (Katz, 1993).

Newton considera las fluxiones de x e y de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \text{la derivada } \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dy}{dx}$$

Newton llega a establecer el Teorema Fundamental del Cálculo y hace una aplicación importante del mismo, calcula las áreas por antidiferenciación y no mediante límites de sumas (Edwards, 1979).

Otra figura clave en el desarrollo del cálculo tal y como lo conocemos hoy es Euler, que introduce el concepto de función y sobre el que se van a apoyar los posteriores avances, hasta Euler la base del cálculo son las curvas ($f(x, y)=0$). Euler introduce formalmente el concepto de función como:

“Cualquier expresión analítica formada, de modo arbitrario, a partir de una cantidad variable y de constantes” (Kline, 1972, vol. II, p. 539)

Euler también introduce la derivada mediante los cocientes a partir de razones de incrementos evanescentes, para Euler las derivadas se obtienen con cantidades infinitamente pequeñas (diferenciales) que pueden considerarse 0 en el límite. Por ejemplo, si $y = x^n$, entonces $y' = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + (dx)^2 \dots$ y por tanto $dy = y' \cdot dx$, puede despreciarse $(dx)^2$ en comparación a dx (Katz, 1993).

En el siglo XVIII, se plantea la cuestión de los fundamentos del cálculo por las críticas a Newton y Euler. Para soslayar la “evanescencia de las razones últimas de Newton”, D’Alambert da una definición de derivada mediante el límite de cocientes incrementales, y no basada en cantidades “infinitamente pequeñas” (Edwards, 1979), su definición viene dada por $(\Delta y / \Delta x)$, aunque no define de manera precisa el límite (Edwards, 1979).

Lagrange en 1800 intenta dar fundamento al cálculo sin referencias a infinitésimos, introduce la notación de las derivadas y define la derivada mediante el coeficiente de h en el desarrollo en serie de $f(x+h)$ que puede obtenerse para cualquier función². En su intento por fundamentar el cálculo pretende huir del límite y recurre a las series (Kleiner, 2001).

En el siglo XIX, Cauchy intenta dar rigor al análisis definiendo el concepto de límite, define la derivada de una función en un punto x como el límite de la razón de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h es infinitamente pequeña. De la derivada de una función en un punto pasa a definir una nueva función, para cada x se le asocia el límite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. La definición basada en ε - δ es propuesta por Weierstrass y se basa en las propiedades de los números reales, y en este momento el fundamento del análisis se aleja de la geometría y se acerca a la aritmética “aritmétización del cálculo” (Kleiner, 2001).

Actualmente la definición de derivada que se utiliza viene dada a través del límite $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pero la noción de límite como se ha visto es posterior a la de derivada, y se introduce en el siglo XIX con objeto de dar una justificación rigurosa al concepto derivada (Durán, 1996).

En el artículo “Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada”, los autores Álvarez, Colorado y Ospina (2013) señalan:

Estas dificultades también se reflejan en los programas de la Universidad del Quindío, la falta de comprensión de los conceptos matemáticos limita los

² Para Lagrange cualquier función es desarrollable en serie (Katz, 1993)

desempeños de los estudiantes en los cursos de matemáticas, conllevando al fracaso y la deserción universitaria, en especial los estudiantes que ven cálculo diferencial. (Sánchez, 2007). Artigue et al. (1995) afirman que es una enseñanza marcada por la manipulación de fórmulas evidenciada en la determinación del límite, derivada o integral de una función, en lugar del análisis de estos conceptos y su aplicación en la solución de los problemas del entorno académico y social del estudiante. (p. 105)

Lo anterior muestra que es constante la falta de conceptualización en los estudiantes y la implementación de fórmulas que no dan resultados en los aprendizajes. Por lo tanto, es importante abordar estudios sobre la noción de derivada porque permite a los estudiantes conocer mejor sus propiedades, saberlas utilizar y resolver problemas sobre derivadas que se aplican en otras ciencias como en física. La argumentación de los estudiantes, fundamental en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Maldonado, 2015), tiene especial valor para construir el significado de conceptos y nociones, como en este caso el de derivada.

En la enseñanza de la derivada no es suficiente con plantear una definición, escribir en un tablero sus propiedades y trabajar ejercicios relativos al tema. La noción de derivada implica que se debe indagar sobre el límite de funciones, reforzar aspectos del álgebra básica para fomentar el mejoramiento de las propiedades mencionadas; un buen manejo de la factorización y las expresiones algebraicas, puede conducir a una adecuada apropiación de la noción de derivada.

2.4 Algunos Elementos Semióticos y Cognitivos Frente al Trabajo con la Noción de Derivada

Las actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas o la comprensión de textos, representan aspectos centrales de

investigación en el aprendizaje de las matemáticas, el cual por la complejidad que encierran ciertos componentes, necesita utilizar sistemas de expresión y de representación que difieran del lenguaje natural o de las imágenes tales como escrituras algebraicas, gráficos cartesianos, tablas de datos, entre otros. De acuerdo con Duval (1999), no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, toda confusión entre el objeto y su representación genera una pérdida en la comprensión, es decir, el conocimiento adquirido se hace inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje. Además, las representaciones semióticas, producciones constituidas por el uso de enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros; equivalen al medio por el que una persona exterioriza sus representaciones mentales, es decir, las hace visibles a los demás. En este sentido, las representaciones semióticas cumplen una función de comunicación. En el presente apartado, se verán algunos elementos semióticos y cognitivos en el trabajo con la derivada.

2.4.1 Registros de Representación Semiótica (Lengua Natural, Registro Gráfico, Registro Algebraico, Registro Auxiliar, Tabulación)

Hablar de sistemas de representación infiere tener presente el análisis de contenido referente a la derivada, pues éste permite describir la derivada a partir de la perspectiva didáctica. Según Gómez (2000):

Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un

análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura anterior. (Gómez, 2000, p. 3)

Asimismo, Gómez (2007), expresa sobre el análisis de contenido que es “el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares”. Es decir, las matemáticas escolares corresponden al análisis de contenido, cuyo propósito es describir la estructura matemática a partir de la enseñanza y aprendizaje en el aula de clases; además, es de considerar tres organizadores de currículo que son: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología del tema matemático de la derivada (Solano, 2017).

La *estructura conceptual* se refiere a la descripción de la estructura matemática de un tema de las matemáticas escolares, teniendo como base los conceptos y sus relaciones; así como teniendo en cuenta los sistemas de representación, los modelos y fenómenos inscritos. Según Rico (1995): “los conceptos son aquello con lo que pensamos y, según su mayor o menor concreción, podemos distinguir tres niveles de conocimientos en el campo conceptual” (Rico, 1995, p. 11). Es así, que los conceptos representan las unidades de información relacionadas entre sí y, frecuentemente, permiten representaciones gráficas o simbólicas. Estas unidades no están aisladas, sino que pueden formar redes conceptuales muy valiosas. Al respecto, según Thurston (1994), se presentan en la tabla 1, diferentes formas de significado simbólico de la derivada, donde la derivada como máximos y mínimos está dada según Pino-Fan, Castro, Godino, Vicenç (2013).

Tabla 1

Diferentes formas de concebir la derivada

Concepción	Acción	Notación
Infinitesimal	Razón de cambio	$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$
Simbólica	Cambiar un símbolo por otro	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kf)' = kf'$ $(f + g)' = f' + g'$ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$
Lógica	Rigor de escritura	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid f'(x) = \delta$ $\leftrightarrow \left \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \delta \right < \varepsilon$
Geométrica	Calcular la pendiente de la recta tangente	$M = \tan \alpha$
Tasa (Rate)	Velocidad instantánea	$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$

Concepción	Acción	Notación
Aproximación (Derivada de Caratheodory)	Continuidad de la función de pendientes de las rectas secantes ancladas en un punto	Mejor aproximación lineal de la función
Microscópica	Dinámica	Límite haciendo zoom en la función
Algebraica	Cociente diferencial	$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
Analítica	Límite del cociente diferencial	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
Intuitiva: razón de cambio	Rectas secantes.	Límite de rectas secantes
	Razón de cambio promedio	Razón de cambio instantánea

Máximos y mínimos	Trazado de curvas	Problemas de máximos y mínimos
Función	Una función que asigna al argumento el valor de la pendiente de la recta tangente	

Nota: f y g son funciones, Δ es un incremento en x e y .³

Como lo muestra la tabla 1, estas acepciones sobre la derivada, muestran cantidad de conceptos que se van relacionando unos con otros, formando una red simbólica o estructura conceptual necesaria de conocer para acceder de mejor manera al objeto de estudio.

El segundo organizador de currículo que comprende el análisis de contenido se refiere a los sistemas de representación, que concierne a los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto. Su importancia reside en que:

- Los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos.
- Los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para cada concepto.
- Un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios.

En la manipulación de las propiedades y operaciones matemáticas, las representaciones brindan signos o figuras que pueden proceder como expresiones acerca de los conceptos

³ Tomado de: Solano Camargo, S. P. (2017). Las concepciones del concepto de derivada: dos estudios de caso sobre un matemático y un licenciado en matemáticas.

matemáticos estudiados, paralelamente se puede ver el conocimiento matemático escolar como una estructura sistémica donde se manejan objetos, relaciones, operaciones y propiedades; por lo que el carácter sistémico es recibido por las representaciones matemáticas (Rico, 2000; Castro & Castro, 1997).

Los diversos tipos de representación se pueden clasificar en internos y externos (Duval, 1999; Castro & Castro, 1997): las representaciones internas o mentales, contemplan el objeto a falta de significante perceptible (Duval, 1999), mientras que las representaciones externas se producen de manera visible por el sujeto para comunicar (Duval, 1999; Castro & Castro, 1997). En esta clasificación, aunque las representaciones se opongan, se presenta una gran relación, pues las representaciones externas tienen doble función, que es comunicar las representaciones mentales permitiendo el acceso al resto, mientras que la segunda es el trabajo que ejerce en la producción de las representaciones mentales (Duval, 1999). Según Castro & Castro (1997), las representaciones externas equivalen a estímulos para los sentidos en los procesos de elaboración de nuevas estructuras mentales.

Para mirar de qué manera los sistemas de representación contribuyen al aprendizaje de un concepto, es requerido que se distinga el concepto de sus representaciones externas, las cuales son primordiales en la comprensión del concepto. Hitt (1998), afirma que para distinguir un objeto matemático de su representación se hace necesario que el estudiante represente dicho objeto, al menos, de dos maneras diferentes. De otro lado, una representación de un concepto matemático no es suficiente, pues sólo presenta algunas propiedades notables, lo permite afirmar que, para la mejor comprensión de un concepto matemático, son necesarios varios sistemas de representación (Duval, 1999; Castro & Castro, 1997).

La parte fundamental de la utilización de los sistemas de representación en los procesos de enseñanza y aprendizaje radica en que su aplicación sea significativa y coherente, pues de ello depende una acertada caracterización del concepto, como lo sostienen Castro & Castro (1997, pp. 103 – 104): “no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto encierra”; de esta manera, es importante decir que los usos simultáneos y descontrolados de los sistemas de representación ocasionan problemas y dificultades en los procesos.

De acuerdo con lo anterior, es necesario complementar la importancia de los sistemas de representación con tres aspectos basados en los trabajos de Bedoya, 2002; Duval, 1999; Castro & Castro, 1997):

1. El manejo de los sistemas de representación requiere del nivel de competencia de los profesores y alumnos para usar las diferentes representaciones.
2. Es esencial en el trabajo en el aula, no abusar de las potencialidades que ofrece a cada concepto los sistemas de representación, pues sus usos simultáneos y no controlados pueden crear dificultades en el aprendizaje.
3. El docente debe prestar atención al papel que asigna a las representaciones icónicas en el proceso de enseñanza, pues la creencia de que éstas son más naturales, puede implicar estructuras conceptuales complejas para los estudiantes, lo que podría desmejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Castro & Castro, 1997).

Rico (2000), establece una caracterización de las representaciones en el campo de la Educación Matemática:

Las representaciones matemáticas se han entendido, desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican sus conocimientos sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas. (Rico, 2000, pp. 1)

Desde el punto de vista cognitivo, la representación de un concepto matemático implica un sistema semiótico particular y usual, lo que conlleva a que las estructuras matemáticas vayan acompañadas de varios sistemas de representación. No obstante, se puede inferir que:

No es usual considerar cuales son los aspectos y propiedades de un concepto o estructura matemática que se destacan mediante cada tipo de representación. Cada uno de los modos de representación, junto con las reglas que los acompañan, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto. Identificar los conceptos con cualquiera de sus representaciones es una simplificación escolar, inadecuada para la investigación en Educación Matemática. Por ello se deben diferenciar varios tipos de representación en cada concepto. (Rico, 2000, p. 8)

De otro lado, Duval (2004) asegura que “la utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca”. Es así que, en un tratamiento matemático no puede faltar un sistema semiótico de representación. De acuerdo con Duval (1998), hay tres actividades cognitivas en relacionadas con la semiosis, que permiten que un sistema semiótico sea un registro de representación:

- La presencia de una representación identificable.

- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial (Duval, 1998).

Al cambiar un registro semiótico también se lo hace la representación semiótica, por el contrario, si cambia una representación semiótica no necesariamente cambia el registro. Para el caso de este trabajo de profundización, podemos ver a continuación distintas representaciones semióticas del concepto de la derivada:

1. Lenguaje simbólico. Representaciones semióticas:

- Definición algebraica: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Notación de Leibniz: $\frac{df}{dx}$
- Definición analítica: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Definición simbólica: $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$
- Definición geométrica: $m = \tan \alpha$
- Definición funcional: $y = f'(x)$

2. Lenguaje verbal escrito. Representaciones semióticas:

- Definición geométrica: la derivada es la pendiente de la recta tangente.

- Definición como razón de cambio: la derivada es una razón de cambio instantánea.
- Definición analítica: la derivada es el límite del cociente diferencial.

3. Lenguaje gráfico. Representaciones semióticas:

- Definición intuitiva: representación cartesiana de la recta secante.

La siguiente figura 4 representa la recta que se forma después de unir los puntos P y Q por donde pasa la curva o función dada. Los incrementos están simbolizados por las distancias que hay entre las coordenadas de dichos puntos (esto se puede ver también en la figura 5 aunque no aparezca la secante).

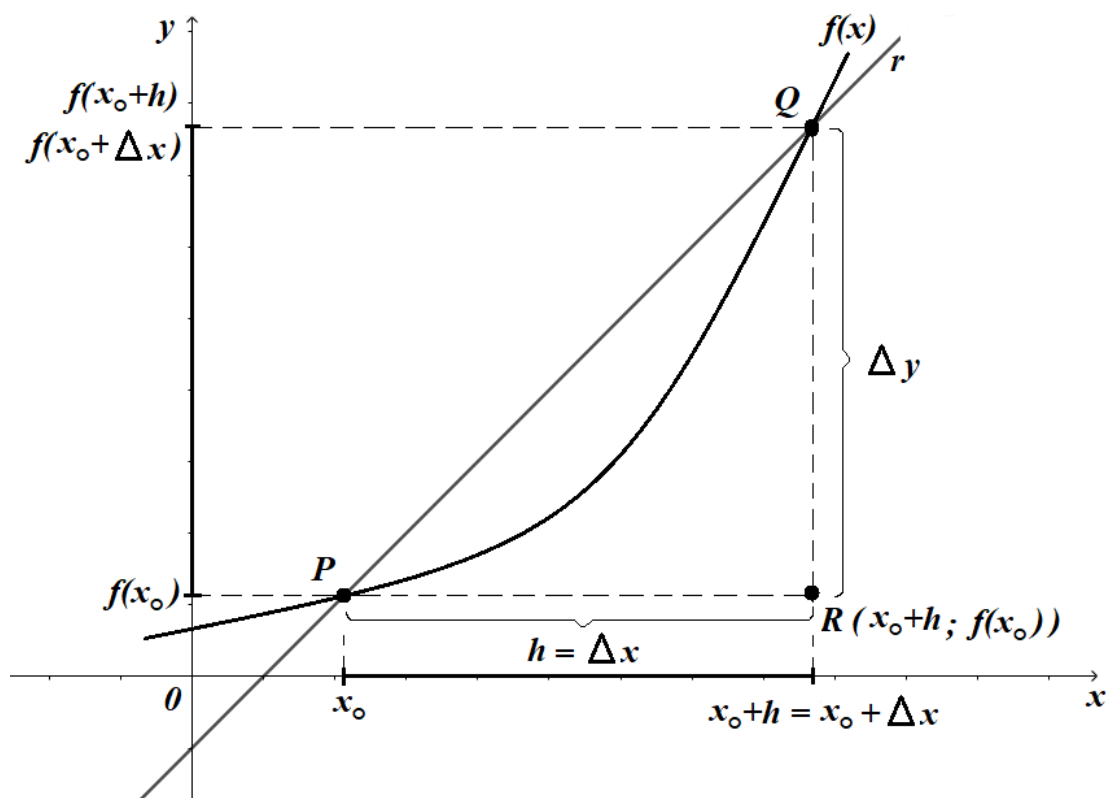


Figura 4. Representación cartesiana de la recta secante de una función. La recta r es secante a la función $f(x)$, pasa por los puntos P y Q . Δ_x y Δ_y son cambios en cada eje.⁴

- Definición geométrica: representación cartesiana de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

La siguiente figura 5 muestra la recta tangente en el plano cartesiano, en donde se presenta la función $f(x)$ o curva dada:

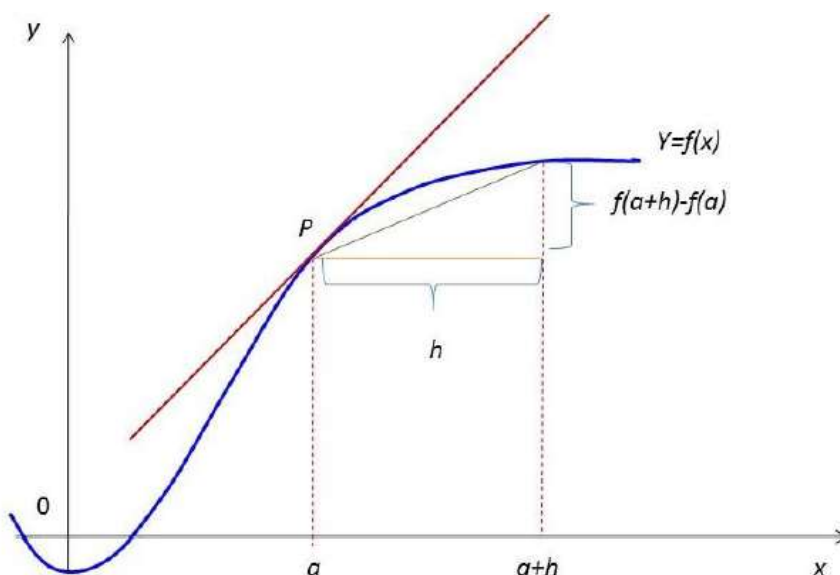


Figura 5. Representación cartesiana de la derivada como la pendiente de la recta tangente. La recta tangente toca a la curva $f(x)$ en el punto P , y h es el cambio en el eje de las abscisas.⁵

4. Lenguaje verbal oral:

- Los gestos, la cinésica se encarga del estudio del significado expresivo de los gestos y de los movimientos corporales que acompañan los actos lingüísticos (RAE, 2016).

⁴ Tomado de <http://limitesudea.blogspot.com.co/2015/08/nocion-intuitiva-de-limite.html>.

⁵ Tomado de <http://campusdematematicas.com/calculo-infinitesimal/significado-geometrico-de-laderivada-de-una-funcion>.

- Parte tonal, la prosodia se encarga del estudio de los rasgos fónicos que afectan a la métrica, especialmente de los acentos y de la cantidad (Rae, 2016).

Para cerrar los aspectos que corresponden al análisis de contenido respecto a los organizadores de currículo, tenemos la *fenomenología*, dimensión que organiza los significados de un concepto en las matemáticas escolares. La fenomenología como factor integrante del significado de un concepto nace a partir de una visión funcional del currículo, dado que los sentidos en los que interviene un término conceptual matemático incorporan fenómenos que soportan el concepto. En el campo de la Educación Matemática, Freudenthal (1983) define fenomenología y fenomenología didáctica así:

La fenomenología de un concepto matemático, estructura o idea consiste en describirlo en relación con los fenómenos para los que fue creado y con aquellos a los que se extendió en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción tiene que ver con el proceso de aprendizaje de una generación joven, es entonces fenomenología didáctica: una manera de mostrarle al profesor aquellos lugares en los que los aprendices pueden involucrarse en el proceso de aprendizaje de la humanidad. (Freudenthal, 1983, p. ix)

Según Puig (1997) el análisis fenomenológico se encuentra en el entorno del análisis didáctico: “*el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos.*” (p. 63)

Segovia y Rico (2001) afirman que la fenomenología es una agrupación de fenómenos, mientras que el análisis fenomenológico describe dichos fenómenos, destacando que los conceptos organizan los fenómenos. En este sentido, un análisis fenomenológico debe reconocer las

subestructuras correspondientes a esa estructura, los fenómenos organizados por cada una de ellas y la relación entre subestructuras y fenómenos. Así, entre los fenómenos referentes a la derivada se pueden citar por ejemplo el movimiento de una partícula, el fenómeno de la caída libre, en la geometría el área y el volumen de una esfera, la catenaria, en economía, el costo marginal y el ingreso marginal.

De esta manera, el análisis de contenido en el uso de los sistemas de representación queda caracterizado por los organizadores de currículo vistos anteriormente y necesarios para la mejor comprensión del objeto matemático estudiado, que en este caso es la derivada. En el siguiente apartado se estudiará dos conceptos que están directamente relacionados con la aprehensión de representaciones semióticas (semiosis o semiótica) y la aprehensión conceptual de un objeto (noesis o noética).

2.4.2 *Semiosis y Noesis*

La forma de acceder y de resolver un problema matemático es susceptible del análisis correspondiente, por la multiplicidad cognitiva de los estudiantes, lo que tiende a ser importante en cuanto a las condiciones de organización de los cambios de registros, dado que esto permite orientar los fines del aprendizaje. Por esto, un aspecto relevante en didáctica de las matemáticas, es la noesis, que se trata de la adquisición de conocimiento y del concepto matemático estudiado. Se puede, por tanto, establecer una relación inseparable entre noesis y semiótica, pues esta última define las condiciones de posibilidad de la noesis. Esto es, para mejorar el aprendizaje, es necesaria la utilización de diversos sistemas semióticos de representación, cuya coordinación entre ellos se hace indispensable en el estudio de determinado concepto matemático.

Pasar de un sistema de representación a otro no es evidente ni espontáneo, en general, a los estudiantes se les dificulta identificar el mismo objeto por medio de sus representaciones en diferentes registros semióticos. En este punto, es importante decir que cada concepto matemático no es un objeto real y está comprometido a utilizar representaciones de diferente naturaleza. En matemáticas hablamos de “objetos matemáticos”, no de “conceptos”, por consiguiente, el objeto matemático por conceptualizar no es un objeto real (según el sentido de Aristóteles, no es una cosa) y como resultado, no hay accesibilidad objetiva a la percepción, por lo que se hace necesario utilizar signos concretos para representarlos.

La actividad matemática es realizada sobre los objetos y los representantes, de donde aparece la paradoja del pensamiento matemático que se funda en que las representaciones semióticas posibilitan la actividad sobre los objetos matemáticos pero el aprendizaje de los objetos matemáticos es conceptual, es decir que, primero, quien aprende puede confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas; y segundo, en forma de pregunta, ¿cómo lograr el dominio de los tratamientos matemáticos, asociados a las representaciones semióticas si no tienen un aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos?

De acuerdo con Duval (1993), la adquisición conceptual de un objeto matemático está basada en el uso de varios registros de representación semiótica y en la creación de nuevos sistemas semióticos, lo que se establece como aspecto fundamental en el mejoramiento del conocimiento.

A continuación, veremos las actividades cognitivas que son inherentes a la semiósis, dada su importancia en el manejo de las representaciones semióticas.

2.4.3 Transformaciones, Tratamientos y Conversiones

Duval (2004) sostiene que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son adecuados para el análisis de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos, las cuales necesitan del lenguaje natural, las imágenes, registros de representación y de expresión. Las matemáticas implican la utilización de sistemas de escritura numérica, notaciones simbólicas relativas a un objeto en particular, escrituras algebraicas, lógicas y funcionales, donde diferentes lenguajes se llevan a cabo paralelamente al lenguaje natural con el fin de expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, entre otros. En este sentido, dominar las operaciones esenciales frente a la representación de un conocimiento es muy importante, pues establece una actividad cognitiva tal que se vincula a los tratamientos de comprensión y dificultades del aprendizaje conceptual, lo que podría ser el motivo de obstáculos que se pueden resolver al coordinar diferentes registros semióticos; por consiguiente, el aprendizaje de las matemáticas se convierte en un aspecto primordial por las habilidades dominadas en los cambios de registro.

Es menester aclarar que, no distinguir el objeto matemático de sus representaciones, puede implicar la no comprensión en matemáticas. De otro lado, es diferente hablar de una representación semiótica que de una representación mental, pues esta última representa imágenes y concepciones que realiza alguien sobre un objeto, una situación o un aspecto ligado al mismo. Las representaciones semióticas sostienen su importancia en la comunicación y en la actividad matemática; el tratamiento de los objetos matemáticos necesita de un sistema de representación semiótico determinado, por ejemplo, la realización de cálculos numéricos es susceptible de un

sistema de escritura escogida, como es el caso de los números decimales, fraccionarios, binarios, entre otros. En el caso de la derivada, es muy utilizado el lenguaje algebraico, por los cálculos o procedimientos para hallar, por ejemplo, la derivada de una función, bien sea con el uso de límites o con las propiedades estudiadas del objeto matemático respectivo. Así, la función de tratamiento es exclusiva de las representaciones semióticas y no de las mentales. Pero es importante aclarar la coexistencia que hay entre el desarrollo de sistemas semióticos innovadores y la lengua natural, pues su análisis, así como la importancia que se le dé en el aula de clases, permite abrir más caminos en el mejoramiento del aprendizaje en matemáticas.

Ahora bien, la semiosis comprende tres actividades cognitivas directamente relacionadas con la transformación de representaciones, a saber: formación, tratamiento y conversión. La *formación* de representaciones en un registro semiótico particular conlleva a tener presente un conjunto de los caracteres y determinaciones que comprenden aquello que se pretende representar. Es, por tanto, el recurso a un signo para renovar la observación o reemplazar la percepción de un objeto.

Los signos empleados corresponden a un sistema semiótico establecido y manejado por otros, como la lengua materna, una representación gráfica, una lengua formal, entre otros. La formación constituye actos como la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. Estos actos son atrayentes si las representaciones se articulan de tal manera que sean de orden superior, como por ejemplo una frase, imagen, esquema, tabla u otros, lo que necesita de la apertura a una estructura propia a cada sistema semiótico; por consiguiente, es fundamental que la formación de representaciones semióticas considere siempre las reglas propias al sistema utilizado, tanto por motivos de comunicación, como para posibilitar el uso de los medios de tratamiento que

propone el sistema semiótico utilizado. De esta manera, se habla de reglas de producción y no de conformidad. El dominio que comprende un sistema semiótico debe acoger la representación semiótica utilizada (Duval, 1995).

En cuanto a las reglas de conformidad, se puede decir que aluden a la determinación de unidades elementales, como símbolos, vocabulario, entre otros; las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior; las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa. Estas reglas proponen reconocer los elementos físicos, por ejemplo, los sonidos, como una representación de algo en un sistema semiótico, tal como lo es una fórmula de física. Así, las reglas admiten las representaciones en un registro determinado e identifican el sentido correspondiente a una representación, que no igual al que la creó. No obstante, conocer las reglas no satisface por completo la comprensión de las representaciones dadas, pues didáctica y epistemológicamente, las reglas participan más en controlar la aceptación de una representación elaborada que en su formación.

Según Duval (1995), formar representaciones semióticas es más difícil que aplicar reglas de conformidad, pues la formación requiere de determinados caracteres de un contenido observado, en relación con las posibilidades de representación inherentes al registro producido. En este sentido, hay que considerar la descripción, como una actividad a realizar en la formación, a partir situaciones distintas que dependen de los datos. La selección a producir no tiene que ver con las mismas tareas cognitivas según que los datos sean sacados a partir de una indagación perceptiva de un objeto o que se encuentren determinadas por una representación en otro registro, como por ejemplo las imágenes.

Para el caso particular de este trabajo de profundización, un ejemplo de la actividad cognitiva de formación respecto a la derivada podría ser su propia definición, la cual enunciamos en el apartado de la noción de derivada, según Apostol (1979):

La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x .

El manejo, la explicación y discusión que se pueda generar en torno a esta definición, implica tener presente los signos utilizados, los cuales corresponden a un lenguaje aritmético y algebraico, cuyos significados son inherentes al discurso y actividad matemática en el aula de clases. Por ejemplo, la expresión “lim” implica un conjunto de saberes que corresponden al acercamiento de un valor dado respecto a otro, y muchas veces, esto puede ser apoyado del registro geométrico.

De otro lado, las otras dos actividades conservan la transformación en otras representaciones, manteniendo el contenido de la representación inicial. El *tratamiento* es, pues, una transformación que produce otra representación en el mismo registro, es decir, dada una representación inicial, la idea es llegar a una terminal, referida a cierto problema o situación, teniendo presente que se trata de una transformación, cuyo carácter corresponde a una representación interna a un registro de representación. Por ejemplo, el cálculo representa un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica, pues reemplaza expresiones dadas por nuevas expresiones. No obstante, el cálculo es un proceso de transformación de escritura de números, que combina el tratamiento y la

conversión. Así, la paráfrasis es una transformación interna al registro del discurso en la lengua natural, así como la anamorfosis contempla la transformación interna al registro de figuras, pese a que no se mantenga la situación representada. El funcionamiento de la transformación interna a un registro de representación infiere el sentido y la referencia (Frege, 1971). En general, el tratamiento de una representación semiótica compete a la expansión de la información, pues, por ejemplo, en el lenguaje, la potencia creativa está basada en una expansión discursiva, donde la paráfrasis comprende la forma más pobre.

En cuanto a las reglas de expansión de una representación, ofrecen una representación de igual registro que la representación inicial y, además, difieren de las reglas de conformidad. Las primeras reglas de expansión informacional se han dado en el ámbito de la lógica, según regla de agregación y de sustitución. Las reglas de producción, que son inferenciales, definidas a partir de la Inteligencia Artificial, se han inspirado en ellas (Newell & Simon, 1972). En suma, se conocen también las reglas de coherencia temática para la expansión discursiva en el registro de las lenguas naturales (Charolles, 1978). Finalmente, están las reglas asociativas de contigüidad y de similitud, que orientan la “asociación de ideas”, es decir, son comunes a la vez a la expansión discursiva en las lenguas naturales y a la movilización de las representaciones mentales (Saussure, 1973).

Respecto a lo anterior, algunas reglas de tratamiento no son tan particulares de un registro de representación, como las reglas de derivación (que se refiere a los resultados o consecuencias), pues corresponden a razonamientos deductivos, los cuales se pueden realizar tanto en el registro de una lengua formal como en el de la lengua natural. Las reglas de derivación son libres de un registro determinado, lo cual no quiere decir que haya neutralidad en cuanto a los registros de representación que funcionan en ellas. Es decir, que las reglas de derivación en el registro de una

lengua natural no pueden funcionar sin que las reglas de coherencia temática y de asociación por similitud o contigüidad dejen de funcionar. Como lo señala Duval (1995), hacer poner en marcha estas reglas en registros de la lengua formal puede ocasionar un retiro del razonamiento en el desarrollo de los conocimientos.

Para el caso del presente trabajo, un ejemplo de la actividad cognitiva de tratamiento sería las dos formas de calcular una derivada de una función dada $f(x) = x^2$, la primera utilizando la definición de límites, la segunda a partir de la derivación de un monomio o polinomio:

$$1) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \qquad 2) f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

$$f'(x) = 2x + 0 = 2x$$

Finalmente, en la actividad cognitiva de *conversión*, la transformación genera una representación en un registro diferente al inicial. Por ejemplo, la transformación analógica/numérica de la información sonora, referente a la frecuencia y la amplitud de las ondas, las cuales pueden transformarse en agrupaciones constituidas de 0 y 1, donde es posible que se reconstituyan por medio la conversión inversa. Se puede inferir que la conversión tiene gran riqueza epistémica, dado que es una transformación de la representación de un objeto, en una representación de este mismo objeto en otro registro. En un caso particular de terminologías, operaciones como “traducción”, “ilustración”, “transposición”, “interpretación”, “codificación”, hacen corresponder una representación en un registro con otra representación en otro registro. Se

habla, pues, de una transformación externa que se relaciona con el registro de la representación inicial. La ilustración pone en correspondencia un enunciado con una figura o elemento, el paso inverso, sería una descripción o interpretación. Al plantear una ecuación sobre algún problema, daría como resultado la conversión de expresiones lingüísticas relacionadas con otras expresiones de las mismas relaciones en el registro de un escrito simbólico. Lo inmediatamente anterior, expresa que el contenido de la representación producida oculta relativamente la representación de partida, es decir que la correspondencia en la conversión, infiere la selección en el contenido de la representación de partida, así como la reorganización de sus elementos (Duval, 1995).

No obstante, la conversión necesita diferenciar entre el sentido y la referencia de los símbolos o signos, además, entre el contenido de una representación y lo que ella representa. A falta de la percepción de esta diferencia, la conversión se hace enteramente difícil, a saber, el cálculo numérico. Por ejemplo, algo frecuente que evidencia que los estudiantes lleguen a décimo grado sin saber calcular, es el fracaso en la conversión pero no en el tratamiento, porque el hecho de que puedan realizar operaciones como la suma entre decimales o entre fracciones, no significa que tengan la habilidad de convertir una escritura decimal a fraccionaria, pues ello forma parte esencial en el cálculo. Por tanto, es una necesidad distinguir entre la significación operatoria y el número representado, esto es, la significación operatoria no es igual para 0,64, para $16/25$ y para $64 \cdot 10^{-2}$, pues son diferentes procedimientos de tratamiento desarrollar las siguientes operaciones:

$$0,64 + 0,64 = 1,28$$

$$16/25 + 16/25 = 32/25$$

$$64 \times 10^{-2} + 64 \times 10^{-2} = 128 \times 10^{-2}$$

Los tres significantes “0,64”, “16/25” y “ 128×10^{-2} ” comprenden una significación operatoria distinta pero representan el mismo número. La significación operatoria referida al significante es primordial en el procedimiento de tratamiento y debe diferenciarse del objeto número representado, pues, de lo contrario, la sustitución por conversión de 0,64 a 16/25 no es posible. Esto nos permite regresar a la situación de cómo establecer dicha diferenciación. En particular, se trata de entender si un aprendizaje orientado a la adquisición de actividades de conversión corresponde a la misma naturaleza que un aprendizaje que se dirige a adquirir actividades de tratamiento.

Podemos tomar como ejemplo de conversión, para el presente trabajo, cuyo objeto es la derivada, la siguiente figura, que muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2$, así como la gráfica de su derivada $f'(x) = 2x$, y al lado derecho podemos ver las expresiones algebraicas correspondientes a estas dos gráficas en el plano cartesiano. Ambos registros, el gráfico y el algebraico sintetizan el mismo objeto determinado en la figura 6:

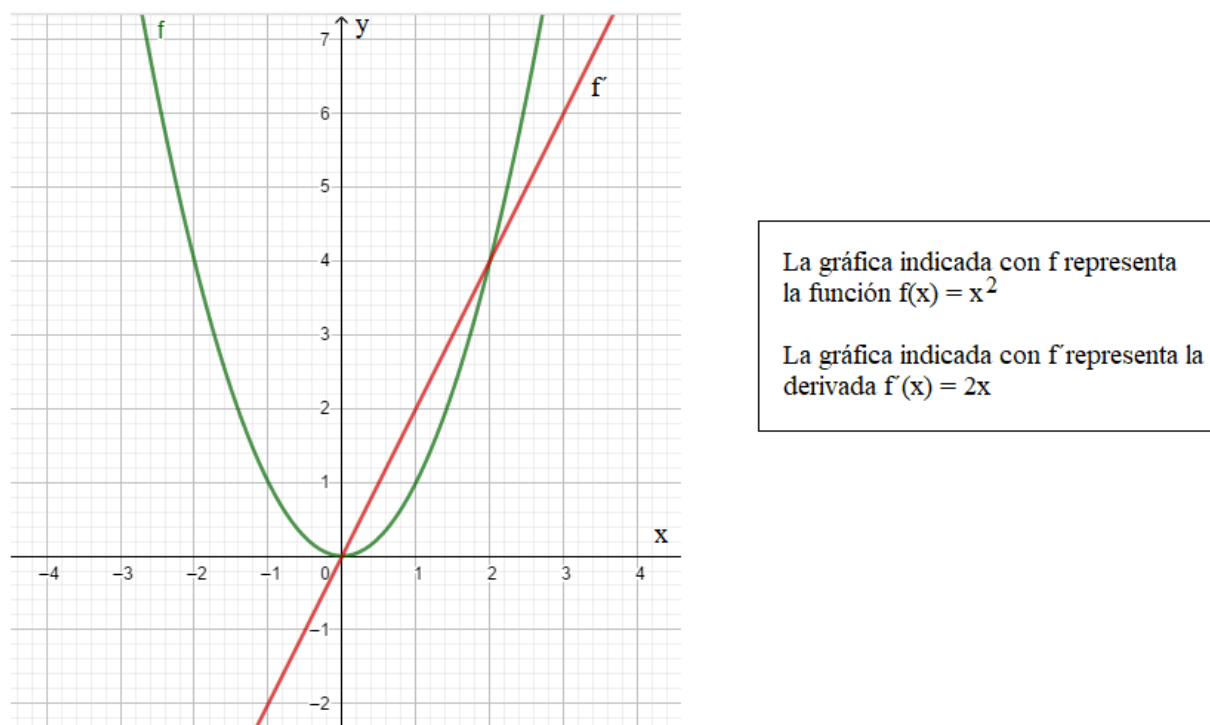


Figura 6. Gráfica de la función x^2 y su derivada $2x$, con sus respectivas expresiones algebraicas. Ambos registros, el geométrico y el algebraico, representan el mismo objeto matemático, en este caso la derivada $2x$ (Elaboración propia).

La significación operatoria representa aquí los procedimientos de los que dispone el estudiante para obtener la gráfica, como por ejemplo la métrica, las distancias entre valores en el plano cartesiano, las propiedades del sistema analítico tratado, entre otras. Esto, debe diferenciarse del objeto representado, que es la derivada y , que en la expresión algebraica indicada, se obtiene a partir de procedimientos como las propiedades de derivación o diferenciación, así como la definición por límites.

Ahora bien, la observación en clase, los análisis de resultados en encuestas, las experiencias de aprendizaje, dan cuenta que la conversión de las representaciones semióticas comprende un aspecto poco espontáneo y muy complejo de acceder en el estudiante. A parte de las dificultades que tienen los campos conceptuales tratados, el cambio de registros contiene aspectos cuya

complejidad no es para dejar de lado, asimismo, la falta de coordinación entre registros produce obstáculos en los aprendizajes conceptuales.

De acuerdo con lo anterior, las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión, se encuentran reagrupadas y confundidas en tareas de producción y de comprensión. La producción de una respuesta moviliza, a la vez, la formación de representaciones semióticas y su tratamiento. La comprensión de un aspecto moviliza las tres actividades cognitivas. Las tareas de producción y de comprensión pueden desarrollarse de manera que haya productos observables e interpretables en la comunicación, pero existen reglas de funcionamiento propias de las actividades cognitivas, tales que se sustentan en los sistemas semióticos y que, además, son independientes de los límites que determinado aspecto de la comunicación puede aplicar a la comprensión de representaciones semióticas (Duval, 1995). En consideración con lo anterior y en particular a este trabajo de profundización, el análisis de las representaciones semióticas aplicado al objeto matemático derivada, aporta a la línea del lenguaje, así como al campo de la Educación Matemática. Pues, desde el razonamiento, el lenguaje y la comunicación de saberes se busca ampliar el rango de la línea de trabajos que aborden dicho objeto matemático, porque dada la dificultad y el nivel de abstracción que éste presenta, en el grado de escolaridad que se está tratando, grado undécimo, es muchas veces muy complejo; además es una idea que poco se ha abordado y, por ende, no se alcanzan las competencias necesarias para concluir que los estudiantes se han apropiado de los conocimientos estudiados.

2.5 Aspectos Relacionados con el Discurso y la Argumentación para Fomentar en Estudiantes

La utilización de representaciones semióticas en el contexto de resolución de problemas es un aspecto permeado por el lenguaje y la comunicación de saberes matemáticos. Y es en los

procesos de enseñanza y aprendizaje donde estos elementos permiten desarrollar aspectos como el de la explicación y el discurso que se necesita para que los saberes sean adquiridos y pueda mejorar la comprensión de un determinado objeto de estudio. En este apartado se presentan algunos aspectos relacionados con el discurso y la argumentación en matemáticas, para fomentar en estudiantes, vistos a partir de los estudios de las autoras Dora Inés Calderón y Olga Lucía León Corredor, quienes presentan su trabajo El requerimiento epistemológico para el desarrollo de competencias argumentativas (2012), como uno de los elementos didácticos identificados en investigaciones sobre factores didácticos, que se construye desde las categorías del sentido y la trama argumentativa. En este caso, se aclara que el sentido consolida el conjunto de significaciones construidas para un objeto teórico, mientras que la trama argumentativa es el constructo que justifica la existencia de una forma de ver un objeto teórico y que se transforma en el referente de base en los contenidos escolares. Es menester aclarar, por los propósitos de este trabajo, que se hará énfasis en el sentido, mientras que no se hablará de las tramas argumentativas por la complejidad y extensión de la temática.

Como complemento al referente teórico mencionado anteriormente, se tiene el trabajo de Jiménez y Pineda (2013), que se llama Comunicación y argumentación en clase de matemáticas, documento que tiene como propósito mostrar la importancia del desarrollo de la argumentación en un ambiente donde se lleven a cabo estrategias de comunicación, como trabajo en grupo y la heurística solucionador-escucha, que consiste en el lenguaje tomado como práctica social, lo cual beneficia la reflexión, el diálogo y la comunicación como un proceso de interacción social, donde se le da importancia a lo dicen y expresen los demás. Este referente teórico aporta al presente trabajo, desde el punto de vista del discurso y la argumentación para fomentar en estudiantes,

porque destaca al lenguaje como un aspecto que contribuye a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; además, que está relacionado directamente con la comunicación, lo cual no siempre se utiliza de forma adecuada en clase, desconociendo las diferencias entre el lenguaje del docente y el estudiante, siendo éste un punto clave en cuanto al hecho de qué idea se tiene de comunicación.

Ahora bien, para abordar, el requerimiento epistemológico (Calderón & León, 2012), primero se tendrá presente el sentido de un enunciado geométrico, el cual está constituido por los siguientes componentes: el contenido semántico, el valor lógico de verdad o consistencia y el valor epistémico. Se asigna el sentido, siempre que se pongan en juego estos tres aspectos según contextos de enunciación. Al contenido semántico lo determinan dos factores primordiales, el primero es el conocimiento previo del que se dispone para identificar un contenido y en particular unos objetos matemáticos referidos en él. El segundo, alude a las formas de acceder a los objetos matemáticos referidos en dichos contenidos. Duval (1991) determina cuatro modos de acceder a los objetos matemáticos según la forma de presentación:

- Un modo de acceder intuitivo vinculado al reconocimiento de formas y a la discriminación de propiedades características. La aprehensión de propiedades invariantes mediante de modificaciones visuales, aprehensión que, según Duval, fundamenta una epistemología ingenua, en la cual el contenido que deviene de las palabras y del discurso depende del acceso directo a los objetos por una experiencia sensible. En el caso de la derivada se accede a ella como una recta tangente a una curva o función dada.
- Un modo de acceder intuitivo vinculado a la estructuración temporal y espacial de toda experiencia y representación posible. Este es un acceso definido por el campo de

percepción y no por los objetos en particular. En el caso de la derivada, se accede como un objeto geométrico bidimensional que se puede trazar en el plano cartesiano.

- Un modo de acceder apofántico, establecido por la operación de predicación para determinar un objeto, esto es, el establecimiento de vínculos para la expresión de una propiedad, relación o acción con una expresión que designa los objetos. En este caso, se accede a la derivada como la recta tangente a una curva en un punto determinado.
- Un modo de acceder puramente lógico, que se asocia con la construcción del objeto a través de la forma de expansión discursiva producto de la derivabilidad deductiva. Los objetos a los que se accede son operaciones de pensamiento controladas semióticamente.

Duval ubica las tres últimas formas de acceder propias de un tipo de epistemología, de manera que la segunda corresponde a la epistemología kantiana, la tercera a la epistemología dialéctica y la última la epistemología constructivista desarrollada después de Frege y Hilbert. En el caso de los sistemas geométricos, los elementos que componen el sistema, que se refiere a las relaciones, situaciones y objetos, pueden representarse en un registro particular, como el de las figuras. En el caso del presente trabajo, el registro se puede pensar en el campo de la geometría analítica con elementos como el plano cartesiano, las rectas, los puntos, las coordenadas, entre otros. Las figuras potencian la forma de acceso intuitiva para los objetos geométricos, más el acceso a elementos como las definiciones y axiomas es del tipo apofántico. En otras palabras, indispensable el desarrollo de las formas de acceso intuitiva y apofántica para una apropiada comprensión de los objetos geométricos.

Un elemento determinante en las formas de acceso mencionadas anteriormente, es el contenido semántico, que se pone en juego en la asignación de sentido a un enunciado y a una

proposición; además, puede vincularse más allá de contextos teóricos de enunciación, pero el desarrollo de un contenido geométrico para un enunciado demanda la ubicación de contextos teóricos de enunciación.

En cuanto a otro de los componentes del sentido, el valor epistémico, que corresponde al grado de fiabilidad que tiene lo enunciado en una proposición, el contenido de una proposición en el momento de su aprehensión produce un rango de fiabilidad que va desde lo evidente, lo plausible, lo posible, lo verosímil, lo necesario hasta lo imposible, lo absurdo y lo inverosímil. El valor epistémico se relaciona con la comprensión del enunciado y se delimita por la comprensión del enunciado, por tanto, una misma proposición es susceptible de conservar valores epistémicos diferentes de acuerdo a los interlocutores, también puede contener estados de conocimientos diferentes, así como pertinencia de medios sociales diferentes; lo cual denota que no existe un único sentido para una proposición.

El último componente del sentido, el valor lógico de la proposición, expresa que la proposición puede ser verdadera, falsa, indeterminada o consistente, valores lógicos desarrollados desde la teoría de la concepción hasta una teoría que se fundamenta en lenguajes formales; además cabe destacar que dichos valores lógicos no solo dependen de la comprensión del contenido, sino también de procesos de verificación o prueba. Es importante saber que los valores epistémico y lógico, como componentes del sentido, tienden a identificarse en algunas situaciones, pero deben separarse en el estudio del desarrollo del sentido. Al respecto, la reacción que se ha generado a la pregunta ¿hay más números naturales que pares? ha sido tomada como absurda o tonta dada la proposición que forma su contenido, pues la expresión “número par” infiere una partición mitad-mitad en los números enteros, lo que, consecuentemente, liga un valor epistémico de evidente y

un valor de verdad de verdadero respecto a la proposición “hay más números naturales que pares”. De esta manera, *evidente y lógicamente verdadero* se convierten en atributos inseparables y, pese a que en otras áreas del conocimiento evidente y verdad son inseparables debido a la función de los enunciados de constatación, en matemáticas, la percepción es excluida como argumento matemático para la prueba y, en suma, el único empalme probable es el que proceda de un valor epistémico necesario con un valor lógico de verdadero o consistente (Duval, 1991).

Si la proposición es enunciada en un contexto teórico específico, el sentido tiene un estatus que depende del contexto de enunciación. Según Duval, se distingue un contexto global como los discursos previos organizados a partir del discurso producido y un contexto local concerniente a la organización propia del discurso producido; de esta manera, un enunciado puede tener un estatus de premisa, conclusión, definición o teorema, conforme los contextos globales. Los niveles mencionados se integran a los componentes del sentido, constituyendo así los componentes que conforman el sentido de una proposición enunciada. Así, el estatus teórico de una proposición define su estatus operatorio posible para un paso de razonamiento e induce un valor epistémico propio libre del valor impulsado por la comprensión del contenido de la proposición.

De esta forma, es conformado un valor epistémico teórico y la ubicación de un contexto de enunciación teórica modifica el sentido de una proposición por la prioridad del valor epistémico teórico encima del valor epistémico semántico.

En la figura 7 se muestra un cuadro que representa las relaciones entre los componentes que determinan la asignación de un sentido a una proposición.

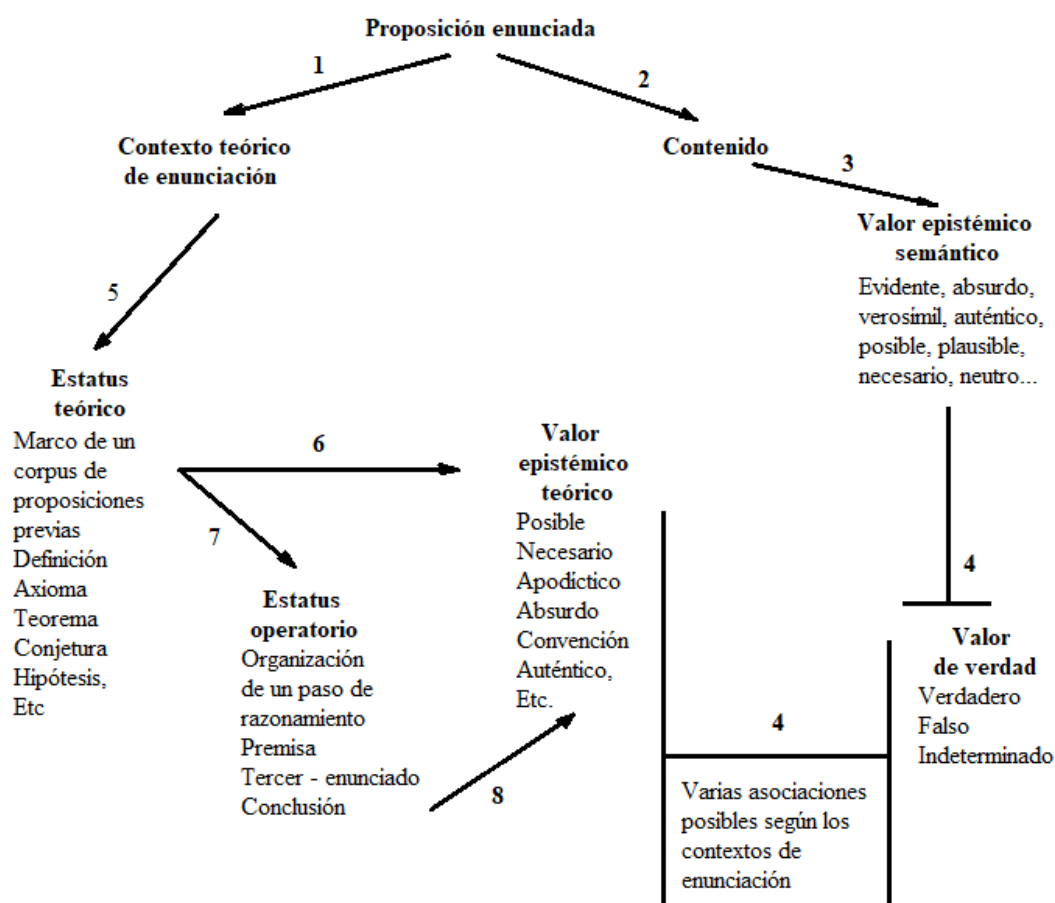


Figura 7. Relaciones entre los componentes del sentido. Flecha 2: hay un gran número de valores epistémicos entre los valores lógicos de verdad. Flecha 1: al compararlo con la flecha 2, la aparición de un valor epistémico teórico inducido por el estatus teórico, inhibe el valor epistémico semántico inducido por el contenido (Duval, 1991).⁶

⁶ Tomado de Calderón, D. I., & Corredor, O. L. L., 2012, El requerimiento epistemológico para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría, *Investigaciones en Educación Geométrica*, 51-86.

Los componentes del sentido mostrados en la figura 7 se explican en la presentación de su estudio epistemológico para una proposición que enuncia una relación matemática. Ahora bien, las autoras, Calderón y León Corredor, respecto al desarrollo de este referente epistemológico, plantearon un contexto teórico de enunciación, el euclidiano, pues su trabajo hace énfasis en un sentido asociado al objeto particular que es la relación pitagórica. Para el caso del presente trabajo, el contexto teórico de enunciación sería el analítico, pues corresponde a una rama de las matemáticas llamada geometría analítica, cuyos primeros resultados fueron desarrollados por René Descartes, filósofo y matemático francés, cuya obra *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et cherecher la vérité dans les sciences* (Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias), publicada en 1637, más conocida como *Discurso del método*, contiene un apéndice titulado *La géométrie*, donde se descomponen problemas complejos en partes más sencillas hasta lograr componentes básicos que se presentan a la razón de manera evidente. En relación con este aspecto analítico, en este trabajo el sentido se encuentra asociado al objeto particular que sería la derivada, pues su estudio implica la utilización de gráficos cartesianos, procedimientos algebraicos y planteamientos de tablas de datos, elementos que se encuentran relacionados directamente con el aspecto analítico mencionado.

Por otro lado, el referente epistemológico presentado en el campo del discurso y la comunicación de saberes en matemáticas es susceptible de la utilización de elementos como las *definiciones, las explicaciones, las descripciones y las demostraciones*. Sobre las definiciones y sus tipos, Brown (1999), afirma que: “Este es un tópico lleno de interesantes e importantes resultados. Muchos de ellos fundamentales para el cómo se comprende las matemáticas”. Además, expresa que no es un tema muy discutido, pues en las matemáticas existe un punto de vista que

domina, es oficial y, supuestamente sin problemas. Según Brown (1997), una definición incluye a los objetos, pero no sus propiedades, pues no debe convertirse en parte del argumento en una demostración.

En teoría de conjuntos se habla de *conjunto* y *pertenece a*, los demás conceptos se definen a través de estos términos primitivos, por ejemplo, la definición de subconjunto es $A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$. Se considera, ahora, el teorema que menciona que el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto y se puede mostrar a través de la expresión “ $\subseteq$ ”: $(\forall S) \emptyset \subseteq S$, o utilizando los términos primitivos: $(\forall S)(\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$. Como se observa, los teoremas pueden ser expresados sin las definiciones, cuya función es proporcionar la identificación de objetos reales, de tal forma que no exista confusión con otros.

Las definiciones no se realizan de manera aleatoria, se estimulan a causa de la presencia recurrente de un objeto establecido o la necesidad de establecer una identificación de un objeto que lo exige el desarrollo matemático determinado. De esta manera, si se desea probar el teorema expresado anteriormente, es necesaria la definición de conjunto vacío; como, por ejemplo, las que aparecen en algunos libros: $\emptyset = [x: x \neq x]$. Este aspecto es muy importante en matemáticas, es decir, introducir objetos por medio de definiciones, conocidas como definiciones nominales, con las cuales se asegura que a través de axiomas se garantice que aquello definido existe; estas serían definiciones reales.

Con respecto a las definiciones en geometría, se puede mencionar las axiomáticas de contenido como la euclidiana, relacionada con los siguientes criterios aristotélicos: el primero, que los atributos en una definición vistos de forma separada, cubren más de lo definido, en cambio, si se combinan, cubren solo lo definido; el segundo, que la definición debe mostrar aspectos ya

conocidos; el tercero, “conocer *que una cosa es*, es lo mismo que conocer *por qué es*”.⁷ Por ejemplo, las definiciones propuestas por Euclides sobre línea, punto y plano, obedecen al segundo principio, dejando claro que las axiomáticas de contenido caracterizan objetos, efectuando ante todo la distinción y no tanto la constitución. Ahora bien, las axiomáticas formales están basadas en los trabajos de Dedekind (1881) en teoría de números, Hilbert (1899) en geometría, Zermelo (1908) en teoría de conjuntos y Frege (1879) en el desarrollo de la formalización. En estas axiomáticas, las definiciones deben relacionarse con el sistema que las constituyen y no pueden verse de forma separada, por tanto, la existencia de objetos está dada por el principio de no-contradicción. Así, el hecho de precisar elementos por la definición hace uso de ambas axiomáticas, porque en las de contenido se determina los objetos que establecen el dominio que alude a la teoría, mientras que en las formales sobresalen las relaciones fundamentales entre objetos. Lo anterior, se comprueba con el siguiente ejemplo tomado de los Elementos de Euclides y de la geometría de Hilbert:

DEFINICIONES EN EUCLIDES:

Un punto es lo que no tiene partes.

Una línea es una longitud sin anchura.

Los extremos de una línea son puntos.

Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Una superficie es lo que tiene longitud y anchura.

⁷ Para ver en detalle el desarrollo de estos tres requerimientos, se puede acudir a la introducción de Heath al libro primero de los Elementos de Euclides (Heath, 1958).

Los extremos de una superficie son líneas. (Euclides, Libro Primero)

Definición en Hilbert: “Considere tres conjuntos distintos de objetos. Permitamos que objetos del primer conjunto sean llamados puntos y denotados por $A, B, C, [\dots]$; permitamos que los objetos del segundo conjunto sean llamadas líneas y serán denotadas por $a, b, c, [\dots]$; permitamos que los objetos del tercer conjunto sean llamados planos y denotados por $\alpha, \beta, \gamma, [\dots]$. Los puntos son también llamados los elementos de la geometría de la línea; los puntos y la línea son llamados los elementos de la geometría del plano, y los puntos, las líneas y los planos son llamados los elementos de la geometría del espacio.” (Hilbert, 1997, p. 3)

Los objetos establecidos en las definiciones mencionadas son de diferente naturaleza. En las definiciones de Euclides, los objetos se caracterizan por sus atributos, en tanto que en las de Hilbert se plantea un sistema semántico común a los objetos. Ahora bien, para el caso de este trabajo de profundización, la definición primordial es de la derivada, que se mostró en el apartado 2.3, así:

Apostol (1979) define la derivada de una función en un punto c como un límite de la siguiente manera: Sea f una función definida por lo menos, en un intervalo abierto (a, b) del eje x . Se elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x+h$ pertenezca también a (a,b) . El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x+h$. El cociente representa la *variación media* de f en el intervalo que une x a $x+h$. Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese

cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$ (se lee «f prima de x»). Con lo que la definición formal de $f'(x)$ puede establecerse del siguiente modo:

La derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Con tal que el límite exista. El número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x .

Se puede ver que en esta definición se busca el recurso de expresiones algebraicas, así como prevalece el uso de términos simbólicos, el lenguaje natural y algunos conceptos que deben ser previamente conocidos. De esta manera, la definición de derivada tiene tanto de las axiomáticas de contenido, como de las formales, pues guarda los criterios aristotélicos, sobre todo el segundo, donde se aclara que se debe expresar aspectos previos, como por ejemplo el de límite de una función; además prevalece el sistema formado en la propia definición y que es común a los objetos tratados en ella, que corresponde a los aspectos analítico y geométrico, los cuales no se deben ver de forma separada, puesto que el uno se refiere a los procedimientos algebraicos y propios del cálculo, mientras que el otro refleja el espacio en el que se pueden ubicar los objetos estudiados, por ejemplo el plano de dos dimensiones, conocido como plano cartesiano. Es importante, para propósitos de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no descuidar el uso de las definiciones, pues, permiten formalizar el objeto estudiado, acentuando los momentos de conceptualización realizados en el aula de clases respecto a la derivada o cualquier otro objeto matemático. Los

aspectos afianzados en una definición establecen un escenario de elementos que señalan el acceso a un objeto matemático determinado, así como a un campo teórico matemático, cuyo requisito ha de satisfacer el requerimiento epistemológico.

Por otro lado, otro elemento importante en el requerimiento epistemológico trata sobre las *explicaciones y descripciones*. Al respecto, Frege (1971) afirma que hay unas proposiciones relevantes en las axiomáticas que no pueden ser pensadas como matemáticas y señala que los axiomas, los términos no definidos y las definiciones no lo son todo: “Nosotros podemos asumir que existen unas proposiciones de una tercera clase, las proposiciones explicatorias, que aunque no deben ser consideradas pertenecientes a las matemáticas mismas, deberían relegarse como el preámbulo para una propedéutica” (p. 7). Cualquier presentación de una teoría produce maneras de acceso a los términos no definidos, por ejemplo, si hablamos de punto, hay libros de geometría donde lo definen como “la huella que deja la punta de un lápiz en una hoja” (Calderón & León, 2012), que corresponde a un enunciado informal que intenta esclarecer el objeto estudiado, lo cual, según Frege corresponde a un preámbulo no matemático. En particular, respecto a la derivada, se utiliza con mucha frecuencia el *punto*, desde el momento en que se define la derivada en un punto dado que se ubica en un intervalo cerrado de la función establecida, aquí es importante ver cómo el espacio estudiado va cambiando, pues se trata de un espacio de dos dimensiones, por lo que el punto presenta dos coordenadas. En este sentido, la definición de derivada requiere elementos como la recta tangente a una curva, donde los textos de cálculo suelen utilizar enunciados como “el punto A se desliza sobre la curva acercándose al punto B”. Aquí se percibe la necesidad que hubo de utilizar palabras que implican dinamismo o movimiento, algo no muy matemático pero

que, en unión con otros elementos como los puntos, puede ser un buen intento de acceso al objeto estudiado.

Teniendo en cuenta lo anterior, los procesos descriptivos cuyas pretensiones sean ilustrar en los sujetos el acceso a objetos dados, no se pueden considerar rigurosamente matemáticos, no obstante, deben ser inexorables respecto al comportamiento del sujeto epistémico. Esto, a pesar de que, desde el aspecto lógico, las definiciones representen algo primordial y carente de valor epistémico semántico, no significa que no haya un significado psicológico.

Un último elemento relevante en el requerimiento epistemológico, que mencionan las autoras León y Corredor (2012), es el lugar de la *demostración*. En relación con lo anterior, la acción didáctica exige que se establezcan principios de distinción entre lo que determina la regulación y aceptación de cierto comportamiento matemático y los que no son matemáticos. Ahora bien, los elementos mostrados hasta el momento, han caracterizado el sentido para un enunciado matemático, lo que debe movilizarse junto con enunciados que no son propios de las matemáticas, pero permiten el acceso a ciertos contextos, como las proposiciones explicativas. Recuérdesse que el componente lógico del sentido se afirma desde los procesos deductivos, los cuales garantizan un estatus lógico válido frente a un enunciado matemático. Desde este punto de vista, la *prueba* obedece a los procesos que busquen afirmar la validez de una proposición, lo que limita los procesos argumentativos, que persiguen la convicción y, aunque no comprendan pruebas ni principios de deducción lógica, elaborar una prueba implica tener presente argumentos y tramas argumentativas, cuyo propósito es llegar a la validez de una proposición. Es por esto que, un caso particular de argumentar sería la prueba. Es menester aclarar que, en relación con las tramas argumentativas, son consideradas como un tejido de relaciones discursivas elaborado por un sujeto

argumentador, cuyo objetivo es convencer a un auditorio del sentido particular presentado (Calderón & León, 2001).

Dicho lo anterior, la prueba condiciona la argumentación en:

- La explicación de las premisas consideradas.
- Una estructura fuerte para la conexión de los argumentos determinada por lógicas formales.
- La relativización de los auditorios y los contextos para lograr un carácter atemporal e impersonal. (Calderón & León, 2012, p. 73)

De igual manera, el contexto argumentativo restringe la prueba a partir de la intencionalidad y la incertidumbre del sujeto en relación con la validez en una proposición. Por ejemplo, en matemáticas, el teorema de Pitágoras tiene un carácter atemporal en su demostración, pues o todas las demostraciones no vienen de la misma proposición o existe solo una demostración en varios registros. En lo que concierne a la derivada, unos teoremas se demuestran únicamente utilizando procedimientos algebraicos acompañados de expresiones en lenguaje natural y algunos símbolos matemáticos, mientras que otros requieren el uso de registros geométricos que proporcionen mejor comprensión de aquello que se está estudiando. A continuación, se muestran dos teoremas sobre derivadas, Apostol (1979): el primero trata sobre la derivada de funciones con base en las cuatro operaciones fundamentales, el segundo consiste en una aplicación del teorema del valor medio:

Teorema 4.1. Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo común. En cada punto en que f y g tienen derivadas, también las tienen la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto $f \cdot g$ y el cociente f/g . (Para f/g hay que añadir también que g ha de ser distinta de cero

en el punto considerado). Las derivadas de estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas:

$$(i) \quad (f + g)' = f' + g',$$

$$(ii) \quad (f - g)' = f' - g',$$

$$(iii) \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f,$$

$$(iv) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{en puntos } x \text{ donde } g(x) \neq 0.$$

Demostración de (i). Sea x un punto en el que existen ambas derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$. El cociente de diferencias para $f + g$ es

$$\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Cuando $h \rightarrow 0$, el primer cociente del segundo miembro tiende a $f'(x)$ y el segundo a $g'(x)$ y por tanto la suma tiende a $f'(x) + g'(x)$. (Apostol, 1979, p. 201-202)

Solo se presentó la demostración de la parte (i), pues para propósitos del presente trabajo, es suficiente con ilustrar el uso del lenguaje algebraico. Hay casos en los que se utilizan las representaciones geométricas para puntualizar aquello que se está presentando, como es el caso del teorema de los máximos y mínimos:

Teorema 4.8.

Supongamos f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a,b) , excepto acaso en un punto c .

- a) Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, f tiene un máximo relativo en c .
- b) Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y positiva para todo $x > c$, f tiene un mínimo relativo en c .

Demostración.

En el caso a), el teorema 4.7 a) nos dice que f es estrictamente creciente en $[a, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, b]$. Luego $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ en (a, b) , con lo que f tiene un máximo relativo en c . (Apostol, 1979, p. 229)

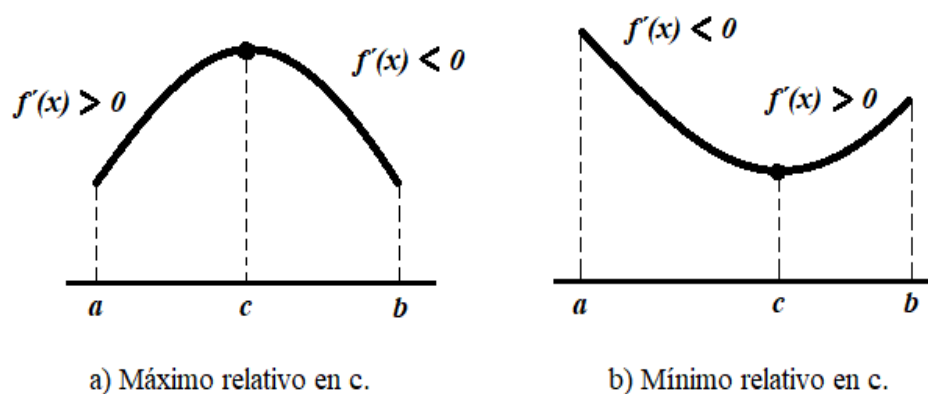


Figura 8. Máximos y mínimos en el punto c .⁸

En la demostración del teorema anterior solo se presenta la parte a), pues se pretende mostrar la necesidad de la utilización de los registros geométricos; en esta demostración se alude a un teorema 4.7 que, en el texto de Apostol, se refiere al crecimiento y decrecimiento de la función f en el intervalo $[a, b]$, dado el signo de la derivada $f'(x)$, además de cuando $f'(x)$ es cero.

⁸ Tomado de Calculus (p. 229), por T. Apostol, Volumen I, Editorial Reverte.

Las demostraciones del teorema de Pitágoras, así como las mostradas anteriormente, dejan entrever diferentes maneras de experiencia frente al significado de una prueba. Respecto a la proyección didáctica del requerimiento epistemológico, el carácter fenomenológico de la prueba alude a la relevancia de los procesos de prueba y demostración, en cuanto a la comprensión del conocimiento matemático, lo cual se puede expresar en la caracterización de prueba por Martín-Lof:

La prueba de un juicio es la evidencia de él [...] prueba es lo mismo que evidencia [...] la prueba de un juicio es el mayor acto de aprehensión, compresión y entendimiento o mirada de él. Así, una prueba no es un objeto es un acto. (Martín-Lof, 1983-4, p. 231)

De esta manera, la prueba sería, primeramente, un acto y, luego de procesos de reflexión, un objeto. Desde esta misma óptica, Richard Tieszen (1992) caracteriza los siguientes actos llamados de prueba, tomando un mismo enunciado matemático:

- *Una prueba es el cumplimiento de una intención matemática.* La intencionalidad se establece según los actos de cognición que debe apuntar a los objetos por la forma de contenido de los actos, además se relaciona con los procesos de sentido, pues los contextos de enunciación no teóricos corresponden al contenido semántico asociado a una proposición x . El acto cognitivo aquí, se fija según lo que un sujeto A piense de x . De acuerdo a la manera en que se dé el contenido, el desarrollo del conocimiento depende de la información y evidencias adquiridas. La prueba cumple, entonces, una intención matemática, la cual puede ser un acto cognitivo lleno o vacío y, dado que, los objetos de los actos matemáticos cognitivos no necesariamente existen, la evidencia de que existan es la prueba. Así, se cumple el acto matemático cognitivo

con el resultado de la evidencia. Tieszen (1992) afirma que es posible tener creencias y opiniones en matemáticas, pero la prueba permite que se genere la necesidad de completar estados de conocimiento en relación con objetos sin evidencia. Por consiguiente, la prueba tiene la función de evidencia que puede asociarse a la adecuación, por ejemplo, las pruebas intuicionistas son planteadas a partir de algo relevante en el sentido de responder preguntas en relación con lo que produce creer en x .

- *La prueba como una realización de una expectativa matemática.* La concepción de un objeto puede obtenerse sin necesariamente verlo, lo que muestra una intención vacía que podría verse como las expectativas a causa de creencias o recuerdos, aspecto cognitivo cuando se pretende desarrollar conocimiento. Las expectativas varían de acuerdo a cómo se vaya construyendo el conocimiento, así que la prueba no debe ser independiente de la intencionalidad.
- *La prueba como la solución de un problema matemático.* La prueba no puede separarse de la solución de un problema, pues su resolución se debe a creencias que se adquieren, para llegar a la solución o no. Esto permite el mejoramiento frente al conocimiento que alude al problema.
- *La prueba como un programa que satisface una especificación particular.* Este es un tema actual que se refiere a si las máquinas, como programas que ejecutan especificaciones en particular, tienen o no intencionalidad. En caso negativo, es posible argumentar que las pruebas automatizadas otorgan evidencia de

derivabilidad, bajo el concepto de que las pruebas son entendidas por seres con intencionalidad.

- *La distancia prueba-demostración.* Caracterizar la prueba desde la intencionalidad representa un acto establecido por una intención de completitud. Las pruebas expresadas como demostraciones del teorema de Pitágoras y las enunciadas sobre la derivada, son evidencia con prueba, pasando por la parte visual que, se apoya en la elaboración de sentido basado en un valor epistémico semántico, así como utilizando el discurso teórico que, se sustenta en las componentes epistémica, teórica y lógica. De esta manera, la prueba tendrá la intención de hacer evidente un objeto, mientras que la demostración es una prueba que desarrolla teoría en un contexto teórico particular.

Finalmente, en cuanto a los aportes del trabajo de Calderón y León (2012), los elementos que aluden al requerimiento epistemológico como la elaboración de sentido, así como las definiciones, explicaciones, descripciones y demostraciones, son fundamentales en la realización de tramas argumentativas en geometría y, en particular en el discurso argumentativo utilizado en el estudio de la derivada, pues acentúa la acción didáctica del profesor, promoviendo la articulación entre campos conceptuales que se asocian al campo objeto frente a la formación geométrica, además aporta criterios en cuanto a la aceptación de un enunciado como matemático, de una argumentación como pertinente y de una prueba como demostración. Respecto a la derivada, el discurso argumentativo puede generar mayor confianza y una apropiación de elementos, tales que permiten la caracterización de objetos a través de enunciados, términos y expresiones que permitan

un mejoramiento en la comprensión de este objeto que, por su carácter abstracto, como se ha mencionado anteriormente, es complejo de comprender.

En este apartado sobre los aspectos que tienen que ver con el discurso argumentativo, el trabajo que se mencionó al inicio del mismo y que está muy relacionado con el de las autoras citadas con anterioridad, es el de Jiménez y Pineda (2013), Comunicación y argumentación en clase de matemáticas, dado que los procesos argumentativos, pueden aportar al mejoramiento de la comprensión de objetos matemáticos.

De acuerdo con Jimenez & Pineda (2013), la importancia del desarrollo de la argumentación radica en que se trabaje en un ambiente donde se produzcan estrategias de comunicación como el trabajo en grupo y la heurística solucionador-escucha, donde el lenguaje se toma como una práctica social que fomente aspectos como el diálogo y la reflexión. Este es un aporte que se puede tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje en cualquier temática, donde suelen presentarse dificultades respecto a la comunicación entre docentes y estudiantes, en particular, en matemáticas, ciencia que trata sobre aspectos que se fundamentan desde lo abstracto, razón por la cual es necesario un lenguaje adecuado en la comunicación e interacción de ideas, enunciados, expresiones, afirmaciones y demás.

Desde el punto de vista histórico, las clases de matemáticas se han inclinado por el platonismo, el positivismo lógico, el estructuralismo y el formalismo, lo que ha generado que el docente exprese las ideas en forma axiomatizada y sin relación alguna con la realidad (Jiménez, 2010). En consecuencia, los estudiantes no comprenden estas verdades abstractas y las aceptan, manteniendo la pasividad, sosteniendo poca comunicación y argumentación.

Se hace necesario, por tanto, contribuir a la formación de pensamiento argumentativo (León & Calderón, 2003), donde se promueva la comunicación, la participación del estudiante, la relación entre el contexto y el saber matemático, aprehendiendo el lenguaje matemático de manera que se integre al del estudiante (Jiménez et al., 2010). Al respecto, la idea sería vencer algunas dificultades de incompetencia comunicativa y matemática, es decir, dificultades presentadas en la interpretación y producción de discursos argumentativos (León, 2003). Para esto, se debe generar espacios, dinámicas y estrategias que favorezcan el razonamiento matemático donde se pueda interactuar sin límite alguno.

Este tipo de interrelaciones permiten que la comunicación y el lenguaje articulen la comprensión y la argumentación, pues la discusión y consensos al respecto generan la construcción de nuevos saberes. Investigaciones sobre la argumentación en el aula sustentan esta reflexión, como, por ejemplo, Crespo (2006), sobre la argumentación en el aula, trabajo que muestra las dificultades de los estudiantes frente a la comprensión de la necesidad de las demostraciones en matemáticas, en esta investigación se concluye que se puede evitar la algoritmia en el aula con el uso de las demostraciones lógicas y la argumentación, eludiendo el trabajo mecánico y rutinario. León y Calderón (2001), sobre la validación y argumentación en el aula, donde se aprecian recursos argumentativos que orienten la validación en soluciones de problemas matemáticos. Se aplicó en una población de estudiantes de primer semestre de universidad, además encontraron componentes socioculturales útiles en la interacción argumentativa en matemáticas, lo que reflejó recursos empíricos y analíticos que venían acompañados del aporte escrito. Otro aspecto relevante fue que el convencimiento de las ideas discutidas va creciendo en concordancia con los elementos discursivos utilizados, como por ejemplo el descriptivo y el explicativo.

En suma, el trabajo de Planas (2010), acerca de prácticas escritas en la argumentación, destaca que la argumentación hace parte de la formación de los estudiantes y, por consiguiente, también desde el punto de vista del profesor, pues se encontró dificultades prácticas y de interpretación en la argumentación en matemáticas; por lo que se recomienda llevar a la práctica el análisis de los usos que estudiantes y profesores realizan en este tipo de prácticas. En el trabajo de Carneiro (2008), se presentan las experiencias que docentes han tenido en la enseñanza de las matemáticas, determinando que la unión de los mismos puede permitir la superación de dificultades al respecto y, además que los profesores investigados, en su práctica pedagógica de problemas cotidianos permite la reflexión de su práctica y la mediación de situaciones más agradables en la enseñanza y el aprendizaje.

Estos trabajos, que han aportado de gran manera al campo de la Educación Matemática, no han descuidado el elemento comunicativo, pues si en el aula de clase la esencia es la comunicación, es seguro que los estudiantes desarrollen habilidades comunicativas y también construyan matemáticas bajo el uso de la argumentación (Díaz, 2008). La clase de matemáticas debe aprovecharse para robustecer y desarrollar las habilidades argumentativas. El propósito aquí es de motivar los espacios actuales de estudio y de investigación sobre estas temáticas, en donde se hace necesario que el profesor establezca mejores actividades dinámicas e integre estrategias de comunicación, en las que docente y estudiantes sean libres de discutir, participar, interactuar, opinar, justificar, explicar y argumentar. De acuerdo con lo anterior, la intención que tiene el presente trabajo, cuyo objeto es la derivada, es no perder de vista esta perspectiva, en el sentido de tener una opción que sea viable para llevarla a cabo en el aula de clase de matemáticas, en

particular, con la importancia del discurso y la argumentación integrados al análisis de los procesos determinados.

Además, es importante decir que los aportes de León y Corredor (2012), así como el de Jiménez y Pineda (2013) sobre aspectos argumentativos en clase de matemáticas, son apropiados para realizar los análisis respectivos del presente trabajo, por los elementos que presentan como el de contenido, el discursivo y el comunicativo, pues los mismos brindan posibilidades de entablar estrategias viables para llevar a cabo en el aula y, así, poder afianzar el aprendizaje de objetos como la derivada, la cual, por su naturaleza correspondiente a un campo como lo es el del cálculo, implica difíciles accesos de conocimiento y complejos procesos de comprensión y aprendizaje en los estudiantes.

En suma, como aporte al campo de la Educación Matemática, es necesario que el profesor plantee la importancia de las reflexiones sobre su práctica pedagógica y permita entornos en los que se pueda desarrollar la argumentación a través de la interacción discursiva y comunicativa. Respecto a lo anterior, el aspecto con el que se pretende que este trabajo de profundización contenga elementos novedosos no solo al campo de estudio, a la línea de lenguaje y comunicación, sino también para la enseñanza y aprendizaje de objetos de estudio como la derivada; es justamente la necesidad de integrar aspectos del discurso, argumentación y del análisis de las representaciones semióticas en el cálculo en matemáticas, en particular en grado undécimo.

Capítulo 3. Fundamentos Metodológicos

En este capítulo se presentan los distintos aspectos relacionados con la metodología que orienta este trabajo. Se presenta el diseño metodológico de corte cualitativo, que se estructura

desde los trabajos de Cobb (2000) y Confrey et al. (2000), sobre los experimentos de enseñanza, describiendo las fuentes de datos, así como las diferentes fases desarrolladas en la investigación. Un aspecto relevante en estas metodologías corresponde a la apertura que ofrecen al poder interpretar fenómenos dados en contextos particulares, así como establecer un marco integral de la situación estudiada, a través de la relación de los componentes del fenómeno en investigación, lo que proporciona un progreso en la construcción de explicaciones.

Teniendo en consideración el estudio cualitativo, se propone inicialmente explorar los Experimentos de Enseñanza como una alternativa que permita plantear el presente trabajo. Se presentan en este capítulo las particularidades de esta metodología de trabajo. Igualmente, se realiza una descripción de algunos elementos que forman parte del desarrollo del experimento, tales como las conjeturas, sus dimensiones y las trayectorias de aprendizaje sobre las que estos aspectos se ponen en escena.

Finalmente, se presentan los diseños de las actividades que componen la trayectoria; así como los interrogantes que constituyen dichas actividades, estableciendo sus particularidades y las formas de actuación que se esperan, es decir, las hipótesis en relación con el funcionamiento de la trayectoria.

3.1 Experimentos de Enseñanza

En este apartado se exponen los elementos del marco metodológico que se estructura a partir del trabajo de Cobb (2000). Esta metodología suministra formas de indagar las posibilidades que brinda la investigación dada una determinada propuesta del profesor y lo que se produce en el aprendizaje de los estudiantes, teniendo presente los cambios que van resultando en el aula de clase.

Teniendo en cuenta lo anterior, la metodología de experimentos de enseñanza permite abordar los siguientes aspectos: estudiar el grado en que la participación de los estudiantes en actividades de clase sostiene sus aprendizajes en matemáticas, estudiar la actividad del profesor y las formas de mejoramiento en la interacción con los estudiantes, observar las actividades propuestas por el profesor y las construcciones potenciales del estudiante en la clase a partir de ellas, desarrollar constructos teóricos que posibiliten maneras de comprender lo sucedido en el aula de clase.

El presente trabajo de profundización está adscrito en este abanico de opciones en el quehacer matemático mediante los experimentos de enseñanza, el cual ha puesto en práctica las propuestas que para la derivada se han desarrollado en el marco de referencia. Esta metodología propicia que se desarrollen los siguientes aspectos paralelamente: se mide el impacto del experimento de enseñanza en la formación de los estudiantes, se extrapolan recomendaciones para el ajuste y posterior continuación de la propuesta.

El trabajo con los experimentos de enseñanza implica que el investigador debe hacer presencia en las actividades de clase, por lo tanto, el profesor forma parte del equipo que acompaña la investigación. En cuanto al diseño, no debe ser definitivo, esto quiere decir que puede ser susceptible de modificaciones o adecuaciones que se den por las discusiones referentes a los desarrollos de los estudiantes. Lo dicho anteriormente corresponde al primer análisis realizado sobre la implementación, el análisis “local”, que tiene presente los detalles de la implementación del experimento.

Lo anterior compone lo caracterizado por el diseño y la implementación en el aula de clase del experimento de enseñanza.

Con lo anterior se tiene lo que caracterizan el diseño y la puesta en el salón de clase del experimento de enseñanza. Es necesario también, plantear algunos elementos que perfilen el análisis subsiguiente a estos aspectos, como por ejemplo el análisis “retrospectivo”, el cual sitúa los sucesos ocurridos en el aula de clase en un contexto teórico, que permite la comparación, por ejemplo, como estrategias de interpretación. El análisis retrospectivo permite al investigador regresar, revisar y reflexionar acerca de lo acontecido en el aula de clase al momento de implementar el experimento. Aquello que se vaya descubriendo puede compararse con casos paradigmáticos, con los supuestos iniciales e hipótesis, además con los fundamentos teóricos ubicados en la base del diseño.

A continuación se presenta una descripción de algunos factores primordiales de los experimentos de enseñanza, teniendo en cuenta que se han establecido los ajustes necesarios respecto a la metodología en el desarrollo del trabajo de profundización.

3.1.1 Generalidades de Los Experimentos de Enseñanza y las Trayectorias de Aprendizaje

Se asume que la investigación en educación matemática cumple una amplia variedad de propósitos. No es corta la lista de elementos que se abordan actualmente en el campo y asimismo el tipo de miradas que se dan de dichos elementos; basta con revisar los temas de algunos congresos nacionales e internacionales (22 temas ocuparon las discusiones del CIAEM, 2015) o los números recientes de algunas publicaciones, para darse cuenta de que, aunque el campo es relativamente nuevo, es un campo amplio y prolífico.

En este contexto de trabajo se reconoce sin embargo que es necesario profundizar en las investigaciones del salón de clases de matemáticas de corte un poco más especulativo (Confrey & Lachance, 2000), en relación con algunas tendencias más cualitativas o en las que las condiciones

particulares de los entornos reales de los salones de clase se restringen; una investigación en las que algunas de las restricciones se “relajen” mientras que otras se mantengan. De entre los trabajos más reconocidos en este ámbito se encuentran los de Cobb (2000) y sus colaboradores, los cuales han propuesto un modelo de diseño de investigación que utiliza las condiciones comunes y naturales propias de un salón de clase, acompañada de elementos teóricos para crear e investigar nuevas estrategias educativas.

Las estrategias desarrolladas a través de este tipo de trabajos de investigación son pensadas para cambiar y reformar las prácticas de enseñanza, asunto que llama la atención para este trabajo de investigación, pues propone maneras alternativas que se pueden aplicar en el desarrollo de la clase de cálculo, en particular sobre la derivada, de la Institución Educativa en mención. Sin embargo, el asunto central de dichos trabajos es que se presentan como una forma de acercarse al estudio de las clases de una manera que permite establecer una mejor conexión entre la teoría y la práctica. Así, los experimentos de enseñanza están motivados por el compromiso del investigador en prestar especial atención a las interacciones de los participantes de la clase, pues en estas seguramente aparecen concepciones e interpretaciones fundamentales para los propósitos de esta investigación.

En la realización del experimento de enseñanza se identifican dos niveles: un micronivel y un macronivel (Cobb, 2000). En el primero se encuentra el experimento de enseñanza en el momento en que fue pensado y se hicieron ciertas anticipaciones, junto con los elementos previstos para desarrollar la enseñanza, los cuales contemplan las actividades de clase planeadas y aplicadas. Se cierra este primer nivel con el análisis de la implementación de dichas actividades, un análisis local que permite identificar lo que ocurre en clase y a partir de ahí desarrollar los ajustes para las

actividades siguientes. Estos ajustes tienen que ver con los desarrollos de la conjetura, así como con ciertas características de las actividades.

En el segundo, el macronivel, se estudia la secuencia completa de enseñanza, todos los elementos que constituyeron la planeación del experimento y sus diversas actividades de clase así como los detalles de su implementación; se trata de crear conexiones, relaciones y explicaciones entre la teoría local que guió el diseño y la implementación de las actividades, para tratar de explicar la forma en que las trayectorias de aprendizaje y las conjeturas respondieron a lo esperado en el experimento de enseñanza; esto se realiza mediante un análisis retrospectivo.

El experimento de enseñanza inicia con la identificación de unas metas de aprendizaje y la forma en que el proceso de enseñanza puede ser realizado, así como una descripción de las maneras en que se espera discurra el aprendizaje (la conjetura). Lo anterior se concreta en la formulación de una trayectoria hipotética de aprendizaje, la cual ha de incluir una descripción coherente de cómo se desarrollará el aprendizaje de los estudiantes, es decir, precisar cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes puede evolucionar con dichas actividades, lo cual permite ver que estos elementos están en una clara interrelación.

Aunque los aspectos sociales, en los que se funda el experimento de enseñanza, no aparecen de manera explícita en la planeación, se debe reconocer que un análisis puramente psicológico que caracterice el aprendizaje independientemente de la situación social en la que esta toma lugar, es inadecuado cuando se diseñan y planean las situaciones. Sin embargo, en este trabajo los aspectos sociales del salón de clase estarán en general implícitos, o por lo menos no se harán referencias puntuales procedentes de análisis específicos de estos aspectos.

Este análisis de las características particulares de la metodología de experimentos de enseñanza permitió establecer las condiciones para determinar una conjetura que guíe el experimento de enseñanza, los elementos que componen las trayectorias de aprendizaje y, finalmente, identificar propuestas teóricas y metodológicas en relación con la forma en que han de conducirse los análisis finales. Se presentan entonces los pormenores de dichos elementos del experimento de enseñanza.

Un primer elemento importante a la metodología es el concepto de trayectoria de aprendizaje, el cual tiene ya, al menos, 20 años. Se usó para dar forma a un trabajo que articulara las maneras en que las concepciones de los estudiantes progresan de un estado informal hacia uno más elaborado. Siendo un concepto tan nuevo, como ocurre con tantos otros en educación matemática, no se encuentra aún un consenso entre los miembros de la comunidad en relación con su definición y alcance. En este trabajo se parte de la acepción de trayectoria de aprendizaje dada por Confrey & Maloney (2009):

... a researcher-conjectured, empirically-supported description of the ordered network of constructs a student encounters through instruction (i.e., activities, tasks, tools, forms of interaction and methods of evaluation), in order to move from informal ideas, through successive refinements of representation, articulation, and reflection, towards increasingly complex concepts over time. (p. 347)

... una descripción conjeturada por un investigador y respaldada empíricamente de la red ordenada de constructos que un estudiante encuentra a través de la instrucción (es decir, actividades, tareas, herramientas, formas de interacción y métodos de evaluación), para pasar de ideas informales, a través de refinamientos sucesivos de representación,

articulación y reflexión, hacia conceptos cada vez más complejos a lo largo del tiempo. (p. 347)

Al estar fundamentada en dos perspectivas, una sociocultural y una psicológica, la idea de trayectoria de aprendizaje hace énfasis en que la comprensión de los estudiantes está influenciada por el proceso de enseñanza en el que ellos están inmersos (sociocultural) y que asimismo dicha comprensión está basada en una organización de las experiencias individuales de los estudiantes (psicológica). Es decir, se postula como una propuesta que intenta darle un lugar a la organización adecuada del proceso de enseñanza y al mismo tiempo reconoce las particularidades que el aprendizaje tiene para los estudiantes en una disciplina específica. Esta dualidad es fundamental al momento de planear y ejecutar las diferentes componentes de la trayectoria de aprendizaje.

Las trayectorias de aprendizaje se han empleado como fundamento en diversos trabajos. Confrey et al (2012) reportan su progreso en construir evaluaciones diagnósticas diseñadas alrededor de trayectorias de aprendizaje que fomentan el aprendizaje de los estudiantes. En su trabajo diseñan una plataforma de evaluación para el salón de clase. Se rescatan de esta reflexión las tres funciones claves que señalan para las evaluaciones en el salón de clases: monitoreo curricular, evaluación formativa, evaluación diagnóstica. Clements, D., Wilson, D., & Sarama, J. (2004) crean una trayectoria hipotética de aprendizaje basada en investigaciones previas sobre la composición de figuras geométricas en estudiantes de preescolar, además diseñan instrumentos para identificar el progreso de los estudiantes en dicha trayectoria; emplearon diversos métodos como la investigación acción con profesores y estudios que involucraban un amplio grupo de estudiantes; reportan el avance de los estudiantes en el desarrollo de habilidades para componer y recomponer figuras bidimensionales.

Otros estudios, como el de Wilson, Mojica y Confrey (2013), formulan un conjunto de trayectorias para trabajar con profesores en formación como un curso de métodos de enseñanza. Con ellas se mostraba como estas trayectorias pueden ser usadas para que los profesores en formación aprendan sobre los procesos de razonamiento de sus futuros estudiantes; basados en el hecho de que estos profesores no tenían experiencia con el trabajo en clase, la conjetura afirmaba la dificultad que ellos enfrentarían al intentar describir dichos procesos de razonamiento. Muestran finalmente que el trabajo con estas trayectorias y conjeturas apoya la construcción de modelos para los tipos de razonamientos que pueden desarrollar los estudiantes.

Las nuevas aproximaciones para el trabajo en clase de matemáticas han buscado que este trabajo, organizado y dirigido por el maestro, permita estimular las ideas matemáticas de los estudiantes a través de tareas cuidadosamente seleccionadas, en ambientes de clase en los que se alienta a los estudiantes a intercambiar sus ideas, con un compañero o con la clase en general y con el profesor, como una estrategia que les ayude a darle sentido a las mismas. Además, ponen especial atención a la comprensión que van alcanzando los estudiantes de los temas en estudio como un elemento más en la planeación de las actividades de clase. Por lo anterior, el conocimiento que tenga un profesor de estas formas de trabajo se considera fundamental para el éxito de estas nuevas aproximaciones. Las trayectorias de aprendizaje se constituyen así en un mecanismo potente de poner en acción todas estas consideraciones y por lo tanto en un recurso valioso para los profesores.

En ellas el profesor tiene un papel central en el proceso en la medida que es él quién orienta el trabajo con las tareas y herramientas que se diseñaron –para el experimento de clase; es quien da forma y garantiza las diferentes interacciones discursivas en el salón de clase, al fomentar el

uso del lenguaje necesario para construir y presentar ideas, sugerir nuevas formas de enfrentar un problema, señalar errores y ofrecer alternativas de trabajo, etc. Las trayectorias de aprendizaje pueden proveer a los maestros con una estructura que apoya sus capacidades para atender el progreso de sus estudiantes, ya que permite ajustar la enseñanza a las particularidades de su clase y conseguir los desarrollos conceptuales propuestos.

Wilson et al. (2013) afirman que las trayectorias de aprendizaje permiten estructurar ideas generales para el trabajo en clase y al mismo tiempo tienen la flexibilidad que permite hacer adecuaciones a las particularidades de algunos grupos. De esta manera las trayectorias pueden asociarse con los estándares, apoyar la organización curricular, en general pueden apoyar el trabajo del profesor. Estas pueden describir el aprendizaje de los estudiantes como un proceso que va señalando sus desarrollos, como un conjunto de posibilidades mas no como un grupo de prerrequisitos.

Reconocen la experiencia de los aprendices como un recurso que debe ser usado en la planeación de las actividades; permiten tener en cuenta las exigencias lógicas de las matemáticas al mismo tiempo que las exigencias cognitivas para el desarrollo de los conceptos. Se reconoce una relación directa entre el aprendizaje de los educandos y los procesos de enseñanza en los que ellos participan; este aprendizaje no se desarrolla de manera espontánea sino a través de la participación de los estudiantes en experiencias cuidadosamente diseñadas. Esta participación se aprovecha mejor en la medida en que los profesores comprendan el pensamiento matemático de sus estudiantes.

Al estar basadas en evidencia empírica y teórica sobre las formas en que se desarrolla el aprendizaje de los estudiantes, en este caso la propuesta para el aprendizaje de la geometría en

relación con las actividades cognitivas que requiere dicho aprendizaje, puede asegurar mayor coherencia en una propuesta de trabajo en clase; además las trayectorias permiten una organización curricular que establece conexiones entre estándares lo cual apoya dicha coherencia.

Estos elementos se pondrán en juego para el diseño de la trayectoria de aprendizaje que corresponde al desarrollo de este trabajo de investigación sobre la derivada. Dicha trayectoria se diseña e implementa teniendo en consideración elementos como los saberes de los estudiantes, la interacción entre el profesor y los aprendices. El análisis de la trayectoria proporciona los elementos necesarios frente a los aspectos centrales del trabajo, tales como saber cuáles son las representaciones semióticas utilizadas, cómo se va desarrollando el discurso en el aula respecto a las preguntas planteadas, entre otros; lo que permite formular las conclusiones finales sobre los aportes al mejoramiento del aprendizaje del objeto estudiado y su contribución al campo de la educación matemática.

3.1.2 Las Conjeturas y el Desarrollo de los Experimentos de Enseñanza

Un experimento de enseñanza tiene varios componentes y etapas de desarrollo. Entre uno de los componentes se destaca la conjetura, la cual es una afirmación sobre los hechos del salón de clase que se basa en evidencias, tanto teóricas como experimentales, que recoge las creencias del equipo de investigación en relación con las formas en que se han de desarrollar los aprendizajes de los estudiantes. En particular, permite relacionarse con cómo las matemáticas deberían, para propósitos educativos, organizarse y conceptualizarse (Confrey, et al. 2000).

Su formulación intenta recoger elementos que apoyen nuevas maneras de aproximarse a un contenido matemático y las formas de llevarlo a clase; esta formulación adopta un carácter experimental y, a diferencia de una hipótesis, no se contempla como una afirmación que ha de ser

probada. Se espera que dicha conjetura guíe el proceso de investigación, lo cual implica que los eventos que ocurren en el mismo pueden hacer cambiar la conjetura y de la misma manera se espera que ciertos cambios en la conjetura impliquen ajustes al desarrollo del proceso. En últimas, en el transcurso de la investigación la conjetura se revisa y se reelabora.

Confrey et al (2000) propone que en la formulación de una conjetura se deben tener en cuenta dos dimensiones; al estilo del ya conocido símil de la moneda, se afirma que una conjetura tiene dos partes diferentes, pero estrechamente ligadas que se conjugan al momento de formularla. Se tienen entonces la dimensión del contenido de la conjetura y la dimensión pedagógica de la conjetura; la primera asociada a qué se debe enseñar y la segunda a cómo se debe hacerlo.

La primera dimensión establece el contenido matemático de la conjetura. No se formula necesariamente en términos de temas sino a partir de una descripción de los elementos que se consideran constituyen el aspecto matemático que se va a estudiar. La segunda, la dimensión pedagógica, al responder la pregunta de cómo enseñar dicho contenido, atiende cuestiones relacionadas con la organización del salón de clase, el tipo de tareas y actividades que se han de proponer o los recursos con los que dicha enseñanza debe realizarse.

Esta conjetura está ligada, como se menciona en su definición, al marco teórico que guía la investigación. Esta relación permite planear las actividades y la metodología que guían el experimento de enseñanza; además, por su vínculo con la experiencia, la conjetura queda situada en un escenario escolar particular. Las dimensiones de la conjetura permiten establecer relaciones entre la teoría y la práctica pedagógica; esto requiere una revisión y análisis cuidadoso de la literatura existente (Confrey, et al. 2000). Todos estos aspectos son una condición fundamental para el proceso de análisis que seguirá a la implementación del experimento de enseñanza.

La conjetura interviene además en la determinación y ajustes a la pregunta de investigación, así como en los métodos de recolección de datos. En este sentido, la conjetura recoge todos los aspectos que se señalaban para la investigación cualitativa.

Para este trabajo, la formulación de la primera conjetura responde a dos decisiones, cuya explicitación es necesaria para sentar una posición en relación con el grado de particularidad que se quiso introducir.

La primera decisión tuvo que ver con la redacción de una expresión general de la conjetura y sus dos versiones particulares para cada una de las dimensiones (de contenido y pedagógica); esta forma de presentar la conjetura no parece necesaria según lo revisado en la parte teórica. Sin embargo, se consideró pertinente que la primera formulación debería aparecer como una ratificación explícita del propósito de incluir consideraciones cognitivas en el diseño del experimento, y que las otras dos formulaciones de la conjetura aportaran a la claridad necesaria para el diseño de las situaciones.

La segunda decisión tuvo que ver con el grado de generalidad de las dimensiones. En la dimensión del contenido se recoge, con la formulación presentada y de manera general, una descripción que abarca el pensamiento variacional, en el campo del cálculo que propone el MEN. Pensar que un experimento de enseñanza, incluso varios, puedan dar cuenta de todos estos elementos sería ingenuo, pero lo que se busca con tal formulación no es comprometerse con tal cantidad de trabajo sino, de nuevo, fijar una posición en relación con precisar que el tipo de cálculo que se trabajará se puede identificar a partir de la propuesta que ha formulado el MEN para la matemática escolar. En la dimensión pedagógica aparecen varios procesos complejos y en cuyo desarrollo intervienen diversos elementos; esto se consideró como una potencialidad en el sentido

de que con base en esta conjetura se pueden formular otras conjeturas, más particulares y asociadas de manera directa con las tres situaciones que vinculan con ella. Se presentan las formulaciones mencionadas:

Conjetura: el planteamiento de una propuesta de enseñanza del cálculo debe considerar aspectos referentes a los procesos cognitivos inmersos en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada.

Dimensión del contenido ¿qué enseñar?: El desarrollo del pensamiento variacional al inicio de la educación básica debe estudiar la representación de gráficas en el plano cartesiano, sus tipos y sus relaciones aritméticas, como algebraicas; además, el uso del discurso para expresar propiedades, formular, defender argumentos y resolver problemas. Los tópicos del cálculo que se han de desarrollar tienen que ver con los conceptos principales y las aplicaciones: en los primeros se tiene en cuenta la derivada de funciones y algunas gráficas. En los segundos, el trazo de gráficas utilizando derivadas.

Dimensión Pedagógica ¿cómo enseñar?: Las actividades cognitivas que direccionan este trabajo son: la conceptualización; la resolución de problemas; el razonamiento, en particular el estudio de aspectos relacionados con el discurso y la argumentación en el aula referente al cálculo y la geometría analítica.

La formulación de esta conjetura procuró atender a las características que se presentaron para las mismas; esta formulación recoge el estado final de la conjetura con la cual se desarrolló el experimento de enseñanza. Con la conjetura propuesta, se puede ahora pensar en las actividades y en la metodología de su implementación en el aula de clase, es decir, sentar las bases para la fase de implementación del experimento de enseñanza.

Ahora bien, en el planteamiento de elementos como la conjetura y la trayectoria, entre otros, permite explicar la manera en que la metodología utilizada no se establece sin ningún sentido, sino con el propósito de que el diseño y la implementación sean justificados a partir de bases teóricas que den cuenta del porqué y para qué se utilizan las actividades en el aula de clase. Además, es importante ir analizando la manera en que los experimentos de enseñanza se van desarrollando en el camino y la forma en que los resultados vayan aportando al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje del objeto en particular, así como al campo de la Educación Matemática. Respecto a dicho campo, se puede inferir que ha entrado en un nuevo periodo; se han producido diversos cambios en la manera en la que el conocimiento matemático se entiende. Los educadores matemáticos buscamos entender la experiencia matemática de nuestros estudiantes, al considerar su actividad matemática en el contexto de la enseñanza como una manifestación de su razonamiento y comprensión. Por ello, un experimento de enseñanza se realiza para conocer de primera mano el razonamiento y el aprendizaje matemático de los estudiantes. Se asume que hay un conocimiento matemático que le es propio, particular, a cada estudiante, el cual es distinto del que tiene el investigador. La tarea del investigador es identificarlo (Cobb, 2000).

Steffe y Thompson (2000) proponen como base de la investigación entender este conocimiento, como una forma de intervenir de manera más significativa en el aprendizaje de los estudiantes. Además, se propone que los fundamentos conceptuales de las matemáticas escolares pueden estar basados en los conocimientos matemáticos que los estudiantes desarrollan, es decir, la organización de los aprendizajes escolares se puede fundamentar en lo que los estudiantes saben y en lo que deben aprender. Así pues, la realización de un experimento de enseñanza juega un

papel central en el alcance de esta propuesta, ya que sus características están en una relación estrecha con estas nuevas miradas sobre el trabajo de clase de matemáticas.

La planeación del experimento se inicia con la determinación de los contenidos o áreas que serán cubiertos con el desarrollo de la intervención en clase; en esta parte es importante tener en cuenta lo que el profesor, y el colegio, tienen planeado para trabajar con los estudiantes. Aquí la conexión con la conjetura se hace explícita en el sentido de que esta ha de influir en la selección, sucesión y duración de lo que se ha de trabajar en clase; de la misma manera, el carácter experimental de la conjetura ha de permitir cierta flexibilidad para que el investigador pueda hacer adecuaciones de acuerdo con las intervenciones de los estudiantes en el transcurso del experimento.

La planeación debe atender también las formas de trabajo en clase; se trata de responder a la pregunta sobre cómo se estructurará la intervención en el salón de clase. Para ello, se recurre a los elementos teóricos que guiaron la formulación de la conjetura, los cuales apoyan la toma de decisiones en relación con cómo organizar a los estudiantes, al tipo de problemas o situaciones que enfrentarán, los materiales que se diseñarán para el trabajo de los estudiantes, etc. Las actividades, que en este trabajo se agrupan en situaciones, determinan los modos de recolección de la información. Los registros o evidencias del trabajo realizado por los estudiantes constituyen en los métodos que se han de privilegiar para esta recolección de información.

En el experimento de enseñanza se cuenta con la participación del profesor y de los estudiantes, que al mismo tiempo es el investigador que conduce dicho experimento. En particular, en este trabajo el profesor organizó tanto la planeación de las clases de los estudiantes como los elementos de la trayectoria, pues comparte intereses investigativos y de formación de sus

estudiantes, en relación con el desarrollo de este trabajo. Luego su rol era el de guiar tanto la planeación de las intervenciones en clase y el desarrollo de la investigación, en una labor compartida con la investigación que se conformó para efectos del desarrollo del experimento de enseñanza.

Gran parte de la información que resulta de la implementación del experimento de enseñanza es analizada por el investigador, en particular en los análisis locales, pues se tomó una muestra de 8 estudiantes de grado undécimo, de un grupo de 37 en total, dado que sus conocimientos sobre las matemáticas y los temas asociados al objeto matemático en cuestión, representaban mayores posibilidades de la obtención de producciones de las cuales se podía extraer información para los respectivos análisis del trabajo. Además, la escogencia de los 8 estudiantes se realiza desde el punto de vista en que presentan mejores competencias en matemáticas respecto a sus compañeros, lo que puede generar una mejor apertura a las discusiones e intervenciones en clase, además permite dar una mirada más completa tanto a los diseños como a las interacciones que ocurren en su implementación, dado que la mayoría no participa de forma constante. Cabe aclarar que, en este grupo de 8 jóvenes, también hay algunos que no tienen un desempeño escolar tan alto como sus compañeros, para dar equilibrio y brindar oportunidades de aprendizaje a todos.

En el caso particular de este trabajo, se propuso que, de los análisis locales, se hicieran actividades teniendo en cuenta las de años anteriores y cómo se pueden mejorar, y que del reporte de los consolidados y del análisis retrospectivo se diera cuenta en el presente informe. De estos detalles se hará mención más adelante en el documento.

3.1.3 El Análisis de los Datos

En un experimento de enseñanza los análisis que se realizan son de dos tipos, y se ajustan a los dos grandes momentos propuestos para dichos experimentos. El primero, análisis local, se realiza sobre la marcha del experimento y se combina con el análisis preliminar de las tareas que se emprendió con la formulación inicial de la conjetura. Se trata sobre todo de someter a análisis los diseños, de tal manera que se puedan hacer los ajustes necesarios para continuar con el experimento. Al mismo tiempo, ir obteniendo información sobre el desempeño de los estudiantes con la cual se pueda estudiar el funcionamiento de la conjetura.

El segundo, análisis retrospectivo, tiene lugar después de la implementación de todas las situaciones que componen el experimento de enseñanza; se basa en toda la información recogida, que seguramente será depurada con las herramientas de análisis que se definen en la metodología, además emplea tanto la información como los resultados de los análisis locales; este último análisis intentará dar cuenta del desarrollo final del experimento, las características que adoptó la trayectoria de aprendizaje puesta en juego y debe dar indicios sobre las posibles implicaciones que, para los diseños en particular y para las trayectorias de aprendizaje en general, tuvo la realización del experimento de enseñanza.

El análisis de las actividades explora asuntos cuantitativos de la actividad de los estudiantes, revisando cuestiones como el desempeño general de la clase frente a las actividades o las características de algunas de sus respuestas; y también explora asuntos cualitativos como describir los métodos empleados por los estudiantes y las posibles inferencias que de ello se pueda hacer en relación con su comprensión de lo propuesto. Como parte final de este análisis se espera construir

una narración coherente del desarrollo de las ideas de los estudiantes y su conexión con la conjetura. El capítulo siguiente de este trabajo tendrá por meta presentar dicha narración.

Se asume entonces que la investigación de diseño es efectivamente un elemento significativo para la investigación educativa, lo que hace a este tipo de estudios un modelo de investigación válido y significativo en general (Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E., 2011) dado que el diseño es regulado por una conjetura explícitamente formulada y bien desarrollada. La adecuación de este trabajo y la calidad del mismo se deben buscar, entonces, en la descripción de la forma en que la conjetura guió el diseño, la práctica en el salón de clase y el análisis de los datos.

3.2 Diseño de Actividades

El diseño se determinó por medio de situaciones que comprenden ciertas actividades, que, se llamarán tareas. La intención es que todas las situaciones estén relacionadas entre sí, por medio de los aspectos curriculares, la resolución de problemas, la utilización de registros de representación y la apertura a las participaciones, explicaciones o argumentos que tengan los estudiantes, esto último, a través de palabras que van dentro de lo que se pide realizar, tales como *porqué*, *justifique*, *cómo* o *explique*. Los *criterios para la selección o elección de los diseños* están vinculados directamente con lo que se propone en cada situación y deben ir encaminados u orientados al análisis local (micronivel) y global, llamado retrospectivo (macronivel), pues al momento de la implementación debe haber una continuidad del desarrollo de los procesos, lo que dará coherencia a las conclusiones del trabajo de investigación. Estos criterios son:

- Los conocimientos que tienen los estudiantes sobre las funciones, la derivada o, en su defecto, la recta tangente a una curva.

- Necesidad de acceder a los registros gráfico y algebraico de los objetos función matemática $f(x)$ y derivada de una función matemática $f'(x)$.
- Necesidad de obtener registros escritos sobre los procesos de resolución de los problemas planteados y registro oral sobre la justificación que dan al proceso de resolución empleado.
- Necesidad de generar procesos (espacios) de diálogo, participación, discusión, argumentación sobre qué registros de representación se están utilizando de acuerdo a la noción de derivada y, además, sobre la forma en que los estudiantes están pensando o desarrollando pensamiento matemático, esto es, el razonamiento matemático que realizan en función de las tareas relacionadas con la resolución de problemas.

En relación con los *instrumentos de recogida de la información*, se realizará una breve orientación sobre las situaciones a aplicar, que trata sobre la gráfica de funciones y su derivada, así como las expresiones algebraicas que representan una función y su derivada. Se realizó la videograbación de las discusiones y socializaciones de las respuestas de los estudiantes, así como la salida al tablero para mostrar las construcciones solicitadas y explicaciones al respecto.

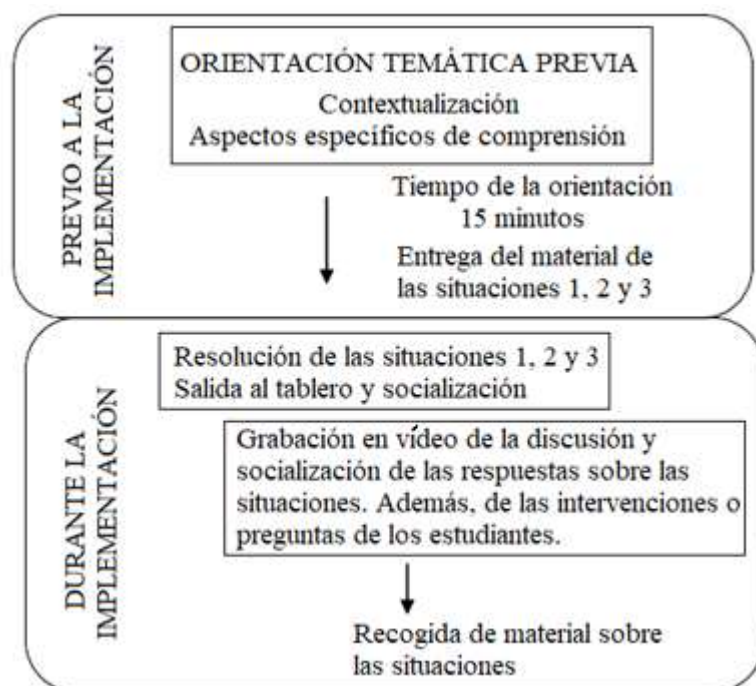


Figura 9. Instrumentos de recogida de la información (Elaboración propia).

La trayectoria de aprendizaje es una intervención planeada sobre un periodo de tiempo en un salón de clase. En su formulación interviene la conjetura, en sus dos dimensiones, ya que la conjetura determina algunas de las condiciones para la planeación de la enseñanza: los temas, métodos y el rol de maestro, por ejemplo. La trayectoria de aprendizaje está constituida como una red ordenada de constructos en la que intervienen: actividades, tareas, herramientas, formas de interacción en clase y métodos de evaluación. Para el caso de este trabajo, se tienen dos momentos, uno corresponde al análisis local de las situaciones y otro al análisis retrospectivo. Respecto al primero, se tiene:

Trayectoria 1: Desarrollo de la noción de derivada y algunas de sus propiedades

- Actividades: Construcción de gráficas de funciones a partir de una situación o contexto de la vida cotidiana, con el uso del lápiz y papel.

- Tareas: de construcción, de identificación.
- Herramientas: lápiz, papel y regla (no es obligatorio).
- Formas de interacción en clase: explicación, socialización, taller, escritura, discusión.
- Métodos de evaluación: análisis y seguimiento al proceso.

Las situaciones del experimento de enseñanza, que son tres, se diseñaron con base en esta trayectoria 1 y se presentan en el siguiente apartado. Cada situación corresponde a un tipo de modelo: de acuerdo con el movimiento, con el uso de recipiente y matemático. La situación 1 es de movimiento, la situación 2 es de recipientes, y la situación 3 corresponde a modelo matemático. Cada situación tiene dos actividades y cada una de ellas comprende algunas preguntas, que llamaremos tareas, que son de construcción e identificación, como se muestra en la siguiente tabla 2, que representa la rejilla de análisis para los datos:

Tabla 2.

Rejilla del tipo de tareas y modelos para cada situación y actividad planteadas

		REJILLA PARA EL ANÁLISIS DE LOS DATOS		
		TIPO DE MODELO		
		Movimiento	Recipiente	Matemático
TAREA	Construcción	S1A1	S2A1	S3A1
	Identificación	S1A2	S2A2	S3A2

Nota: Las notaciones S1, S2 y S3 corresponden a las situaciones 1, 2 y 3 respectivamente; así como A1, A2 y A3 serán las actividades 1, 2 y 3. (Elaboración propia)

Los elementos esenciales para el análisis retrospectivo serán los datos que se tienen de la implementación de la trayectoria; los resultados de este análisis y los de los análisis locales, conformará aquello que va a sustentar las conclusiones. Estos aspectos han de sentar las bases para la determinación de un conjunto de estrategias de trabajo que permitan relacionar los estándares, la propuesta de trabajo del colegio y la perspectiva cognitiva como un elemento organizador de las actividades de clase.

En las trayectorias de aprendizaje se consideran diferentes elementos; no obstante, la cuestión central para este trabajo es la conjetura que orienta el diseño de las situaciones; la conjetura general, y sus dimensiones se presentaron en el apartado 3.1.2. Se presentan ahora las conjeturas particulares de cada una de las situaciones y una descripción de éstas.

La situación 1 comprende dos actividades y surge como una adecuación de la propuesta de León & Calderón (2012), así como la de Duval (1995); la primera, referente al requerimiento epistemológico, sobre cuyas diversas particularidades recae un aspecto relativo a la definición en matemáticas, pues el estudiante deberá construir gráficas de funciones. La segunda, está directamente relacionada con la construcción de representaciones semióticas, en este caso, gráficas que corresponden a una situación dada o de la vida cotidiana. La situación 1 está constituida por dos actividades en las que se plantean preguntas sobre la construcción de gráficas respecto a una situación dada en la que intervienen funciones matemáticas, las cuales están directamente conectadas con la derivada, pues ésta también es una función. Aquí, se espera que el estudiante pueda razonar sobre los cambios que se dan en una función respecto al tiempo en un problema

dado. Las actividades son de una formulación sencilla y, por lo tanto, su desarrollo no ha de implicar mayor impedimento a los estudiantes, pues se cuenta con las explicaciones y fórmulas necesarias, además, se recuerda en que éstas no se vean como algo que hay que memorizar.

Conjetura: el uso de gráficas de funciones en el plano cartesiano, en la resolución de tareas de construcción e identificación, cuando el modelo es de movimiento (donde se plantea una situación de la vida real y el estudiante ha de plasmarla en una representación gráfica en el plano cartesiano), permite que los estudiantes tracen y reconozcan gráficas de funciones donde una variable cambia respecto a la otra (variable dependiente e independiente)

Dimensión pedagógica: las tareas de construcción e identificación, cuando el modelo es de movimiento dada una situación de la vida cotidiana, aportan al desarrollo de actividades cognitivas, por ejemplo, la asociación de diferentes variables en una situación para analizarlas en conjunto.

Dimensión del contenido: la gráfica de una función, en este caso lineal y cuadrática, es una representación semiótica que permite mejorar la comprensión de los cambios que se dan en una situación dada.

La situación 2 consta de dos actividades sobre el uso de recipientes de llenado con un líquido. Aquí, es importante la adecuación del trabajo de resolución de problemas de Alonso y Martínez (2003), sobre resolución de problemas y Duval (1995), acerca de registros de representación semiótica; pues es el estudiante quien debe construir e identificar las gráficas de una situación donde hay recipientes de diferentes formas, los cuales son llenados de un líquido, a razón constante; donde es inherente el uso de representaciones semióticas, en este caso gráficas. Además, la escogencia del objeto “recipiente” le da al trabajo la perspectiva que se pretende analizar que es

la de resolución de problemas, dado que es un objeto físico que se ubica en un contexto de la vida real o cotidiana.

Conjetura: el uso de representaciones gráficas que corresponden a funciones en el plano cartesiano, en la resolución de tareas de construcción e identificación, cuando el modelo es de recipientes llenados de un líquido a razón constante, permite que los estudiantes tracen y reconozcan ciertos cambios de dicho llenado respecto a las variables altura y volumen, que son variables dependiente e independiente, respectivamente, donde este cambio corresponde a la derivada de una función.

Dimensión pedagógica: las tareas de construcción e identificación, cuando el modelo es de recipientes que se están llenando con un líquido, a razón constante, lo que se pide graficar en el plano cartesiano, aporta al desarrollo de actividades cognitivas como el razonamiento, pues el trazo de funciones implica el conocimiento de propiedades geométricas, pero también aritméticas.

Dimensión del contenido: el trazo y la identificación de una gráfica en el plano cartesiano dado un recipiente que está siendo llenado por cierto líquido, permite a los estudiantes reconocer los cambios que se dan con las variables en juego, el volumen respecto a la altura. Esto posibilita reconocer la función lineal y cuadrática, que también son derivadas de funciones matemáticas.

La situación 3 también consiste en dos actividades, con tareas de construcción e identificación, las cuales pueden ser sustentadas por el trabajo de resolución de problemas de Alonso y Martínez (2003), porque en ellas se presenta una situación donde el estudiante puede orientar su resolución respecto al uso de las representaciones geométricas desde el punto de vista analítico, pues se da un enunciado que se soporta bajo una gráfica en el plano cartesiano y ésta debe mostrarse en una expresión analítica. La resolución del registro geométrico al analítico, como

se mostró en Duval (1995) no es fácil ni trivial pero la situación 2 se encuentra planteada para reforzar o apoyar dicha conversión.

Dimensión pedagógica: las tareas de construcción e identificación, cuando el modelo es matemático, aportan al desarrollo de actividades cognitivas como la resolución de problemas, porque el trazo de gráficas, así como el planteamiento de expresiones algebraicas de dichas gráficas implica el manejo de propiedades geométricas y aritméticas que relacionan variables y constantes relativas a las situaciones dadas.

Dimensión del contenido: la construcción e identificación de una expresión analítica dada una gráfica en el plano cartesiano de una situación de contexto real, permite a los estudiantes asociar los cambios que se dan con las variables en juego, la altura respecto al volumen, en relación con otro tipo de representación que impulsa la comprensión del objeto matemático que es la derivada. Esto posibilita reconocer que cada función tiene su derivada y ésta, a la vez es una función con características similares a la función dada.

En los siguientes apartados se presenta el análisis de cada una de las situaciones mostradas anteriormente, las cuales se encuentran ligadas al diseño y consideraciones iniciales que se hicieron en el micronivel. Cada una de estas situaciones se implementó y el análisis local de dicha implementación guió el trabajo consecutivo; con el análisis retrospectivo, macronivel, de esta implementación se propone en el capítulo 4 dichos análisis que guían la continuidad del trabajo.

3.2.1 La Situación 1

Esta situación comprende dos actividades, una de construcción y otra de identificación, son tareas que consisten en la producción de una representación gráfica dado un enunciado que trata

sobre un sujeto que se encuentra realizando cierto movimiento como ir en bicicleta. Este es un proceso que debe mantener una estructura conceptual y el uso de los registros de representación, como dos de los elementos que integran el análisis de contenido (el otro es la fenomenología), donde el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un concepto matemático dentro del contenido de las matemáticas escolares.

En suma, la actividad cognitiva que los estudiantes pueden impulsar es el razonamiento, dado que en esta actividad se plantean dos representaciones cuyo sentido se moviliza en virtud del movimiento, lo que implica identificar los cambios entre las variables, como lo son la distancia y el tiempo.

En cuanto a los elementos que corresponden al sistema geométrico analítico, en el plano cartesiano, corresponden a las propiedades de funciones matemáticas, el dominio y el rango, los ejes coordenados, la ubicación de un punto en el plano cartesiano. Estos elementos, aplicados a partir de las propiedades matemáticas de la geometría analítica, vistas desde el trazo de figuras como la línea recta, permiten establecer las relaciones entre variables, pues de esta manera, el estudiante podrá dar cuenta de si se trata de un movimiento que se puede representar a través de una línea recta o una curva que presenta otro tipo de cambios entre variables.

De aquí, que la noción de derivada que se ha propuesto se ve desde el cambio que se presenta entre dos variables dadas que sufren cambios a la vez, es decir, la derivada sería aquí el análisis o comportamiento de una función a partir de “el cambio del cambio”. El primer cambio es la relación entre las variables velocidad y tiempo, mientras que el segundo cambio se refiere a la relación entre distancia y tiempo.

Por otro lado, desde el punto de vista de la perspectiva curricular, la situación 1 pretende desarrollar o acompañar lo planteado por los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) a partir de su abordaje al *pensamiento variacional*, en el que se encuentran sistemas de representación como enunciados verbales, representaciones tabulares, gráficos cartesianos y fórmulas, cuya importancia es propicia en las situaciones problema, donde confluyan fenómenos de cambio, pues comprometen al estudiante en procesos aritméticos, solución de problemas y pueden apoyar la comprensión del concepto de variable. Además, la situación 1 diseñada, intenta reflejar lo que plantean los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), en la parte del pensamiento variacional, los sistemas algebraicos y analíticos, que lo establecen en los grados décimo y undécimo, a partir de la noción de derivada que, a propósito, fue el apartado 2.3 que se encuentra en el capítulo 2 del presente trabajo. Esta relación con el estándar mencionado es porque las tareas involucran determinar la razón de cambio que, en definitiva, se refiere a la derivada de la función estudiada, es decir, el valor de la pendiente de la tangente a una curva.

Por último, la situación 1 permite reflejar lo que establecen los DBA (MEN, 2015) en el grado undécimo, en su numeral 4, donde se le pide al estudiante que dibuje la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de dicha función. Estos tres aspectos curriculares no pueden independientes de lo que pretende la situación, pues su integración a la misma no se hace de manera aleatoria sino mediante los procesos que va transformando el diseño y los propósitos que se tienen respecto a lo que se pretende que el estudiante estudie, analice, razone, escriba, dialogue y produzca. Por supuesto, que la noción de derivada es muy importante en este sentido, pues permite el acceso al objeto matemático a lo largo de las tareas sin descuidarlo conceptualmente.

Recordemos que la conjetura de esta situación se presentó en el apartado anterior, con sus respectivas dimensiones: pedagógica y del contenido, además de sus elementos primordiales, los cuales orientaron la fase del diseño, que produjo las dos actividades propias de esta situación y que se muestran a continuación.

Situación 1. Actividad 1

Antes de iniciar con esta actividad, el estudiante ha de recibir, por parte del profesor, una orientación sobre cómo se presenta el modelo a estudiar, es decir, una explicación de una situación donde una persona se encuentra corriendo sobre un plano horizontal a cierta velocidad constante, explicando la gráfica en el plano cartesiano del movimiento propuesto. Esto con el fin de que el estudiante se involucre directamente con el tipo de representación que se pretende graficar, pues el planteamiento del movimiento dado, por sí solo, puede llevar al estudiante a pensar en otras representaciones geométricas, como por ejemplo el mismo sujeto de la vida real ubicado en un espacio inadecuado, como el plano cartesiano, reproduciendo un movimiento real adaptado a una representación geométrica que no corresponde.

Es menester aclarar que el docente proporcionará las orientaciones necesarias relativas a los elementos asociados a las representaciones geométricas realizadas, como los ejes cartesianos, la ubicación de puntos, la descripción de las variables de cada eje coordenado, entre otros. Esta parte de la construcción geométrica puede realizarse con o sin reglas o escuadras, pues se puede llevar a cabo únicamente con lápiz y papel, ya que la actividad no pretende fijar la atención en aspectos como la precisión en las propiedades de una figura geométrica, además los elementos en este caso son propios de la geometría analítica y esto permite cierta libertad al dibujar o trazar líneas.

En la marcha de la explicación y de la actividad, los estudiantes podrán establecer preguntas y discutir entre ellos, pues se pretende que el proceso no se dirija en el sentido en que se está enseñando algo nuevo, sino que la construcción e identificación de objetos matemáticos permita también la expresión de ideas que promuevan el discurso o lenguaje desarrollado en el aula. Esta parte se promueve en las demás actividades.



LICEO MIXTO LA MILAGROSA
MATEMÁTICAS - GRADO UNDÉCIMO
Profesor: Mario Raúl Gómez Cerón

SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 1

Una persona viaja en bicicleta sobre un plano horizontal en línea recta a velocidad constante, recorriendo 10 metros cada segundo, como lo muestra la siguiente figura:

1. Construye la gráfica de distancia contra tiempo, en el plano cartesiano, que representa esta situación. Explica la forma en que realizas la construcción de la gráfica.
2. La expresión $x = 10t$, donde x es la distancia, en metros, recorrida por el ciclista y t es el tiempo transcurrido, en segundos; representa la ecuación del movimiento descrito. Construya la gráfica de la derivada de esta ecuación. ¿Cuál es la velocidad del movimiento descrito, esto es, la razón de cambio entre la distancia y el tiempo? Explica tu razonamiento y justifica tus respuestas.

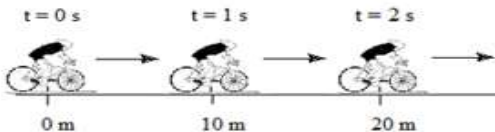


Figura 10. Situación 1, actividad 1

Situación 1. Actividad 2

Lo que se pretende en esta actividad es mantener el contexto de movimiento que se ha planteado, en este caso, un carro que viaja en una montaña rusa, se plantea el Movimiento Rectilíneo Uniforme, así como el Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. En un inicio la velocidad es constante, pero a medida que el carro va avanzando, tiene una serie de subidas y bajadas, unas más inclinadas que otras, lo que muestra el crecimiento y decrecimiento que tiene la velocidad. En cuanto a la relación con los aspectos curriculares, es importante mencionar que las tareas de esta situación 1 tratan sobre el abordaje al pensamiento variacional, Lineamientos

Curriculares (MEN, 1998) porque permite el acceso a la utilización de los sistemas de representación, tales como los gráficos cartesianos, fórmulas y representaciones tabulares, lo que puede ser esencial en la comprensión del concepto de variable. La situación 1, actividad 2 se muestra en la figura 11:

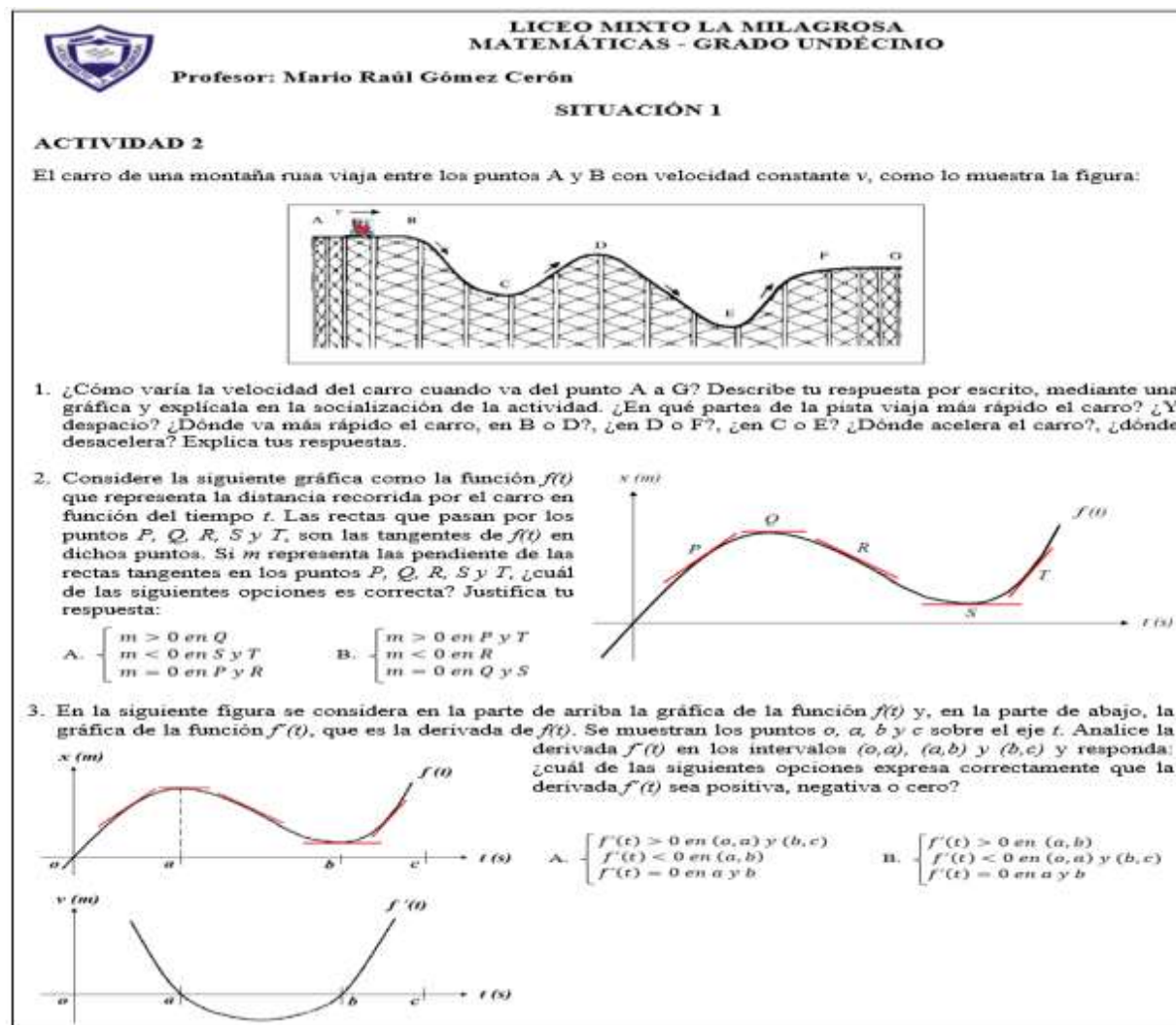


Figura 11. Situación 1, actividad 2.⁹

⁹ En el punto 1 de S1A2 se plantean varias subpreguntas; el docente interesado en el trabajo es libre de aplicarlas todas o algunas si así lo decide. Gráfica y preguntas del punto 1 tomado de Alayo, F. (1990). El lenguaje de funciones y gráficas. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de publicaciones, Universidad del País Vasco, p. 22 y 23.

Se busca que el estudiante identifique la gráfica adecuada para el movimiento dado y que ponga en funcionamiento los procesos de razonamiento y visualización, actividades cognitivas que permiten establecer aquello que la persona está pensando y cómo lo está pensando, a través del uso de representaciones semióticas que le dan significado al objeto matemático estudiado. En esta actividad hay cuatro tareas, las dos primeras consisten en preguntar sobre la gráfica de la distancia contra el tiempo, y las dos últimas la gráfica de la velocidad contra el tiempo; en este caso decimos que el par de las segundas gráficas representan la derivada del par de las primeras.

Un dato importante en S1A1 es que no se consideró tratar con valores numéricos o constantes asignadas a la distancia o velocidad del movimiento, pues se procura que el estudiante pueda acceder a la resolución de problemas independientemente si el enunciado contiene este tipo de datos, además, esta forma utilizada en muchas situaciones en cálculo, proporciona al estudiante el uso de herramientas conceptuales no tan monótonas y repetitivas. Como se ha dicho, la derivada es la recta tangente de una función, en un punto dado de la misma, la cual expresa la forma como está cambiando dicha función respecto a la otra variable en juego que, en este caso, sería el tiempo; en este sentido lo que se pretende es que el estudiante pueda relacionar una gráfica con la otra a través de la derivada, es decir, no se trata de repetir lo que, generalmente, se realiza en una clase de cálculo, donde se menciona que la velocidad es la derivada de la distancia, sino que, el uso del razonamiento y las representaciones semióticas en estudio sean el recurso que permita establecer las relaciones entre las gráficas, permitiendo extraer conclusiones o argumentos al respecto como los cambios que se dan entre las variables del movimiento.

3.2.2 La Situación 2

Esta situación se compone de dos actividades, cuyas tareas están comprenden la construcción e identificación de gráficas en el plano cartesiano. Se continúa realizando las indicaciones u orientaciones respectivas al llenado de un recipiente por medio de agua a razón constante. Los trazos de las gráficas se pueden realizar con o sin el uso de reglas o escuadras, esto porque no se está haciendo hincapié en la precisión de los objetos geométricos estudiados como la línea recta o los ejes coordenados, pues lo importante en dicho trazo es que se identifiquen los elementos a los cuales se les ha apuntado en el trabajo de investigación, como la derivada y las funciones matemáticas que se puedan relacionar con el movimiento o problema estudiado.

Desde la perspectiva curricular, que se encuentra en el capítulo 2 del presente trabajo, la situación 2, así como en la situación 1, abarca la noción de derivada, que es un dato fundamental y que plantean los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006). Además, esta situación pretende desarrollar dos aspectos, el primero el que establece los DBA (MEN, 2015) en el grado undécimo, numeral 3 y que se refiere a interpretar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto A, pues el estudiante ha de estimar, hallar o calcular la derivada de la función dada en dicho punto, lo que se escribe así $f'(a)$, donde a es la coordenada en el eje x del punto dado. El segundo aspecto es el numeral 4 de los DBA (MEN, 2015) en el grado undécimo, en el cual el estudiante debe identificar los intervalos donde la derivada es negativa, positiva o cero.

Estos aspectos de la perspectiva curricular se vinculan desde el punto de vista de, una vez estudiada la noción de derivada, se pueda analizar algunos elementos de la misma, que le permitan al estudiante mejorar la conceptualización de este objeto matemático, así como impulsar su

razonamiento en la construcción de gráficas y fomentar la utilización de los registros de representación que apoyen la comprensión de la derivada.

Situación 2. Actividad 1

En este caso se tiene el llenado de recipientes que se han establecido a partir de figuras geométricas volumétricas como el cilindro, el cono truncado directo e inverso. La escogencia de esta situación es uno de los aspectos que le proporciona los elementos novedosos al presente trabajo de profundización, pues, visto desde el punto de referencia de la resolución de problemas, este tipo de contextos permiten que el estudiante pueda apreciar la situación desde una óptica diferente a la que, por lo usual, se le ha brindado o enseñado en esta área como lo es el cálculo, como por ejemplo, hallar la derivada de una función dada, utilizando la fórmula que corresponde a la definición de la misma, lo que, en el capítulo anterior de este trabajo, se había mencionado como un procedimiento mecánico que no permite establecer aperturas a la discusión, participación y argumentación de diversidad de ideas, concretas y alusivas al tema, entre profesor y estudiantes.

En esta situación es vital el desarrollo de las actividades cognitivas como el razonamiento y la conceptualización, en primer lugar porque las tareas permiten un acercamiento a la relación que existe entre las variables dependiente e independiente, lo que conlleva a la definición de derivada de una función, y en segundo lugar, porque la identificación de las gráficas dados los recipientes, promueve en el estudiante la búsqueda de opciones aplicables al fenómeno dado y, a la vez, brinda nuevos elementos de la relación entre variables mencionada como lo son la correspondencia entre la altura y el volumen del recipiente. Hay que recordar que la conjetura de esta situación se presentó en el apartado 3.2, así como su dimensión pedagógica y dimensión del contenido que se tomaron

como elementos centrales de la trayectoria de aprendizaje, la cual guió el proceso de diseño y se construyó con base en las reflexiones teóricas que se acaban de presentar.



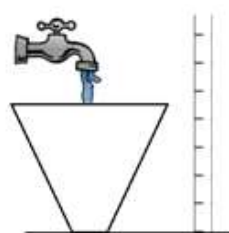
LICEO MIXTO LA MILAGROSA
MATEMÁTICAS - GRADO UNDÉCIMO

Profesor: Mario Raúl Gómez Cerón

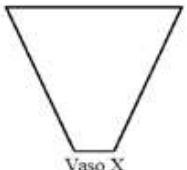
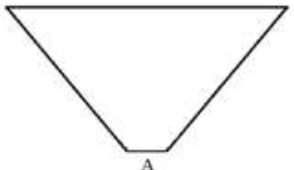
SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 1

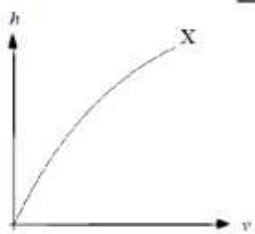
Para calibrar un recipiente, de forma que se pueda utilizar para medir líquidos, es necesario saber de qué manera la altura del líquido depende del volumen que hay en el recipiente. La siguiente gráfica muestra cómo varía la altura del líquido en el recipiente X a medida que el agua cae dentro de él a razón constante.



- Construye, en el mismo diagrama, la gráfica para los recipientes A y B. Explica el procedimiento que utilizaste para tal construcción.


Vaso X A B



- En la siguiente figura se muestra la gráfica $f(v)$, que representa la variación de la altura respecto al volumen del líquido en el vaso X. La recta L, cuya ecuación es $h = v + 1$, es tangente a la función $f(v)$ en el punto $(2, 3)$. Encuentre $f'(2)$ y justifica tu respuesta.

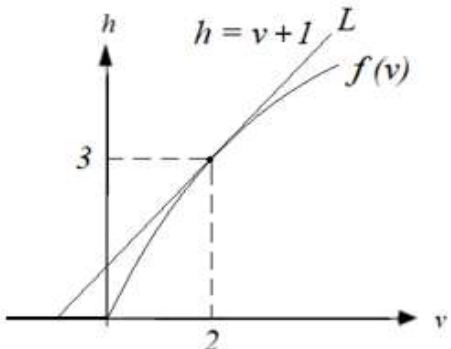


Figura 12. Situación 2, actividad 1.¹⁰

En esta actividad puede presentarse dificultades de tipo cognitivo, respecto a la forma en que se construya la gráfica que se pide, por lo que es muy importante la participación de los estudiantes en relación con el discurso en cuanto a los argumentos se refiere, es decir, que debe generarse oportunidad para debatir o expresar ideas sobre porqué creen que la gráfica debe tomar tal o cual sentido. También es importante otro aspecto del contenido estudiado y se trata de los elementos nuevos que, sin desmeritar lo que digan los estudiantes pueden aportar a la construcción mencionada, como por ejemplo las propiedades de las figuras geométricas en tres dimensiones, los cambios de velocidad que se puedan dar en el llenado, a pesar de la hipótesis inicial, otras variables como el radio y el diámetro, entre otros. Es adecuado, en este punto, tener en cuenta estas particularidades que se puedan dar en el aula de clases, pues por lo planteado por Gascón (1994) y Chevallard (1992), desde sus trabajos sobre resolución de problemas, referenciados en el capítulo 2 del presente trabajo, un aspecto primordial en la forma como se puede enfrentar un problema es mostrando diferentes paradigmas o formas ideales de abordar los problemas, que se presentan en la práctica docente real o en la experiencia que el profesor haya observado sobre el objeto matemático estudiado.

Situación 2. Actividad 2

En esta actividad se continúa con el llenado de recipientes, aquí el estudiante debe identificar cuál de las gráficas, que se brindan como opciones, corresponde al llenado del recipiente dado. El propósito de la tarea de identificación que se presenta aquí corresponde a la forma en que las

¹⁰ El punto 1 de S2A1 está basado en Alayo, F. (1990). El lenguaje de funciones y gráficas. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de publicaciones, Universidad del País Vasco, p. 32.

variables de altura y tiempo están cambiando, lo cual se debe directamente a la forma del recipiente. La discusión que se puede presentar al respecto, conservando las actividades de orden cognitivo y semiótico, implica tener presente los procesos de pensamiento en cuanto a la derivada de una función lineal es una constante, mientras que la de una función cuadrática es una lineal; esta estructura conceptual es la que encierra el problema dado, en relación con la forma del recipiente, pues al cambiar ésta, cambia la forma de la gráfica representada.

La figura 13 muestra la ilustración correspondiente a la actividad 2 de la situación 2, donde se plantea el llenado de un recipiente, para lo que se ha explicado u orientado anteriormente con un recipiente diferente, por ejemplo, cilíndrico. Esto en el sentido en que el desarrollo de la tarea no corresponda a resolver aspectos diferentes o complejos (como las funciones trigonométricas, que implican tratamientos con conceptos que pueden convertirse en procedimientos muy difíciles de resolver para estos casos) en relación a lo que indique la idea principal, la cual podría ser, por ejemplo, trazar una función lineal y analizar cómo cambia o se comporta dicha función.

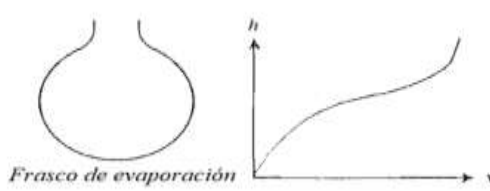


LICEO MIXTO LA MILAGROSA
MATEMÁTICAS - GRADO UNDÉCIMO
Profesor: Mario Raúl Gómez Cerón
SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD 2

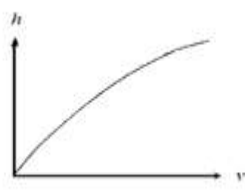
1. En el siguiente recipiente, un frasco de evaporación, cae agua a razón constante, ¿cuál de las siguientes gráficas representa la variación de la altura h respecto al volumen v , de agua que va cayendo en el recipiente? Justifica y explica con claridad tu razonamiento.

A.

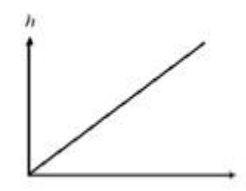


Frasco de evaporación

B.

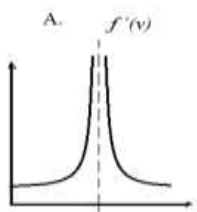


C.

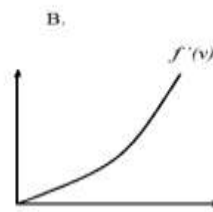


2. La función $f(v)$ representa la altura h respecto del volumen v para el recipiente del punto 1. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa, aproximadamente, la derivada de $f(v)$? Justifica tu respuesta.

A.



B.



C.

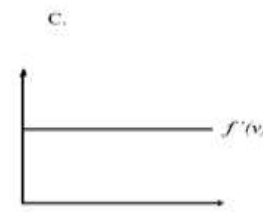


Figura 13. Situación 2, actividad 2.¹¹

Es importante mantener la relación entre las tareas de esta situación (actividades 1 y 2), que se refiere a generar elementos, como la discusión en clase, que permitan al estudiante ver que, en este caso, se puede ver cómo una variable cambia respecto a otra y, a la vez, cómo cada variable cambia con respecto a la otra en el tiempo; a esto podemos llamar “el cambio del cambio”, en virtud de lo cual se genera la noción de derivada, desde el punto de vista intuitivo pero práctico, pues ello depende del contexto en el que se ha planteado la situación. La segunda tarea de esta

¹¹ Las gráficas de la pregunta 1 están basadas en Alayo, F. (1990). El lenguaje de funciones y gráficas. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de publicaciones, Universidad del País Vasco, p. 33 y 34

situación pretende que el estudiante identifique la gráfica de la derivada de la función desarrollada en la tarea 1.

3.2.3 La Situación 3

Los componentes de esta situación son dos actividades, donde las tareas asignadas están conformadas de la construcción e identificación de una expresión algebraica dada una gráfica que corresponde a la derivada de una función. Esta situación es apropiada para establecer un espacio donde se pueda discutir y entablar argumentos relativos a la forma como cambian las variables de la función representada en la gráfica dada. En la primera tarea el estudiante debe construir la gráfica de la función de la situación dada y la de su derivada, mientras que en la segunda tarea se debe identificar la expresión algebraica que representa dicha derivada. En ambos procesos se trata de justificar las respuestas para promover el diálogo, discusión y participación de los estudiantes.

Desde el punto de vista de la perspectiva curricular, se pretende mantener la coherencia del diseño con lo que plantean los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), a partir del abordaje al pensamiento variacional, así como los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) desde la noción de derivada. Esto para llevar una línea transversal de coherencia entre todas las situaciones del diseño. Finalmente, una parte vital de la situación, en cuanto a los aspectos curriculares, corresponde a los DBA (MEN, 2015) numerales 4 y DBA (MEN, 2016) numerales 3 y 5. El primero se refiere a la construcción de las gráficas de la función y de la derivada de una situación dada. El segundo expresa que el estudiante ha de explicar sus respuestas a partir de expresiones algebraicas, tal como lo plantean las evidencias de aprendizaje que se muestran en el numeral 3, DBA (MEN, 2016), los que se pueden observar en el capítulo 2 del presente trabajo. En suma, se registra el numeral 5 de los DBA del año 2016 (que representan el segundo volumen

de la propuesta curricular nacional) porque en la situación diseñada, el estudiante debe hallar la derivada de la función dada empleando métodos gráficos, tal como lo expresa la parte de las evidencias de aprendizaje mostradas en dicho numeral.

A continuación, se presentan las actividades de cada situación.

Situación 3. Actividad 1

La tarea que corresponde a esta situación trata sobre la construcción de la gráfica de la función que represente la situación dada, sobre un recipiente que se llena de agua a razón constante. Además, el estudiante ha de graficar la derivada de la función que ya ha graficado con anticipación, dando continuidad al procedimiento que pretende el diseño de la situación, la cual está directamente relacionada con las dos situaciones anteriores, en el sentido de que el estudiante pueda construir las gráficas de una función dada y también la de su derivada. Un aspecto importante aquí, es que el diseño pretende que el estudiante proceda a las construcciones de las gráficas en forma de continuidad, es decir, se pide, primero la de la función y luego la de la derivada, pero esto no quiere decir que las respuestas puedan tener otro orden, como primero graficar la derivada de la función, pues esto no impide que la utilización de las representaciones semióticas, en el desarrollo de la situación, busque mejorar la comprensión del objeto matemático estudiado, por el contrario, la justificación de las respuestas permite el acceso a la discusión, expresión de ideas o participación de los estudiantes en la resolución de la situación. La siguiente figura muestra la situación 3, actividad 1:



LICEO MIXTO LA MILAGROSA
MATEMÁTICAS - GRADO UNDÉCIMO

Profesor: Mario Raúl Gómez Cerón

SITUACIÓN 3

ACTIVIDAD 1

Un recipiente en forma de cilindro circular recto, de altura h y volumen v , se llena de agua a razón constante, como lo muestra la figura. Construya la gráfica que representa la variación de la altura h respecto del volumen v , la cual llamaremos $f(v)$. Luego, construya la gráfica de la derivada de $f(v)$, es decir, de $f'(v)$. Explica el procedimiento que utilizaste para tal construcción.



Figura 14. Situación 3, actividad 1

Situación 3. Actividad 2

La tarea que corresponde a esta actividad trata sobre la identificación de una función que represente la situación dada, sobre un recipiente que se llena de agua a razón constante. Es una tarea que permite al estudiante indagar sobre la gráfica de la función de la situación dada, además de la gráfica de la derivada de dicha función. Un aspecto importante, en lo que pretende esta tarea, es la relación entre las diferentes representaciones semióticas como una gráfica y una función, lo que además permite al estudiante mejorar su comprensión y razonamiento matemático en cuanto al objeto matemático derivada. La resolución de problemas en un contexto dado se ha desarrollado en cada situación, relacionándolas entre sí y, siempre manteniendo el propósito de ver la derivada no como un tema donde hay que hallar determinados resultados numéricos, utilizando fórmulas mecánicamente, sino mediante la utilización de herramientas y enunciados que conlleven a la utilización del lenguaje natural, algebraico, de los sistemas de representación y de las participaciones de los estudiantes. La siguiente figura 15 muestra la situación 3, actividad 2:



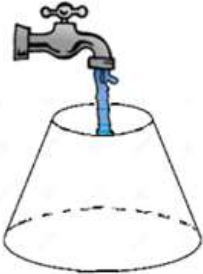
LICEO MIXTO LA MILAGROSA
MATEMÁTICAS - GRADO UNDÉCIMO

Profesor: Mario Raúl Gómez Cerón

SITUACIÓN 3

ACTIVIDAD 2

Un recipiente en forma de cono truncado, como un vaso invertido, de altura h y volumen v , se llena de agua a razón constante como lo muestra la figura.



¿Cuál de las siguientes expresiones representa la ecuación de la derivada $f'(v)$? Justifica tu respuesta:

A. $f'(v) = v$

B. $f'(v) = \sqrt{v}$

C. $f'(v) = v^2$

Figura 15. Situación 3, actividad 2

En esta situación se pretende acercar más al estudiante al uso de expresiones algebraicas y la búsqueda de alternativas que le permitan relacionarlas con los otros sistemas de representación, como lo son las tablas y las gráficas.

3.2.4 Implementación del experimento

Este trabajo se encuentra orientado bajo las concepciones de la metodología de los experimentos de enseñanza, donde se realizaron tres fases: diseño, implementación y análisis. La teoría sobre la cual se sitúa el experimento está basada fundamentalmente en tres propuestas, la de León & Calderón (2012), Duval (1995) y Alonso & Martínez (2003) que, establecen las investigaciones acerca del discurso y la argumentación en el aula, bajo el recurso del requerimiento epistemológico en geometría; las representaciones semióticas y la resolución de problemas,

respectivamente. Esto con el propósito de formular una alternativa de trabajo en clase de cálculo basada en criterios semióticos, cognitivos y no solo matemáticos.

En la primera parte del trabajo se hizo la consolidación teórica del mismo, la cual incluye la definición de los elementos de las propuestas teóricas mencionadas anteriormente y que fueron empleadas en la formulación de los diseños de las actividades; junto con estos elementos se hizo una revisión curricular que permitió identificar las trayectorias de aprendizaje que se seguirán en el experimento de clase. Con estos aspectos se realizó el diseño de la primera situación. Se avanzó en los primeros elementos de análisis de las intervenciones en clase.

Los diseños buscaban fomentar en los estudiantes la utilización de sus capacidades de construcción, identificación y razonamiento; en particular, que a partir de los registros de representación producidos pudieran acceder con mayor comprensión al objeto matemático tratado y, por qué no, a dialogar sobre sus propiedades y características. Además, es preciso mencionar que la identificación de elementos sobre la función y su derivada, buscar reconocer lo que mencionan los aspectos curriculares, términos como recta tangente, incrementos, entre otros. Las tareas sobre las explicaciones o argumentos buscan que se puedan dar los espacios necesarios para la reflexión de ideas, aportes y participación de los estudiantes, lo que permite que apoye el proceso de la resolución de problemas que se vaya desarrollando en cada situación.

Para esto se eligió el trabajo referente al llenado de recipientes, en el que interviene la relación entre variables como la altura y el volumen, pues su análisis promueve hablar del cambio que hay al momento de dicho llenado, bien sea para una variable o para otra, pero manteniendo una relación entre las dos, una como variable dependiente y otra como independiente. Estas

relaciones entre variables son fundamentales en el desarrollo del pensamiento variacional y en la aprehensión de conceptos matemáticos que aluden a la derivada en cálculo.

Se continua con la aplicación, análisis y rediseño de las situaciones de clase; la implementación se realiza con los estudiantes de grado undécimo del Liceo Mixto La Milagrosa; los análisis se hacen de acuerdo al diseño y rediseño de situaciones, lo que estuvo apoyado de las sesiones del trabajo de grado; las retroalimentaciones, orientaciones, correcciones e indicaciones de los profesores que aporta esta materia de la maestría, sirven de insumo para la definición de las trayectorias de aprendizaje antes formuladas y para los ajustes consecuentes en las situaciones a implementar. Además, el análisis local está fundamentado por el diseño y rediseño de las situaciones, así como por los aspectos mencionados anteriormente, lo que ocupa un lugar relevante para este trabajo pues sigue las bases de los experimentos de enseñanza.

De la implementación se guardan registros en vídeos, el material sobre las situaciones, los registros escritos sobre las producciones de los estudiantes, sus diálogos, salidas al tablero y explicaciones. Fue necesario realizar breves orientaciones sobre la noción de derivada, sobre todo para afianzar los conocimientos de los estudiantes y ponerlos en relación con la recta tangente, objeto matemático que tuvieron muy en cuenta los estudiantes a la hora de la realización de las situaciones, lo que le dio mayor fuerza a la fase de implementación.

Teniendo como base fundamental la metodología de los experimentos de enseñanza, la implementación de cada una de las actividades iba dando lugar a ajustes necesarios que podían llevarse a cabo en futuras intervenciones, como por ejemplo, dar lugar a más propiedades de la derivada o de las mismas funciones matemáticas, pues es uno de los puntos donde los estudiantes presentan mayores dificultades a la hora del análisis de este tipo de objetos matemáticos o de la

resolución de problemas al respecto. De igual manera, esto no era motivo para detener el proceso ni poner en evidencia en clase, que se deban hacer tales ajustes, sino como un aspecto que el profesor autor de este trabajo tuvo presente de forma interna en para fines de la enseñanza del objeto estudiado o futuras investigaciones; por tanto, siempre se procedió de una situación a otra.

Una vez realizadas las intervenciones en clase, así como sus análisis locales, se inicia al análisis retrospectivo que se aprecia en la metodología; es decir, se hace una revisión global de los diseños, la implementación, las participaciones, explicaciones y resultados de los análisis locales con el fin de identificar variables que permitan hacer una análisis de las condiciones que generaron efectos significativos en el diseño e implementación en relación con la caracterización de los registros de representación semiótica y cognitiva realizados por los estudiantes. Estos aspectos del análisis retrospectivo son también base fundamental para mantener la relación de las tareas con la perspectiva curricular según el MEN, en lo referente al pensamiento variacional.

Capítulo 4. Análisis de Resultados y Conclusiones

Una vez se inició el experimento, con base en la información recogida se procedía a revisar y reformular la conjetura con el fin de apoyar la revisión del diseño de las situaciones, se consideró siempre la planificación y temporalización de las actividades que previamente se habían propuesto. Se tomaron decisiones de diferentes tipos que afectaron las intervenciones: los objetivos de la investigación, las formas de recoger los datos, los conocimientos de los estudiantes y ajustes al diseño de las actividades.

Respecto a los objetivos, la propuesta inicial contemplaba dos objetivos específicos, el primero se refiere a reconocer los elementos semióticos y cognitivos presentes en tareas que aborden los estudiantes, mientras que el segundo trata sobre identificar las dificultades que presentan los estudiantes de grado undécimo al interpretar un enunciado de problema en relación con la noción de derivada. Pero se fue dando la necesidad de ajustarlos de acuerdo con los requerimientos que implicaba analizar las características de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes, según el objetivo general, pues éste reclamaba, además, describir las dificultades que presentan estudiantes y determinar las maneras en que los estudiantes coordinan representaciones, lo cual le permite al trabajo seguir un camino ordenado de objetivos de acuerdo al seguimiento y análisis de los diseños.

Dicho lo anterior, los otros dos objetivos que complementan un sistema adecuado del análisis de las características de los procesos semióticos y cognitivos se formularon así “Describir las

dificultades que presentan estudiantes de grado undécimo al trazar la gráfica de la derivada de una función a partir de la gráfica de dicha función” y “Determinar las maneras en que los estudiantes de grado undécimo coordinan representaciones semióticas y cognitivas para resolver problemas en relación con la noción de derivada”. De esta manera, el diseño, implementación y análisis, cobran un orden significativo de los procesos a seguir en el trabajo, en particular, lo que el estudiante realiza y produce en clase.

Desde un principio, en cuanto a las actividades se refiere, el interés central era las producciones de los estudiantes, su participación y discusión en clase, más el discurso o las orientaciones del docente se iban ajustando de acuerdo al cómo los estudiantes iban a dialogar entre todos o explicar a los demás lo que se iba preguntando, pues no se trataba de resolver un taller sino de explicar y justificar lo que iban resolviendo; por tanto, el actor principal es el estudiante con sus producciones y explicaciones, dado que esto permite establecer el análisis necesario para caracterizar los procesos semióticos y cognitivos de los mismos. Así, dichas producciones serían las que dotan de información a las características del diseño. Es por esto que, un trabajo donde la temática central trate sobre las actuaciones del profesor puede realizarse en el marco de otro trabajo.

Teniendo en cuenta que una de las dificultades que se presentan en los estudiantes frente a la enseñanza de las matemáticas es la resolución de problemas, que llama la atención en fijar la mirada en los procesos de enseñanza y aprendizaje en esta temática y que ello puede impulsar en los estudiantes potencialidades y dotar de significado los fenómenos de la vida cotidiana; tal como se explicó en el apartado 2.2 del presente trabajo, se puede inferir que la escogencia de enunciados y problemas que contenían temáticas de movimiento relacionadas tanto con las ciencias (física)

como con aspectos cotidianos, como una persona realizando un recorrido con su bicicleta, generaba en el diseño, un contexto de preguntas adecuadas para tratar al objeto matemático y, así, abordarlo con enunciados no tan complejos de resolver, lo que puede motivar al estudiante a generar confianza en la continuidad del desarrollo de las tareas.

Por esto, justamente se pensó que los enunciados tuvieran contextos de movimiento como el rectilíneo uniforme, dejando de lado la forma tradicional como se ha abordado la derivada, es decir, en proporcionar preguntas donde se pide al estudiante aplicar determinada fórmula algebraica para realizar los cálculos solicitados y, así, llegar a un valor que, muchas veces, se hace de forma mecánica, en lo que la mayoría no sabe cómo aplicar la fórmula dada, ni porqué se utiliza. Para tal efecto, los enunciados con movimiento brindan mayor posibilidad de pensar sobre la variación o los cambios que se puedan observar entre una variable y otra.

Un elemento importante que dirigía u orientaba las actividades, respecto a lo que se estableció en la conjetura del experimento, que se puede encontrar en el apartado 3.1.2 del presente trabajo, estaba referido a los procesos cognitivos que se pretendía que los estudiantes realizaran, esto es, la conceptualización, la resolución de problemas, el razonamiento y la argumentación, procesos que le daban forma a la dimensión pedagógica de dicha conjetura. De esta manera, en estos procesos, se propuso que los estudiantes realizaran actividades de construcción e identificación, pues ellas permitieron un vínculo entre la resolución de las actividades y la dirección que estaba tomando el estudio del objeto matemático derivada.

En un primer acercamiento a la propuesta de los diseños, las preguntas establecieron mucho énfasis en la función de una situación dada, expresando de manera poco notoria la participación de la derivada. Esto se logró ajustar de acuerdo a lo que propone la perspectiva curricular, pues en

ella se presenta los procesos de aprendizaje que debe desarrollar o alcanzar el estudiante, en función con sus competencias en el estudio. Es decir, no se lograba ver, de forma directa, que las tareas condujeran al estudiante a hallar, calcular o resolver un problema o situación, en donde la derivada sea el protagonista del proceso. Las asesorías en el trabajo de grado de la Maestría brindaron las herramientas que se necesitaban para realizar este tipo de ajustes, lo que era coordinado con lo que propone la conjetura que se refiere a que *el planteamiento de una propuesta de enseñanza del cálculo debe considerar aspectos referentes a los procesos cognitivos inmersos en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada*. Así, la transformación que se iba dando en los diseños no solo era concerniente a realizar procesos cognitivos, sino que el objeto matemático a tratar, fuera el aspecto clave y explícito en la presentación de los enunciados y preguntas planteadas.

En las preguntas diseñadas, se tuvo presente, por tanto, que no podrían prescindir de aspectos novedosos en el sentido de proponer actividades no tan comunes en este tipo de trabajos de investigación y sin descuidar sus propósitos centrales. Es por esto, que el tratamiento con los recipientes se percibe como un aspecto diferente que puede permitir el acceso al objeto matemático forma tal que, a partir de lo que propone la metodología de los experimentos de enseñanza, los referentes teóricos y la perspectiva curricular, pueden brindar una justificación adecuada para que las situaciones y actividades puedan ser implementadas de la manera más correcta posible.

En particular, se muestra cómo un análisis de los datos obtenidos, en relación con los objetivos de este trabajo, permite avanzar en la consolidación de determinadas características que han de tenerse en cuenta para el diseño de situaciones que favorezcan el desarrollo de procesos semióticos y cognitivos en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada.

También, las recomendaciones que surgen de la implementación del experimento permiten inferir algunas posibilidades y potencialidades de la trayectoria de aprendizaje como estrategia para organizar el trabajo en clase, de tal manera que se puedan contemplar las exigencias curriculares llevadas a cabo en nuestro país inherentes al objeto matemático derivada y los desarrollos investigativos que para la enseñanza del cálculo y el desarrollo del pensamiento variacional se presentaron en este proyecto. Al final de este capítulo se establece una breve explicación de estas recomendaciones y de las maneras de relacionarlas con la propuesta de trabajo en la institución educativa donde se aplicó este trabajo de investigación.

4.1 Resultados del Análisis Local

En el marco del experimento de enseñanza, aspecto fundamental de este trabajo, se diseñaron tres situaciones, cada una con determinadas actividades que la componen. En cada situación se procuró que apareciera una tarea de construcción y otra de identificación. Se implementaron en el grado undécimo del Liceo Mixto La Milagrosa en el marco de las actividades que se relacionan con el desarrollo de los contenidos respecto al área de cálculo.

La metodología de este proyecto asumió que los análisis locales de dichas implementaciones se llevaran a cabo a partir de la realización de los diseños, las propuestas iniciales, los posibles cambios de preguntas, los ajustes necesarios y el número de estudiantes. Se propuso, entonces, que el análisis retrospectivo del experimento, que contempla dichos resultados y producciones de los estudiantes, se llevara a cabo en este trabajo de maestría.

Se presenta, en esta primera parte del capítulo, una síntesis de los resultados de los análisis locales, sobre todo aquello que se encuentra en relación con los propósitos de este trabajo. Se han organizado en dos grupos, el primero, lo referido a las actividades realizadas en relación con las

actividades de construcción e identificación y, el segundo, lo concerniente a las actividades de conceptualización, razonamiento, resolución de problemas y argumentación.

Es menester aclarar que la presentación que se hace no pretende individualizar el desarrollo de las actividades, pues en las preguntas de construcción aparecen reflexiones inherentes a la forma como los estudiantes trazan gráficas y elaboran explicaciones al respecto; en las de resolución de problemas aparecen las de identificación, por ejemplo, cuando los estudiantes eligen una opción de tres, pero ya con un mejor conocimiento del contexto dado. Es decir, los apartados se establecen como un orden del análisis, pero se entiende que estas operaciones aparecen simultáneamente en las actuaciones de los estudiantes, aunque las actividades intentan acentuar en una u otra de ellas.

4.1.1 Construcción e Identificación

Se ubicaron las actividades de construcción e identificación para que los estudiantes tuvieran mayores posibilidades de expresar o razonar sobre las preguntas. De acuerdo con los planteamientos curriculares, tiene más sentido y mayores posibilidades de generar mejoramiento en el aprendizaje del estudiante, si en primera instancia, se aborda el problema produciendo la gráfica de una situación dada. Además, de acuerdo con los planteamientos de los registros de representación (Duval, 1999), estos promueven una mejor enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el análisis de actividades cognitivas. En primera instancia, se logró que los estudiantes tuvieran una cierta motivación de resolver las actividades que promueven la elaboración de gráficas, lo que, acompañado con preguntas sobre justificar los procedimientos, generaba la necesidad de explicar lo trabajado.

La actividad de construir presentó en los estudiantes la necesidad de tener un marco de referencia para poder acceder a aquello que se preguntaba, es decir, tener en cuenta elementos del

gráfico cartesiano como los ejes (que ya no tenían las variables típicas x, y), los puntos, las coordenadas y las escalas en cada eje con un número respectivo. En el caso de la siguiente gráfica, de la pregunta 1, actividad 1, situación 1, hay una necesidad de saber que cada número escrito en el eje de la distancia o del tiempo tenga su unidad respectiva. De otro lado, fue adecuado indicar preguntas sobre explicar cómo realizó la gráfica, lo que permite indagar sobre cuáles pueden ser los errores del estudiante al elaborar la representación gráfica de la función dada, además de sus aciertos.

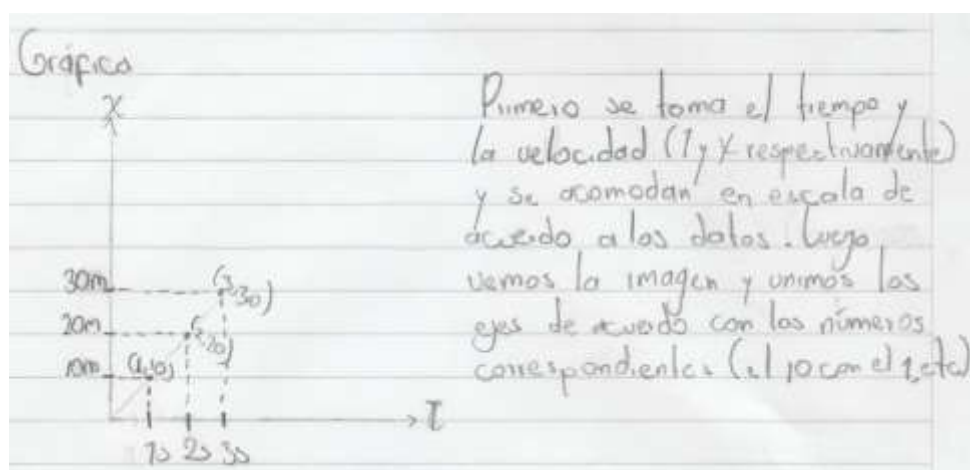


Figura 16. Construcción de la gráfica de una función

Uno de los aspectos que definen la importancia de la utilización de sistemas de representación radica en que ellos organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos; además, los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para cada concepto. De aquí, la elección de designar en las tareas la construcción de la gráfica de una función matemática y la gráfica de su derivada, pues el propósito de llegar a la gráfica que se pide parece ser el único en la actividad, pero hay elementos correspondientes a los saberes que ya han tenido los estudiantes, como por ejemplo, la distinción entre una función y otra

desde el punto de vista geométrico, y que se pueden afianzar paralelamente en el desarrollo de las preguntas, aportando y preparando el camino para obtener respuestas o soluciones donde haya el mejor aprendizaje posible.

En relación con lo anterior, Hitt (1998), afirma que para distinguir un objeto matemático de su representación se hace necesario que el estudiante represente dicho objeto, al menos, de dos maneras diferentes. Las tareas sobre construcción presentes en los diseños no impiden que el estudiante pueda representar la función matemática únicamente de manera gráfica o geométrica, pues el recurso a usar las tablas de datos permite que el objeto matemático pueda analizarse desde varias representaciones, como lo muestra la figura 17:

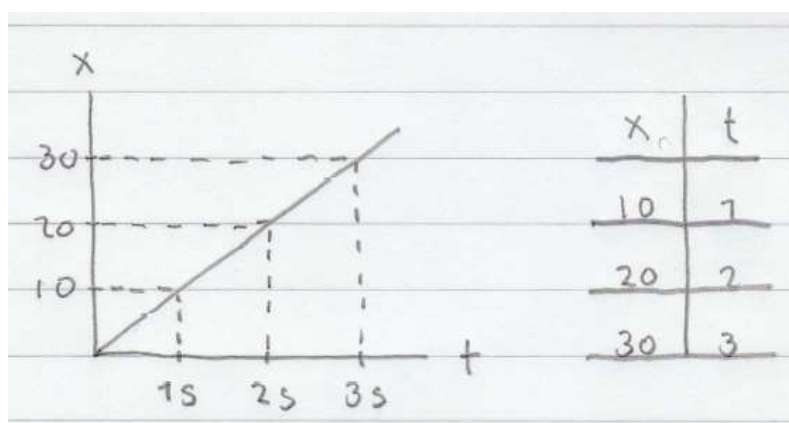


Figura 17. Dos maneras de representar el objeto matemático función

En este caso el estudiante pudo incluir en su explicación otra forma de representar la función correspondiente a la tarea. De esta manera, el diseño de las actividades no se ha dado en forma improvisada, es decir, las preguntas de construcción no son asignadas por carencia de fundamento, sino también para preparar al estudiante en cuanto a las preguntas que vienen en camino, que son las de identificación y que, por lo general, contienen gráficas de funciones y derivadas de las

situaciones dadas. Estas tareas de identificación tienen como propósito que el estudiante reconozca algunos elementos primordiales de la derivada de una función como, por ejemplo, la recta tangente en un punto de la curva dada, que también se puede entender como la razón de cambio de una función en un punto determinado.

Las actividades de identificación están muy relacionadas con la forma de evaluación que los estudiantes han tenido en su propio contexto escolar como, por ejemplo, las pruebas saber que, en el caso de la Institución Educativa donde se aplicó los diseños, se desarrolla desde la educación primaria, con el fin de que los estudiantes conozcan este tipo de pruebas y se familiaricen con el tipo de preguntas que hay en ellas. Las actividades de identificación contienen un enunciado, que viene apoyado por un gráfico de una función o curva en el plano cartesiano, lo que exige al estudiante plantear diferentes alternativas de solución para poder justificar la respuesta, pero en el sentido de partir de la información dada para llegar a la correcta, pasando por una serie de operaciones y relaciones entre variables que hacen parte de los procesos cognitivos como la resolución de problemas y el razonamiento.

La situación 1 permitió al estudiante reconocer el concepto de función, los tipos de función y la derivada de una función. Aquí, la actividad de formación de representaciones semióticas permitió a los estudiantes respetar las reglas del sistema semiótico establecido. En las otras dos situaciones se procuró mantener un elemento muy importante en la derivada que es la definición, porque las tareas promovieron el enfoque de la recta tangente a una curva, tal como lo orienta el enfoque curricular, como por ejemplo en los DBA (MEN, 2016), donde se expresa graficar la derivada de una función identificando los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En el planteamiento inicial de la situación 1 se pretendía que el estudiante analice los cambios que se dan en un movimiento determinado, pero solamente a partir de la función que el estudiante pensaba, pero sin tener en cuenta cómo cambiaba la velocidad, es decir, únicamente se estaba planteando los cambios que se daban en la distancia recorrida. Por lo que, con los ajustes realizados, se vio la necesidad de que el estudiante pasara por los procesos de transformación de representaciones semióticas para llegar a la gráfica de la derivada de la función que correspondía al movimiento dado. En esta actividad de transformación, se podía ver la manera en que se fuera dando la relación entre la función y su derivada, desde el punto de vista conceptual y, a la vez, relacionarlo con los efectos que este pueda tener con una situación de contexto como el Movimiento Rectilíneo Uniforme.

La actividad 2 de la situación 1 tuvo varios ajustes desde el punto de vista conceptual y gráfico, pues en un inicio se había pensado en que el movimiento del ciclista se fuera dando en subidas y bajadas dejando de lado el cambio en la velocidad, lo que le iba dar mayor fuerza si louviésemos presente en la graficación de la derivada de una función. Por esto, el ajuste al movimiento de un carro en una montaña rusa brindó la importancia de motivar al estudiante analizar sobre dichas subidas y bajadas, además de los momentos donde la velocidad era constante. Esto, porque más adelante, dichos cambios en la velocidad, le iban a dar al momento de resolución de la tarea, el suficiente espacio para acceder a la derivada de la función vista desde la tangente de una curva en un punto en el plano cartesiano.

Las situaciones 2 y 3 se propusieron inicialmente a partir del llenado de recipientes, pero sin mencionar de forma literal la derivada de una función, pues las preguntas exigían dar respuestas sobre los cambios que se daban entre las dos variables en juego, que son la altura y el volumen del

recipiente. Se vio la necesidad de establecer los ajustes requeridos para que el estudiante indague sobre la derivada y, así, poder desarrollar lo que los planteamientos curriculares han expresado sobre el aprendizaje de la derivada, a través de, por ejemplo, lo que mencionan los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), relativo a la noción de derivada y pendiente de la tangente a una curva.

La utilización de los registros de representación en las tareas, la implementación de contextos que difieran del directamente matemático, como el del movimiento en física y el llenado de recipientes de diferente tipo; se constituyen en recursos que ofrecen posibilidades diferentes de las tradicionalmente utilizadas en contextos de aula en matemáticas donde las preguntas oscilan entre calcular una derivada utilizando una fórmula dada que, casi siempre para los estudiantes carece de significado. En cambio, una situación donde el razonamiento del estudiante se presta en función de aquello que se le está exigiendo, esto es en plantear diversas opciones de solución a una pregunta dada, se convierte en una opción de actividades que pueden tenerse en cuenta para el aprendizaje de la derivada en la Institución Educativa.

4.1.2 Conceptualización, Razonamiento, Resolución de Problemas y Argumentación

Al realizar el análisis de la implementación de las situaciones diseñadas se puede inferir que las tareas tienen la característica de permitir al estudiante desplegar su actividad matemática a través del desarrollo explícito de un razonamiento entre la exploración y la sistematización. Esto implica que las preguntas contienen, como parte de los elementos que las constituyen, dispositivos que permiten a los estudiantes desarrollar, de manera autónoma, procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, su validación, y si es del caso, su reformulación.

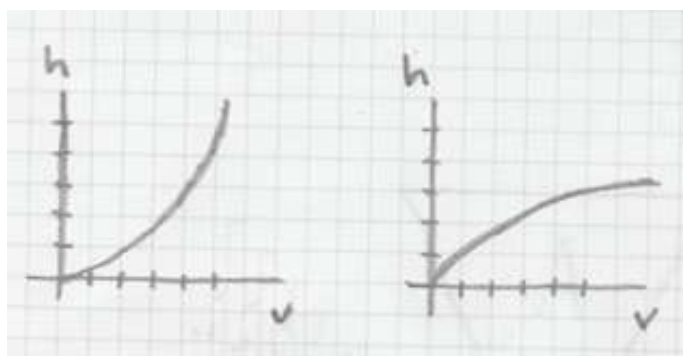


Figura 18. Formulación de hipótesis relativa a una gráfica

La gráfica de la izquierda está trazada por el estudiante, y es la que el problema entregó. El estudiante traza la gráfica de la derecha para preguntar qué sucedería si la gráfica de la altura respecto al volumen fuera la de la derecha y no la de la izquierda. Es una pregunta que permite la participación de los estudiantes para presentar sus puntos de vista en la reorientación del significado de la gráfica inicial respecto a lo que pretende la tarea que, en este caso, es construir la gráfica de la función de la altura respecto al volumen en el llenado de dos recipientes similares pero que varían en volumen.

Las explicaciones de los estudiantes en las preguntas sobre identificación presentan mayores dificultades que las de construcción, debido a la conceptualización respecto a la derivada que, como se mencionó en el apartado 2.2 de resolución de problemas del presente trabajo, es un objeto matemático que ha presentado muchas dificultades en el aprendizaje del cálculo, por su carácter relacionado con el concepto de límite de una función. No obstante, es de notar que, a pesar de que los estudiantes presentan estas dificultades, la mayoría de las veces intentan establecer alternativas de solución, dado que en esta Institución Educativa presentan constantes actividades donde todas las preguntas deben ser justificadas y ello representa un trabajo usual en el quehacer escolar diario.

Las justificaciones de los estudiantes presentan mayores dificultades para llevar a cabo el discurso oral en comparación con el escrito, pueden escribir los procedimientos para explicar la construcción de una gráfica en el plano cartesiano, pero no tanto en cuanto a la parte verbal, lo que refleja una falta de utilización de términos, conceptos, símbolos o palabras que den cuenta del significado matemático que representa lo que han dibujado o construido geométricamente. Estos fueron momentos claves para aprovechar la clase y, así, brindar instantes en que los estudiantes mostraron algunos argumentos, tratando de explicar la forma en que resolvieron las construcciones de las gráficas. La importancia del desarrollo de la argumentación radica en que se fomente aspectos como el diálogo y la reflexión.

La implementación de los diseños conserva el propósito de mantener la necesidad de contribuir a la formación de pensamiento argumentativo, donde se promueva la participación del estudiante generando espacios favorables para el razonamiento matemático donde se pueda interactuar sin límite alguno. Aunque esta no es una labor fácil de llevar a cabo, el diseño de las tareas, donde se pedía explicar y justificar las respuestas, tenía como propósito impulsar este aspecto. Al respecto, algunos estudiantes aprovecharon las oportunidades que tuvieron para expresar sus puntos de vista sobre el movimiento de las situaciones y en ciertos momentos se sintieron sin temor a dialogar entre ellos con el fin de discutir sus propias formas de pensar y mejorar sus respuestas. Un punto a favor para lograr estas interacciones fue la disposición de los estudiantes para acceder a la implementación, pues el horario fue en momentos extraescolares, así como también la cantidad reducida de estudiantes, lo que permitió mayor confianza para expresar ideas, hacer preguntas e interactuar sobre cómo realizaron los procedimientos respectivos. En relación con lo anterior, un elemento importante en el aprendizaje es el trabajo colaborativo, pues

puede generar explicaciones entre estudiantes lo que impulsa la comprensión del objeto de estudio. En la situación 1, actividad 2, pregunta 1, se da una interacción entre dos estudiantes (F y A), donde F se dirige a A expresando sus propias ideas sobre cómo graficar:

F: yo voy a hacer la gráfica con las mismas líneas de acá (refiriéndose a la gráfica que hay que

construir)

A: en la gráfica no

F: ¿por qué?

A: porque, por ejemplo, en las bajadas la gráfica no es así (representando con su mano que va

hacia abajo)

F: pero si va bajando...

A: no, porque la velocidad aumenta

F: por eso, si la velocidad aumenta, pues va bajando

A: pero en la gráfica tenés que hacerla hacia arriba

E: ¡ah, sí!

A: debes colocar los puntos tal cual están ahí (señalando la figura de la montaña rusa, además

expresa cómo deben ir las líneas que representan los intervalos)

Es de notar la seguridad que muestra el estudiante A en sus reacciones, mientras que F desde un inicio expresa una forma de comprender el enunciado que se ha brindado en la tarea, pues una vez los estudiantes comienzan a dar sus ideas o posturas frente a la forma de entender el problema, F parece lograr el convencimiento de lo que piensa frente a cómo percibe los cambios que hay entre las variables. Esta es una forma muy cercana a cómo se debe comprender el problema

establecido, que muestra una representación icónica de la situación, donde se mueve un carro en una montaña rusa, el cual tiene subidas y bajadas, diferentes entre sí.

El análisis del movimiento, desde el punto de vista espacio-temporal, es muy diferente a como se ve desde lo icónico, pues las bajadas y subidas no son las mismas en la gráfica de la distancia contra el tiempo. Si el carro baja, su velocidad aumenta, lo que significa que, la curva que representa la función de la distancia recorrida, es en forma creciente. Al final, la interacción permite brindar las posturas argumentativas suficientes para generar maneras diferentes de ver el problema, acercarse más a lo que pretende la tarea y resolverla con el ánimo de encontrar propiedades que se presentan en el comportamiento de una función, cuando está siendo representada geométricamente.

En el lenguaje utilizado por los estudiantes predominan términos que son de uso común, mientras que poco se hace uso del lenguaje especializado en este contexto del cálculo. Desde el punto de vista de la semántica, la terminología utilizada por los estudiantes procura dar una denominación a los términos utilizados en el discurso en geometría y cálculo. Además, se presenta la falta de la construcción de explicaciones y justificaciones donde haya una terminología que transite en lo conceptual y en lo geométrico paralelamente y que aluden al cómo han realizado las gráficas de las tareas que hay que abordar. No obstante, esto no fue un impedimento para poder llegar a la construcción de las gráficas pedidas, como se aprecia en la figura 16 presentada anteriormente, donde la estudiante elaboró una respuesta que parece reflejar una conceptualización acorde a lo que se está preguntando, pero que refleja, a la vez, las hipótesis de tipo analítico que le permiten acceder a la representación semiótica, como por ejemplo, el comportamiento de la variable de la posición respecto al tiempo, lo cual hace falta justamente en la explicación que

escribe en la parte derecha de la figura. Así, es de recordar que la representación semiótica utilizada tiene algunos elementos del concepto que se está movilizándolo, y no solo los que corresponden al pensamiento geométrico, sino los referidos al pensamiento variacional que, en este caso, habla tanto de la función principal como de su derivada. Mantener un equilibrio conceptual entre estas dos partes, genera una mejor construcción de la representación semiótica que aporte a la comprensión del objeto matemático central, lo que en general, es su función principal.

Los resultados anteriores muestran la necesidad de generar temáticas y actividades que promuevan tanto los procesos de conceptualización como los de la resolución de problemas, así como actividades que impulsen el razonamiento y la argumentación en el aula; lo que no tiene como principio el uso de actividades improvisadas, monótonas o de realización mecánica, pues lo que llama la atención aquí, alude fundamentalmente a la parte discursiva, donde predomine la explicación o justificación de aquello que se realiza, sin perder de vista el objeto matemático movilizado y sus propiedades.

En este sentido, es de notar que algo que utilizan muy poco los estudiantes son las definiciones, las propiedades y las características de los objetos matemáticos que tratan o de los cuales hablan. Un elemento que casi no utilizaron, por ejemplo, fue el de la definición. Este representa un referente epistemológico vital en el discurso argumentativo, pues debe ser protagonista en la comunicación de saberes en matemáticas por su naturaleza cognitiva. Una definición, por sí sola, no trae consigo el acceso a las propiedades del objeto matemático, pero si establece una amplitud del uso de un sistema de signos y significados que solo se pueden comprender con una adecuada lectura del lenguaje matemático especializado, guardando las proporciones según el grado donde se presente, en este caso, de grado undécimo. En suma, las

definiciones participan del aspecto conceptual, generando la utilización ineludible de recursos, expresiones algebraicas, descripciones y explicaciones que serán necesarias para dotar de sentido los procedimientos realizados por los estudiantes, en particular en la construcción e identificación de gráficas, funciones y derivadas.

4.2 Análisis Retrospectivo

Una vez se ha realizado las intervenciones en el aula, así como el análisis local, se procedió con el análisis retrospectivo, consistente en una revisión global de los diseños, tres situaciones, cada una con 2 actividades, resueltas por 6 estudiantes (ver anexo 1), la implementación, las intervenciones y participaciones de los estudiantes, y los resultados del análisis local; con el propósito de reconocer variables que permitan la realización de un análisis de las características de los procesos semióticos y cognitivos que desarrollaron los estudiantes en la implementación, en cuanto a la resolución de problemas referentes a la noción de derivada.

Por tanto, se realiza una revisión de las situaciones y la información recogida, teniendo presente, como un factor fundamental, la perspectiva curricular establecida por el MEN, la información acerca del pensamiento variacional desarrollada por los mismos y las condiciones que los procesos cognitivos y semióticos implicados aplican al diseño de las actividades. Aprovechando la utilidad de estos recursos, se elabora la rejilla de análisis que permitió caracterizar los resultados y realizar el análisis respectivo, en la que se clasifican los procesos cognitivos y semióticos, por medio de particularidades muy concretas sobre el uso de representaciones semióticas, cómo se realizan los pensamientos de los estudiantes para llegar a la construcción o identificación de una gráfica, entre otros.

Durante las intervenciones se realizaron algunas grabaciones, no todas las actividades presentan videograbación dado que se tomó algunos momentos importantes de la aplicación de las situaciones, pues no en todos los momentos los estudiantes se encontraban discutiendo, explicando, saliendo al tablero y argumentando.

El análisis retrospectivo comienza teniendo presente los resultados del análisis local de los resultados obtenidos en la implementación, con la intención de establecer elementos que fueran acordes con el objetivo general del presente trabajo: analizar las características de los procesos semióticos y cognitivos desarrollados por estudiantes de grado undécimo, en la resolución de problemas en el contexto de la noción de derivada; del cual se desprendían los objetivos específicos.

Un primer acercamiento a los datos se realizó observando los procesos cognitivos de los estudiantes, en cuanto a la conceptualización y el razonamiento, la forma en que interpreta el enunciado de un problema relativo a una función dada y su derivada, la identificación de la derivada como razón de cambio y como la recta tangente a una curva en un punto, el uso de la proporcionalidad, la variación y/o la coordinación entre dos cantidades, cómo son los pasos algebraicos utilizados en procedimientos y cómo son los pasos de los cálculos algebraicos utilizados para la construcción de gráficas.

Luego, se procedió a observar los procesos semióticos y los que aluden al discurso, esto es, las explicaciones, argumentaciones e intervenciones de los estudiantes. A saber, se tuvieron en cuenta elementos como la utilización y/o trazo de representaciones gráficas cartesianas, la coordinación y relación entre representaciones semióticas, la intervención y/o participación

utilizando explicaciones y/o argumentos, la explicación de las construcciones geométricas y las argumentaciones y/o justificaciones en la identificación de gráficas.

En cuanto a los procesos cognitivos, las preguntas que conducen al estudiante explicar lo que ha realizado, fueron un acierto en los diseños, pues, aunque no todos hablaban o explicaban verbalmente, tenían la opción escrita para redactar los procedimientos que utilizaron en sus respuestas. Desde este punto de vista, la cognitividad es un proceso que puede dar cuenta de cómo el estudiante realiza procedimientos algebraicos o geométricos. En algunos estudiantes pudieron lograr plantear ideas que daban cuenta de la forma como interpretaban el enunciado problema, además, en sus explicaciones, intentaban usar términos del lenguaje especializado en matemáticas, aunque en la mayor parte de su discurso, prevalece el uso de un lenguaje cotidiano y se nota la intención de incluir palabras relacionadas con el objeto tratado. La siguiente intervención de los estudiantes A y E, aunque A se encuentra justificando su punto de vista, muestra estos aspectos, en la situación 1, actividad 2, pregunta 1:

A: es que por ejemplo, profe, en el caso, pues, yo también me inclinaba por la B, solo que hay muchos puntos en los que no cuadra, por ejemplo, en el caso de a y b, ella tiene dos tipos de movimiento, uno que va en bajada y otro que va en...perdón, tres tipos de movimiento, que va en bajada, que sería de la parte concerniente del intervalo de oa, viene en bajada, y él llega hasta ahí a hacer una parábola, entonces llega justo en ese punto, ahí se vuelve horizontal y luego se vuelve otra vez positiva la pendiente. Pero en el caso de la opción B, cuadraría solamente en el punto de que f prima de t es mayor a cero en ab, que sería la parte en la que llega el pico de la parábola, que sería la zona horizontal y que, ve perdón, que sería la parte en la que vuelve a subir para tomar el intervalo de b a c. En el caso de que es totalmente igual a cero, es en la punta de la parábola que sería justo cuando ya no tiene ninguna curvatura, solo que, en el segundo, en el tercer punto que dice, f prima de t es menor a cero en oa y bc, en ese punto es en el que no me cuadra, ya que en oa sí aplica.

E: es que en oa la pendiente es positiva

A: por eso, y ¿en bc? También es positiva y mira que no cuadra la opción

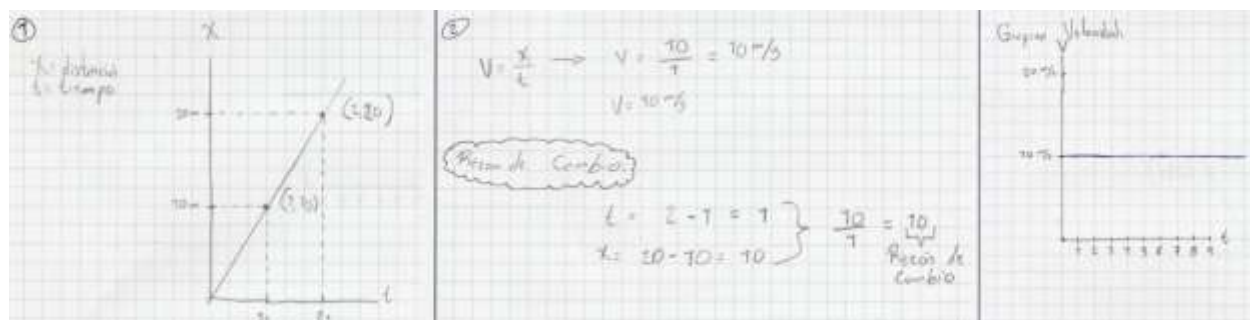
En esta intervención se hace uso de los elementos que se han aprendido en clase y los que se deben a las habilidades que los estudiantes tienen en la materia. Estos elementos corresponden a una red conceptual que forma parte de la conceptualización en matemáticas y que organiza en forma jerárquica y estructurada el conocimiento. Otro aspecto importante es la interpretación del enunciado problema que, en este caso, lo que el estudiante interpreta está muy orientado a lo que pretende la pregunta, pues tiene claridad acerca de la diferencia entre la representación icónica del movimiento y la representación espacio-temporal de la situación, esto es, la gráfica de la distancia contra el tiempo. Lo que no logra ver, en un primer instante, es la relación de las gráficas de la función y su derivada.

Desde los procesos semióticos, se presentó el uso de representaciones gráficas que dieran cuenta de las funciones que aludían a las situaciones presentadas. Al respecto, se presentó un frecuente uso de representaciones gráficas que correspondían a los movimientos dados, en este caso, como el de la situación 1, actividad 1, de una persona que va en bicicleta con una velocidad constante de 10 m/s. En general, los estudiantes construyeron las gráficas de la distancia contra el tiempo, así como la de la derivada de dicha función que sería la velocidad del movimiento. En esta actividad se realizó una orientación de conceptos básicos, en el sentido de que los estudiantes recordaran algunos elementos importantes del objeto matemático.

Las gráficas realizadas por los estudiantes están caracterizadas por mantener una relación entre el objeto matemático y su utilidad en la vida cotidiana, como es en el caso de los problemas sobre física, muy aplicados en el caso de la derivada; pues tratan de mantener en su discurso, términos que se utilizan en este ámbito, como lo son la distancia, la velocidad, el tiempo, y los intentan relacionar con sus contextos físicos respectivos, por ejemplo, el Movimiento Rectilíneo

Uniforme. Estos recursos del conocimiento propio de los estudiantes en su aprendizaje de la física, fueron muy útiles a la hora de elaborar las gráficas respectivas, lo que demuestra un acierto en el diseño de las preguntas respecto al acceso que se pretende establecer para el estudiante frente a un conocimiento que no es fácil de comprender por el carácter abstracto de la derivada. En el siguiente grupo de gráficas, es característico el uso de elementos propios de la geometría analítica como por ejemplo un uso correcto de los ejes coordenados, el recurso a la escala numérica, esto es, la identificación de coordenadas que representan números reales sobre cada eje, la escritura de puntos con sus dos coordenadas respectivas. Aunque un elemento faltante es la ubicación de las unidades que se nombran en el problema, como lo son los metros (m) para la distancia y los segundos (s) para el tiempo; lo mismo sucede en la gráfica de la derivada (velocidad), pues en el eje vertical debe estar indicada la unidad m/s y en el tiempo la letra s.

19 (a)



19 (b)

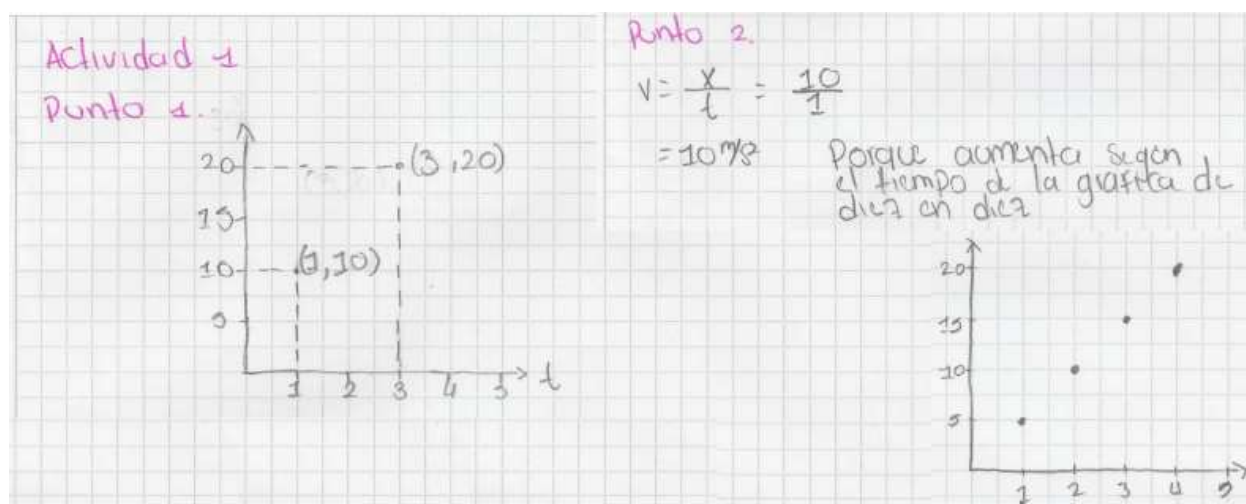


Figura 19. Construcción de las gráficas de la situación 1, actividad 1.

En la figura 19 (a) se presenta una construcción muy acertada de lo que pretende la actividad, pues, además de los elementos mencionados anteriormente, también se acompaña la construcción por expresiones algebraicas y aritméticas que detallan, desde las matemáticas, que la velocidad es la que se muestra en la que el estudiante elaboró. Estos cálculos están muy relacionados con la derivada vista como razón de cambio, pues, un propósito de las preguntas era que los estudiantes pudieran establecer relaciones entre los conceptos matemáticos físicos, como es el caso de la velocidad, y los que son directamente propios de un contexto matemático, como lo es la derivada como razón de cambio.

En la figura 19 (b), se presenta la construcción de las gráficas del movimiento trabajado en estas dos actividades. Una de las características de los estudiantes es que cuando piensan en el término “gráfica”, lo asocian con el trazo de los ejes coordenados y la ubicación de puntos en el plano en dos dimensiones pero no con una línea o curva en el plano que represente el objeto matemático, resultado de la construcción geométrica realizada. En la conceptualización y la

resolución de problemas, una característica primordial en el mejoramiento de los aprendizajes es la actividad matemática del estudiante que está mediada por las situaciones problema a través de las cuales toman sentido y significado los conceptos matemáticos. Es por esto que, las dificultades presentadas por los estudiantes en cuanto a la construcción de gráficas, presentan errores en los conceptos utilizados, tanto en lo geométrico como en lo algebraico, como se muestra en la parte de debajo de la figura 18, donde los puntos ubicados son los que, para el estudiante representa el objeto matemático estudiado; además la confusión entre la velocidad y la aceleración, por las unidades que escribe, m/s^2 .

Un elemento importante en el análisis de estas situaciones es el uso de elementos propios de conceptos matemáticos que facilitan la construcción de las gráficas de la función y su derivada, que es la correspondencia biunívoca, que los estudiantes pudieron utilizar en algunos momentos de su razonamiento. Esto se muestra en la siguiente intervención del estudiante E cuando se refiere a la explicación que da sobre la construcción de la gráfica de esta situación:

E: x e y son igualdades, así que si aquí en distancia es 10, tenemos que buscar en tiempo lo que corresponde a 10 y, así, sucesivamente.

Otro elemento importante en el razonamiento de los estudiantes es el de proporcionalidad, que se muestra en la siguiente intervención:

A: sí, como también puede ser que le dé 20, es directamente proporcional la una a la otra; si aumenta el tiempo, aumenta la distancia, si disminuye el tiempo, disminuye la distancia.

Como se aprecia, el estudiante no sólo establece el concepto de proporcionalidad sino que justifica la construcción de su gráfica, aclarando la relación entre las dos variables. Esto demuestra que la derivada no es un objeto matemático que se comprende a partir del uso de nuevos

conocimientos del cálculo, los saberes y competencias que tenga el estudiante son muy importantes en la comprensión de la noción de derivada.

De otro lado, una característica de los procesos cognitivos y semióticos identificados, es que conforme fueron avanzando las actividades, las preguntas comprendían mayor dificultad en cuanto a las justificaciones, pero no en el uso de las gráficas, lo que fue un recurso que permitió describir lo que los estudiantes pensaban sobre el movimiento planteado en las tareas. No se percibe, por tanto, una facilidad de los estudiantes para coordinar representaciones entre sí, para lo cual, es menester aclarar que no se esperaba que tuvieran un mayor dominio frente a esta situación. En primer lugar, no construyen varias gráficas en el mismo plano cartesiano, las elaboran aparte, por lo que es muy difícil tomar una posición de evaluación acerca del crecimiento y decrecimiento de la función que han graficado. No obstante, en cada gráfica de la situación 2, actividad 1, intentan que las curvas trazadas tengan alguna diferencia entre sí.

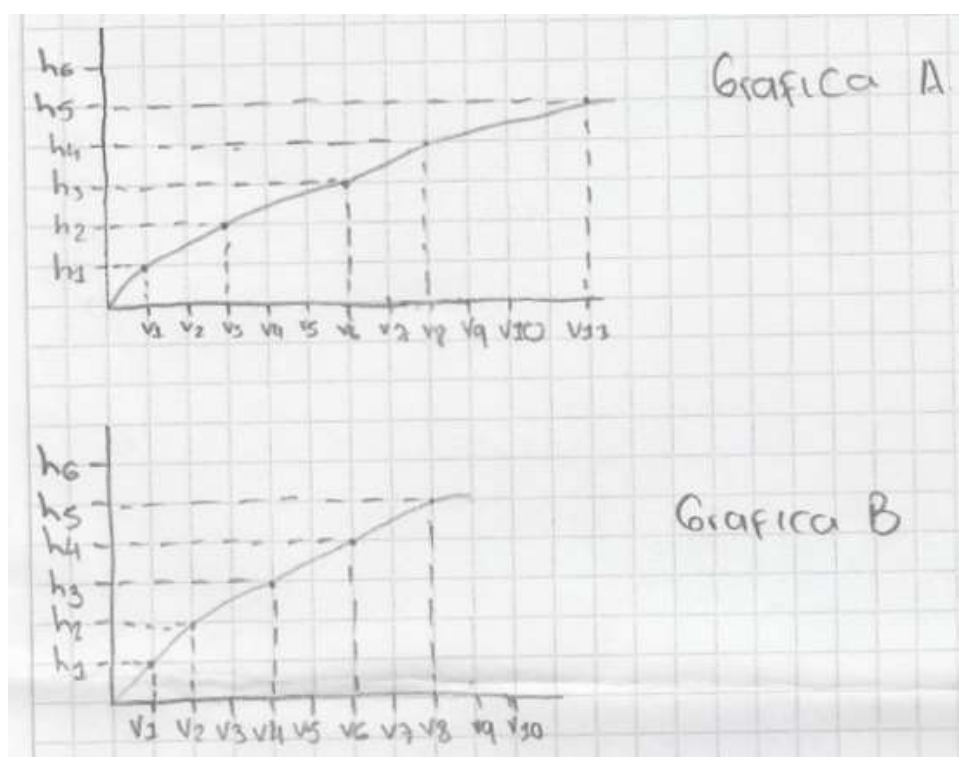


Figura 20. Construcción de las gráficas, situación 2, actividad 1

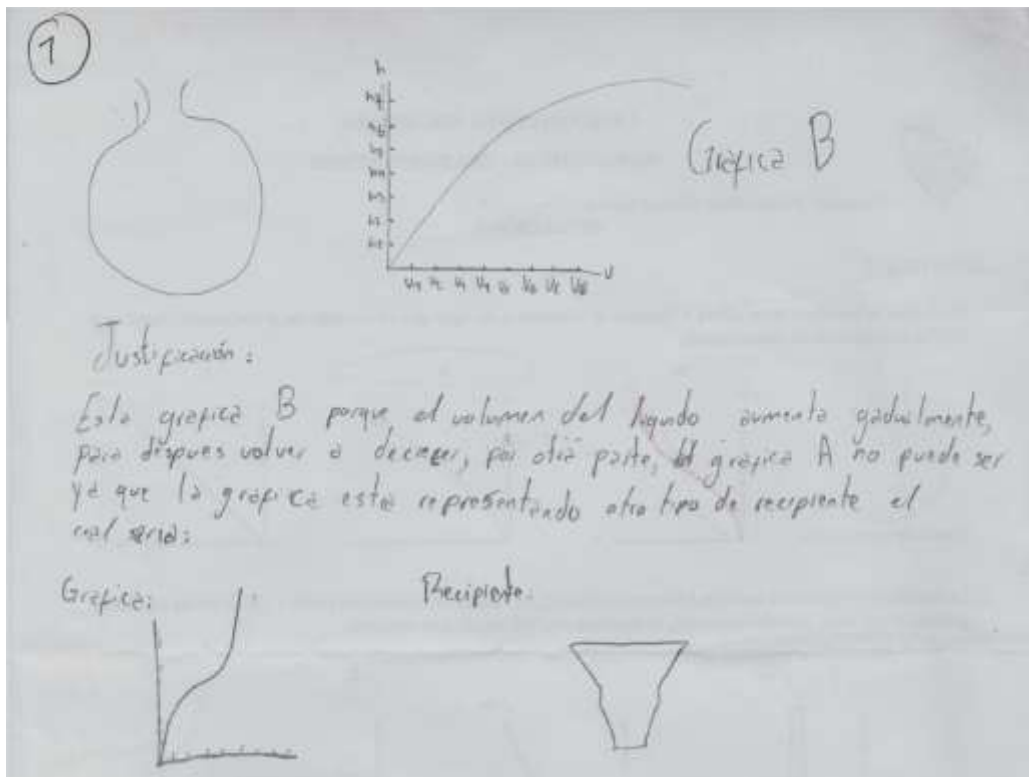
Existen aspectos en los enunciados del problema que, aunque parezcan obvios de realizar, no siempre se tienen en cuenta, es decir, no son tan relevantes para los estudiantes. Como lo es el caso de esta actividad mostrada en la figura 20, donde, a pesar de que el enunciado decía que las gráficas deben trazarse en el mismo plano, ningún estudiante siguió esa indicación y la omitió, como si se tratara de algo irrelevante para el propósito que se tenía. La característica de los procesos semióticos aquí, es que, el trazo sobre el mismo plano permite una mejor conceptualización y razonamiento del objeto trabajado, pues se pretendía que, al ver las gráficas, el estudiante pueda comprender mejor por qué los recipientes de diferentes volúmenes presentan gráficas distintas pero que tienen algunas características en común.

Un elemento importante en el análisis es el discurso que utilizaron los estudiantes, tanto a nivel de lo escrito, como el verbal. Por eso, se tuvo en cuenta que, es probable que algunos estudiantes no se sientan con disposición de hablar, explicar o participar. Así, las preguntas que consistían en que el estudiante debe justificar su respuesta, tienen como propósito dar acceso al estudiante a los conceptos estudiados pero también, estar acordes a lo que propone el MEN, en los aspectos curriculares y, además, que puedan plantear sus propias ideas sin límite alguno. El siguiente grupo de gráficas muestra que las preguntas no son aleatoriamente seleccionadas, sino que corresponden a un hilo conductor curricular que, en este caso, exige que el estudiante desarrolle aspectos como interpretar la noción de derivada y la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Y los apoyos que el diseño presenta ante estas necesidades es que haya una justificación de las respuestas y se pueda dar cuenta de una relación entre las gráficas de una función y su derivada. En la implementación, aquello que permitía que esto se movilizara eran las características como la construcción y la identificación.

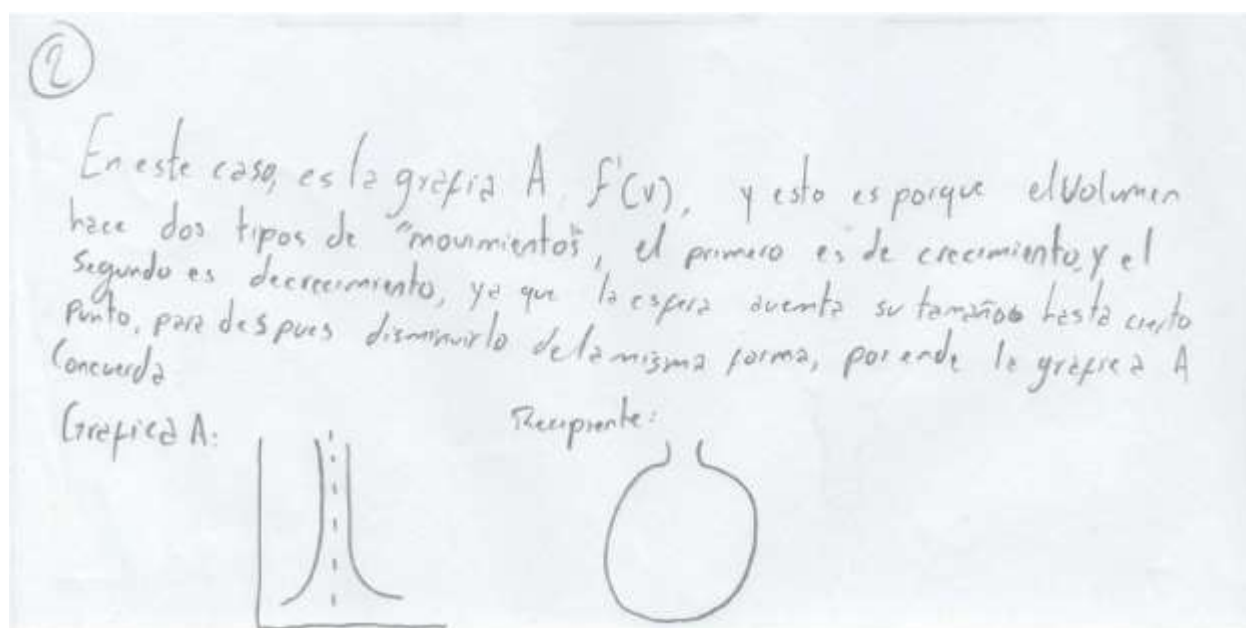
Se puede ver un mejor trazo en las gráficas de la figura 21 (a) y (b), pues las justificaciones son coherentes con aquello que se ha construido e identificado, cuyo fundamento radica en la relación de variación que establece el estudiante con las dos variables en cuestión, la altura y el tiempo. Por ejemplo, para el recipiente en forma de esfera, elige la opción donde explica que a medida que el agua cae al recipiente, el llenado cambia de llevar mucho volumen a llevar cada vez menos volumen, pues la forma del recipiente se va cerrando cada vez más. En suma, este elemento caracteriza los avances que los estudiantes puedan tener respecto al pensamiento variacional. Se puede inferir que este tipo de intervenciones pueden estimularse en el sentido de avanzar con otros conceptos que no se tuvieron en cuenta en este trabajo pero que son, de igual manera, relevantes

dentro de lo que concierne a la derivada, a saber, los puntos de inflexión; donde la curva cambia de concavidad, desde el punto de vista geométrico.

21(a)



21(b)



21(c)

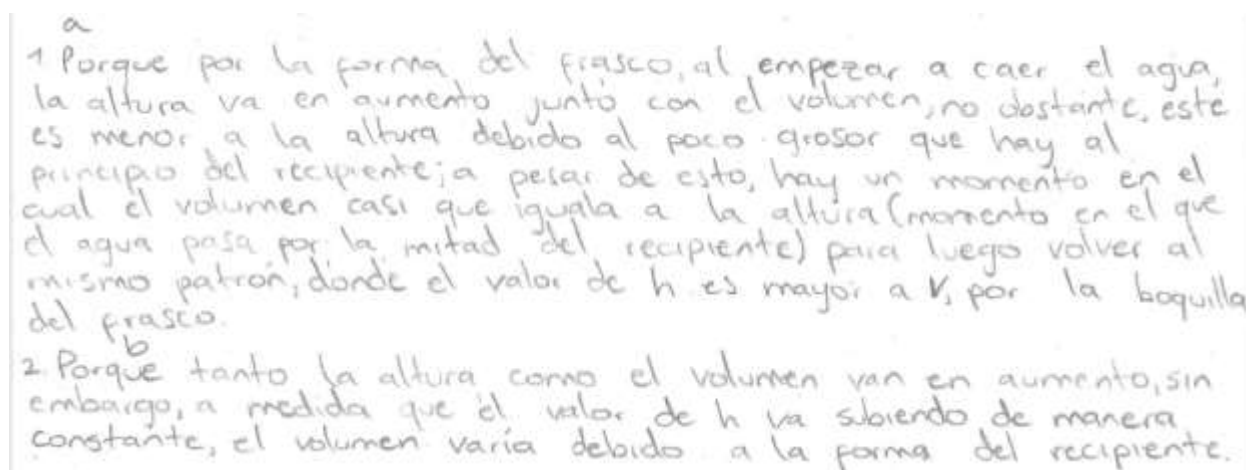
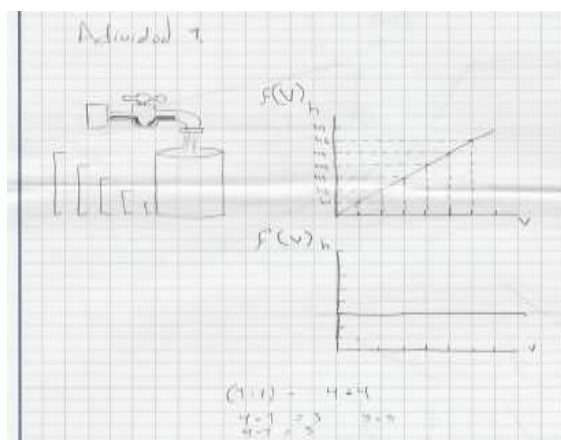


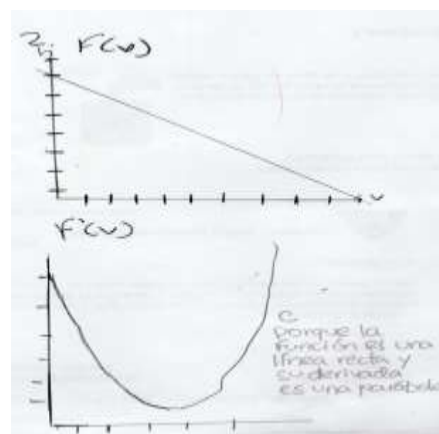
Figura 21. Justificaciones situación 2, actividad 2

En la figura 21 (c), otro estudiante no se aproxima a lo que se pregunta en la tarea pero tampoco deja de lado su participación escrita, teniendo razón en que, respecto al volumen, existen cambios que se cristalizan en lo que se incrementa y lo que decrece.

La situación 3 aportó desde lo teórico, pero también desde los referentes que aluden a la resolución de problemas, pues contiene actividades diseñadas para responder aspectos más precisos sobre la noción de derivada. Las actividades anteriores fueron útiles para preparar al estudiante y poseer los suficientes antecedentes conceptuales como para poder identificar aspectos más definidos en la relación que hay entre una función y su derivada. La figura 22 muestra el grupo de gráficas que corresponde a esta caracterización. Las gráficas de la figura 22 (a) representan un buen acercamiento de lo que se pretende con el planteamiento de una situación problema, con el llenado de recipientes y la relación que se puede establecer entre la gráfica de una función lineal y su derivada que, en este caso corresponde a una función constante. En las gráficas de la figura 22 (a) prevalece dicha relación, pero con dificultades de conceptualización, pues, el estudiante tiene claridad sobre la relación entre una función cuadrática y su derivada, pero no reconoce cuál es cuál.



22(a)



22(b)

Figura 22. Construcción e identificación de gráficas, situación 3, actividades 1 y 2

Las características más comunes en los trazos de gráficas de las actividades fueron aquellas que contenían escalas numéricas en los ejes, de repente, existe la necesidad de los estudiantes por incluir en sus representaciones números que den cuenta de las relaciones de variación que van elaborando o pensando. Con mucha menos frecuencia se presenta el uso de tablas de datos.

El asunto central en los desempeños de los estudiantes es que logran establecer la variación como un elemento importante en el análisis de una función y su derivada, a pesar de que no se logre hallar la gráfica de la misma en muchos momentos, pero es allí donde los otros recursos como el discurso y la conceptualización pueden reorientar las pretensiones y aprendizajes del estudiante.

Los resultados obtenidos, que se resumen en los elementos anteriores, evidencian las potencialidades de una propuesta de trabajo en clase de cálculo basada en los procesos cognitivos y semióticos, pues abren una amplia gama de opciones de trabajo con los conceptos matemáticos propios del pensamiento variacional; además dejan ver que es posible hacer avanzar a los estudiantes en formas de trabajo que dan cuenta de desarrollos en su conocimiento algebraico y geométrico al mismo tiempo que construyen e identifican alternativas de actuación y reflexión potentes para la resolución de problemas.

Se establece la apertura frente a la necesidad de continuar en la relación entre los procesos de conceptualización y razonamiento, y entre la construcción e identificación, pues se ve que los estudiantes presentan serias dificultades para usar un discurso potente en cálculo. Los resultados de este análisis orientan la formulación de una estrategia de trabajo para las clases de cálculo y las reflexiones que se puedan plantear en ese sentido y que se pueden aplicar en el caso del colegio.

Esto, como uno de los principios más importantes del presente trabajo, apoyar la investigación al respecto y aportar al campo de la Educación Matemática.

Tabla 3*Rejilla de análisis de la implementación*

REJILLA DE ANÁLISIS PARA LOS VÍDEOS Y PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES									
PROCESOS									
COGNITIVO									
CONCEPTUALIZACIÓN		RAZONAMIENTO		SEMIÓTICO			DISCURSIVO		
INTERPRETACIÓN DE UN ENUNCIADO	El 62,5% realiza una interpretación	USO DE LA PROPORCIONALIDAD, LA VARIACIÓN Y /O LA COORDINACIÓN ENTRE DOS CANTIDADES (FORMA EN QUE CAMBIAN UNA EN RELACIÓN CON LA OTRA)	El 25% utiliza la proporcionalidad, la variación, la coordinación entre dos cantidades y/o cómo son los pasos algebraicos utilizados en procedimientos en forma cercana a lo que se pretende	UTILIZA Y/O TRAZA REPRESENTACIONES GRÁFICAS CARTESIANAS	El 87,5% utiliza y/o traza representaciones gráficas cartesianas	INTERVIENE Y/O PARTICIPA, UTILIZANDO EXPLICACIONES Y/O ARGUMENTOS	El 37,5% interviene y/o participa utilizando explicaciones y, por momentos argumentos		
PROBLEMA EN RELACIÓN CON LA NOCIÓN DE FUNCIÓN Y DERIVADA	aproximadamente cercana a lo que pretenden las tareas	Y/O CÓMO SON LOS PASOS ALGEBRAICOS UTILIZADOS EN PROCEDIMIENTOS							
IDENTIFICACIÓN DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO Y COMO LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO	El 50% identifica la derivada como razón de cambio y como la recta tangente a una curva en un punto	CÓMO SON LOS PASOS DE LOS CÁLCULOS ALGEBRAICOS UTILIZADOS Y LOS PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS (PENSAMIENTO VARIACIONAL)	El 62,5% da cuenta de cómo son los pasos de los cálculos algebraicos y los pasos para construir gráficas	COORDINA Y RELACIONA REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	El 25% relaciona representaciones semióticas en forma aproximadamente adecuada	EXPLICA LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS	El 37,5% explica las construcciones geométricas desde el punto de vista verbal y escrito. El resto solo lo hace en forma escrita		
						ARGUMENTA Y/O JUSTIFICA LA IDENTIFICACIÓN DE LAS GRÁFICAS	El 25% intenta acercarse al planteamiento de argumentos y trata de justificar la identificación de las gráficas. El resto lo hace en forma escrita en cuanto a la justificación		

4.3 Conclusiones

Este trabajo permitió hacer adelantos significativos en la comprensión de diversos fenómenos asociados con la clase de cálculo: precisar sobre los conceptos primordiales y sus propiedades, así como determinar elementos teóricos que estimulan la formulación de criterios cognitivos para el diseño de situaciones de clase, poner en acción una propuesta metodológica que apoya el vínculo teoría – práctica en el contexto del trabajo en clases de cálculo y, en general, la revisión de las diversas características que se relacionan a este tipo de investigación. Por ejemplo, la propuesta referida a las actividades y tareas comprende preguntas que van encaminando al estudiante a pensar en situaciones relativas a la función, pero, a la vez, sin perder la noción de derivada; este es el caso de la situación 1, donde la función y la derivada cobran mayor importancia a partir de un movimiento en el que la velocidad es constante y, por momentos, variable.

Frente a esta situación, típica de un movimiento en el que es aplicable el pensamiento variacional, los estudiantes buscaron soluciones con características muy comunes, por ejemplo, el uso del plano cartesiano para explicar los cambios que se presentaban en el movimiento dado y la utilización de las escalas de medición para ubicar los objetos relacionados como los puntos y las rectas que los unían. Esta característica es utilizada por los estudiantes, sobre todo si se les orienta o enseña el uso adecuado de los elementos del plano cartesiano y su importancia en cualquier relación dada: elementos como las descripciones de cada eje, en los que uno representa la distancia (su unidad entre paréntesis “m” que significa metros) y el otro el tiempo (su unidad “s” segundos). El uso adecuado de este tipo de elementos permite una mejor comprensión de la relación que se está estableciendo y, por tanto, implica mayores probabilidades de acceder a los objetos matemáticos estudiados.

En cuanto al discurso del docente, se iba ajustando de acuerdo con la manera como los estudiantes iban a dialogando entre todos y explicando a los demás lo que se iba preguntando, se había dejado claridad que no se trataba de sólo resolver un taller sino de explicar y justificar lo que iban resolviendo; por lo tanto, el actor principal era el estudiante con sus producciones y explicaciones, por ejemplo, la utilización del lenguaje que las actividades iban mostrando. Aquí, el estudiante intentaba acceder o se preocupaba por hablar en el lenguaje propuesto, como lo es en el caso de la razón de cambio, donde a pesar de que se trata de un término que no es fácil de comprender en una primera instancia, los estudiantes se guiaban por las orientaciones dadas y lo que se pudo recordar de los temas que ya se habían estudiado; de tal manera que al referirse a este término, establecían la relación entre dos magnitudes, aunque muchas veces con errores conceptuales y de escritura, pero en últimas intentando acceder al conocimiento establecido o lo que se buscaba resolver en la actividad, que era hallar la velocidad de una persona en bicicleta.

Respecto a los referentes teóricos que soportan el presente trabajo, como por ejemplo los que aluden a los sistemas de representación semiótica, gracias a su implementación en este trabajo se logra una mejor comprensión de los procesos de construcción. Aspectos como la utilización de los registros de representación y la coordinación entre los mismos, permiten que los estudiantes indaguen en diferentes actividades cognitivas y mejoren los procesos de conceptualización que tenían al respecto. En este caso, se pueden reconocer elementos semióticos utilizados por los estudiantes, lo que se vincula al primer objetivo específico del presente trabajo, como por ejemplo, el trazo de la gráfica de la velocidad de un ciclista (anexo 1, situación 1, actividad 1), en donde para los estudiantes era muy importante que cada número ubicado en los ejes del plano cartesiano, velocidad y tiempo, tenga su unidad de medida (“m/s” metros por segundo y “s” segundos); sin

embargo, este detalle lo fueron corrigiendo a medida que fueron avanzando las actividades. Este tipo de errores que se encuentran también en la situación 1, actividad 2 (anexo 1), fueron muy comunes en los estudiantes, por ejemplo, desde la parte cognitiva, lo cual se puede mostrar a partir de las explicaciones de los estudiantes, en este mismo caso del trazo de la gráfica de la velocidad del ciclista, los estudiantes se referían a la recta trazada desde el uso del lenguaje como la velocidad constante a lo largo del eje x, o los cambios entre una variable y otra (los cuales, si la velocidad era constante, no existían).

Lo anterior muestra ciertas dificultades que presentan los estudiantes al escribir o trazar gráficas, por ejemplo, en un plano cartesiano. Pero estas dificultades tienen una relación muy estrecha con las que aluden al interpretar un enunciado de problema en relación con la noción de derivada, por ejemplo, las conversiones que el estudiante debe realizar de un lenguaje a otro, como ir de un enunciado en lengua natural a una gráfica de una función en el plano cartesiano. Algunas dificultades al respecto corresponden a no reconocer elementos del plano cartesiano como la descripción de los ejes, es decir, la unidad de medida utilizada. Otra dificultad era que, si la pregunta se refería a graficar una función determinada y la de su derivada, para los estudiantes era muy complejo establecer criterios de comparación o relación sobre los elementos que se proporcionaban en el enunciado, por ejemplo, en un principio, algunos no podían relacionar las distancias con los tiempos en un Movimiento Rectilíneo Uniforme, para poder llegar a la velocidad del movimiento dado.

En relación con la derivada, la dificultad, aquí, correspondía a la falta de significados de los estudiantes frente a la lectura de los enunciados que expresaban la derivada, lo que Duval (2006) llamaba “traducción” de términos. En la enseñanza del cálculo, este tipo de dificultades pueden

esperarse, pero no por ello, se debe dejar de lado proporcionar al estudiante elementos necesarios para mejorar la comprensión de la lectura que esté realizando. En particular, estas dificultades se daban muy constantemente en los problemas sobre llenado de recipientes, porque aquí se habla de una situación muy cercana a la cotidianidad, donde se pueden establecer expresiones algebraicas y representaciones geométricas que den cuenta del planteamiento de lectura.

Estas dificultades mencionadas se relacionan con la forma en que los estudiantes coordinan representaciones semióticas y cognitivas para resolver problemas en relación con la noción de derivada, pues en los procedimientos realizados por los estudiantes era común el uso de gráficas para ubicarlas en el plano cartesiano. Respecto a las expresiones algebraicas y sus gráficas, como en la situación 3, la forma de coordinación era más fácil cuando los estudiantes seguían ciertos pasos de deducción, como saber que la derivada de una función lineal es constante y que la de una función cuadrática es lineal. Estas formas se iban afianzando a medida que las actividades iban avanzando, no obstante, las dificultades en los cálculos algebraicos y la ubicación de elementos en el plano cartesiano siempre se mantenían y requerían de la orientación del profesor en algunos momentos.

Finalmente, el trayecto que se va elaborando con el diseño de las preguntas y la resolución de las mismas, permitió establecer las relaciones más precisas posibles para que el estudiante no haya visto las tareas de forma independiente, sino como que la una representa un gran aporte teórico para la siguiente.

Se logró establecer una caracterización de los resultados o producciones de los estudiantes en sus procesos de razonamiento; se puede ver que la construcción de gráficas siempre estuvo acompañada de enunciados que, aunque muchos carecían de términos correspondientes al lenguaje

especializado en matemáticas, siempre tuvieron la disposición de dejar por sentado su punto de vista, intentando justificar lo que construyeron o identificaron.

Se diseñaron tres situaciones en las que se puso en juego una caracterización de los procesos semióticos y cognitivos en la resolución de problemas en el contexto de la derivada. Aquí, se tuvo en cuenta características de los procesos de construcción, identificación, argumentación y razonamiento que iban a representar en gran medida aquello que constituyó cada situación. No se podía dejar de lado la perspectiva curricular, cuya relevancia representa lo que el estudiante debe aprender en el desarrollo del pensamiento variacional y en el sentido en que lo que se haya diseñado esté compensado sustancialmente en el razonamiento matemático; de manera que, si hubo o no logros en el aprendizaje, no correspondía a los derroteros del presente trabajo.

El análisis de las producciones de los estudiantes, así como los resultados de sus respuestas en cuanto a lo que pretendía cada tarea y las videograbaciones representaron la identificación de criterios y características que fueron la base para darle fundamento a los análisis local y retrospectivo. No obstante, estos resultados reflejan que los procesos semióticos y cognitivos no se agotan con la implementación desarrollada, además las características de las situaciones y actividades propuestas, así como las formas en que los estudiantes se acercaron a estos conocimientos reflejan un aporte del presente trabajo al mejoramiento del aprendizaje del cálculo.

Las propuestas de los diseños, las reformulaciones de los mismos, los aspectos que se deben tener presentes en la implementación, los análisis llevados a cabo, entre otros aspectos, se fundan en la orientación de los profesores del trabajo de grado de la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática; así como la coherencia que debe haber entre lo que se propone como implementación y lo que la sustenta, que alude a los experimentos de enseñanza, representa uno

de los aspectos más importantes en el alcance de los objetivos de este trabajo, lo que permite recoger algunos elementos que se pueden ofrecer respecto a la enseñanza de la derivada en secundaria y los aportes que estos puedan brindar a la Educación Matemática.

Desde este punto de vista, se plantean algunas preguntas abiertas que pueden tenerse en cuenta para futuros intereses relacionados con el presente trabajo:

- a. ¿Cómo mejorar el aprendizaje de las propiedades que se relacionan con el cálculo de derivadas?
- b. ¿Cuáles son los sistemas de representación que utilizan los estudiantes en el cálculo de derivadas, implementando el concepto de límite?
- c. ¿Qué procesos semióticos y cognitivos pueden utilizar los estudiantes en el cálculo de derivadas usando funciones trigonométricas?

Estos y otros interrogantes que se pueden generar alrededor del tema o del objeto matemático derivada, pueden ser un punto de partida para establecer futuros trabajos que aporten al aprendizaje de las matemáticas.

A. Anexo: transcripción de los videos e introducción a las actividades

P: profesor

A: estudiante 1

B: estudiante 2

C: estudiante 3

D: estudiante 4

E: estudiante 5

F: estudiante 6

Descripción vídeos situación 1, actividades 1 y 2

Breve orientación acerca de la derivada por parte del profesor

Conversación:

El profesor realiza una orientación sobre la noción de derivada, haciendo énfasis en forma sintética sobre las representaciones geométricas y analíticas de una función.

Situación 1, actividad 1

El profesor lee la pregunta 1 de la actividad 1, situación 1.

P: ¿cuál es la velocidad?

A: x sobre t

P: donde ¿ x es qué?

A: la distancia y t es el tiempo, de 5, 5 metros sobre segundo

P: sí, 5 metros sobre segundo

Los estudiantes construyen la gráfica pedida.

El profesor realiza una breve explicación sobre la razón de cambio, a partir de las coordenadas de los puntos que han ubicado los estudiantes en el plano cartesiano, expresando que la velocidad se

puede ver como la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido en un intervalo o entre dos puntos del plano cartesiano.

Al respecto (sobre los puntos indicados por los estudiantes en el plano cartesiano) se expresa lo siguiente:

A: 0 sobre 0, 5 sobre 1, diez sobre 2

P: ¿dónde está el cambio?, ¿qué cambio se puede analizar allí?

A: ¿se duplican?

P: este punto (señalando la gráfica) ¿qué coordenadas tiene?

A: 1 coma 5

P: y ¿éste de acá? (señalando otro punto en la gráfica)

F: 10 coma 2

P: sería ¿2 coma 10?

P: ¿cuáles son las coordenadas de x para estos dos puntos?

A: 1 y 2 para x

P: y ¿las coordenadas de t?

A: 5 y 10, no, ¿qué?

P: de t

A: las coordenadas de t son 1 y 2, las de x eran 5 y 10

El profesor indica que se puede restar las coordenadas en x, lo mismo con las de t, y que al dividir los resultados pregunta q los estudiantes qué valor se obtiene y cómo podemos llamar a dicho valor.

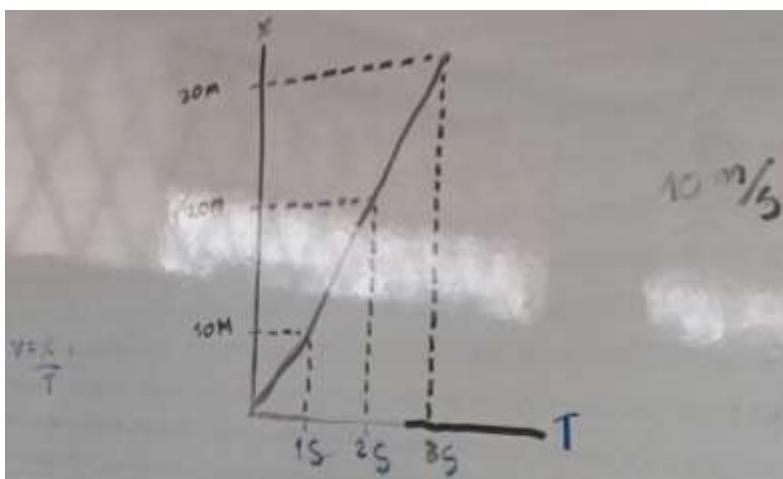
P: ¿cuál es la razón de cambio en este procedimiento que acaban de hacer?

B: 5 sobre 1 que da 5

E sale al tablero, dibuja la gráfica de la pregunta 1, distancia contra tiempo y explica cómo la realizó.

B. Anexo: explicaciones y gráficas.

La siguiente gráfica es la que dibujó E:



E: x es distancia, y es tiempo, aquí son igualdades

A le dice a E que está tapando lo que dibujó, E se hace a un lado y continua su explicación

E: x y y son igualdades, así que si aquí en distancia es 10, tenemos que buscar en tiempo lo que corresponde a 10 y, así, sucesivamente. Y, así, es una razón de cambio que daría la velocidad, que sería 10 metros sobre segundo (escribe en el tablero)

P: ¿de dónde sale el 10?

E: de la razón de cambio de esto (señala la gráfica)

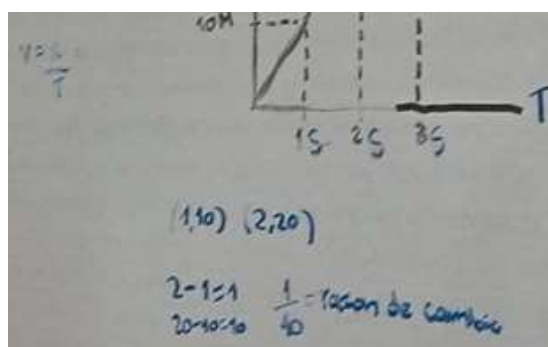
P: ¿cómo se calcula la razón de cambio?

E escribe en el tablero la forma como se halla la razón de cambio. F interviene diciendo que en la gráfica no va la letra y sino t para el tiempo, pues E había escrito y en vez de t. E hace la corrección. Además, C pregunta por qué E hizo en el eje x tres rayas, donde A interviene y expresa que se trata del número 30.

P: entonces, ¿cómo se calcula la razón?

E: porque son igualdades, x es igual a y, distancia es igual a tiempo, velocidad es distancia sobre tiempo y eso es lo que me da la razón de cambio.

E ha escrito en el tablero el cálculo de la razón de cambio o velocidad, como lo muestra la siguiente figura:



El profesor pregunta si los estudiantes están de acuerdo. Los estudiantes dicen que sí.

A: sí, como también puede ser que le dé 20, es directamente proporcional la una a la otra; si aumenta el tiempo, aumenta la distancia, si disminuye el tiempo, disminuye la distancia.

P: ¿puede ser 1 sobre 10 o 10 sobre uno?

A: no, siempre tiene que ser la distancia sobre tiem... (se queda pensando, observando los cálculos de E), ¿usted por qué puso 1 sobre 10? (A le pregunta a E), es 10 sobre 1.

E: y, ¿no sería lo mismo?

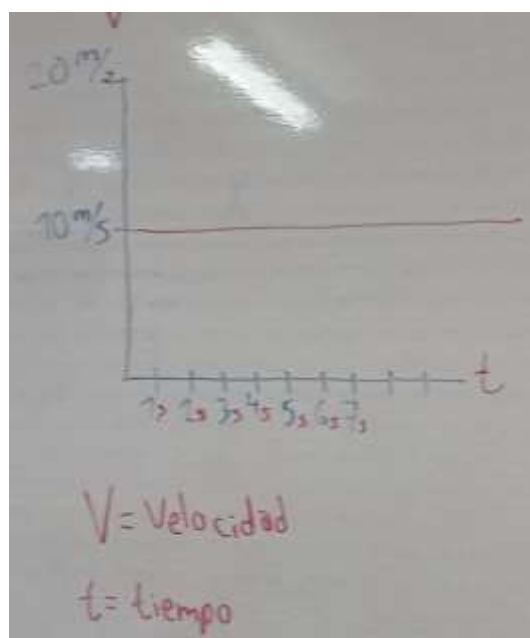
A: no, una cosa es que dé diez y otra es que dé 0,1

El profesor interviene recordando que la razón de cambio relaciona la distancia con el tiempo.

A: es similar a la fórmula de la velocidad, sólo que en lugar de velocidad como tal, se toma como la razón que hay entre ambos.

Situación 1, actividad 1, pregunta 2

A sale al tablero, dibuja la gráfica de la derivada de la función inicial y explica su razonamiento.



A: la velocidad es constante en todos los tiempos, como se muestra en la gráfica (refiriéndose a la gráfica de distancia contra tiempo de la pregunta 1), muestra que por cada segundo avanza 10 metros, la razón de cambio es de 10 también, por lo tanto, la velocidad es distancia sobre tiempo, tenemos la distancia de 10 metros y el tiempo de 1 segundo y al dividir 10 entre 1 nos da 10. Entonces, al ser constante en cada uno de los tiempos, ya sea, tenemos 20 metros, 2 segundos, nos va a dar 10, 30 metros, 3 segundos, nos va a dar 10 siempre. Entonces lo que esta gráfica muestra (señalando la gráfica de velocidad contra tiempo) el eje vertical y lo cambia por una v , que va a ser la velocidad, y en el eje x que tenemos una t , va a reemplazar la x , en ese caso la t es el tiempo. Entonces, en el eje vertical, v , vamos a tener 10 m/s, 20 m/s, como bien sabemos que nuestra velocidad es de 10 m/s, constante, siempre se mantiene en línea recta. Llegado el caso de que llegue un punto en que la velocidad varíe, ya sea disminuye o aumente, esta gráfica va a llegar a un punto, se hace un pico, luego baja o dependiendo de cómo varíe.

Situación 1, actividad 2, pregunta 1

Cada estudiante lee la pregunta y procede a responderla.

E expresa lo que piensa sobre el movimiento presentado en la pregunta 1.

E: según la lógica, parece que el carrito va más rápido del punto B a C porque va acumulando energía

A: pues esa sería la lógica del movimiento, la velocidad del carrito va a aumentar cada que vaya bajando, porque viene acumulando energía desde la parte más alta. En la subida sería verlo como una especie de motor, entonces la velocidad solo va a ser como empuje, entonces va totalmente a disminuir. En el punto D que sería el punto más alto, digamos que podría tener una velocidad cero, porque ya no tiene como tanto eso...

P: vamos a ir un poco más lento, es decir analizando cada intervalo, ¿tú qué piensas? (señalando a E, quien estaba levantando la mano)

E: al principio en el punto A, él ya no tiene, apenas está comenzando a reunir la energía de empuje que dice A, de B a C comienza a bajar y vuelve a reunir energía.

P: de B a C ¿baja cómo?

E: de B a C va así y se va a inclinar

P: ¿cómo cambia la velocidad de B a C?

E: aumenta

P: y ¿de C a D?

Todos los estudiantes dicen que la velocidad disminuye.

P: y también cambia la velocidad o ¿no?

Todos los estudiantes dicen que sí.

P: ok, sigue A

A: entonces, en el caso de D a E, la pendiente es mucho más larga, entonces la velocidad pasa a ser mucho más. Ya en el punto de E a F, la inclinación de la colina ya es más inclinada que en el caso de C a D, entonces ahí la velocidad disminuye aún más. Aquí la velocidad vuelve a disminuir De F a G varía otra vez, en ese caso vuelve a disminuir. En el punto F a G ya la inclinación es muy leve, entonces vuelve a tomar como un punto similar al de A y B.

Los estudiantes preguntan sobre la gráfica que hay que elaborar, P realiza orientaciones finales sobre la gráfica de la velocidad que deben construir los estudiantes.

F se dirige a A diciendo lo siguiente:

F: yo voy a hacer la gráfica con las mismas líneas de acá (refiriéndose a la gráfica que hay que construir)

A: en la gráfica no

F: ¿por qué?

A: porque, por ejemplo, en las bajadas la gráfica no es así (representando con su mano que va hacia abajo)

F: pero si va bajando...

A: no, porque la velocidad aumenta

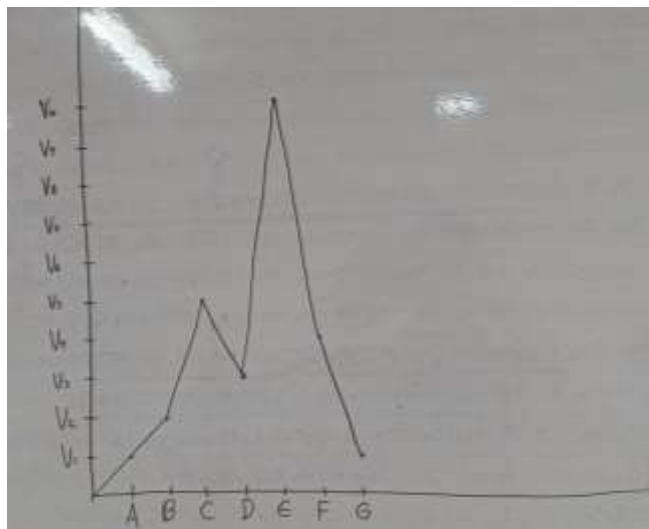
F: por eso, si la velocidad aumenta, pues va bajando

A: pero en la gráfica tenés que hacerla hacia arriba

E: ah, ya!

A: debes colocar los puntos tal cual están ahí (señalando la figura de la montaña rusa, además expresa cómo deben ir las líneas que representan los intervalos)

D sale al tablero y dibuja la gráfica de la velocidad que se pide en la pregunta 1. Y procede a explicar su construcción.



D: bueno, pues la velocidad va cambiando por los diferentes puntos, empieza siendo constante de A a B, luego la velocidad aumenta de B a C y de C a D la velocidad disminuye, luego aumenta nuevamente de D a E y disminuye la velocidad de E a F y vuelve a ser constante de F a G.

P: ¿están de acuerdo? A, tú qué dices, porque te veo como con dudas

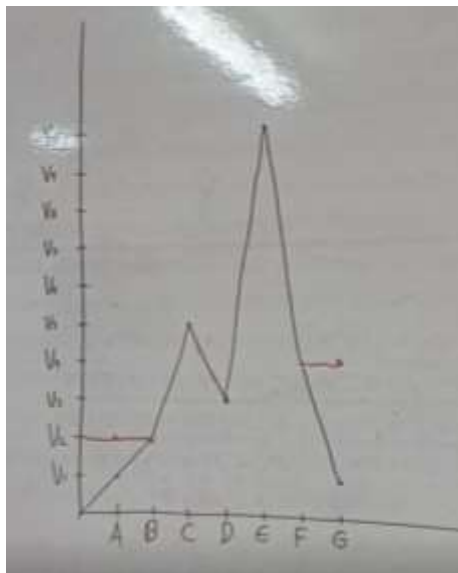
A: pues si decimos que es constante, bien dicho pues en el punto anterior, la velocidad constante es horizontal. Entonces en el punto que dice de A a B no es inclinada, sino que debería ser más bien horizontal (en ese momento C traza sobre el aire, imaginariamente, una línea recta horizontal, apoyando lo que dice A). Ya los demás puntos tanto de B a F, yo sí los veo bien, un poquito exagerada la de D a E (sus compañeros ríen), un poquito exagerada.

P: ¿por qué exagerada?

A: es como muy, mucho más como acelerada, pues sí, es una inclinación más amplia pero sigue siendo un poco más, un poco muy acelerada de lo que, tal vez, en mi opinión, representaría, pero está bien, demuestra que tuvo una aceleración el carro. Del punto F al G, yo la haría un poquito más horizontal, no tan horizontal, pero sí un poquitico más horizontal.

P: es decir que, una línea recta entre más inclinada, ¿crece más?, ¿hay más aceleración? Además, lo que han dicho ustedes es que entre A y B la velocidad es constante, ¿cierto?, ¿cómo sería la línea recta entre A y B?

A sale al tablero, pues desea sugerir una corrección en la gráfica, lo que es aprobado por los demás.



A: esos son los cambios que haría yo (traza las líneas horizontales de A a B y de F a G).

Situación 1, actividad 2, pregunta 2

Los estudiantes leen la pregunta y proceden a contestarla pero C pregunta sobre cómo es la gráfica del movimiento si el carro va en bajada. El docente realiza una orientación al respecto y luego pregunta a los estudiantes sobre el crecimiento de una recta.

P: Si la recta va así (con su brazo representa una recta inclinada que, aproximadamente, forma con la horizontal menos de 90°), ¿crece? o ¿decrece?

A: porque el vehículo está en bajada ¿no?, o sea que aumenta

C: ¿la línea es así? (con su brazo representa una recta que, aproximadamente, forma con la horizontal, menos de 90°)

A: pero según este gráfico cuando la línea está hacia arriba, está aumentando la velocidad

P: y ¿si la línea está así? (con su brazo representa una línea horizontal)

A y C dicen que está constante

El profesor finaliza las orientaciones sobre el crecimiento y decrecimiento de una función.

A: yo creo que es la B

P: ¿por qué?

A: porque lo de función de la pendiente dependiendo si el número que está en ella es positivo, negativo o igual a cero es una relación proporcional hacia donde va a ser examinada la pendiente, en el caso de que sea una curva hacia arriba, el número debe ser positivo, si es horizontal, cero, y

si es inclinada hacia abajo debe ser negativo. En el caso de las tangentes de la Q y la S, ya que son...al ser horizontales, debe ser igual a cero, m es igual a cero; entonces en esa, la opción m igual a cero en Q y S, ya que son horizontales. En el caso de R, ya que es la única que va en bajada, su pendiente es negativa, ya que dice m es menor a cero, y todo número menor a cero debe ser negativo. Y, en las rectas donde están los puntos P y T, al ser inclinadas, más T que P, eh la pendiente es positiva (con su brazo izquierdo, realiza una representación de una recta inclinada con aproximadamente menos de 90° respecto de la horizontal)

P: B, ¿tú querías preguntar?

B: sí, pero no importa que la pendiente esté más inclinada en T que en P, igual es positiva en los dos puntos

P: ¿qué creen?

Los estudiantes asientan.

Los estudiantes proceden a leer la pregunta 3

Situación 1, actividad 2, pregunta 3

D: para mí es la B

P: ¿por qué?

D: primero, porque, eh... (Se queda en silencio, piensa). De a a b como es una bajada la velocidad aumenta.

P: de ¿solo b?, o de ¿a a b?

D: no, de a a b. Luego de b a c, va en subida, por lo tanto, la velocidad disminuye. Y en los puntos a y b, es un punto neutro, entonces no, es igual.

P: ¿qué creen?, ¿alguien más quiere decir su justificación?

El profesor expresa que deben tener presente la diferencia entre un punto y un intervalo

A: es que por ejemplo, profe, en el caso, pues, yo también me inclinaba por la B, solo que hay muchos puntos en los que no cuadra, por ejemplo, en el caso de a y b, ella tiene dos tipos de movimiento, uno que va en bajada y otro que va en...perdón, tres tipos de movimiento, que va en bajada, que sería de la parte concerniente del intervalo de oa, viene en bajada, y él llega hasta ahí a hacer una parábola, entonces llega justo en ese punto, ahí se vuelve horizontal y luego se vuelve otra vez positiva la pendiente. Pero en el caso de la opción B, cuadraría solamente en el punto de que f prima de t es mayor a cero en ab, que sería la parte en la que llega el pico de la parábola, que sería la zona horizontal y que, ve perdón, que sería la parte en la que vuelve a subir para tomar el intervalo de b a c. En el caso de que es totalmente igual a cero, es en la punta de la parábola que sería justo cuando ya no tiene ninguna curvatura, solo que, en el segundo, en el tercer punto que

dice, f prima de t es menor a cero en oa y bc, en ese punto es en el que no me cuadra, ya que en oa sí aplica.

E: es que en oa la pendiente es positiva

A: por eso, y ¿en bc? También es positiva y mira que no cuadra la opción

A: la gráfica de la derivada es positiva de a a b

P: ¿por qué?

A: porque, según los cuadrantes, son, uno que es positivo-positivo, positivo-negativo, negativo-negativo, negativo-positivo, que son cuadrante uno, dos, tres y cuatro, creo que el uno sería el que es positivo-positivo, el dos es positivo-negativo, el tres es negativo-negativo, el cuatro es negativo-positivo.

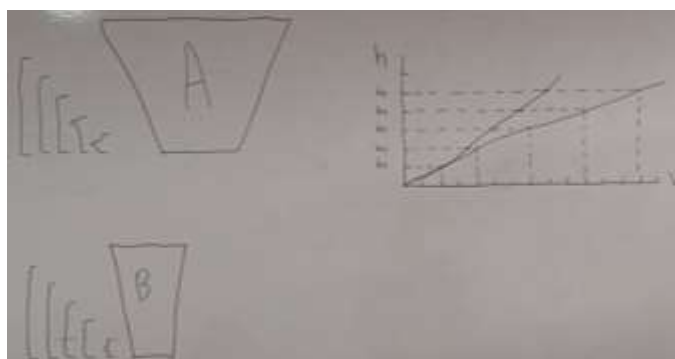
F: yo pienso que es la A pero no me cuadra con la gráfica de arriba

A: pero la pregunta es sobre la gráfica de la derivada, que es la de abajo

A: en ese caso, sería la A, porque en los intervalos oa y bc, como están en el cuadrante uno, que es totalmente positivo, o sea sobre el eje x, serían automáticamente positivos. En el de ao, ve perdón, el intervalo de a a b, se convierten en negativos, o sea que están por debajo de la línea de x

Situación 2, actividad 1, pregunta 1

El estudiante A construye la grafica de la altura contra el volumen de la situación dada para los recipientes A y B. Explica su construcción:



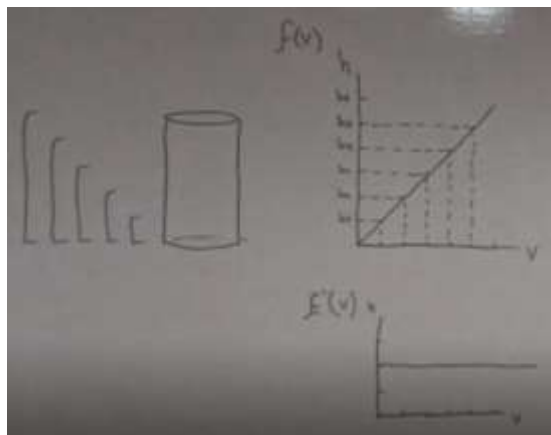
A: la gráfica de A es la misma ciencia, solo que el recipiente B no es tan amplio en la parte de arriba, o sea en la boca del recipiente, no tiene gran diferencia en sus volúmenes a medida que va aumentando la altura.

P: ¿por qué la gráfica de B va arriba de la de A?

A: porque no se amplía en el volumen, en cambio el otro ya va aumentando, ésa aumenta de medio en medio y el otro ya aumenta de tres en tres, entonces una es más inclinada que la otra

Situación 3, actividad 1, pregunta 1

El estudiante E construye las gráficas de la funciones $f(v)$ y $f'(v)$. Explica su construcción:



E: en este caso, a diferencia del anterior (refiriéndose a la situación 2) que era un, una especie como de trapecio, este es cilíndrico, es decir que su forma es totalmente recta, no tiene variación ni de volumen, ni variación de sus tamaños, entonces va a ser directamente proporcional, si aumenta la altura, el volumen va a aumentar pero van a ser constantes sus volúmenes; entonces por eso puse que cuando está en la altura 1, su volumen va a ser de 1, en la altura 2, su volumen de 2 y, así, sucesivamente. En el caso de la derivada f' prima de v , esa sería una línea completamente recta ya que en la f de v no hay ningún tipo de variación en su altura y en su volumen, entonces se mantiene totalmente constante y en las derivadas la constante siempre es una línea horizontal

Referencias

- Alayo, F. (1990). El lenguaje de funciones y gráficas. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de publicaciones, Universidad del País Vasco.
- Álvarez, D., Colorado, H., & Ospina, P. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada.
- Apostol, T. M. (1979). Cálculo, vol. 1. Editora Reverté Ltda.
- Badillo Jiménez, E. R. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: "la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física" (Doctoral dissertation, Universitat Autònoma de Barcelona).
- Cabezas, C., & Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de cálculo inicial. *Formación universitaria*, 9(6), 13-26.
- Calderón, D. I., & Corredor, O. L. L. (2012). El requerimiento epistemológico para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría. *Investigaciones en Educación Geométrica*, 51-86.
- Campos, E. (2001). La tecnología y las múltiples representaciones. *Innovaciones Educativas. Tecnología para la enseñanza de las matemáticas y las Ciencias*, 1, 2-6.

- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kel & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Cap. 12 (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.
- Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design. En A. Kel & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Cap. 10 (pp. 231 – 265).
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 177-196.
- De Faria, E. (2008). Algunas reflexiones sobre resolución de problemas en Matemáticas.
- Dorier, J. L. (2010). Mathematics in its relation to other disciplines: Some examples related to economics and physics, *El Cálculo y su Enseñanza*, Vol.2, Cinvestav-IPN, México. At http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
- Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano. Registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Traducción Vega M (2001). Bogotá. Colombia. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de educación matemática.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.

- Espinosa, A. J., & Bohórquez, L. M. P. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, (16).
- Flores, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *El Cálculo y su Enseñanza*, 5, 1-26.
- Gavilán, J. M. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática*.
- Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15(20), 137-153.
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 1(1), 5-21.
- Jiménez, A., & Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, 16, 101-116.
- Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics.
- Londoño, N., Kakes, A., & Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas.

- López, R. (2005). Deficiencias en matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de Ingeniería de una universidad privada (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
- Martínez, M. (2005). Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para un curso de cálculo diferencial a nivel superior. Unidad DF Departamento de Matemática Educativa, 177.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Editorial Magisterio. Primera edición. Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2015). Matemáticas. Derechos Básicos de Aprendizaje, Volumen 1. Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2016). Matemáticas. Derechos Básicos de Aprendizaje, Volumen 2. Bogotá.
- MONZOY, J. A. (2002). Una situación real como registro de representación en un entorno computacional. Un sustento cognitivo para promover la aprehensión conceptual. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México.
- Morales-Maure, L., García-Marimón, O., Torres-Rodríguez, A., & Lebrija-Trejos, A. (2018). Habilidades cognitivas a través de la estrategia de aprendizaje cooperativo y perfeccionamiento epistemológico en Matemática de estudiantes de primer año de universidad. *Formación universitaria*, 11(2), 45-56.

- Moreno, C. A. C. V. S., & Pluvinae, G. F. (2005). Una experiencia de enseñanza del objeto función. In *Annales de didactique et sciences cognitives* (Vol. 10, pp. 177-208).
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14(3), 235-250.
- Oviedo, L., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, 42(3), 237-268.
- Rico Romero, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. pna.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.
- Sánchez Pacheco, W. (2019). Estrategias didácticas para el fortalecimiento del pensamiento matemático variacional en los estudiantes del grado 11° de la institución educativa Colegio Teodoro Gutiérrez Calderón del municipio de San Cayetano.
- Schoenfeld, A. H. (1992): «Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics», en. En GROUWS (ed.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp.334-370. New York, : Macmillan, pp.334-370.

Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. MAA notes, 19-28.

Solano Camargo, S. P. (2017). Las concepciones del concepto de derivada: dos estudios de caso sobre un matemático y un licenciado en matemáticas.